N° D'ORDRE

187.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. SENTIS,

Ingénieur des Mines.

THÈSE DE MÉCANIQUE. — DE L'EMPLOI DU PRINCIPE GÉNÉRAL DU TRAVAIL DES FORCES DANS LA MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

THÈSE DE GÉOMÉTRIE. — DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE PLUSIEURS THÉORÈMES SUR LA THÉORIE DES SURFACES.

Soutenues le 2 Juillet 1855 devant la Commission d'examen.

MM. **CAUCHY**, *Président.*

DUHAMEL, } *Examinateurs.*
LAMÉ, }

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Rue du Jardinet, 12.

1855.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN .... MILNE EDWARDS, Professeur.. Zoologie, Anatomie, Physiologie.

PROFESSEURS HONORAIRES.
Le baron THENARD.
BIOT.
PONCELET.

PROFESSEURS ....

CONSTANT PREVOST	Géologie.
DUMAS	Chimie.
DESPRETZ	Physique.
STURM	Mécanique.
DELAFOSSE	Minéralogie.
BALARD	Chimie.
LEFÉBURE DE FOURCY ...	Calcul différentiel et intégral.
CHASLES	Géométrie supérieure.
LE VERRIER	Astronomie physique.
DUHAMEL	Algèbre supérieure.
CAUCHY	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
DELAUNAY	Mécanique physique.
PAYER	Botanique.
C. BERNARD	Physiologie générale.
P. DESAINS	Physique.

AGRÉGÉS ....

MASSON	Sciences physiques.
PELIGOT	Sciences physiques.
BERTRAND	Sciences mathématiques
J. VIEILLE	Sciences mathématiques
DUCHARTRE	Sciences naturelles.

SECRÉTAIRE .... E. PREZ-REYNIER.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

DE L'EMPLOI DU PRINCIPE GÉNÉRAL DU TRAVAIL DES FORCES DANS LA MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

I.

Notions préliminaires.

1. Les machines, telles qu'on les rencontre dans les arts, se composent ordinairement d'une suite de pièces solides liées entre elles, de telle sorte que l'effort et le mouvement imprimés à la première se transmettent de proche en proche jusqu'à la dernière. Nous admettrons, ce qui est le cas le plus habituel, que ces appareils ne peuvent prendre qu'un mouvement ou le mouvement contraire, et que la solidarité des pièces est en général telle, que la vitesse se communique par des lois purement géométriques, et de manière que celle des différents points peut s'exprimer en fonction de la vitesse de l'un quelconque d'entre eux et de la variable qui fixe la position de celui-ci à chaque instant.

Les forces que nous avons à considérer sont de deux espèces. Ce sont d'abord les forces que l'on appelle *extérieures*, c'est-à-dire celles qui sont capables de produire le mouvement de la machine, comme la gravité, l'action d'un moteur animé, du vent, etc. Leurs directions sont faciles à reconnaître, et leurs intensités peuvent, comme on sait, être évaluées en nombres, au moyen de l'unité de poids. On doit d'ailleurs compter parmi elles les poids des différentes pièces de l'appareil, qui sont des forces verticales appliquées au centre de gravité de chaque pièce. En second lieu viennent les forces *intérieures*, ou les actions mutuelles des molécules du système mises en jeu par la déformation plus ou moins grande des corps qui constituent l'appareil sous l'effet des premières forces.

S'il fallait évaluer et faire intervenir directement toutes ces actions et réactions moléculaires qui naissent de la compressibilité et de l'extensibilité des corps, même les plus solides, on tomberait dans des difficultés qui seraient souvent insurmontables dans l'état actuel de nos connaissances mécaniques; mais cela n'est pas indispensable. On donne ordinairement aux pièces un degré de solidité et de rigidité telles, que, sous les efforts qu'elles ont à supporter, elles conservent une forme sensiblement invariable. Le rapprochement ou l'écartement des molécules étant à peu près nul, il en résulte que les travaux des forces intérieures de chaque pièce, dus à un déplacement virtuel ou effectif du système, se détruisent deux à deux, et que ces travaux disparaissent de l'équation du travail. Mais les travaux dus aux forces de même espèce qui se manifestent dans les parties des pièces glissant ou tendant à glisser les unes sur les autres dans leurs mouvements relatifs ne peuvent pas être négligés. L'observation a démontré heureusement que les effets de ces actions moléculaires pouvaient être considérés comme produits par des forces ayant leurs actions et leurs intensités propres, et pouvant être évaluées en grammes comme les autres. Ce résultat d'expérience s'applique d'ailleurs, non-seulement aux actions mises en jeu dans les mouvements tangentiels des corps qui se pressent et tendent à se pénétrer, mais encore à celles qui résultent de leurs flexions incessamment renouvelées, de la présence d'un milieu dans lequel l'appareil se meut, de telle sorte qu'à la place de toutes ces actions de molécules, si difficiles à déterminer, on peut substituer des forces dont on arrive à apprécier la valeur, avec un degré d'approximation suffisant, soit à l'aide de l'expérience, soit à l'aide du calcul et du raisonnement, et qu'on peut regarder le mouvement de la machine comme se produisant sous leur influence combinée avec celle des forces que nous considérons comme causes premières des mouvements. On voit ainsi comment il est possible de ne plus faire intervenir directement les actions moléculaires des corps qui constituent la machine, et combien la question en est par suite simplifiée.

2. En examinant les effets des deux espèces de forces que nous venons d'indiquer, on doit remarquer que les premières peuvent agir et agissent ordinairement de manière à imprimer à la machine, les unes un certain mouvement, les autres un mouvement contraire; que les secondes, qui se manifestent dès qu'on produit ou qu'on tend à produire le mouvement, s'opposent toujours au mouvement de l'appareil. On peut donc, en définitive, distinguer dans les machines :

1°. Les forces qui sont capables de produire le mouvement pour lequel l'appareil a été construit; leurs directions font des angles aigus avec celles des déplacements effectifs de leurs points d'application : ce sont les *puissances* ou les *forces motrices*.

2°. Les forces qui tendent à produire ou produisent le mouvement contraire; leurs directions font des angles obtus avec celles des déplacements effectifs de leurs points d'application, et leurs travaux sont négatifs. Ce sont des *résistances*, qu'on distingue en *résistances actives* et *résistances passives*, suivant qu'elles appartiennent à la première ou à la seconde des espèces précitées.

De l'équilibre des Machines.

3. Cela posé, considérons spécialement les machines à l'état d'équilibre.

Le principe du travail virtuel est ici immédiatement applicable, et la condition de l'équilibre s'obtient en écrivant que la somme des travaux virtuels de toutes les forces est égale à zéro. D'ailleurs, comme l'appareil ne peut prendre qu'un mouvement déterminé ou le mouvement contraire, on doit choisir pour déplacements virtuels des points d'application des forces ceux qui auraient lieu effectivement dans le premier instant, si l'équilibre venait à être rompu; enfin on peut distinguer le travail positif ou moteur T_m des puissances du travail négatif ou résistant T_r des résistances. La condition générale de l'équilibre des forces qui sollicitent la machine est donc

$$T_m = T_r.$$

Cette relation montre que, dans le cas simple d'un appareil sollicité à une extrémité par une seule puissance destinée à équilibrer une résistance agissant à l'autre extrémité, et en ne tenant compte ni du poids des pièces ni des résistances passives qui tendent à s'opposer au mouvement et concourent par suite à l'équilibre, il suffira, pour former l'équation générale du travail, d'écrire que le travail virtuel de la puissance est égal au travail virtuel de la résistance. D'ailleurs, comme les liaisons géométriques qui existent entre les pièces de l'appareil permettront de calculer le rapport existant entre les déplacements virtuels des points d'application des deux forces, on voit que la relation obtenue donnera le rapport qui doit exister entre ces forces pour qu'elles se fassent équilibre par l'intermédiaire de la machine.

C'est ainsi qu'on peut obtenir aisément les conditions d'équilibre du levier, de la balance, du coin, du genou et, en général, de toutes les machines simples, auxquelles on parvient, dans les traités de statique, par d'autres considérations.

On peut d'ailleurs déduire de là un moyen expérimental propre à déterminer le rapport de la puissance et de la résistance dans les conditions que nous venons d'admettre. Il suffit, en effet, d'apercevoir le point d'application de la puissance et celui de la résistance, le reste pouvant même être entièrement caché aux yeux; puis d'imprimer un très-petit mouvement à l'appareil; de mesurer exactement les chemins parcourus par les points d'application des deux forces, et de projeter ces chemins sur les directions de celles-ci. La puissance et la résistance, dans le cas de l'équilibre, seront en raison inverse des projections des chemins parcourus.

4. Quand on veut établir la relation de l'équilibre en tenant compte des résistances passives et du poids des pièces, il est alors indispensable de connaître entièrement la constitution de la machine. Voici comment on doit alors procéder : On suppose dans l'appareil un mouvement infiniment petit, compatible avec sa nature; puis, considérant le premier organe, on détermine les travaux virtuels positifs ou négatifs de toutes les forces qui le sollicitent, en comprenant parmi celles-ci l'effort inconnu qui sollicite l'organe suivant, et l'on écrit l'équation du travail virtuel qui le concerne. On détermine ensuite les déplacements virtuels que renferme cette équation en fonction de l'un d'entre eux et des parties connues de l'appareil. Par la substitution de ces valeurs dans l'équation posée, on trouve un déplacement virtuel, facteur commun de tous les termes, et qui disparaît. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation pour en tirer la valeur de l'effort qui est réellement transmis au deuxième élément par l'intermédiaire du premier, effort qui est la puissance sollicitant ce deuxième élément. En opérant de même pour les organes successifs on arrive à une dernière équation entre la puissance et la résistance qui fait connaître le rapport de ces deux forces dans le cas d'équilibre.

Ce qui vient d'être dit suffit pour montrer comment, avec le principe du travail virtuel, on peut résoudre tous les problèmes statiques que présentent les machines, et pour faire comprendre que l'application de ce principe ne donne lieu qu'à une série de problèmes de géométrie plus ou moins faciles à résoudre.

Des Machines à l'état de mouvement.

5. On n'aurait qu'une idée très-imparfaite de ce qu'on doit attendre des machines, si l'on ne les étudiait qu'au point de vue de l'équilibre des forces qui les sollicitent. En effet, ces appareils ont ordinairement pour but, non pas de multiplier simplement l'effort du moteur qui agit sur la première pièce, mais surtout de transmettre le travail que ce moteur est capable de

produire. Or le principe du travail effectif permet de reconnaître comment s'opère cette transmission et à quelles lois elle est soumise. Son application au mouvement des machines, en général, est donc d'un haut intérêt.

Dans toute machine animée d'un mouvement uniforme, comme est, par exemple, un treuil au moyen duquel un homme élève régulièrement un poids, il doit y avoir constamment équilibre entre les forces qui lui sont appliquées; puisque, sans cela, les vitesses des organes de l'appareil ne resteraient pas constantes. L'égalité entre le travail moteur et le travail résistant que nous avons trouvée dans le cas de l'équilibre doit donc encore subsister. D'ailleurs, comme l'appareil est supposé en mouvement, on peut prendre pour déplacements virtuels les déplacements qui ont réellement lieu; de sorte que l'équation du travail effectif ou des forces vives doit être applicable et donner le même résultat. On peut remarquer, en effet, qu'en distinguant, comme précédemment, les forces motrices et les résistances qui agissent sur la machine, et aussi les travaux moteurs et résistants qui leur correspondent, on peut écrire l'équation des forces vives sous la forme

$$\mathrm{T}_m - \mathrm{T}_r = \frac{1}{2}(\Sigma m v^2 - \Sigma m v_0^2);$$

ce qui montre que la vitesse des pièces ne changeant pas, et, par suite, la force vive du système restant constante, il y a sans cesse égalité entre le travail moteur et le travail résistant.

6. Ce résultat donne une première idée nette de ce qu'on doit attendre des machines en mouvement. Il montre qu'il ne suffit pas de tenir compte des intensités des forces appliquées aux machines; mais qu'il faut encore avoir égard aux déplacements ou aux vitesses relatives des points d'application des forces, et qu'une machine n'est, après tout, qu'un appareil servant à employer un travail moteur donné pour surmonter un travail résistant qui lui est constamment égal. Observons d'ailleurs que parmi les résistances, les unes, que l'on fait naître exprès et qui sont le but même de l'emploi de la machine, sont des résistances *utiles*, tandis que les autres, étrangères au travail qu'on veut effectuer, sont essentiellement *nuisibles*. Or ces dernières ne peuvent jamais être évitées complétement; car on ne peut se soustraire à l'influence du frottement des pièces, du milieu dans lequel celles-ci sont mises en mouvement, etc. En distinguant les travaux correspondants à ces deux espèces de résistances, la relation précédente montre que le travail des résistances utiles surmontées par la machine est moindre que le travail fourni à celle-ci par les forces motrices, de toute la quantité nécessaire pour vaincre le travail des résistances nuisibles. En appliquant ces résultats au

cas des machines simples sollicitées seulement par une puissance et par une résistance utile, on voit que le théorème bien connu que *ce que l'on gagne en force on le perd en vitesse, et réciproquement*, n'est vrai qu'en faisant abstraction des résistances nuisibles, ce qui est un cas idéal. La vérité, sous le point de vue de l'effet utile, est que l'on perd plus en force qu'on ne gagne en vitesse, et qu'on perd plus en vitesse qu'on ne gagne en force. Il n'est pas possible à fortiori de construire un appareil capable de surmonter un travail résistant plus considérable que le travail moteur qui lui est fourni, ce qui est au fond ce qu'espèrent trouver les personnes appliquées à la recherche du *mouvement perpétuel*.

7. Lorsqu'une machine ne se meut pas de manière que toutes ses pièces aient une vitesse constante (ce qui ne peut avoir lieu que dans des circonstances très-particulières), l'influence de l'inertie de ces pièces doit se faire sentir; car le terme $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2$ n'est plus nul à chaque instant. Nous allons voir quelles sont les conséquences très-remarquables qu'on peut déduire, dans ce cas, de l'équation générale des forces vives.

Prenons la machine à l'état de repos, et laissons agir sur elle les forces motrices en même temps que les résistances. L'équation montre que l'appareil ne se mettra en mouvement qu'autant que le travail des premières forces surpassera d'abord le travail des secondes. Remarquons, comme précédemment, qu'il s'agit de travaux et non pas simplement d'efforts exercés. Ainsi les puissances pourraient être très-considérables comparativement aux résistances, et cependant le mouvement ne se produirait pas, parce que les déplacements respectifs des points d'application des forces seraient de nature à détruire tout l'avantage des puissances. L'équation fait voir, en outre, que si l'on considère une période de temps quelconque écoulé depuis la mise en mouvement de la machine jusqu'au moment où la vitesse d'une pièce est devenue égale à v, le travail moteur a dû surpasser le travail résistant d'une quantité égale à $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, c'est-à-dire à la moitié de ce qu'on est convenu d'appeler la force vive de la machine, quantité qui est elle-même la mesure du travail résistant occasionné par l'inertie du système. Il en est de même, si nous considérons les choses depuis le moment où la vitesse de la pièce est v_0 jusqu'à celui où elle s'est accrue jusqu'à v. L'excès nécessaire du travail moteur sur le travail résistant a encore pour valeur la moitié de l'accroissement de la force vive du système pendant l'intervalle considéré. Ces conséquences de l'équation subsistent d'ailleurs pour un temps fini ou infiniment petit. Ainsi, dans une machine en mouvement, la vitesse croît tant que le travail des puissances surpasse celui des résistances, et à chaque instant l'excès du premier travail sur le second est employé à vaincre l'inertie de la matière qui compose la machine. Quand nous disons que la vitesse s'accroît, il faut comprendre que cette expression s'applique à l'ensemble de la machine, et non pas à chacune des pièces en particulier; car il peut arriver et il arrive ordinairement qu'il existe des pièces à mouvement alternatif dont les vitesses deviennent périodiquement nulles. Mais en même temps les vitesses des autres parties compensent ces diminutions par leur accroissement, et de telle sorte qu'en définitive la force vive du système augmente et que la moitié de son accroissement est équivalente à l'excès du travail moteur.

Si, dans l'équation des forces vives, on suppose $v = v_0$, on a $T_m = T_r$. Ainsi, en considérant un intervalle de temps au bout duquel la vitesse est redevenue ce qu'elle était au commencement, le travail moteur développé dans cet intervalle a été égal au travail résistant. Ce cas se présente fréquemment dans les machines qui sont habituellement assujetties à exécuter des périodes de mouvement qu'on nomme *tours, révolutions*, et au bout desquelles la position et la vitesse des différents points redeviennent les mêmes qu'auparavant.

Enfin, si la vitesse de la machine ou sa force vive diminuent, cela tient à ce que le travail des résistances l'emporte sur le travail des puissances; la machine persévère alors dans son mouvement, bien que les conditions soient telles, qu'elle ne se mouvrait pas si elle était en repos : mais cela n'a lieu qu'autant qu'elle perd une portion de sa force vive précisément égale à celle que lui avait donnée un même excès du travail moteur sur le travail résistant. C'est ainsi qu'une machine peut continuer son mouvement même après la suppression des puissances, et ne s'arrête qu'après l'épuisement total de sa force vive, trouvant en elle-même, et comme y ayant été en quelque sorte emmagasiné sous forme de force vive, un excédant de travail moteur qu'elle dépense pour surmonter un égal travail résistant. Il convient de remarquer que la considération du temps n'est pas nécessaire à ces divers résultats. Il s'agit en effet d'efforts exercés et de chemins parcourus; et peu importe la durée pendant laquelle ces chemins ont été parcourus : cela ne change rien à la quantité du travail produit ou dépensé.

8. Les conséquences très-générales de l'équation des forces vives qui viennent d'être indiquées sont de nature à montrer les lois de la transmission du travail des forces dans les machines, et à éclairer sur le rôle que joue dans leur mouvement l'inertie des pièces: mais on peut encore, par

un examen plus complet des termes de l'équation, reconnaître les conditions les plus essentielles auxquelles doivent satisfaire les bonnes machines, du moins en ce qui est du ressort de la mécanique.

Prenons celles-ci telles qu'on les rencontre dans les arts, et admettons qu'un moteur, comme les animaux, le vent, les cours d'eau, la vapeur, etc., développe son action sur une première pièce, qu'on nomme ordinairement le *récepteur*; que le travail ainsi développé est transmis par les divers organes de l'appareil ou par les *communicateurs* jusqu'à la dernière pièce qui surmonte la résistance, ou jusqu'à l'*opérateur* ou l'outil.

Supposons d'ailleurs qu'il s'agisse seulement de machines dans lesquelles on se propose d'économiser le plus possible la force motrice.

Les seules forces dont nous ayons à tenir compte sont :

1°. La force du moteur qui est destinée à vaincre toutes les résistances. Représentons son travail par T_m.

2°. Les résistances nuisibles de toute espèce et qui sont généralement de la nature de celles que nous avons appelées *passives*, comme le frottement, la raideur des cordes, la résistance des milieux. Exprimons leur travail négatif par $-T_n$.

Il importe de remarquer ici que, outre les résistances précitées auxquelles s'applique le terme T_n, il en est d'autres dont nous n'avons pas encore parlé, qui se produisent parfois dans les machines et qui résultent du choc des pièces entre elles et contre les parties fixes de l'appareil ou des changements brusques des vitesses de ces pièces, provenant de causes diverses. On reconnaît à priori qu'on ne peut les négliger : car il n'est personne qui n'ait été frappé des effets considérables produits par les chocs dans les systèmes en mouvement. Or on démontre qu'en pareil cas les forces moléculaires développées au contact produisent toujours un travail résistant, et qu'on a la valeur de celui-ci, sans qu'il soit besoin de connaître les intensités, d'ailleurs variables, des actions mutuelles mises en jeu, non plus que les déplacements insensibles de leurs points d'application. C'est ce qui résulte d'un théorème dû à Carnot, qui établit que, dans les changements brusques de vitesse produits par les chocs de deux corps en mouvement dénués d'élasticité (et c'est ainsi qu'ils doivent être considérés dans les machines) ou par la suppression instantanée de certaines parties du système, il y a toujours perte de force vive, et que cette perte est égale, en supposant négligeables les frottements provenant du choc, à la force vive due aux vitesses perdues ou gagnées par les différents points des deux corps. Ces vitesses perdues ou gagnées étant très-comparables à celles possédées précédemment par les corps, on voit que la force vive correspondante n'est point à négliger. Comme elle est d'ailleurs la mesure du travail résistant naissant des actions moléculaires développées pendant le choc, on voit que l'influence des chocs se manifestera dans l'équation générale du travail effectif par l'introduction d'un terme essentiellement négatif, qui sera une force vive et par conséquent de la forme $\Sigma m u^2$.

3°. Les résistances utiles qui peuvent être des forces actives, comme dans l'élévation des poids, ou des résistances passives comme dans le transport de wagons sur un chemin de fer. Leur travail négatif, comme le précédent aura, pour expression $-\mathrm{T}_u$.

4°. Les poids des diverses pièces du système qu'on peut regarder comme agissant tantôt dans le sens du mouvement, tantôt dans le sens contraire; car s'il en était autrement on les rangerait parmi les puissances ou les résistances : ces forces donnent donc lieu à des travaux tantôt positifs, tantôt négatifs. m étant la masse d'une molécule matérielle quelconque, mg ou p son poids, et $\pm dh$ la hauteur verticale dont elle s'abaisse ou s'élève, on a $\pm p dh$ pour le travail élémentaire de la molécule m, dans l'élément de temps. Mais on doit observer que la somme de ces termes étendue à toutes les parties mobiles de la machine et à l'intervalle de temps auquel on applique l'équation des forces vives, équivaut à $\pm$ PH, P étant le poids total des pièces mobiles de la machine et H la hauteur dont s'est abaissé ou élevé, dans le temps considéré, leur centre de gravité général. C'est là, comme on sait, une conséquence de la théorie du centre des forces parallèles.

9. Cela posé, en distinguant dans l'équation des forces vives les termes relatifs aux diverses espèces de forces que nous venons d'énumérer, et résolvant celle-ci par rapport à T_u, on a

$$\mathrm{T}_u = \mathrm{T}_m - \mathrm{T}_n \pm \mathrm{PH} + \frac{1}{2}\,\Sigma m v_0^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma m v^2 - \Sigma m u^2,$$

équation de laquelle nous déduirons aisément, en nous appuyant sur quelques données d'expérience bien connues, les conditions auxquelles il faut satisfaire pour rendre T_u le plus grand possible, eu égard au moteur dont on dispose.

1°. Remarquons d'abord que nous n'avons pas supposé que T_m fût fixé d'une manière absolue; nous avons admis seulement que le moteur dont on dispose est déterminé. Or on doit observer que l'effort exercé par un moteur tel que les animaux, les cours d'eau, etc., est, en général, susceptible de varier avec la vitesse propre de la pièce sur laquelle il agit, de telle sorte qu'étant nul pour une vitesse v de son point d'application égale à la plus grande vitesse V que puisse prendre librement le moteur, il est, au contraire, le plus grand possible quand le récepteur est immobile. Le travail communiqué à la machine par le moteur étant nul pour les cas extrêmes précités, on voit qu'il y aura une valeur de v comprise entre o et V qui rendra T_m un maximum. Il conviendra donc de donner au récepteur, autant que faire se pourra, la vitesse qui convient à ce maximum. Il est clair d'ailleurs qu'il faudra satisfaire aux conditions suivantes : faire en sorte que l'effort du moteur s'exerce dans la direction du mouvement que doit prendre la pièce à laquelle il est appliqué, parce que, sans cela, une portion de cet effort serait perdue et ferait croître inutilement la pression sur les appuis, et, par suite, les résistances passives ; éviter que le moteur agisse par choc, parce que le travail représenté par la force vive qu'il possède au moment où il agit sur la machine est loin d'être transmis intégralement au récepteur, une portion notable de ce travail étant absorbée par les mouvements moléculaires que le choc produit et qui sont étrangers à l'effet utile ; quand le moteur agira par le choc, éviter la décomposition de la vitesse par les mêmes motifs que ceux donnés plus haut pour éviter la décomposition de l'effort.

Il est d'ailleurs facile de comprendre que les observations précédentes relatives à la convenance réciproque du moteur et du récepteur sont encore tout à fait applicables à l'opérateur et à la résistance qu'il surmonte, aussi bien celles qui proscrivent les chocs et les décompositions de force et de vitesse, que celles qui recommandent une vitesse convenable du récepteur ; car l'expérience a appris que chaque outil offre une vitesse qui est la plus avantageuse possible et dont on ne saurait s'écarter sans inconvénient, soit pour la qualité, soit pour la quantité des produits.

2°. Pour réduire à son minimum la quantité T_n qui représente les travaux dus aux résistances passives, il est clair qu'on devra simplifier, autant qu'on le pourra, la communication du mouvement ; fabriquer les pièces avec les corps les moins susceptibles de déformation, leur donner des dimensions suffisantes seulement pour qu'elles soient capables de résister aux plus grands efforts qui les sollicitent ; diminuer le frottement par un bon graissage ; remplacer, s'il est possible, le glissement par le roulement ; atténuer enfin la résistance du milieu par la diminution des surfaces des pièces dans le sens du mouvement.

3°. Le terme $\pm$ PH disparaîtra de l'équation quand le centre de gravité des parties mobiles de la machine ne s'abaissera ni ne s'élèvera, H restant alors toujours égal à zéro. Cette circonstance se présente rarement dans les appareils composés d'un grand nombre de pièces; mais il arrive ordinairement que parmi celles-ci il en est beaucoup qui satisfont à la condition précitée. Telles sont les roues bien centrées, les courroies, les chaînes sans fin, les chariots et toutes les pièces qui glissent sur des plans horizontaux. Quant aux autres pièces qui baissent et montent alternativement, comme les roues non centrées, les bielles, etc., elles ne produisent d'autre effet que d'augmenter ou de diminuer périodiquement et de quantités égales la somme des travaux des autres forces. Les poids de ces pièces n'exercent donc directement aucune influence nuisible sur l'effet utile, quand on considère la machine entre deux instants où les positions sont les mêmes; et en tous cas, si l'on prend un intervalle de temps très-considérable, le terme qui les concernera sera négligeable par rapport à ceux fournis par les travaux moteur et résistant. Mais il est essentiel de remarquer que ces poids ont indirectement une influence notable sur l'effet utile, parce que toutes les pièces éprouvent des frottements dans les parties qui les supportent, et parce que les variations de force vive qui résultent des pièces à mouvement alternatif, et qui sont d'autant plus grandes que celles-ci ont plus de masse, accroissent ordinairement l'irrégularité du mouvement de l'appareil, ce qui contribue à diminuer l'effet utile.

4°. Si nous passons maintenant aux termes qui contiennent les forces vives Σmv^2 et Σmv_0^2 possédées par les différents corps de la machine, à la fin et au commencement de l'intervalle de temps pendant lequel on considère son mouvement, on voit que l'un tend à augmenter, l'autre à diminuer l'effet utile. Mais on doit remarquer d'abord que la première quantité n'est pas réellement un bénéfice, car elle suppose une dépense préalable de travail moteur, celle nécessaire pour donner à la machine la force vive qui représente le terme même dont il s'agit. Quant à la seconde quantité, elle n'est pas réellement une perte, car la force vive qu'elle représente pourra être généralement utilisée vers la fin du mouvement de la machine, en laissant celle-ci agir seule contre les résistances qu'elle a à surmonter. Cette quantité sera d'ailleurs négligeable par rapport à l'effet utile total, si le mouvement de la machine est longtemps prolongé. On voit cependant qu'il faudra la prendre en considération, quand il s'agira de machines dont le mouvement sera interrompu par de fréquents repos et où la nature du travail ne permettrait pas l'emploi de la force vive dont il s'agit, et aussi quand l'effet utile consistant à élever ou à faire mouvoir des corps dans une certaine direction, ceux-ci quitteront l'appareil avec une vitesse acquise.

5°. Le terme $-\Sigma mu^2$ indique qu'il faut, autant que possible, éviter les chocs et les changements brusques de vitesse. On assemblera donc les pièces de manière que le jeu nécessaire à leurs mouvements relatifs soit et reste extrêmement faible, et l'on fera en sorte que la vitesse des pièces à mouvement alternatif, qui entrent dans l'appareil, soit éteinte graduellement à la fin et au commencement de chaque oscillation.

10. Il n'est pas difficile d'apercevoir, par tout ce qui précède, combien il est important de satisfaire dans chaque cas particulier, sinon rigoureusement, du moins le plus possible, aux conditions propres à obtenir l'uniformité du mouvement dans les machines. Il est clair, en effet, que dans celles où le mouvement uniforme est établi, où les puissances et les résistances agissent par conséquent d'une manière continue et avec une intensité qui reste la même, où les quantités de travail reçues et transmises à chaque instant par chaque organe sont égales et constantes, ce qui est la condition de l'équilibre des forces qui le sollicitent; il est clair, disons-nous, que les pièces se conduisent toujours de la même manière, demeurent sans cesse en contact, sans éprouver aucune secousse nuisible, aucun changement brusque de vitesse, et que les pertes de travail et les chances de destruction sont ainsi notablement diminuées. Ces circonstances permettent d'ailleurs de calculer aisément les efforts que les pièces supportent, et de réduire à leur minimum les dimensions qu'il convient d'attribuer à celles-ci. Enfin, comme il existe pour chaque moteur une vitesse de son point d'application qui rend un maximum la quantité de travail qu'il communique à la machine, et comme la qualité et la quantité du travail de l'outil dépendent aussi de sa vitesse et surtout de la constance de cette vitesse, on voit que le cas le plus avantageux est celui où, l'uniformité du mouvement étant établie, les vitesses des pièces extrêmes de la machine sont celles que réclame chaque genre de moteur et de travail utile. Malheureusement il est très-difficile d'obtenir le mouvement rigoureusement uniforme dans les machines, car cela suppose non-seulement que les forces restent constantes en intensité et en direction, mais encore que les chemins parcourus par les différentes parties de l'appareil soient entre eux dans des rapports indépendants de la position du système, ce qui exige l'emploi exclusif de pièces à rotation continue. Or ces conditions sont rarement remplies dans les machines : on sait en effet qu'il arrive la plupart du temps que la puissance motrice ou les résistances varient d'intensité; qu'elles agissent souvent tantôt dans un sens, tantôt dans le sens opposé, ce qui nécessite des mouvements alternatifs du récepteur et de l'opérateur; qu'enfin les poids des pièces et quelquefois des ressorts tendent, d'une manière active, à imprimer de la vitesse à la machine dans le sens du mouvement et dans le sens opposé. Ces diverses causes, qui existent tantôt seules, tantôt à la fois, produisent un mouvement nécessairement varié qu'il importe de régulariser le plus possible. Les moyens principaux qu'on peut employer dans ce but sont les suivants :

On évitera l'emploi des pièces à mouvement alternatif qui ne seraient pas rigoureusement exigées par le mode d'action du moteur ou par la nature du travail, et l'on transformera le plus tôt possible, au moyen de bielles, de manivelles, d'excentriques, etc., les mouvements alternatifs en mouvements de rotation continus; on tracera d'ailleurs les parties par lesquelles ces derniers mouvements se transmettent d'une pièce à l'autre de façon que la vitesse géométrique soit dans un rapport constant;

On centrera exactement les roues, surtout celles à grande vitesse, ce qui aura d'ailleurs pour avantage d'annuler l'effet de la force centrifuge ou la pression qui en résulte sur les axes;

On contre-balancera les pièces animées d'un mouvement alternatif ou l'on mettra à profit leurs poids pour régulariser davantage l'action de la puissance et de la résistance;

On diminuera la vitesse, la course et la masse de ces mêmes pièces, autant qu'on pourra le faire sans nuire à leur solidité et au résultat qu'on veut en obtenir;

Enfin, on combattra la variation d'action du moteur ou de la résistance, soit par des contre-poids, soit par tout autre moyen que chaque cas particulier fera imaginer et en préférant toujours celui qui n'absorbera que la plus faible portion du travail du moteur, tout en produisant l'effet désiré.

11. Après avoir ainsi atténué, autant que possible, les causes de l'irrégularité du mouvement, il restera une dernière ressource que nous allons faire connaître, parce qu'elle se rattache aux lois générales du mouvement des machines, déduites de l'équation des forces vives.

Nous avons vu que tout excès du travail moteur sur le travail résistant avait pour effet d'accroître la force vive de la machine et par conséquent les vitesses des pièces qui la composent; mais si l'on vient à augmenter la masse de celles-ci, et si leur vitesse est grande relativement à celle de l'arbre principal dont le mouvement doit être aussi uniforme que possible, on voit aisément qu'on restreindra l'accroissement de vitesse de ce dernier pour un même excès du travail moteur. Mais ce procédé aurait des inconvénients graves et ferait croître notablement les résistances passives. Il est infiniment préférable d'augmenter les effets de l'inertie du système par l'adjonction d'une pièce auxiliaire nommée *volant*, qu'on dispose, dans ce but, sur un arbre à grande vitesse et le plus près possible de la force dont on veut régulariser les effets. Nous traiterons un peu plus loin la question importante de la détermination des volants; mais ce qui a été dit suffit pour comprendre le rôle que jouent les volants dans les machines : d'une part, ils rapprochent les vitesses extrêmes de l'appareil; de l'autre, ils constituent des réservoirs de force vive. Ils emmagasinent, en augmentant un peu de vitesse, l'excès du travail moteur sur le travail résistant, qui se produit pendant certaines périodes du mouvement, pour le restituer en diminuant de vitesse, pendant d'autres périodes où le travail moteur est inférieur au travail résistant. Ces propriétés du volant sont très-précieuses. Il ne faut pas cependant exagérer ce moyen de régularisation, parce que les poids des masses additionnelles qu'on emploie dans ce but produisent sur les axes des pressions et par suite des frottements qui absorbent une portion de la force motrice. Il convient par conséquent de s'arrêter à une certaine limite dans chaque cas particulier; il est même certaines circonstances où l'emploi des volants serait plus nuisible qu'avantageux, par exemple dans les machines possédant déjà par elles-mêmes un mouvement uniforme ou dans celles qui doivent, par la nature du travail, s'arrêter fréquemment et tout à coup. En tous cas, il est essentiel de chercher à régulariser le mouvement indépendamment du volant et quand bien même on serait finalement obligé d'y avoir recours; car en diminuant la différence entre le travail moteur et le travail résistant, on diminue par cela même les dimensions et la vitesse qu'il conviendrait de donner au volant pour obtenir un même degré de régularité. Nous avons indiqué déjà quelques-uns des moyens généraux propres à atteindre le but dont il s'agit : mais la condition la plus essentielle à laquelle il faille satisfaire pour y arriver, c'est de régler la dépense de force motrice d'après la quantité de travail absorbée par les résistances, de manière que l'égalité entre les travaux moteur et résistant se produise à chaque révolution de l'appareil, ou tout au moins dans deux ou trois révolutions. Tel est l'objet de certains appareils spéciaux adaptés aux machines, comme les pendules coniques ou régulateurs à force centrifuge qui règlent à chaque instant la dépense d'eau dans les roues hydrauliques ou la dépense de vapeur dans les machines à vapeur, dont la force motrice suit naturellement les variations d'intensité des résistances.

12. On voit, par tout ce que nous avons dit sur les machines, qu'il n'est pas possible d'en espérer les effets extraordinaires que certaines personnes veulent en retirer. Formées de pièces qui se meuvent soit dans l'air, soit dans l'eau, qui glissent les unes sur les autres, se heurtent, se déforment, elles sont nécessairement soumises à une foule de causes qui absorbent, sans résultat utile, une partie de la force motrice. Elles ne peuvent donc transmettre qu'avec perte le travail qu'on leur confie, et cela à tel point, qu'on estime comme excellentes, sous ce rapport, celles dont l'effet utile est égal aux deux tiers et même à la moitié du travail absolu dépensé par le moteur. Ce qui constitue l'avantage essentiel des machines, c'est leur propriété de transmettre le travail d'une force motrice en le modifiant de manière à le rendre applicable aux divers genres de travail que nécessite l'industrie. C'est ainsi qu'elles permettent de remplacer l'adresse et l'intelligence de l'homme par la force purement physique des animaux et autres agents naturels; de diminuer en même temps le prix de l'unité de travail; d'obtenir des produits plus parfaits parce qu'ils sont plus précis dans leur forme et plus réguliers. C'est encore par leur secours qu'on arrive à produire des effets impossibles sans elles; que, par exemple, un moteur imprimera à des corps des vitesses plus grandes que celles qu'il possède ou qu'il peut prendre, et soulèvera des fardeaux dont le poids excède l'effort dont il est capable; enfin l'emploi d'une machine permet aussi quelquefois d'augmenter l'effet utile dont serait capable le moteur, s'il agissait immédiatement sur la résistance; ce qui n'a rien de contraire à ce qui a été dit, attendu que l'avantage obtenu résulte alors d'un meilleur emploi de la force absolue du moteur.

II.

Nous n'avons considéré dans le paragraphe précédent que les conséquences très-intéressantes qui se déduisent de l'application du principe du travail virtuel et effectif aux machines en général. Mais, ainsi que nous l'avons dit, il existe un très-grand nombre de questions de mécanique appliquée dont la solution est fondée sur l'emploi du même principe. Nous traiterons maintenant et successivement celles qui ont été énumérées dans le premier paragraphe.

De l'équilibre des systèmes pesants.

13. La considération des systèmes soumis à la seule action de la pesanteur se présente fréquemment dans la pratique, et les propriétés *mécani-*

ques du centre de gravité sont alors fort utiles à connaître. Nous allons en montrer un exemple s'appliquant au cas de l'équilibre d'un pareil système. En rapportant celui-ci à des axes rectangulaires tels, que l'axe des z soit dirigé verticalement et de haut en bas, on sait que pour une position quelconque du système on a

$$Mz_1 = \Sigma mz,$$

et pour une autre position,

$$Mz_1' = \Sigma mz',$$

d'où l'on conclut, en remplaçant les masses M et m par les poids P et p qui leur sont proportionnels,

$$P(z_1' - z_1) = \Sigma p(z' - z),$$

ce qui démontre que le travail de la pesanteur sur le système sera le même que si la masse totale était réunie en son centre. Mais, en vertu du principe du travail, il faut pour l'équilibre que la somme des travaux virtuels soit égale à zéro. Pour un quelconque des mouvements qu'il peut prendre, les travaux dus aux forces de réaction sont nuls, et le travail total se réduit à la somme des travaux dus aux actions de la pesanteur sur les différentes parties; on conclut alors du théorème précédent que, dans le cas de l'équilibre, le centre de gravité du système doit être placé de telle manière que, pour un mouvement infiniment petit attribué au système, ce centre se déplace horizontalement. L'équilibre est d'ailleurs *instable* si, pour un déplacement très-petit, mais fini, le centre peut s'abaisser au-dessous du plan horizontal qui passe par sa position d'équilibre; *stable*, s'il s'élève au-dessus de ce plan; *indifférent*, s'il reste sur ce plan. Les roues dans les machines présentent des exemples de ces divers cas, suivant que leurs centres sont ou ne sont pas placés sur les axes.

Dans la construction des ponts-levis, on cherche à mettre tout le système mobile dont se compose le pont en équilibre indifférent. Soient AB (*fig.* 1) le tablier du pont mobile autour de l'axe horizontal qui se projette en A; CDE la charpente supérieure mobile autour de l'axe horizontal qui se projette en D, et relié au tablier par deux chaînes CF. On veut que lorsque la charpente CDE tourne autour de l'axe D, et que par conséquent le tablier AB tourne autour de l'axe A, le centre de gravité de tout le système mobile reste à une même hauteur. Le centre de gravité du système ne changera pas, si l'on remplace chaque chaîne par deux masses égales chacune à la moitié de sa masse et placées à ses deux extrémités. Soient G et G' les centres de gravité du tablier et de la charpente supérieure, en y comprenant les masses qui tiennent lieu des moitiés des chaînes, et P et P′ les poids de ces deux parties du système : on rend l'équilibre indifférent en disposant le tout de manière que ADCF soit un parallélogramme, que l'angle G′DE soit égal à l'angle GAF et que l'on ait

$$P : P' :: DG' : AG.$$

Ces conditions étant remplies, le centre de gravité de tout le système restera constamment en un même point O de la ligne AD. Il est aisé de voir que l'on peut disposer le contre-poids placé à l'extrémité E de la charpente CDE de manière à satisfaire aux deux dernières conditions.

De l'équilibre des solides superposés.

14. Posons d'abord les conditions d'équilibre d'un corps solide qui s'appuie sur un plan. En construisant le polygone convexe d'appui du corps, on voit que l'équilibre ne pourra être détruit que de deux manières, soit parce que le corps tournera autour d'une arête du polygone, soit parce qu'il glissera sur le plan. Pour que ces effets ne se produisent pas, il faudra évidemment, en vertu du principe du travail, 1° que la résultante du poids du corps et de la force qui lui est appliquée vienne rencontrer le polygone dans son intérieur; 2° que la direction de cette résultante ne fasse pas avec la normale un angle plus grand que l'angle de frottement. Si d'ailleurs on se rappelle que les corps se déforment plus ou moins et peuvent même se briser sous les efforts qui leur sont appliqués, on comprend que les conditions précédentes ne doivent pas suffire, et il n'est point difficile de reconnaître que la résultante dont il s'agit doit encore passer suffisamment loin du contour du polygone d'appui, et d'autant plus loin qu'elle est plus grande et que le corps est plus facile à écraser.

Cela posé, considérons un système de corps superposés comme le représente la *fig.* 2. Le corps le plus élevé est soumis à l'action de certaines forces extérieures, que nous supposerons pouvoir être remplacées par une force unique R. Celle-ci rencontrera la surface d'appui en A. Les forces agissant sur l'ensemble des deux premiers corps, supposés liés entre eux, peuvent aussi être remplacées par une force R′ qui passera en B, etc. Or le point A devra être situé à l'intérieur du polygone de contact du premier corps avec le second; de même pour B, etc. Joignant les points A, B, etc., on a ce qu'on nomme le *polygone des pressions*, qu'on peut remplacer par une courbe continue, en divisant chacun des corps, par la pensée, en un très-grand nombre de corps extrêmement minces. On peut donc dire que pour l'équilibre d'un système de cette espèce, il faut que la courbe des pressions passe partout à l'intérieur des surfaces d'appui, en ajoutant qu'elle doit rencontrer ces surfaces en des points suffisamment éloignés des contours. Remarquons d'ailleurs que, si cette condition est satisfaite, il ne pourra pas y avoir rupture d'équilibre par rotation autour d'une des arêtes des joints; mais il pourra encore y avoir rupture d'équilibre par glissement d'un corps sur un autre.

15. Il peut arriver que le système considéré ne soit pas en équilibre sous l'action des forces appliquées. Imaginons qu'on veuille s'opposer au mouvement en appliquant une certaine force F au corps supérieur M. Quelle sera la grandeur de cette force? On peut supposer successivement que les corps soient reliés invariablement les uns aux autres de manière à ne laisser qu'un seul joint libre. Prenons le premier, par exemple. Il est aisé de déterminer, d'après les forces agissant sur M et la direction de la force cherchée, la grandeur de cette dernière pour qu'il n'y ait ni glissement ni rotation autour de l'arête *a*. En procédant ainsi successivement, on trouvera pour F une suite de valeurs, et il est clair qu'on devra prendre au moins la plus grande de toutes celles ainsi trouvées; sinon, il y aurait rupture, et le joint de rupture serait celui pour lequel la force de retenue a une valeur maximum. Si, au lieu d'appliquer au système une force capable de s'opposer à son renversement, on applique une force capable de le renverser, on arrivera au même résultat. En déterminant la suite des valeurs de F capables de produire le glissement, suivant les surfaces successives ou la rotation autour de leurs arêtes, il est clair que F devra être plus petit que la plus petite des forces trouvées; sinon, on aura un joint de rupture ou de glissement. On a donc ainsi deux limites entre lesquelles doit être comprise la force F pour qu'elle soit capable de maintenir en équilibre le système des corps M, N, O, etc.

16. Les résultats qui précèdent sont directement applicables à l'équilibre des voûtes. Supposons qu'il s'agisse de reconnaître si une voûte construite d'une certaine manière présente les conditions convenables de stabilité. Prenons une voûte en berceau symétrique par rapport à un plan vertical mené par le milieu de la clef. On peut admettre que chacun des deux plans de séparation éprouve une pression horizontale et considérer seulement une moitié de la voûte, en remplaçant l'autre moitié par une force horizontale appliquée en un point inconnu. Il est clair que cette pression horizontale peut produire deux effets : ou s'opposer au renversement de cette moitié de voûte, ou produire le renversement de la voûte en sens contraire. Pour l'équilibre, il faudra donc qu'on puisse trouver une force appliquée horizontalement en un point de la face et satisfaisant à ces deux conditions : 1° elle devra être plus grande que la plus grande des forces capables de s'opposer au renversement de la moitié de la voûte sous l'action de son poids et des forces appliquées ; 2° elle devra être plus petite que la plus petite des forces capables de produire un mouvement en sens contraire.

17. Comme autre application des considérations qui ont été exposées plus haut, proposons-nous de déterminer le profil et les dimensions d'une digue destinée à retenir les eaux de la mer dans une baie naturelle et à créer ainsi une force motrice à marée basse. Cherchons d'abord la section la plus avantageuse qu'il convient de donner à la digue pour qu'avec le moindre volume de maçonnerie possible, elle ait cependant la solidité nécessaire. Nous supposerons seulement que la digue ait la forme d'un cylindre horizontal disposé symétriquement de part et d'autre du plan vertical qui passe par le goulet de la baie.

Soit NMON (*fig.* 3) la section cherchée qui doit répondre aux circonstances où la baie serait vide et où la mer s'élèverait à la hauteur des plus grandes marées.

Soient X et Y les coordonnées OP et MP d'un point quelconque M du profil et considérons la partie de la digue qui, ayant MOM′ pour section, s'étend horizontalement sur une longueur égale à l'unité. L'action de la mer sur la surface en question donne pour chaque élément une force normale qu'on peut décomposer en deux autres, l'une horizontale et l'autre verticale. L'ensemble des composantes horizontales tend à renverser la partie considérée de la digue, en la faisant tourner autour du point M′ et les composantes verticales tendent au contraire à la maintenir en place. Nous négligerons ces dernières, dont l'influence est assez faible. Quant aux premières, leur résultante est évidemment la même que celle qui représenterait la poussée du liquide sur la projection de la surface considérée sur le plan vertical qui partage la digue en deux parties symétriques. Cette résultante est donc $\frac{X^2}{2}$, et son moment, par rapport à M′, est $\frac{X^3}{6}$. D'un autre côté, en désignant par π le poids spécifique de la maçonnerie, et par x et y les coordonnées d'un point quelconque de la section entre O et M, le moment par rapport à M′ du poids de la partie de la digue en question est égal à

$$(1) \qquad 2\pi\,\mathrm{Y}\int_0^{\mathrm{X}} y\,dx.$$

Les coordonnées X et Y d'un point quelconque du profil total doivent donc satisfaire à l'équation

$$2\pi\,\mathrm{Y}\int_0^{\mathrm{X}} y\,dx = \frac{\mathrm{X}^3}{6},$$

qui correspondra à une digue d'une solidité un peu plus grande qu'il n'est réellement nécessaire; car, outre les composantes verticales de l'action du fluide qui agissent dans le même sens que le poids de la maçonnerie, nous avons aussi négligé la résistance du ciment qui relie MOM' à la partie de la digue située au-dessous.

Si l'on différentie l'équation (1) par rapport à X, variable indépendante, on a, en observant que $d\int_0^{\mathrm{X}} y\,dx = \mathrm{Y}\,d\mathrm{X}$,

$$2\pi\,d\mathrm{Y}\int_0^{\mathrm{X}} y\,dx + 2\pi\,\mathrm{Y}^2\,d\mathrm{X} = \frac{1}{2}\mathrm{X}^2\,d\mathrm{X};$$

éliminant $\int_0^{\mathrm{X}} y\,dx$ entre cette équation et l'équation (1), et remplaçant, pour plus de simplicité dans la notation, X et Y par x et y, on a

$$\frac{dy}{dx} + 8\pi\frac{y}{x} = 2\frac{y}{x},$$

et en intégrant,

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\,x,$$

ce qui montre que la section doit être triangulaire. On peut d'ailleurs déduire de là, et de quelques considérations pratiques, les dimensions de la digue.

De l'équilibre des systèmes de corps articulés.

18. On a souvent à considérer dans la mécanique appliquée des systèmes de corps articulés entre eux de manière à jouer très-aisément autour de leurs articulations. L'étendue du glissement y est d'ailleurs très-petite, et le travail dû au frottement peut être négligé. Prenons une barre AB (*fig.* 4), et supposons-la soumise à des forces appliquées à ses deux extrémités. Il est clair, en vertu du principe du travail, que dans l'équilibre les deux résultantes doivent être dirigées suivant la barre elle-même. Considérant alors successivement les parties du système, on voit aisément que si l'on construit un polygone MNPQ, dont les côtés successifs représentent les forces T, F, F', F'' en grandeur et en direction, la ligne MR devra être égale à la force appliquée en E (*fig.* 7).

19. Ces résultats s'appliquent directement aux ponts suspendus. Le tablier d'un pont de cette espèce présente ordinairement une construction uniforme qui permet de supposer le poids proportionnel à la longueur. Il est suspendu, comme on sait, à une chaîne au moyen de barres qui s'attachent à la partie inférieure du tablier. Quelle forme devra-t-on donner à la chaîne de suspension? Si le tablier était regardé comme un corps de figure invariable, il y aurait toujours équilibre, pourvu que les extrémités de la chaîne fussent convenablement fixées. Mais le tablier est un corps flexible, et il convient qu'il y ait équilibre quand même ce tablier serait divisé en plusieurs parties indépendantes les unes des autres. On peut imaginer, par exemple, qu'il soit formé d'une série de parties articulées aux points où aboutissent les barres verticales, de manière à pouvoir tourner autour d'axes horizontaux. On voit tout de suite qu'alors chaque barre aura à supporter la moitié du poids de la portion du tablier d'un côté et la moitié du poids de l'autre côté; et en admettant que les barres soient également espacées, on voit que chacune d'elles aura à supporter le poids tout entier d'un des éléments, comme si le tablier avait été coupé au milieu de chaque barre. La chaîne de suspension doit être choisie de telle manière, que, le tablier étant horizontal, elle soit en équilibre sous l'action des forces appliquées : il faut en outre que les barres aient une longueur telle, que la figure du polygone corresponde à l'équilibre. Menons par M (*fig.* 8) une droite MN représentant la tension du dernier chaînon; par N une verticale NP égale à la première force, et joignons M et P; par P une verticale PQ égale à la seconde force, et menons MQ, etc. MP, MQ, etc., représenteront les directions des côtés du polygone et aussi les grandeurs des tensions. Cherchons la grandeur de la force de retenue qui doit être appliquée à l'extrémité. Nous avons une suite de lignes NP, PQ, etc., qui représentent les poids des portions successives du tablier. Construisons d'abord ces lignes, et supposons, pour simplifier, quatre barres jusqu'au milieu : il suffira de prendre les quatre distances NP, PQ, QR, RS égales entre elles et représentant les poids des portions du tablier; puis par S mener une horizontale qui représentera la direction de l'élément moyen. La rencontre de MM avec l'horizontale MS donne le point M, et MN représente la tension du dernier chaînon.

Si l'on cherchait d'ailleurs la courbe qui contient tous les sommets de la chaîne de suspension, on trouverait une parabole dont l'axe est une verticale passant au milieu de l'élément médian.

Résistance des matériaux.

20. La résistance des matériaux, cette question si importante de la mécanique appliquée, se résout également au moyen du principe du travail. Nous prendrons pour exemple la résistance à la flexion de prismes allongés de formes diverses, mais ordinairement symétriques par rapport à un plan moyen, comme le sont généralement les poutres de bois ou de fer employées dans les constructions.

Lorsqu'un corps prismatique homogène et fixé invariablement à l'une de ses extrémités est soumis à l'autre extrémité à l'action d'une force F qui tend à l'allonger ou à le comprimer, l'observation démontre qu'on a entre la force F, la longueur primitive l du corps, l'allongement ou la compression i qu'il éprouve sous l'action de la force F et l'aire Ω de sa section transversale, la relation

$$F = E\Omega\,\frac{i}{l},$$

E étant un nombre fourni par l'expérience, qui dépend uniquement de la nature du corps et que l'on nomme son *coefficient d'élasticité*. Cette formule, qui n'est d'ailleurs applicable qu'autant que i ne dépasse point certaines limites, sert de point de départ pour calculer la résistance des corps solides à la flexion.

Soit AB (*fig.* 9) le prisme considéré, que nous supposerons soumis à l'action de forces qui le fléchissent parallèlement au plan de symétrie; mn est une section perpendiculaire aux arêtes, qui divise le prisme fléchi en deux parties A et B. Nous admettrons que les molécules actuellement dans le plan de cette section, étaient déjà dans un même plan normal aux arêtes avant la flexion. Nous supposerons en outre que les forces extérieures qui agissent sur la partie B du prisme se réduisent soit à un couple dont le plan est parallèle au plan de symétrie, soit à une seule force dirigée dans le plan de symétrie et parallèle à la section mn.

Le prisme une fois fléchi et à l'état de repos, conservant sa nouvelle forme invariablement, il est clair qu'il y a équilibre entre toutes les forces qui agissent sur la partie B, c'est-à-dire entre le couple ou la force extérieure et les diverses forces moléculaires mises en jeu par la flexion, qui déterminent l'action de A sur B. On peut d'ailleurs décomposer chacune des actions exercées sur les molécules de B, situées dans le voisinage de la section mn, en deux forces, l'une perpendiculaire à mn, et l'autre dirigée dans ce plan. La considération de toutes ces forces permet de regarder la partie B du corps comme étant entièrement libre. Le déplacement virtuel qu'on doit attribuer à cette partie, pour appliquer le principe du travail, peut donc être quelconque. Mais on sait que tout mouvement infiniment petit d'un corps solide peut se décomposer en trois translations, suivant trois axes rectangulaires, et en trois rotations autour de ces mêmes axes. Or il est aisé de voir que la considération des trois translations fournit trois équations, exprimant que la somme des projections des forces appliquées au corps sur un quelconque des axes est égale à zéro, et que celle des trois rotations fournit trois équations, exprimant que la somme des moments des forces par rapport à un quelconque des mêmes axes est également nulle.

Prenons deux axes dans le plan de la section mn et le troisième perpendiculaire à ce plan. Les conditions de l'équilibre sont alors celles-ci :

1°. La somme des composantes normales à mn des actions moléculaires exercées par A sur B est nulle.

2°. La somme des composantes de ces mêmes actions moléculaires dirigées dans le plan mn est nulle, si les autres forces qui agissent sur B se réduisent à un couple; cette somme est égale à la résultante de ces autres forces, si elles en ont une.

3°. Enfin la somme des moments des composantes normales à mn des mêmes actions, pris par rapport à une droite menée dans le plan mn, perpendiculairement au plan de symétrie, est égale soit au moment de la force extérieure, soit au moment du couple.

De la première de ces conditions on doit conclure d'abord que, parmi les divers prismes élémentaires compris entre les sections mn, $m'n'$, il y en a qui se sont allongés et d'autres qui se sont raccourcis, et que, par suite, il doit s'en trouver, entre les premiers et les derniers, dont la longueur n'a pas varié. Les fibres que contiennent ces prismes élémentaires qui n'ont été ni allongées ni raccourcies se nomment les *fibres neutres*. Nous admettrons que les points où elles rencontrent le plan de la section mn sont, sur une ligne droite OY, perpendiculaire au plan de symétrie, et nous prendrons cette droite et la droite OZ, suivant laquelle la section mn est coupée par le plan de symétrie, pour axe des coordonnées dans le plan de la section. Cela posé, remarquons que le prisme ayant pour base l'élément ω, situé à une distance v de OY (*fig.* 10), avait primitivement pour longueur pp'. Actuellement sa longueur est $\frac{pp'(\rho + v)}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la fibre neutre. Il s'est donc allongé de $pp'\frac{v}{\rho}$; ainsi $\frac{v}{\rho}$ est le rapport de l'allongement du prisme à sa longueur primitive. En appelant φ la force normale à la section mn, qui produit cet allongement, on a

$$\varphi = E\Omega\frac{v}{\rho}.$$

Mais la somme des forces φ est nulle; donc on a

$$\Sigma\omega v = 0.$$

Donc la première des conditions posées établit encore que OV passe par le centre de gravité mn, et que, par suite, ce centre de gravité est en O.

La deuxième condition fournie par le principe du travail montre que les actions moléculaires, dirigées dans la section mn, sont en général très-petites par rapport aux composantes normales φ de ces actions, si les dimensions transversales du prisme sont faibles comparées à la longueur : c'est ce que nous avons supposé.

Quant à la troisième condition, elle exprime que la somme des moments des forces φ, par rapport à l'axe OV, est égale au moment de la force fléchissante ou au moment du couple fléchissant. Cette somme de moments a pour valeur

$$\frac{E}{\rho}\Sigma\omega v^2.$$

Il faudra donc calculer dans chaque cas particulier l'expression $\Sigma\omega v^2$, qui est ce qu'on appelle le *moment d'inertie* du corps par rapport à la fibre neutre, et l'égaler, après l'avoir multiplié par $\frac{E}{\rho}$, au moment de la force fléchissante ou à celui du couple fléchissant.

Tel est le résultat fourni par le principe du travail, et la détermination des circonstances que présentent, dans leur flexion, des prismes placés dans diverses conditions n'offre plus que des calculs à faire.

21. Nous considérerons les cas suivants, qui intéressent la pratique :

1°. Prisme encastré à un bout, et soumis à l'action d'une force F dirigée perpendiculairement à ses arêtes.

A cause de la petitesse de la déformation du prisme, on peut admettre que la force reste parallèle aux plans des diverses sections normales. Par conséquent, l étant la longueur du prisme et x la distance d'une section quelconque à l'extrémité encastrée, μ le moment d'inertie du prisme, on doit avoir

$$\frac{E\mu}{\rho} = (l-x)F.$$

Mais on a généralement pour ρ la valeur suivante :

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

qu'on peut réduire à

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

à cause de la petitesse de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ à côté de 1.

On a donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{E\mu}(l - x);$$

d'où, intégrant et observant que y et $\frac{dy}{dx}$ sont nuls pour $x = 0$,

$$y = \frac{F}{E\mu}\left(\frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3\right).$$

La flèche f, produite par l'action de la force F, s'obtient en faisant $x = l$, dans la valeur de y ; on trouve ainsi

$$f = \frac{1}{3}\frac{F}{E\mu}l^3, \quad \text{d'où} \quad F = \frac{3E\mu}{l^3}f.$$

Le travail employé à déformer le prisme est d'ailleurs

$$\int_0^f F\,df = \frac{3}{2}\frac{E\mu}{l^3}f^2.$$

2°. Prisme encastré à un bout et soumis à la pesanteur qui agit perpendiculairement à ses arêtes. Soit p le poids de l'unité de longueur ; on a

$$\frac{E\mu}{\rho} = \frac{1}{2}p(l - x)^2,$$

d'où

$$y = \frac{p}{2E\mu}\left(\frac{1}{2}l^2x^2 - \frac{1}{3}lx^3 + \frac{1}{12}x^4\right),$$

et par suite

$$f = \frac{pl^4}{8E\mu}.$$

3°. Prisme encastré à un bout et soumis à la fois à la pesanteur et à une force F appliquée à son extrémité et agissant dans le même sens que la pesanteur. La valeur de y sera la somme des valeurs trouvées dans les deux cas précédents; la valeur de f sera également la somme des flèches correspondant à ces deux cas.

4°. Prisme reposant sur deux appuis et soumis à une force F dirigée perpendiculairement à sa longueur. Les résistances Q et Q′ des deux appuis ont pour valeurs

$$Q\frac{Fl'}{l+l'},\quad Q'\frac{Fl}{l+l'}.$$

On a dès lors, pour la portion du prisme qui est à droite du point d'application de la force F,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Q}{E\mu(l-x)},$$

d'où

$$y=\frac{Q}{E\mu}\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3\right)+Cx,$$

C étant la valeur de $\frac{dy}{dx}$, correspondant à $x=0$.

On a de même pour l'autre partie du prisme

$$y'=\frac{Q}{E\mu}\left(\frac{1}{2}l'x'^2-\frac{1}{6}x'^3\right)+C'x'.$$

Mais on doit observer que $C'=-C$, et qu'en outre y et y' doivent être égaux quand $x=l$ et $x'=l'$; on en déduit

$$C=\frac{Fll'(l'-l)}{3E\mu(l+l')}.$$

5°. Prisme reposant sur deux appuis et soumis à deux forces égales, parallèles et appliquées en deux points également éloignés de son milieu. Ce prisme prendra une forme facile à déterminer. Il est clair en effet que les réactions des deux appuis sont égales chacune à E, et que par suite une fibre quelconque de la partie moyenne est soumise à un couple : donc le rayon de courbure doit avoir la même valeur, quelle que soit la position de la section; donc cette fibre se courbe, suivant un arc de cercle, entre les points d'application des deux forces. Quant aux parties extrêmes du prisme, on déterminera aisément leurs formes, suivant ce qui a été dit précédemment.

6°. Prisme reposant sur deux appuis de même hauteur et soumis à l'action de la pesanteur. On peut admettre tout de suite que la flexion sera symétrique de part et d'autre du milieu et qu'en ce point la tangente à la fibre neutre sera horizontale. Prenant des axes coordonnés passant par ce milieu, et remarquant que les résistances des appuis sont égales à $\frac{pl}{2}$, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{E\mu}\left(\frac{1}{8}l^2 - \frac{1}{2}x^2\right),$$

d'où

$$y = \frac{px^2}{48E\mu}(3l^2 - 2x^2),$$

et

$$f = \frac{5pl^4}{384E\mu}.$$

7°. Prisme encastré à un bout, soutenu par un appui à l'autre bout, et soumis à l'action de la pesanteur. La tangente à la fibre neutre à l'extrémité qui est encastrée est supposée horizontale. Soient h la distance à laquelle la seconde extrémité de la fibre neutre est maintenue au-dessous de cette horizontale et Q la résistance verticale de l'appui, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2E\mu}(l^2 - 2lx + x^2) - \frac{Q}{E\mu}(l - x),$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{p}{24E\mu}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4) - \frac{Q}{6E\mu}(3lx^2 - x^3).$$

On déterminera Q par la condition que pour $x = l$, on ait $y = h$; on aura donc

$$Q = \frac{3}{8}pl - \frac{3E\mu h}{l^3}.$$

Si $h = 0$, on a $Q = \frac{3}{8}pl$.

Si $h = \frac{1}{8}\frac{pl^4}{\mu E}$, on a $Q = 0$.

Si $h > \frac{1}{8}\frac{pl^4}{E\mu}$, on doit encore prendre $Q = 0$, car alors l'appui ne sert plus à rien.

Une observation qui s'applique à tous les cas examinés ci-dessus, c'est qu'on peut se servir de la relation de l'équilibre pour construire géométriquement la courbe de flexion du prisme; car la connaissance du moment d'élasticité entraîne celle du rayon de courbure, et l'on peut tracer avec celui-ci une série de petits arcs de cercle qui seront autant de petits arcs de la courbe.

22. Lorsqu'un prisme est soumis à un effort transversal, la résistance qu'il oppose à la flexion n'est pas la seule qu'il importe de considérer dans la pratique; il faut aussi savoir jusqu'à quelle limite la force peut être portée pour produire la rupture du corps, et en quel point celle-ci aura lieu. La solution de cette question, qui se déduit de la précédente, se résout donc par le principe du travail. L'observation démontre que si un prisme fixé à son extrémité supérieure est tiré en bas par une force F qui augmente jusqu'à la rupture du prisme, F est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la section et dépend en outre de la nature de la matière; de sorte qu'on a

$$F = R\Omega,$$

R, ou le *coefficient de rupture* de la substance, étant d'ailleurs donné par l'expérience. La flexion du prisme ayant pour effet, comme on sait, d'allonger et de raccourcir certaines fibres, et cela d'autant plus qu'il s'agit de fibres plus éloignées de la fibre neutre, il est clair que, pour résoudre la question, il suffit d'exprimer que la fibre la plus extérieure ne peut pas se rompre sous l'action des forces qui font fléchir le prisme. Or la tension φ d'une fibre quelconque dans un prisme fléchi transversalement est égale à $E\omega\frac{v}{\rho}$, et si on la prend pour la fibre neutre, pour laquelle v devient égale à V, elle sera égale à $E\frac{V}{\rho}$. Pour que cette fibre extrême ne se rompe pas, il faut qu'on ait

$$E\frac{V}{\rho} < R,$$

condition qui revient à

$$\frac{MV}{\mu} < R,$$

ou à

$$M < \frac{R\mu}{V},$$

en posant $\frac{E\mu}{\rho} = M$. M est le *moment d'élasticité* calculé pour une section quelconque.

Cela posé, la rupture ne se produira point si cette condition est remplie pour la section à laquelle correspond le plus grand moment d'élasticité; car il est clair que c'est suivant cette section que le prisme se romprait, si la force fléchissante était suffisamment grande. On peut déduire de là que dans le cas d'un prisme encastré à un bout et soumis à son poids ou à l'action d'une force appliquée à son extrémité libre, la section de rupture est celle qui sépare la partie encastrée de la partie non encastrée. Dans le cas d'un prisme reposant sur deux appuis et soumis à une force qui agit en un point quelconque de sa longueur, la section de rupture est celle qui contient le point d'application de la force fléchissante.

Ce qui précède est applicable sans erreur sensible à des solides allongés non prismatiques, dont les sections transversales varient très-peu d'un point à un autre. Or on peut faire en sorte que cette variation soit telle, que, pour une valeur convenable de la force fléchissante, on ait

$$M = \frac{R\mu}{V}$$

pour toutes les sections, quoique μ et V varient d'une section à une autre. Les corps de cette forme sont appelés des *solides d'égale résistance*. Il est aisé d'appliquer ce qui a été dit au cas d'un solide encastré à l'une de ses extrémités et soumis à l'autre extrémité à l'action d'une force perpendiculaire à sa longueur.

23. Appliquons encore le principe du travail à la détermination du choc que peut amortir un ressort formé de plusieurs feuilles superposées. Prenons un élément aa' de la section transversale d'une feuille, placée à une distance v de la fibre neutre uu'; r étant le rayon de fabrication, ρ le rayon de courbure à une certaine époque du choc, a la largeur de la feuille, on a, pour la valeur de la force attractive ou répulsive à l'instant considéré,

$$\varphi = \mathrm{E}avdv\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right),$$

en négligeant le rapport $\frac{v}{r}$ devant l'unité. Si l'on appelle d'ailleurs dl la longueur primitive des fibres qui forment le petit prisme ayant pour base l'élément aa', la longueur actuelle de ces fibres sera

$$dl + v\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) dl.$$

En passant de la position correspondante au rayon ρ à la suivante correspondante au rayon $\rho + d\rho$, la longueur du prisme s'accroît de

$$vd\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) dl,$$

et le travail élémentaire développé dans cet accroissement est

$$\mathrm{E}av^2dv\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) d\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) dl.$$

Le travail total développé pendant que le petit prisme passe du rayon ρ_0 au rayon ρ_1, est par suite

$$\frac{\mathrm{E}av^2dv}{2}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2\right]dl,$$

et celui développé par le prisme ayant la hauteur totale de la feuille est

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2\right]dl\int \mathrm{E}av^2dv,$$

ou

$$\frac{\mathrm{M}}{2}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2\right]dl,$$

M étant le moment d'élasticité.

Par conséquent, $2\mathrm{L}$ étant la longueur totale de la feuille, le travail que la flexion de celle-ci produira sera

$$\int_0^{\mathrm{L}}\mathrm{M}\left[\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_1}\right)^2-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho_0}\right)^2\right]dl.$$

Si l'on suppose que la feuille ait une épaisseur uniforme et qu'elle passe de son rayon de fabrication à un aplatissement complet, l'expression du travail se réduira à

$$\frac{\mathrm{ML}}{r^2}\quad\text{ou à}\quad\frac{\mathrm{E}ae^3\mathrm{L}}{12r^2}\quad\text{ou à}\quad\frac{\mathrm{E}ae\mathrm{L}\alpha^2}{3},$$

en désignant par α l'allongement des fibres, qui est égal à $\frac{e}{2r}$. Mais $ae\mathrm{L}$ est le volume U de la demi-feuille; le travail développé est donc

$$\frac{\mathrm{EU}\alpha^2}{3}.$$

La même expression s'appliquant à chaque feuille, le travail développé par le ressort sera donc

$$\sum\frac{\mathrm{EU}\alpha^2}{3}.$$

Or, si toutes les feuilles ont le même allongement final et que $2\mathrm{V}$ soit le volume du ressort, le travail développé sera

$$\frac{\mathrm{EV}\alpha^2}{3}.$$

Ce qui montre que le choc que peut amortir le ressort ne dépend que du volume de celui-ci et des allongements qu'on veut faire subir à la substance

Dans les formules qui précèdent et dans celles qui suivront, entrent des quantités d'une nature particulière qu'on appelle des *moments d'inertie*. La considération de ces quantités se présente souvent dans les questions de mécanique rationnelle et appliquée; aussi dans la plupart des traités consacre-t-on un chapitre spécial à leur détermination dans le cas de solides géométriques.

Nous dirons seulement à ce sujet que dans les constructions et les machines, la plupart des pièces présentent des formes telles, que si l'ensemble ne peut être rapporté à l'une de celles pour lesquelles les moments d'inertie sont connus, on peut du moins y rattacher les différentes parties par des additions ou des retranchements, et obtenir en définitive le moment d'inertie du corps tel qu'il existe.

Dimensions des pièces oscillantes dans les machines.

24. Les dimensions d'un grand nombre de tiges ou de prismes qui entrent dans les constructions et dans la composition des machines ne doivent pas être déterminées en se servant simplement de la formule

$$F = E\Omega \frac{i}{l}$$

et faisant en sorte que l'élasticité de la substance ne soit point dépassée. On peut reconnaître en effet que beaucoup de pièces dans les machines, par exemple, étant soumises à des efforts alternatifs de tension et de compression, et par suite exposées à une suite de petits chocs ou du moins à une succession de *mises en charge* qui se répètent à des intervalles très-rapprochés, il en résulte des mouvements vibratoires et des allongements plus considérables que ceux correspondants à une charge permanente. Le principe du travail va nous permettre de calculer ces allongements.

Supposons qu'un prisme AB soit suspendu verticalement par son extrémité supérieure et soit chargé au bas d'un poids P placé sans aucune vitesse acquise. Sous l'effet de ce poids, les fibres s'allongent et le poids s'abaisse en donnant lieu à un travail moteur, tandis que la résistance élastique du prisme, nulle à l'origine du temps, croît avec l'allongement et donne lieu à un travail résistant. Soit à un instant quelconque x l'abaissement de P: la résistance que le prisme exerce sur le corps P, en raison de l'allongement qu'il a éprouvé, a pour valeur

$$\frac{E\Omega x}{L},$$

E étant le coefficient d'élasticité du prisme, Ω l'aire de sa section transversale, et L sa longueur. En appliquant le principe des forces vives au mouvement du corps P, et supposant sa vitesse nulle quand $x = 0$, on trouve

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 2gx - \frac{E\Omega}{LP}gx^2,$$

et l'on voit que $\frac{dx}{dt}$ s'annule pour $x = 0$ et $x = 2l$, l étant l'allongement $\frac{LP}{E\Omega}$ que le prisme éprouverait sous l'action de P supposé en repos. Mettant cette quantité l dans l'équation, résolvant par rapport à dt et intégrant, on trouve

$$x = l\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

ce qui montre que le corps P ou l'extrémité du prisme effectuera une série d'oscillations de même amplitude et de même durée, l'amplitude de chaque oscillation étant égale à $2l$. On conçoit d'ailleurs que si une force verticale agit sur le corps pendant qu'il descend, la force vive de celui-ci et l'amplitude des oscillations en seront augmentées. Ces résultats sont d'une haute importance pour la détermination des dimensions des tiges de ponts suspendus. La pression qu'un homme exerce sur le sol pendant sa marche est variable, et le passage simultané d'un grand nombre de personnes sur un pont peut donner lieu à des pressions intermittentes assez notables; et si celles-ci viennent à coïncider avec les périodes des oscillations du pont, la rupture des tiges de suspension peut en résulter.

Considérons encore une pièce prismatique de machine qui agit en poussant et tirant alternativement. Soit P les pressions égales entre elles qu'elle supporte à ses extrémités. Le raccourcissement des fibres aura pour valeur $\frac{PL}{E\Omega}$. Si les forces de compression se changent tout à coup en forces tirantes, les fibres s'allongeront, et l'allongement ne cessera que lorsque le travail résistant, développé par l'extension des fibres, aura détruit le travail moteur dû aux forces tirantes et l'allongement des fibres comprimées depuis le changement de direction des forces jusqu'à ce que le prisme ait repris ses dimensions primitives. Soit l' l'allongement total maximum du prisme, le travail résistant dû à cet allongement sera $\frac{E\Omega}{2L}l'^2$. Le travail moteur dû au retour des fibres à leur longueur primitive sera $\frac{E\Omega}{2L}l^2$; l étant le raccourcissement initial du prisme sous la pression P; enfin, le travail moteur dû à l'action des forces tirantes P sera

$$P(l + l').$$

On aura donc l'équation

$$P(l+l') + \frac{E\Omega}{2L}l' = \frac{E\Omega}{2L}l'^2;$$

remplaçant P par sa valeur $\frac{E\Omega l}{L}$, on trouve en définitive

$$l' = 3l,$$

résultat qui est de nature à fixer l'attention des constructeurs sur les dimensions à donner aux pièces qui dans les machines sont alternativement étendues et comprimées.

Détermination des volants.

25. La détermination analytique des volants est essentiellement fondée sur le principe des forces vives. Quand on prend la question dans toute sa généralité, le calcul ne permet pas de la résoudre rigoureusement, mais il fournit une formule qu'on peut employer utilement. En simplifiant d'ailleurs les choses par quelques hypothèses admissibles, on arrive à une solution très-suffisante pour la pratique; c'est ce que nous ferons tout d'abord.

Nous considérerons d'abord le cas très-simple d'une manivelle sollicitée par une bielle à action et direction constantes. Nous supposerons cette bielle à double effet, c'est-à-dire agissant constamment sur la manivelle, en la tirant pendant une demi-révolution et la poussant pendant l'autre demi-révolution; nous ne tiendrons aucun compte du poids de la bielle, ni de celui de la manivelle, ni de l'inertie de ces pièces. Nous admettrons enfin que la résistance est une force Q constante, agissant tangentiellement à une circonférence de rayon r ayant même centre que celle décrite par la manivelle.

Soient F la force constante qui agit par l'intermédiaire de la bielle, b le rayon de la manivelle. Pour que le mouvement soit périodiquement uniforme, la période correspondant à un demi-tour, on doit avoir la relation

$$F \times 2b = Q\varpi r,$$

d'où

$$\frac{F}{Q} = \frac{\varpi r}{2b}.$$

Cherchons les positions de la manivelle pour lesquelles sa vitesse, variable pendant chaque demi-tour, atteint son maximum et son minimum. Ces positions sont celles où le travail élémentaire de F est égal au travail de Q, c'est-à-dire où le moment de F égale le moment de Q. α étant l'angle que fait alors la manivelle avec la verticale, on a la relation

$$Fb.\sin\alpha = Qr,$$

d'où

$$\sin\alpha = \frac{2}{\varpi},$$

valeur à laquelle correspondent deux angles

$$\alpha' = 39^\circ 32',$$
$$\alpha'' = 140^\circ 28'.$$

Il y a donc, dans chaque demi-tour, deux positions AB, A'B' de la manivelle qui satisfont à la question, et il est aisé de voir que le premier angle correspond à un minimum et le second à un maximum de la vitesse. D'ailleurs la même chose se reproduisant dans l'autre demi-circonférence, on voit qu'il y a pour chaque tour quatre positions de la manivelle symétriques par rapport aux axes, et qui correspondent successivement à un minimum et à un maximum.

Établissons l'équation des forces vives pour l'intervalle compris entre un minimum et un maximum, par exemple depuis la position AB de la manivelle jusqu'à la position AB', et ne tenons compte que de la force vive du volant; en négligeant celles de l'arbre, de la manivelle et de la bielle, on a

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\,MR^2 = F.2b\cos\alpha - Qr(\varpi - 2\alpha),$$

ω_1 et ω_0 étant les vitesses angulaires maximum et minimum, M la masse du volant et R son rayon de giration.

Il est aisé de conclure de là les dimensions que doit avoir le volant pour donner au mouvement de la manivelle un degré de régularité déterminé, en supposant ce volant un anneau à section rectangulaire, et en négligeant l'influence des bras qui rattachent celui-ci à l'arbre. En effet, on peut écrire l'équation sous la forme

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\,MR^2 = 4bF\left(\frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\frac{\varpi}{2} - \alpha}{\varpi}\right);$$

remplaçant α par sa valeur, on a

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\,MR^2 = 4bF \times 0{,}1052 \quad (*).$$

(*) Dans le cas d'une manivelle à simple effet, on a

$$\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_0^2)\,MR^2 = 2bF \times 0{,}5521,$$

Supposons que la différence entre les vitesses angulaires maximum et minimum doive être une fraction $\frac{1}{n}$ de la vitesse moyenne Ω; qu'on ait par conséquent

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{1}{n}\left(\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}\right),$$

l'équation deviendra

$$\frac{1}{n}\Omega^2\,\mathrm{MR}^2 = 0{,}1052.4\,b\mathrm{P},$$

d'où l'on tirera

$$\mathrm{MR}^2 = 0{,}1052.4\,b\mathrm{P} \times \frac{n}{\Omega^2}.$$

ce qui permettra de prendre à volonté M ou R (qui peut être le rayon moyen de l'anneau). On voit tout l'avantage qu'il y a à augmenter le rayon plutôt que la masse.

Les résultats qui précèdent sont applicables aux machines à vapeur, dans les hypothèses qui les ont fait obtenir. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une machine à vapeur à haute pression, sans détente ni condensation, présentant les conditions suivantes : surface du piston $= 1000$ centimètres carrés; rayon de la manivelle $= 0{,}25$; pression effective de la vapeur $= 4$ kilogrammes par centimètre carré; vitesse moyenne du bouton de la manivelle $= 1$ tour par seconde; $\frac{1}{n} = \frac{1}{50}$.

On conclut de ces données

$$\mathrm{P} = 4000^{\mathrm{kg}},$$
$$\Omega = 2\varpi = 6{,}28,$$

et

$$\mathrm{MR}^2 = 533;$$

et si l'on suppose $\mathrm{R} = 2^{\mathrm{m}}$, on aura

$$\mathrm{M} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{II}}{g} = 133,$$

d'où

$$\mathrm{II} = 1305^{\mathrm{kg}}.$$

On évalue ordinairement dans l'industrie la puissance des machines par le nombre de chevaux dynamiques que développe sur elles le moteur;

---

ce qui montre qu'alors l'excès du travail moteur sur le travail résistant est cinq fois plus grand que ce même excès dans le cas d'une manivelle à double effet.

m étant le nombre des révolutions de la machine par minute, N le nombre de chevaux de la puissance qui représente toutes les résistances réunies, on a

$$N = \frac{m \times 2\varpi r}{60 \times 75} \cdot Q = \frac{m}{60 \times 75} + 4b \,.\, F\,;$$

on a donc

$$\frac{1}{n} MR^2 \Omega^2 = 0{,}1052 \times \frac{60 \times 75}{m} N,$$

ou

$$\Pi V^2 = 4645 \frac{n}{m} N,$$

formule qui est donnée dans les Traités de mécanique appliquée pour calculer le poids Π d'un volant de machine à vapeur, dont la vitesse à la circonférence moyenne est représentée par V. Il importe de remarquer que le nombre m se rapporte essentiellement à l'arbre de la manivelle, et non au volant que l'on établit quelquefois sur un arbre différent, afin de lui donner une plus grande vitesse.

On pourra déterminer le nombre de chevaux N de la formule précédente au moyen d'une expérience avec le frein dynamométrique de Prony ou avec l'indicateur de Watt, s'il s'agit d'une machine à vapeur déjà construite. On pourra encore dans ce cas, et dans celui où il s'agirait d'un projet de construction, calculer le même nombre, connaissant la pression effective de la vapeur, la durée de l'admission si la machine est à détente, le diamètre et la course du piston, la longueur de la bielle si l'on veut tenir compte de son obliquité, et en employant, si l'on veut, des procédés graphiques qui conduisent à mesurer des surfaces planes, ce qu'on peut faire avec une exactitude suffisante au moyen de la formule de Thomas Simpson ou de celle de M. Poncelet.

26. Supposons maintenant qu'on veuille tenir compte du poids et de l'inertie des pièces oscillantes. Soient p (*fig.* 14) le poids de l'équipage agissant en C, q celui de la bielle agissant au milieu G de celle-ci, et qu'on peut décomposer en deux autres, savoir $\frac{1}{2}q$ appliqué en C qui s'ajoute avec p, et $\frac{1}{2}q$ en B qui s'ajoute avec la composante du poids du bras AB de la manivelle pour donner une somme que nous représenterons par q'. Nous admettrons que la vitesse angulaire de la manivelle, quand celle-ci prend la position verticale AE, diffère très-peu de la vitesse moyenne Ω, ce qui est permis puisque nous supposons le volant convenablement établi.

Pour appliquer l'équation des forces vives au cas actuel, nous avons à tenir compte, non-seulement de la force vive du volant, mais encore de celle de la bielle et de l'équipage qui agit à son extrémité. Nous rechercherons d'abord les valeurs de ces quantités en supposant que la manivelle, partie de la position verticale AE, s'est éloignée de cette position d'un angle α, et possède alors une vitesse angulaire ω.

L'accroissement de la force vive du volant aura pour expression

$$\frac{\mathrm{H}}{g}\mathrm{R}^2(\omega^2 - \Omega^2).$$

Le terme correspondant pour la bielle s'obtient aisément au moyen du théorème de M. Chasles dont l'emploi est si précieux quand on veut étudier le mouvement des pièces oscillantes dans les machines, théorème qui consiste en ce qu'un déplacement élémentaire quelconque d'une figure plane dans son plan, provient de sa rotation autour d'un certain point fixe du plan qu'on obtient par la rencontre des normales aux éléments courbes que décrivent simultanément deux quelconques des points de la figure. Ainsi, dans le cas qui nous occupe, tous les points de la bielle BC tournent simultanément autour de l'intersection I des normales IC et IB aux éléments df et $bd\alpha$ décrits par les points C et B, de manière que l'angle BIC reste invariable dans ce déplacement supposé infiniment petit.

On a, d'après cela,

$$\frac{df}{bd\alpha} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{BI}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AB}},$$

d'où

$$\frac{df}{d\alpha} = \mathrm{AO}.$$

Soient maintenant $d\theta$ l'angle infiniment petit décrit par BC autour du point I, tandis que B parcourt l'arc $bd\alpha$ ou C parcourt df; dm un élément de la masse de la bielle, situé à une distance ρ de l'axe de rotation instantané, perpendiculaire au plan de la figure en I; $d\sigma$ son déplacement infiniment petit dirigé suivant la perpendiculaire à l'extrémité de ρ: on aura pour la force vive de l'élément dm,

$$dm\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2.$$

Mais

$$d\sigma = \rho\, d\theta = \rho\,\frac{bd\alpha}{\mathrm{BI}};$$

donc

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{b}{\mathrm{BI}}\rho\omega.$$

La force vive totale de la bielle sera donc

$$\frac{b^2\omega^2}{\overline{\mathrm{BI}}^2}\int \rho^2\, dm,$$

intégrale qu'il faut étendre à la masse entière de cette pièce. Si d'ailleurs on appelle I son moment d'inertie pris par rapport à un axe parallèle, passant par ce centre de gravité, on aura plus simplement, pour l'expression de la force vive,

$$\frac{b^2.\omega^2}{\overline{\mathrm{BI}}^2}\left(\frac{q}{g}\overline{\mathrm{IG}}^2 + \mathrm{I}\right).$$

Pour la position verticale $\omega = \Omega$, $\mathrm{IG} = \frac{1}{2}l$, $\mathrm{IB} = l$; on a donc, pour la force vive de la bielle dans cette position,

$$\frac{b^2\Omega^2}{l^2}\cdot\left(\frac{q}{4g}l^2 + \mathrm{I}\right).$$

Quant à la force vive de l'équipage en C, elle est nulle pour la position verticale de la manivelle, et pour la seconde position elle a pour valeur

$$\frac{p}{g}\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{p}{g}\left(\frac{df}{d\alpha}\right)^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{p}{g}\overline{\mathrm{AO}}^2.\omega^2;$$

écrivant maintenant l'équation des forces vives, on a

$$\begin{aligned}\frac{\Pi}{g}(\Omega^2 - \omega^2) + \frac{b^2}{\overline{\mathrm{BI}}^2}\left(\frac{q}{g}\overline{\mathrm{IG}}^2 + \mathrm{I}\right)\omega^2 - \frac{b^2}{l^2}\left(\frac{q}{4g}l^2 + \mathrm{I}\right)\Omega^2 + \frac{p}{g}\overline{\mathrm{AO}}^2\omega^2 \\ = 2\int_0^\alpha \left(p + \frac{1}{2}q + \mathrm{F}\right)df + 2q'b(1 - \cos\alpha) - 2\mathrm{Q}r\alpha,\end{aligned}$$

d'où l'on pourra tirer la valeur de ω, pour chaque position α de la manivelle. Cette valeur est calculable pour chacune des positions de l'appareil au moyen des lignes de la figure; car l'expression $\int_0^\alpha \mathrm{F}df$ est supposée donnée ou calculable par les méthodes de quadrature connues, et la force constante ou moyenne Q est donnée par la relation

$$2\varpi r\mathrm{Q} = \int_0^{2\varpi}\mathrm{F}df.$$

Mais le moment d'inertie de l'arbre de la manivelle et du volant entrant dans l'équation, on ne pourra pas appliquer celle-ci à la détermination de ce volant; car il ne sera pas possible d'en conclure les valeurs explicites de la plus petite et de la plus grande des vitesses angulaires de la machine ou des angles α', α'', dont la connaissance est, comme on la vu, indispensable pour opérer cette détermination. L'analyse ne peut donc donner la solution cherchée. Elle conduit cependant à une équation dont on peut se servir pour arriver à une détermination suffisamment exacte du volant. Voici comment on peut alors procéder : On calculera approximativement le moment d'inertie au moyen de la formule que nous avons primitivement établie, en négligeant le poids et l'inertie des pièces. Substituant sa valeur dans l'équation générale ci-dessus, on pourra déduire de celle-ci les valeurs de ω pour une suite de positions de la manivelle prises de 15 degrés en 15 degrés, par exemple : cela permettra de construire la courbe des vitesses angulaires et de connaître, par conséquent, les vitesses minima et maxima et les angles qui leur correspondent. On examinera alors si leur différence est sensiblement égale à celle qu'on s'est donnée. Si la limite n'est pas atteinte ou est dépassée, on recommencera les opérations en prenant une valeur plus forte ou plus faible du moment d'inertie du volant; on parviendra ainsi par une suite de tâtonnements à trouver la valeur convenable, et les opérations à effectuer ne sauraient être très-nombreuses, à cause des données qu'on possède déjà sur les limites de la solution.

Vu et approuvé.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris.

CAYX.

THÈSE DE GÉOMÉTRIE.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE PLUSIEURS THÉORÈMES SUR LA COURBURE DES SURFACES.

PROGRAMME.

Les théorèmes remarquables de Gauss sur la courbure des surfaces et les conséquences qu'en ont tirées Jacobi et M. Bonnet peuvent être présentés très-simplement, au moyen de considérations géométriques, et devenir ainsi susceptibles de passer dans l'enseignement élémentaire. Mais il est nécessaire de renverser l'ordre qui a été suivi dans la découverte des propositions dont il s'agit; et voici la méthode d'exposition qu'il convient alors d'adopter (*).

Définitions.

Nous poserons d'abord quelques définitions :

1°. Concevons une sphère qui ait pour rayon l'unité; menons par son centre une parallèle à une droite quelconque AB de l'espace; le point où cette parallèle viendra percer la surface sphérique servira à *représenter la direction* AB.

2°. Si plusieurs droites de l'espace *sont situées dans un même plan*, il en sera de même de leurs parallèles menées par le centre de la sphère, et celles-ci rencontreront la surface sphérique suivant un grand cercle qui *représentera le plan*.

3°. Considérant un point M d'une surface quelconque, menons la normale en ce point et une parallèle à cette droite par le centre de la sphère, nous obtiendrons un point M' sur celle-ci, que nous regarderons comme *représentant le point considéré*.

(*) *Voir* le Mémoire de Gauss dans le tome VI des *Nouveaux Mémoires de la Société royale de Gottingue*; le Mémoire de Jacobi dans le *Journal de Crelle*, tome XVI; le Mémoire de M. Bonnet dans le *Journal de l'École Polytechnique*, tome XIX; les Mémoires de MM. Bertrand et Puiseux dans le *Journal de Mathématiques*, tome XIII. M. Bertrand a d'ailleurs traité la question qui nous occupe, dans ses leçons au Collége de France, et nous l'avons pris pour guide.

4°. Une portion limitée S d'une surface quelconque sera représentée par une portion S' de surface sphérique, que nous appellerons *la courbure totale de l'aire* S.

5°. Si l'on conçoit que la surface S se resserre de plus en plus autour d'un point M situé à son intérieur, S' se resserrera aussi autour du point correspondant M', et la limite du rapport $\frac{S'}{S}$ est appelée *la courbure* de la surface donnée en M. On aperçoit aisément que ces définitions de la courbure totale et de la courbure d'une surface reposent sur la comparaison de quantités analogues pour les surfaces et les courbes.

Ier Théorème (M. Bonnet).

M. Bonnet a déduit des théorèmes de Gauss la proposition suivante qu'il est facile d'établir à priori :

« Si l'on trace sur une sphère une courbe quelconque fermée, puis une » suite de grands cercles tangents à la courbe, et qu'on prenne sur chacun » d'eux, à partir du point de contact, une longueur égale à un quadrant, » le lieu géométrique des points ainsi obtenus divise la surface de la sphère » en deux parties équivalentes. »

IIe Théorème (Gauss).

En s'appuyant sur le théorème précédent et sur le mode de représentation des droites, plans et surfaces indiqué dans les définitions, on démontre la proposition suivante due à Gauss :

« Si l'on trace sur une surface quelconque trois lignes géodésiques com- » prenant une aire triangulaire, la courbure totale de cette aire a pour » mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur deux angles » droits. »

IIIe Théorème (M. Bonnet).

« Quand les trois lignes qui limitent l'aire considérée ne sont pas géodé- » siques, la courbure totale a pour expression l'excès de la somme des trois » angles sur deux angles droits, *moins* ou *plus* la somme des angles de con- » tingence géodésiques pour les trois côtés ; le signe *moins* correspondant » au cas où la corde géodésique est intérieure au triangle considéré, le » signe *plus* au cas où elle est extérieure. » On peut déduire de là la courbure totale d'une aire polygonale ou terminée par une courbe quelconque.

IVe Théorème (Gauss).

« Si l'on a une surface quelconque flexible, mais inextensible, sa cour-

» bure définie comme on l'a dit, c'est-à-dire la limite du rapport $\frac{S'}{S}$ ne
» change pas, quelle que soit la déformation qu'on fasse subir à cette surface. »

Ce théorème très-remarquable, que Gauss a découvert par le secours d'une analyse compliquée, résulte de la proposition précédente et de quelques considérations accessoires, ainsi que nous allons l'indiquer sommairement.

On peut d'abord reconnaître, en prenant pour S un petit rectangle formé par les lignes de première et de deuxième courbure correspondant au point considéré, que le rapport $\frac{S'}{S}$ équivaut à $\frac{1}{RR'}$, R et R' étant les rayons de courbure des deux côtés du rectangle, ou ce que l'on appelle les deux rayons de courbure de la surface au point considéré; de sorte que la question revient à démontrer que la quantité $\frac{1}{RR'}$ peut être exprimée au moyen d'une fonction qui reste invariable quand la distance de deux points de la surface, mesurée sur celle-ci, ne change pas.

Une surface quelconque peut être représentée par trois équations de la forme

$$x = \varphi_1(p, q),$$
$$y = \varphi_2(p, q),$$
$$z = \varphi_3(p, q),$$

p et q étant des variables indépendantes. Les équations $p =$ constante et $q =$ constante représentant deux séries de courbes tracées sur la surface, peuvent être regardées comme des lignes coordonnées propres à fixer la position de chacun des points de la surface. L'expression de la distance de deux points infiniment voisins pris sur la surface et mesurée sur celle-ci est de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,dp^2 + 2\mathrm{F}\,dp\,dq + \mathrm{G}\,dq^2,$$

E, F, G ne contenant que les variables p et q; c'est la formule dont se sert Gauss. Mais on peut la simplifier beaucoup en choisissant convenablement le système des lignes coordonnées. D'abord si les courbes sont orthogonales, on a $\mathrm{F} = 0$; si de plus les courbes $q =$ constante sont des lignes géodésiques, on a $\mathrm{E} = 1$; de sorte que l'expression de la distance de deux points devient

$$ds^2 = dp^2 + \mathrm{G}\,dq^2,$$

formule qui exprime cette propriété géométrique, que si l'on a un système de lignes géodésiques sur la surface, leurs trajectoires orthogonales sont équidistantes.

Cela posé, appliquons au petit rectangle S le troisième *théorème* : nous obtiendrons la courbure totale qui, divisée par S, donnera la courbure. La courbure totale sera ici l'excès de la somme des quatre angles du rectangle sur quatre angles droits, plus la somme des angles de contingence géodésiques des quatre côtés. Or le premier terme de cette expression est nul ; il en est de même des angles de contingence géodésiques des côtés mn, $m'n'$: il n'y a donc à considérer que les valeurs de ceux relatifs aux côtés nn', mm' qui ne sont pas géodésiques. Mais on peut voir que la somme de ces angles pour un de ces côtés est égale à la différence des deux côtés dont il s'agit divisée par mn ou $m'n'$ qui lui est égale (*fig.* 15). On a donc pour cette somme :

$$-\frac{mm'-nn'}{mn} = -\frac{d(mdq)}{dp} = dq\frac{dm}{dp}.$$

Il faut maintenant retrancher de la valeur que prend cette expression pour nn' celle qu'elle prend pour mm', car il est évident que les termes correspondant à ces deux côtés sont de signes contraires, puisque si l'une des cordes est extérieure au quadrilatère, l'autre sera intérieure. Il suffit donc de prendre la différentielle de l'expression précédente par rapport à p, ce qui donne

$$-dq\frac{d^2m}{dp^2}dp,$$

quantité qu'il faut diviser par $mdpdq$, valeur de S, pour avoir la courbure. On a donc

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{m}\frac{d^2m}{dp^2},$$

expression qui ne contient que G et de laquelle on peut conclure aisément le théorème de Gauss.

Vu et approuvé,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,

Thèses de Mécanique et de Géométrie, par M. Sentis.