Démonstration très élémentaire du Théorème de Bernoulli.

Soit $$(p+q)^{\mu} = \sum_{n=0}^{\mu} \frac{\mu!}{n!\,(\mu-n)!}\, p^{\mu-n} q^{n}$$

$$p+q=1$$

Désignons le plus grand terme du développement par T_0

$$T_0 = \frac{\mu!}{n!\,(\mu-n)!}\, p^{\mu-n} q^{n}\ ;$$

par $T_1, T_2, \ldots$ les termes suivants.

Comme $\underline{n}$ sera le plus grand entier contenu dans $\mu q - p$; on pourra poser (ε étant une fraction)

$$n = \mu q - p + \varepsilon \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu - n = (\mu+1)p - \varepsilon \\ n+1 = (\mu+1)q + \varepsilon \end{array} \right.$$

Il vient alors

$$T_1 = T_0 \frac{\mu-n}{n+1}\frac{q}{p} = T_0 \frac{(\mu+1)p-\varepsilon}{(\mu+1)q+\varepsilon}\frac{q}{p} = T_0 \frac{1-\dfrac{\varepsilon}{(\mu+1)p}}{1+\dfrac{\varepsilon}{(\mu+1)q}} < \frac{T_0}{1+\dfrac{\varepsilon}{(\mu+1)pq}}$$

$$T_2 = T_1 \frac{\mu-n-1}{n+1+1}\frac{q}{p} = T_1 \frac{1-\dfrac{\varepsilon+1}{(\mu+1)p}}{1+\dfrac{\varepsilon+1}{(\mu+1)q}} < \frac{T_1}{1+\dfrac{\varepsilon+1}{(\mu+1)pq}}$$

. . . .

$$T_{\lambda+1} = T_{\lambda} \frac{\mu-n-\lambda}{n+1+\lambda}\frac{q}{p} = T_{\lambda} \frac{1-\dfrac{\varepsilon+\lambda}{(\mu+1)p}}{1+\dfrac{\varepsilon+\lambda}{(\mu+1)q}} < \frac{T_{\lambda}}{1+\dfrac{\varepsilon+\lambda}{(\mu+1)pq}}$$

En multipliant ces inégalités membre à membre ; il vient, *a fortiori* (en négligeant ε),

$$\frac{T_{\lambda+1}}{T_0} < \prod_{x=1}^{\lambda} \frac{1}{1+\frac{x}{(\mu+1)pq}}$$

et, ce qui est la même chose

$$\frac{T_{\lambda+1}}{T_0} < \prod_{x=1}^{\lambda} \frac{1}{1+\frac{\lambda+1-x}{(\mu+1)pq}}$$

Multiplions ces deux inégalités membre à membre facteur par facteur et extrayons la racine carrée. Comme on a

$$\left(1+\frac{x}{(\mu+1)pq}\right)\left(1+\frac{\lambda+1-x}{(\mu+1)pq}\right) > 1+\frac{\lambda+1}{(\mu+1)pq},$$

il vient *a fortiori* (T_0 étant < 1)

$$T_{\lambda+1} < T_0\left(1+\frac{\lambda+1}{(\mu+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} < \left(1+\frac{\lambda}{(\mu+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Cette inégalité est symétrique en p et q. On en conclut que tout terme à une distance supérieure à λ du terme principal est moindre que

$$\left(1+\frac{\lambda}{(\mu+1)pq}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}$$

Donc la somme de tous ces termes (dont le nombre est $< \mu$) est moindre que

$$\frac{\mu}{\left(1+\frac{\lambda}{(\mu+1)pq}\right)^{\frac{\lambda}{2}}}$$

Soit l un nombre fixe aussi petit qu'on veut. Prenons λ supérieur à $l(\mu+1)$ la somme précédente sera plus petite que

$$\frac{\mu}{\left[\left(1+\frac{l}{pq}\right)^{\frac{l}{2}}\right]^{\mu+1}}$$

quand μ croît indéfiniment le dénominateur croît comme une exponentielle et est infiniment grand par rapport à μ, le quotient tend vers 0. La somme de tous les termes de $(p+q)^{\mu}$ étant un, on en conclut que la somme des termes à une distance moindre que $l(\mu+1)$ du terme principal a pour limite l'unité, quand μ tend vers l'infini, quelque petit que soit le nombre fixe l : c'est le théorème de Jacques Bernoulli.

C. de la Vallée Poussin

Cher Monsieur de Montessus,

J'ai bien reçu votre nouveau et intéressant volume sur Statistiques et Probabilités et je vous en remercie.

En même temps mes meilleurs vœux de nouvel an pour vous et les vôtres.

Votre bien dévoué

C de la Vallée Poussin

Louvain 9 janvier

Louvain le 25 Août 1905

Mon cher collègue,

J'ai examiné la thèse que vous avez bien voulu m'envoyer avec un grand intérêt. Les résultats m'en paraissent si importants que je désire vivement en comprendre les démonstrations.

La démonstration du N° 37 est essentielle et je n'arrive pas à la saisir. Vous dites au bas de la page 53 que l'équation différentielle (3) admet une solution (4) qui est donc holomorphe autour de $x = 0$.

J'avoue ne point <u>savoir</u>
cela. Je revois mes auteurs,
par exemple les cours de Jordan
et de Picard aux tomes III et
j'y trouve plutôt le contraire.

Je vous serais reconnaissant de
me dire si j'ai la berlue ou
bien s'il y a des fautes d'impres-
sion qui dénaturent le texte.

Votre bien dévoué

C de la Vallée Poussin

37 rue Léopold

1-II-07

Mon cher confrère,

Mon article sur le théorème de Bernoulli va être imprimé par la ~~revue des~~ Société scientifique de Bruxelles. Je ne pourrai donc vous le communiquer qu'en épreuves d'ici à une quinzaine de jours, ce qui sera fait. Veuillez agréer, mon cher collègue, l'expression de mes sentiments les plus dévoués

Ch J de la Vallée Poussin
38 R. Léopold Louvain

4

CARTE POSTALE

POSTKAART

(Côté réservé à l'adresse. — *Zijde voor het adres.*)

(*)

Vicomte de Montessus
8 place de Genevière
Lille (Nord)
France

Nom et adresse de l'expéditeur. } M ………
Naam en adres van den afzender. } * ………

* Indication facultative. — *Onverplichte opgave.*

(*) Cette inscription peut être biffée. — *Dat opschrift mag doorgehaald worden.*

Louvain le 16-2-07

1

Mon cher collègue,

On trouve dans le tome II du cours d'analyse de Jordan nos 183 et suivants une démonstration rigoureuse du théorème asymptotique de Bernoulli. Elle prouve même que la probabilité tend vers l'unité quand le rapport de l'écart relatif à la racine carrée du nombre d'épreuves tend vers l'infini.

M. Goedseels a donné dans les annales de la société scientifique t XVII p. 8 une démonstration très simple du théorème de Bernoulli.

A mon avis, ces démonstrations ont le tort de s'appuyer sur la formule de Stirling et de faire appel à des moyens analytiques inutiles pour le résultat que l'on obtient.

Je me permets de vous communiquer

(en vous autorisant à en faire tout usage que vous jugerez utile) une démonstration du théorème asymptotique de Bernoulli que je trouve bien plus simple et qui ne suppose aucune connaissance préalable. Vous trouverez ma démonstration sur la feuille jointe à cette lettre.

Enfin M. Mansion est en possession d'un travail manuscrit que je lui ai remis dans la dernière séance de la Société et où j'établis (par des calculs élémentaires mais un peu longs et sans formule de Stirling) le théorème suivant:

Soit P la somme de tous les termes du developpement de $(p+q)^\mu$ où l'exposant de p est compris entre les limites

$$(\mu+1)(p-l)-\frac{1}{2}$$

$$(\mu+1)(p+l)-\frac{1}{2}$$

on aura

$$P > \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau h} e^{-x^2}dx \qquad P < \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\tau'}{h'}} e^{-x^2}dx$$

où l'on a posé

$$\varepsilon = l - \frac{3}{2(\mu+1)pq} \qquad \varepsilon' = l + \frac{3}{2(\mu+1)pq}$$

$$\tau = \varepsilon\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}} \qquad \tau' = \varepsilon'\sqrt{\frac{\mu+1}{2pq}}$$

$$h = \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2pq}} \qquad h' = \sqrt{1-\frac{\varepsilon'}{2pq}}$$

4

Je ne sais si je saisis bien la question que vous me posez dans votre lettre.

Mais je pense que les démonstrations de ~~MM~~ Jordan, Goedseels et la démonstration manuscrite que je vous adresse sont parfaites au point de vue asymptotique, ce qui justifie la phrase que vous signalez dans mon Mémoire en épreuves.

En ce qui concerne le calcul réel de la probabilité dans un cas déterminé, je crois que le théorème énoncé dans cette lettre est encore le plus satisfaisant.

Veuillez agréer, cher collègue, l'assurance de mes meilleurs sentiments

Ch. de la Vallée Poussin

2 Av. Dorian

Paris 25 juillet

Cher Monsieur,

Je suis toujours à Paris dans l'attente des événements. Il est assez vraisemblable que je pourrai revoir ma famille en Hollande au mois de Septembre. Ce n'est cependant encore qu'une probabilité.

Monsieur Hadamard pourrait certainement rendre des services dans la questions qui vous intéresse, mais il y a un mois que M. Hadamard a quitté Paris. Vous savez sans doute qu'il a perdu son second fils et il est allé se reposer au bord de la mer. Il est possible que je ne le revoie plus avant mon départ.

Paris 25 juillet

à M. Dorion

Je conserve toujours votre carte pour en parler à l'occasion. Je ne vous cache pas cependant que je compte peu sur la possibilité de faire un cours à l'étranger en ce moment, car en ce moment il n'y a ni échange de professeurs ni invitation. Ne vous semble-t-il pas d'ailleurs que ce n'est pas le moment pour vous de quitter la France où vous trouveriez facilement à utiliser vos connaissances théoriques au profit de la défense nationale.

J'espère que votre famille et
vous êtes toujours en bonne santé
et que madame de Montozus
est complètement rétablie —
Veuillez lui présenter mes homma-
ges respectueux et croire à tous
les meilleurs sentiments de votre
bien devoué

Celle la Valle Coursy

Paris 17 août
2 R. Dorian

Cher Monsieur,

Vous êtes vraiment trop aimable de songer à m'inviter et je suis très touché de votre amabilité. J'accepterais votre invitation avec grand plaisir si je n'avais en ce moment des raisons sérieuses de rester à Paris.

D'un jour à l'autre je puis apprendre que ma famille est en Hollande. J'aurais alors à prendre immédiatement toute une série de dispositions pour la rejoindre et mon absence de Paris serait cause de plusieurs jours de retard.

2

En tous cas, je vous suis bien reconnaissant et je vous remercie de votre intérêt et je vous prie aussi de vouloir présenter nos remerciements et mes hommages respectueux à Madame de Martenus

Votre bien dévoué

C. de la Vallée Poussin

PROBABILITES ET STATISTIQUES, par R. DE MONTESSUS DE BALLORE, Docteur ès Sciences, Lauréat de l'Institut. Préface de M. ALLIAUME, professeur à l'université de Louvain ; -- Un vol. in-8vo de VIII+211 pages -- Paris, Hermann, 1931 -- 60 fr fr.

M. de Montessus de Ballore expose dans cet ouvrage, sous une forme didactique, les recherches qu'il poursuit depuis sept ans sur les lois de la statistique. Elles ont été publiées dans diverses Revues et, de préférence, dans les Annales de la Société scientifique de Bruxelles.

Dans l'orientation donnée à ses recherches, M. de Montessus n'a pas eu de devancier. C'est assez dire combien ses idées sont originales et personnelles, par conséquent intéressantes. Peut-être est-il encore trop tôt pour porter sur elles un jugement définitif.

En gros, voici en quoi consiste le problème de la statistique, tel l'auteur le pose.

A la suite d'expériences répétées, on a fait correspondre à une succession de nombres x_1, x_2, x_3, ..., x_n des mesures correspondantes y_1, y_2, ..., y_n. On constate que y passe par un maximum pour une certaine valeur de x, mais décroît de part et d'autre de celle-ci jusqu'à atteindre zéro pour les valeurs extrêmes. D'une manière plus précise, si l'on fait le graphique de cette correspondance, en portant les valeurs de x en abscisses et celles de y en ordonnées, et en joignant les points obtenus par un trait continu, on trace une ligne de forme connue sous le nom de courbe en cloche. Le problème est de bien trouver une formule analytique générale convenant à cette courbe et capable de s'adapter aux divers cas particuliers que l'on rencontre en pratique.

Si l'on pouvait introduire dans la formule autant de paramètres indéterminés que l'on veut, ce problème serait celui de l'interpolation et il pourrait être résolu exactement. Mais ce n'est pas la question. Il s'agit de définir une courbe dépendant du plus petit nombre possible de paramètres et susceptible de se rapprocher avec une exactitude suffisante des courbes fournies par l'expérience. La formule qui représente cette famille de courbes peut être alors regardée comme l'expression d'une loi.

M. de Montessus propose la formule suivante :

$$y = N \frac{m!}{(mp - x - h)!\,(mq + x + h)!}\, p^{mp-x-h}\, q^{mq+x+h}$$

La valeur maximum de y correspond à x=0, car h est supposé petit, et les autres valeurs de y correspondent aux valeurs +1, +2, +3, ... -1, -2, -3, ... de x etc. Cette formule dépend donc de cinq paramètres N, m, p, q, (ou plutôt de quatre paramètres, car on prend p et q tels que p+q =1). Ce sont eux qu'il convient de déterminer de manière à adapter la formule aux résultats de l'observation.

Cette formule s'inspire d'une formule classique du calcul des probabilités concernant les épreuves répétées, mais nous n'apercevons aucun lien réel entre cette question et le problème quei nous occupe. Aussi bien le choix de cette formule paraît purement empirique et ne se justifie que par les confirmations que l'expérience lui donne. Avrai dire, la formule ne convient pas toujours, mais elle convient souvent et l'auteur dit alors (peut-être un peu arbitraiement) que la statistique obéit à une loi de probabilité simple). L'auteur nous fait connaître dans son livre une trentaine de statistiques empruntées aux domaines les plus divers de l'epérience et qui obéissent à une telle loi de probabilité simple . Quelques-une d'entre elles constituent , pour la méthode de M. de Montessus, des réussites vraiment impressionnantes.

Cependant nous éprouvons parfois une certaine défiance. La formule ci-dessus n'a davantage que si le nombre m n'est pas très grand. En effet, $p+q$ doit être très voisin de 1, sinon égal à 1, et si le quotient

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

est très petit, l'approximation des factorielles permet de réduire la formule de M. de Montessus à la forme exponentielle

$$y = \frac{N}{\sqrt{2mpq}}\, e^{-\frac{x^2}{2mpq}}$$

sauf une erreur relative négligeable tant que y n'est pas lui-même très petit. Dans ce cas, la courbe en cloche est sensiblement symétrique et nous pensons que la forme exponentielle , qui ne dépend que du seul paramètre mpq , serait pratiquement tout aussi bonne que la première.Cette remarque s'appliquerait sans doute aux statistiques E et G des pages 137 et 140 du livredans lesquelles m surpasse respectivement 242 et 392, et alors la détermination séparée de m,p,q paraît tenir à un concours bien fortuit. Mais généralement m est inférieur à 30 et la formule de M. de Montessus est compatible avec une dissymétrie que la loi exponentielle exclut. Remarquons encore que, dans les cas de dissymétrie ~~xxxxxxxx~~ surtout, le nombre des données d'observation auxquelles on applique la méthode ~~xxxxxx~~ est toujours petit et il reste doteux que la méthode réussirait encore aussi bien avec des données nombreuses.

Le problème de déterminer les paramètres m,p,q de manière à obtenir le meilleur accord est assurément un problème difficile. Pour surmonter ces difficultés, M. de Montessus a imaginé des méthodes de calcul très élégantes, et il a introduit des principes nouveaux , analogues à ceux de la théorie des erreurs, grâce auxquels on peut estimer le degré de confiance que méritent les résultats obtenus. On y reconnaîtra volontiers l'oeuvre d'un véritable mathématicien.

Il y a dans les conclusions de M. de Montessus quelque chose d'un peu troublant. Les valeurs de m,p,q , pour une même statistique, dépendent du choix des unités et du groupement des observations. Cela paraît enlever toute valeur objective à la détermination des nombres p et q et couper toute liaison avec le calcul des probabilités,mais nous sommes trop incompétent dans la matière pour en tirer argument contre la théorie .

L'oeuvre de M. de Montessus est le fruit de longues méditations et d'une grande somme de travail; l'expérience lui a apporté de nombreuses confirmations; c'est assez pour que tous ceux qui s'occupent de statistiques aient le devoir de la connaître.

C. DE LA VALLEE POUSSIN
(Membre de l'Académie Royale de Belgique,
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris)

(Extrait de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES , LOUVAIN-PARIS, 20 janvier 1931).

Louvain 17-11-31

1

Cher monsieur,

Alliaume sur qui vous demandez quelques précisions est mort d'une maladie infectieuse, sorte de typhus mal caractérisé. Son organisme fatigué n'a pu résister à l'intoxication et il a succombé à l'épuisement. Il avait dû ~~tr~~ contracter le germe de cette maladie à Laroche sur l'Ourthe en Ardennes où il passait généralement ses vacances. C'est une perte considérable pour l'Université et la Société scientifique de Bruxelles.

C'était Alliaume qui représentait la Faculté des sciences de l'Université à la Fondation Universitaire. Je ne sais pas encore qui le remplacera. Aucune sollicitation ne peut être faite en attendant.

Il est certain d'avance que la Fondation rejettera toute demande d'échange avec l'Université de Louvain qui ne serait pas faite par l'Université elle-même et cela officiellement. Il est clair que le contraire serait parfaitement impertinent de sa part.

3

Une telle demande devrait être formulée par l'Université. Alors il y a cent à parier contre un que, cet échange ayant une organisation parfaitement réglée entre les deux pays, France et Belgique, la Fondation répondra qu'elle n'a aucune raison de s'en mêler, l'Université devant s'adresser au gouvernement.

Je pense d'autre part que la Faculté a fait des propositions pour une période de temps assez longue et qu'il n'y a rien à faire pour le moment.

4

Veuillez agréer, cher monsieur de Montesson l'expression de nos meilleurs sentiments

C. de la Vallée Poussin

Mon cher collègue,

Merci tout d'abord de vos aimables souhaits que je vous exprime de tout cœur.

Je reconnais bien volontiers que mon objection ne s'applique pas à la statistique que vous me soumettez.

Cela tient à la grande dissymétrie de cette statistique, ce qui donne pour p une valeur très petite 0,028...

de sorte que

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

n'est pas assez petit pour que ma remarque s'applique.

Mais cela n'empêche que ma remarque reste vraie en principe :

Si $\frac{1}{m}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$

est très petit, la courbe, qu'elle soit binomiale ou exponentielle, sera sensiblement symétrique dans sa partie médiane et la dissymétrie ne s'accusera qu'aux extrémités.

Ce sont donc les valeurs extrêmes qui serviront à déterminer <u>p et q</u> dans ce cas, et ce sont celles qui ont le moins de valeur objective, ou qui sont les plus <u>fortuites</u>.

3

Telle est le sens de mon observation.

Je vous avoue d'ailleurs que cette question ne me passionne pas.

Votre bien dévoué

Carlos Allendouig

Louvain 3 janvier 32

Louvain le 4 Jan. 32

Mon cher collègue

J'ai bien reçu les deux Notes que vous m'avez adressées pour la Société Scientifique.

La première qui m'est parvenue en temps utile, a été présentée à la Section et son impression a été décidée pour le prochain Bulletin.

La seconde n'est arrivée que plusieurs jours après la séance et la Société prévenue de son prochain envoi a désigné M. Lemaître pour l'examiner. Elle lui a donc été remise.

Veuillez agréer, cher collègue, l'expression de nos meilleurs sentiments

C de la Vallée Poussin