QUESTIONS

DE

GÉOMÉTRIE

MÉTHODES ET SOLUTIONS

AVEC

UN EXPOSÉ DES PRINCIPALES THÉORIES

ET DES NOTES SUR LES RAPPORTS ENTRE L'ALGÈBRE ET LA GÉOMÉTRIE

Ouvrage destiné

AUX ÉLÈVES QUI SE PRÉPARENT AUX ÉCOLES,

AU CONCOURS OU A LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PAR

A ~~M.~~ DESBOVES

Agrégé docteur ès sciences, professeur au lycée Bonaparte.

PARIS

CH. DELAGRAVE ET C^ie^, LIB. — ÉDITEURS

58, RUE DES ÉCOLES, 58

1870

PRÉFACE

Un coup d'œil jeté sur la table des matières fera immédiatement comprendre le plan et le but de cet ouvrage. On remarquera surtout la grande importance que l'on a donnée aux lieux géométriques et aux problèmes de maxima et de minima qui font l'objet de deux chapitres spéciaux.

Les questions ont été empruntées, pour la plupart, aux œuvres des principaux géomètres ou aux annales du concours général. J'ai, d'ailleurs, moins cherché à multiplier leur nombre qu'à présenter des solutions variées de questions choisies. Par là, en effet, on voit mieux quelle fécondité de ressources peuvent offrir les méthodes de la Géométrie (*).

Quelques propositions ont été prises dans le *Traité des Porismes d'Euclide*, si merveilleusement rétabli par M. Chasles; et elles ont été appliquées à la résolution de plusieurs problèmes.

On trouvera aussi dans ce volume la solution que *Fermat* a donnée d'un problème que *Pascal* lui avait proposé. Cette solution, empruntée à la correspon-

(*) Un des exemples les plus remarquables a été donné par M. Chasles. — Voyez pages 114 et suivantes.

dance des deux célèbres géomètres, est très-élégante et peut s'appliquer à un certain nombre de problèmes du même genre.

Enfin, j'ai cru devoir résoudre quelques problèmes de maxima et minima par des méthodes analogues à celles qui étaient en usage avant l'invention du calcul différentiel : de cette manière, l'ordre d'enseignement est d'accord avec l'ordre historique. Je me suis, d'ailleurs, d'autant moins fait scrupule de cette innovation, que mes élèves ont trouvé, par les méthodes dont il s'agit, quelques-unes des solutions renfermées dans ce volume et des plus remarquables (*).

L'ouvrage est terminé par des notes où l'on fait voir, à l'aide de quelques exemples choisis, le secours mutuel que l'Algèbre et la Géométrie peuvent se prêter dans un certain nombre de questions.

(*) Plusieurs solutions par les autres méthodes leur sont également dues.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIES GÉNÉRALES

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES TRANSVERSALES.

THÉORÈME I.

1. *Une transversale* DEF *détermine sur les trois côtés d'un triangle* ABC *prolongés, s'il est nécessaire, six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.*

Il faut démontrer que l'on a

$$FA \times EC \times DB = EA \times FB \times DC. \tag{1}$$

Deux cas peuvent se présenter : les trois points D,E,F, ou un seul de ces points, se trouvent sur les prolongements des côtés

Dans la figure (1), qui se rapporte au dernier cas, menons CG parallèle à AB; les deux triangles semblables DCG, DBF donnent

$$\frac{FB}{CG} = \frac{DB}{DC}$$

et les triangles semblables ADF, ECG

$$\frac{CG}{FA} = \frac{EC}{EA}$$

en multipliant, membre à membre, les égalités précédentes, et chassant les dénominateurs, on obtient la relation (1) demandée.

Dans le second cas, la démonstration est la même.

Remarque. Il est souvent commode, pour les applications, de prendre la relation entre les six segments sous la forme suivante.

$$\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1 \tag{2}$$

THÉORÈME II.

2. Réciproquement, *trois points* D, E, F *sont en ligne* *droite, lorsqu'ils ont, sur les côtés d'un triangle* ABC *ou sur leurs prolongements, l'une des deux positions indiquées plus haut; et que, de plus, ils déterminent six segments tels que les relations* (1) *ou* (2) *soient satisfaites.*

En effet, soit D′ (fig. 1) le point où la droite EF prolongée vient rencontrer AC, on a, d'après le théorème précédent

$$FA \times EC \times DB' = E'A \times FB \times DC'$$

divisant, membre à membre, cette égalité et l'égalité (1) qui a lieu, par hypothèse, il vient

$$\frac{D'C}{D'B} = \frac{DC}{DB}$$

et, comme les points D et D′ sont tous deux sur le prolongement de BC, ils se confondent ; et, par suite, les trois points D,E,F sont en ligne droite.

Dans l'autre cas de figure, la démonstration est la même.

THÉORÈME III.

3. *Trois droites,* AD, BE, CF *qui partent des trois sommets d'un triangle* ABC, *et se coupent en un même point* G *du plan, déterminent, sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements, six segments tels que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.*

Il peut arriver que les trois points soient sur les côtés eux-mêmes, ou que l'un d'eux soit sur l'un des côtés, et les deux autres sur les prolongements des derniers.

Considérons le premier cas (fig. 2).

Si l'on applique le théorème 1, successivement, aux triangles ABC, ADC coupés, le premier, par la transversale CF, le second, par la transversale BE, on a

$$FA \times GD \times CB = GA \times FB \times CD$$
$$GA \times BD \times CE = FA \times GD \times BC$$

et en multipliant ces égalités, membre à membre, après la suppression des facteurs communs, on obtient la relation demandée

$$(3)\qquad FA \times EC \times DB = EA \times AFB \times DC$$

on peut aussi la mettre sous la forme

$$(4)\qquad \frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$$

La démonstration est la même pour le second cas.

THÉORÈME IV.

4. Réciproquement, *si trois points* D, E, F *ont, sur les côtés d'un triangle* ABC *ou sur leurs prolongements, l'une des deux positions relatives, indiquées dans le théorème précédent, et que les relations* (3) *ou* (4) *soient satisfaites, les droites qui joignent les sommets du triangle aux trois points donnés se coupent en un même point.*

La démonstration est la même que pour le théorème II.

APPLICATIONS DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS.

5. On fait usage de ces théorèmes pour démontrer que trois points sont en ligne droite, ou que trois droites se coupent en un même point.

1. *Dans tout triangle* ABC (fig. 3) *les pieds* E *et* F *de deux bissectrices intérieures* BE *et* CF, *et le pied* D *de la bissectrice extérieure* AD, *correspondant au troisième sommet* A, *sont en ligne droite.*

En effet, on a

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB} \qquad \frac{FA}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

et en multipliant, membre à membre, il vient

$$\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$$

les trois points sont donc en ligne droite (th. II).

On prouverait de même que *les pieds des trois bissectrices extérieures sont en ligne droite.*

2. *Un cercle étant circonscrit à un triangle* ABC (fig. 4),

si par chaque sommet on lui mène une tangente, et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre du côté opposé, les trois points de rencontre seront en ligne droite.

Soit D le point où la tangente en A rencontre le côté BC, les deux triangles semblables ABD, ACD donnent

$$\frac{DB}{AD}=\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

et, en multipliant, membre à membre, ces égalités, on a

$$\frac{DB}{DC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

E et F étant les points où les tangentes en B et C rencontrent les côtés opposés, on a de même

$$\frac{EC}{EA}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}\quad \frac{FA}{FB}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}$$

et en multipliant, membre à membre, les trois dernières égalités, il vient

$$\frac{DB}{DC}\times\frac{EC}{EA}\times\frac{FA}{FB}=1$$

le théorème est donc démontré.

3. Hexagone de Pascal. *Un hexagone* ABCDEF (fig. 5) *étant inscrit dans un cercle, si on prolonge les côtés opposés jusqu'à leur rencontre, les trois points d'intersection* G,H,I *sont en ligne droite.*

En effet, considérons le triangle LHN formé par les côtés AB,CD,EF prolongés, et appliquons le théorème I à ce triangle coupé par les trois autres côtés BC, DE et AF de l'hexagone, on aura les égalités suivantes :

$$(1)\qquad \begin{aligned} BL\times HN\times CM&=BM\times CN\times HL\\ DM\times EN\times LG&=DN\times EL\times GM\\ AL\times IM\times FN&=FL\times IN\times AM\end{aligned}$$

Multipliant ces égalités, membre à membre, et observant qu'on a, en vertu d'un théorème connu

$$
(2) \qquad \begin{aligned} AL \times BL &= FL \times EL \\ AM \times BM &= CM \times DM \\ CN \times DN &= EN \times FN \end{aligned}
$$

il vient, toutes simplifications faites,

$$
(3) \qquad GL \times HN \times IM = GM \times HL \times IN
$$

Comme, d'ailleurs, les trois points G,I,H, sont tous trois sur les prolongements des côtés du triangle LMN, ou deux sur les côtés, et le troisième sur le prolongement du dernier, on en conclut (th. II) qu'ils sont en ligne droite.

Remarque. Dans le théorème de l'hexagone les côtés ne figurent que par leur direction. Il en résulte que si deux sommets consécutifs se rapprochent jusqu'à ce qu'ils se confondent, le côté correspondant devient une tangente au cercle; on pourra donc appliquer le théorème de Pascal au pentagone, au quadrilatère et au triangle, en complétant ces figures par les tangentes en un ou plusieurs sommets.

Le cas du triangle a été traité directement dans l'exemple précédent.

4. *Si deux triangles* ABC *et* A′B′C′ (fig. 6) *ont leurs sommets* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′ *situés, deux à deux, sur trois droites* SL, SM, SN *qui concourent en un même point* S, *les points de rencontre* D,E,F *des côtés opposés sont en ligne droite.*

En effet si on considère les trois triangles SAB, SAC, SBC coupés, respectivement, par les transversales FA′B′, EC′A′, DB′C′, on a

$$
\begin{aligned} FB \times B'S \times A'A &= FA \times B'B \times A'S \\ EA \times C'C \times A'S &= EC \times C'S \times A'A \\ DC \times B'B \times C'S &= DB \times B'S \times C'C \end{aligned}
$$

et en multipliant les égalités, membre à membre, et supprimant les facteurs communs, il vient

$$
FB \times DC \times EA = FA \times DB \times EC
$$

donc, d'après leur situation, les trois points D, E, F sont en ligne droite (th. II).

5. Réciproquement *si les points de rencontre* D,E,F *des côtés des deux triangles* ABC, A'B'C' *pris, deux à deux, sont en ligne droite, les droites* AA', BB', CC' *se coupent en un même point* S.

Soit S le point de rencontre de BB' et CC', il faut prouver que les trois points A,A',S sont en ligne droite.

Pour cela, considérons les trois triangles DBB',BDF,DFB' coupés, respectivement, par les transversales SCC',ACE,EA'C' on a

$$\frac{SB'}{SB} \times \frac{CB}{CD} \times \frac{C'D}{C'B'} = 1 \quad \frac{AB}{AF} \times \frac{EF}{ED} \times \frac{CD}{CB} = 1$$

$$\frac{A'F}{A'B'} \times \frac{C'B}{C'D} \times \frac{ED}{EF} = 1$$

et, en multipliant ces égalités, membre à membre, il vient

$$\frac{SB'}{SB} \times \frac{AB}{AF} \times \frac{A'F}{A'B'} = 1$$

et comme les trois points A,A',S sont situés, comme il convient, sur les côtés indéfinis du triangle BB'F, le théorème est démontré.

Les triangles ABC,A'B'C' sont dits *homologiques;* S est un *centre*, et la droite DEF *un axe d'homologie.*

6. *On démontre facilement par l'application du théorème IV, que dans tout triangle, les trois médianes, les trois bissectrices, les trois hauteurs, les droites qui joignent les sommets aux points de contact du cercle inscrit, se coupent en un même point.*

Les exemples qui précèdent suffisent pour faire comprendre l'utilité des quatre théorèmes fondamentaux: d'autres applications seront données plus tard.

NOTE SUR L'EMPLOI DES SIGNES DANS LA THÉORIE DES TRANSVERSALES (*).

6. Les équations entre six segments qui expriment que

(*) Les élèves peuvent laisser cette note de côté à une première lecture.

trois points sont en ligne droite, ou que trois droites se coupent en un même point sont, jusqu'à présent, de forme identique. Il importe cependant de pouvoir les distinguer : c'est ce qu'on a fait, comme on va le voir, en donnant des signes aux segments.

Pour fixer la position d'un point sur une droite, il faut connaître sa distance à un autre point de la droite pris pour origine, et le sens dans lequel cette distance doit être portée : mais si l'on convient de faire précéder le nombre qui mesure la distance, du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la droite est parcourue, de l'origine au point, dans un sens ou dans un autre, la position de ce point sera déterminée, dès que l'on connaîtra sa distance à l'origine, en grandeur et en signe.

Cela posé, considérons le triangle ABC coupé par la transversale DEF (fig. 1). Soient D,E,F les origines des segments et convenons que le sens des segments positifs est, par exemple, celui dans lequel on parcourt le périmètre du triangle, lorsqu'on suit l'ordre alphabétique des lettres A,B,C. Alors les deux segments EA et FB sont positifs, tandis que les quatre autres sont négatifs ; le nombre des segments négatifs est donc pair. Il en serait encore, évidemment, de même, si on changeait le sens des facteurs négatifs, ou si l'on prenait le second cas de figure.

Il résulte de là que les équations (1) et (2) ont encore, chacune, les deux membres de même signe, et conservent toujours la même forme.

Soit maintenant (fig. 2) le triangle ABC et les transversales AD,BE,CF : on voit facilement que, dans ce cas, le nombre des segments négatifs est impair, et que, par suite, les deux membres des équations (3) et (4) sont de signe contraire ; alors, si on convient toujours de conserver le signe $+$ devant les premiers membres, les équations (3) et (4) prendront les nouvelles formes suivantes :

$$\mathrm{FA} \times \mathrm{FC} \times \mathrm{DB} = - \mathrm{EA} \times \mathrm{FB} \times \mathrm{DC}$$

$$\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}} \times \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EA}} \times \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{FB}} = -1$$

On peut voir, d'ailleurs, que l'emploi des nouvelles équations est légitime dans les démonstrations du genre de celles qui ont été faites précédemment.

En effet, quand on multiplie les nouvelles équations en observant la règle des signes, le second membre de l'équation résultante a un signe déterminé ; et suivant qu'il est positif ou négatif, le nombre total des segments négatifs est pair ou impair. Lorsqu'ensuite, pour achever la démonstration, on supprime des facteurs en tenant compte de leur signe, on connaît le signe du second membre de l'équation finale, et, par suite, on sait si le nombre des segments négatifs est pair ou impair. Il n'y a donc aucun doute sur la question de savoir si l'équation finale se rapporte à trois points en ligne droite, ou à l'autre cas.

Éclaircissons ce qui précède par des exemples.

Reprenons d'abord la démonstration du théorème III.

Les deux premières équations du n° 3 ont le signe $+$ dans le second membre : il en sera donc de même de l'équation obtenue en les multipliant membre à membre. Mais si l'on considère comme positifs les segments parcourus dans le sens ABD, pour l'un des triangles, et, par suite, dans le sens ADC, pour l'autre, les segments GA et GD sont chacun, de signe contraire, dans les deux équations du n° (3), et leur suppression n'amène aucun changement de signe. Les deux segments CB et BC, au contraire, sont parcourus en sens opposés ; et il y a, après leur suppression, changement de signe dans le second membre de l'équation finale ; ce second membre est donc précédé du signe —, comme nous l'avons établi à priori.

Prenons, pour second exemple, le théorème de l'hexagone (5).

Les trois équations (1) ont le signe $+$ devant les seconds membres, et il en est de même de l'équation résultant de leur produit. On supprime ensuite douze facteurs ; mais on s'assure que le nombre des facteurs négatifs supprimés est toujours impair : on doit donc mettre le signe — devant le second membre de l'équation (3), et, par suite, les trois points I, H, G sont en ligne droite.

L'explication précédente était nécessaire, car l'emploi qu'on a fait des signes $+$ et $-$ ne se justifie pas de la même manière que dans les problèmes ordinaires de l'algèbre.

On retrouve, au contraire, une application de la théorie des quantités négatives, telle qu'on la présente dans cette partie des Mathématiques, lorsque, pour démontrer les théorèmes du genre de ceux qui nous occupent, on exprime *algébriquement* les rapports des segments, en fonction de certaines quantités : on reconnaît alors que les expressions des rapports ne sont générales qu'à la condition de donner aux segments les signes dont nous sommes convenus. On en verra un exemple (127).

CHAPITRE II.

DIVISION HARMONIQUE D'UNE DROITE. — FAISCEAUX HARMONIQUES. — POLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A UN ANGLE.

7. Définitions. a, b, c, étant trois quantités quelconques rangées par ordre de grandeur décroissante, on dit qu'elles forment une *proportion harmonique*, lorsqu'elles satisfont à la relation

$$\frac{a-b}{a-c}=\frac{a}{c}$$

et la quantité b est dite *moyenne harmonique* entre les deux autres.

De l'égalité précédente on déduit

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

C'est-à-dire que *l'inverse de la moyenne harmonique de* *deux quantités est la moyenne arithmétique entre les inverses de ces mêmes quantités.*

Étant donnés (fig. 7) deux points A et B sur une droite indéfinie, deux points C et D situés sur la même droite sont dits *harmoniques conjugués* par rapport aux deux premiers, lorsque les rapports des distances de ceux-ci aux deux points C et D sont égaux, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

Si dans cette égalité on change les moyens de place, il vient

$$(2) \qquad \frac{CA}{DA} = \frac{CB}{DB}$$

On voit donc que réciproquement les *points* A *et* B *sont harmoniques conjugués par rapport à* C *et* D.

Les trois distances DA, CD *et* DB *forment une proportion harmonique.* En effet, si dans l'égalité (1) on remplace CA et CB par DA — DC, et DC — DB, on a

$$\frac{DA-DC}{DC-DB} = \frac{DA}{DB}$$

On dit, pour cette raison, que quatre points en ligne droite, dont deux sont les conjugués des deux autres, forment une division *harmonique* de la droite.

PROPRIÉTÉS DE LA DIVISION HARMONIQUE.

THÉORÈME I.

8. *Lorsque deux points* C *et* D *sont harmoniques conjugués de deux points* A *et* B, *la moitié de la droite* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux deux points* C *et* D.

En effet, de l'égalité (1) du numéro précédent on déduit

$$\frac{CA-CB}{CA+CB} = \frac{DA-DB}{DA+DB}$$

mais le point O étant le milieu de AB, on voit facilement que l'on a

$$CA - CB = 2OC \qquad CA + CB = 2OA$$
$$DA - DB = 2OA \qquad DA + DB = 2OD$$

et en substituant, dans la proportion précédente, les valeurs des quatre termes donnés par les égalités, il vient

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

Corollaire. *Les carrés des distances des points* C *et* D *au point* A *sont entr'eux comme les distances de ces mêmes points au point* O.

En effet, de l'égalité (2) du n° 7 on déduit

$$\frac{CA}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

d'où, en élevant au carré les deux membres, et remplaçant $\overline{OA}^2$ par OC $\times$ OD, il vient

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{DA}^2} = \frac{OC}{O'D}$$

THÉORÈME II.

9. Réciproquement, *si la moitié d'une droite* AB *est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu* O *à deux points* C *et* D, *pris sur sa direction, et du même côté par rapport au point* O, *les points* C *et* D *sont harmoniques conjugués des points* A *et* B.

En effet, on a, par hypothèse

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

et on en déduit

$$\frac{OA + OC}{OA - OC} = \frac{OD + OA}{OD - OA}$$

ou

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

Remarque. Si on avait voulu donner des signes aux segments, comme dans la théorie des transversales, on aurait été conduit à mettre le signe — devant le second membre de l'équation (1) n° 7 : mais, dans la suite de cet ouvrage, il ne sera fait aucun usage de l'équation ainsi modifiée.

FAISCEAUX HARMONIQUES.

Définition. Quatre droites qui se rencontrent en un même point forment un *faisceau harmonique*, lorsqu'elles déterminent une division harmonique sur une transversale quelconque.

THÉORÈME I.

10. *Lorsqu'un faisceau de quatre droites est coupé par une parallèle à l'une d'elle, est que cette parallèle est partagée en deux parties égales par les trois autres, le faisceau est harmonique.*

Soient (fig. 8) OABCD le faisceau, et EG une parallèle à la droite OD, partagée en deux parties égales au point F : il faut démontrer qu'une transversale quelconque MLK est divisée harmoniquement par le faisceau.

Menons, par le point L, la droite NP parallèle à OD : comme les triangles NLK et MOK, LHP et OHM sont, deux à deux, semblables, on a

$$\frac{NL}{OM} = \frac{KL}{KM} \qquad \frac{LP}{OM} = \frac{LH}{MH}$$

mais les deux segments NL et LP sont égaux, il vient donc

$$\frac{KL}{KM} = \frac{LH}{MH}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Le théorème justifie la définition du faisceau harmonique. En effet, si on prend sur une droite deux segments consécutifs égaux EF et FG, qu'on joigne un point O extérieur à la droite aux trois points E,F,G, et qu'on mène OD parallèle à EG, les quatre droites OE,OF,OG et OD formeront un faisceau harmonique.

THÉORÈME II.

11. Réciproquement, *si un faisceau harmonique est coupé par une transversale parallèle à l'une des droites du faisceau, les trois autres droites divisent la transversale en deux parties égales.*

Soit le faisceau harmonique OABCD (fig. 8), et la transversale NLP parallèle à OD : par le point L menons une transversale quelconque KLHM. Comme dans la démonstration du théorème I, on a

$$\frac{NL}{OM}=\frac{KL}{KM} \qquad \frac{LP}{OM}=\frac{LH}{HM}$$

Mais, la transversale KM étant divisée harmoniquement par les quatre points K,L,H,M, on a

$$\frac{KL}{KM}=\frac{LH}{HM}$$

et, par suite $$NL=LP.$$

THÉORÈME III.

12. *Si l'on joint les points d'une division harmonique d'une droite à un point extérieur à cette droite, on obtient un faisceau harmonique.*

Soit (fig. 8) OKLHM le faisceau obtenu en joignant un point O quelconque aux quatre points K,L,H,M de la division harmonique d'une droite KM. Menons NP parallèle à OM, on aura, comme dans le théorème II

$$NL = LP$$

et, par conséquent, le faisceau sera harmonique (th. I).

THÉORÈME IV.

13. *Dans un faisceau harmonique, on peut remplacer une ou plusieurs droites par leurs prolongements.*

Je dis par exemple que, dans le faisceau OABCD (fig. 8), on peut remplacer la droite OD par son prolongement OI. En effet, une droite NP parallèle à OD est, en même temps, parallèle à son prolongement : mais L est le milieu de NP, donc (th. 1) le faisceau OABCI est harmonique.

POLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A DEUX DROITES QUI SE COUPENT.

THÉORÈME I.

14. *Étant donnees deux droites* LM, NQ (fig. 9) *qui se coupent en* O, *et un point* P *dans leur plan ; si par ce point on mène une transversale quelconque* PAB, *et qu'on prenne le point* C *conjugué harmonique du point* P *par rapport aux deux points* A *et* B *où la transversale coupe les deux droites données : le lieu du point* C *est une ligne droite passant par le point* O.

En effet, si on mène les droites OP et OC, les quatre droites OP, OA, OC et OB forment un faisceau harmonique (th. III), et alors une transversale quelconque menée par le point P sera divisée harmoniquement par les quatre droites : la droite OC est donc le lieu demandé.

Le point P autour duquel tourne la sécante s'appelle le *pôle*, et la droite OC qui est le lieu demandé s'appelle la *polaire*.

Remarque. Les deux droites OP et OC sont telles que chacun des points de l'une, considéré comme pôle, a l'autre droite pour polaire.

THÉORÈME II.

15. *Si, par un point* P *pris dans le plan de deux droites qui* *se coupent* (fig. 9), *on mène deux transversales* PAB, PMN, *le lieu du point d'intersection* D *des diagonales du quadrilatère* ABNM *est la polaire du point* P.

Soit C le point conjugué harmonique de P par rapport à A et B : tirons les droites DP, DC, et prolongeons cette dernière, jusqu'à sa rencontre en E avec la transversale PN. Le faisceau DPACB est harmonique (th. III); mais, dans le faisceau, on peut remplacer DA, DC et DB par leurs prolongements DN, DE et DM (th. IV). Le faisceau DPMEN est donc harmonique, et le point E est conjugué du point P par rapport aux points M et N : la droite CDE est donc la polaire du point P.

CHAPITRE III.

POLE ET POLAIRE DANS LE CERCLE.

THÉORÈME I.

16. *Si, par un point* P *situé dans le plan d'un cercle* C (fig. 10), *on mène une transversale quelconque* PAB, *et qu'on prenne le point* G *conjugué harmonique du point* P *par rapport aux points* A *et* B *où la transversale coupe le cercle* : *le lieu du point* G *est une droite perpendiculaire à celle qui joint le point* P *au centre du cercle.*

Sur la figure, le point P est supposé extérieur au cercle.

Soit F le point conjugué harmonique du point P, situé sur la transversale PE qui passe par le centre, et HI la perpendiculaire en H à cette droite : le théorème sera démontré, si l'on prouve que le point G, où la droite HI rencontre la transversale PB est le conjugué du point P par rapport aux points A et B.

Mais la circonférence décrite sur ED comme diamètre est le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances aux deux points F et D est constant : si alors on mène FA et FB, on aura

$$\frac{FB}{PB}=\frac{FA}{PA} \quad \text{ou} \quad \frac{PA}{PB}=\frac{FA}{FB}$$

La droite FP est donc la bissectrice de l'angle AFL extérieur au triangle BFA, et, par suite, la droite FG perpendiculaire à FP est la bissectrice de l'angle BFA : le point G est donc bien le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A et B.

La démonstration serait la même si le point P était intérieur au cercle.

Définitions. Le point P et la droite IH s'appellent le *pôle* et la *polaire* par rapport au cercle C.

Remarque 1. La division des quatre points P,D,F,E étant harmonique, et le point C étant le milieu de ED; si on désigne par R le rayon du cercle, on aura, pour déterminer la position du point F, la relation

$$CF \times CP = R^2.$$

Remarque 2. Comme conséquence de la formule précédente, on voit que lorsque CP varie depuis l'infini jusqu'à zéro, CF varie depuis zéro jusqu'à l'infini; et que suivant que l'on a

$$CP \overset{>}{\underset{<}{=}} R, \quad \text{on a} \quad CF \overset{<}{\underset{>}{=}} R.$$

Remarque 3. Lorsque le pôle P est extérieur au cercle, la polaire IH est la corde de contact qui correspond aux deux tangentes au cercle, partant du point P; car les deux points du contact I et H sont évidemment les conjugués du pôle sur les deux tangentes.

THÉORÈME II.

17. *Les polaires de tous les points d'une droite par rapport à un cercle passent par le pôle de la droite.*

Soit AB la droite donnée (fig. 11), ED la polaire, par rapport au cercle C, d'un de ses points A, et H le point de rencontre de ED et de la perpendiculaire abaissée du centre C sur la droite donnée.

Menons CA qui rencontre la polaire en I, on aura

$$CI \times CA = R^2.$$

Mais les quatre points A,I,H,B étant sur une même circonférence, puisque les angles I et B sont droits, on a

$$CH \times CB = CI \times CA,$$

donc

$$CH \times CB = R^2$$

et le point H par lequel passe la polaire du point I est bien le pôle de la droite AB.

THÉORÈME III.

18. Réciproquement, *les pôles de toutes les droites passant par un point donné dans le plan d'un cercle sont tous sur la polaire du point par rapport au cercle.*

En effet, H étant le point donné (fig. 11), et ED l'une des droites passant par ce point; abaissons du centre C une perpendiculaire OI sur ED, et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en A avec la polaire AB du point H.

Le point H étant le pôle de la droite AB, on a

$$CH \times CB = R^2$$

mais les quatre points I,A,B,H étant sur une même circonférence, on a aussi

$$CI \times CA = CH \times CB$$

donc

$$CI \times CA = R^2$$

et le point A de la droite AB est le pôle de la droite ED.

Remarque. Les théorèmes II et III montrent que les deux questions de prouver que des droites se coupent en un même point, ou que plusieurs points sont en ligne droite, reviennent l'une à l'autre.

THÉORÈME IV.

19. *Si, de tous les points d'une droite extérieure à un cercle, on mène des couples de tangentes, les cordes de contact passent toutes par le pôle de la droite.*

Le théorème est une conséquence du théorème II, puisque les cordes de contact sont les polaires des points de la droite donnée.

THÉORÈME V.

20. Réciproquement, *si par un point pris dans le plan d'un cercle on mène une sécante quelconque, puis les deux tangentes aux points de rencontre : le point d'intersection des tangentes se trouve sur la polaire du point fixe.*

C'est une conséquence du théorème III.

THÉORÈME VI.

21. *Quand un hexagone est circonscrit à un cercle, les diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point.*

Soit (fig. 12) un hexagone ABCDEF qui touche un cercle aux points I, G, H, K, L, M : menons la diagonale AD et les deux cordes de contact IG et LK.

Les points A et D sont les pôles des cordes IG et LK, et, par conséquent, la diagonale AD est la polaire du point de rencontre P des droites IG et LK (th. III); de même, les diagonales EB et FC seront les polaires des points de rencontre Q et R des deux couples de cordes (GH, LM), (IM, HK).

Mais les trois points P, Q, R sont les points de rencontre des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans un cercle, et, par suite, sont en ligne droite (5) : donc les droites AB, FC, EB se coupent en un même point (th. II).

Le théorème VI est connu sous le nom de *théorème de Brianchon.*

THÉORÈME VII.

22. *Si d'un point* P *pris dans le plan d'un cercle* (fig. 13), *on mène deux transversales quelconques* PAB, PCD, *et les quatre droites* BD, AC, BC, AD : *les points d'intersection* E *et* D *des deux premières et des deux dernières droites sont sur la polaire du point* P.

En effet, soient I et H les harmoniques conjugués du point P, le premier, par rapport aux points A et B, le second, par rapport aux points C et D; la droite IH sera la polaire du point P relativement à l'angle DFC : elle passera donc par les points I et F. Mais la droite IH est aussi la polaire du point P par rapport au cercle: le théorème est donc démontré.

Remarque. On a, maintenant, le moyen de tracer la polaire d'un point par rapport à un cercle, et, par suite, de mener les tangentes à ce cercle par le point, en se servant de la règle seule.

POLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A UN POINT OU UNE DROITE.

23. Dans la discussion d'un problème, un cercle peut être remplacé par un point ou une droite, et on peut alors se demander ce que deviennent le pôle et la polaire : pour cela, on considère le point et la droite comme étant, respectivement, des cercles de rayon nul et infini.

On sait que si l'on désigne par d et d' les distances au centre d'un cercle, d'un point et de sa polaire, on a

$$d\,d' = R^2$$

L'application de cette formule va nous permettre de résoudre tous les cas de la question proposée.

24. *La polaire d'un point par rapport à un point est la perpendiculaire à la droite qui joint les deux points, menée par le second.*

En effet, la formule

$$d\,d' = R^2$$

donne $d' = o$ quand on y fait R égale à o.

25. *La polaire d'un point par rapport à une droite est une parallèle à cette droite, menée du côté opposé au point, à une distance égale à celle de ce point à la droite donnée.*

Soient A et BD (fig. 14) le point et la droite donnés : du point A abaissons AE perpendiculaire sur BD ; et d'un point C pris arbitrairement sur le prolongement de AE, et avec le rayon CE, décrivons une cercle. Il sera tangent à la droite BD, et si FIH est la polaire du point A par rapport à lui, on aura

$$EI = R - IC = R - \frac{R^2}{AE + R} = AE \times \frac{1}{1 + \frac{AE}{R}}$$

faisant $R = \infty$, il vient

$$EI = AE$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

26. *Le pôle d'une droite relativement à un point est ce point lui-même.*

C'est une conséquence évidente de la formule.

27. *Le pôle d'une droite relativement à une droite est un point situé à l'infini sur cette droite.*

En effet, les polaires de tous les points de la première droite sont parallèles à la seconde, et, par conséquent, leur point de concours, c'est-à-dire, le pôle de la première droite est à l'infini.

CHAPITRE IV.

AXES RADICAUX.

28. *Définition.* On appelle puissance d'un point, par rapport à un cercle, le nombre positif ou négatif qui mesure le produit des distances du point au cercle. Ces distances peuvent, d'ailleurs, être comptées sur une sécante quelconque passant par le point ; et leur produit est positif ou négatif, suivant que les points où la sécante coupe le cercle, sont d'un même côté ou de part et d'autre du point donné. L'un ou l'autre cas arrive, quand le point est extérieur ou intérieur au cercle; mais si on désigne par p la puissance du point, par D sa distance du centre, par R le rayon, on a toujours

$$p = D^2 - R^2$$

la considération du signe donné à la puissance permet de réunir ici deux formules en une seule.

THÉORÈME I.

29. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles situés dans le même plan est une ligne droite perpendiculaire à la ligne des centres.*

Soient O et C (fig. 15) les deux cercles donnés, A un point du lieu : menons les droites OA, CA, OC, et du point A abaissons AB perpendiculaire sur OC.

Si on remplace les puissances du point A, par rapport aux deux cercles, par les valeurs que donne la formule générale

$$p = D^2 - R^2,$$

on a, en désignant par R et r les rayons des deux cercles

$$\overline{OA}^2 - R^2 = \overline{CA}^2 - r^2 \quad \text{ou} \quad r^2 - R^2 = \overline{CA}^2 - \overline{OA}^2$$

on est ainsi ramené à un lieu connu : *le lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes est constante.* Ce lieu est, comme on le sait, une ligne droite perpendiculaire à celle qui joint les deux points.

Ici les deux points fixes sont O et C, le lieu cherché est donc bien une perpendiculaire à la ligne des centres O C.

La droite, lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles, s'appelle l'*axe radical* de ces deux cercles.

Remarque. Si on désigne par d la distance des centres, par e la distance OD, on a la formule

$$(1)\qquad e=\frac{d^2+R^2-r^2}{2\,d}$$

Car E étant le milieu de OC, on a

$$\overline{CA}^2-\overline{OA}^2=2d\times ED$$

et, par suite,

$$ED = R^2-r^2$$

et

$$e=\frac{d}{2}+\frac{R^2-r^2}{d}=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$$

POSITIONS DE L'AXE RADICAL PAR RAPPORT A DEUX CERCLES.

30. *Lorsque les cercles sont extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre, l'axe radical leur est toujours extérieur.*

En effet, si l'axe radical rencontrait l'un des cercles en chaque point de rencontre, la puissance du point serait nulle par rapport à ce cercle ; il en devrait être de même par rapport à l'autre, puisque le point appartient à l'axe radical : les deux cercles auraient donc deux points communs ; ce qui est contre l'hypothèse.

31. *Quand deux cercles sont sécants, la corde commune est l'axe radical.*

En effet, les deux points d'intersection sont de puissance nulle par rapport aux deux cercles.

32. *Quand deux cercles sont tangents, l'axe radical est la tangente commune.*

Cela est évident, puisque le point de contact est de puissance nulle par rapport aux deux cercles.

33. *Quand deux cercles sont concentriques, l'axe radical est à l'infini.*

En effet, les centres O et C étant confondus, les puissances d'un point quelconque A, c'est-à-dire OA^2-R^2 et OA^2-r^2 sont différentes tant que le point A n'est pas à l'infini.

Remarque. La formule (1) n° 29 conduirait très-facilement aux conséquences qui précèdent.

THÉORÈME II.

34. *Lorsque trois cercles sont situés dans un même plan et que leurs centres ne sont pas en ligne droite : les axes radicaux des cercles pris, deux à deux, se coupent en un même point.*

En effet, soient C, C' et C'' les trois cercles : les axes radicaux de C et C', et de C et C'' se coupent : alors, leur point d'intersection est d'égale puissance par rapport aux cercles C' et C'', et se trouve sur leur axe radical : Ainsi les trois axes radicaux se coupent en un même point.

35. Le point de rencontre des trois axes radicaux de trois cercles pris, deux à deux, est dit le *centre radical.*

Quand il est extérieur aux trois cercles, il est le centre d'un cercle qui les coupe à angle droit. En effet, du centre radical, on peut mener trois tangentes égales aux trois cercles donnés, puisque le point est d'égale puissance par rapport à eux. Ils seront donc coupés à angle droit par le cercle qui a, pour rayon, l'une des tangentes, et pour centre, le centre radical.

36. Quand les centres des trois cercles sont en ligne droite, le centre radical est un point situé à l'infini, ou indéterminé, suivant que les cercles C et C', C et C'' pris, deux à deux, ont des axes radicaux, distincts ou identiques.

DÉTERMINATION DE L'AXE RADICAL DE DEUX CERCLES.

37. Quand les deux cercles sont sécants ou tangents, on a immédiatement l'axe radical.

Quand ils sont extérieurs ou intérieurs, on les coupe par un troisième ; on mène les cordes communes qu'on prolonge jusqu'à leur point de rencontre, et de ce point on abaisse une perpendiculaire sur la ligne des centres donnés : cette perpendiculaire sera l'axe radical demandé (34).

AXE RADICAL, QUAND L'UN DES CERCLES OU TOUS DEUX SONT REMPLACÉS PAR DES POINTS ET DES DROITES.

38. Un point étant considéré comme un cercle de rayon nul, la définition de l'axe radical s'applique toujours, lorsqu'un ou deux cercles sont remplacés par des points.

Dans le cas de deux points, l'axe radical est évidemment la perpendiculaire élevée sur le milieu de la ligne qui joint les deux points.

Dans le cas d'un cercle et d'un point, on peut se servir pour la détermination de l'axe radical du théorème suivant.

39. *L'axe radical d'un point et d'un cercle est à égale distance du point et de sa polaire par rapport au cercle.*

Pour démontrer ce théorème, faisons r égal à zéro dans la formule (1) (29), il vient

$$2e = d + \frac{R^2}{d}$$

C et A (fig. 16) étant le cercle et le point donnés, BD la polaire du point, FG l'axe radical, la formule précédente devient

$$2\,CI = CA + CE$$

le point I est donc le milieu de EA.

Remarque. Quand le point A est extérieur, la démonstration est intuitive, comme le montre la figure.

40. *L'axe radical d'une droite et d'un cercle ou d'un point, est la droite elle-même.*

Soient C et AB (fig. 17) le cercle et la droite donnés : du centre on abaisse une perpendiculaire CH sur AB, et on la prolonge d'une longueur arbitraire OH, puis du point O, comme centre, avec OH pour rayon, on décrit une circonférence. Traçons aussi l'axe radical EF des deux cercles O et C.

La distance DH de la droite donnée et de l'axe radical s'obtient à l'axe de la formule 1 (29), on a

$$DH = e - R = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d} - R = \frac{(d-R)^2 - r^2}{2d} = \frac{\overline{HC}^2 - r^2}{2d}$$

Si l'on suppose maintenant que le point O passe à l'infini, la limite du cercle OH est la droite AB; mais alors la distance d devient infinie, et la formule précédente donne pour DH une valeur nulle : l'axe radical se confond donc avec la droite donnée.

Ce qui précède s'applique évidemment au cas d'une droite et d'un point.

41. *Deux droites n'ont pas d'axe radical.*

Supposons, d'abord, les deux droites données parallèles. Soient AB et GK ces deux droites (fig. 17), on a, comme on l'a vu

$$\mathrm{DH} = \frac{\overline{\mathrm{HC}}^2 - r^2}{2d} = \frac{(\mathrm{IH} + 2r) \times \mathrm{IH}}{2d}$$

et si on suppose que les deux centres aillent ensemble, à l'infini, on trouve pour DH une valeur indéterminée.

Si les deux droites données AB, AD (fig. 18) se coupent en A; menons en ce point, deux droites, de longueurs arbitraires, AO et AC, respectivement perpendiculaires à AB et AD, et considérons ces deux dernières droites, comme limites de cercles dont les rayons soient AO et AC : l'axe radical des deux droites sera la position limite de la droite AE perpendiculaire à OC; mais cette position limite est évidemment indéterminée.

CHAPITRE V.

FIGURES HOMOTHÉTIQUES.

42. Deux figures sont dites *homothétiques*, lorsque leurs points sont, deux à deux, sur des droites qui concourent en un même point, et que le rapport des distances de ce point aux points ainsi associés, deux à deux, est un nombre constant.

Les droites concourantes s'appellent *rayons recteurs*, leur point de rencontre *centre*, et le nombre constant, *rapport d'homothétie*. Les points qui se correspondent dans les deux figures sont dits *homologues*, et il en est de même des droites qui joignent deux pareils points : l'homothétie est, d'ailleurs, *directe* ou *inverse*, suivant que les points homologues sont, d'un même côté, ou, de part et d'autre, du centre d'homothétie.

On déduit de la définition générale les conséquences suivantes qui sont évidentes.

(1). On obtient toutes les figures homothétiques d'une figure donnée, en changeant, à la fois, le centre et le rapport d'homothétie.

(2). Deux droites homologues sont parallèles, et de même sens, ou de sens contraire, suivant que l'homothétie est directe ou inverse, et, dans tous les cas, leur rapport est égal au rapport d'homothétie.

(3). Deux polygones homothétiques sont semblables.

(4). La figure homothétique d'une circonférence est elle-même une circonférence.

THÉORÈME I.

43. *Si les rayons vecteurs menés de deux points quelconques aux différents points de deux figures pris, deux à deux, sont parallèles et proportionnels, les deux figures sont homothétiques ; et l'homothétie est directe ou inverse, suivant que les rayons vecteurs sont de même sens ou de sens contraire.*

En effet, soient C et C′ (fig. 19) les deux points d'où partent les rayons vecteurs, A et A′ deux points correspondants des deux figures ; menons les droites CA, CA′, CC′ et AA′, et prolongeons ces deux dernières jusqu'à leur point de rencontre en O.

Il résulte des hypothèses de l'énoncé, que les deux triangles OAC, OA′C′ sont semblables, et l'on a

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{CA}{C'A'}$$

donc, le rapport de OC à OC′ est constant, et le point O reste le même, quels que soient les deux points correspondants A et A′ : le rapport de OA à OA′ est, d'ailleurs, aussi constant ; les deux figures sont donc homothétiques.

Le point O obtenu, comme nous l'avons dit, est le centre d'homothétie, et le rapport d'homothétie est égal au rapport constant donné.

Dans la figure précédente, les rayons vecteurs CA et C′A′ étaient dirigés dans le même sens, alors le point O était sur le prolongement de CC′, et l'homothétie était directe : on aurait vu, de même, qu'elle est inverse, quand les rayons vecteurs sont dirigés en sens contraire.

Remarque. Quand les deux points C, C′ appartiennent aux deux figures, ils en sont deux points homologues.

Corollaire 1. Deux polygones semblables qui ont les côtés parallèles sont homothétiques, car deux sommets homologues peuvent jouer le rôle des points C et C′.

Corollaire 2. Deux circonférences situées dans le même plan sont homothétiques, puisque les deux centres jouissent de la propriété des points C et C′. L'homothétie est d'ailleurs, à la fois, directe et inverse.

THÉORÈME II.

44. *Deux figures homothétiques à une troisième sont homothétiques entr'elles.*

En effet, soit AB une droite qui joint deux points quelconques A et B de la première figure, A′B′ et A″B″ les droites homologues dans la seconde et la troisième ; si on appelle m et m' les rapports d'homothétie pour la seconde et la troisième figure comparées à la première, on aura

$$\frac{A'B'}{AB} = m \qquad \frac{A''B''}{AB} = m'$$

d'où

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{m'}{m}$$

Or on pourra, de même, mener dans la première figure les droites AC, AD, AE, etc., et leurs homologues dans la seconde et la troisième, et l'on trouvera, comme précédemment

$$\frac{A''C''}{A'C'} = \frac{A''D''}{A'D'} = \frac{A''E''}{A''E'} = \frac{m}{m'}$$

Donc, en vertu du théorème I, la seconde et la troisième figures sont homothétiques.

Corollaire (1). Quand trois figures sont homothétiques deux à deux, il peut arriver que l'homothétie soit directe pour les trois groupes de figures prises, deux à deux, ou directe pour l'un des groupes, et inverse pour les deux autres. Cela résulte évidemment du sens dans lequel $A'B'$ et $A''B''$ sont dirigées par rapport à AB.

Ordinairement, on considère les rapports d'homothétie directe et inverse, comme respectivement positifs et négatifs; alors la considération des signes des trois quantités m, m', $\frac{m}{m'}$ met en évidence le résultat que nous venons d'indiquer.

Corollaire 2. Quand les nombres m et m' sont égaux, le rapport d'homothétie de la troisième figure à la seconde est égal à l'unité, et, par suite, les deux figures sont superposables. Donc, pour avoir toutes les figures homothétiques d'une figure donnée, il suffira de faire varier le rapport m de zéro à l'infini, en conservant le même centre d'homothétie.

THÉORÈME III.

45. *Quand trois figures sont homothétiques, deux à deux, les trois centres d'homothétie sont en ligne droite.*

Supposons, pour fixer les idées, que l'homothétie soit partout directe. Soient A (fig. 20) un point quelconque de la première figure, A' et A'' les points homologues des deux autres;

soient aussi O, O′, O″ les centres d'homothétie des figures prises deux à deux : il faut démontrer que l'on a

$$\frac{O''A}{O''A'} \times \frac{OA'}{OA''} \times \frac{O'A''}{O'A} = 1$$

Mais c'est ce qui résulte ordinairement des égalités

$$\frac{O''A}{O'A'} = \frac{1}{m} \qquad \frac{O'A''}{O'A} = m' \qquad \frac{OA'}{OA''} = \frac{m}{m'}$$

Le second cas de figure se démontrerait de même.

FIGURES SEMBLABLES.

46. Deux figures sont dites semblables, lorsque l'une d'elles est égale à l'une des figures homothétiques de l'autre ; on retrouve facilement, comme des conséquences évidentes de cette définition, toutes les propriétés connues de la similitude.

DES CERCLES CONSIDÉRÉS COMME FIGURES HOMOTHÉTIQUES.

47. Comme nous l'avons vu, deux cercles situés dans le même plan sont, à la fois, homothétiques, directs et inverses. Les deux centres d'homothétie ou de similitude (*) sont, d'ailleurs, deux points de la ligne des centres des deux cercles tels, que leurs distances aux deux centres sont entr'elles comme les rayons (43).

Quand deux cercles sont tangents, le point de contact est un centre de similitude ; car les distances de ce point aux deux centres sont égales aux rayons. L'homothétie est, d'ailleurs, directe et inverse, suivant que le contact est intérieur ou extérieur.

48. Définition. Si par le point S, l'un des deux centres de similitude de deux cercles (fig. 21), on mène une transversale SA qui les coupe en A et B, A′ et B′ ; aux deux points A et B correspondront les deux points homologues A′ et B′ ;

(*) Nous emploierons ici de préférence le mot *similitude*.

mais on peut aussi associer A et B′, B et A′: les points des deux figures pris ainsi, deux à deux, sont dits *anti-homologues.*

THÉORÈME I.

49. *Si, par l'un des centres de similitude de deux cercles, on mène deux transversales quelconques, les cordes qui joignent les points homologues sont parallèles.*

En effet menons par le centre de similitude S (fig. 21) les deux transversales SA, SD et les deux cordes homologues AD, A′D′, on a R et R′ désignant les deux rayons,

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{R}{R'} \quad \frac{SD}{SD'}=\frac{R}{R'}$$

d'où

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SD}{SD'}$$

Donc, dans le triangle SAD, la droite A′D′ est parallèle à AD.

Corollaire. Les tangentes, en deux points homologues des deux cercles, sont parallèles.

THÉORÈME II.

50. *Si, par l'un des centres de similitude de deux cercles on mène une transversale quelconque, le produit des distances de ce point à deux points anti-homologues est constant.*

En effet, désignant par p et p' les puissances d'un des centres de similitude S (fig. 21) par rapport aux deux cercles, on aura

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{R}{R'} \qquad SA'\times SB'=p'$$

d'où, en multipliant, membre à membre,

$$SA\times SB'=p'\times\frac{R}{R'}$$

on trouve de même

$$SB\times SA'=p'\times\frac{R'}{R}$$

le théorème est donc démontré.

On obtient, aussi facilement

$$SA \times SB' = SB \times SA' = p \times \frac{R}{R'}$$

Corollaire. Les puissances d'un centre de similitude de deux cercles, par rapport à ces deux figures, sont entr'elles comme les carrés des rayons. C'est ce qu'on voit en égalant entr'elles les deux expressions du produit constant.

THÉORÈME III.

51. *Si, par l'un des centres de similitude de deux cercles, on mène deux transversales quelconques, puis deux cordes qui joignent des points anti-homologues; les extrémités de ces cordes sont sur une même circonférence, et leur point d'intersection appartient à l'axe radical des deux cercles.*

En effet, considérons les deux cordes BE et A′ D′ (fig. 21), on a

$$SB \times SA' = SE' \times SD' = p' \times \frac{R}{R'}$$

les quatre points B, E, D′ et A′ appartiennent donc à un même cercle; les cordes BE et A′D′, étant, d'ailleurs, les axes radicaux de ce cercle et de chacun des cercles donnés, doivent se couper sur l'axe radical de ces derniers.

CENTRES DE SIMILITUDE QUAND L'UN DES CERCLES OU TOUS DEUX SONT REMPLACÉS PAR DES POINTS OU DES DROITES.

52. *En désignant, par x et y, les distances entre les centres de similitude externe et interne et le centre du plus petit cercle, par* R *et* r *les rayons, et, par d la distance des centres, on a les formules*

$$(1) \qquad x = \frac{dr}{R - r} \qquad y = \frac{dr}{R + r}$$

Ces formules vont nous permettre de traiter facilement les différents cas.

53. *Les centres de similitude d'un cercle et d'un point se confondent avec le point lui-même.*

Il suffit de donner à r la valeur zéro dans les formules (1); on trouve alors

$$x = o, \quad y = o$$

et la proposition est démontrée.

54. *Il n'y a pas lieu à considérer deux points comme ayant des centres de similitude.*

En effet, les formules (1) donnent des valeurs indéterminées pour x et y, quand on y fait, à la fois, R et r nuls.

55. *Les centres de similitude d'un cercle et d'une droite sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite.*

Soient (fig. 22) CE et AB le cercle et la droite donnés : abaissons du centre C la perpendiculaire CD sur AB; prolongeons cette droite d'une longueur arbitraire DO, et du point O, comme centre, avec OD pour rayon, décrivons un cercle.

Considérons le centre de similitude externe S. Si on désigne par R et r les rayons OD et CE, on a

$$SD = DC + CS$$

Et à cause de la première des formules (1)

$$SD = DC + \frac{(R+DC)r}{R-r} = \frac{R\times(DC+r)}{R-r} = \frac{R\times DE}{R-r} = \frac{DE}{1-\frac{r}{R}}$$

Passant à la limite, on trouve que les droites SD et SE sont égales, c'est-à-dire, que le centre de similitude externe se confond avec le point E : on prouverait, de même, que le centre de similitude interne se confond avec le point F.

On peut arriver à la même conclusion par la géométrie : soient (fig. 22) G et H deux points homologues des deux cercles; les cordes DH et GE seront parallèles. Le point G étant fixe, quand on fera croître le rayon OD, jusqu'à l'infini, le point H s'éloignera indéfiniment du point D, sur la droite fixe DH : la droite GH, à la limite, sera donc parallèle à DH, et, par suite, se confondra avec GE : le centre de similitude externe est donc le point E.

On fait une démonstration analogue pour le centre de similitude interne.

56. *Les centres de similitude d'un point et d'une droite se confondent avec le point.*

En effet, dans ce cas, DE et DF deviennent égales à DC.

57. *Deux droites ont une infinité de centres de similitude, dont le lieu géométrique se compose des deux droites elles-mêmes, et de la droite de l'infini.*

Il est d'abord évident qu'aucun point situé à une distance finie des deux droites, et qui leur est extérieur, ne peut être pris comme centre de similitude.

Mais si on admet le rapport de similitude égal à zéro, tout point de l'une des droites peut être considéré comme un centre de similitude.

De même, si on admet le rapport de similitude égal à 1, on peut dire que le point de concours d'une suite de droites parallèles est un centre de similitude à l'infini; en changeant la direction des droites parallèles, on aura une infinité de points à l'infini, et nous verrons, plus tard, comment, par des considérations de perspective, on est conduit à dire que tous les points du plan, situés à l'infini, sont sur une droite à l'infini.

SYSTÈMES DE TROIS CERCLES SITUÉS DANS UN MÊME PLAN.

Trois cercles situés dans le même plan, étant pris, deux à deux, ont trois centres de similitude directe et trois centres de similitude inverse.

58. En appliquant la démonstration du théorème III n° 45, on prouve que *les trois centres de similitude directe sont en ligne droite, et qu'il en est de même de deux centres de similitude inverse et d'un centre de similitude directe.*

On pourrait encore faire la démonstration, en considérant le triangle formé par les trois centres, et se rappelant la règle pour déterminer les centres de similitude des cercles.

La droite qui contient les trois centres de similitude directe s'appelle *axe de similitude directe*, et les trois autres qui contiennent deux centres de similitude inverse et un seul de similitude directe s'appellent *axes de similitude inverse*.

On verra facilement comment le théorème se modifie, quand une, deux ou trois circonférences sont remplacées par des points ou des droites.

CHAPITRE VI.

FIGURES INVERSES OU RÉCIPROQUES.

59. *Deux figures sont dites inverses ou réciproques, l'une de l'autre, lorsque leurs points sont, deux à deux, sur des droites qui concourent en un même point, et que le produit des distances de ce point aux points des figures ainsi associés, deux à deux, est un nombre constant.*

Le point de concours des rayons vecteurs s'appelle *origine*, et on donne le nom de *puissance* au produit constant, considéré comme positif ou négatif, suivant que les deux points correspondants des deux figures sont, d'un même côté, ou de part et d'autre, de l'origine.

Une figure et une origine arbitraire étant données, il est évident qu'on pourra toujours construire une figure réciproque, et une seule, correspondant à une valeur donnée, positive ou négative, de la puissance.

Voici, d'abord, quelques théorèmes généraux qui s'appliquent à des figures réciproques quelconques.

THÉORÈME I.

60. *Le rapport de la distance de deux points d'une figure à celle de leurs correspondants dans une figure réciproque, est égal à la puissance divisée par le produit des distances de l'origine aux deux points de la seconde figure.*

En effet, soit (fig. 23) S l'origine, A et B deux points de la première figure, A′ et B′ les points correspondants de la seconde; menons A B et A B′, SAA′ et SBB′ ; on aura, par hypothèse

$$SA \times SA' = SB \times SB'$$

ou

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SB'}{SA'}$$

les deux triangles SAB, SA′B′ sont donc semblables, et donnent

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SB'}$$

mais si l'on désigne par P la puissance, on a

$$\frac{SA}{SB'} = \frac{SA \times SA'}{SA' \times SB'} = \frac{P}{SA' \times SB'}$$

et, à cause de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{P}{SA' \times SB'}$$

THÉORÈME II.

61. *Les tangentes, en des points correspondant de deux figures réciproques, font des angles supplémentaires avec le rayon vecteur qui joint ces deux points.*

En effet, dans la figure (23) faisons tourner le rayon vecteur SBB′ autour de l'origine S, jusqu'à ce qu'il se confonde avec le rayon SAA′ ; à la limite, les deux droites AB, A′B′ deviennent les tangentes aux deux courbes réciproques; et, comme l'angle SAB est resté supplémentaire de l'angle SB′D′ que le prolongement de A′B′ fait avec SB′, le théorème est démontré.

THÉORÈME III.

62. *Lorsque deux lignes se coupent, leurs réciproques se coupent aussi, et, aux deux points d'intersection correspon-*

dants, l'angle des deux premières lignes est égal à l'angle des deux autres.

En effet, soient AB et AC (fig. 24), les tangentes à deux lignes, au point A où elles se coupent; et A'B et A'C les tangentes aux deux courbes réciproques, au point A' qui est le correspondant du point A.

L'angle SAB est supplémentaire de l'angle SA'B' (th. II.), et par suite, les deux angles BAA', BA'A sont égaux; il en est de même des angles CAA', CA'A: l'angle CAB est donc égal à l'angle CA'B.

THÉORÈMES PARTICULIERS A LA DROITE ET AU CERCLE.

THÉORÈME I.

63. *La figure réciproque d'une ligne droite est une circonférence passant par l'origine.*

Soient (fig. 25) S et AB l'origine et la droite données. Menons SA perpendiculaire à AB, et une oblique quelconque SB; soient A' et B' les points qui correspondent à A et B, quand l'origine est S, et P la puissance.

Les angles SB'A', SAB sont égaux, à cause de la similitude des triangles SAB, SA'B'; mais le second angle étant droit, le premier l'est aussi : Le lieu géométrique du point B' est donc la circonférence décrite sur SA' comme diamètre.

THÉORÈME II.

64. Réciproquement, *lorsque l'origine est prise sur une circonférence, la ligne réciproque de cette dernière ligne est une droite perpendiculaire au diamètre de l'origine.*

En effet, soient (fig. 25) C le cercle donné, S l'origine, B et B' deux points correspondants quelconques des deux figures; menons le diamètre SCA', et prenons sur cette droite le point A, tel que le produit SA $\times$ SA' soit égal à la puissance donnée P.

Comme précédemment, les angles SAB, SB'A' sont égaux ;

mais le second étant droit, le premier l'est aussi; la figure réciproque de la circonférence est donc bien une droite AB perpendiculaire au diamètre SA qui passe par l'origine S.

THÉORÈME III.

65. *La figure réciproque d'une circonférence, lorsque l'origine n'est pas prise sur cette ligne, est une circonférence.*

Soient S et CA (fig. 26) l'origine et la circonférence données; soient aussi A et A' deux points correspondants quelconques des deux figures.

P désignant, comme à l'ordinaire, la puissance donnée pour la construction de la figure réciproque, et p étant la puissance de l'origine par rapport à la circonférence CA, on a

$$SA \times SA' = P \quad SA \times SB = p$$

et en divisant, membre à membre, il vient

$$\frac{SB}{SA'} = \frac{p}{P}$$

Ainsi, en substituant, au point A où le rayon vecteur SA coupe la circonférence donnée, le second point d'intersection B, on voit que la figure réciproque d'une circonférence lui est homothétique, et, par conséquent, est, elle-même, une circonférence.

66. Le centre de la circonférence réciproque s'obtiendra, en déterminant, sur la droite qui joint l'origine S au centre C de la circonférence donnée, un point C' par la condition

$$\frac{SC'}{SC} = \frac{P}{p}$$

le sens dans lequel il faut porter SC' est d'ailleurs, donné par le signe de P.

D'autre part les rayons des deux cercles étant R et R', on aura R' par la relation

$$R' = \frac{RP}{p}$$

On peut aussi s'appuyer, dans la construction, sur ce que l'origine est un centre de similitude des deux cercles.

EMPLOI DES FIGURES RÉCIPROQUES DANS LES RECHERCHES GÉOMÉTRIQUES.

67. Certaines propriétés des figures peuvent conduire à des propriétés nouvelles, à l'aide des théorèmes précédents.

1. Dans tout triangle rectiligne la somme des angles est égale à deux angles droits.

Prenons, pour origine, un point quelconque du plan, et concevons les trois circonférences qui sont les lignes inverses des trois côtés du triangle. Ces trois circonférences qui passent, toutes trois, par l'origine, détermineront, par leurs secondes intersections, un triangle curviligne dans lequel les angles intérieurs seront, respectivement, égaux aux angles du triangle donné : on a donc le théorème suivant.

Lorsque trois circonférences se coupent en un même point, le triangle curviligne, formé par les secondes intersections, est tel, que la somme de ses angles intérieurs est égal à deux angles droits.

2. Lorsque trois points a,b,c, (fig. 27) sont en ligne droite à la suite les uns des autres, on a évidemment

$$ac = ab + bc.$$

Transformons la propriété par l'emploi du théorème (60).

Soit D l'origine, et A,B,C les points qui correspondent à a,b,c dans la figure réciproque de la droite ac : on sait que cette figure est une circonférence passant par le point D ; le quadrilatère ABCD est donc inscriptible. Mais, le théorème I donne

$$ac = \frac{AC \times P}{DA \times DC} \quad ab = \frac{AB \times P}{DA \times DB} \quad bc = \frac{BC \times P}{DB \times DC}$$

Substituant alors dans l'équation précédente et chassant les dénominateurs, il vient

$$AC \times DB = AB \times DC + BC \times AD$$

c'est-à-dire, que, dans tout quadrilatère inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Les exemples précédents ont eu seulement, pour but, de montrer comment un théorème peut être *transformé* par la méthode des figures réciproques : les exercices viendront plus tard.

CHAPITRE VII.

PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES FIGURES.

La méthode des projections est une méthode de transformation comme celle des rayons vecteurs réciproques. Nous considérerons successivement la projection orthogonale ou cylindrique et la projection conique ou perspective.

PROJECTION ORTHOGONALE.

68. Rappelons d'abord quelques définitions connues.

On appelle projection orthogonale ou simplement projection d'un point sur un plan, le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan ; et projection d'une ligne sur un plan le lieu des projections de ses points sur ce plan.

Le lieu des projetantes est le cylindre projetant de la ligne : de là le nom de projection cylindrique donné aussi à la projection orthogonale.

Nous admettrons comme déjà connus les théorèmes suivants :

69. *La projection d'une ligne droite non perpendiculaire au plan de projection est une ligne droite.*

70. *Les projections de deux droites parallèles, sur un même plan, sont parallèles.*

71. *Le rapport de deux segments, situés sur une même droite ou sur des droites parallèles, reste le même en projection; en particulier, la projection du milieu d'une droite est le milieu de la projection.*

72. *La projection du centre d'une courbe est le centre de la projection.*

73. *La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe.*

74. *La projection d'un cercle sur un plan qui coupe le sien est une ellipse.*

75. Les théorèmes qui précèdent permettent d'étendre à l'ellipse certaines propriétés du cercle, en général, celles qui sont relatives à des points en ligne droite, à des tangentes, à des droites parallèles, en un mot, les propriétés qui dépendent de la direction des lignes et non de leur grandeur.

Voici quelques exemples :

1. Le lieu des milieux des cordes d'un cercle parallèles à une direction donnée est une droite passant par le centre du cercle : Donc, (70, 71 et 72) *le lieu des milieux des cordes d'une ellipse, parallèles entr'elles, est une droite passant par le centre; en d'autres termes, tous les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites passant par son centre.*

2. Deux diamètres rectangulaires d'un cercle sont tels, que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre : donc (70 et 71) *l'ellipse admet une infinité de systèmes de deux diamètres conjugués, c'est-à-dire, tels que, dans tout système, chaque diamètre divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

3. Le théorème de l'hexagone inscrit dans le cercle se trouve immédiatement étendu à *l'ellipse.*

En effet, la projection de l'hexagone inscrit dans le cercle est un hexagone inscrit dans une ellipse, et les points de concours des côtés opposés de l'hexagone étant en ligne droite dans la première figure, il en est de même dans la seconde (69).

4. Le carré construit sur un rayon quelconque d'un cercle étant constant, on en conclut facilement que *le parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse est constant.*

Ici, il s'agit de projeter une grandeur ; mais la propriété est projective : en effet, on sait que le rapport d'une surface, située dans un plan donné, à sa projection sur un autre plan est un nombre constant, quelle que soit la surface et sa position dans le plan.

5. On sait que, si une tangente CD à un cercle OA coupe deux tangentes parallèles AC et BD, le produit des segments AC et BD déterminés, sur ces tangentes, par la tangente mobile CD, est constant et égal au carré du rayon : nous allons voir que la propriété est encore projective.

Menons le diamètre EF parallèle aux deux tangentes AC et DB, et projetons, sur la première, les points E, F et D, en I, H et G ; on aura

$$\overline{AI}^2 = AG \times AC$$

et les quatre points C,G,I,H formeront une division harmonique (9). Mais l'égalité des rapports

$$\frac{IC}{IG} \text{ et } \frac{HC}{HG}$$

étant conservée en projection (71), la propriété de la division harmonique est projective, et on conclut facilement de là le théorème suivant :

Lorsque deux tangentes à une ellipse, parallèles entr'elles, sont coupées par une tangente mobile, le produit des segments interceptés par cette troisième sur les deux premières, à partir de leurs points de contact, est constant et égal au carré du demi-diamètre qui leur est parallèle.

FIGURES CORRESPONDANTES DANS UN MÊME PLAN.

76. En rabattant le plan d'un cercle sur un plan de projection passant par son centre, on arrive facilement à la proposition suivante :

Si on décrit une circonférence sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre, les perpendiculaires à cette droite sont divisées par les deux courbes, dans le rapport du grand axe $2a$ au petit axe $2b$.

Deux points du cercle et de l'ellipse, qui sont sur une même perpendiculaire au grand axe, sont dits points *correspondants*; plus généralement, on donne ce nom à deux points quelconques du plan de l'ellipse, dont les distances au grand axe sont, entr'elles, comme a est à b. Les droites qui joignent deux points correspondants sont appelées *correspondantes*.

En ramenant le cercle dans sa position primitive, et observant que deux droites, projection l'une de l'autre, doivent concourir au même point du grand axe de l'ellipse, on voit que ce grand axe est coupé, au même point, par deux droites correspondantes, ou deux tangentes au cercle et à l'ellipse, menées en des points correspondants.

Nous terminerons par les deux applications suivantes :

1. *La somme des carrés de deux diamètres conjugués de l'ellipse est constante.*

Soient (fig. 28) CD et CE deux rayons perpendiculaires dans le demi cercle AB, d et e les points correspondants de D et E : les diamètres de l'ellipse Cd et Ce seront des diamètres conjugués, puisqu'en ramenant le cercle dans sa position primitive, CD et CE, dans leurs nouvelles positions, auront pour projections Cd et Ce.

Les triangles rectangles dCG, eCH donnent

$$\overline{dC}^2 = \overline{eG}^2 + \overline{CG}^2 \qquad \overline{eC}^2 = \overline{eH}^2 + \overline{CH}^2$$

et en ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\overline{dC}^2 + \overline{dC}^2 = \overline{dG}^2 + \overline{eH}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2$$

remplaçant maintenant dans l'égalité précédente

$$\overline{dG}^2 \quad \text{et} \quad \overline{eH}^2 \quad \text{par} \quad \frac{b^2}{a^2}\,\overline{DG}^2 \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{a^2}\,\overline{EH}^2$$

et observant que les triangles DGC, ECH étant égaux, on a

$$DG = CH, \qquad CG = EH$$

Il vient, tout calcul fait

$$\overline{dC}^2 + \overline{eC}^2 = a^2 + b^2$$

2. *Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués d'une ellipse est constant.*

Nous avons déjà donné une démonstration de ce théorème, mais elle s'appuyait sur une propriété des projections dont l'emploi ne sera pas nécessaire ici.

Soient (fig. 28) DCEF le carré construit sur l'un des rayons DE d'un cercle OA, et, dans l'ellipse, le parallélogramme $dCef$ construit sur les deux demi-diamètres conjugués Cd et Ce qui correspondent aux rayons du cercle CD et CE. Prolongeons les tangentes EF et eb aux deux points correspondants F et f du cercle et de l'ellipse, jusqu'à leur rencontre avec l'axe en L; puis menons DK et dk, parallèles à cette dernière droite, jusqu'à leur rencontre avec les tangentes.

Les parallélogrammes DKCL, dkCL sont respectivement équivalents aux deux figures DCEF, $dCef$ comme ayant même base et même hauteur; mais les deux parallélogrammes dCLk et DCLK ayant même base CL sont entr'eux comme leurs hauteurs dG et DG, c'est-à-dire comme b est à a. Le parallélogramme construit sur deux demi diamètres conjugués d'une ellipse est donc égal à

$$a^2 \times \frac{b}{a}, \text{ c'est-à-dire, } ab.$$

Perspective ou projection conique.

77. Étant donnés un point S et un plan M fixes, on appelle perspective d'un point A le point a où la droite SA vient rencontrer le plan M. Le point fixe S s'appelle point de vue, et le plan M, plan de perspective ou tableau.

Le lieu des perspectives d'une courbe quelconque AB, pour un plan et un point donnés, est dit la perspective de cette courbe; les droites SA, SB, SC, SD qui servent à obtenir les perspectives des différents points se trouvent sur une même surface conique; de là, le nom de projection conique donné aussi à la perspective.

Nous admettrons comme connus les théorèmes suivants.

78. *La perspective d'une ligne droite est aussi une ligne droite.*

79. *Les perspectives de plusieurs droites parallèles sur un plan qui n'est pas parallèle à leur direction sont des droites concourantes en un même point. Ce point est, d'ailleurs, le point de rencontre, avec le tableau, de la parallèle à la direction des droites, menée par le point de vue.*

80. *Si on a plusieurs groupes de droites parallèles, de directions différentes, mais toutes parallèles à un même plan, les points de concours des perspectives des droites de chaque groupe seront en ligne droite, et cette droite sera l'intersection du tableau et d'un plan parallèle à toutes les droites données, mené par le point de vue.*

81. Un point quelconque à l'infini dans un plan donné pouvant être considéré comme le point de concours d'un groupe de droites parallèles dans ce plan, on peut dire, d'après ce qui précède, que tous les points à l'infini d'un plan ont leurs perspectives en ligne droite, sur un tableau non parallèle au plan donné; mais la perspective d'une ligne plane, lorsque le point de vue n'est pas dans son plan, ne pouvant être une ligne droite qu'autant que la ligne plane elle-même est droite, on est conduit à dire que *tous les points à l'infini sur un plan se trouvent sur une même droite située à l'infini.*

82. *La perspective d'une tangente à une courbe est tangente à la perspective de cette courbe.*

83. *Si on coupe un cône de révolution par un plan qui* *ne passe pas par le sommet et qui ne soit pas non plus perpendiculaire à l'axe, la section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'angle que le plan sécant fait avec l'axe est plus grand ou plus petit que le demi-angle du cône ou égal à cet angle.*

Dans la théorie de la perspective, le théorème peut s'énoncer autrement.

La perspective d'un cercle sur un plan, lorsque le point de vue est sur l'axe du cercle, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, sauf le cas où le tableau est parallèle au plan du cercle.

Comme application des théorèmes précédents nous ne citerons, pour le moment, que l'extension immédiate, que l'on peut faire aux trois coniques, des théorèmes de Pascal et de Brianchon sur les hexagones inscrit et circonscrit au cercle.

84. Voici maintenant quelques théorèmes utiles dans la théorie de la perspective, et dont la démonstration ne se trouve pas ordinairement dans les ouvrages élémentaires.

THÉORÈME I.

85. *Si l'intersection d'une sphère et d'un cône est composée de deux courbes, et que la courbe d'entrée soit un cercle, il en est de même de la courbe de sortie.*

Soient O la sphère et SABC le cône donnés (fig. 30), ABC et DEF les courbes d'entrée et de sortie, et SB une génératrice quelconque du cône qui coupe la courbe de sortie en E; abaissons SG perpendiculaire sur le plan de la courbe d'entrée qui, par hypothèse, est plane, et tirons BG; puis dans le plan du triangle BSG élevons la droite EH perpendiculaire à SB, et prolongeons-la jusqu'à la rencontre de SG en H.

Le quadrilatère EBGH étant inscriptible on a

$$SH\times SG = SE\times SC = SL\times SK = \overline{OS}^2 - \overline{OK}^2$$

d'où

$$SH = \frac{\overline{OS}^2 - \overline{OK}^2}{SG}$$

Le point H est donc constant et par suite le point E se trouve sur la sphère décrite sur SH comme diamètre : la courbe de sortie est, par conséquent, l'intersection de deux sphères, c'est-à-dire, un cercle.

THÉORÈME II.

86. *Quand deux cercles* ABC, DEF *sont situés sur une même sphère, on peut, en général, déterminer deux cônes sur lesquels les deux cercles sont situés à la fois.*

Pour le démontrer, du centre O de la sphère abaissons un plan perpendiculaire sur l'intersection des plans des deux cercles ; le plan ainsi obtenu coupera la sphère, suivant un grand cercle ADFC, et les deux cercles donnés, suivant les diamètres AC et DF.

Tirons AD et CF et prolongeons ces droites jusqu'à leur rencontre en S ; Enfin concevons un cône ayant pour base ABC et pour sommet le point S, je dis que ce cône contiendra le cercle DEF.

En effet, d'après le théorème précèdent, la courbe de sortie du cône est un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite OI qui joint le centre de la sphère au milieu I de SH. La droite OI est, d'ailleurs, évidemment dans le plan du grand cercle ACFD : la courbe de sortie se confond donc avec le cercle DEF qui a même diamètre.

87. Si on tire DC et AF, le point d'intersection de ces deux droites sera le sommet d'un second cône qui contiendra les deux cercles donnés. La démonstration est la même que la précédente.

88. Si les arcs AC et DF de la figure étaient égaux, l'un des cônes serait remplacé par un cylindre.

89. Lorsqu'à la limite le point S vient se placer sur la sphère, le plan DEF devient le plan tangent en S à cette surface ; d'ailleurs, quelque petit que soit le cercle, un plan parallèle au sien coupe toujours le cône suivant une circonférence : donc, lorsqu'un cône est inscrit dans une sphère, il les coupé suivant un cercle par tout plan parallèle au plan qui est tangent à la sphère, en son sommet.

90. Le théorème (86) permet de déduire, de certaines propriétés du cercle, d'autres propriétés de la même figure.

Ainsi il est évident que, si deux côtés contigus d'un hexagone inscrit dans un cercle sont, respectivement, parallèles aux côtés opposés, les deux derniers côtés sont aussi parallèles : on en conclut immédiatement le théorème général de l'hexagone inscrit.

En effet, supposons deux cercles quelconques ABC et DEF placés sur la même sphère : ayant inscrit, dans le premier, un hexagone, à côtés opposés parallèles, déterminons sa perspective sur le plan du second cercle, en prenant pour point de vue le point S de la dernière figure ; les côtés opposés du second hexagone se couperont, et les points de rencontre seront en ligne droite.

THÉORÈME III.

91. *La projection orthogonale d'une section plane d'un cône de révolution, sur un plan perpendiculaire à son axe et passant par son sommet, est une conique, dont ce sommet est le foyer, et l'intersection des deux plans, la directrice.*

Soient (fig. 32) AMB le cône de révolution, et H le plan de projection qui est perpendiculaire à l'axe sS_1 du cône et passe par son sommet s ; soit maintenant un plan quelconque qui coupe le plan de projection, suivant CD, et le cône, suivant la courbe AMB ; prenons un point quelconque M de cette courbe, et projetons-le en m sur le plan H. Abaissons de ce dernier point mE perpendiculaire sur CD, puis menons ME, Mm, Ms et ms. Les angles mMs et MEm sont, respectivement, égaux au demi-angle du cône et à l'angle du plan sécant avec le plan H ; on a donc, en désignant par K et m des constantes.

$$\frac{ms}{m\mathrm{M}}=\mathrm{K} \qquad \frac{m\mathrm{M}}{m\mathrm{E}}=m$$

d'où

$$\frac{ms}{m\mathrm{E}} = m\mathrm{K}$$

le théorème est donc démontré.

Il se rapporte à la projection orthogonale; mais en l'employant, en même temps qu'une perspective, il conduit à certaines propriétés focales des coniques.

92. Transformons, par exemple, cette propriété du cercle: la corde d'un arc constant, dans une circonférence donnée, est toujours tangente à une circonférence de même centre.

Soit (fig. 32) M_1N_1 une corde inscrite dans la base du cône de révolution $A_1M_1N_1B_1$; supposons aussi que la conique AMNB est la perspective du cercle de base, sur un plan quelconque, lorsque le point de vue est le sommet s du cône; et projetons-la orthogonalement sur le plan de projection Π.

Soient M et N les perspectives des points M_1 et N_1 et m et n les projections sur le plan Π de ces derniers points. Tirons aussi les droites S_1M_1, S_1N_1, sm, sn et mn. L'angle $M_1S_1N_1$ étant constant et mesurant l'angle des deux plans M_1sS_1, N_1sS_1, l'angle msn sera aussi constant.

Concevons maintenant un cône de révolution ayant s, pour sommet, et, pour base, le cercle enveloppé par M_1N_1; la perspective de ce cercle sur le plan de la section AMNB sera une conique, et la projection de cette dernière ligne sur le plan Π sera une autre conique qui aura s, pour foyer, et CD, pour directrice. D'ailleurs, MN et mn sont, respectivement, tangentes aux deux nouvelles coniques (73) et (82); on a donc ce théorème

Si un angle constant tourne autour du foyer d'une conique, la corde de l'arc, intercepté par les côtés de l'angle, enveloppe une conique ayant même foyer et même directrice que la conique donnée.

CHAPITRE VIII.

CENTRES DES MOYENNES DISTANCES ET DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

LEMME.

93. *Lorsqu'une droite* EF (fig. 33) *parallèle aux bases d'un trapèze* ABCD *partage les côtés non parallèles dans le rapport de n à m, on peut calculer sa longueur par la formule*

$$(1) \qquad l=\frac{ma+nb}{m+n}$$

dans laquelle a et b sont les deux bases AB *et* CD, *n et m les nombres proportionnels à* AE *et* DE, *et l la longueur cherchée.*

La formule (1) ne s'applique qu'au cas de la figure (33), mais on obtient facilement une formule générale qui s'applique à toutes les positions de EF, par rapport aux deux bases, c'est la suivante :

$$(2) \qquad l=\frac{a-kb}{1-k}$$

Dans cette formule, on représente par k le rapport des distances du point E aux deux points A et D ; et on le regarde comme positif ou négatif, suivant que les deux points A et D sont du même côté de E, ou de part et d'autre.

THÉORÈME I.

94. *Étant donnés n points A_1, A_2, A_3..... A_n situés d'une manière quelconque dans un plan, on joint deux des points A_1 et A_2 par une droite dont on prend le milieu* B ; *on mène la droite BA_3 et on prend sur sa direction un point* C *tel que le rapport $\frac{CB}{CA_3}$ soit égal à $\frac{1}{3}$; puis sur la droite CA_4 correspondant à un quatrième point A_4, on détermine un point* D *tel que le rapport* $\frac{DC}{DA_4}$ *soit égal à* $\frac{1}{4}$; *et on continue, ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait employé tous les points donnés :*

Il faut démontrer que le dernier point G *obtenu est tel, que sa distance à une droite quelconque est la moyenne arithmétique des distances de tous les points donnés à la même droite.*

1^er^ CAS. *Tous les points donnés sont d'un même côté de la droite.* Le théorème étant évident pour deux points, tout revient à démontrer que, s'il est vrai pour n points, il est vrai pour $n+1$ points.

Soient x_1, x_2, x_3... x_n et X les distances à la droite donnée des points A_1, A_2, A_3... A_n et du point G obtenu, comme il a été dit plus haut; on a, par hypothèse

$$(1) \qquad nX = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots x_n$$

Si maintenant (fig. 34) on joint par une droite le point G au dernier point $A^{n+}{}_1$ et qu'on détermine le point H par la condition que le rapport $\frac{HG}{HA_{n+1}}$ soit égal à $\frac{1}{n}$; en abaissant des trois points G, H, A_{n+1} des perpendiculaires sur la droite donnée, on obtiendra un trapèze et une droite qui partagera les côtés non parallèles dans un rapport donnée ; on pourra donc appliquer la formule (1) du n° 93. Si alors on désigne par X' et x_{n+1} les distances à la droite des point H et A_{n+1}, on aura

$$X' = \frac{nX + x_{n+1}}{n+1}$$

et, si l'on remplace dans cette égalité nX par la valeur que donne la formule (1), il vient

$$X' = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots x_{n+1}}{n+1}$$

2^e^ CAS. *Les points donnés sont de part et d'autre de la droite.* Alors, pour que la formule (1) (94) soit générale, il faut considérer les distances à la droite x_1, x_2, comme positives ou négatives, suivant que les points sont d'un côté ou de l'autre, par rapport à elle.

Soit (fig. 35) une droite UV, parallèle à PQ, et menée à une distance h de cette droite assez grande pour que tous les points donnés soient d'un même côté par rapport à elle.

Désignons par y_1, y_2..... y_n et Y les distances à la droite UV des points A_1, A_2.....A_n et G ; on aura, d'après le premier cas

$$nY = y + y_2 + \cdots y_n$$

posant maintenant l'identité

$$nh = h + h + \cdots h$$

et retranchant membre à membre, il vient

$$n(Y-h) = (y_1-h) + (y_2-h) + \cdots (y_n-h)$$

Sil le point A_1, par exemple, est au-dessus de la droite PQ ; abaissant AD perpendiculaire sur UV, on a

$$AD - ED = AE \quad \text{ou} \quad y_1 - h = x_1$$

Si le point A_2, au contraire, est au-dessous de PQ, en abaissant A_2 H perpendiculaire sur UV, on aura

$$FH - A_2H = FA_2$$

ou

$$A_2H - FH = -FA_2$$

mais A_2 H — FH et — FA_2 sont, respectivement, égales, à $y_2 - h$ et x_2: on a donc

$$y_2 - h = x_2.$$

Ainsi la relation est toujours la même entre la distance des deux parallèles et les distances du point aux deux droites.

Si maintenant dans l'égalité donnée plus haut on remplace $Y - h$, $y_1 - h$, $y_2 - h$,····· par leurs valeurs X, x_1, x_2..... on a la formule demandée.

95. Le point G obtenu, comme il a été dit, est indépendant de l'ordre dans lequel on prend les points donnés, car sa distance à une droite quelconque étant déterminée, en grandeur et en signe, par la formule (94), on connaît, en particulier, ses distances à deux droites fixes qui se coupent dans le plan. On l'appelle *centre des moyennes distances des points donnés*.

THÉORÈME II.

96. *n points A_1, A_2..... A_n étant situés d'une manière quelconque dans un plan, G étant le centre des moyennes distances, et M un point quelconque du plan; si on pose*

$$\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + \ldots\ldots = \Sigma\,\overline{MA_1}^2$$

$$\overline{GA_1}^2 + \overline{GA_2}^2 + \ldots\ldots = \Sigma\,\overline{GA_1}^2$$

on a

$$\Sigma\,\overline{MA_1}^2 = n\overline{MG}^2 + \Sigma\,\overline{GA_1}^2$$

Soit A_1 (fig. 36) l'un des points: formons le triangle MGA_1; élevons PQ perpendiculaire à GM au point G; puis du point A_1 abaissons A_1C_1 et A_1D_1 perpendiculaires sur GM et PQ: on a dans le triangle GMA_1

$$\overline{MA_1}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GA_1}^2 - 2MG \times GC_1$$

ou en remplaçant G_1C_1 par son égale A_1D_1

$$\overline{MA_1}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GA_1}^2 - 2MG \times A_1D_1$$

Si le point A_1 était au-dessus de la droite PQ, il faudrait mettre le signe $+$ devant le dernier terme de l'équation précédente.

Les autres triangles analogues au triangle MGA_1 donnent des égalités semblables; et en les ajoutant toutes, membre à membre, on obtient

$$\Sigma\overline{MA_1} = n\overline{MG}^2 + \Sigma\overline{GA_1}^2 - 2MG \times (\pm A_1D_1 \pm \ldots\ldots A_nD_n)$$

mais la distance du centre G des moyennes distances à la droite PQ étant nulle, il en est de même de la quantité entre parenthèse (formule (1) (94): On a donc

$$\Sigma\overline{MA_1}^2 = n\overline{MG_1}^2 + \Sigma\overline{GA_1}^2$$

THÉORÈME III.

97. *n points A_1, A_2, ...A_n étant donnés, et n nombres positifs correspondants m_1 m_2... m_n; on mène la droit A_1A_2 et on* *la partage, au point* B, *de manière que les deux segments* BA_1 *et* BA_2 *soient entr'eux comme* m_2 *est à* m_1*; on prend sur la droite* BA_3 *correspondant à un troisième point* A_3, *un point* C *tel que le rapport de* CB *à* CA_3 *soit égal à celui de* m_3 *à* m_1+m_2 *et on continue, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les points donnés; le dernier point* G *obtenu par la construction précédente sera déterminé par la formule.*

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots m_n}$$

Les notations du n° 94 sont conservées.

La marche de la démonstration est tout-à-fait la même que pour le théorème I. On applique toujours la formule relative au trapèze (93).

98. On peut donner plus de généralité au théorème, en supposant que les nombres $m_1, m_2 \ldots\ldots m$ peuvent être positifs ou négatifs, et que l'on détermine les points B, C etc. par des égalités

$$\frac{BA_1}{BA_2} = -\frac{m_2}{m_1} \quad \frac{CB}{CA_3} = -\frac{m_3}{m_1 + m_2}$$

En tenant compte des signes des seconds membres et employant alors la formule générale (2) (94), le point G déterminé, comme il vient d'être dit, quels que soient les signes des nombres m_1, m_2, m_3, s'appelle *le centre des distances proportionnelles;* il est déterminé, comme le centre des moyennes distances, et on le voit de la même manière.

THÉORÈME IV.

99. *Étant donné n points* A_1, A_2,... *et n nombres correspondants* m_1, m_2...., *positifs ou négatifs; si* G *est le centre des distances proportionnelles* on a

$$\Sigma m_1 \overline{MA}_1^2 = \Sigma m_1 \times \overline{MG}^2 + \Sigma m_1 \overline{GA}_1^2$$

(*le signe* Σ *ayant la signification ordinaire*).

La démonstration est la même que pour le théorème II; seulement, il faut remarquer qu'elle est en défaut, et que le théorème n'est plus vrai, lorsque Σ m_1 est égale à zéro.

En effet, dans ce cas, on ne peut plus dire que la quantité

$$MG \times (\pm m_1 A_1 D_1 \pm m_2 A_2 D_2 \ldots\ldots)$$

est nulle; la formule du n° 97 donnant, en général, pour la distance du centre G à une droite, une valeur infinie.

100. On peut étendre les théorèmes précédents au cas où les points sont situés d'une manière quelconque dans l'espace; seulement, il faut prendre les distances des points à un plan, au lieu de les prendre par rapport à une droite.

Remarque générale. Quelques-unes des théories que nous venons d'exposer ont été démontrées seulement pour les figures planes. Mais, pour un certain nombre de théorèmes, les démonstrations ne sont pas changées dans l'espace; et quant aux autres, pour la plupart, nous les retrouvons plus loin comme exercices.

DEUXIÈME PARTIE

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE

ET APPLICATIONS DE CES MÉTHODES

A DES EXEMPLES CHOISIS.

En géométrie, on peut se proposer de démontrer un théorème, de déterminer un lieu géométrique, ou de résoudre un problème.

Nous allons donner les méthodes à suivre dans chacun de ces trois cas, en les accompagnant des exemples les plus propres à en faire comprendre l'esprit. Des questions de choix, prises principalement parmi celles qui ont été proposées au *concours*, seront ensuite résolues, et, pour la plupart, discutées complètement.

CHAPITRE PREMIER.

DES THÉORÈMES.

MÉTHODE A SUIVRE POUR LES DÉMONTRER. — EXEMPLES.

101. Quand on se propose de démontrer un théorème, après avoir tracé, s'il est nécessaire, quelques droites ou cercles auxiliaires pour faciliter l'application des propositions connues, on essaie, d'abord, de réduire la difficulté à ses moindres termes. Ainsi, dans un grand nombre de questions, en apparence compliquées, on voit que tout revient à prouver qu'un angle est droit, que deux droites ou deux angles sont égaux etc...

Cette première préparation faite, si le théorème ne résulte pas immédiatement de quelque proposition connue, on procèdera comme il suit. (*)

On admettra comme vraie la propriété de la figure à laquelle toute difficulté se réduit, et que nous appellerons A ; de la propriété A on cherchera à déduire, comme conséquence, une propriété B qui, ayant lieu, entraîne réciproquement, comme conséquence, la propriété A. De même, de la propriété B on déduira une propriété C telle, que la condition de réciprocité soit satisfaite, de la propriété C, une propriété D, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une propriété M qui soit vraie, par hypothèse, ou en vertu de quelque théorème connu.

La marche à suivre que nous venons d'indiquer s'appelle *Analyse*.

Quand l'analyse est faite, avec les conditions de rigueur que nous avons indiquées, la démonstration du théorème est *trouvée*.

(*) Duhamel, *Méthodes dans les sciences de raisonnement.*

En effet, la loi de réciprocité étant satisfaite, de la propriété M, on remonte à la propriété qui la précédait dans la marche analytique; de celle-ci, on passe à la précédente, et, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à la propriété A qui se trouve ainsi démontrée.

Cette seconde marche inverse de la première s'appelle *Synthèse.*

L'analyse est la méthode *d'invention*, et la synthèse, la méthode *d'exposition.*

Il résulte de ce qui précède que tout l'art de l'invention se réduit finalement à déduire, d'une propriété d'une figure supposée vraie, une autre propriété qui elle-même a pour conséquence la première; et à voir quel est l'ordre qui doit amener la propriété finale que nous avons appelée M.

On ne peut donner de règles générales et certaines pour atteindre le but que nous venons d'indiquer : nous dirons seulement, qu'à l'aide d'une étude attentive de la figure, on devra, d'abord, reconnaître quels sont les théorèmes connus dont l'emploi est préférable dans la question.

Ainsi, si une droite est tangente à une circonférence, on utilisera, selon les cas, la propriété qu'elle a d'être perpendiculaire au rayon, ou celle d'avoir sa longueur moyenne proportionnelle entre la sécante partant du même point et la partie extérieure de cette sécante. Si un point M est sur une circonférence OD dont l'un des diamètres est DE, on se servira de ce que l'angle DME est droit, ou si A,B,C, sont trois points sur la circonférence, de la propriété dont jouit le quadrilatère AMCB d'avoir ses angles opposés supplémentaires etc...

Remarquons aussi qu'il est quelquefois utile de *transformer* l'énoncé d'un théorème : Il peut alors arriver que, sous sa nouvelle forme, il soit plus facile à démontrer, et même apparaisse comme conséquence évidente d'une propriété connue ou comme cas particulier d'une proposition générale.

102. Donnons maintenant des exemples.

1. *Par le point* A (fig. 37.) *pris sur le diamètre* FG *d'un*

cercle OF *ou sur son prolongement, on mène une perpendiculaire* DE *à ce diamètre, puis, par le même point, une sécante* ABC *qui coupe la circonférence en* B *et* C*: Si par ces deux points on mène des tangentes* CD *et* BD *à cette ligne, et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre en* D *et* E *avec la droite* DE, *les deux segments* AD *et* AE *sont égaux* (Concours).

Ayant tiré les quatre droites OE, OD, OB et OC, supposons vraie, comme le prescrit la méthode, l'égalité des droites AD et AE ; elle entraîne évidemment celle des obliques OD et OE et réciproquement. Mais alors les deux triangles rectangles OEB, OCD qui ont l'hypothénuse et un côté de l'angle droit égaux, sont égaux ; et, par suite, il en est de même des angles CDO et BEO : l'égalité des derniers angles entraîne, d'ailleurs, celle des droites OD et OE.

Maintenant, le quadrilatère OCDA étant inscriptible, puisque les angles OCD, OAD sont droits, l'angle CDO est égal à l'angle CAO, et, par une raison semblable, les angles BAO, BEO sont aussi égaux. Donc les angles BAO, CAO sont égaux comme, respectivement, égaux aux angles CDO, BEO ; la réciproque est d'ailleurs vraie, les angles CAO, BAO étant supposés égaux, on en conclut l'égalité des angles CDO, BEO.

Nous sommes maintenant arrivés à la dernière propriété que nous avons appelée, en général, la propriété M ; car les trois points A, B, C étant en ligne droite, l'égalité des angles BAO, CAO est évidente.

Comme l'analyse a été rigoureusement faite, et la condition de réciprocité vérifiée chaque fois, la synthèse est inutile, le théorème est démontré.

Remarque. La marche analytique que nous avons suivie, conduit immédiatement à la réciproque du théorème :

Si deux tangentes à un même cercle interceptent sur une droite des segments égaux, à partir du pied de la perpendiculaire abaissée, du centre, sur cette droite, le pied de la perpendiculaire et les deux points de contact sont en ligne droite.

La circonstance indiquée se présente, parce que c'est seulement, dans la conclusion finale de l'analyse, qu'on s'est appuyé sur ce que les trois points A, B, C sont en ligne droite. Alors il arrive que l'*analyse* de la proposition directe est la *synthèse* de la *réciproque*.

2. *On donne* (fig. 38) *un cercle OA, deux tangentes à ce cercle AD et BC, menées aux extrémités d'un diamètre AB, et un point E sur cette dernière droite : F étant un point quelconque du cercle, si l'on mène EF, puis DC perpendiculaire à cette droite, le produit des segments AD et BC, interceptés par la droite mobile DC sur les deux tangentes, est un nombre constant* (*).

Ici, et dans les exemples suivants, pour abréger, nous ne vérifierons plus, chaque fois, la condition de réciprocité ; mais il sera toujours sous-entendu que la vérification a été véritablement faite.

En considérant le cas particulier où la tangente mobile est parallèle au diamètre, on voit d'abord que le produit constant doit être égal à AB $\times$ BE ; ainsi, si le théorème est vrai, on devra avoir

$$AD \times BC = AE \times BE$$

Par suite, si l'on tire les droites DE et EC, les deux triangles rectangles DAE, BCE seront semblables, et les angles ADE, BCE complémentaires : mais si l'on mène FA et FB ; les deux quadrilatères AEFD, EFCB sont inscriptibles, et l'on a

$$\widehat{AFE} = \widehat{ADE} \qquad \widehat{EFB} = \widehat{ECB}$$

les deux angles AFE et EFB sont donc complémentaires, ou ce qui revient au même, l'angle AFB est droit : par conséquent, le point F doit être sur la circonférence donnée.

Mais le point F étant effectivement sur la circonférence, l'analyse est terminée ; et comme on a pu vérifier, toutes les

(*) Chasles, *Porismes d'Euclide*, page 295.

fois qu'il était nécessaire, la condition de réciprocité : le théorème est démontré.

Une remarque semblable à celle que nous avons faite, à la suite du premier exemple, conduit aussi à une réciproque du théorème.

3. *Si, d'un point* M (fig. 39) *pris sur la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *on mène des droites* MD, ME, MF, *respectivement perpendiculaires aux trois côtés*; *les pieds* D, E, F *des trois perpendiculaires sont en ligne droite.*

Tirons les droites ED, EF; tout revient à démontrer, que les angles BED, FEA sont égaux.

Si cette égalité a lieu, en menant MB et MA, on aura deux angles BMD, AMF égaux, entr'eux, comme, respectivement, égaux aux deux premiers, à cause des quadrilatères inscriptibles BMED, AMEF. Ajoutant l'angle DMA aux deux derniers angles, on aura

$$\widehat{DMF} = \widehat{BMA}$$

mais le premier est supplémentaire de l'angle C; il en sera donc de même du second, et le point M appartiendra à la circonférence circonscrite au triangle ABC. Or le point M est effectivement, par hypothèse, un point de cette circonférence; l'analyse est donc terminée, ainsi que la démonstration.

On peut aussi considérer comme démontrée la réciproque suivante :

Si un point est tel que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les trois côtés d'un triangle sont en ligne droite, le point est sur la circonférence circonscrite à ce triangle

La raison en est la même que dans les exemples précédents.

Remarque. On aurait pu, sans que la démonstration changeât, remplacer, dans l'énoncé du théorème, les perpendiculaires aux côtés par des droites faisant avec ces côtés des angles égaux dans un même sens de rotation.

4. *Étant donné un triangle équilatéral ABC* (fig. 40), *et un point quelconque D du cercle circonscrit, si l'on mène les trois droites DA, DB et DC, on a toujours*

$$DC = DA + DB$$

En effet, construisons sur DA comme côté un triangle équilatéral DAE; comme l'angle BDA est supplémentaire de l'angle BCA, et, par suite, de l'angle EDA, la droite ED est le prolongement de BD; et tout revient à démontrer que les droites BE et DC sont égales.

S'il en est effectivement ainsi, les deux triangles DAC, EAB sont égaux comme ayant les trois côtés respectivement égaux: par suite, on a

$$\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$$

ou

$$\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$$

mais, c'est précisément ce qui a lieu; le théorème est donc démontré.

Remarque. Il n'arrive plus ici, comme dans les trois théorèmes précédents, que la réciproque est immédiatement démontrée; mais c'est que l'on s'est servi, dès le commencement de l'analyse, de la condition à laquelle satisfait le point D, d'être sur la circonférence donnée.

Voici comment on peut démontrer la réciproque qui s'énonce ainsi:

Si un point est tel, que sa distance à l'un des sommets d'un triangle équilatéral est égale à la somme de ses distances aux deux autres sommets, le point appartient au cercle circonscrit.

On construit toujours le triangle équilatéral DAE, et l'on tire directement la droite EB: les deux triangles BAE, DAC sont égaux, parce que l'on a

$$\widehat{EAB} = \widehat{DAC} \qquad AE = AD \qquad AB = AC$$

On en conclut que les côtés BE et DC sont égaux.

Mais, par hypothèse, on a

$$DC = BD + AD = BD + AE$$

donc il vient

$$BE = BD + DE$$

et les trois points B, D, E sont en ligne droite.

Il en résulte que l'angle BDA est supplémentaire de l'angle EDA, et, par suite, de son égal BCA : donc le point D est bien sur la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Nous allons maintenant donner la démonstration synthétique de quelques théorèmes, en proposant aux élèves de les retrouver par l'analyse.

THÉORÈME I.

103. *La ligne* DE *de l'exemple* 3 (102) *est à égale distance du point donné* M *et du point d'intersection* H *des hauteurs du triangle* ABC.

Prolongeons MD et DE (fig. 41) jusqu'à leur rencontre en N et I avec le cercle et la hauteur AG prolongée; élevons BL perpendiculaire à BC; du point L où cette droite coupe le cercle, abaissons LP perpendiculaire sur MD; et enfin menons les droites ML, MA, LA et BN.

Les angles BED et BMD, BMD et BAN, sont égaux, deux à deux, comme inscrits dans le même segment ; on conclut donc, de là, l'égalité des angles BED et BAN : les droites DE et AN sont, par suite, parallèles, et la figure DIAN est un parallélogramme dans lequel les côtés DN et AI sont égaux.

D'un autre côté, la figure BHAL est aussi un parallélogramme, puisque les côtés opposés sont deux à deux perpendiculaires à une même droite, on a donc

$$AH = LB = DP$$

Mais, à cause des triangles rectangles égaux LMP, BND, les droites MP et DN sont égales, et comme DN est égale à AI, il vient $$PD + MP = AI + AH$$

ou $$MD = IH$$

Si enfin, on tire, par la pensée, MI et DH, on a un parallélogramme MIDH dans lequel la diagonale MH est coupée en deux parties égales par l'autre diagonale DI. Le théorème est donc démontré.

Les raisonnements qui précèdent conduisent évidemment à la proposition suivante:

Si d'un point pris sur le cercle circonscrit à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, qu'on les prolonge jusqu'à leur seconde rencontre avec le cercle, puis qu'on mène des droites, de ces derniers points, aux sommets opposés, les trois droites sont parallèles entr'elles.

THÉORÈME II.

104. *Si sur les trois côtés d'un triangle* ABC, (fig. 42) *on construit trois triangles équilatéraux extérieurs* BCD, ACE *et* BAF, *et qu'on mène les droites* AD, BE *et* CF *: ces trois droites seront égales, se couperont en un même point, et feront, entr'elles, en tournant dans un certain sens, un même angle de* 120°.

1° *Les trois droites sont égales.*

En effet les deux triangles FAC et BAE sont égaux parce que l'on a

$$\widehat{FAC} = \widehat{BAE} \quad FA = AB \quad AC = AE$$

et on en conclut l'égalité des droites FC et BE ;
on démontrerait de même que les droites BE et AD sont égales.

2° *Les trois droites se coupent au même point et font entr'elles des angles de* 120°.

En effet, circonscrivons un cercle à chacun des triangles BCD, ACE et soit I leur second point d'intersection. Si l'on tire les droites IA, IB et IC, on aura les angles AIC, BIC égaux à 120°, et, par suite, le troisième angle AIB sera aussi égal à 120°, et le cercle circonscrit au triangle ABF passera aussi par le point I.

Menant, maintenant ID, IE et IF; tous les angles consécutifs DIC, CIE, etc. seront égaux à 60° comme inscrits dans le même segment que l'angle d'un triangle équilatéral. De là résulte que les droites ID, IE, IF sont, respectivement, les prolongements des droites IA, IB, IC; car ID et IA, par exemple, font avec IC des angles supplémentaires: tout est donc démontré.

Le théorème est encore vrai; quand les trois triangles équilatéraux sont construits dans le sens opposé à celui que nous avons pris; seulement, du nouveau point de rencontre I, au lieu de voir les trois côtés sous des angles de 120°, on voit deux d'entr'eux sous des angles de 60°, et le troisième sous un angle de 120°.

THÉORÈME III.

105. *Étant donnés une circonférence* O (fig. 43), *deux points* A *et* B *et une corde* CD *de cette ligne, on tire la droite* AB, *et on la prolonge jusqu'à sa rencontre en* E *avec la corde* CD; *puis, par le point* E *on mène la tangente* EF *au cercle; on joint le point de contact* F *au milieu* I *de la corde, par la droite* IF *qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre en* G *avec la circonférence; et enfin on mène les droites* GA *et* GB *qui coupent la corde* CD *en* K *et* H: *il faut démontrer que les segments* IK *et* IH *sont égaux.*

Soit L le milieu de la corde AB : si, par la pensée, on mène les droites OE, OI, OL et OF, on voit que le cercle, décrit sur OE comme diamètre, passe par les trois points I, L et F. Si, donc, on tire les droites LI, LF, on obtient un quadrilatère inscriptible LIFE, et, par suite, les angles LFI, LEI sont égaux.

Cela posé, menons BM parallèle à la corde DC, et soit P le point de rencontre en cette droite GF; tirons enfin les droites PL et BF : l'angle LBP sera évidemment égal à $\widehat{LEI}$ et par suite, à $\widehat{LFP}$.

On conclut de là, que le quadrilatère LFBP est inscriptible et par suite que $\widehat{PLB}$ est égal à $\widehat{PFB}$; mais ce dernier et l'angle A sont égaux comme inscrits dans le même segment : l'égalité des angles PLB et A, et, par suite, le parallélisme des droites LP et AG s'en suivent. Alors, L étant le milieu de AB, P est le milieu de BM, et enfin I le milieu de KH ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 1. Au point de contact de la seconde tangente, menée du point E au cercle, correspond un point G' sur l'arc AFB, et le théorème est toujours vrai.

Remarque 2. La propriété est projective et s'étend à l'ellipse.

THÉORÈME IV.

106. *Les milieux des côtés d'un triangle, les pieds des trois hauteurs, et les milieux des distances du point d'intersection de ces droites aux trois sommets sont sur une même circonférence.*

Soient ABC (fig. 44) le triangle, D, E, F les pieds des trois hauteurs, H leur point d'intersection, I, K, L les milieux des droites HA, HB, HC ; et M, N, P les milieux des trois côtés du triangle.

Je mène IM, et je décris sur cette droite comme diamètre une circonférence : je dis qu'elle passe par les neuf points de l'énoncé.

Elle passe d'abord, par hypothèse, par les points I et M, et aussi par le point D, puisque l'angle IDM est droit.

Montrons maintenant qu'elle passe par l'un quelconque des quatre points P, N, K, L, par exemple par le point P.

Je mène PI et PM. Comme les points P et I sont les milieux de AH et BH, la droite PI est parallèle à la hauteur BE : pour une raison semblable, MP est parallèle au côté AC ; mais AC et BE sont rectangulaires, donc l'angle IPM est droit, et le point P appartient au cercle dont le diamètre est IM.

Restent les deux points E et F: considérons, par exemple, le point E. Si on mène les droites MK et MN, on voit qu'elles sont rectangulaires, comme, respectivement, parallèles aux deux droites CF et AB, et on en conclut que la droite KN est un diamètre du cercle que nous avons déterminé. Comme, d'ailleurs, l'angle KEN est droit, ce cercle passe par le point E.

Remarque. — On conclut facilement, de la figure, que le cercle des neuf points a son centre au milieu de la droite qui joint le point d'intersection des hauteurs au centre du cercle circonscrit au triangle, et que son rayon est la moitié du rayon de ce dernier cercle. Il suffit, pour le voir, de mener la droite qui joint le centre O du cercle circonscrit au triangle et le milieu M de BC, puis de se rappeler que AH est double de MO.

THÉORÈME V.

107. *Étant donnés une circonférence* O (fig. 45) *et un point* P *dans son plan; par ce point on mène deux sécantes quelconques* PAA′ *et* PBB′*; par les trois points* P,A,B, *on fait passer un cercle, de même, par les trois autres points* P′,A′,B′ ; *puis on décrit un cercle sur* PO *comme diamètre: on propose de démontrer que les trois derniers cercles qui ont déjà le point* P *commun se coupent en un même point* M (Concours).

Joignons le point M, point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PAB, PA′B′, avec les points P,A et B′, et prolongeons les droites de jonction jusqu'à leur rencontre en C,D,E avec la circonférence O ; menons aussi AB, MA et A′B′.

Les angles PAB et PMB sont égaux comme inscrits dans le même segment; et il en est de même de leurs suppléments CMB,A′AB. Pour une raison semblable, les angles CMA′,A′B′B sont égaux. Mais les angles A′AB,A′B′B le sont aussi comme inscrits dans un même segment: donc $\widehat{\text{BMC}}$ est égal à $\widehat{\text{CMA}'}$, et, par suite, $\widehat{BMA'}$ est double de $\widehat{BMC}$ ou de son égal $\widehat{A'AB}$: remplaçant alors les angles BMA′ et A′AB par leur mesure, on voit que les arcs ED et BA′ sont égaux.

Menons maintenant les cordes ED et BA′, on obtient deux triangles EDM, BMA′ égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles, respectivement, égaux, car ED et BA′ sont égaux comme cordes sous-tendant des arcs égaux, $\widehat{DEB}$ et $\widehat{DA'B}$, $\widehat{EDA}$ et $\widehat{EBA}$, comme angles inscrits dans le même segment : on en conclut que le côté MD est égal à MB.

Mais, si on mène les droites OM, OD et OB, on obtient deux triangles DOM, OMB qui sont égaux, parce qu'ils ont les trois côtés, respectivement, égaux ; donc OM est la bissectrice de l'angle DMB ; et comme MC est déjà celle de l'angle A′MB, l'angle PMO est droit, et le point M appartient au cercle décrit sur PO comme diamètre.

La solution que nous venons de donner est celle de l'élève qui a remporté le second prix au Concours.

THÉORÈME VI.

108. *Si, par les trois sommets d'un triangle* ABC (fig. 46), *on mène des droites faisant, dans un même sens de rotation, des angles de* 60° *avec les côtés opposés : ces droites forment par leur intersection un triangle égal au premier.*

Soient les trois droites AH, BF, CD qui font des angles de 60° avec les côtés du triangle donné ABC, et qui, prolongées jusqu'à leur rencontre, déterminent le triangle A′B′C′. Menons aussi les trois hauteurs AI, BE et CG.

D'abord, les deux triangles ABC, A′B′C′ sont équiangles : Prouvons, par exemple, l'égalité des angles A et A′. Il suffit, pour cela, de remarquer que, les angles AFB, ADC étant égaux, les angles ADC, AFA′ sont supplémentaires, et que, par suite, le quadrilatère FADA′ est inscriptible : de là, résulte évidemment l'égalité des deux angles considérés.

Il reste maintenant à prouver que deux côtés homologues, BC et B′C′, par exemple, sont égaux.

Les quatre points C,H,C′,F′ sont sur un même cercle, car les angles C′HC, B′FC sont égaux, tous deux, à 120° ; il en est de même des quatre points H,F,B,B′, d'une part, et des quatre points B,C,E,G, de l'autre ; on a alors les trois égalités suivantes :

$$AH\times AC' = AC\times AF \qquad AH\times AB' = AB\times AD$$
$$AC\times AE = AB\times AG$$

si on les ajoute, membre à membre, en mettant chacune des lignes AH, AC et AB en facteur dans deux termes de l'égalité obtenue, et remarquant que l'on a

$$AB'+AC' = B'C' \qquad AF-AE = EF \qquad AG+AD = DG$$

il vient :

$$AH\times B'C = AC\times EF+AB\times DG$$

mais l'angle AHI étant égal à 60°, la droite AH est double de HI, et l'égalité précédente devient

$$2HI\times B'C' = AC\times EF+AB\times DG$$

Cela posé, nous remarquons que les trois triangles rectangles AHI, BEF, DCG étant semblables, les droites IH, EF, DG sont proportionnelles aux trois hauteurs du triangle, et, par suite, aux inverses des côtés correspondants; on peut donc dans l'égalité précédente remplacer les trois longueurs HI, EF et DG, respectivement, par $\frac{1}{BC}$ $\frac{1}{AC}$ et $\frac{1}{AB}$ on trouve alors

$$B'C' = BC$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Généralisation. Si les droites menées du sommet du triangle faisaient avec les côtés opposés des angles égaux quelconques, dans un même sens de rotation, les triangles ABC et A′B′C′ seraient toujours semblables, mais le rapport de HI à AH ne serait plus égal à $\frac{1}{2}$: en le représentant par m, la démonstration précédente donnera

$$\frac{B'C'}{BC} = m$$

et, par suite,

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = m^2$$

α étant l'angle constant donné, on sait que le rapport m n'est autre chose que cos. α : on peut donc écrire

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \cos^2\alpha.$$

THÉORÈME VII.

109. *Étant données deux droites* AB, AC (fig. 47), *un point* D *sur la première, et un point* O *hors de l'angle* BAC *de ces droites, on pourra déterminer un angle* α, *un rapport* m, *et un point* E *sur la deuxième droite, de manière que si l'on fait tourner l'angle* α *autour du point* O *comme sommet, ses côtés rencontrent, respectivement, les deux droites en deux points* F *et* G *tels, que le rapport des segments* OF *et* EG *soit égal à* m (*).

Ce théorème, ainsi que quelques autres qui vont suivre, est du genre de ceux qu'Euclide appelait Porismes. L'énoncé du théorème est incomplet, et il faut d'abord en trouver le complément.

Abaissons du point O les perpendiculaires OB et OC sur les deux côtés de l'angle donné; l'angle demandé α sera l'angle BOC égal à l'angle des deux droites données, et le rapport demandé m sera celui des perpendiculaires OB et OC. Quant au point E, on l'obtient en menant OD, puis OE faisant avec cette droite un angle DOE égal à l'angle BOC.

Soit maintenant une troisième position quelconque FOG de l'angle constant, les triangles semblables BOD, COE donnent

$$\frac{BD}{CE} = \frac{OD}{OC}$$

(*) *Porismes d'Euclide*, Chasles, page 146.

De même, par les triangles semblables BOF, GOC, on a

$$\frac{BF}{CG} = \frac{OD}{OC}$$

donc

$$\frac{BD}{CE} = \frac{BF}{CG} = \frac{OD}{OC}$$

D'où l'on déduit

$$\frac{DF}{EG} = \frac{OD}{OC} \quad \text{C. Q. F. D}$$

THÉORÈME VIII.

110. *Etant donné un triangle isocèle* AFG (fig.48), *et un cercle qui a son centre* O *sur le milieu de la base* FG *et qui touche les deux côtés* AF *et* AG ; *si une tangente quelconque au cercle coupe ces deux côtés en* B *et* C, *le produit des segments* BF *et* CG *est constant* (*).

En effet, si on mène les droites OB et OC, on obtient deux triangles FOB et COG qui sont semblables, parce qu'ils ont les angles F et G égaux, par hypothèse, et les angles BOF et OCG égaux, comme tous deux complémentaires de la moitié de l'angle ACB ; on a donc

$$BF \times CG = \overline{OF}^2$$

le théorème est encore vrai, lorsque la tangente rencontre les prolongements des côtés égaux du triangle isocèle.

THÉORÈME IX.

111. *Étant donnés deux points* A *et* B *sur un cercle* O (fig. 49), *et une corde* DG *de ce cercle, si on joint un point* C *quelconque de l'arc* DCG *aux deux points fixes, par les droites* AC *et* BC *qui coupent la corde en* E *et* F ; *le rapport* $\frac{DE \times FG}{EF}$ *est constant* (**)

(*) Chasles, *Porisme* 198. — (**) *Porisme* 201.

Première démonstration. Menons, par l'un des points fixes A, une parallèle AL à la corde DG et soit H le point où elle coupe le cercle ; tirons aussi la droite BH que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en I avec la corde DG. Le quadrilatère AHBC étant inscrit dans le cercle, l'angle C est égal à l'angle LHI, et, par suite, à son égal l'angle BIE : les quatre points E,B,I,C sont donc sur un même cercle, et l'on a

$$EF \times FI = BF \times FC$$

mais, dans le cercle donné, on a aussi :

$$DF \times FG = BF \times FC$$

il vient donc

$$EF \times FI = DF \times FG$$

ou bien

$$\frac{EF}{FG} = \frac{DF}{FI} = \frac{DE}{GI}$$

on a donc enfin

$$\frac{DE \times FG}{EF} = GI$$

la longueur GI étant constante, le théorème est démontré.

Deuxième démonstration. Par le point G on mène la droite GK parallèle à BH, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre en K avec BC ; puis on tire les droites EK, DB, et CG (elles n'ont pas été tracées sur la figure).

Il est visible que tout revient à démontrer le parallélisme des droites EK et DB, et c'est ce qui résulte évidemment de l'égalité des angles BDG, BCG, et de la propriété qu'a le quadrilatère ECGK d'être inscriptible.

Remarque. Les deux démonstrations précédentes s'appliqueraient encore, si le point C était sur le second arc sous-tendu par la corde AB, ou si les deux points A et B étaient de part et d'autre de la corde DG.

THÉORÈME X.

112. *Un angle de grandeur donnée se meut, de manière* *qu'un de ses côtés passe par un point fixe, et que son sommet glisse sur une circonférence; son deuxième côté rencontre cette ligne en un deuxième point par lequel on mène une droite faisant avec ce côté un angle égal à l'angle mobile, mais dans un sens contraire : cette droite passe par un point donné* (*).

Premier cas. — L'angle constant est droit.

Soit (fig. 50) C le point donné, et D le sommet de l'angle droit CDE, situé sur le cercle OA : par le point E où le côté ED prolongé rencontre le cercle, on mène une parallèle à CD; il s'agit de démontrer que cette droite passe par un point fixe.

En effet, prolongeons CD et sa parallèle, menée par le point E, jusqu'à leur rencontre en H et G avec le cercle; puis menons la droite GH et le diamètre ABC qui rencontre la droite EG au point F. La figure EDGH est un rectangle dont le centre O est le centre du cercle; les deux segments OF et OC sont donc égaux, et par suite, le point F est fixe.

Deuxième cas. — *L'angle constant est quelconque.*

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Si on prend un point E (fig. 51) *sur la hauteur* AK *d'un triangle isocèle* ABC; *que, de ce point, comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrive un cercle qui coupe les côtés égaux aux points* F,G,H,I : *le triangle isocèle* EFH *qui a, pour sommet, le point* E, *et pour base la ligne* FH, *oblique à la hauteur* AK, *est déterminé d'espèce.*

En effet, on a

$$\frac{1}{2}\widehat{HEF}=\frac{1}{2}\widehat{GEF}+\frac{1}{2}\widehat{GEH}=180^\circ-(\widehat{HGE}+\widehat{EGF})=\widehat{AGF}$$

le lemme est donc démontré.

Soit (fig. 52) O le centre du cercle, A le point fixe donné; ABD l'angle constant qui tourne autour du point A, tandis que

(*) Chasles, *Porisme* 173.

son sommet B se meut sur la circonférence : si par le point B où le second côté de l'angle prolongé rencontre cette ligne, on mène la droite DE telle, que l'angle EDB soit égal à l'angle EDA : cette droite passera toujours par un point fixe.

En effet, du point O comme centre avec OA pour rayon, décrivons une circonférence qui coupe la corde DE en deux points G et F : Soit F celui des deux points qui est tel que la ligne FA n'est pas parallèle à BD ; je dis que, c'est par lui, que DE doit constamment passer.

Pour le faire voir, il suffit de remarquer que le triangle BDL, obtenu en prolongeant DE et BA jusqu'à leur rencontre, est un triangle isocèle, et que si l'on mène OF, OA et FA, on aura le triangle isocèle OFA du lemme ; mais ce triangle est déterminé de grandeur et de position, puisque OA est fixe, et l'angle OAF constant : le point F est donc fixe.

Nous avons voulu, en donnant quelques exemples de Porismes, montrer que l'ouvrage de M. Chasles peut devenir une mine féconde de questions nouvelles, pour les cours de mathématiques élémentaires. Nous verrons, du reste, par la suite, l'utilité des porismes dans la recherche des lieux, ou la résolution des problèmes.

THÉORÈME XI.

113. *Étant donné* (fig. 53) *un quadrilatère* ABCD *inscrit dans une circonférence* O ; *par le point d'intersection* E *des diagonales, on mène la corde* IH *qui est partagée en deux parties égales en ce point : il faut démontrer que le point* E *est aussi le milieu du segment* FG *compris entre les côtés opposés* AB *et* CD *du quadrilatère.*

Première démonstration. — Soit IH la corde dont le point E est le milieu : abaissons, du centre, les perpendiculaires OK et OL sur AB et CD ; puis tirons les droites OE, OF, OG, EI et EL. Le quadrilatère OEFK est inscriptible puisque ses angles E et K sont droits ; et, par suite, les angles FOE et FKE sont égaux. On prouve de même l'égalité des angles EOG et GLE.

Mais les triangles AEB, EDC étant semblables, les angles FKE, GLE sont égaux comme angles de deux côtés homologues AB, CD avec leurs médianes correspondantes. Par conséquent les angles FOE, EOG et, par suite, leurs compléments OFE, OGE sont égaux ; le triangle FOG est donc isocèle, et la droite OE perpendiculaire sur FG passe par son milieu E.

Deuxième démonstration. — Soit la corde IH telle que les segments EF et EG soient égaux : il faut démontrer que le point E est le milieu de la corde. Pour cela, faisons tourner le triangle DEC, dans son plan, autour du point E, jusqu'à ce que l'angle DEC se place sur son égal l'angle AEB. Alors les points D et C viendront se placer respectivement en D′ et C′ sur les droites EB et EA, et, comme les angles DEG, FEB sont égaux, ainsi que les droites EF et EG, le point G se placera en F.

Il est visible qu'alors les quatre points A, B, C′, D′ sont sur un même cercle ; et comme AB et D′C′ sont deux cordes de ce cercle qui se coupent en F, on a

$$AF \times FB = DG \times GC$$

par conséquent, dans le cercle donné, les points F et G sont de même puissance, et, par suite, sont équidistants du centre. Alors le triangle FOG étant isocèle, la droite OE qui joint son sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base, et le point I est le milieu de la corde IH.

Troisième démonstration. — D'après le théorème IX démontré plus haut, on a

$$\frac{IF \times EH}{EF} = \frac{IE \times GH}{EG}$$

si nous supposons maintenant que les deux segments EF et EG soient égaux, la relation précédente donne

$$IF \times EH = IE \times GH$$

ou

$$\frac{IF}{GH} = \frac{IE}{EH} = \frac{EF}{EG} = 1$$

les deux segments IE et EH sont donc bien égaux.

On voit ici une première application d'un *Porisme*.

QUATRIÈME DÉMONSTRATION. — Soit encore E le milieu de FG et désignons par M et N les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère. Alors les droites AB, CD, ME et MN forment un faisceau harmonique, et, d'après une propriété connue, FG est parallèle à MN. Mais cette dernière droite, étant la polaire du point E par rapport au cercle est perpendiculaire à OE, et il en est de même de sa parallèle IH : le point E est donc le milieu de la corde.

L'emploi des théories générales dans les démonstrations ne doit venir que plus tard, mais nous n'avons pas cru cependant devoir séparer des autres la démonstration précédente.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

THÉORÈME I.

114. *Si deux tétraèdres ont leur sommets, deux à deux, sur des droites qui se coupent en un même point, les faces opposées se rencontrent suivant quatre droites situées dans un même plan* (Concours).

Soient les deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ (fig. 54) tels, que les droites AA′, BB′, CC′, DD′ concourent au point S : pour prouver que les quatre faces opposées se coupent suivant quatre droites situées dans le même plan, il suffit de faire voir que deux quelconques des quatre droites d'intersection des faces se coupent.

Si nous prenons d'abord les deux faces ABC et A′B′C′, et que nous prolongions les droites AB et A′B′, AC et A′C′, BC et B′C′ jusqu'à leur rencontre en F,G,H ; nous obtiendrons évidemment l'intersection FGH des deux faces.

On obtiendra, de même, celle de deux autres faces ABD et A′B′D′ ; et, comme AB et A′B′ sont contenues dans ces deux faces, leur point de rencontre F appartiendra à la nouvelle intersection : F est donc un point où se rencontrent les deux intersections que nous avons successivement déterminées, et, par suite, le théorème est démontré.

CAS PARTICULIERS.

1° *Deux arêtes correspondantes* AB *et* A′B′ *sont parallèles.* Alors la figure formée par les quatre intersections est un trapèze ; car le point F étant à l'infini sur la droite FGH, les intersections des faces considérées sont parallèles.

2° *Deux arêtes* AB *et* BC *aboutissant à un même sommet sont parallèles aux arêtes correspondantes* A′B′ *et* B′C′.

Les deux faces ABC et A′B′C′ sont parallèles, et la figure formée par les quatre intersections se compose d'un triangle semblable aux triangles ABC, A′B′C′, et d'une droite à l'infini située dans son plan.

3° *Deux arêtes opposées* AB *et* CD *d'un des tétraèdres sont parallèles aux arêtes correspondantes de l'autre* A′B′ *et* C′D′.

La figure formée par les quatre intersections devient alors un parallélogramme ; car deux de ces droites sont parallèles à AB et les deux autres à CD.

4° *Trois arêtes* AB, AC, AD *partant d'un même sommet sont parallèles aux trois arêtes correspondantes* A′B′, A′C′, A′D′.

Alors les trois faces aboutissant en A et en A′ sont, respectivement, parallèles, et les trois arêtes BC, BD et CD sont parallèles aux arêtes B′C′, B′D′ et C′D′, comme intersections de plans parallèles par des troisièmes : les tétraèdres sont donc homothétiques, et les quatre intersections s'en vont à l'infini.

THÉORÈME II.

115. *Étant donnés deux angles trièdres égaux* SABC, SA′B′C′ *ayant au sommet commun* S (fig. 55), *il existe tou-*

jours une droite SD *passant par le point* S, *telle que, si l'on fait tourner autour de cette droite un des trièdres* SA'B'C', *il vienne coïncider avec l'autre* (Concours).

Tout revient à amener par la rotation autour de SD, deux arêtes SA' et SB' de l'un des trièdres à coïncider avec les arêtes homologues SA et SB de l'autre ; car les trièdres étant égaux doivent eux-mêmes coïncider. Il faut alors déterminer une droite SD faisant des angles égaux avec SA et SA', d'une part, SB et SB', de l'autre. Mais remarquons, tout de suite, que la condition n'est pas suffisante ; car il faut que les trièdres SDAB, SDA'B' soient égaux, et non symétriques.

Soit LM l'intersection des deux plans SAA', SBB', nous considérerons deux cas, suivant que les deux droites SA et SB font avec SL des angles égaux à ceux que font SA' et SB' avec SM, ou que cette condition n'est pas remplie.

Premier cas. On a

$$\widehat{LSA} = \widehat{MSA'} \qquad \widehat{LSB} = MSB'$$

La droite cherchée SD, satisfaisant à la double condition indiquée plus haut, est évidemment l'intersection de deux plans menés par les bissectrices des angles ASA',BSB' perpendiculairement aux plans de ces angles ; mais, dans le cas actuel, les deux plans se confondent avec le plan P, passant par le point S, et perpendiculaire à la droite LM ; et il est clair que toute droite située dans ce plan fait des angles égaux avec SA et SA', et aussi avec SB et SB'.

Parmi ces droites, on peut considérer celle qui est l'intersection des deux plans ASB, A'SB' ; et il est évident qu'en faisant tourner autour d'elle un des trièdres, SA' et SB' coïncideront, respectivement, avec SA et SB : elle peut donc être prise pour axe de rotation.

Elle est d'ailleurs la seule. En effet, toute droite située dans le plan P, satisfait bien à la condition de faire des angles égaux avec les arêtes SA et SA', SB et SB'; mais elle forme avec elles deux angles trièdres symétriques par rapport à un plan P, et la coïncidence des droites SA et SB avec SA′ et SB′ est impossible.

Deuxième cas. — Les deux plans de la construction précédente sont maintenant distincts et se coupent suivant une droite déterminée SD ; d'ailleurs, les deux trièdres SDAB, SDA′B′ ne sont pas symétriques ; car s'il en était ainsi, le plan bissecteur du dièdre ASDA′ serait un plan de symétrie pour ces deux trièdres; alors, les deux plans SAA′, SBB′ se couperaient suivant une droite perpendiculaire au plan de symétrie, et les arêtes SA et SA′, SB et SB′ feraient avec elle des angles, respectivement, égaux : or, c'est ce qui est contre l'hypothèse.

Il est maintenant prouvé que la droite SD satisfait à toutes les conditions qu'elle doit remplir : elle est donc l'axe de rotation demandé.

Le cas particulier où les deux faces SAB, SA′B′ sont dans un même plan se traite d'une manière analogue au cas général. On voit facilement qu'il y a toujours un axe de rotation perpendiculaire au plan commun des faces, ou situé dans ce plan.

Remarque. — En mécanique, où l'on a l'occasion de traiter la question précédente, on amène les deux trièdres à coïncidence, par deux rotations successives. Ainsi, on fait tourner le second trièdre autour de la bissectrice de l'angle ASA′, jusqu'à ce que l'arête SA′ vienne coïncider avec SA ; puis on fait tourner encore le second trièdre autour de SA, jusqu'à ce que SB′ se place sur SB. On démontre ensuite, d'une manière générale, que deux rotations successives autour de deux axes passant par un point donné, peuvent toujours être remplacées par une rotation unique autour d'un axe passant par le même point (*).

Généralisation. — Étant donnés deux polyèdres égaux, si on fait coïncider deux sommets et deux arêtes homologues

(*) Duhamel, *Cours de mécanique*, page 230.

qui y aboutissent, les polyèdres coïncident : on peut donc énoncer le théorème suivant.

Si deux polyèdres égaux ont deux sommets homologues qui coïncident, on peut toujours, par une rotation autour d'un axe passant par le sommet commun, faire coïncider l'un avec l'autre.

On peut évidemment étendre le théorème à deux solides égaux terminés par des surfaces courbes, en considérant ces solides comme limites de polyèdres inscrits.

THÉORÈME III.

116. *On peut construire une infinité de tétraèdres à arêtes opposées, orthogonales, et ces tétraèdres jouissent de plusieurs propriétés remarquables, entr'autres, de celle-ci : les quatre hauteurs se coupent en un même point* (Concours).

1° ON PEUT CONSTRUIRE UNE INFINITÉ DE TÉTRAÈDRES TELS QUE DEUX ARÊTES PARTANT D'UN MÊME SOMMET SOIENT PERPENDICULAIRES SUR LES ARÊTES OPPOSÉES.

Nous admettrons comme connus, dans ce qui va suivre, les théorèmes suivants :

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à toute droite du plan.

Lorsque deux droites sont orthogonales, par l'une d'elles on peut toujours mener un plan perpendiculaire à l'autre.

Prenons d'abord arbitrairement dans l'espace une droite AB (fig. 56), et dans un plan perpendiculaire à cette droite, une autre droite CD qui ne passe pas par le point de rencontre de AB et du plan : Nous aurons ainsi deux droites orthogonales qui ne se rencontrent pas. Coupons maintenant les droites AB et CD par une troisième BC qui ne soit perpendiculaire à aucune des deux, et menons un plan quelconque perpendiculaire à BC. Ce plan rencontrera les deux droites AB et CD en A et D, et la droite AD qui joint les points A et D sera perpendiculaire à BC ; si maintenant, on mène AC et

BD, on obtiendra les six arêtes d'un tétraèdre dans lequel les deux arêtes AB et BC sont perpendiculaires sur les arêtes opposées CD et AD.

2° SI DANS UN TÉTRAÈDRE DEUX ARÊTES SONT PERPENDICULAIRES SUR LES DEUX ARÊTES OPPOSÉES, LES DEUX DERNIÈRES ARÊTES SONT AUSSI ORTHOGONALES.

Soient (fig. 57) SC et SB, respectivement, perpendiculaires sur AB et AC ; par les deux premières arêtes, on pourra mener des plans, respectivement, perpendiculaires aux deux autres. Soient F et E les points où ces plans coupent les dernières arêtes : Menons les droites EB, ES, FC et SF ; les deux premières seront perpendiculaires à AC, et les deux autres à AB. Les droites BE et CF sont alors deux des hauteurs du triangle ABC, et si l'on joint leur point H d'intersection au point A, par la droite AH, cette droite sera la troisième hauteur du triangle ABC.

Cela posé, on remarque que les deux plans SBE, SCF, respectivement, perpendiculaires à AC et à AB, sont perpendiculaires à la face ABC ; et, par suite, leur intersection SH est perpendiculaire à cette face. Prolongeant maintenant SH, jusqu'à sa rencontre en D avec BC, et menant SD, on voit que cette dernière droite est perpendiculaire à BC, en vertu du théorème des trois perpendiculaires. Le plan SDA qui contient l'arête SA est donc perpendiculaire à BC, et, par suite, les deux arêtes opposées SA et BC sont orthogonales.

Le théorème peut encore s'énoncer ainsi : *Si dans un quadrilatère gauche les côtés opposés sont orthogonaux, il en est de même des diagonales.*

Maintenant que l'existence du tétraèdre à arêtes orthogonales est démontrée, nous allons donner les principales propriétés de cette figure.

1. *Chaque sommet se projette sur la face opposée au point d'intersection de ses hauteurs.*

La démonstration précédente fait voir que le sommet S se projette en H point d'intersection des hauteurs de la face ABC, et il serait évidemment de même pour les autres sommets.

2. *Les quatre hauteurs se coupent en un même point* C. Menons d'abord BK perpendiculaire à SE : les deux droites SH et BK se coupent comme perpendiculaires à deux droites BE et SE qui se coupent; elles sont, d'ailleurs, deux des hauteurs du tétraèdre : on peut donc affirmer que deux quelconques de ces hauteurs se coupent.

Considérons maintenant l'une des deux autres hauteurs, celle, par exemple, qui part du sommet C; d'après ce qui précède, elle coupe les deux hauteurs BK et SH contenues, toutes deux, dans un plan SBE auquel le point C est extérieur : la hauteur partant du point C ne peut donc rencontrer les deux autres hauteurs qu'en leur point d'intersection I.

Il en est de même de la quatrième hauteur partant du sommet D.

Remarque I. — Nous avons dit que le point C était extérieur au plan SBE, mais il y a une exception, lorsque les points C et E se confondent. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que AC soit perpendiculaire sur SC et BC; et comme l'arête SC doit être perpendiculaire sur l'arête opposée AB, elle est perpendiculaire à deux droites AC et AB de la face ABC et, par suite, à cette face elle-même. L'angle trièdre qui a pour sommet le point C est donc un trièdre trirectangle.

Ainsi, la démonstration est en défaut quand l'un des angles du tétraèdre est trirectrangle : mais, dans ce cas, la proposition est évidente, puisque les quatre hauteurs partent alors du sommet de l'angle trirectangle.

Remarque II. — Dans un tétraèdre dont deux arêtes opposées seulement sont orthogonales, les hauteurs, comme il est facile de le prouver, se coupent, deux à deux, en un même point. Alors, on peut dire que, lorsqu'un second couple d'arêtes opposées orthogonales s'adjoint au premier, les deux points d'intersection se confondent en un seul.

3. *Les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent en un même point qui est le point d'intersection des hauteurs.*

En effet, menons IE et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en L avec SB ; elle est la troisième hauteur du triangle SBE, et, par conséquent, est perpendiculaire à SB. Elle est, d'ailleurs, perpendiculaire à AC, parce qu'elle est dans un plan BSE perpendiculaire à cette droite : elle est donc la plus courte distance des arêtes opposées BS et AC.

Ainsi, la plus courte distance de deux arêtes opposées quelconques passe par le point d'intersection des quatre hauteurs.

4. *Les produits des arêtes opposées sont en raison inverse des plus courtes distances de ces arêtes.*

En effet, le produit de deux arêtes opposées par leur plus courte distance est un nombre constant qui mesure six fois le volume du tétraèdre.

5. *Les milieux des six arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées sont sur une même sphère qui a pour centre le centre de gravité du tétraèdre.*

Prouvons d'abord que les six milieux des arêtes sont sur la sphère énoncée.

Joignons les quatre milieux D,E,F,H, deux à deux, par des droites (fig. 58), nous obtenons ainsi un rectangle DEFH avec ses deux diagonales DF et EH qui se coupent mutuellement en leur milieu G. De même, en associant les milieux I et K des arêtes AB et SC aux deux milieux D et F, on prouve que la droite IK passe par le point G, et y est partagée en deux parties égales. On sait, d'ailleurs, que le point G est le centre de gravité du tétraèdre : on voit donc bien que les milieux des arêtes se trouvent sur une même sphère qui a pour centre le centre de gravité du tétraèdre.

Cette sphère est coupée par la face ABC suivant un cercle qui passe par les milieux D,E,I des côtés du triangle ABC. Mais ce même cercle, d'après un théorème connu (106) passe par les pieds des hauteurs du triangle, c'est-à-dire, par trois des pieds des plus courtes distances ; il en est donc de même de la sphère. On prouve par un raisonnement semblable qu'elle passe aussi par les trois autres pieds des plus courtes distances.

THÉORÈME IV.

117. *Étant donné un tétraèdre, d'un point quelconque de l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur ses quatre faces ; on demande de trouver la relation qui existe entre ces droites et les hauteurs du tétraèdre* (Concours).

Il y a quatre cas à considérer, suivant que le point est dans l'intérieur du tétraèdre, à l'extérieur de ce solide, mis à l'intérieur d'un de ses angles, dans un angle opposé par le sommet à l'un des angles du tétraèdre, et enfin dans l'un des espaces compris entre les quatre faces prolongées.

PREMIER CAS. *Le point donné O est dans l'interieur du tétraèdre.*

Soient A_1, A_2, A_3, A_4, les sommets du tétraèdre h_1, h_2, h_3, h_4, les hauteurs correspondantes, et p_1, p_2, p_3, p_4, les perpendiculaires abaissées, respectivement, du point O sur les mêmes faces que les hauteurs précédentes. Faisons passer des plans par le point O et les arêtes du tétraèdre : Ces plans décomposeront le volume V du tétraèdre, en quatre tétraèdres dont nous désignerons les volumes par v_1, v_2, v_3, v_4. En comparant chaque tétraèdre partiel au tétraèdre total qui a avec lui une face commune qu'on peut prendre pour base, on a

$$\frac{p_1}{h_1} = \frac{v_1}{V} \quad \frac{p_2}{h_2} = \frac{v_2}{V} \quad \frac{p_3}{h_3} = \frac{v_3}{V} \quad \frac{p_4}{h_4} = \frac{v_4}{V}$$

et ajoutant membre à membre, il vient

(1) $$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = 1$$

DEUXIÈME CAS. *Le point* O *est dans l'intérieur du trièdre qui a pour sommet* A_1, *et il est situé hors du tétraèdre.*

Alors, pour obtenir le volume V, il faut ajouter les trois volumes v_2, v_3, v_4 et en retrancher v_1; donc en procédant comme tout à l'heure, on a

$$(2) \qquad -\frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}+\frac{p_3}{h_3}+\frac{p_4}{h_4}=1$$

TROISIÈME CAS. *Le point* O *est dans l'angle opposé par le sommet au trièdre du tétraèdre qui a pour sommet* A_1.

Alors la somme des trois tétraèdres v_2, v_3, v_4 doit être retranchée du tétraèdre v_1, et l'on a

$$(3) \qquad \frac{p_1}{h_1}-\frac{p_2}{h_2}-\frac{p_3}{h_3}-\frac{p_4}{h_4}=1$$

QUATRIÈME CAS. *Le point* O *est dans l'un des espaces compris entre les quatre faces du tétraèdre prolongées.*

Supposons par exemple, que le point soit dans l'espace compris entre les faces du dièdre extérieur $A_1 A_2$ et les prolongements des faces opposées aux sommets A_1, A_2. Alors, il faut ajouter les deux volumes v_1 et v_2 et en retrancher la somme des deux autres.

On a ainsi

$$(4) \qquad \frac{p_1}{h_1}+\frac{p_2}{h_2}-\frac{p_3}{h_3}-\frac{p_4}{h_4}=1$$

Nous avons obtenu quatre formules différentes; mais nous pouvons toutes les comprendre dans une seule, la première, si nous considérons la distance du point O à une face du tétraèdre comme positive ou négative, suivant que ce point et le sommet opposé à la face considérée, sont d'un même côté ou de part et d'autre de cette face. La vérification n'offre aucune difficulté.

DISCUSSION DE LA FORMULE GÉNÉRALE (1). On peut, dans la discussion, supposer que le tétraèdre prend une forme particulière, ou que le point O coïncide avec quelques points remarquables.

En nous plaçant au premier point de vue, nous ne considérerons que deux cas.

1° *Le tétraèdre a ses quatre hauteurs égales*, ou ce qui revient au même, *ses quatre faces équivalentes.*

Alors la formule générale devient

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = h_1$$

C'est ce qui a lieu, en particulier, quand le tétraèdre est régulier.

2° LE TÉTRAÈDRE SE RÉDUIT A UN PRISME DROIT. Supposons, pour cela, que le pied de la hauteur H_1 restant fixe, le sommet A_1 s'éloigne à l'infini sur cette hauteur, le tétraèdre deviendra un prisme droit dont la base sera la face $A_2\,A_3\,A_4$: faisant alors la hauteur h_1 infinie, dans la formule générale, on aura

$$\frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = 1$$

On a ainsi une relation entre les hauteurs d'un triangle et les distances d'un point de son plan à ses côtés.

Faisons maintenant varier la position du point O.

On peut placer le point O sur une face, sur une arête ou en un sommet; et on a immédiatement les formules correspondantes, en faisant nulles, dans la formule générale, une, deux, ou trois des longueurs p_1, p_2 p_3 ou p_4.

Quand le point O coïncide avec le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, ou avec le centre de gravité de cette figure, la formule générale ne prend aucune forme remarquable; seulement, dans le cas du centre de gravité, elle se trouve immédiatement démontrée, puisque chacun des rapports qui y figurent est, comme on sait, égal à $\frac{1}{4}$. On peut se servir, du reste, de la formule pour démontrer que le centre de gravité d'un tétraèdre est un point tel que le produit de ses distances aux quatre faces est plus grand que le produit correspondant à tout autre point intérieur.

En effet, la question de trouver le maximum du produit $p_1 p_2 p_3 p_4$ revient à trouver le maximun de

$$\frac{p_1}{h_1} \times \frac{p_2}{h_2} \times \frac{p_3}{h_3} \times \frac{p_4}{h_4}$$

Mais la somme des facteurs du dernier produit est égale à 1 ; le maximun demandé a donc lieu lorsqu'ils sont égaux ; en remplaçant dans la formule $\frac{p_2}{h_2}, \frac{p_3}{h_3}, \frac{p_4}{h_4}$ par $\frac{p_1}{h_1}$, on a

$$p_1 = \frac{h_1}{4}$$

et, de même,

$$p_2 = \frac{h_2}{4} \quad p_3 = \frac{h_3}{4} \quad p_4 = \frac{h_4}{4}$$

La propriété est donc démontrée.

Nous allons maintenant, à l'aide de la formule générale, chercher à déterminer tous les points qui peuvent être à égale distance des quatre faces du tétraèdre indéfiniment prolongées ; c'est-à-dire, que nous nous proposons de traiter la question générale des sphères inscrites et exinscrites.

Cherchons d'abord dans l'intérieur du tétraèdre un point qui soit à égale distance des quatre faces.

Pour cela, dans la formule générale, donnons à p_1, p_2, p_3, p_4, la valeur positive r, on a alors

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$

La valeur de r donnée par la formule précédente étant toujours positive et finie, on pourra mener, à la distance r de trois des faces, et du même côté que les sommets opposés, trois plans respectivement parallèles à ces faces, et qui, comme elles, se couperont toujours en même point O ; si l'on démontre que le point O est aussi à la distance r de la quatrième face, l'existence de la sphère inscrite sera démontrée.

Or, si nous désignons par p_4, la distance du point O à la quatrième face, nous aurons par la formule générale

$$\frac{r}{h_1}+\frac{r}{h_2}+\frac{r}{h_3}+\frac{p_4}{h_4}=1$$

mais, par hypothèse, on a

$$\frac{r}{h_1}+\frac{r}{h_2}+\frac{r}{h_3}+\frac{r}{h_4}=1$$

donc $$p_4=r$$

Cherchons maintenant un point qui soit, à une égale distance r_1 des quatre faces, extérieur au tétraèdre, mais situé dans l'intérieur d'un des angles trièdres A_1, par exemple : on devra d'abord changer dans la formule générale p_1 en $-p_1$, puis remplacer p_1, p_2, p_3, p_4 par r, on obtient ainsi

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

on a, d'ailleurs,

$$\frac{1}{r_4}<\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

Car, en remplaçant dans cette inégalité les termes du second membre par les faces du tétraèdre b_1, b_2, b_3, b_4 qui leur sont proportionnelles, il vient

$$b_1<b_2+b_3+b_4$$

Mais on sait que dans un tétraèdre une face quelconque est plus petite que la somme des trois autres ; on a donc pour r_1 une valeur positive et finie, et il en est de même pour les valeurs r_2, r_3, r_4 qui correspondent aux points pris dans une position analogue à celle du premier. Par conséquent, d'après le même raisonnement que dans le cas précédent, on peut affirmer qu'il existe toujours quatre sphères qui touchent une face du tétraèdre et les prolongements des trois autres. Nous les appellerons *sphères ex-inscrites du premier genre.*

Il peut encore exister, comme nous allons le voir, des points, à égale distance des quatre faces, dans les parties de l'espace comprises entre les prolongements de ces faces.

Le point O peut être considéré comme situé à la fois dans l'intérieur d'un des angles dièdres du tétraèdre et de l'angle dièdre formé par les prolongements des faces du dièdre dont l'arête est opposée : Il y aura donc six cas à considérer.

Il faut maintenant, dans la formule générale, donner à deux des perpendiculaires des valeurs positives et aux deux autres des valeurs négatives.

Si on appelle r'_1, r'_2, r'_3, r'_4, etc., la valeur commune des perpendiculaires pour chaque position du point, on aura

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_4}$$

$$\frac{1}{r'_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_4}$$

$$\frac{1}{r'_3} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_4} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}$$

et trois autres relations semblables, dont les seconds membres se déduiraient de ceux des précédentes en changeant les signes de tous les termes. Il en résulte que, si les premières relations donnent des valeurs positives pour r'_1, r'_2, r'_3, les dernières donneront des valeurs négatives pour les autres distances, et réciproquement. Par conséquent, il ne peut pas y avoir plus de trois points satisfaisant à la condition demandée.

Pour faciliter la discussion, nous supposerons les hauteurs h_1, h_2, h_3, h_4, toutes inégales et rangées par ordre de grandeur croissante. Alors les valeurs de r'_1 et r'_2 sont positives et finies, et celle de r'_3 peut être positive, nulle ou négative. Mais si le dernier cas a lieu, on prendra pour valeur de r'_3 la valeur du signe contraire $\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_4}$; donc si on exclut le cas où les sommes $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_4}$ et $\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$, ou ce qui revient au même, les sommes h_1+h_4 et h_2+h_3 seraient égales ; on obtiendra trois nouvelles sphères. Nous les appellerons sphères *ex-inscrites du second genre*. La troisième sphère a un rayon infini, c'est-à- dire n'existe plus, lorsque la somme des deux faces du tétraèdre est égale à la somme des deux autres.

Nous venons de supposer que les hauteurs du tétraèdre étaient inégales ; mais on s'assure facilement que la conclusion est encore vraie, quand deux ou trois des hauteurs sont égales.

Supposons maintenant que les hauteurs soient égales deux à deux, par exemple h_1 et h_2, h_3 et h_4.

La valeur r'_1 est toujours positive, mais celles de r'_2 et r'_3 sont infinies. Donc quand les hauteurs, ou, ce qui revient au même, les faces du tétraèdre sont égales deux à deux, il n'y a plus qu'une sphère exinscrite du second genre.

Enfin, supposons les quatre hauteurs, ou ce qui est la même chose, les quatre faces égales, les valeurs de r'_1, r'_2, r'_3, sont infinies et les sphères disparaissent.

En résumé le nombre des sphères exinscrites du second genre est 3,2, 1 ou 0 ; et, par suite, le nombre total des sphères tangentes à un tétraèdre est 8,7,6 ou 5, suivant les cas.

Remarque. Les formules qui donnent les valeurs des rayons des huit sphères peuvent conduire par leur combinaison à d'autres formules plus ou moins remarquables, analogues à celles que l'on donne ordinairement pour le triangle : nous n'écrirons que la suivante.

$$\frac{2}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$$

THÉORÈME V.

118. *Étant donné un tétraèdre* SABCD (fig. 59) *dont la base est* ABC, *on construit sur ses trois faces latérales, comme bases, trois prismes triangulaires quelconques dont on prolonge les secondes bases jusqu'à leur intersection commune*

F; *on mène la droite* SF, *et on construit, sur* ABC *comme base, un prisme triangulaire dont les arêtes latérales soient égales et parallèles à* SF : *il faut démontrer que le dernier prisme est équivalent à la somme des trois autres* (Concours).

Nous pouvons d'abord remplacer les trois prismes latéraux par trois prismes équivalents qui ont pour bases les faces latérales du tétraèdre, et un sommet commun en F.

Cela posé, prolongeons la droite SF jusqu'à sa rencontre en E avec la base ABC, et prenons EG égal à SF ; puis menons EA,EB,EC. Le prisme, construit sur ABC, et dont les arêtes latérales sont EG, AB et BI, pourra être décomposé en trois prismis ayant l'arête latérale commune EG, et, pour bases respectives, les triangles EAB,EAC,EBC. Je dis que ces prismes sont respectivement équivalents aux trois prismes latéraux.

Considérons, par exemple, le prisme AEBHGI : il est équivalent au prisme ASBHFI qui remplace, comme nous l'avons dit, l'un des prismes latéraux donnés. En effet, les tétraèdres SAEB,FGHI sont superposables, comme on le voit, en faisant glisser les trois points H,G,I sur les trois parallèles AH, GE, IB, jusqu'à ce qu'ils viennent se confondre, respectivement, avec A,B et E. Maintenant, si de la figure totale FHIAEB on retranche successivement les deux tétraèdres précédents, on obtient les deux prismes AEBHGI, ASBHFI ; l'équivalence de ces deux volumes est donc démontrée.

On prouve de même que les deux autres prismes latéraux sont égaux aux deux derniers des trois prismes dans lesquels on a décomposé le prisme construit sur ABC : donc la somme des trois prismes latéraux est bien égale à ce dernier prisme.

Remarque. Dans la démonstration précédente on n'a appliqué aucun théorème sur la mesure des volumes; cela tient à ce qu'on a fait, dans un cas particulier, la même démonstration que celle que l'on donne pour établir le théorème général sur lequel on peut faire reposer toute la théorie des mesures des volumes, et qui est le suivant :

Si on coupe une surface prismatique fermée par deux systèmes de plans parallèles comprenant entr'eux une même longueur d'arête, les volumes ainsi determinés sont équivalents.

Discussion.

Le point E peut occuper trois positions différentes ; il peut être dans l'intérieur de la base ABD, comme nous l'avons supposé dans la démonstration précédente, extérieur au triangle, mais situé dans l'un de ses angles, et, enfin situé dans un angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle.

Dans le second cas, on voit facilement que le prisme construit sur ABC est égal à la somme de deux des prismes latéraux diminués du troisième.

Dans le troisième cas, pour avoir le prisme construit sur ABC, il faut retrancher d'un des prismes latéraux la somme des deux autres.

Si on désigne par V_1, V_2, V_3, les volumes des prismes latéraux et par V le volume du quatrième prisme, les trois cas pourront être représentés par la formule unique :

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

pourvu que l'on considère l'un quelconque des volumes V_1, V_2, V_3, comme positif ou négatif, suivant que la face latérale qui sert de base au prisme, étant indéfiniment prolongée, passe entre le sommet opposé et le point de concours F des secondes bases des prismes latéraux, ou bien qu'elle laisse les deux points du même côté.

Remarque. Si la droite SF était parallèle à la base ABC, le point E serait à l'infini, et le prisme construit sur ABC serait nul ; alors, d'après la formule générale qu'on étend au cas limite, l'un des prismes latéraux est égal à la somme des deux autres; c'est ce qu'on démontre facilement d'une manière directe.

Nous considérerons deux cas particuliers:

1° Les trois prismes latéraux ont même hauteur. — Alors les volumes des trois prismes latéraux sont entr'eux comme les faces latérales du tétraèdre. Or les trois prismes qui ont pour bases les triangles EAB, EAC EBC et qui sont, respectivement, équivalents aux trois premiers ont aussi même hauteur : donc les trois faces latérales SAB, SAC et SBC sont entr'elles comme les triangles EAB, EAC et EBC. Mais il résulte de l'hypothèse, que le point F est à égale distance des trois faces latérales, et, par suite, que la droite SE est l'intersection des trois plans bissecteurs des dièdres SA, SB, SC; on retrouve donc un théorème connu.

2. Les trois prismes latéraux construits sur SAB, SAC et SBC ont respectivement leurs arêtes latérales égales et parallèles a SC, SB et SA. Alors les trois prismes latéraux étant, chacun, triple du volume du tétraèdre donné sont équivalents. Il en est, par conséquent, de même, des trois triangles EAB, EAC et EBC, et le point E est le centre de gravité du triangle ABC. On remarque, d'ailleurs, que le point F n'est autre chose, ici, que le sommet opposé au sommet S dans le parallélipipède construit sur les trois arètes SA, SB, SC; on peut donc énoncer le théorème suivant facile à démontrer directement.

Si dans un parallélipipède on mène un plan par les extrémités de trois arêtes partant d'un même sommet, on obtiendra un triangle qui sera traversé en son centre de gravité par la diagonale qui coupe les trois arêtes.

Remarque. On peut appliquer le théorème général à une pyramide quelconque, pourvu que les secondes bases des prismes latéraux se coupent en un même point.

ÉVALUATION DE QUELQUES VOLUMES.

Nous allons maintenant donner quelques exercices sur les volumes, mais du genre de ceux qui exigent peu de calcul, les autres étant réservés pour l'algèbre.

THÉORÈME I.

119. *Le volume d'un tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la différence entre le volume d'un prisme qui a pour hauteur, la hauteur du tronc, et pour base la demi somme de ses bases, et le volume de la moitié du tétraèdre obtenu en menant, par un point de l'une des bases, des parallèles aux arêtes latérales du tronc, jusqu'à la rencontre de l'autre base.*

Pour le démontrer, menons par l'un des sommets C de la base supérieure du tronc (fig. 60) deux plans, l'un parallèle à la face ABDF, l'autre parallèle aux deux arêtes opposées SD et SF ; les sections faites par ces plans seront le triangle CGH et le parallélogramme CGIB. On décompose ainsi le volume du tronc en deux prismes triangulaires ABCDGI, BIFCGH et une pyramide CGEH qui est évidemment la pyramide de l'énoncé.

Soient V le volume du tronc, H sa hauteur, B et b ses bases DEF et ADC, et t la surface du triangle GEH, on aura,

$$V = bH + \frac{Ht}{3} + (B - b - t)\frac{H}{2}$$

ou

$$V = H \times \frac{B+b}{2} - \frac{Ht}{6}$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME II.

120. *Le volume du tronc de prisme triangulaire du second genre, c'est-à-dire, obtenu en coupant une surface pris-*

matique triangulaire par deux plans qui se rencontrent dans l'intérieur de la surface, est donné par la formule

$$V = \frac{B}{3} \times \frac{h_1(h_1^2+h_2^2+h_3^2)+h_2h_3(h_1+h_2+h_3)}{(h_1+h_2)(h_1+h_3)}$$

Dans cette formule, V désigne le volume du tronc, B l'une des bases, h_1, h_2, h_3, les perpendiculaires abaissées sur la base B des sommets de l'autre base (h_1 est celle des trois hauteurs qui est seule d'un côté de la base B).

Soit (fig. 61) une surface prismatique dont les arêtes sont les trois droites AD, DF, CE prolongées indéfiniment: Si on la coupe par les deux plans ABC, DEF qui se rencontrent, suivant la droite GH, dans l'intérieur de la figure, on aura un tronc de prisme du second genre ABCDEF qu'il s'agit d'évaluer.

Le volume demandé est la somme des deux volumes formés de part et d'autre du plan ABC; mais au lieu d'évaluer d'abord cette somme, nous allons chercher l'expression de la différence qui est beaucoup plus simple. Nous supposerons que le volume DAGH est plus grand que l'autre GHBCEF, et le volume qu'on veut d'abord obtenir, sera alors égal à la différence entre DACH et GHBCEF.

Le tétraèdre DAGH est la différence entre le tétraèdre DABC et la pyramide quadrangulaire DGBCH, et en désignant par V' le volume demandé, on a

$$V' = DABC-(DGBCH+GHBCF)$$

Mais la somme des deux volumes DGBCH et GHBCF est visiblement égale à la pyramide quadrangulaire DFBCG, qu'on peut remplacer par la pyramide ABCEF qui a même base BCEF et même hauteur.

La pyramide ABCEF, à son tour, peut être décomposée en deux pyramides triangulaires ABFC, AFCE, et dans la dernière, on peut remplacer le sommet F par le sommet B: on trouve ainsi finalement que le volume, qu'il faut retrancher de DABC, pour avoir V′, est la somme de deux tétraèdres qui ont, pour base commune, ABC, et, pour sommets hors de cette base les points E et F. Donc, si on se rappelle les notations du commencement, on aura

$$V' = \frac{B}{3}\,(h_1 - h_2 - h_3)$$

si le volume supérieur était le plus petit des deux, il faudrait écrire dans le second membre, $\frac{B}{3}\,(h_2 + h_3 - h_1)$: la formule générale est donc

$$V^1 = \pm \frac{B}{3}\,(h_2 + h_3 - h_1)$$

Revenons maintenant au calcul de V.

Soient v_1 et v_2 les volumes DAGH, GHBCEF. Si on a v_1 plus grand que v_2, on peut écrire

$$V = 2\,v_1 - (v_1 - v_2) = 2v_1 - \frac{B}{3}\,(h_1 - h_2 - h_3)$$

$$= 2v_1 + \frac{B}{3}\,(-h_1 + h_2 + h_3)$$

Si v_1 est plus petit que v_2, on écrit

(1) $$V = 2v_1 + v_2 - r_1 = 2v_4 + \frac{B}{3}\,(-h_1 + h_2 + h_3)$$

On a donc la même formule dans les deux cas, et tout revient à calculer v_1 et, par suite, la surface du triangle AGH. Or on a

(2) $$\frac{AGH}{B} = \frac{AG}{AB} \times \frac{AH}{AC}$$

et

$$\frac{AG}{GB} = \frac{h_1}{h_2} \qquad \frac{AH}{HC} = \frac{h_1}{h_3}$$

d'où

$$\frac{AG}{AB} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \qquad \frac{AH}{HC} = \frac{h_1}{h_1 + h_3}$$

Et en substituant dans la formule (2), il vient

$$\text{AGH} = \frac{h_1^2 \text{B}}{(h_1+h_2)(h_1+h_3)}$$

et, par suite

$$v_1 = \frac{h_1^3 \text{B}}{(h_1+h_2)(h_1+h_3)}$$

Mettant maintenant pour v_1 cette valeur dans l'égalité (1), on obtient, tout calcul fait, la formule de l'énoncé.

THÉORÈME III.

121. *Le volume, qui est engendré par un triangle* ABC *exécutant une révolution complète autour d'un axe* XY *situé dans son plan et n'ayant avec lui aucun point commun, est égal à la surface du triangle multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Menons AI parallèle à XY (fig. 62) et prolongeons BC jusqu'à sa rencontre en I avec cette droite; puis, des quatre points A,B,C,I, abaissons sur l'axe les perpendiculaires AD, BE, CG et IF. Le volume qu'il s'agit d'évaluer est égal à la somme des troncs de cône engendrés par les trapèzes ABDE, BEFI diminuée de la somme des troncs engendrés par les trapèzes ACGD, CIEG. Appelant V le volume cherché, on a

$$\text{V} = \pi \frac{\text{DF}}{3}\left(\overline{\text{BE}}^2 + \text{BE} \times \text{AD} + \overline{\text{CG}}^2 + \text{AD} \times \text{CG}\right)$$

et en remplaçant $\overline{\text{BE}}^2 - \overline{\text{CA}}^2$ par (BE + CG) (BE — CG), il vient

$$\text{V} = 2\pi\text{DF} \times \frac{\text{BE}-\text{CG}}{2} \times \frac{\text{AD}+\text{BE}+\text{CG}}{3}$$

mais les produits $\frac{\text{BE} \times \text{DF}}{2}$ et $\frac{\text{CG} \times \text{DF}}{2}$ mesurant, respectivement, les surfaces des triangles ABI, ACI augmentées du rectangle AIFD, la différence $\text{DF} \times \frac{\text{BE}-\text{CG}}{2}$ représente la surface du triangle donné ABC. D'ailleurs, la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe de rotation est, comme on le sait, égale à $\frac{AD + BE + CG}{3}$; le théorème est donc démontré

Corollaire. Le volume, qui est engendré par un polygone régulier exécutant une rotation complète autour d'un axe situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal à la surface du polygone multipliée par la circonférence que décrit le centre du cercle circonscrit. Pour le voir, il suffit de décomposer le polygone en triangles par des droites partant du centre.

THÉORÈME IV.

122. *D'un point* B *pris hors d'un cercle* OC (fig. 63), *on mène les deux tangentes* BA *et* BC *et le rayon de contact* OC *de l'une d'elles : si on suppose que la figure exécute une révolution complète autour de* OC, *le triangle mixtiligne, formé par les deux tangentes et l'arc qu'elles interceptent, est équivalent au cône engendré par le triangle* BDC, *qu'on obtient en projetant le point* A *en* D *sur le rayon* OC *ou sur son prolongement.*

Soit V le volume qu'il s'agit d'évaluer : en considérant ce volume comme étant la différence entre le tronc de cône et le segment à une base engendrés respectivement par le trapèze ABDC et le triangle mixtiligne ADC, on a

$$V = \pi \frac{DC}{3}\left(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + AD \times BC\right) - \pi \frac{\overline{AD}^2 \times DC}{2} - \pi \frac{\overline{DC}^3}{6}$$

ou

$$V = \pi \frac{DC}{6}\left(2\pi\overline{BC}^2 + 2\,AD \times BC - \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2\right)$$

Pour simplifier l'expression précédente, nous remarquons d'abord qu'on a

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$$

D'autre part, si on prolonge AD jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence, et qu'on tire EC, on a deux triangles semblables ABC et ACE qui donnent

$$\overline{AC}^2 = AE \times BC = 2\,AD \times BC$$

Il résulte de ce qui précède que l'expression du volume se simplifie, et qu'on a

$$V = \frac{\pi\,\overline{BC}^2 \times DC}{3}$$

Le second membre est l'expression du volume du cône engendré par le triangle ADC : le théorème est donc démontré.

THÉORÈME V.

123. *Un cône de révolution étant circonscrit à deux sphères tangentes extérieurement, le volume compris entre les trois surfaces est la moitié du volume compris entre la surface du cône et la sphère qui passe par les cercles de contact du cône et des deux sphères données.*

Soient (fig. 64) deux demi-cercles O et C tangents extérieurement en E, et AB une tangente commune extérieure. Si on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OC, le volume engendré par le triangle mixtiligne AEB sera le volume demandé.

Pour évaluer ce volume, menons la tangente commune intérieure DE, projetons les points de contact A et B sur la ligne des centres en K et I, et menons DK et DI. D'après le théorème précédent, les volumes engendrés par les triangles mixtilignes ADE et BDE sont, respectivement, équivalents aux cônes engendrés par les triangles DEK et DEI. Le volume, qu'il s'agit d'évaluer et qui est égal à la somme des deux premiers volumes, sera aussi égal à la somme des deux cônes : en le désignant par V, on aura

$$V = \frac{\pi\,\overline{DE}^2 \times IK}{3}$$

Maintenant, élevons au milieu D de AB une perpendiculaire à cette droite, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en F avec la ligne des centres. Alors, si du point F comme centre avec FA comme rayon, nous décrivons l'arc de cercle ALB, le volume engendré par le segment correspondant sera le volume compris entre le cône et la sphère extérieure. Or ce volume a pour expression $\frac{\pi\,\overline{AB}^2 \times IK}{6}$ ou $\frac{2\pi DE^2 \times IK}{3}$, puisque la tangente AB est égale à 2DA : le théorème est donc démontré.

Application du théorème. — On peut se proposer de trouver l'expression du volume V en fonction des rayons R et r des deux sphères.

Tirons les droites OA et CB ; abaissons du centre C la perpendiculaire CG sur OA ; puis menons, par le point B et jusqu'à la rencontre de AK, une parallèle BL à la ligne des centres OC.

Les deux triangles semblables ABL, OCG, dans lesquels les droites BL et IK, CG et AB sont égales, donnent

$$IK = \frac{\overline{AB}^2}{OC}$$

on a donc, en remplaçant IK par sa valeur dans l'expression de V

$$V = \frac{\pi\overline{AB}^4}{12OC} = \frac{4\pi\overline{DE}^4}{3OC}$$

Si maintenant on mène les droites OD et OC, on a un triangle rectangle ODC qui donne

$$\overline{DE}^2 = Rr$$

on a d'ailleurs

$$OC = R + r$$

donc

$$V = \frac{4}{3}\,\frac{\pi R^2 r^2}{R + r}$$

APPLICATION DES THÉORIES GÉNÉRALES A LA DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES.

Pour terminer le chapitre, nous allons donner quelques applications des théories générales qui ont été exposées dans la première partie.

THÉORÈME I.

124. *Si, d'un point d'une circonférence circonscrite à un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds sont en ligne droite.*

On a déjà démontré ce théorème en ne s'appuyant que sur les deux premiers livres de Legendre; mais la théorie des transversales en donne aussi une démonstration très-simple.

Menons (fig. 39) les droites MC, AD, BF et CE; les triangles rectangles MAF, MBD dans lesquels les angles MBD, MAF sont égaux, donnent

$$\frac{AF}{BD}=\frac{MA}{MB}$$

Les triangles MEA et MDC, MBE et MFC sont aussi semblables et donnent

$$\frac{DC}{EA}=\frac{MC}{MA} \quad \frac{BE}{CF}=\frac{MB}{MC}$$

Multipliant les trois dernières égalités, membre à membre, il vient

$$\frac{FA}{FC}\times\frac{DC}{DB}\times\frac{EB}{EA}=1$$

Le premier rapport est positif, et les deux derniers négatifs; il faut donc prendre le signe $+$ dans le second membre. Le seul cas de figure qui puisse encore se présenter est celui où les trois points D, E, F, se trouvent sur les prolongements des côtés du triangle; les trois rapports sont alors positifs et il faut encore prendre le signe $+$. Ainsi, dans tous les cas, les trois points sont en ligne droite.

Il est bon de remarquer que pour que la démonstration soit tout-à-fait rigoureuse, il faut s'assurer qu'effectivement les deux positions des points D,E,F que nous avons indiquées sont les seules possibles : c'est ce qu'on voit facilement, mais nous supprimons ce détail.

THÉORÈME II.

125. *Étant donné un triangle* ABC (fig. 65), *si l'on joint par des droites les milieux* D,E,F *de ses côtés, et que, par les sommets du triangle ainsi obtenu, on mène des tangentes au cercle inscrit dans le triangle* ABC, *les trois points* I,L,M, *où ces tangentes rencontrent les côtés du triangle* DEF, *seront en ligne droite.*

Tout revient à démontrer qu'on a

$$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} \times \frac{\mathrm{LF}}{\mathrm{LB}} \times \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{ME}} = 1$$

en tenant compte des signes des rapports qui y figurent.

Proposons-nous d'abord d'évaluer le rapport $\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}}$ en fonction des trois côtés du triangle donné ABC. Pour cela, prolongeons la tangente DI jusqu'à sa rencontre en N avec le côté AC prolongé lui-même.

Les triangles semblables ENI,FDI donnent

$$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} = \frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{CN} - \mathrm{EC}}{\mathrm{DF}}$$

Les droites CE et DF étant égales, toutes deux, à la moitié de AC, tout revient à calculer CN ; mais nous adjoindrons à CN la droite ND, comme inconnue auxiliaire.

Cela posé, soient $a,b,c,$ les trois côtés BC,AC et BC du triangle ABC, a',b',c' les côtés CD,CN et DN du triangle CDN ; a' est égal à $\frac{a}{2}$ et b' et c' sont les inconnues principale et auxiliaire : l'égalité précédemment trouvée peut alors s'écrire

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} = \frac{2b' - b}{b}$$

Maintenant, G étant le point de contact de BC et du cercle inscrit, si on égale entr'elles les deux expressions connues de CG en fonction des trois côtés des deux triangles ABC, NCD, on a

$$(2) \qquad a' + b' - c' = a + b - c$$

D'autre part, les triangles ABC, NCD, ayant l'angle commun C, sont entr'eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle, et, étant circonscrits à un même cercle, ils sont aussi entr'eux comme leurs périmètres : on a donc

$$(3) \qquad a' + b' + c' = \frac{a'b'}{ab}(a + b + c)$$

Cela posé, ajoutons, membre à membre, les égalités (2) et (3) ; il vient, en remplaçant a' par $\frac{a}{2}$ et résolvant l'équation résultante par rapport à b',

$$b' = \frac{2\,b\,(c - b)}{a + c - 3\,b}$$

Si alors on substitue la valeur de b' dans l'égalité (1), on a pour la valeur absolue du rapport $\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}}$

$$\frac{3\,c - a - b}{a + c - 3\,b}$$

et, comme dans le cas de figure, $\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}}$ est négatif, la valeur, qu'il faut prendre pour le rapport, est

$$\frac{a + b - 3\,c}{a + c - 3\,b}$$

Si le point I était sur le prolongement de EF, le cercle inscrit au triangle ABC deviendrait ex-inscrit par rapport au triangle CND, et on trouverait pour la valeur absolue du rapport, c'est-à-dire, pour celle qu'il faut prendre actuellement

$$\frac{a + b - 3c}{a + c - 3b}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a, en tenant compte du signe du rapport,

$$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} = \frac{a + b - 3c}{a + c - 3b}$$

faisant maintenant une permutation tournante des trois lettres a, b, c, on a

$$\frac{\mathrm{LF}}{\mathrm{LD}} = \frac{b + c - 3a}{a + b - 3c} \qquad \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{ME}} = \frac{a + c - 3b}{b + c - 3a}$$

et, en multipliant membre à membre les trois égalités précédentes, il vient

$$\frac{\mathrm{IE}}{\mathrm{IF}} \times \frac{\mathrm{LF}}{\mathrm{LD}} \times \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{ME}} = 1$$

c'est ce qu'il fallait démontrer

L'élégante démonstration qu'on vient de lire est de M. Alfred Serret (*).

Remarque. En faisant une projection orthogonale, le théorème se trouve immédiatement étendu à l'ellipse, et, à l'aide d'une perspective du genre de celle qui est indiquée n° 86, on voit que, dans l'énoncé du théorème, on peut substituer aux milieux des côtés du triangle donné, trois points de ces côtés satisfaisant à la condition que les droites qui les joignent aux sommets opposés se coupent en un même point.

THÉORÈME III.

126. *Dans un quadrilatère complet, les circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètres ont même axe radical; les milieux de ces trois diagonales sont en ligne droite; et les points d'intersection des hauteurs des quatre triangles formés par la rencontre des quatre côtés du quadrilatère*

(*) *Nouvelles Annales*, t. VI, page 391.

sont sur une même droite perpendiculaire à celle qui passe par les milieux des diagonales.

Soient le quadrilatère complet ABCDEF (fig. 66), et AG, BH, EI les trois hauteurs du triangle ABE, qui se coupent en O.

Décrivons trois circonférences sur les diagonales BD, AC, EF comme diamètres ; elles passeront respectivement par H, G, I ; alors les puissances du point O, par rapport à chacune des circonférences, sont les produits $-\,OH \times OB$, $-\,OG \times OA$, $-\,OI \times OE$. Mais ces produits sont évidemment égaux, à cause des quadrilatères inscriptibles AHGB, AIGE ; le point O d'intersection des trois hauteurs du triangle ABE est donc d'égale puissance par rapport aux trois circonférences, et il en est de même des trois autres points analogues.

Comme il y a plus d'un point d'égale puissance, par rapport aux trois circonférences, on en conclut que ces lignes ont un même axe radical qui contient tous les points d'égale puissance, que les trois centres, c'est-à-dire, les milieux des diagonales sont en ligne droite, et enfin que l'axe radical est perpendiculaire à cette dernière droite : tout est donc démontré (*)

Remarque. On peut prouver très-simplement, d'une manière directe, que les milieux des trois diagonales sont en ligne droite. Pour cela, on considère le triangle AEB (fig. 66) dans lequel on joint les milieux des côtés P, Q, R, par des droites qui passent aussi, chacune, par le milieu d'une des diagonales. Tout revient à démontrer que les derniers points déterminent, sur les côtés du triangle PQR, six segments satisfaisant à la condition ordinaire ; mais c'est ce que l'on voit immédiatement, en remarquant que les segments sont les moitiés de ceux que la transversale DF détermine sur les côtés du triangle AEB.

(*) Mention. — *Nouvelles Annales*, t. XI.

THÉORÈME IV.

127. *Si dans un pentagone on enlève successivement chacun des côtés, et qu'on prolonge jusqu'à leur rencontre les deux côtés adjacents, on forme ainsi cinq quadrilatères dans lesquels les droites qui joignent les milieux des diagonales se coupent en un même point.*

Soit ABCDE (fig. 67) le pentagone donné. Si on enlève, chacun à son tour, les deux côtés AB et BC, et qu'on prolonge les côtés qui leur sont adjacents, jusqu'à leur rencontre en S et F ; on obtient les deux quadrilatères ESCD, EAFD. Menons leurs diagonales SD, EC, EF, AD, et tirons les droites GI, HK qui joignent leurs milieux ; O étant le point d'intersection des deux dernières droites, nous allons d'abord évaluer le rapport $\frac{GO}{IO}$.

A cet effet, tirons les droites GK, HI, et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre avec le côté ED : il est visible qu'elles passent par son milieu L ; mais le triangle GLI, coupé par la transversale HK, donne

$$KL \times HI \times GO = HL \times GK \times IO$$

d'où

$$\frac{GO}{IO} = \frac{HL \times OK}{LK \times HI} = \frac{DF \times AS}{AE \times CF}$$

Considérons maintenant le quadrilatère PBCD obtenu en prolongeant les côtés DE et AB jusqu'à leur rencontre en P, et menons ses diagonales PC et BD, ainsi que la droite MN qui joint leurs milieux. Si on désigne par O′ le point où cette dernière droite coupe GI, on trouve comme plus haut

$$\frac{GO'}{IO'} = \frac{DP \times SB}{PE \times BC}$$

Il faut maintenant prouver que les deux points O et O′ se confondent, et, pour cela, démontrer l'égalité des rapports $\frac{GO}{IO}$ et $\frac{GO'}{IO'}$, c'est-à-dire, qu'on doit avoir :

$$DF \times AS \times PE \times BC = AE \times CF \times DP \times BS$$

mais, si on remarque que les triangles suivants : DPF et EPA, EAP et SAB, ABS et CBF, BFC et PFD, ayant, deux à deux, un angle égal, sont, entr'eux, comme les produits des côtés qui comprennent les angles égaux, il vient

$$\frac{DPF}{EPA} = \frac{DP \times PF}{PE \times PA} \qquad \frac{EAB}{SAB} = \frac{PA \times AE}{AS \times AB}$$

$$\frac{ABS}{CBF} = \frac{AB \times BS}{BC \times FB} \qquad \frac{BFC}{PFD} = \frac{FB \times CF}{PE \times DF}$$

multipliant enfin ces équations, membre à membre, on obtient l'égalité de condition donnée plus haut.

On prouverait de même que les droites qui joignent les milieux des diagonales dans les deux derniers quadrilatères passent par le point d'intersection de deux des droites analogues dans deux des quadrilatères précédents : le théorème est donc démontré.

L'emploi des signes n'était pas applicable ici ; mais la vue de la figure y supplée.

THÉORÈME V.

128. *Si un angle constant* BAC (fig. 68) *tourne autour d'un point fixe* A, *et que ses côtés prolongés rencontrent une droite donnée* LM *en deux points* B *et* C ; *le cercle circonscrit au triangle* ABC *sera toujours tangent à un cercle fixe.*

Première démonstration. Du point A abaissons sur BC la perpendiculaire AD, et sur cette droite prenons un point quelconque E ; décrivons ensuite sur AE comme diamètre un cercle qui coupe en F et G les deux côtés de l'angle mobile. Si nous menons la corde FG, cette droite sera de longueur constante, et, par conséquent, sera tangente à un cercle connu, ayant pour centre le point A.

Déterminons maintenant les lignes réciproques de la corde FG et du cercle fixe auquel elle est tangente, en prenant, pour origine, le point A, et, pour puissance, le produit AE × AD.

La ligne réciproque de la corde FG sera le cercle circonscrit au triangle ABC (63), et celle du cercle tangent à la corde sera un cercle parfaitement déterminé et tangent au cercle circonscrit au triangle (62 et 65). On aura, d'ailleurs, le centre et le rayon du cercle fixe par les formules du n° 66.

Deuxième démonstration. Du point O centre du cercle circonscrit au triangle ABC, on abaisse une perpendiculaire OH sur BC, et l'on mène OB. On obtient ainsi un triangle BOH dans lequel l'angle O est égal à l'angle BAC, et, par suite, est constant; le rapport de OB à OH est donc connu.

Si maintenant on mène la droite OA, comme les longueurs OA et OB sont égales, on voit que le lieu du point O, lorsque l'angle A tourne autour de son sommet, est une hyperbole dont l'un des foyers est le point A, et la directrice correspondante, la droite LM.

Le rapport des distances du point O au foyer et à la directrice étant déterminé, on pourra, par une construction très-simple, obtenir le second foyer A′ de l'hyperbole, et la distance OA′ — OA sera constante. On voit alors que le cercle, décrit avec OA comme rayon, c'est-à-dire, le cercle circonscrit au triangle ABC, sera tangent au cercle directeur relatif au second foyer A′.

THÉORÈME VI.

129. *Etant donné (fig. 69) un cercle dont le centre est* O *et un point* P *dans son plan; par ce point on mène deux sécantes quelconques* PAB, PA′B′, *on circonscrit un cercle à chacun des triangles* PAA′, PBB′, *puis on décrit un cercle sur* PO *comme diamètre; on propose de démontrer que les trois derniers cercles se coupent en un même point* M (Concours).

Nous avons déjà donné la démonstration de l'élève qui a obtenu le second prix : les trois démonstrations, que nous allons maintenant présenter et qui sont une application très-ingénieuse des théories générales, sont dues à l'élève qui a remporté le premier prix.

Première démonstration. Soit I le point d'intersection des deux cordes AA', BB', et HIG la polaire du point P, qui coupe PO en K. Prenons sur la droite indéfinie PI un point M tel, que le produit PI $\times$ IM, pris avec son signe, soit égal à la puissance du point P par rapport au cercle donné O : Il en résulte évidemment que le point M appartiendra aux deux cercles circonscrits aux triangles PAA' et PBB'.

La démonstration doit s'appliquer que le point P soit extérieur ou intérieur au cercle donné; mais, pour fixer les idées par une figure, admettons que le point P soit extérieur.

Soit R le rayon du cercle; d'après la condition qui détermine le point M, on a

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{IM} = \mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2$$

et, par suite,

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{PM} = \overline{\mathrm{PI}}^2 + \mathrm{PI} \times \mathrm{IM} = \overline{\mathrm{PI}}^2 + \mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2$$

mais dans le triangle POI, on a

$$\overline{\mathrm{PI}}^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2 = \mathrm{PK}^2 - \mathrm{OK}^2$$

et, par suite, il vient

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{PM} = \mathrm{R}^2 + \mathrm{PK}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{R}^2 + (\mathrm{OP} - \mathrm{OK})^2 - \mathrm{OK}^2$$

développant et réduisant, on a

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{PM} = \mathrm{R}^2 + \overline{\mathrm{OP}}^2 - 2\mathrm{OP} \times \mathrm{OK}$$

Mais, d'après une propriété connue du pôle et de la polaire par rapport à un cercle, on a

$$\mathrm{OP} \times \mathrm{OK} = \mathrm{R}^2$$

l'égalité précédente devient donc

$$\mathrm{PI} \times \mathrm{PM} = \overline{\mathrm{OP}}^2 - \mathrm{R}^2$$

mais on peut écrire

$$\mathrm{OP}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{OP} \times \left(\mathrm{OP} - \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{OP}}\right)$$

et en observant que $\frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{OP}}$ est égal à OK, il vient finalement

$$PI \times PM = OP \times OK$$

Par conséquent, le quadrilatère KOMI est inscriptible, et, comme l'angle OKI est droit, il en est de même de l'angle M; il s'en suit que le point M appartient à la circonférence décrite sur PM comme diamètre: le théorème est donc démontré.

Remarque. Dans le cas où le point P est extérieur la démonstration peut se faire plus simplement.

En effet, le point M étant déterminé comme précédemment, et G et H étant les points où la polaire du point P coupe la circonférence O, on a

$$PI \times IM = IG \times GH$$

les quatre points P, G, H, M, sont, par conséquent, sur un même cercle; mais le cercle passant par les trois premiers est celui qui est décrit sur OP comme diamètre: tout est donc démontré.

Deuxième démonstration. Elle s'appuie sur le Lemme suivant: *Si deux circonférences* O *et* E (fig. 70) *sont telles que la seconde passe par le centre* O *de la première, et qu'on prenne, par rapport à celle-ci, la polaire du point* P *diamétralement opposé au point* O ; *la droite ainsi obtenue sera l'axe radical des deux cercles.*

En effet, soient R et R′ les rayons des cercles O et E, et GH leur axe radical qui coupe la ligne des centres en I. Le point I étant d'égale puissance par rapport aux deux cercles, on a

$$\overline{OI}^2 - \overline{R}^2 = \overline{EI}^2 - R'^2$$

ou en remplaçant EI par OI — R′

$$R^2 = 2OI \times R' = OI \times OP$$

GH est donc bien la polaire du point P.

Remarque. Dans le cas où le point P est extérieur, le Lemme est évident, puisque la circonférence, décrite sur OP comme diamètre, passe par les deux points de contact G et H des tangentes menées du point P à la circonférence O. Mais la démonstration précédente est applicable, quelle que soit la position du point P.

Soient maintenant E le cercle décrit sur OP comme diamètre, et C et C′ les cercles circonscrits aux triangles PAA′, PBB′ : je dis, d'abord, que l'axe radical de C et C′ est la droite PI. En effet, l'axe radical des cercles O et C est la droite AA′, et, celui des cercles O et C′, la droite BB′ : l'intersection I de AA′ et BB′ est donc le centre radical des trois circonférences O, C et C′, et par suite PI est bien l'axe radical de C et C′.

On voit de même que la droite PI est aussi l'axe radical des cercles C et E. En effet, l'axe radical de C et O est la droite AA′, et l'axe radical de E et de O est, en vertu du lemme, la polaire GH du point P : la droite PI est donc bien l'axe radical des cercles C et E.

Les trois cercles C, C′ et E ayant même radical PI, et un point commun I, doivent se couper en un autre point commun. C.Q.F.D.

Troisième démonstration. Établissons d'abord le lemme que voici :

Étant donnés une circonférence O *et un point* P *dans son plan, quand on prend, pour origine, le point* P, *et, pour puissance, la puissance du point par rapport à la circonférence, la polaire du point* P *a pour ligne réciproque la circonférence décrite sur* PO *comme diamètre.*

Le lemme est évident lorsque le point P est extérieur au cercle O ; mais voici une démonstration qui s'applique à tous les cas. GKH étant toujours la polaire du point P, on a

$$PO \times OK = R^2$$

ou en remplaçant OK par OP — PK

$$OP \times PK = \overline{OP}^2 - R^2$$

le point O est donc bien le point réciproque du point K, et le lemme est démontré.

La démonstration du théorème est maintenant facile.

En effet, le point P étant pris pour origine, et la puissance de ce point, par rapport à la circonférence O, comme puissance, les deux lignes réciproques des cordes BB′ et AA′ sont évidemment les circonférences C et C′, et la ligne réciproque de la polaire CH est, en vertu du lemme, la circonférence E. Mais les trois lignes AA′, BB′ et GH se coupant en un même point I, les circonférences C, C′ et E se coupent au point M réciproque du premier.

Remarques diverses.

Les démonstrations précédentes font voir que les circonférences circonscrites aux triangles PAB′, PBA′, se coupent aussi sur la circonférence E.

Si on avait considéré le point I comme le point donné, on verrait aussi que les circonférences circonscrites aux triangles AIB et B′IA′, ou aux triangles AI′B et BIA′ se coupent sur la circonférence décrite sur OI comme diamètre.

Mais, d'autre part, d'après un théorème connu sur le quadrilatère complet, les circonférences C et C′ doivent se couper au même point que les circonférences circonscrites aux triangles AIB, A′IB′. En rapprochant cette remarque de la précédente, on voit que, dans chacune des positions des sécantes mobiles PAB, PA′B′, on pourra avoir la position du point M par l'intersection des circonférences décrites sur OI et IP comme diamètres ; et, qu'en ce point, se coupent aussi quatre cercles circonscrits à quatre triangles de la figure.

THÉORÈME VII.

130. *Étant donnés deux cercles* O *et* C (fig. 71) *qui ne se touchent pas, mais qui peuvent se couper ou ne pas se couper, de chaque point* M *de l'un des cercles* C, *on mène deux droites aux centres de similitude* S *et* T *des deux cercles; ces droites rencontrant le second cercle en quatre points* A, B, D, E, *on demande de démontrer que la droite* AD, *qui joint les deux* *points antihomologues de* M *par rapport aux deux centres de similitude, passe par un point fixe* (Concours).

Les démonstrations qui vont suivre sont dues à M. Chasles.

Première démonstration. Les points A et M étant antihomologues, les tangentes menées en ces points se coupent sur l'axe radical des deux cercles. Il en est de même, et, par une raison semblable, des tangentes aux points E et M. Les deux tangentes en A et E viennent donc couper l'axe radical au point où cette droite est rencontrée par la tangente en M.

On voit ainsi que le pôle de la corde AD se trouve sur l'axe radical des deux cercles, et que, par suite, la droite mobile passe toujours par un point fixe F qui est le pôle de l'axe radical.

Deuxième démonstration. On se propose de faire voir que le rapport $\frac{SF}{TF}$ est constant.

Menons (fig. 71) MG parallèle à AF; les triangles semblables, AFS et MGS, FDT et MTG donnent

$$\frac{FS}{FG}=\frac{AS}{AM} \qquad \frac{FG}{FT}=\frac{MD}{DT}$$

et en multipliant, membre à membre,

$$(1) \qquad \frac{FS}{FT}=\frac{AS\times MD}{AM\times DT}$$

à cause des triangles semblables SOB et SCM, OTE et CTM, on a aussi

$$\frac{OS}{OC}=\frac{BS}{BM} \qquad \frac{OC}{OT}=\frac{EM}{ET}$$

d'où l'on déduit encore par multiplication

$$(2) \qquad \frac{OS}{OT}=\frac{BS\times EM}{BM\times ET}$$

Multipliant maintenant, membre à membre, les équations (1) et (2), il vient

$$\frac{FS}{FT}=\frac{OT}{OS}\times\frac{AS\times MD\times BS\times EM}{AM\times DT\times BM\times ET}$$

mais en observant qu'on a

$$MD \times EM = MB \times AM$$

il vient

$$\frac{FS}{FT} = \frac{OT}{OS} \times \frac{AS \times BS}{DT \times ET}$$

Les produits $AS \times BS$ et $DT \times ET$ sont constants, comme représentant les puissances des deux centres de similitude par rapport à la circonférence O; le rapport $\frac{FS}{FT}$ est, par conséquent connu : et comme, d'ailleurs, on voit, par la construction de la figure, que le point F est sur le prolongement de TS, on en conclut que le point est bien déterminé.

Le théorème est donc démontré.

Troisième démonstration. M. Chasles transforme d'abord l'énoncé de la question.

Les rayons OB et OE ne formant qu'une même droite, comme parallèles, tous deux, à CM, on voit que le quadrilatère ABED, inscrit dans la circonférence O, a trois de ses côtés qui tournent, respectivement, autour des trois points O,T,S, et le quatrième côté AD doit tourner autour d'un point fixe F situé sur la même droite que les premiers.

Quand le centre O est l'un des points fixes, il est facile de voir que, réciproquement, de la propriété que nous venons d'énoncer, on peut déduire le théorème proposé.

Tout revient à prouver que le lieu du point M, intersection des côtés opposés AD et DE, est une circonférence C telle, que S et T soient les centres de similitudes des circonférences O et C.

En effet, menons, par le point M', la droite MC parallèle à OB, et prolongeons-la jusqu'à la rencontre de la droite OS; on aura par les triangles semblables

$$\frac{OT}{CT} = \frac{OB}{MC} \qquad \frac{OS}{CS} = \frac{OB}{MC}$$

d'où

$$\frac{CT}{CS} = \frac{OT}{OS}$$

Le point C est donc harmonique conjugué du point O par rapport aux deux points T et S : on aura ensuite

$$MC = \frac{OB \times CS}{OC}$$

Le lieu du point M est donc une circonférence dont le centre est C et le rayon MC. Les points T et S sont, d'ailleurs, les deux centres de similitude.

Ecartant maintenant cette restriction que le point O est le centre du cercle donné : nous avons à démontrer le théorème suivant, un peu plus général que le théorème proposé :

Un quadrilatère étant inscrit dans un cercle, si on le déforme en faisant tourner trois de ses côtés autour de trois points O,S,T *donnés en ligne droite ; le quatrième côté passera par un point fixe situé sur la ligne droite qui contient les trois premiers* (*).

Tout revient à démontrer que le rapport $\frac{IF}{HF}$ est constant. Soient (fig. 72) I et H les points où la droite OTS coupe le cercle : menons les droites qui les joignent aux extrémités du côté AD ; nous obtiendrons deux triangles AHD,IAD qui ont même base AD, et sont, entr'eux, comme leurs hauteurs, ou comme HF est à IF. Mais les mêmes triangles qui ont deux angles supplémentaires AHD, AID sont aussi, entr'eux, comme les produits des côtés qui comprennent ces angles : on a, par conséquent,

$$\frac{HF}{IF} = \frac{AH \times DH}{AI \times DI}$$

D'autre part, les triangles BAI,BAH, ayant même base HB, sont entr'eux comme leurs hauteurs, ou comme SI est à SH ; ils ont aussi les deux angles égaux BIA,AHB ; ils sont donc entr'eux comme les produits des côtés qui comprennent ces angles, et on peut écrire

$$\frac{SI}{SH} = \frac{BI \times AE}{BH \times AH}$$

(*) Chasles, — *Porisme*, 182.

Par une raison analogue, les triangles HBE, BAE et DIE, DEH donnent

$$\frac{OH}{OI} = \frac{BH \times EH}{BI \times EI} \qquad \frac{TI}{TH} = \frac{DI \times EI}{DH \times EH}$$

Multipliant maintenant les quatre équations, membre à membre, et supprimant les facteurs communs, il vient :

$$\frac{HF}{IF} \times \frac{SI}{SH} \times \frac{OH}{OI} \times \frac{TI}{TH} = 1$$

d'ou l'on déduit

$$\frac{IF}{IH} = \frac{IS}{HS} \times \frac{HO}{IO} \times \frac{IT}{HT}$$

Le rapport $\frac{IF}{IH}$ est donc constant ; et, comme la construction du quadrilatère indique si le point F est sur la droite IH ou sur son prolongement, ce point est bien déterminé.

Quatrième démonstration. Nous allons calculer le rapport $\frac{FS}{FT}$, mais en nous servant de la théorie des transversales.

Considérons (fig. 72) le triangle MTS coupé par les deux tranversales AD et BE ; nous aurons

$$TF \times SA \times MD = MA \times SF \times TD$$
$$TO \times SB \times ME = MB \times SO \times TE$$

Multipliant, membre à membre, et supprimant les produits égaux $MD \times ME$ et $MA \times MB$, il vient

$$TF \times TO \times SA \times SB = SF \times SO \times TD \times TE$$

d'où

$$\frac{FS}{FT} = \frac{OT}{OS} \times \frac{SA \times SB}{TD \times TE}$$

Les produits $SA \times SB$ et $TD \times TE$ sont, respectivement, les puissances des points S et T par rapport à la circonférence O ; le rapport $\frac{FS}{FT}$ est donc déterminé en grandeur et en signe, et, par suite, la position du point F est connue.

Cinquième démonstration. Nous supposerons ici que le point fixe O soit le centre de la circonférence donnée et nous construirons une circonférence C comme il a été dit (Troisième dém.).

Concevons maintenant, outre le quadrilatère ABCD, deux autres A'B'C'D', A''B''C''D''. Les trois quadrilatères auront trois de leurs côtés passant, respectivement, par les trois points O,T,S : il faut prouver que les derniers côtés DA, D'A', D''A'' vont concourir en un même point.

Les deux droites AA' et MM' joignant deux points antihomologues se coupent sur l'axe radical des deux cercles ; et il en est de même de DD' et MM' : les droites AA' et DD' vont, par conséquent, rencontrer l'axe radical au même point. Pour une raison semblable, AA'' et DD'', A'A'' et D'D'' se coupent, deux à deux, en un même point de l'axe radical : donc les triangles AA'A'', DD'D'' sont tels que leurs côtés se coupent deux à deux sur une même droite, et, par conséquent, les sommets opposés sont sur des droites concourantes en un même point F, ou, en d'autres termes, les trois droites AD, A'D', A''D'' se coupent en un même point.

Sixième démonstration. — On emploie une perspective.

Considérons d'abord le cas particulier où l'un des points fixes donné S est à l'infini ; on a alors à démontrer le théorème suivant :

Etant donnés un cercle dont le centre est o (fig. 73) *et un point* t *dans son plan ; on mène* ot, *la parallèle* ab *à cette droite, et le diamètre* bc ; *on tire ensuite les droites* ted *et* ad : *il s'agit de prouver que cette dernière droite passe par un point fixe.*

Soit f le point où la droite ad rencontre ot, les deux angles fde, toe sont évidemment égaux, comme ayant même mesure ; et, par suite, les quatre points o,f,d,e sont un même cercle ; on a alors

$$to \times tf = td \times te$$

Donc le point f est fixe.

Faisant maintenant une perspective du genre de celle qui a été indiquée au n° 86, on a le théorème général.

M. Chasles donne encore quatre démonstrations : l'une où intervient un sinus, une seconde pour les infiniment petits, et deux où il fait usage du rapport anharmonique et de l'involution : nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de l'éminent géomètre pour ces démonstrations que nous ne croyons pas pouvoir prendre place ici (*)

Pour terminer, nous donnerons une dernière démonstration due à *un élève du lycée Bonaparte.*

Septième démonstration. Menons (fig. 71) la droite MK qui fasse avec MC l'angle KMC égal à l'angle MSC : les triangles MCK, MSC étant semblables, on a, d'abord,

$$CK \times CS = \overline{CM}^2$$

et, par conséquent, le point K est fixe.

D'ailleurs, la similitude des mêmes triangles donne l'angle MKC égal à l'angle CMS, et, par suite, à l'angle EBA ou ADE.

Les angles ADE, MKC étant égaux, les quatre points F, D, M, K sont sur une même circonférence, et on a

$$FT \times TK = TD \times TM$$

mais TD $\times$ TM c'est le produit des distances d'un centre de similitude à deux points antihomologues par rapport à lui ; il est donc constant, et, par suite, le point F est fixe.

Nous allons, pour achever le chapitre, faire connaître quelques nouveaux théorèmes sur la perspective. Ces théorèmes, quoique d'un usage moins général que ceux que nous avons donnés dans la première partie, seront quelquefois utiles.

THÉORÈME I.

131. *La projection stéréographique d'un cercle tracé sur*

(*) Diverses solutions de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général en 1851, par M***.

une sphère est elle-même un cercle, et le centre de cette projection est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle donné.

La projection stéréographique est la perspective d'une figure tracée sur une sphère, lorsqu'on prend pour point de vue un point de la sphère, et, pour plan du tableau, un grand cercle qui a ce point pour pôle. Comme le plan tangent à la sphère, au point de vue, est parallèle au plan du tableau, la première partie du théorème peut être considérée comme démontrée : mais voici une démonstration directe du théorème complet.

Soit (fig. 74) V le point de vue, M un point du cercle donné, et S le sommet du cône circonscrit à la sphère suivant la cercle donné ; prenons, pour plan de perspective auxiliaire, un plan parallèle au plan tangent en V, et mené par le point S ; et soit M′ la perspective du point M sur le plan auxiliaire. Menons maintenant la droite SM, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en A avec le plan tangent en V ; puis tirons les droites AV et SM.

Les droites AV et AM sont égales comme tangentes menées d'un même point A à la sphère ; et les droites SM′ et AV étant parallèles comme intersections d'un même plan par un troisième, les droites SM′ et SM sont aussi égales ; mais comme SM est constant, il en est de même de SM′, et la perspective auxiliaire est un cercle dont le centre est le point S.

Maintenant, si on revient au plan du tableau primitif qui est parallèle au plan auxiliaire, la perspective est toujours un cercle, et son centre est la perspective du sommet du cône sur le tableau

THÉORÈME II.

132. *L'angle de deux courbes tracées sur une sphère est égal à l'angle de leurs projections stéréographiques.*

Soit (fig. 75) V le point de vue ; AB et AC les tangentes aux deux courbes tracées sur la sphère et qui s'y coupent au point A, et les droites DB et DC leurs projections stéréographiques; prolongeons maintenant les deux tangentes jusqu'à leur rencontre, en E et F, avec le plan tangent à la sphère au point V; puis menons les trois côtés du triangle VEF.

Les deux droites EV et AE sont égales comme tangentes menées, d'un même point E, à la sphère; et il en est de même des deux droites FV et FA; les deux triangles VEF et AEF sont donc égaux, comme ayant les trois côtés respectivement égaux, et, par suite, les angles EVF, EAF le sont eux-mêmes. Mais déjà les angles EVF, BDC sont égaux, comme angles plans d'un même dièdre AV; par conséquent, les deux angles EAF, BDC sont aussi égaux.

THÉORÈME III.

133. *Étant tracés deux cercles sur une sphère, si, par l'un des sommets des deux cônes qui contiennent les deux cercles, on fait passer un plan quelconque, ce plan coupera les deux cercles sous un même angle.*

Soient (fig. 30) AC et DF deux cercles d'une même sphère, S le sommet d'un des cônes qui contiennent les deux cercles, E et B les points ou un cercle quelconque de la sphère dont le plan passe par le sommet S vient rencontrer les deux premiers; les tangentes au troisième cercle, aux points E et B; seront évidemment symétriques par rapport au plan qui est perpendiculaire sur E B, en son milieu.

Si maintenant nous menons la génératrice SEB et une génératrice voisine SE'B', les deux produits SE $\times$ SB et SE' $\times$ SB' étant égaux, tous deux, à la puissance du point S par rapport à la sphère, sont égaux entr'eux; et les quatre points E, B, E' et B', sont sur un même cercle. Supposons ce cercle tracé, et menons les cordes EE', BB' qui lui sont communes avec les deux cercles qu'il coupe. Il est clair que lorsque la génératrice SE'B' tournant autour du point S sera venue se confondre avec SEB, les deux cordes communes seront devenues des tangentes communes aux deux premiers cercles et au cercle auxiliaire.

Mais les tangentes en E et B à ce dernier cercle sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire à EB en son milieu : les deux angles dont il faut prouver l'égalité ont donc leurs côtés symétriques par rapport à un même plan, et par suite, sont bien égaux, comme on l'avait dit.

REMARQUE. Le cercle auxiliaire, que nous avons considéré dans la démonstration précédente, est tangent extérieurement aux deux cercles donnés. On peut donc dire que, lorsque deux cercles tracés sur une sphère sont touchés extérieurement par un troisième cercle de la sphère, les deux points de contact se trouvent sur une même génératrice du cône, qui contient les deux cercles, et qui a son sommet extérieur à la sphère. On voit facilement qu'il en est encore de même dans le cas de deux contacts intérieurs, mais que, dans le cas d'un contact intérieur et d'un contact extérieur, les points de tangence sont sur une même génératrice du cône dont le sommet est intérieur à la sphère.

THÉORÈME IV.

134. *Les six sommets des cônes qu'on peut faire passer par trois cercles d'une sphère pris, deux à deux, sont, trois à trois, sur quatre droites situées dans un même plan.*

Je remarque, d'abord, que le nombre des solutions et les différents cas du problème du cercle tangent à trois cercles donnés est le même sur la sphère et sur le plan. C'est ce qu'on voit immédiatement en faisant une projection stéréographique des cercles tracés sur la sphère.

Soient, S, S', S'' les sommets des trois cônes extérieurs ; T, T', T'' ceux des trois cônes intérieurs correspondants : je dis d'abord que les trois sommets S, S', S'' sont en ligne droite.

Concevons deux cercles qui touchent, le premier, extérieurement, le second, intérieurement, les trois cercles donnés. D'après la remarque qui a été faite à la suite du théorème précédent, les trois premiers points de contact sont deux à deux sur des droites passant, respectivement, par les sommets S,S′ et S″. Ces trois sommets se trouvent, par conséquent, dans un plan passant par les trois premiers points de contact. On prouve de même qu'ils sont situés dans un plan passant par les trois derniers points. Ils sont donc sur l'intersection de deux plans, et par suite, sont en ligne droite.

On prouve de même que les sommets S,T′,T″ ; S′,T,T″ ; S″,T,T′ sont, trois à trois, en ligne droite : comme, d'ailleurs, les quatre droites obtenues ont, deux à deux, un point commun, elles sont situées dans un même plan.

CHAPITRE II.

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

MÉTHODES ET EXEMPLES.

135. On appelle lieu géométrique la figure formée par tous les points jouissant d'une même propriété. Dans le plan, le lieu est composé d'une ou plusieurs lignes, et, dans l'espace, d'une ou plusieurs surfaces, ou d'une ou plusieurs lignes.

Pour faire voir qu'une figure est un lieu demandé, il faut démontrer que tout point jouissant de la propriété énoncée est situé sur cette figure, et, réciproquement, que tout point qu'elle contient jouit de la propriété.

On peut aussi, pour achever la démonstration, établir la proposition contraire, c'est-à-dire, prouver que tout point, qui ne jouit pas de la propriété énoncée, n'appartient pas à la figure.

Nous allons d'abord nous occuper des lieux plans.

LIEUX PLANS.

Un grand nombre de théorèmes connus, quand on y adjoint les propositions réciproques ou contraires, conduisent immédiatement à des lieux géométriques ; c'est ce que nous allons voir par une revue rapide de la géométrie plane.

136. Le premier livre nous donne les lieux suivants :

1. Le lieu des points, à égale distance de deux points fixes, est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint les deux points.
2. Le lieu des points, à égale distance de deux droites qui se coupent, est la figure formée par les deux bissectrices des quatre angles de ces droites.
3. Le lieu des points, à égale distance d'une droite, est la figure formée par les deux parallèles à la droite, menées à la distance donnée.
4. Le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux droites fixes qui se coupent, est constante, est le périmètre d'un rectangle dont les droites données sont les diagonales.

On ramène ce lieu aux précédents, en prolongeant, à partir du point donné, l'une des perpendiculaires d'une longueur égale à l'autre.

5. Le lieu des points tels, que la différence de leurs distances à deux droites qui se coupent est constante, est la figure formée pas les prolongements des côtés d'un rectangle dont les diagonales sont les droites données.

137. Le second livre conduit aux lieux suivants :

1. Le lieu des points, à une distance constante d'un point fixe, est la circonférence, qui a ce point pour centre, et pour rayon la longueur donnée.
2. Le lieu des extrémités des tangentes, de même longueur, menées par les différents points d'une circonférence, est une circonférence concentrique à la première.
3. Le lieu des extrémités des droites de longueur donnée, menées par les différents points d'une circonférence, dans une direction et un sens déterminés, est une circonférence égale à la première.

Pour le démontrer il suffit de construire un parallélogramme dont deux côtés opposés sont : la droite dans une position déterminée, et une droite menée par le centre du cercle donné, de même sens, de même direction, et de même longueur que la droite elle-même.

4. Le lieu géométrique des points tels que, de ces points, on voit une droite de longueur donnée, sous un angle donné, est la figure formée de deux arcs, capables de l'angle, ayant pour corde commune la droite donnée, et symétriques par rapport à cette droite.

138. Trois des théorèmes que nous avons démontrés, ainsi que leurs réciproques, au n° 102, et en nous appuyant seulement sur les deux premiers livres, conduisent aux lieux suivants :

1. Étant données (fig. 76) deux droites parallèles BD et AC coupées par la perpendiculaire commune DC ; une droite mobile AB rencontre les deux parallèles en deux points A et B tels, que le produit des segments AC et BD est constant ; on prend sur la droite DC ou sur son prolongement un point E, tel que le produit de ses distances AC et BD soit égal au produit donné, et de ce point on abaisse EM perpendiculaire sur la droite mobile AB : le lieu du point M est la circonférence décrite sur DC comme diamètre.

Suivant que le produit AC $\times$ BD est plus petit ou plus grand que le carré de la moitié de DC, les segments BD et AC sont comptés, dans le même sens ou en un sens contraire, par rapport aux points D et C, et le point E est sur DC ou sur son prolongement.

2. Le lieu des points tels, que les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les trois côtés d'un triangle sont en ligne droite, est le cercle circonscrit au triangle.

3. Le lieu des points tels que, si on les joint aux trois sommets d'un triangle équilatéral, l'une des droites soit égale à la somme des deux autres, est le cercle circonscrit au triangle.

139. Passons maintenant au troisième livre : on a les lieux suivants :

1. Étant donnés un point et une droite, par le point, on mène une droite quelconque qui rencontre la première, on partage

la partie de la droite mobile, comprise entre le point et la droite fixe, dans un rapport déterminé : le lieu des points, ainsi obtenus, est une droite parallèle à la droite donnée.

2. Si une droite mobile détermine, sur deux droites fixes qui se coupent, et, à partir de leur point de rencontre, deux segments dont le rapport est constant : le lieu des points, qui partagent la droite mobile dans un rapport donné, est une droite passant par le point d'intersection des droites fixes.

3. Le lieu des points tels, que le rapport de leur distance à deux points fixes est constant, est un cercle. L'un des diamètres de ce cercle est la distance des deux points qui forment, avec les deux points donnés, et sur la droite qui les joint, la division harmonique correspondant au rapport donné.

4. Le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés est constante, est un cercle qui a pour centre le milieu de la droite qui joint les deux points.

5. Le lieu des points tels, que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes est constante, est une droite perpendiculaire à celle qui joint les deux points fixes.

140. On peut rattacher au troisième livre les théories générales que nous avons exposées en commençant. Quelques-uns des théorèmes qui en font partie conduisent aux lieux suivants :

1. Si un triangle ABC (fig. 6) se déforme, de manière que ses trois côtés tournent autour de trois points fixes, en ligne droite, et que deux de ses sommets glissent sur deux droites données, le sommet libre C décrira une droite passant par le point d'intersection des deux précédentes.

En effet, soient A′B′C′, une position déterminée, et ABC, une position quelconque du triangle mobile ; comme les trois points D,E,F, par lesquels passent constamment les côtés du triangle mobile, sont en ligne droite : les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes. Mais comme, par hypothèse, les points A et B se meuvent sur les deux premières, le lieu géométrique du point C sera la dernière droite CC′.

La théorie des pôles et polaires et celle des axes radicaux conduisent immédiatement à un certain nombre de lieux dont les énoncés ont déjà été donnés. Quant aux théories des figures semblables ou réciproques, elles donnent facilement les lieux qui suivent :

2. Si d'un point on mène des droites à une circonférence, et qu'on les partage en deux segments, dont le rapport est donné, le lieu des points ainsi obtenus est une circonférence.

3. Étant donnés un point et une droite, si, par le point, on mène une transversale quelconque, et qu'on détermine sur sa direction un point tel, que le produit des distances du point fixe à ce point et au point de rencontre des deux droites, soit un nombre constant positif ou négatif, le lieu du point mobile est un cercle.

4. Si, dans l'énoncé précédent, on remplace la droite donnée par une circonférence, le lieu est une droite ou un cercle, suivant que le point fixe est ou n'est pas sur la circonférence donnée.

Méthodes pour la recherche des lieux géométriques.

141. La géométrie pure ne fait pas connaître de méthode générale pour la recherche qui nous occupe.

Ce qu'il y a de mieux à faire dans la plupart des cas, c'est d'essayer de voir si le lieu demandé ne se ramène pas à quelqu'autre qui est connu. C'est pour faciliter cette *réduction* que nous avons fait l'énumération des lieux qu'on trouve, d'abord, comme conséquences des théorèmes élémentaires.

On procède aussi, par *généralisation*, quand la question proposée s'y prête ; pour cela, on essaie de passer d'un cas particulier à un cas plus général qui le renferme, en imitant, avec modifications convenables, dans le second cas, la méthode suivie dans le premier. Quelquefois il arrivera qu'un simple changement dans la position du lieu conduira à la généralisation demandée.

Pour certaines questions spéciales, les méthodes de *Trans-*

formation, par rayons vecteurs, réciproques, ou par la projection cylindrique ou conique, permettent souvent de ramener un lieu à un autre.

Dans les cours de Mathémathiques élémentaires, il est d'usage de ne proposer aux élèves que la recherche de lieux qui sont des droites, des circonférences, ou des figures formées de plusieurs de ces lignes; alors, si on éprouve de la difficulté dans l'application immédiate des méthodes précédentes, on devra chercher à faire la distinction entre les deux seules figures possibles, par la construction d'un certain nombre de points particuliers.

Ainsi, si le lieu a des points à l'infini, on en conclura qu'il ne peut être qu'une ligne droite ou une figure formée de ces lignes. Au contraire, si le lieu n'a que des points à distance finie, on pourra penser, en général, qu'il est un cercle. Cependant cela n'est pas rigoureusement vrai, puisque le lieu pourrait être une droite finie ou une figure composée de pareilles lignes, comme nous l'avons vu (139. ex. 4).

Pour lever le doute, on construira avec la règle et le compas, s'il est nécessaire, un certain nombre de points, et on trouvera ainsi l'énoncé d'un théorème qu'il ne restera plus qu'à démontrer.

Nous allons maintenant chercher différents lieux en nous servant, suivant les cas, de l'une ou l'autre des méthodes que nous venons d'indiquer.

I.

142. *Etant donnés un triangle* ABC (fig. 77), *et deux points* D *et* E *sur l'un de ses côtés* BC, *on mène* FG *parallèle à* BC, *et on tire les droites* DG, EF, *on demande le lieu de leur point de rencontre* M.

Prenons sur le côté BC, entre D et E, un point H tel que le rapport de HD à EH soit égal au rapport de BD à EC. Il en résultera que le premier rapport sera égal à celui de BH à CH.

Mais si l'on mène la droite MH, et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en I avec FG, le rapport de FI à IG sera égal à celui de HD à EH, et, par suite, au rapport de BH à CH, la droite HMI passe donc par le point A, et le lieu demandé est la droite AH.

Remarque. La proposition peut s'énoncer ainsi : *Lorsqu'un triangle se déforme sous la condition que deux de ses sommets glissent sur deux droites fixes, et que deux de ses côtés passent par des points fixes, tandis que le troisième est parallèle à la droite qui joint les points donnés ; le sommet libre décrit une ligne droite.*

II.

143. *Etant donnés deux droites parallèles* AB *et* CD (fig. 78) *et trois points fixes* E, F, G *en ligne droite ; si autour du point* G *on fait tourner une transversale qui rencontre les deux parallèles en* I *et* K, *et qu'on mène les droites* EK, FI, *le lieu du point* M, *intersection de ces deux droites, est une parallèle aux droites données.*

En effet, le triangle GEK coupé par la transversale IF donne

$$\frac{GI}{IK} \times \frac{KM}{ME} \times \frac{EF}{FG} = 1$$

ou

$$\frac{KM}{ME} = \frac{FG}{EF} \times \frac{IK}{GI}$$

Menons maintenant, par le point M, LH parallèle à AB, on aura

$$\frac{KM}{ME} = \frac{HC}{EH} \quad \frac{IK}{GI} = \frac{AC}{GA}$$

et, par suite, il vient

$$\frac{HC}{EH} = \frac{FG}{EF} \times \frac{AC}{GA}$$

le point H est donc fixe, et le lieu demandé est la parallèle LH aux droites AB et CD.

Les deux derniers lieux sont des cas particuliers du lieu plus général trouvé au n° 143 (ex. 1).

III.

144. *Dans un triangle* ABC, *le côté* BC *est donné de grandeur et de position, et l'angle opposé* A *est constant; on demande les lieux suivants :*

1° *Des centres de gravité* G *de tous les triangles ;*

2° *Des points d'intersection des hauteurs ;*

3° *Des centres des cercles inscrits ;*

4° *Des centres des cercles exinscrits ;*

1° Lieu des centres de gravité. D étant le milieu de BC, on mène DA, et on prend une longueur DG égale à $\frac{AD}{3}$. Mais le point A décrit un cercle, il en est donc de même du centre de gravité G.

2° Lieu du point d'intersection des hauteurs. Les hauteurs partant des sommets B et C font un angle supplémentaire de l'angle A, le lieu des points d'intersection est donc formé des deux arcs de cercle.

3° Lieu des centres du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit qui touche le coté fixe BC. O et O′ étant les centres des deux cercles, on voit facilement que les angles BOC, BO′C sont respectivement égaux à $90^\circ + \frac{A}{2}$ et $90^\circ - \frac{A}{2}$, le lieu se compose donc de deux circonférences entières.

4° Lieu des centres des cercles ex-inscrits qui touchent AB et AC. O″ et O‴ étant les centres des deux cercles, on voit facilement que les angles BO″C et BO‴C sont égaux à $\frac{A}{2}$, le lieu est donc composé de deux arcs de cercle symétriques par rapport au côté fixe BC.

IV.

145. *Dans un triangle* ABC (fig. 79) *l'angle* A *est donné de grandeur et de position, et le périmètre est constant ; d'un des sommets* B *et* C, *de* B, *par exemple, on abaisse une per-*

pendiculaire BM *sur la bissectrice* CO *de l'angle extérieur* BCE *qui a pour sommet le point* C : *on demande le lieu du pied* M *de la perpendiculaire.*

PREMIÈRE SOLUTION. Soit tracé le cercle ex-inscrit O qui touche le côté BC en F, et les prolongements des deux autres côtés en D et E, ce cercle est déterminé, et le côté variable BC lui est toujours tangent. Je mène ensuite la droite de contact DE, et je dis que cette droite est le lieu demandé.

En effet, prolongeons la bissectrice de l'angle BCE jusqu'à ce qu'elle passe par le centre O du cercle ex-inscrit, et tirons les droites MF, MD, ME, OD et OB : les deux triangles FMC, CME sont évidemment égaux, et on en conclut l'égalité des angles FMC, CME. Mais, d'autre part, le cercle décrit sur OB, comme diamètre, passe par les trois points D, M, F, puisque les angles BDC, BMO, OFB sont droits, et les deux droites BD et BF sont deux cordes égales dans ce cercle ; les arcs sous-tendus par les deux cordes sont, par conséquent, égaux, et il en est de même, par suite, des angles DMB et BMF.

D'après ce qui précède, les angles BMD, CME sont, respectivement, égaux aux deux angles BMF, FMC complémentaires l'un de l'autre ; ils sont donc eux-mêmes complémentaires, et, dès lors, les trois points D, M, E sont en ligne droite. C.Q.F.D.

DEUXIÈME SOLUTION. Dans l'une quelconque des positions de BC, prenons sur le prolongement de AC une longueur CG égale à BC, et par le point G menons une tangente GK au cercle ex-inscrit, nous obtiendrons ainsi un quadrilatère BCGK circonscrit au cercle, et dans lequel la diagonale CK sera la bissectrice de l'angle BCE, tandis que l'autre lui sera perpendiculaire. Mais, d'après le théorème de Brianchon appliqué au quadrilatère, les deux diagonales se coupent sur la corde de contact BD ; le théorème est donc démontré.

V.

146. *Étant donnés un cercle dont le centre est* O (fig. 80) *et une corde* AB *de ce cercle, par un point* C *pris sur le prolongement de la corde, on mène une tangente* CG *au cercle, et la bissectrice* CM *de l'angle* ACG *formé par la corde et la tangente ; puis du centre* O *on abaisse une perpendiculaire* OM *sur* CM : *quel est le lieu géométrique du point de rencontre* M ?

Abaissons, du centre, la perpendiculaire OI sur la corde AB, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en E et G avec le cercle. En examinant les cas particuliers où la tangente a son point de contact en A, B et E, on trouve trois points du lieu qui sont les milieux de la flèche EI de l'arc AEI, et des droites qui joignent le point E aux points A et B.

Alors, l'hypothèse la plus simple, qu'on puisse faire sur la nature du lieu, est de supposer que ce lieu est la parallèle à la corde AB menée par le milieu de la flèche IE de l'arc AEC : nous allons voir qu'il en est effectivement ainsi.

Par le point E menons la tangente EDL qui rencontre la tangente mobile CG au point D ; puis tirons la droite OD qui coupe la corde AB au point K : il est facile de voir que le point de rencontre de OD et de la bissectrice de l'angle ACG est le point M du lieu.

En effet, le triangle EDG étant isocèle, l'angle DGE est égal à la moitié de l'angle LDC, et, par suite, égal à l'angle DCM ; les deux droites EG et CM sont donc parallèles, et la droite OD qui est perpendiculaire à FG, l'est aussi à CM.

Menons maintenant, par le point M, une parallèle MF à AB ; le triangle DCK étant isocèle, le point M est le milieu de la base DK, et, par suite, le point F est aussi le milieu de IE : au dessus de AB, le lieu du point M est donc bien celui que nous avions annoncé.

Remarque 1. Si l'on mène les tangentes de l'autre côté de la corde, on aura un second lieu qui sera une parallèle à la corde

AB menée par le milieu I de la flèche du second arc sous-tendu par cette corde.

Remarque 2. En considérant les positions extrêmes de la tangente en A et B, on voit facilement que le lieu complet se compose des deux parties des parallèles à la corde, qui sont interceptées entre les côtés du quadrilatère inscrit AEBG.

Remarque 3. On prouve facilement que les parties des parallèles, extérieures au quadrilatère, sont le lieu des projections du centre sur les bissectrices des angles supplémentaires des premiers.

VI.

147. *Trouver le lieu des points d'intersection des diagonales des rectangles inscrits dans un triangle.*

Soit ABC (fig. 81) le triangle donné, et DEFG le rectangle inscrit; il s'agit de trouver le lieu des points d'intersection M des diagonales DF et GE.

Menons la hauteur AH, et soient K et I les milieux de AH et de BC; tirons les droites KI et AK, puis la droite ML qui joint le point M au point L où la droite AK rencontre la base DE du rectangle : d'après un théorème connu, le point L est le milieu de DE, et comme M est le milieu de DF, la droite LM sera parallèle à EF et égale à sa moitié. Si donc on prolonge LM jusqu'à sa rencontre en P avec BC, le point M sera le milieu de LP.

Mais, d'autre part, la droite KI doit partager en deux parties égales la droite LP parallèle à AH ; le lieu du point M est donc la droite IK qui joint les milieux de la base BC et de la hauteur correspondante AH.

Remarque 1. La droite IK prolongée indéfiniment donne aussi le lieu des centres des rectangles, dont les bases parallèles à BC coupent les prolongements des côtés AB et AC, au-delà du sommet A ou des sommets B et C.

Remarque 2. On obtient trois droites différentes pour lieux, quand on suppose que les bases des rectangles soient successivement parallèles aux trois côtés du triangle, et on démontre facilement que les trois droites se coupent en un même point.

Généralisation. On peut, d'abord, remplacer, dans l'énoncé, le rectangle par un parallélogramme dont les côtés DG et EF soient parallèles à une direction donnée : transformant ensuite le nouvel énoncé par la perspective, on a le lieu suivant :

Étant donné un point Q *sur le prolongement d'un côté* BC *d'un triangle* ABC, *et un point quelconque* R *dans le plan de ce triangle; par le point* Q, *on mène une transvrsale* QDE *qui coupe les côtés* AB *et* AC *en* D *et* E, *on tire les droites* RD *et* RE *qu'on prolonge jusqu'à leur rencontre en* G *et* F *avec* BC, *et on obtient ainsi un quadrilatère* DEFG*: le lieu du point d'intersection* M *des diagonales* DF *et* EG *est une droite.*

VII.

148. *Par un point* P *pris dans le plan d'une circonférence* O (fig. 82), *on mène une sécante* PBC, *et, par les points de rencontre, les tangentes* AB *et* AC*; on forme ainsi un triangle* ABC, *dont les hauteurs* AD, BE, CF *se coupent en* M: *on demande le lieu de ce point.*

On remarque que la figure COBM est un losange, parce que CF et OB, OC et EB sont, deux à deux, parallèles, comme perpendiculaires à une même droite. De là, résulte l'égalité des droites DM et OC, et, par suite, celle de OP et PM : le lieu demandé est donc le cercle qui a, pour centre, le point P, et, pour rayon, PO.

VIII.

149. *Étant donnés deux droites parallèles* PQ *et* RS, (fig.83) *et un point* A *sur la première, par ce point on mène une droite quelconque* AB, *par son point de rencontre* B *avec la droite* RS, *on lui élève une perpendiculaire* BC, *par le point de rencontre* C *des droites* BC *et* PQ, *on mène la droite* CD *qui* *fait, avec* PQ, *un angle* ACD *double de l'angle* BAC, *et, enfin, du point* A, *on abaisse* AM *perpendiculaire sur* CD : *on demande le lieu du point* M.

Achevons le rectangle ABCE dont deux côtés adjacents sont les droites AB et BC, et, du sommet E, abaissons EF perpendiculaire sur RS ; d'après une propriété connue du rectangle, l'angle EBA est égal à l'angle BAC. Mais ce dernier étant lui-même égal à l'angle ABF, à cause des parallèles PQ et RS, l'angle FBE est double de l'angle BAC, et, par suite, égal à l'angle ACM. On remarque aussi que la droite EF est double de la distance du centre O du rectangle à la droite RS, c'est-à-dire, double de la distance des deux parallèles données.

Cela posé, les deux triangles rectangles EBF, ACM sont égaux parce qu'ils ont les hypothénuses EB et AC égales, comme diagonales d'un même rectangle, et les deux angles EBF, MCA égaux.

On en conclut que les droites AM et EF sont égales ; donc, le lieu demandé est un cercle ayant, pour centre, le point A, et un rayon double de la distance des deux parallèles.

IX.

150. *Un triangle* ABC (fig. 84) *qui reste semblable à lui-même tourne autour d'un de ses sommets* A, *tandis qu'un autre sommet* B *parcourt une ligne fixe* XY; *on demande le lieu du troisième sommet* C.

On peut évidemment modifier l'énoncé de la manière suivante :

Étant donnés un point fixe A, *et une droite fixe* XY; *par le point* A, *on mène deux droites* AB *et* AC *faisant entr'elles un angle donné ; la première rencontrant* XY *en* B, *on prend, sur la seconde, un point* C *tel que le rapport de* AB *à* AC *soit égal au rapport de deux lignes données* M *et* N : *on demande le lieu du point* C.

Si l'on considère, d'abord, le cas où l'angle donné est nul, la droite AC se placera dans la direction AB, et le lieu du point C sera une parallèle F_1H_1 à XY. On a, d'ailleurs, un point de cette parallèle, en abaissant du point A, une perpendiculaire AE sur XY, et déterminant sur son prolongement un point F tel, que le rapport de AF_1 à AE soit égal à celui des droites données M et N.

Maintenant, si l'angle devient quelconque, il est évident que le lieu ne fera que tourner, autour du point A, d'un angle égal à l'angle donné. Alors, pour avoir le lieu demandé, il suffira de faire un angle EAF égal à l'angle donné, de prendre AF égal à AF_1, et d'élever au point F la droite FH perpendiculaire à AF ; cette droite sera le lieu demandé : c'est ce qu'il est facile de vérifier.

En effet, menons, par le point A, une droite quelconque AC qui rencontre XY en B, et F_1H_1 en C_1, et, du même point A, comme centre, avec AC_1 pour rayon, décrivons un cercle qui rencontre FH en C; les deux triangles F_1AC_1, et FAC sont égaux comme triangles rectangles ayant l'hypothénuse et un côté de l'angle droit égaux. Par conséquent, les angles FAC et F_1AC_1 sont égaux et, par suite, il en est de même des angles BAC et FAF_1 : mais on a

$$\frac{AC_1}{AB} = \frac{M}{N}$$

et, en remplaçant AC_1 par AC,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{M}{N}$$

La droite FH est donc bien le lieu du point C.

Remarque 1. Si on ne précise pas, de quel côté de AB, la droite AC doit être dirigée; il est évident que le lieu se composera de deux droites symétriques par rapport à la perpendiculaire AE sur XY.

Remarque 2. Si on revient à l'énoncé primitif, et qu'on ne spécifie pas quel est l'angle dont le sommet est fixe, ni celui dont le sommet se meut sur XY, on voit facilement que le lieu se compose de douze droites.

X.

151. *Étant donnés un point* A *et une droite* XY (fig. 85); *par le point* A, *on mène une droite* AB *qui rencontre* XY *en* B, *et une autre droite* AC *faisant avec la première un angle donné; on détermine sur cette dernière droite un point* C *par la condition que le produit* AB $\times$ AC *soit égal au carré d'une longueur constante* m : *on demande le lieu du point* C.

Supposons, comme dans le cas précédent, que l'angle constant soit d'abord nul, c'est-à-dire, que la direction de AC se confonde avec celle de AB : le lieu du point C sera une circonférence, dont le centre se trouvera sur la perpendiculaire AD abaissée du point A sur XY, et dont l'un des diamètres AF_1 aura pour extrémité le point F_1 donné par l'égalité

$$AD \times AF_1 = m^2$$

Si, maintenant, nous faisons tourner la droite AF_1, d'un angle FAF_1 égal à l'angle donné; que nous prenions AF égal à AF_1, et que sur AF comme diamètre, nous décrivions une circonférence ; cette ligne sera le lieu demandé.

La vérification se fait comme dans l'exemple précédent.

XI.

152. *Étant données* (fig. 86) *deux circonférences tangentes extérieurement, par leur point de contact* A, *on mène deux cordes* AB *et* AD *qui soient entre elles dans le rapport de deux lignes données* M *et* N, *et des centres* O *et* C, *on abaisse, sur les deux cordes, des perpendiculaires* OF *et* OE *qu'on prolonge jusqu'à leur rencontre en* M : *on demande le lieu du point* M (Concours).

Le lieu ne contient pas, en général, de points à l'infini ; et comme, en construisant quelques points, la figure paraît être un cercle, on est conduit à penser, en ayant égard aux données, que le lieu est celui des points tels, que le rapport de leurs distances à deux points fixes O et C est constant. C'est ce qu'on vérifie effectivement.

En effet, abaissant MH perpendiculaire sur la ligne des centres OC, on obtient deux triangles OMH, CMH, respectivement, semblables aux triangles OAF, CAE, et l'on a

$$\frac{OM}{MH} = \frac{OA}{AF} \qquad \frac{MH}{MC} = \frac{AE}{CA}$$

Multipliant les deux égalités, membre à membre, il vient

$$\frac{OM}{MC} = \frac{OA}{CA} \times \frac{AE}{AF}$$

ou comme

$$\frac{AE}{AF} = \frac{N}{M}$$

on a

$$\frac{OM}{MC} = \frac{OA}{CA} \times \frac{N}{M}$$

Le lieu est donc bien celui qu'on avait pensé.

Remarque. — Si l'on remplaçait l'une des cordes AB ou AD par sa symétrique, par rapport à OC, le lieu resterait le même.

Cas particuliers. — 1° On a

$$\frac{OA}{CA} = \frac{M}{N}$$

Alors les droites OM et MC sont égales, et le lieu est la perpendiculaire élevée sur le milieu de OC. On le vérifie facilement, car les triangles OAF, ACE étant alors semblables, les angles O et C sont égaux, et le triangle OMC est isocèle.

2° On a

$$N = M$$

On en déduit, comme conséquence,

$$\frac{OM}{MC} = \frac{OA}{CA}$$

et le lieu est une circonférence passant par les deux centres de similitude des cercles donnés. L'un de ces centres est évidemment le point A.

GÉNÉRALISATION. — On peut supposer que les cercles donnés ont une position quelconque dans le plan, et que les deux cordes partent de deux des points où la ligne des centres rencontre les cercles : on aura toujours deux couples de triangles semblables, et la démonstration ne sera pas changée.

On peut même faire complètement disparaître les cercles de l'énoncé, et regarder comme démontrée la proposition suivante :

Étant donnés quatre points en ligne droite, si, par deux d'entre eux, on mène deux droites dont les distances aux deux autres points soient dans un rapport donné, le lieu des points d'intersection de ces droites est une circonférence.

XII.

153. *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 87), *deux nombres correspondants* m et n, *et une longueur constante* K, *on demande de trouver le lieu des points* M *tels, qu'on ait*

$$m\,\overline{\mathrm{MA}}^2 + n\,\overline{\mathrm{MB}}^2 = \mathrm{K}^2$$

Cherchons à imiter la méthode que l'on suit dans le cas où M et N sont égaux à 1.

Dans cette méthode, on évalue séparément $\overline{\mathrm{MA}}^2$ et $\overline{\mathrm{MB}}^2$ dans deux triangles MAD, MDB qui ont pour côté commun une médiane AD, puis on ajoute, membre à membre, les égalités qui donnent $\overline{\mathrm{MA}}^2$ et $\overline{\mathrm{MB}}^2$; alors, la projection de la médiane AD sur AB se trouve éliminée, et il reste une égalité qui ne contient plus que MD et des constantes. De là, on conclut que MD est constant et que le lieu du point M est un cercle dont le centre est le point D.

Dans le cas général, si nous prenions le même triangle, et que nous ajoutions les égalités, membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par m et n, la projection de la médiane ne disparaîtrait pas, et on ne pourrait rien conclure.

Pour lever la difficulté, prenons un point indéterminé D entre A et B, et, à la fin du calcul, nous profiterons de l'indétermination de ce point, pour essayer de faire disparaître la projection de MD sur AB.

Abaissons ME perpendiculaire sur AB; les triangles AMD, BMD donnent

$$\overline{AM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{AD}^2 + 2AD \times DE$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DE$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad m\,\overline{AM}^2 + n\,\overline{BM}^2 =$$

$$(m+n)\,\overline{MD}^2 + m\,\overline{AD}^2 + n\,\overline{BD}^2 + 2DE \times (m\,AD - n\,BD)$$

Maintenant pour faire disparaître DE de l'équation, il suffit de poser

$$m\,AD - n\,BD = 0$$

ou

$$\frac{AD}{BD} = \frac{n}{m}$$

Alors l'équation (1) ne contient plus que MD et des constantes. Le lieu géométrique demandé est donc une circonférence dont le centre partage la droite AB dans le rapport inverse des nombres m et n qui correspondent aux points A et B.

Remarque 1. On traiterait de la même manière la question des lieux des points M tels, que l'on ait

$$m\,\overline{MA}^2 - n\,\overline{MB}^2 = K^2$$

Seulement, pour que DE disparaisse de l'équation finale, il faut que les deux angles adjacents en D, dans les deux triangles, soient de même espèce, et, par suite, que le point D soit pris sur le prolongement de AB. Le lieu est toujours une circonférence dont le centre, pris sur le prolongement de AB, est placé à des distances des points A et B inversement proportionnelles aux nombres m et n.

REMARQUE 2. En se servant de l'un ou de l'autre des deux lieux que nous venons de trouver, on passerait, successivement du cas de deux points, au cas de trois, puis, du cas de trois, au cas de quatre points, et ainsi de suite. On étendrait ainsi le théorème à autant de points fixes que l'on voudrait; mais nous allons, immédiatement, donner une démonstration directe du théorème général.

XIII.

154. *Si un point mobile est tel, qu'on obtient une somme constante, en ajoutant, entr'eux, les carrés de ses distances à des points fixes, multipliés, respectivement, par des membres positifs ou négatifs; le lieu du point mobile est un cercle dont le centre est le centre des distances proportionnelles.*

En effet, si on résout la formule du n° 99, par rapport à $\overline{MG}^2$, on a

$$\overline{MG}^2 = \frac{\Sigma\, m_1\, \overline{MA_1}^2 - \Sigma\, m_1\, \overline{GA}^2}{\Sigma\, m_1}$$

La distance d'un point M du lieu au centre G des distances proportionnelles est donc constante.

XIV.

155. *Si, dans l'énoncé précédent, on suppose nulle la somme des multiplicateurs donnés, le lieu est une droite.*

Soient A_1, A_2... les points auxquels correspondent des multiplicateurs positifs m_1, m_2...; soient aussi B_1, B_2, les autres points, et $-n_1$, $-n_2$..., les multiplicateurs négatifs correspondants; désignons, d'ailleurs, par G et H les centres des distances proportionnelles qui correspondent aux deux groupes de points: en appliquant la formule du n° 99, on aura

$$\Sigma m_1 \overline{MA_1}^2 = \Sigma m_1 \times \overline{MG}^2 + \Sigma m_1 \overline{GA_1}^2$$

$$\Sigma n_1 \overline{MB_1}^2 = \Sigma n_1 \times \overline{MH}^2 + \Sigma n_1 \overline{HB_1}^2$$

Retranchons maintenant les deux égalités, membre à membre ; en observant que les quantités Σm_1 et Σn_1 sont égales, par hypothèse, et que la différence entre $\Sigma m_1 \overline{MA_1}^2$ et $\Sigma n_1 \overline{MB_1}^2$ est la quantité constante K qui est donnée, il viendra

$$\Sigma m_1 \times \left(\overline{MG}^2 - \overline{MH}^2\right) = K + \Sigma n_1 \overline{HB_1}^2 - \Sigma m_1 \overline{GA_1}^2$$

de cette dernière égalité, on déduit que la quantité $\overline{MG}^2 - \overline{MH}^2$ est constante ; et, par suite, d'après une proposition connue, le lieu demandé est une droite perpendiculaire à la droite GH qui joint les deux centres partiels.

XV.

156. *Étant données* (fig. 88) *une circonférence* O *et une droite* BC, *on demande de trouver le lieu des points, tels que si, de l'un d'eux* M, *on mène une tangente* MA *au cercle, et une perpendiculaire* MP *sur la droite* BC, *on ait toujours, en représentant par* a *une longueur donnée,*

$$\overline{MA}^2 = a \times MP$$

Abaissons, du centre O, une perpendiculaire OE sur BC, et, du point M, une perpendiculaire MD sur cette droite prolongée, s'il est nécessaire ; puis menons OM.

R étant le rayon du cercle donné, on a dans le triangle rectangle OMA

$$\overline{AM}^2 = \overline{OM}^2 - R^2$$

le triangle rectangle OMD donne, à son tour,

$$\overline{OM}^2 + \overline{MD}^2 = \overline{OD}^2$$

donc
$$AM^2 = \overline{MD}^2 + \overline{OD}^2 - R^2$$

En désignant OE par b, on a aussi

$$MP = ED = OD - b$$

Substituant maintenant, dans l'égalité de l'énoncé, les expressions de $\overline{MA}^2$ et de MP, il vient

$$\overline{MD}^2 + \overline{OD}^2 - a \times OD = R^2 - ab$$

Si le terme $A \times OD$ n'existait pas dans l'équation précédente, on y remplacerait $\overline{MD}^2 + \overline{DO}^2$ par $\overline{OM}^2$ et on en conclurait que le lieu du point M est un cercle ayant O, pour centre; mais on est facilement ramené à ce cas.

En effet, en ajoutant $\frac{a^2}{4}$ aux deux membres de l'égalité précédente on a

$$\overline{MD} + \left(OD - \frac{a}{2}\right)^2 = R^2 - ab + \frac{a^2}{4}$$

Si, maintenant, nous prenons sur OE prolongée, et, à partir du point O, une longueur OH égale à $\frac{a}{2}$, la droite HD sera égale à $OD - \frac{a}{2}$, et, en remplaçant, dans l'équation précédente $OD, -\frac{a}{2}$ par HD, il viendra

$$\overline{MD}^2 + \overline{HD}^2 = R^2 - ab + \frac{a^2}{4}$$

ou, en tirant la droite HM

$$HM^2 = R^2 - ab + \frac{a^2}{4}$$

Le lieu est donc une circonférence ayant, pour centre, le point H, et, pour rayon, $\sqrt{R^2 - ab + \frac{a^2}{4}}$

Remarque. On voit facilement que la droite donnée BC est l'axe radical des deux cercles, l'un donné, et l'autre trouvé comme lieu. Il suffit, pour cela, de remplacer, dans la formule

$$e = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d}$$

qui a été donnée au n° 28, d et r^2 par $\frac{a}{2}$ et $R^2 - ab + \frac{a^2}{4}$: on trouve ainsi que la distance d est égale à b.

XVI.

157. *Etant données deux droites qui se coupent, trouver le lieu des points tels, que si l'on abaisse, de l'un d'eux, des perpendiculaires sur les deux droites, et qu'on multiplie ces perpendiculaires par des nombres donnés* m *et* n ; *la somme soit égale à une ligne donnée* a.

Ce lieu comprend, comme cas particulier, celui que nous avons donné au n° 139 et se trouve d'une manière semblable.

Soient AOB et A′OB′ (fig. 89) les deux droites données, et M un point du lieu ; on abaisse, de ce point, MC et MC′ perpendiculaires sur les deux droites, et on a l'égalité de condition

$$m\,\mathrm{MC} + n\,\mathrm{MC'} = a$$

ou

$$\mathrm{MC} + \frac{n}{m}\,\mathrm{MC'} = \frac{a}{m}$$

Prolongeons MC d'une longueur MD égale à $\frac{n}{m}$ MC′ : le lieu du point D sera une droite connue EG, parallèle à AB ; on est ainsi ramené au lieu des points M tels, que le rapport de leurs distances aux deux droites EG et A′B′ soit égal au rapport donné $\frac{m}{n}$

On sait que la partie de ce lieu, située dans l'angle AOB, est une droite : pour la tracer, on pourra déterminer directement, d'après l'énoncé, les points A et A′ où elle coupe les deux droites données.

Remarque 1. On trouvera, de même, que, dans chacun des autres angles formés par les deux droites données, le lieu est une droite : alors le lieu complet sera le périmètre d'un parallélogramme AA′BB′. Les prolongements des côtés donnent, d'ailleurs, le lieu des points tels que la différence des produits est égale à a.

Remarque 2. Si on considère les nombres m et n comme pouvant être positifs ou négatifs ; que l'on donne des signes convenables aux perpendiculaires abaissées, d'un point du lieu, sur les droites données ; et qu'on désigne ces lignes, prises ainsi avec leur signes, par p et q : la relation sera générale, et conviendra à un point quelconque du lieu.

Voici, comment on détermine les signes de p et de q.

Ayant pris arbitrairement deux points A et A′ sur les deux côtés de l'angle AOA′ ; p et q seront positifs ou négatifs, suivant que le point M sera ou ne sera pas, par rapport aux deux droites A′B′ et AB, du même côté que les points A ou A′.

Alors, comme il est facile de le voir, on a la droite AA′, en supposant m et n positifs : la partie AA′ correspondant aux valeurs positives de p et de q, et les prolongements, à p ou q négatifs. On obtient aussi les droites indéfinies AB′, BA′, BB′, en faisant, successivement, m positif et n négatif, m négatif et n positif, m et n tous deux négatifs

XVII.

158. *Etant données des droites, en nombre quelconque, d'un point* M *du plan, on abaisse des perpendiculaires sur toutes ces droites, on les multiplie par des nombres donnés, puis on fait les sommes de tous les produits : on demande le lieu des points pour lesquels cette somme est constante.*

Considérons d'abord trois droites ; il pourra se présenter deux cas :

1° Les droites prolongées forment un triangle ABC.

Soient p_1, p_2, p_3 les perpendiculaires abaissées, d'un point M quelconque du lieu, sur les trois côtés du triangle ; m_1, m_2, m_3 les multiplicateurs correspondants ; h_1, h_2, h_3 les hauteurs, et K un nombre positif donné : m_1, m_2, m_3 seront des nombres positifs ou négatifs, et les perpendiculaires seront elles-mêmes positives ou négatives, suivant que le point M sera ou ne sera pas, par rapport à l'un des côtés du triangle, du même côté que le sommet opposé.

On a, par hypothèse,

$$(1)\qquad m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 = K$$

mais, d'après le numéro (115), on a aussi la relation générale

$$(2)\qquad \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$$

ou h_1, h_2, h_3 sont des quantités positives, et p_1, p_2, p_3 ont les signes convenus.

Eliminant, maintenant, p_3 entre les égalités (1) et (2), il vient

$$(3)\qquad \left(\frac{m_1}{h_3} - \frac{m_3}{h_1}\right) p_1 + \left(\frac{m_2}{h_3} - \frac{m_3}{h_2}\right) p_2 = \frac{K}{h_3} - m_3$$

Cette égalité est de la forme de celle que nous avons trouvée (160). Le lieu cherché se composera donc d'autant de droites que la relation (3) prendra de formes différentes, quand on fera varier les signes des quantités m_1, m_2, m_3.

Par une discussion très-simple, on trouve que le lieu se compose de huit droites indéfinies.

Remarque. Il peut arriver que deux des droites données soient parallèles. On fait rentrer ce cas, dans celui qui nous occupe, en supposant que l'un des sommets du triangle s'éloigne à l'infinie, alors l'une des hauteurs h_2 par exemple devient infinie, tandis que les deux autres sont égales à la distance d des deux parallèles, et la relative (2) devient

$$p_1 + p_3 = d$$

2° *Les trois droites* OB, OC, OD *se coupent en un même point* O.

On a toujours l'équation

$$m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 = K$$

Prenons maintenant, sur l'une des droites OB, un point arbitraire B, et menons, par ce point, deux droites respectivement parallèles à OA et OC : nous formerons ainsi un parallélogramme. Mais d'après un théorème bien connu, on sait que, si on forme trois triangles ayant, pour sommet un point du plan, et, pour bases respectives, une diagonale du parallélogramme et deux côtés adjacents, le premier triangle sera égal à la somme, ou à la différence des deux autres, suivant la position du point. Si donc on remplace chaque triangle par sa mesure, on obtient une relation entre les trois perpendiculaires, et on peut achever alors la solution, comme dans le cas précédent.

Pour trouver maintenant le lieu, quels que soient le nombre et la situation des droites, on exprimera les distances d'un point du lieu à toutes les droites, excepté deux, en fonction des distances du point à ces dernières. A cet effet, on considérera les triangles formés par les deux droites qu'on a mises à part et chacune des autres, et on appliquera la relation (2): le cas général se trouvera ainsi ramené au cas de deux droites.

Lorsque les droites données se coupent en un même point, on peut donner la solution directe suivante (*) :

Soit S le point de concours des droites données (fig. 90), et MP,MP'... les perpendiculaires abaissées d'un point du lieu M sur ces droites. Prenons sur leur direction, à partir du point S, des longueurs SA,SA'... proportionnelles aux nombres donnés : si l'on tire AQ,A'Q... perpendiculaires sur SM, on a, par des triangles semblables,

$$SP \times SA = SQ \times SM \qquad SP' \times SA' = SQ' \times SM\ldots$$

et en ajoutant les égalités, membre à membre, il vient

$$(SQ + SQ' + \cdots) \times SM = K^2$$

Soit maintenant G le centre des moyennes distances des n points A,A'..., et H la projection du point G sur SM ; si on applique le théorème des moyennes distances aux point Q,Q'..., on a

$$n\,SH \times SM = K^2$$

(1) Reynaud et Duhamel. *Problèmes et développements sur les mathématiques.*

mais, en abaissant ML perpendiculaire sur SG, on obtient deux triangles semblables SML, SHG qui donnent

$$SH \times SM = SL \times SG$$

par suite, on a

$$n\,SL \times SG = K^2$$

SL est donc constant et le lieu du point M est une droite perpendiculaire à SG au point L.

Nous avons supposé, pour plus de simplicité, que les nombres donnés étaient positifs, mais on étendrait facilement la solution au cas des nombres négatifs.

XVIII.

159. *Etant données deux droites indéfinies* PQ, RS (fig. 94), *et deux points* A *et* B *sur ces droites; une droite mobile* CD, *qui les rencontre en* C *et* D, *détermine sur elles deux segments* AC *et* BD *dont le rapport est constant: on demande le lieu géométrique du point* M *tel, que le rapport de* CM *à* MD *soit donné.*

Tirons AB, et par les points B et C menons BH et CE, respectivement, parallèles à BS et AB : menons ensuite DE et MF parallèle à CE.

Les segments AC et BE étant égaux, comme côtés opposés d'un parallélogramme, le rapport de BE à BD est constant. Il en est de même du rapport de DF à DE qui est égal au rapport donné de MD à MC, par conséquent, le point F décrit une droite BG passant par le point B.

Mais, à cause des triangles semblables MFD, CED, le rapport de MF à CE est constant : la droite MF a donc une longueur toujours la même ; et comme, d'ailleurs, elle est parallèle à AB, il en résulte que, si, par le point I qui partage AB dans le rapport donné de CM à MD, on mène la droite KL parallèle à BG, cette droite sera le lieu demandé.

Remarque. Les segments déterminés sur KL, à partir du point I, sont égaux aux segments comptés sur BG, à partir du point

B. Ils sont donc, comme ces derniers, proportionnels aux segments variables BD et BE ou AC.

XIX.

160. *Etant donnés un angle* BAC (fig. 92) *et un point* O *hors de l'angle, on fait tourner, autour de ce point, un angle* BOC *qui est égal à l'angle donné, et dont les côtés rencontrent ceux du premier angle en* B *et* C *; on mène la droite* BC, *et on demande le lieu du point* M *qui partage cette droite en deux segments dont le rapport est donné.*

D'après le théorème VII démontré au n° 109, on sait que la droite mobile BC détermine sur les deux côtés de l'angle donné A, deux segments qui sont comptés à partir de deux points fixes, et dont le rapport est déterminé ; donc, en vertu du théorème précédent, le lieu est une droite.

XX.

161. *De tous les points d'une droite* A, *on abaisse des perpendiculaires sur trois autres droites* M,N,P, *on construit le triangle dont les trois sommets sont les pieds de ces perpendiculaires : quel est le lieu des centres de gravité des triangles?* (*)

Remarquons, d'abord, que les pieds mobiles des perpendiculaires déterminent sur les droites M,N,P, des segments proportionnels qui ont, pour origines respectives, les pieds des perpendiculaires abaissées, d'un point déterminé de la droite A, sur les trois autres.

Cela posé, pour obtenir le centre de gravité du triangle de l'énoncé, tirons une droite L qui joigne l'un de ses sommets au milieu du côté opposé, et partageons-la en deux segments proportionnels aux nombres 1 et 2, à partir du côté. D'après le théorème XVIII, le milieu de ce côté décrit une droite qui est partagée en segments proportionnels à ceux qui sont déterminés sur les droites M,N,P ; la droite L est donc telle que ses extrémités déterminent sur deux droites fixes, et à partir

(*) Chasles, *Porismes*, 109.

de points connus, des segments qui sont proportionnels. Dès lors, (th. XVIII) le point qui la divise dans le rapport de 1 à 2, c'est-à-dire, le centre de gravité du triangle, décrit une droite.

XXI.

162. *Un triangle isocèle* BCM (fig. 93) *dont les angles à la base* B *et* C *sont constants, se déforme, sous la condition que les sommets* B *et* C *se meuvent sur une circonférence donnée* O, *tandis que l'un des côtés égaux* BM *tourne autour d'un point fixe* A : *On demande le lieu du sommet* M.

Du point O comme centre, avec OA comme rayon, nous décrivons une circonférence qui coupe MC, en deux points D et E; on sait (112) que celui des deux points E et D qui n'est pas le symétrique du point A, par rapport à la hauteur du triangle isocèle, c'est-à-dire, le point D est fixe. L'angle CMB étant, d'ailleurs, constant, on est ramené au lieu du sommet M d'un angle constant CMB, dont les côtés passent par deux points fixes A et D.

XXII.

163. *Un polygone d'un nombre impair de côtés, dont tous les angles, excepté un seul, égaux et donnés, ont leurs sommets sur un cercle fixe, se déforme, sous la condition que l'un des côtés de l'angle qui fait exception, tourne autour d'un point fixe : On demande de trouver le lieu décrit par le sommet libre.*

Si nous appelons premier côté celui qui tourne autour du point fixe donné, et, qu'à partir de ce point, nous parcourions le périmètre du polygone, en nous éloignant du sommet libre; par l'application du théorème déjà cité, tout à l'heure, nous trouverons que tous les côtés du rang impair, et, par suite, le dernier, tournent autour de points fixes. Le premier et le dernier côté tournant autour de points fixes, et l'angle compris entre ces derniers ayant une valeur constante (en général, différente de la valeur donnée pour les autres), on est ramené au même lieu que dans l'exemple précédent.

Remarque. Ce n'est pas seulement le premier sommet, dont le lieu se trouve déterminé, par ce qui précède; mais on connaît, de même, les lieux de tous les points de rencontre des côtés de rang impair pris, deux à deux, de toutes les manières possibles.

XXIII.

164. *Deux cercles mobiles* I *et* E *touchent, comme l'indique la figure* (94), *deux cercles fixes* O *et* C *qui se coupent; ils sont, eux-mêmes, tangents extérieurement en* M: *on demande le lieu de ce point.*

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant, pour origine, l'un des points d'intersection A des cercles donnés. Les lignes inverses de ces derniers cercles seront des droites DH et DF (fig. 95), respectivement, perpendiculaires aux droites AO et AC. D'autre part les cercles I et E ne passant pas, comme les précédents, par l'origine A, auront pour lignes réciproques deux cercles G et K qui seront tangents aux deux droites DH et DF, et aussi, l'un à l'autre, en L: on sait, en effet, que l'angle de deux lignes n'est pas changé par la transformation dont nous avons fait usage.

Mais le point L décrit évidemment la bissectrice DP de l'angle HDF, le lieu du point M sera donc la ligne inverse de DP, c'est-à-dire un cercle passant par le point A; ce cercle passe aussi, d'ailleurs, par le point B.

Remarque. Si on veut trouver le lieu correspondant à toutes les positions possibles des cercles mobiles, on verra que le lieu complet des points de contact des transformées de ces lignes est composé des bissectrices des quatre angles que forment entr'elles les deux droites DH et DF, indéfiniment prolongées. Le lieu des points de contact M se compose donc de deux cercles qui passent par les points A et B et s'y coupent à angle droit.

XXIV

165. *Étant donnés un cercle dont le centre est* O (fig. 96

et un point P ; *par ce point on mène deux sécantes* PAB, PB'A' ; *et on circonscrit deux cercles aux triangles* PAB', PBA' : *on demande le lieu des points d'intersection* M (Concours).

Déterminons, d'abord, quelques points particuliers, dans le cas où le point P est extérieur au cercle donné.

Soit, d'abord la sécante PAB confondue avec la tangente PG ; les deux cercles mobiles passeront alors au point G où se confondent les points A et B : G est donc au point du lieu. On prouve qu'il en est de même du point de contact H de la seconde tangente menée du point P.

Je dis maintenant que le centre O du cercle donné appartient aussi au lieu.

En effet, considérons deux sécantes PAB, PA'B' symétriques par rapport à la droite PO ; elles se coupent en I sur cette ligne. Mais si l'on mène OB et OA', on a un triangle isocèle BOA' dans lequel l'angle A'BO est égal à l'angle OPB' (112) ; le cercle passant par les trois points P, B, A', passe donc aussi par le point O. Il en est de même du cercle circonscrit au triangle PAB' : le centre O est donc bien un point du lieu.

Le lieu cherché passant par les trois points G, H, O, non en ligne droite, l'hypothèse la plus simple est de supposer qu'il est le cercle passant par ces trois points, c'est-à-dire, celui qui est décrit sur PO comme diamètre.

Or nous avons démontré qu'il en était effectivement ainsi dans tous les cas (107 et 131).

XXV.

166. *Trouver le lieu des points tels que les polaires de chacun d'eux, par rapport à trois cercles donnés, se coupent en un même point.*

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Quand deux cercles se coupent à angle droit, la polaire d'un point de l'un, prise par rapport à l'autre, passe par le point diamétralement opposé au point qu'on a choisi.

Soient O et C (fig. 97) les deux cercles qui se coupent orthogonalement en D, et soit A un point quelconque du cercle O ; menons le diamètre AB et la droite AC qui coupe le cercle O au point E, puis tirons la droite BE : je dis que cette droite est la polaire du point B.

En effet, l'angle AEB est droit, comme inscrit dans un demi-cercle, et si on mène le rayon CD, ce rayon étant tangent au cercle O, on a

$$AC \times EC = \overline{DC}^2$$

La double condition, pour que la droite EB soit la polaire du point A, est donc remplie.

Le lemme étant démontré, prenons maintenant un point dans le plan des trois cercles : Il pourra arriver que le point soit ou ne soit pas sur le cercle radical.

Dans le premier cas, le point, étant sur le cercle radical, a pour polaire, par rapport à chacun des trois cercles donnés, une droite passant par le point du cercle radical, diamétralement opposé au point choisi ; les trois polaires se coupent donc en un même point.

Considérons maintenant le second cas. Déterminons le centre radical du point qu'on a pris et de deux des cercles donnés. Le cercle décrit du centre radical, comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point au point donné, coupera les deux cercles à angle droit. On trouve de même un second cercle qui passera par le point donné et qui coupera à angle droit l'un des deux premiers cercles et le troisième. Le cercle ainsi construit sera d'ailleurs, distinct du premier, puisque le point qu'on a pris n'est pas sur le cercle radical.

Mais alors les trois polaires du point ont deux points d'intersection diamétralement opposés au point donné, dans les deux cercles auxiliaires : elles ne peuvent donc se couper au même point.

Il résulte évidemment, des deux cas que nous venons d'examiner, que le lieu demandé est le cercle radical des trois cercles donnés.

On remarque aussi que le même cercle est le lieu des points de rencontre des trois polaires qui se coupent en un même point.

XXVI.

167. *Lieu des centres des cercles qui coupent un cercle et deux droites données, sous des angles égaux.*

Soient B (fig. 98) le centre d'un cercle qui coupe les deux droites MF,GH et le cercle OE sous des angles égaux, I et L deux des points d'intersection du cercle cherché et des droites données, et BK,BC les distances du point B à ces droites. Les angles CBI et LBK étant égaux, par hypothèse, les triangles rectangles CBI,BKL ont les hypothénuses égales et deux angles adjacents égaux, et on en déduit l'égalité de BC et BK. Le centre cherché ne peut donc se trouver que sur l'une ou l'autre des bissectrices des angles que forment, entr'elles, les droites MF et GH.

Je dis maintenant qu'étant donné un point B sur l'une des bissectrices, ce point pourra toujours être pris comme centre d'un cercle qui coupe le cercle donné, sous le même angle que les deux droites.

En effet, supposons que le cercle demandé, ayant son centre en B, coupe les deux droites et le cercle aux points I,L et E. Si on mène le rayon OE , que, du point B, on abaisse BD perpendiculaire sur ce rayon, et qu'on tire BE ; comme l'angle BED est égal à l'angle des deux cercles, le triangle BED sera égal au triangle CBI, et, par suite, les droites BC et DE seront égales.

Si donc, on décrit un cercle, du point O comme centre avec un rayon OD égal à la différence de OE et BC ; que, du point B, on mène une tangente BD au cercle OD ; qu'on prolonge le rayon OP jusqu'à sa rencontre en E avec le cercle donné ; puis qu'enfin on tire BE : le cercle décrit, du point B comme centre, avec BE comme rayon, coupera les deux droites et le cercle donnés sous le même angle. Le lieu demandé se compose donc des deux bissectrices des angles formés par les deux droites.

XXVII.

168. *Lieu des centres des cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles égaux.*

Première solution (*). Considérons trois cercles d'une sphère, et, par l'une des droites qui contient les sommets des cônes auxquels appartiennent les cercles pris, deux à deux (137), faisons passer un plan : ce plan rencontrera la sphère suivant un cercle qui coupera les trois premiers sous des angles égaux (136).

Mais, en faisant varier le plan, le sommet du cône circonscrit à la sphère, suivant le cercle de section, décrira une ligne droite (179) ; et, comme on peut considérer quatre droites qui contiennent les sommets des cônes primitifs (137), le lieu des sommets des derniers cônes se composera de quatre droites. Faisant, maintenant, une projection stéréographique de la figure que nous venons d'obtenir, et appliquant les théorèmes I et II des nos 134 et 135, nous arrivons au lieu suivant :

Le lieu des centres des cercles coupant sous des angles égaux, trois cercles donnés dans un plan, se compose de quatre droites.

Il est, d'ailleurs, évident que les quatre droites doivent se couper au centre radical des trois cercles, puisque ce point est le centre d'un cercle qui coupent les trois cercles donnés sous un angle nul.

Deuxième solution. Soient O, O', O'' les centres des trois cercles donnés, r, r', r'' leurs rayons ; C le centre et x le rayon du cercle cherché ; A, A', A'' trois des points où ce cercle coupe les premiers ; et, enfin, y, y', y'' les distances du centre C aux trois centres donnés. Joignons par des droites le centre C aux trois autres centres et aux trois points A, A', A'' ; puis menons les trois rayons $OA, O'A', O''A''$: nous formons ainsi trois triangles dans lesquels les angles A, A', A'' sont égaux ou supplé-

(*) Par M. Manheim, *Nouvelles Annales*, t. XII, page 113.

mentaires. On voit aussi que les projections respectives de CA,CA′ et CA″sur OA,O′A′ et O″A″ sont égales.

Cela posé, considérons l'un des triangles OAC, (fig. 99) et appelons p la projection AP de AC sur OA, nous aurons

$$y^2 = x^2 + r^2 - 2\,pr$$

De même, les deux autres triangles, dans lesquels nous supposons que les angles A′ et A″ sont égaux à A, donnent

$$y'^2 = x^2 + r'^2 - 2\,pr'$$
$$y''^2 = x^2 + r''^2 - 2\,pr''$$

En retranchant les trois équations, membre à membre, et deux à deux, le rayon x se trouve d'abord éliminé, et on a

$$y^2 - y'^2 = r^2 - r'^2 + 2\,p\,(r' - r)$$
$$y^2 - y''^2 = r^2 - r''^2 + 2\,p\,(r'' - r)$$

On élimine, ensuite, p entre ces deux équations, et il vient

$$(r' - r'')\,y^2 + (r'' - r)\,y'^2 + (r - r')\,y''^2 =$$
$$(r - r')\,(r - r'')\,(r' - r'')$$

Je remarque, maintenant, que la somme des multiplicateurs de y^2,y'^2 et y''^2 est égale à zéro : on est donc ramené au lieu des points, tels que la somme des carrés de leurs distances à des points fixes, multipliés par des nombres correspondants, soit constante, lorsque la somme des multiplicateurs est nulle. Or on a vu (158) que ce lieu est une ligne droite.

Les angles A,A′,A″ au lieu d'être tous égaux, peuvent être, les uns, égaux, les autres, supplémentaires ; alors, la quantité p doit être considérée, dans les équations qui la contiennent, comme positive ou négative ; et, si on fait toutes les combinaisons possibles de signes, on trouve que le lieu se compose de quatre droites.

On vérifie facilement que les quatres droites passent par le centre radical, en se rappelant que ce point peut être défini par les équations

$$y^2 - y'^2 = r^2 - r'^2 \qquad y^2 - y''^2 = r^2 - r''^2$$

XXVIII.

169. *Lieu des centres des cercles qui coupent, sous un même angle, deux cercles et une droite donnés.*

Adoptant les notations du numéro précédent, et désignant par z la distance d'un point du lieu à la droite donnée, on a les trois équations.

$$y^2 = x^2 + r^2 - 2\,pr$$
$$y'^2 = x^2 + r'^2 - 2\,pr'$$
$$z = p$$

et on en déduit

$$y^2 - y'^2 = r^2 - r'^2 + 2\,z\,(r' - r)$$

Soit maintenant d la distance des centres des deux cercles donnés, u la distance d'un point du lieu à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette distance, on a

$$y^2 - y'^2 = 2\,du$$

et il vient

$$2\,du + 2\,(r - r')\,z = r^2 - r'^2$$

On est, ainsi, ramené au lieu des points, tels que la somme des distances de ces points à deux droites fixes, multipliées par des nombres correspondants, soit constante ; et ce lieu est, comme on sait, en général, composé de quatre droites (151). Une discussion directe prouve, d'ailleurs, que ces quatre droites existent effectivement.

XXIX.

170. *Si tous les côtés d'un polygone, variable de forme, tournent autour de points fixes en ligne droite, et que tous les sommets, excepté un, se meuvent sur des droites fixes, le sommet resté libre, décrira une ligne droite.*

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, si le théorème est vrai pour un polygone de $n - 1$ côtés, il est vrai pour un polygone ayant un côté de plus.

Soit ABCDEF (fig. 100) le polygone de n côtés : Prolongeons les côtés EF et DC jusqu'à leur rencontre en I ; nous formerons ainsi un triangle EDI, dont les trois côtés tournent autour de trois points fixes en ligne droite, tandis que deux sommets E et D se meuvent sur deux lignes droites ; le sommet libre I décrira donc une droite (143).

Dès lors, le polygone de $n-1$ côtés ABCIF a tous ses côtés qui tournent autour de points fixes, tandis que tous ses sommets, excepté A, décrivent des droites ; par conséquent, le sommet libre A décrit lui-même une droite : c'est ce qu'il fallait démontrer.

XXX.

171. *On donne un losange* OABC (fig. 101) *que la diagonale* AB *partage en deux triangles équilatéraux ; par le sommet* C, *on mène une transversale* DE *qui rencontre les prolongements de* OA *et* OB *en* E *et* D ; *puis on tire les droites* AD *et* BE : *quel est le lieu des points de rencontre* M *de ces droites ?* (Concours).

Si la droite DE passe par le point O, les transversales AD et BE viennent s'y couper, le point O est donc un point du lieu.

Quand la transversale DE passe par le point A, les droites AD et BD sont devenues AC et AB qui se coupent en ce point : le point A est donc un point du lieu, et il en est même du point B.

Maintenant, l'hypothèse, la plus simple à admettre, est que le lieu est la circonférence circonscrite au triangle ABC. Nous allons démontrer qu'il en est effectivement ainsi, en faisant voir que l'angle AMB est égal à 120°.

AC étant parallèle à OB, les deux triangles AEC CBD sont semblables, et donnent

$$\frac{AE}{AC}=\frac{BC}{BD} \quad \text{ou} \quad \frac{AE}{AB}=\frac{AB}{BD}$$

Mais, alors, le triangle AEB, ABD ayant les deux angles égaux EAB, ABD, compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et on en conclut que les angles BAM, AEB sont égaux.

Dès lors, les deux triangles AMB et AEB, qui ont l'angle commun B, sont équiangles, et les angles AMB, EAB sont égaux. Mais ce dernier est égal à 120°; il en est donc de même de l'angle AEB : tout est donc démontré.

Remarque. La droite ED pourrait couper l'un des côtés de l'angle AOB et le prolongement de l'autre ; mais on voit facilement que le point M décrit alors la partie du cercle qui complète celle qu'il décrivait dans le premier cas.

Première généralisation. Faisons une perspective du genre de celle qui est indiquée (86). La perspective du triangle AOB pourra être un triangle quelconque *aob* (fig. 102), et les perspectives de AC et BC seront devenues *ac* et *bc*, tangentes au cercle qui est la perspective du premier; on peut alors énoncer le lieu suivant :

Etant données deux droites o e *et* o d, *et deux points fixes quelconques* a *et* b *sur ces droites; on fait passer un cercle par les trois points* o, a, b, *et on mène aux points* a *et* b *deux tangentes qu'on prolonge jusqu'à leur intersection* c : *si alors un triangle* m e d *se déforme, de manière que ses trois côtés tournent autour des trois points* a, b, c, *tandis que deux de ses sommets* e *et* d *se meuvent sur les droites fixes* oa *et* ob ; *le sommet libre* m *décrit le cercle circonscrit au triangle* aob.

Deuxième généralisation. Supposons que, sur le cercle circonscrit au triangle AOB pris, comme base, on construise un cône de révolution : en prenant la perspective de la figure primitive, sur un plan quelconque non parallèle à la base, le cercle OAMB sera remplacé par une conique ; et si nous admettons que par trois points o', a', b', non en ligne droite, on puisse toujours faire passer une conique qui touche deux droites, aux deux derniers points: aucune condition n'est imposée au point c' projection du point C, et on arrive au lieu suivant :

Si un triangle se déforme, de manière que ses côtés passent par trois points fixes quelconques, et que deux des sommets glissent sur deux droites qui se coupent, et sur lesquelles sont situés deux des points : le lieu sera une conique qui passera par ces deux points et le point d'intersection des droites données, et qui de plus, sera tangente aux droites qui joignent les deux premiers points au troisième.

Remarque. — En s'appuyant sur le théorème de l'hexagone inscrit dans un conique, et admettant, de plus, qu'il soit démontré que, par cinq points, dont trois ne seront pas en ligne droite, on puisse faire toujours passer un conique ; on démontre que, si les trois points, autour desquels tournent les côtés du triangle, sont quelconques, ainsi que les deux droites données, le lieu décrit par le sommet libre est encore un conique.

Du reste, le théorème de Pascal, appliqué à un hexagone dont deux côtés sont des tangentes au cercle circonscrit, aurait donné une démonstration immédiate du théorème primitif.

Le théorème général, démontré pour un triangle, s'étend ensuite à un polygone d'un nombre quelconque de côtés par un raisonnement tout semblable à celui qui a été fait (172) (*).

LIEUX DANS L'ESPACE.

172. Un grand nombre de lieux, dans l'espace, se déduisent immédiatement de lieux analogues en géométrie plane, en supposant que les points de l'espace sont distribués sur des plans, en nombre infini, et qu'on fait se succéder suivant une loi qui dépend de la question : nous allons en donner des exemples.

1. Dans l'espace, le lieu des points équidistants de deux points donnés est le plan perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.

(1) Poncelet, *Traité des propriétés projectives*. t. I, page 282.

Pour le démontrer, on fait tourner un plan autour de la droite qui joint les deux points. Dans chacun des plans le lieu est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite ; par conséquent, dans l'espace, le lieu est engendré par cette perpendiculaire et, par suite, est le plan perpendiculaire au milieu de la droite.

2. Le lieu des points, à égale distance de deux plans qui se coupent, est la figure formée par les deux plans bissecteurs des quatre dièdres des deux plans donnés.

On le voit, en remarquant que, dans chaque plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans, le lieu se compose des bissectrices des quatre angles plans des dièdres. Alors, en transportant le plan sécant parallèlement à lui-même, chaque bissectrice engendre un des plans de l'énoncé.

3. Le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux plans qui se coupent est donnée, est la surface latérale d'un parallélipipède rectangle, prolongée indéfiniment, dans la direction de ses arêtes ; et, si c'est la différence des distances qui est donnée, le lieu sera formé par le prolongement des faces.

Il suffit, comme dans le cas précédent, de faire mouvoir un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans : dans le plan sécant, tous les points du lieu forment un rectangle qui se transporte parallèlement à lui-même.

4. Si, dans l'énoncé précédent, on suppose que les distances aux deux plans sont préalablement multipliées par des nombres constants, avant d'en faire la somme ; le lieu est une surface de parallèlipipède quelconque, prolongée indéfiniment dans tous les sens.

La démonstration est analogue à la précédente.

5. Etant donnés trois plans qui se coupent suivant une même droite ou des droites parallèles, on demande le lieu des points tels que, si on multiplie leurs distances aux trois plans par des nombres connus, la somme de ces produits soit donnée.

En coupant les plans par un plan perpendiculaire à leurs intersections, on est ramené au lieu du n° 64 et on voit que le lieu se compose de plans.

6. Etant donnés un point fixe P et une sphère dont le centre est O; si, par le point P, on mène une transversale qui coupe la sphère, le lieu des points conjugués harmoniques du point, par rapport aux deux points d'intersection, est un plan perpendiculaire à la droite OP.

En effet, si, par la droite OP, on fait passer un plan quelconque, les points du lieu dans le plan seront sur une perpendiculaire à OP, et, par suite, tout le lieu sera le plan perpendiculaire à OP, engendré par cette perpendiculaire : le point fixe et le plan sont dits le *pôle* et le *plan polaire* du point par rapport à la sphère.

7. Le lieu des points d'égale puissance, par rapport à deux sphères, est un plan perpendiculaire à la ligne des centres.

Même démonstration que la précédente : le plan s'appelle *plan radical*.

8. Etant donnés un point P et un plan; par le point, on mène une transversale qui coupe le plan en un point A, et on détermine, sur la droite PA prolongée indéfiniment, un point M tel que le produit PM $\times$ PA soit égal à un nombre donné K positif ou négatif; le lieu du point M est une sphère qui a son centre sur la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur le plan.

On mènera un plan par la droite PQ, et dans ce plan le lieu sera un cercle. Le lieu dans l'espace sera donc la sphère engendrée par le demi-cercle tournant autour de PQ.

Il résulte, de ce qui précède, que la *surface réciproque d'un plan est une sphère*.

9. Etant donnés un point P et une sphère O, on mène par le point une transversale qui coupe la sphère en A; on détermine sur cette droite un point M tel, que le produit PM $\times$ PA soit égale à une constante K : le lieu du point M est un plan perpendiculaire à PO, ou une sphère qui a son centre sur cette

droite, suivant que le point P est pris sur la surface de la sphère, ou en dehors.

La démonstration est la même que la précédente.

On peut dire maintenant que la *surface réciproque d'une sphère est un plan ou une sphère, suivant que l'origine est ou n'est pas sur la surface de la sphère donnée.*

10. Etant donnés un cercle dont le centre est O, et un point P hors de son plan; si on joint, par une droite, le point P à un point quelconque A du cercle, et qu'on prenne sur PA, ou sur son prolongement, un point M tel que le produit PM $\times$ PA soit égal à une constante donnée K, le lieu du point M est un cercle. En d'autres termes, dans l'espace *la ligne réciproque d'un cercle est elle-même un cercle*

En effet, le cercle donné peut être considéré comme l'intersection de deux sphères, et, d'après le lieu précédent, le point M, se trouvant à la fois sur deux sphères, décrit un cercle.

11. Etant donnés deux points fixes A et B, deux nombres correspondants m et n positifs ou négatifs, et un troisième nombre positif K^2, le lieu des points M pour lesquels on a toujours

$$m\,\overline{MA}^2 + n\,\overline{MB}^2 = K^2$$

est une sphère, sauf dans le cas où, la somme $m + n$ étant nulle, le lieu est un plan.

On fait passer le plan mobile par la droite AB, et on est ramené au théorème XII (156).

Nous allons maintenant chercher directement quelques lieux.

I.

173. *Le lieu des milieux* M *d'une droite* AB (fig. 103), *de longueur constante, et dont les extrémités s'appuient sur deux droites orthogonales* AD *et* BC, *non situées dans le même plan, est une circonférence dont le plan est parallèle aux deux droites,* *et dont le centre est le milieu de leur plus courte distance.*

Soit DC la plus courte distance des deux droites et O son milieu : tirons DB, DM et MC. La droite AD, étant orthogonale aux droites BC et DC, est perpendiculaire à leur plan DCB, et, par suite, à la droite BD. Alors le triangle ADB est rectangle et la droite DM est égale à la moitié de AB. On prouve qu'il en est de même de la droite MB : le triangle DMC est donc un triangle isocèle, dont les trois côtés sont constants et dans lequel la médiane OM est perpendiculaire sur DC. On voit ainsi que le point M décrit bien le cercle de l'énoncé.

II.

174. *Étant données deux droites* AB *et* CD (fig. 104) *situées d'une manière quelconque dans l'espace, et deux points* A *et* C *sur ces droites, une droite* EF *se meut, sous la condition de déterminer sur les droites fixes deux segments* AE *et* CF *dont le rapport soit donné; un point* M *partage la droite mobile en deux segments* ME *et* MF *dont le rapport est aussi donné : on demande le lieu géométrique de ce point.*

Le lieu est une droite. La démonstration est semblable à celle qui a été donnée pour le théorème analogue de géométrie plane (162) ; la seule différence c'est que sur la nouvelle figure les droites ne sont plus toutes dans un même plan.

III.

175. *Étant donné un quadrilatère plan* ABCD (fig. 105) *on construit une pyramide quadrangulaire* SABCD *qui a ce quadrilatère pour base, et qui satisfait à cette condition qu'elle peut être coupée par un plan suivant un rectangle : on demande le lieu du sommet* S.

Prolongeons les côtés opposés du quadrilatère ABCD, jusqu'à leur rencontre en E et F, puis menons EF, SF et SA. En général, on obtient un parallélogramme pour section plane d'une pyramide quadrangulaire, en menant un plan sécant, parallèle aux deux droites SE et SF, intersections des faces opposées de la surface latérale : par conséquent, pour que la section soit un rectangle, il faut que l'angle ESF soit droit. Le lieu demandé est donc une sphère dont la droite EF est un diamètre.

IV.

176. *Étant donnés des points en nombre quelconque* A_1, $A_2, A_3, \ldots$, *des nombres correspondants* $m_1, m_2, m_3, \ldots$ *positifs ou négatifs, et un nombre positif* k^2 : *le lieu des points* M *tels que l'on a*

$$m_1 \overline{MA}^2 + m_2 \overline{MA_2}^2 + m_3 \overline{MA_3}^2 + \cdots = K^2$$

est une sphère qui a, pour centre, le centre des distances proportionnelles, quand la somme des nombres m_1, $m_2 \ldots$ *n'est pas nulle.*

Dans le cas contraire le lieu est un plan.

La première partie est une conséquence immédiate de la formule

$$\Sigma\, m_1 \overline{MA_1}^2 = \Sigma\, m_1 \times \overline{MG}^2 + \Sigma\, m_1 \overline{GA_1}^2$$

Étendue à l'espace (99).

Dans le cas où la somme $m_1 + m_2 + \ldots$ est nulle, on procédera, comme on l'a fait au nº 158.

V.

177. *Trouver le lieu des points tels, que, si de ces points on abaisse des perpendiculaires sur des plans, en nombre quelconque, et qu'on multiplie ces perpendiculaires par des nombres donnés, la somme des produits soit constante.*

Considérons d'abord le cas de trois plans. Nous n'avons à nous occuper que des plans qui se coupent en un même point S ; car le cas où trois plans se coupent suivant une même droite ou des droites parallèles a déjà été examiné (175. I. 5).

Conservant les notations déjà employées, l'équation de condition est

$$(1)\qquad m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 = \mathrm{K}$$

Mais si l'on considère le tétraèdre SABC obtenu en coupant, par un plan ABC, l'angle trièdre formé par les trois plans donnés, et qu'on appelle h_1, h_2, h_3, h_4 les hauteurs de ce tétraèdre : p_4 étant la distance d'un point de l'espace au plan ABC, on a la relation générale (117)

$$(2)\qquad \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} + \frac{p_4}{h_4} = 1$$

Mais si on ne considère que les points qui sont sur la face ABC, p_4 est nulle, et la relation devient

$$(3)\qquad \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1$$

On voit facilement que les égalités (2) et (3) deviendront idenques, en posant

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{K}}{m_1} = h_1 \qquad \frac{\mathrm{K}}{m_2} = h_2 \qquad \frac{\mathrm{K}}{m_3} = h_3$$

Si donc on détermine sur les trois arêtes du tétraèdre donné S, trois points A, B, C qui soient à des distances des faces opposées, représentées par $\frac{\mathrm{K}}{m_1}$, $\frac{\mathrm{K}}{m_2}$, $\frac{\mathrm{K}}{m_3}$, on aura un plan qui sera le lieu demandé.

Dans ce qui précède, nous avons supposé m_1, m_2 et m_3 positifs ; mais si on veut traiter la question avec toute sa généralité, on devra, comme au numéro 161, donner des signes à $m_1\, m_2\, m_3$ et aussi, à $p_1\ p_2\ p_3$; les signes de ces dernières droites seront d'ailleurs ceux, dont on est convenu au n° 117.

Si, maintenant, nous voulons avoir le lieu complet, il faudra, dans le premier membre de l'équation (3) où l'on a remplacé h_1, h_2, h_3 par leurs valeurs tirées des équations (4), faire toutes les combinaisons de signes des quantités $\frac{\mathrm{K}}{m_1}$, $\frac{\mathrm{K}}{m_2}$, $\frac{\mathrm{K}}{m_3}$

on trouve qu'il y en a huit en tout, et on en conclut que le lieu complet se compose de huit plans.

On ramène maintenant le cas général au cas des trois plans de la manière suivante : On considère successivement les différents tétraèdres qu'on obtient en prenant, pour trois des faces, trois quelconques des plans qui se coupent en un même point, et pour quatrième face, chacun des autres plans, à son tour ; alors, en tirant de l'équation (2) appliquée aux différents tétraèdres, la valeur de la distance d'un point du lieu au quatrième plan, exprimée en fonction des distances aux trois autres, on obtient une relation de la forme (1) entre les distances d'un point du lieu aux trois premiers plans. Le lieu demandé est donc composé de plans.

VI.

178. *Si par une droite donnée, on mène différents plans qui coupent une sphère, et qu'on détermine les sommets des cônes circonscrits à la sphère suivant les cercles de section, le lieu est une droite orthogonale à la première,*

Soient O le centre de la sphère et AB la droite donnée (fig. 106) : abaissons, du centre O, un plan perpendiculaire à AB, et soient P le point de rencontre du plan et de la droite, et DEF le grand cercle de section sur la sphère. Menons aussi par AB un plan quelconque qui coupe le premier plan suivant la droite PEF et, par suite, le grand cercle DEF aux points D et E.

Maintenant, on sait que le sommet du cône doit être sur une perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan ABF ; il se trouvera donc dans le plan du grand cercle DEF. Il doit alors être le point d'intersection S des tangentes au cercle DEF, menées aux points E et F.

Mais quand on fait varier de position le plan passant par AB, le point S décrit la polaire du point P par rapport au grand cercle : le lieu est donc bien une droite orthogonale à la droite donnée.

VII.

179. *Lorsqu'une sphère variable* C *touche constamment, de la même manière, trois sphères fixes dont les centres sont* O, O', O'', *le lieu des points de contact, sur chaque sphère fixe, est un cercle.*

Pour le démontrer, par les trois centres O, O', O'' faisons passer un plan, et déterminons le cercle radical E des trois grands cercles de section. Transformons ensuite toute la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour origine un point du cercle radical. Les trois grands cercles situés dans le plan sécant, et le cercle radical qui leur correspond seront remplacés dans la figure réciproque, par trois cercles et une droite AB qui les coupe à angle droit. Par conséquent, les centres des nouveaux cercles, ou ce qui revient au même, des sphères réciproques des sphères fixes seront trois points en ligne droite.

Maintenant, faisons passer un plan par AB, et menons un cercle tangent aux trois grands cercles de section dans les sphères transformées. En faisant tourner autour de AB le système des quatres cercles, les points de contact engendreront les lignes réciproques des lieux demandés. Or ces lignes sont évidemment des circonférences, il en est donc de même des lieux demandés (14 ex. 10).

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

MÉTHODES.

180. Résoudre un problème de géométrie, c'est construire une figure qui satisfasse à des conditions déterminées (*).

On peut distinguer deux cas généraux : ou bien les données sont connues en grandeur et en position, et il ne s'agit plus que d'achever une figure déjà, en partie, construite, ou bien les données sont seulement connues en grandeur. Nous dirons que les problèmes sont *du premier ou du second genre*, suivant qu'ils rentrent dans le premier ou le second cas.

On ramène ordinairement au premier genre, les problèmes du second, en fixant arbitrairement la position de certaines données. Pour faire comprendre la différence, proposons-nous les deux problèmes suivants :

Étant donnée une droite AB *en position et en grandeur, trouver un point dont la distance à cette droite soit connue, et qui soit tel qu'en y plaçant l'œil, on voie la droite sous un angle donné.*

Construire un triangle, connaissant un côté, la hauteur et l'angle opposé.

Dans le premier problème, si l'on a trouvé un point C satisfaisant à la question, en prenant les points symétriques de ce point par rapport à AB et à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite, on a immédiatement trois autres solutions : en tout, quatre solutions.

Le second problème se ramène immédiatement au premier, en fixant arbitrairement la position de AB ; seulement, comme il ne s'agit pas de placer d'une certaine manière, le triangle dans le plan, mais de le construire avec les éléments donnés,

(*) Nous réservons pour l'algèbre les problèmes où il s'agit de déterminer la grandeur de certaines droites.

il résulte de l'égalité des triangles obtenus dans la construction précédente, que le nouveau problème n'a plus qu'une solution.

Méthode des lieux géométriques.

181. La méthode la plus générale, pour la résolution des problèmes, est celle des lieux géométriques : voici en quoi elle consiste.

On suppose d'abord le problème résolu, c'est-à-dire que l'on construit une figure qui est censée la figure demandée, et qui en contient, par conséquent, les éléments connus et inconnus. Si le problème est du second genre, on devra, de plus, fixer arbitrairement la position de certaines données. Cela fait, on essaiera de réduire, à son expression la plus simple, la difficulté de la construction. Le plus souvent, on pourrait même dire, presque toujours, tout reviendra à déterminer la position d'un point par rapport à des droites connues de grandeur et de position.

Le point, à la détermination duquel tout se réduit, ayant été choisi, on prend, parmi les conditions auxquelles ce point doit satisfaire, celles qui suffisent pour qu'il soit sur une figure connue ; on détermine de même une seconde figure qui le contienne : alors les points de rencontre des deux lieux trouvés satisferont à la question, et le problème proposé sera résolu.

Quelquefois le lieu du point cherché sera une ligne appartenant à la partie de la figure qui est donnée, ou, du moins, qu'on pourra immédiatement construire. Mais le plus souvent, les lieux seront obtenus, parce que l'on saura que tous leurs points jouissent d'une propriété commune. C'est, en raison de l'importance de l'emploi des lieux géométriques dans la résolution des problèmes, que nous avons consacré un chapitre spécial à leur étude.

En géométrie élémentaire, on n'admet, comme ligne que l'on sache construire, que la ligne droite et le cercle. Si donc une certaine combinaison des données amenait une ligne différente, une conique par exemple, il faudrait grouper les données d'une autre manière.

On voit quelle variété dans les modes de solution peut amener la méthode. D'abord, si le problème est du second genre, on pourra choisir, de plusieurs manières, les données dont on fixe arbitrairement la position, ensuite on pourra trouver plusieurs points différents, à la détermination desquels on ramènera toute la difficulté du problème. Il ne sera même pas nécessaire que le point appartienne à la figure cherchée ; il suffira qu'il puisse s'y rattacher par une construction possible. Enfin, quand le choix du point sera fixé, on pourra par différentes combinaisons des données, trouver plusieurs couples de lieux qui déterminent le point par leur rencontre.

EMPLOI DE LA MÉTHODE DES LIEUX DANS LA DISCUSSION DES PROBLÈMES.

Discuter un problème, c'est trouver le nombre de solutions correspondant aux différents cas de figure. La méthode des lieux géométriques atteint le but d'une manière immédiate ; car, en général, le problème a autant de solutions que les deux lieux ont de points de rencontre. Cependant, quand le problème est du second genre, pour qu'il en soit ainsi, il faut que les figures correspondant à chacun des points de rencontre, ne soient pas égales.

Il est bon de faire observer que, même pour les problèmes du premier genre, le nombre des solutions n'est pas toujours égal au nombre des points d'intersection des deux lieux ; car il peut arriver que, le point cherché étant déterminé, la figure s'achève de plusieurs manières différentes.

182. Nous allons maintenant donner des exemples :

1. *Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et l'angle opposé.*

Soit ABC (fig. 107) le triangle cherché, dans lequel on connaît le côté AB, la hauteur correspondante CD et l'angle opposé A. Donnons-nous abstraitement la position de AB, alors, comme nous l'avons dit en commençant ce chapitre, on est ramené au problème suivant :

Trouver un point C *qui soit à une distance connue* CD *d'une droite* AB, *et tel, que de ce point on voie la droite sous un angle* ACB *donné.*

Si nous prenons d'abord la condition, à laquelle satisfait le point C, d'être à une distance donnée de la droite AB, nous trouvons un premier lieu composé de deux parallèles à AB, menées à la distance donnée : d'autre part, l'angle ACB étant donné, on a un second lieu du point C qui est la figure formée par deux arcs symétriques par rapport à AB, ayant cette droite pour corde commune, et tous deux capables de l'angle donné. Le point cherché sera alors l'un des quatre points d'intersection des deux lieux.

Si, maintenant, nous revenons au problème primitif, il n'a, comme nous l'avons déjà fait observer, qu'une seule solution, à cause de l'égalité des quatre triangles correspondant aux quatre points trouvés. D'ailleurs, pour que le problème proposé soit possible, il faut que l'arc capable de l'angle C et la parallèle à AB située du même côté de cette droite, se rencontrent ; ce qui exige que la hauteur donnée du triangle ne soit pas supérieure à la flèche de l'arc.

Remarque. Dans ce problème, comme dans les suivants, nous laissons au lecteur le soin de vérifier la solution par la synthèse.

2. *Décrire un cercle tangent à un cercle et à une droite donnés, en un point donné sur la droite.*

Ici le problème est du premier genre, mais on aura deux modes de solution, en prenant successivement, pour point à déterminer, le centre ou le point de contact des deux cercles.

Première solution. On veut déterminer le centre.

Soient (fig. 108) O et AB le cercle et la droite donnés, D le point connu sur la droite, C le centre du cercle cherché ; et G le point de contact des deux cercles : Menons OC et CD.

Le centre C se trouve d'abord sur une droite connue, la perpendiculaire à la droite AB élevée en D.

Une seconde propriété dont jouit évidemment le centre C, c'est d'être à égale distance du cercle et de la droite donnés ; mais le lieu des points ayant cette propriété commune, n'est ni une droite, ni un cercle. Alors, pour lever la difficulté, on remarque que les droites CD et CG étant égales, si on prolonge CD d'une longueur DE égale au rayon OG du cercle donné, le point C sera à égale distance des points connus O et E.

Si donc, on mène la droite OE, et qu'on lui élève FH perpendiculaire en son milieu F, cette dernière droite sera un second lieu du point C, et elle déterminera ce point par sa rencontre avec la droite DC. Le centre et le rayon CD du cercle cherché étant connus, ce cercle est déterminé.

Discussion. Le problème ne peut avoir qu'une solution, puisque le point C est déterminé par l'intersection de deux droites, et qu'on ne peut construire qu'un seul cercle avec un centre et un rayon donnés. La solution est, d'ailleurs, toujours possible, car les points O et E étant de part et d'autre de AB, la droite OE coupe AB, et, par suite, les droites DE et FH, respectivement, perpendiculaires à AB et OE, se coupent aussi.

Deuxième solution. On veut déterminer le point de contact G des deux cercles (fig. 108). On a un premier lieu de ce point qui est le cercle donné O. Pour en trouver un second, menons la droite DG, prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en D avec le cercle donné, puis tirons OK.

Les deux triangles GCD, OGK ayant, chacun, les côtés égaux, ainsi que les angles en G, on en conclut que les angles OKG, GDC sont égaux, et, par suite, que OK et CD sont parallèles. La droite DK est donc déterminée et donne le second lieu du point G.

La construction s'achève sans difficulté.

Remarque. Si les deux cercles avaient dû être tangents intérieurement, les deux modes de solution eussent encore été applicables.

3. *Construire un triangle* ABC (fig. 109), *connaissant un côté* AB, *l'angle opposé* C *et le rapport des deux autres côtés.*

Le problème étant du second genre, nous pourrons faire varier le mode de solution, en prenant comme fixes des parties différentes de la figure.

Supposons, d'abord, qu'on se donne arbitrairement la position du côté dont la grandeur est déjà connue.

Première solution. Ayant placé la droite AB, on aura un premier lieu du sommet C, en décrivant sur AB, comme corde, un arc capable de l'angle C.

On sait, d'autre part, que le lieu du point C tel, que le rapport de ses distances à deux points connus A et B soit donné, est un cercle que l'on peut facilement construire. Donc le point de rencontre avec l'arc capable de l'angle C donnera le point C.

Il est évident, d'ailleurs, que le problème est toujours possible et n'a qu'une solution.

Deuxième solution. On fixe encore arbitrairement la position de AB, et on prend toujours, pour premier lieu, l'arc capable de l'angle C décrit sur AB (fig. 109). Mais, maintenant, achevons le cercle auquel cet arc appartient; puis menons la bissectrice CD de l'angle C, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en E avec le cercle. Les deux points E et D de la droite CE sont connus, puisque le premier est le milieu de l'arc AB, et que le second partage le côté AB en deux segments dont le rapport est égal au rapport donné. La droite CE est donc un second lieu qui par son intersection avec le premier fait connaître le point C.

Troisième solution. Soit donnée la position de l'angle C. Si on prend une longueur arbitraire CD sur l'un des côtés CA de l'angle C (fig. 110), qu'on détermine sur l'autre côté un segment CE tel que le rapport de CD à CE soit égal au rapport donné, puis qu'on mène ED ; le côté cherché AB devra être parallèle à CD, et l'on peut énoncer la question de la manière suivante : *Inscrire, dans l'intérieur d'un angle connu* C, *une droite* AB, *de longueur et de direction connues.*

Tout revient à déterminer l'un des points A ou B, le point A, par exemple. Le côté AC de l'angle C est un premier lieu de ce point; mais si l'on compte parallèlement à DE, la distance du point A à la droite BC, cette distance est égale à AB, et le point se trouve sur une droite connue FG qui est parallèle à BC. Le point A où la droite FG coupe AC est le point demandé, et en menant, par ce point, la droite AB parallèle à DE, on achève la construction du triangle.

4. *Étant donnés deux cercles* O *et* C, *trouver*, *sur l'un d'eux* C, *un point tel*, *que la tangente menée*, *de ce point à l'autre cercle*, *ait une longueur donnée.*

Soit A le point cherché (fig. 111): le cercle C est un premier lieu de ce point. Mais, d'autre part, le lieu des extrémités des tangentes de même longueur, menées par les différents points d'une circonférence O, est un cercle connu de même centre. Alors les points, où ce cercle rencontrera le second cercle donné, seront les points demandés.

En général, il y aura deux points d'intersection ; mais comme de chacun de ces points, on peut mener deux tangentes à la circonférence O, le problème proposé pourra avoir quatre solutions.

183. *Emploi du point auxiliaire.* Nous allons donner quelques exemples où l'on ramène le problème à la détermination d'un point qui n'appartient pas à la figure qu'il s'agit de construire : c'est ce point que nous appellerons *point auxiliaire.*

1. *Mener une tangente à une circonférence* O *par un point extérieur* A.

Soit B le point de contact (fig. 112) : menons le rayon OB et prolongeons-le d'une longueur égale BC ; il est clair que, si le point C était connu, en tirant OC, on aurait le point de contact B, puis la tangente AB : le point C est ici le point auxiliaire.

On a immédiatement deux lieux du point C qui sont deux cercles ayant, pour centres, O et A, et, pour rayons, le diamètre du cercle donné et la distance OA. Les deux cercles se coupent en deux points, et le problème a deux solutions.

2. *Mener une tangente commune extérieure à deux cercles O et C.*

Soient AB (fig. 113) la tangente commune: Menons les rayons des points de contact OA et OB, et par le centre O la droite OD parallèle à AB. Nous prendrons pour point auxiliaire le point D où cette droite rencontre OB. La droite CD étant égale à la différence des rayons des deux cercles donnés, le cercle, décrit du point O comme centre avec un rayon égal à cette différence, est un premier lieu du point D. D'autre part, l'angle CDO étant droit, le point D se trouve sur le cercle décrit sur OC comme diamètre.

Le point D étant déterminé par l'intersection des deux lieux, on mène la droite CD que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en B avec le cercle C, et en tirant AB perpendiculaire à CB on a la tangente demandée.

Si l'on remarque que la construction, qui détermine le point D, est précisément celle que l'on donne pour mener une tangente à un cercle par un point donné, on peut dire qu'on a ramené le problème proposé à ce dernier problème.

Le cas où la tangente est intérieure se traite de la même manière.

3. *Tracer un cercle passant par un point donne et tangent à deux droites qui se coupent.*

Soient AH, AF et B (fig. 114) les deux droites et le point donnés. C étant le centre du cercle cherché, tirons la bissectrice AK de l'angle HAF, et les droites AB et BC; puis, par un point quelconque E de AK, menons EF parallèle à BC, et prenons, pour point auxiliaire, le point F où les droites AB et EF se coupent.

Il est clair que le point F étant connu, la construction s'achèvera en menant EF, puis BC parallèle à EF : le point de rencontre de cette parallèle et de la bissectrice AK sera le centre demandé.

Cela posé, on voit que la droite AB est un premier lieu du point F ; pour en obtenir un second, on abaisse EG et CD perpendiculaires sur AH, et, comme les triangles AEF et ABC, AGE et ADC, sont semblables, deux à deux, on a

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad \frac{EG}{CD} = \frac{AE}{AC}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{EF}{BC} = \frac{EG}{CD}$$

Et comme les droites BC et DE sont égales, il en est de même de GE et EF.

Le second lieu demandé sera donc le cercle droit du point E, comme centre, avec EG pour rayon ; et comme ce cercle coupe la droite AB en deux points, le problème a en général deux solutions.

4. *Par un des points d'intersection de deux cercles, mener une droite telle que la somme des deux cordes interceptées soit égale à une longueur donnée : on suppose, d'ailleurs, que les deux points de rencontre doivent être de part et d'autre du point donné.*

Soient O et C les deux cercles donnés, et AB la droite demandée qui passe par l'un des points d'intersection A des deux cercles ; abaissons des centres les perpendiculaires OI et CH sur BD, et par le centre C menons CE parallèle à BD : nous prendrons pour point auxiliaire le point de rencontre E des droites CE et OI.

Si maintenant on remarque que CE est égale à IIF, c'est-à-dire à la moitié de la somme donnée, et que l'angle OEC est droit, on voit que la solution s'achève comme celle du problème 2.

Remarque. — Si on avait donné la différence des deux cordes, avec la condition que les deux points de rencontre de la sécante et des cercles soient d'un même côté du point donné, la solution serait tout-à-fait la même ; car la partie de la sécante, comprise entre les pieds des perpendiculaires abaissées des deux centres sur sa direction, serait alors égale à la demi-différence donnée.

Construire un triangle ABC (fig. 116), *connaissant l'angle* A, *la hauteur* AD, *et le produit* m^2 *des segments qu'elle détermine sur le côté* BC *opposé à l'angle* A.

Nous prendrons ici, pour point auxiliaire, le centre du cercle circonscrit au triangle; le cercle étant tracé, soit E le point où il coupe la hauteur AD prolongée : on a alors

$$AD \times DE = BD \times DC = m^2$$

et comme la droite AD est connue en grandeur, il en est de même de DE.

Cela posé, soit donnée arbitrairement la position de AD : les trois points A,D,E seront connus, et en élevant au milieu G de AE une perpendiculaire GO à cette droite, nous aurons un premier lieu du centre O cherché.

Pour en trouver un second, élevons BC perpendiculaire à la hauteur AD au point D, puis tirons OA, OC et GI parallèle à OC; les triangles OCF, GDI sont évidemment égaux, et l'angle DGI est, par suite, égal à l'angle FOC ou à l'angle A. On pourra avoir, par conséquent, la longueur du rayon du cercle circonscrit, en menant par le point G une droite GI qui fasse avec GD un angle DGI égal à l'angle connu A : le second lieu du centre O sera donc un cercle décrit, du point A comme centre, avec GI pour rayon.

Quand on a obtenu le point O par l'intersection des deux lieux, la solution s'achève ensuite sans difficulté.

Remarque. — On pourrait remplacer, dans l'énoncé précédent, le produit donné par une somme, une différence ou un rapport.

Quand on se donne la somme, on retombe sur le problème I (185); dans le cas du rapport, la solution est intuitive; et enfin, quand la différence est donnée, on ramène facilement le problème proposé au problème XI (202) dont nous donnons plus loin la solution.

MÉTHODES PARTICULIÈRES.

Nous allons maintenant faire connaître quelques méthodes particulières, utiles pour certains problèmes spéciaux, mais qui le plus souvent ne sont que des procédés bons à employer pour faciliter la mise en œuvre de la méthode générale des lieux géométriques.

MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES.

184. C'est la méthode que nous avons déjà indiquée pour la démonstration des théorèmes. Elle consiste à ramener le problème à un autre, celui-ci à un troisième, et, ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un problème connu.

Voici des exemples.

1. *Décrire un cercle tangent à deux droites et à un cercle donnés.*

Soient AL, AM et C (fig. 117) les deux droites et le cercle donnés, et O le cercle cherché qui touche les deux droites et le cercle donnés en B, E, D.

Du point O, comme centre, avec OG pour rayon, décrivons un cercle, puis menons les droites HG, IF tangentes à ce cercle, et respectivement parallèles à AL et AM. Les droites HG et IF sont connues de position, car leurs distances à DL et DM sont égales au rayon DC du cercle donné ; on est donc ramené à déterminer le centre O d'un cercle qui passe par un point donné C et touche deux droites données GH et IF : c'est le problème (3) (186).

Si l'on remarque que les deux parallèles à AL et AM peuvent avoir quatre dispositions différentes par rapport à ces droites, on voit que le problème a, en général, huit solutions.

2. *Partager un trapèze* ABCD (fig. 118), *par une parallèle* EF *aux bases* AB *et* CD, *en deux parties* ABEF, EFCD *qui soient entr'elles dans le rapport de deux droites données* M *et* N.

Nous allons ramener la question à partager une droite en deux segments dont le rapport soit le rapport donné.

Prolongeons les deux côtés non parallèles AD et BC jusqu'à leur rencontre en G; on aura, en considérant les deux trapèzes ABEF, EFCD, comme différences de deux triangles,

$$(1) \qquad \frac{GAB - GEF}{GEF - GDC} = \frac{M}{N}$$

remplaçant maintenant dans cette équation les trois triangles GAB, GEF, GDC par les trois quantités proportionnelles $\overline{GA}^2$, $\overline{GE}^2$, $\overline{GD}^2$, il vient

$$(2) \qquad \frac{\overline{GA}^2 - \overline{GE}^2}{\overline{GE}^2 - \overline{GD}^2} = \frac{M}{N}$$

Mais les quantités $\overline{GA}^2$, $\overline{GE}^2$ et $\overline{GD}$ peuvent être remplacées, à leur tour, par des droites proportionnelles; à cet effet, sur AG comme diamètre, décrivons un demi-cercle, et du point G comme centre avec GD et GE pour rayons, traçons deux cercles qui coupent le premier en I et H, puis projetons ces derniers points en L et K sur AG; en menant alors GI et GH, on a

$$\frac{\overline{GH}^2}{\overline{AG}^2} = \frac{GK}{AG} \qquad \frac{\overline{GI}^2}{\overline{AG}^2} = \frac{GL}{AG}$$

ou

$$\frac{\overline{GH}^2}{GK} = \frac{\overline{GI}^2}{GL} = \frac{\overline{AG}^2}{AG}$$

et en remplaçant GH et GI par les droites égales GD et GE, on voit que les trois droites GK, GL et AG sont proportionnelles aux trois quantités $\overline{GD}^2$, $\overline{GE}^2$ et $\overline{GA}^2$ et qu'elles peuvent, par conséquent, les remplacer dans l'égalité (2); on a ainsi

$$\frac{GA - GL}{GL - LK} = \frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{AL}{LK} = \frac{M}{N}$$

Le point K étant connu, on voit bien que le problème est ramené à partager la droite AK, au point L, en deux segments dont le rapport est donné.

Le point L étant obtenu, on mènera LI perpendiculaire à AG, on prolongera cette droite jusqu'à sa rencontre en I avec le demi-cercle décrit sur AG ; puis, du point G, comme centre, avec GI comme rayon, on décrira un cercle qui par sa rencontre avec AD donnera le point E demandé.

Remarque. La méthode des substitutions successives n'est souvent qu'une manière abrégée de présenter la solution des problèmes, en ne répétant plus des raisonnements déjà faits à l'occasion de problèmes connus. C'est ainsi que dans les problèmes 2 et 4 (186) au lieu de considérer le point auxiliaire comme déterminé par l'intersection de deux lieux connus, nous pouvons dire que le problème est ramené au problème de la tangente au cercle par un point donné.

MÉTHODE PAR RENVERSEMENT.

185. Presque toujours, on ramène les problèmes du second genre au premier; mais quelquefois on fait aussi le contraire, on *renverse* la méthode ordinaire, pour se donner toute liberté de placer certaines données, comme on le veut : la figure étant construite dans une position quelconque, il est facile ensuite, en reportant certaines lignes sur la figure primitive, d'achever la construction (*).

Remarque. On ne doit avoir recours à la méthode par renversement que lorsqu'on ne peut faire autrement, ou que l'on veut essayer de trouver de nouveaux modes de solution; car il est toujours plus élégant de faire la construction sur la figure elle-même, sans avoir recours à une figure auxiliaire.

Passons maintenant aux exemples.

1. *Etant donnés un cercle* C (fig. 119) *et deux droites* CA

(*) On entend, d'ordinaire, le mot *renversement* dans un sens moins général que celui que nous lui attribuons. — Duhamel, *Méthodes dans les sciences de raisonnement.*

et CB *passant par son centre, mener une tangente* AB *au cercle, telle que la partie* AB, *interceptée entre les deux droites fixes soit égale à une longueur donnée.*

Menons le rayon CD du point de contact D; dans le triangle ABC, on connaît le côté AB, l'angle opposé C, et la hauteur CD. On peut alors construire ce triangle quelque part dans le plan, problème 1 (185); puis, quand il est construit, on porte sur les deux droites données des longueurs CA et CB, respectivement, égales aux côtés de l'angle C, et en menant AB, on a la tangente demandée.

2. *Inscrire un triangle connu dans un triangle dont les côtés sont donnés en position et en grandeur.*

Proposons-nous d'obtenir les deux triangles inscrits l'un dans l'autre et dans une position quelconque sur le plan.

Ayant construit, d'abord, quelque part dans le plan, le triangle DEF qui doit être inscrit dans le triangle donné (fig. 126), il s'agira de lui circonscrire ce dernier triangle.

Or les points A et B sont, respectivement, sur deux arcs capables de deux angles donnés, décrits sur EF et ED, et le côté AB a une longueur donnée; on est donc ramené au problème 4 (186) qui a généralement deux solutions.

Le problème proposé, lui-même, a aussi généralement deux solutions, quand on précise les angles qui doivent être respectivement opposés aux côtés du triangle DEF. Mais si l'on admet que le triangle DEF peut être placé d'une manière quelconque dans le triangle ABC, on voit facilement que le problème a, en général, douze solutions.

3. *Par un point* E *pris sur la bissectrice* CE *d'un angle* DCF′ (fig. 121), *mener une droite telle, que la partie* AB, *interceptée entre les côtés de l'angle, soit égale à une longueur donnée.*

Supposons que l'on veuille construire la figure dans une position quelconque; on peut dire que le problème proposé revient à celui-ci: *Construire un triangle* ABC *connaissant un côté* AB, *l'angle opposé* C, *et la longueur* CE *de la bissectrice de cet angle.*

Donnons-nous arbitrairement la position de AB (fig. 122), tout reviendra à déterminer la position du point C par rapport à cette droite.

Le point C se trouve d'abord sur un arc ABC, décrit sur AB comme corde, et capable de l'angle donné.

Cherchons maintenant un autre lieu du point G. Pour cela, achevons la circonférence à laquelle appartient l'arc ACB, menons la bissectrice de l'angle C, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en I avec la circonférence. Le point I étant le milieu de l'arc AIB, les angles IAE, ACI sont égaux, et, par suite, les triangles ACI, AEI, qui ont l'angle commun I, sont semblables et donnent

$$CI \times EI = \overline{AI}^2$$

Dès lors, les deux droites CI et EI peuvent être construites, puisqu'on connaît leur différence CE et leur produit $\overline{AI}^2$. La droite IC étant connue, le lieu géométrique demandé est une circonférence qui a, pour rayon, cette droite et pour centre, le point I.

Le point C étant obtenu et le triangle ABC construit, on revient, comme à l'ordinaire, à la figure primitive.

MÉTHODE DES FIGURES SYMÉTRIQUES.

186. On facilite souvent la solution d'un problème en adjoignant, à certains points de la figure, d'autres points qui leur sont symétriques, par rapport à une droite ou un point. Quelquefois même, on reproduit par symétrie toute une partie de la figure.

Passons aux exemples.

1. *Étant donnés une droite* AB *et deux cercles* O *et* C (fig. 123), *on demande de trouver sur la droite* AB *un point* D *tel, que les tangentes* DE *et* DF, *menées de ce point aux deux cercles, fassent avec la droite des angles* EDA, FDB *égaux entr'eux.*

Décrivons le cercle C′ symétrique du cercle C par rapport à AB. Si, du point D, nous menons la droite DF′ tangente au cercle C′, les deux angles FDB, F′DB seront égaux, et, par suite, il en sera de même des angles EDA, F′DB ; il en résulte que DF′ est le prolongement de ED, et l'on est ramené au problème de la tangente commune à deux cercles.

2. *Construire un triangle* ABC (fig. 124), *connaissant un côté* AB, *la somme des deux autres, et sachant que le sommet* C *se trouve sur une droite* LM *donnée de position.*

Pour mettre en évidence la somme donnée, prolongeons AC d'une longueur CD égale à BC : si, alors, des points A et C, comme centres, avec des rayons, respectivement, égaux à AD et CB, nous décrivons des cercles. Ils seront tangents intérieurement au point D.

Le premier est connu, et le second satisfait à la condition d'être tangent intérieurement au premier, de passer par le point B, et d'avoir son centre C sur la ligne connue LM. Mais si nous prenons le point E symétrique du point B par rapport à LM, il est clair que le cercle cherché devra passer par ce point, et on est ramené au problème connu de déterminer un cercle qui passe par deux points donnés et soit tangent à un cercle donné. Le centre du cercle cherché sera le troisième sommet demandé.

Le problème aura en général deux solutions.

On traitera de même le cas où l'on donne la différence des côtés au lieu de la somme.

Par le même artifice que nous venons d'employer, le problème de déterminer un cercle qui touche deux droites données et passe par un point donné, déjà résolu (86), se trouve ramené au problème de tracer un cercle qui passe par deux points donnés et touche une droite donnée. Il suffit, pour cela, d'adjoindre au point connu son symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle des deux droites données.

3. *Construire un triangle* ABC (fig. 125) *connaissant un côté* AB, *la différence des angles adjacents* A *et* B, *et sachant que le sommet opposé* C *se trouve sur une droite* FG *donnée de position.*

Prenons sur BC une longueur CD égale à AC et menons DA :

l'angle CDA étant égal à $90^\circ - \frac{C}{2}$ ou $\frac{A+B}{2}$, l'angle DBA est égal à $\frac{A-B}{2}$, et, par suite, la droite AD est connue de position.

Cela posé, construisons le point A′ symétrique de A par rapport à FG, prolongeons AD jusqu'à sa rencontre en E′ avec FG, puis menons les droites EA′ et CA′. Ces dernières droites sont évidemment symétriques de EA et CA par rapport à FG, et, par suite, les angles EAC, EA′C′ sont égaux, et les angles EDC, EA′C, supplémentaires; le quadrilatère CDEA′ est donc inscriptible, et l'angle A′CB est supplémentaire de l'angle connu AEA′.

Par conséquent, après avoir déterminé le point A′ symétrique de A par rapport à FG, pour achever la construction, il suffira de mener la droite BA′, et de décrire, sur cette droite comme corde, un arc capable de l'angle supplémentaire de l'angle AEA′. Le point C, où cet arc coupera FG, sera le point demandé.

4. *Par un des points d'intersection de deux cercles, mener une droite telle que la somme des deux cordes interceptées soit égale à une longueur donnée, sous la condition que les deux points d'intersection soient d'un même côté du point donné.*

Voici comment on ramène ce problème au problème 4 (186). Concevons un cercle C′ tangent en A au cercle C, et de même rayon; puis, FG étant la droite demandée, remplaçons le point F où cette droite rencontre le cercle C par le point F′ où elle rencontre le cercle C′, c'est-à-dire, par le point symétrique de F par rapport au point A. Alors on est ramené au problème cité, car, quelle que soit la sécante, les droites AF et AF′ sont égales, et les deux points F et F′ sont de part et d'autre du point A.

Si l'on donnait la différence de deux cordes, on ramènerait de même le cas où les deux points d'intersection sont d'un même côté du point A, au cas où ils sont de part et d'autre.

MÉTHODES DES FIGURES SEMBLABLES.

187. Quelquefois pour résoudre un problème on construit une figure semblable à la figure cherchée, et de la figure obtenue on déduit ensuite la figure demandée.

Voici quelques exemples.

1. *Construire un triangle connaissant les angles et la surface ou le périmètre.*

Les angles du triangle demandé étant connus, on peut immédiatement construire un triangle qui lui soit semblable : On est alors ramené à déterminer un triangle semblable à un triangle donné, et dont le périmètre ou la surface sont connus.

Mais les rapports des périmètres et des surfaces de deux triangles semblables sont, respectivement, égaux au rapport de deux côtés homologues et au carré de ce rapport ; on est donc ramené dans un cas, comme dans l'autre, à construire sur un côté donné un triangle semblable à un triangle donné.

2. *Construire un triangle connaissant les trois hauteurs.*

Soient a,b,c les trois côtés, h,k,l les trois hauteurs correspondantes, on a

$$ah = bk = cl$$

ou

$$\frac{a}{\frac{1}{h}} = \frac{b}{\frac{1}{k}} = \frac{c}{\frac{1}{l}}$$

Ainsi, les trois côtés a,b,c sont proportionnels aux trois nombres $\frac{1}{h}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}$ et, par suite, à leurs produits par hk, c'est-à-dire, à k,h et $\frac{hk}{l}$. Si donc, (fig. 126) on construit trois droites proportionnelles à ces trois derniers nombres, et, avec les droites un triangle AB′C′ ; ce triangle sera semblable au triangle cherché, et après l'avoir construit, pour achever la solution du problème, on abaissera AH′ perpendiculaire sur B′C′, on prendra sur cette droite une longueur AH égale à la hauteur h correspondante au côté a, puis par le point H on mènera BC parallèle à $B'C'$.

Remarque. On traite de la même manière le problème de construire un triangle connaissant les rayons des trois cercles ex-inscrits : adoptant les notations ordinaires, on a

$$(p = a)\,r' = (p - b)\,r'' = (p - c)\,r'''$$

d'où

$$\frac{p - a}{\frac{1}{r'}} = \frac{p - b}{\frac{1}{r''}} = \frac{p - c}{\frac{1}{r'''}}$$

et en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des fractions prises deux à deux, on a

$$\frac{a}{\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}} = \frac{b}{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'''}} = \frac{c}{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}}$$

on achève ensuite, comme tout-à-l'heure.

3. *Construire un triangle* ABC (fig. 127) *semblable à un triangle donné et dont les sommets soient situés sur trois cercles concentriques donnés.*

Tirons des droites du centre commun O des trois cercles, aux trois sommets du triangle, et par un point quelconque A' de OA menons $A'B'$ et $A'C'$, respectivement, parallèles à AB et AC, dans les triangles OAB, OAC. On voit facilement qu'en joignant $B'C'$, on aura un triangle $A'B'C'$ semblables à ABC et que les trois longueurs OA',OB',OC' sont proportionnelles aux rayons des cercles donnés.

Cela posé, construisons un triangle $A''B''C''$ semblable au triangle donné, et déterminons un point O dont les distances aux trois sommets A'',B'',C'' soient entr'elles comme les rayons des cercles donnés (le point s'obtient facilement par la rencontre de deux lieux connus). Prenant alors sur les trois droites OA'',OB'',OC'', des longueurs OA_1,OB_1,OC_1, respectivement, égales aux trois rayons donnés, et joignant par des droites les trois points A_1,B_1,C, on aura un triangle $A_1B_1C_1$ qui sera placé par rapport à $A''B''C''$, comme ABC l'était par rapport à $A'B'C'$.

Pour avoir maintenant la position du triangle ABC par rapport à la figure primitive, par le centre O, on mènera trois rayons OA, OB, OC, dans chacun des cercles, tels, que les deux angles AOB, AOC soient, respectivement, égaux aux angles $A''OB''$, $A''OC''$; en joignant par des droites les trois points A, B, C on aura le triangle demandé.

REMARQUE. La construction du triangle $A_1B_1C_1$ est inutile; nous n'en avons parlé que pour l'uniformité des explications.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

188. Nous allons maintenant donner la solution de quelques problèmes, en appliquant à chacun d'eux une ou plusieurs des méthodes que nous venons d'exposer. Mais on verra que le plus souvent, c'est la méthode des lieux géométriques qui conduit à la solution demandée.

Nous allons commencer par la construction des triangles. Les problèmes de cette espèce sont intéressants, parce qu'on les retrouve en trigonométrie.

CONSTRUCTION DE TRIANGLES.

PROBLÈME I.

189. *Construire un triangle connaissant le périmètre et les angles.*

Nous avons déjà donné une solution par les triangles semblables, mais la suivante est plus simple.

Prolongeons (fig. 128,) le côté AB de longueurs AD et BE, respectivement, égales à AC et BC, et menons CD et CE. Dans le triangle CDE, on connaît le côté DE qui est égal au périmètre donné du triangle ABC, et les deux angles D et E qui sont les moitiés des angles du même triangle; on peut donc construire le triangle DCE, et la droite DE sera un lieu des sommets A et B.

Mais, d'autre part, les points A et B sont à des distances égales, le premier, de D et C, le second, de C et E: ils seront donc déterminés par les rencontres de la droite DE avec les perpendiculaires élevées sur les milieux de CD et CE.

L'angle DCE étant égal à $90° + \frac{C}{2}$ est toujours obtus : les perpendiculaires élevées sur les milieux de CD et CE rencontrent donc toujours DE entre D et E ; le problème est, par suite, toujours possible, et il n'a d'ailleurs qu'une solution.

PROBLÈME II.

190. *Construire un triangle* ABC (fig. 129), *connaissant un côté* BC, *l'angle opposé* A, *et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

Supposons que la somme soit donnée : on prolonge AB d'une longueur AD égale à AC, et on mène CD. On peut construire le triangle DBC dans lequel on connaît l'angle D égal à la moitié de l'angle A, le côté BD égal à la somme donnée, et le côté BC qui est donné, par hypothèse.

Le triangle DBC étant construit, comme le point A est à égale distance des points D et C, on achève la construction en élevant EA perpendiculaire sur le milieu de DC, et menant CA.

Discussion. Il faut d'abord pouvoir construire le triangle auxiliaire BDC dans lequel l'angle D est aigu. On sait que la condition nécessaire et suffisante est que le côté BC ne soit pas plus petit que la perpendiculaire BH abaissée du sommet B sur le côté CD.

Supposons que la condition soit remplie, et qu'on ait construit le triangle BDC : il reste encore à déterminer le point A par la rencontre de BD avec la perpendiculaire élevée au milieu E de CD.

Les deux droites se rencontrent toujours, puisque l'angle D n'est jamais droit ; mais il faut encore que la rencontre ait lieu entre B et D, et, pour cela, qu'on ait BC plus petit que BD ; on retrouve de cette manière la condition connue que le côté donné doit être plus petit que la somme des deux autres.

Ainsi, en résumé, le côté donné BC doit être plus grand que BH ou égal à cette droite et plus petit que la somme donnée. Quand BC est plus grand que BH le cercle décrit avec BC, comme rayon, coupe la droite indéfinie DC en deux points C et C′, et il semble qu'alors on ait deux solutions : les triangles ABC, BA′C′ ; mais le problème n'a jamais qu'une solution, car nous allons voir que les triangles sont égaux.

En effet on a

$$BC = BC' \quad \widehat{BAC} = \widehat{BA'C'}$$

Il reste donc à démontrer l'égalité des angles ABC, BC′A′ : or on a

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCC'} - \widehat{BDC} \quad \widehat{BC'A'} = \widehat{BC'C} - \widehat{A'C'D}$$

Et à cause des triangles isocèles BCC′, DA′C, on a aussi

$$\widehat{BCC'} = \widehat{BC'C} \quad \widehat{BDC} = \widehat{A'C'D}$$

donc $$\widehat{ABC} = \widehat{BC'A}$$

Quand on se donne la différence des côtés, on est encore conduit à construire un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ; mais l'angle étant obtus, le problème auxiliaire n'a qu'une solution et la discussion n'offre aucune difficulté.

PROBLÈME III.

191. *Construire un triangle* ABC (fig. 158), *connaissant un angle* C, *la hauteur* CH *partant du sommet de cet angle et le périmètre.*

Première solution. Formons le triangle auxiliaire CDE, comme dans le problème 1, on aura

$$\widehat{DCE} = C + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ + \frac{C}{2}$$

Dans le triangle DCE, on connaît donc le côté DE, l'angle opposé et la hauteur CH. On peut le construire (185) : on obtient ensuite facilement le triangle demandé.

Le problème proposé n'a qu'une solution, et pour qu'il soit possible, il faut et il suffit que la ligne AH ne soit pas plus grande que la flèche de l'arc capable de l'angle $90 + \frac{A}{2}$ et décrit sur DE comme corde.

Deuxième solution. Donnons-nous l'angle C (fig. 130), et proposons-nous de déterminer la position de AB par rapport à cet angle. On voit d'abord que la droite BC doit être tangente à un cercle décrit du point A, comme centre, avec AH pour rayon.

D'autre part, on sait que si l'on décrit un cercle qui touche BC et les prolongements des côtés AC et BC en E et F, les droites CE et CF sont égales au demi-périmètre du triangle ABC : le cercle est donc connu. On achèvera ensuite la construction en menant une tangente commune BC aux deux cercles que l'on a tracés.

Il n'y a évidemment que les tangentes extérieures qui satisfont à la question, et, à ces tangentes, correspondent deux triangles égaux ; le problème n'a donc qu'une solution, et pour qu'elle existe, il faut que la distance des centres des deux cercles soit plus grande que la somme de leurs rayons.

PROBLÈME IV.

192. *Construire un triangle* ABC (fig. 131), *connaissant la hauteur* AE, *la médiane* AD *et la bissectrice* AF *qui partent toutes trois du même sommet* A.

Première solution. On construit, d'abord, avec les deux premières droites un triangle rectangle ADE ; la position du sommet A est alors déterminée, par rapport à la droite DE prolongée indéfiniment, et il ne s'agit plus que de placer les sommets B et C sur cette droite.

A cet effet, on prend pour point auxiliaire le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC. On a un premier lieu de ce point en élevant une perpendiculaire à ED au point D. Pour obtenir un second lieu, on remarque que si on détermine entre D et E un point F qui soit à une distance du point A égale à la longueur de la bissectrice donnée, et qu'on tire la droite AF, les deux droites AF et OD prolongées viendront se rencontrer au milieu G de l'arc BGC. AG est, par conséquent, une corde connue du cercle circonscrit au triangle, et en élevant une perpendiculaire à AG en son milieu F, on a le second lieu demandé.

Le point O étant déterminé par la rencontre des deux lieux, de ce point comme centre, avec OA comme rayon, on décrit un cercle qui coupe la droite EF prolongée, en deux points B et C qui sont les sommets cherchés.

Deuxième solution. Le triangle DAE, et la droite AF étant construits, comme plus haut, on mène AK perpendiculaire à AF; alors les deux points F et K, et les deux sommets cherchés B et C forment une division harmonique, et l'on a

$$\overline{DB}^2 = DF \times DK$$

Cette égalité détermine le point B, et, par suite, le point C.

Troisième solution. Soit KHG (fig. 43) le triangle à construire, dans lequel G est le sommet d'où partent les trois droites données. On détermine, comme dans la première solution, les positions relatives du sommet G et du côté opposé HK, puis prenant pour centre le milieu I de KH, on décrit un cercle avec IG pour rayon. Dans la fig. 43 il faut supposer que CD est un diamètre et I le centre du cercle.

Prolongeons maintenant la droite GI jusqu'à sa rencontre en F avec le cercle, et menons EF tangente au cercle en ce point : alors, si par le point de rencontre E de la tangente et du diamètre CD, on tire une sécante quelconque EAB, puis les droites GA et GK qui coupent le diamètre CD en K et H, d'après le théorème III (105), les deux segments IK et IH seront égaux.

Il ne s'agit plus que de mener la sécante EAB, de manière que l'angle G ait une bissectrice de longueur donnée ; or il suffira, pour atteindre ce but, de faire la construction suivante : on détermine, comme dans les solutions précédentes, la position de la droite qui doit être bissectrice, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre en F avec le cercle ; on tire une droite de ce point au centre, et, du point E on abaisse une perpendiculaire EAB sur cette dernière droite.

PROBLÈME V.

193. *Construire un triangle* ABC (fig. 132), *connaissant l'angle* A, *la hauteur* AH, *et la somme, la différence, le produit ou le rapport des côtés qui comprennent l'angle donné.*

Dans l'un quelconque des quatre cas, en un point H d'une droite indéfinie BC, on élève une perpendiculaire à cette droite, et on prend sur sa direction une longueur AH égale à la hauteur donnée : alors il ne s'agit plus que de trouver la position des sommets B et C sur la droite indéfinie BC.

1° *La somme est donnée.* Prolongeons AB d'une longueur AE égale à AC, et cherchons le lieu du point E, lorsque l'angle donné BAC tourne autour de son sommet A : la question peut s'énoncer ainsi.

Un angle constant CAE *tourne autour de son sommet* A, *et l'un de ses côtés rencontre une droite fixe* BC *au point* C ; *on prend sur l'autre côté une longueur* AE *égale à* AC : *on demande quel est le lieu du point* E.

Ce lieu est un cas particulier du lieu IX (153) ; on trouve une droite que l'on détermine par la construction suivante.

Menez par le point A une droite AK qui fasse avec AH un angle égal à l'angle donné A, prenez AK égale à AH, et au point K élevez PQ perpendiculaire à AK : la droite PQ sera le lieu demandé.

Mais le point A, étant à égale distance des droites BC et PQ, est sur la bissectrice de leur angle, et on est ramené à ce problème connu : *par un point* A, *pris sur la bissectrice d'un angle, mener une droite telle que la partie* BE *interceptée entre les côtés de l'angle ait une longueur donnée.*

2° *La différence est donnée.* Ayant pris, sur le côté AB lui-même, une longueur AF égale à AC, on trouve, comme plus haut, que le lieu du point F est une droite, et on est encore ramené au même problème ; seulement, le point A est pris sur la bissectrice des angles supplémentaires de l'angle donné.

3° *Le produit est donné.* L'angle constant A tournant autour du point A, et l'un de ses côtés rencontrant la droite fixe au point B, si on prend sur l'autre côté un point C, tel que le produit AC $\times$ AB soit constant, on sait que le lieu est un cercle. L'un des points de rencontre de ce cercle et de la droite indéfinie BC sera donc le sommet C. On aura ensuite facilement le sommet B.

4° *Le rapport est donné.* En se servant du lieu IX (153), on a une solution analogue à la précédente.

REMARQUE 1. — Dans le troisième cas, on peut immédiatement, d'après un théorème connu, déterminer le diamètre du cercle circonscrit, et, par suite, après avoir tracé ce cercle, et y avoir inscrit un angle égal à A, on connaîtra la longueur du côté BC. On est ainsi ramené à ce problème bien connu : *construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé, et la hauteur.*

REMARQUE 2. — Dans le cas où le rapport est connu, on peut se donner l'angle A de position : si alors on remarque que BC est parallèle à une direction donnée, on achève facilement la solution.

PROBLÈME VI.

194. *Construire un triangle* ABC (fig. 132), *connaissant la différence des angles* B *et* C *adjacents au côté* BC, *la hauteur* AD *qui correspond à ce côté, et la somme, la différence, le produit ou le rapport des deux autres côtés.*

Prenons sur BC une longueur GH égale à HC, et menons AG : la droite AG sera égale à AC, et l'angle BAG égal à la différence des angles B et C. Si alors on considère le triangle BAG comme le triangle à construire, on est ramené au problème précédent. Le triangle auxiliaire étant construit, il est ensuite facile d'obtenir le triangle ABC.

PROBLÈME VII.

195. *Construire un triangle* ABC, *connaissant un côté* AB, *l'angle opposé* A *et le produit* m^2 *des côtés qui comprennent cet angle.*

Première solution. L'angle A étant donné ainsi que BC, le point A se trouve sur l'arc BDC d'un cercle connu.

Mais si, du point A, on abaisse AH perpendiculaire sur BC, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a

$$AB \times AC = 2\,R \times AH$$

mais on a aussi, par hypothèse,

$$AB \times AC = m^2$$

On a donc:
$$AH = \frac{m^2}{2\,R}$$

et l'on est ramené au problème I (185).

Deuxième solution. On s'appuie sur le lemme suivant :

Un cercle étant circonscrit à un triangle ABC (fig. 132), *et* D *étant le milieu de l'arc* BAC, *si l'on mène les droites* AD *et* DB, *on a*

$$AB \times AC = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

Pour le démontrer, prolongeons AB d'une longueur AE égale à AC, et tirons EC. Le triangle AEC étant isocèle, l'angle BEC est la moitié de l'angle A ; le point E se trouve donc sur un arc qui a pour corde BC et qui est capable d'un angle moitié de l'angle A : cet arc a, d'ailleurs, pour centre le point D qui est à égale distance de trois de ses points.

Appliquant maintenant le théorème connu sur la puissance d'un point par rapport à un cercle, on a

$$AB \times AE = \overline{BD}^2 - AD$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, le produit $AB \times AE$ étant égal à m^2, on a

$$AD = \sqrt{\overline{BD}^2 - m^2}$$

Le point A sera donc déterminé par la rencontre de l'arc BAC et d'un cercle qui a, pour centre le point D, et, pour rayon, $\sqrt{\overline{BD} - m^2}$

Pour que le problème soit possible, la longueur m ne doit pas être plus grande que BD.

PROBLÈME VIII.

198. *Construire un triangle* ABC (fig. 133), *connaissant un côté* AB, *l'angle opposé* A *et le rapport de la différence* AB — AC *des deux autres côtés à la hauteur* AH *partant du sommet* A.

Ce problème a été proposé par *Pascal* à *Fermat*. Voici la solution que *Fermat* a donnée :

Le cercle circonscrit au triangle ABC étant tracé, et D étant le milieu de l'arc BAC de ce cercle, tirons DA, BD et abaissons DF, DI, respectivement, perpendiculaires sur AB et BC.

D'après le lemme démontré, tout à l'heure, on a

$$AH \times 2R = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

ou, en remplaçant le produit $AB \times AC$ par le produit égal $AH \times 2R$, il vient

$$(1) \qquad AH \times 2R = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

On voit aussi, par la figure qui a servi à la démonstration du lemme, que la ligne AF est égale à la demi-différence entre AB et AC.

En effet, en nous reportant à la figure, on voit que les longueurs BE et AB + AC sont égales, et, comme le point D est le centre d'un cercle auquel appartient la corde BE, la droite BF est égale à la demi somme de AB et de AC, on a donc

$$AF = AB - \frac{AB + AC}{2} = \frac{AB - AC}{2}$$

Cela posé, comme les angles DAB, DBI sont égaux, les triangles rectangles DAF et DBI sont semblables, et donnent

$$\frac{AF}{BI} = \frac{AD}{BD}$$

d'où

$$(2) \qquad AF = \frac{BI \times AD}{BD}$$

Divisant maintenant, membre à membre, les égalités (1) et (2), il vient

$$\frac{AF}{AH} = \frac{BI \times AD \times 2\,R}{BD\left(\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2\right)}$$

Mais le rapport de AF à AH est connu, représentons-le par le rapport de deux lignes données M et N; alors, on tire de l'égalité précédente dans laquelle on a mis $\frac{M}{N}$ à la place de $\frac{AF}{AH}$

$$\frac{\overline{BD}^2}{AD} - AD = \frac{2\,R \times BI \times N}{M \times BD}$$

Le second membre peut être construit par des troisièmes proportionnelles, et représenté par une droite connue P : on a donc

$$\frac{\overline{BD}^2}{AD} - AD = P$$

On est ainsi ramené à trouver deux droites, connaissant leur produit $\overline{BD}^2$ et leur différence P. Les deux droites étant obtenues par la construction ordinaire, la plus petite sera la droite AD : alors la solution du problème proposé s'achèvera comme dans le problème précédent.

Discussion. Il résulte de la construction même que le problème est toujours possible et n'a qu'une solution, mais on peut aussi le voir d'une manière directe.

En effet, si on suppose donnés le côté BC, et l'angle A ; après avoir fixé la position de BC, le sommet A se déplacera sur un arc connu BAC, en allant, par exemple, de C vers D. Il est évident, d'abord, que la hauteur, commençant par être nulle, ira en croissant jusqu'à ce qu'elle atteigne sa valeur maximum DI.

Pour voir maintenant comment varie la différence AB — AC, on prend sur AB une longueur AK égale à AC, et on mène CK. L'angle CKB étant égal à $90° + \frac{A}{2}$ est obtus ; et si on fait passer un cercle par les trois points B, C, K, on voit que BK est une corde qui va en s'éloignant du centre quand le point A marche de C en D. La différence CK entre AB et AC va donc en diminuant depuis AB jusqu'à zéro.

Il résulte, de ce qui précède, que le rapport $\frac{AB - AC}{AH}$ diminue, pour une double raison, depuis l'infini jusqu'à zéro, et par conséquent, il y a toujours un triangle et un seul dans lequel les trois quantités BC, A et $\frac{AB - AC}{AH}$ ont des valeurs déterminées.

PROBLÈME IX.

197. *Construire un triangle* ABC, *connaissant un côté* BC, *l'angle opposé* A, *et la somme de la différence* AB — AC *des deux autres côtés et de la hauteur* AH *partant du sommet de l'angle donné.*

Fermat, en envoyant à *Pascal* la solution du problème précédent, ajoute ces mots.

Pour que la question ne vous paraisse pas être restée stérile entre mes mains, je vous propose de construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé, et la somme, la différence, ou le produit des quantités dont vous m'avez donné le quotient.

Pascal n'a pas répondu à Fermat, ou du moins sa réponse, si elle a eu lieu, n'a pas été conservée; mais nous allons voir que la méthode de Fermat s'applique très-bien au premier problème ; nous dirons ensuite un mot des deux autres.

Comme dans le problème précédent, on a toujours les égalités

$$(1) \qquad 2\,R \times AH = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

$$(2) \qquad AF = \frac{BI \times AD}{BD}$$

Divisant les deux membres de la première par 2R, doublant les deux membres de la seconde, et ajoutant, membre à membre, il vient

$$AH + 2\,AF = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2\,R} + \frac{2\,BI \times AD}{BD}$$

Représentant la somme donnée $AH + 2\,AF$ par d, l'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$AD + \frac{2\,Rd - \overline{BD}^2}{AD} = \frac{4\,R \times BI}{BD}$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que $\overline{BD}^2$ est plus petit ou plus grand que $2Rd$. (On s'assure par des considérations géométriques très-simples que les deux cas sont également possibles).

Si $\overline{BD}^2$ est plus petit que $2Rd$, on construit une ligne M dont le carré soit égal à $2Rd - \overline{BD}^2$, et une ligne P qui représente $\frac{4R \times BI}{BD}$, alors la dernière équation peut s'écrire

$$AD + \frac{M^2}{AD} = P$$

Et on est ramené à trouver deux droites connaissant leur somme et leur produit.

On prouverait de la même manière que, dans le cas où $\overline{BD}^2$ est plus grand que $2Rd$, on est ramené à trouver deux droites connaissant leur différence et leur produit. La droite AD étant connue, on achève la construction comme dans le problème de Pascal.

Nous ne donnerons pas ici la discussion du problème qui ne peut guère se faire qu'en faisant intervenir l'algèbre ou la trigonométrie (*).

Le cas où l'on se donnerait la différence entre les quantités AB — AC et AH se traiterait, tout-à-fait, de la même manière que le précédent ; mais si on se donne le produit des mêmes quantités, le problème ne peut pas être résolu avec la règle et le compas.

Le problème de Pascal conduit naturellement à se poser le problème suivant.

PROBLÈME X.

198. *Construire un triangle* ABC (fig. 133), *connaissant un côté* BC, *l'angle opposé* A *et le rapport de la somme* AB + AC *à la hauteur* AH.

Menons le diamètre AG du point A et tirons la droite DG ; les triangles semblables BDF et DGA donnent

$$BF = \frac{BD}{2R} \times DG$$

mais on a, comme dans le problème précédent,

$$AH \times 2R = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

et, en remplaçant dans cette égalité $\overline{AD}^2$ par $4R^2 - \overline{DG}^2$, il vient

$$AH \times 2R = \overline{BD}^2 - 4R^2 + \overline{DG}^2$$

K étant le milieu de l'arc BGC, si l'on tire la droite DK, on aura

$$4R^2 - \overline{BD}^2 = BK^2$$

et, par suite,

$$AH = \frac{\overline{DG}^2 - \overline{BK}^2}{2R}$$

(*) Voir, pour la discussion du problème par la trigonométrie, le complément de l'ouvrage qui a pour titre : *Théorie nouvelle des Normales* (Desboves).

Maintenant, si l'on se rappelle que BF est la demi-somme des côtés, on voit que le rapport de AH à BF est connu : représentons-le par celui de deux lignes M et N. En divisant, membre à membre, les égalités qui donnent AH et BF, il viendra

$$\frac{AH}{BF} = \frac{\overline{DG}^2 - \overline{BK}^2}{DG \times BD} = \frac{M}{N}$$

d'où l'on tire facilement

$$DG - \frac{\overline{BK}^2}{DG} = \frac{BD \times M}{N}$$

Et on est ramené à trouver deux droites, connaissant leur différence et leur produit : la longueur DG étant connue, on aura le point G, et, par suite, le point diamétralement opposé A.

Remarque. Si l'on remplaçait le rapport donné par une somme ou une différence, on serait encore ramené, comme dans le problème de Pascal, à trouver deux droites, connaissant leur produit, et leur somme ou leur différence.

PROBLÈME XI.

199. *Construire un triangle* ABC *connaissant un côté* BC, *la hauteur correspondante* AH *et la différence des angles* B *et* C *adjacents au côté donné* (Concours).

Première solution. On se donne la position de BC (fig. 134); on a alors un premier lieu du point C qui est une parallèle LM à BC, menée à une distance de cette droite égale à AH. Nous allons maintenant chercher un second lieu.

Mettons, d'abord, en évidence, sur la figure, la différence donnée des angles. Pour cela, élevons une perpendiculaire à BC en son milieu E ; cette droite rencontrera AC et LM en I et F, et si l'on tire la droite BI qui coupe LM en D, l'angle ABD sera évidemment égal à la différence des angles B et C.

Si maintenant nous prolongeons BF d'une longueur FG égale à BF, et que nous menions GA et GD, la figure ABDG est un parallélogramme, et l'angle GAB est supplémentaire de l'angle ABD : le second lieu demandé sera donc l'arc qui a pour corde BC et qui est capable d'un angle égal au supplément de la différence entre les angles donnés. Le point A où l'arc coupera LM sera donc le troisième sommet demandé.

Deuxième solution. On se donne toujours BC de position, et on construit la droite LM comme dans le problème précédent. Maintenant, on sait que la bissectrice AD de l'angle A (fig. 135) fait avec BC un angle aigu ADB complémentaire de la demi-différence des angles B et C; de là, il résulte que la direction, et, par suite, la grandeur de la bissectrice sont connues : car si, d'un point F quelconque de LM, on mène une droite FG qui fasse avec BC un angle FGB égal au complément de la demi-différence des angles B et C, la bissectrice AD sera égale et parallèle à FG.

La perpendiculaire FK à FG sera aussi égale et parallèle à la bissectrice AE de l'angle BAI extérieur au triangle, et les droites GK et DE seront égales.

Mais O étant le milieu de BC et les quatre points B,C,E,D formant une division harmonique, on a

$$OE \times OD = \overline{OB}^2$$

Mais on a aussi

$$OE - OD = ED = GK$$

On est donc ramené à trouver deux droites connaissant leur différence et leur produit.

La droite OD étant connue, on portera, de O vers B, une longueur OD égale à cette droite, et par le point D on mènera une parallèle DA à FG; le point A où cette parallèle coupera LM sera le sommet cherché.

Troisième solution. Ayant commencé la figure comme dans la première solution, traçons le cercle circonscrit au triangle ABC (fig. 136), puis menons en A la tangente GF à ce cercle. Les angles FAD, ABD sont égaux, parce qu'ils ont même mesure; et comme ABD est la différence donnée des angles B et C, la direction et la longueur de AG sont connues : mais on a

$$GB \times GC = \overline{AG}^2$$
$$GC - GB = BC$$

On est donc encore ramené à trouver deux droites connaissant leur différence et leur produit; la longueur de GC étant connue, on achève ensuite facilement le problème.

Quatrième solution. Ayant fait la même figure que dans le premier cas, abaissons du point I (fig. 137) IN perpendiculaire sur AB. Tout revient à la détermination du point auxiliaire N; car ce point étant connu, on le joindra par une droite au point B, et on prolongera BN jusqu'à sa rencontre en A avec LN. Il ne restera plus alors qu'à mener AC pour avoir le triangle demandé.

Cela posé, tirons NF et NE : dans le quadrilatère inscriptible NIEB les angles NEI et NBI sont égaux; l'angle NEI est donc égal à la différence donnée, et, par suite, le point N se trouve sur une droite connue EN; dans le même quadrilatère, on a aussi les angles INE, IBE égaux.

D'autre part, on voit que dans le quadrilatère inscriptible NAFI les angles FNI et FAI sont égaux; mais comme on a

$$\widehat{FAI} = \widehat{ICE} = \widehat{IBE}$$

Les angles FNI, IBE sont aussi égaux, et, par suite, il en est de même des angles FNI et INE. De là résulte que NI est la bissectrice de l'angle FNE, et que la droite AB, perpendiculaire à NI, est la bissectrice de l'angle ENK formé par EN et le prolongement NK de NF. Par conséquent, le point B est à égale distance des droites EN et FK.

Si donc, du point B, on abaisse BP perpendiculaire sur droite connue EN, que, du point B comme centre, avec BP comme rayon, on décrive un cercle, que du point F, on mène une tangente FK à ce cercle; le point M où cette tangente rencontrera la droite FN, sera le point demandé.

Cinquième solution. Si l'on prend le triangle ABD (fig. 134) comme triangle auxiliaire à construire, la question peut être posée ainsi : *étant donnés une droite indéfinie* LM, *un point* F *sur cette droite, et un point* B *qui lui soit extérieur; mener par le point* B *deux droites* AB *et* AD *qui fassent entr'elles un angle donné, et telles que les deux segments* AF *et* AD *soient égaux entr'eux.* On peut donner une solution toute pareille à la troisième solution du problème IV (195), seulement, comme l'angle A (que nous appelons G dans la (fig. 43) est un angle connu, au lieu d'achever la solution comme dans le problème cité, on est finalement conduit à mener par le point E une sécante EAB telle que, la partie interceptée dans un cercle donné ait une longueur connue.

Sixième solution. Prenons le même énoncé transformé que dans la solution précédente. Si nous supposons que l'angle B (fig. 134) tourne autour du point B, et que ses côtés soient prolongés jusqu'à la rencontre de LM, nous avons une suite de triangles qui auront même hauteur, et un angle constant. Ils seront donc, entr'eux, à la fois, comme leurs bases et comme les produits des côtés qui comprennent l'angle donné. On en conclut qu'en désignant par M une droite donnée, on a

$$BD \times AB = AD \times M$$

on a aussi

$$\overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 = 2\,AD \times BE$$

et en divisant, membre à membre, il vient

$$\frac{BD}{AB} - \frac{AB}{BD} = \frac{M}{BC}$$

Mais, si l'on représente par X la quantité $\frac{BD \times BC}{AB}$, l'égalité précédente pourra s'écrire

$$X - \frac{\overline{BC}^2}{X} = M$$

et l'on est ramené à trouver deux droites, connaissant leur différence M et leur produit $\overline{BC}^2$. La droite X étant construite, on connaît le rapport de BD à AB, et, comme l'angle ABD est donné, le triangle ABD est semblable à un triangle connu, et on achève la solution, en menant par le point B une droite faisant un angle donné avec LM.

Remarque. Dans le triangle ABD, on connaît un angle, la médiane et la hauteur partant de son sommet; alors la première et les deux dernières solutions du problème XII peuvent être considérées comme trois solutions du nouveau problème.

PROBLÈME XII.

200. *Construire un triangle* ABC (fig. 138), *connaissant le produit* K^2 *de deux côtés* AB *et* AC, *la différence des angles* B *et* C *adjacents au troisième côté* BC, *et la médiane* AE *qui correspond à ce côté.*

Première solution. Ayant construit la même figure que dans la première solution du problème précédent, on voit que toute la difficulté se réduit à construire le triangle auxiliaire ABD; mais comme l'angle ABD est donné, si on pouvait déterminer la hauteur EF et la moitié AF de la base dans le triangle ABD, on serait immédiatement ramené à un problème connu.

AE étant la médiane donnée dans le triangle demandé ABC, on a

$$\overline{FE}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{AE}^2$$

faisant maintenant un angle ABD égal à la différence donnée, prenant, sur les deux côtés de l'angle, des longueurs égales BG et BK, puis tirant GK, on a un triangle GBK que l'on compare au triangle ABD. On a, d'abord,

$$\frac{ABD}{BGK} = \frac{AB \times BD}{\overline{BG}^2} = \frac{K^2}{\overline{BG}^2}$$

D'autre part, si nous représentons par m le côté d'un carré équivalent au double du triangle BGK, il vient

$$\frac{\text{ABD}}{\text{BGK}} = \frac{2\,\text{AF} \times \text{FE}}{m^2}$$

et par suite, on a

$$(2) \qquad 2\,\text{FE} \times \text{AF} = \frac{m^2\,\text{K}^2}{\overline{\text{DG}}^2}$$

ajoutant et retranchant, membre à membre, les égalités (1) et (2), puis extrayant les racines carrées des deux membres, il vient

$$\text{FE} + \text{AF} = \sqrt{\overline{\text{AE}}^2 + \frac{m^2\,\text{K}^2}{\overline{\text{DG}}^2}}$$

et l'on est ramené à trouver deux droites connaissant leur somme et leur produit. Comme la plus petite des deux droites obtenues peut être prise indifféremment pour la moitié de la base ou la hauteur, il en résulte que le problème a, en général, deux solutions.

Deuxième solution. Ayant fait la même construction que pour le problème IV (195), on remarque, d'abord, que l'angle DGF (fig. 131) est égal à l'angle FAE, c'est-à-dire, à la moitié de la différence donnée. Si, ensuite, on circonscrit au triangle DGF un cercle qui coupe en I le prolongement de la médiane AD, on voit, par la mesure de l'angle DIG, que cet angle est égal à la demi-différence donnée, augmentée de 90°; on remarque aussi que l'on a

$$\text{AI} \times \text{AD} = \text{AG} \times \text{AF} = \text{AB} \times \text{AC} = \text{K}^2$$

De là on déduit facilement la construction suivante:

Sur la médiane AD, comme corde, décrivez un arc capable de l'angle égal à la demi-différence donnée; prenez, sur la médiane AD prolongée, un point I tel, que AI soit une troisième proportionnelle à AD et K; par le point I, menez la droite IG qui fait avec AD un angle égal à la demi-différence donnée augmentée de 90°; déterminez l'un des points G où cette droite coupe l'arc précédemment décrit; puis tirez les droites AG et

DG; élevez une perpendiculaire BC à la seconde, au point D, et une perpendiculaire à la première, en son milieu; du point d'intersection O de ces perpendiculaires, comme centre, et avec OA comme rayon, décrivez un cercle qui coupe BC aux points B et C; et enfin tirez AB et AC : le triangle ABC sera le triangle demandé.

On aura une seconde solution, en prenant le second point de rencontre de IG et de l'arc capable.

PROBLÈME XIII.

201. *Construire un triangle* ABC, *connaissant l'angle* A *et les sommes qu'on obtient, en ajoutant le côté* BC *opposé à l'angle donné, successivement, aux deux autres côtés* (Concours).

Première solution. Prolongeons (fig. 139) AB et AC de longueurs BD et CE, respectivement, égales à BC; menons DE, et prolongeons les deux droites DE et BC jusqu'à leur rencontre en F; tirons aussi CL parallèle à AB : les triangles semblables FCL et FBD, CLE et ADE donnent

$$\frac{FB}{FC}=\frac{BD}{CL} \qquad \frac{CE}{CL}=\frac{AE}{AB}$$

Et, comme les longueurs BD et CE sont égales, on a

$$\frac{FB}{FC}=\frac{AE}{AD}$$

et, par suite,

$$\frac{BC}{FC}=\frac{AE-AD}{AD}$$

Menons maintenant, par le point A, AK parallèle à BC; les deux triangles semblables ECF, AEK donnent

$$\frac{CE}{FC}=\frac{AE}{AK}$$

Mais la droite CE étant égale à BC, les premiers membres des dernières égalités sont égaux, et il en est aussi de même des seconds : on a, par conséquent,

$$\frac{AE}{AK}=\frac{AE-AD}{AD}$$

d'où
$$AK = \frac{AE \times AD}{AE - AD}$$

On peut donc obtenir AK comme quatrième proportionnelle à des droites données, et l'on est conduit à la construction suivante :

Après avoir déterminé le triangle ADE, décrivez du point A, comme centre, avec AK comme rayon, un cercle qui coupe DE prolongée, en un point K situé à droite de E, menez AK, prenez sur cette droite une longueur AI égale à AD, tirez DI, puis enfin, par le point C où cette droite rencontre AE, menez BC parallèle à AK.

Discussion. En menant par le point B une parallèle à DE, on voit, d'abord, que le prolongement de BC doit rencontrer la ligne indéfinie DE, à droite du sommet E opposé à la plus petite des deux droites AD et AE. Cela posé, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la longueur AK soit plus grande que AE. Mais, en remplaçant AK par la valeur trouvée plus haut, on arrive à la condition

$$AE < 2\,AD$$

On pouvait savoir d'avance que la condition précédente était nécessaire. En effet, on a

$$BC < AB + AC$$
$$BC + AC < AB + 2\,AC < 2\,AB + 2\,AC$$
ou
$$AE < 2\,AD$$

Deuxième solution. Ayant construit le triangle ADE, comme dans la solution précédente, menons par les points B et E (fig. 140) deux droites BH et EH, respectivement, parallèles à AE et BC ; nous obtiendrons ainsi un losange BCEH. Tirons maintenant la droite DH que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en F avec AE ; puis menons la parallèle FG à EH. Les triangles semblables DFG, DEH donnent

$$\frac{FG}{EH} = \frac{DF}{DH}$$

On a aussi, par les triangles semblables AFD, BDH,

$$\frac{AF}{BH} = \frac{DF}{DH}$$

Mais, comme les droites EH et BH sont égales, on conclut des égalités précédentes qu'il en est de même de FG et AF. D'ailleurs, la droite AF est égale à AD, puisque le triangle ADF est isocèle comme le triangle BDH auquel il est semblable, la droite FG est donc égale à AD, et l'on peut donner la solution suivante :

Ayant d'abord construit le triangle ADE, prenez, sur le plus grand des deux côtés qui comprennent l'angle A, une longueur AF égale à l'autre côté AD et tirez DF : alors, du point F comme centre, avec AF comme rayon, décrivez un cercle et déterminez le point G, à droite de E, où il coupe le prolongement de DE ; tirez FG ; puis menez, par le point E, la droite EH parallèle à FG, par le point H, la droite HB parallèle à AE, et enfin, par le point B, la droite BC parallèle à EH.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on ait :

$$FG > FE$$

ou $$AD > AE - AD \quad AE > 2\,AD$$

c'est la condition que nous avons déjà obtenue.

Troisième solution. Ayant toujours construit le triangle ADE, abaissons des points D et E (fig. 141) les droites DP, EQ, DH et EK, respectivement, perpendiculaires, les deux premières, sur BC, les deux autres, sur AE et AD ; puis formons deux expressions de la surface du quadrilatère DBCE, en le décomposant en deux triangles par les diagonales DC et DE : alors, en observant que les trois droites BD, CE et BC sont égales, il viendra

$$BC \times (DP + DH) = BC \times (EQ + EK)$$

d'où l'on déduit

$$DP - EQ = EK - DH$$

Cela posé, menons par le point E la droite EI parallèle à BC, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en I avec DP, nous aurons

$$DI = DP - EQ = EK - DH.$$

Donc, si, du point D comme centre, avec la différence EK—DH comme rayon, on décrit un cercle, et que, du point E, on lui mène une tangente EI, on connaîtra la direction de BC ; et si l'on tire, par le point A, une parallèle à EI, on achèvera la construction comme dans la première solution.

Généralisation. Si l'on ajoutait au côté a les produits de b et c par des nombres quelconques m et n, les trois solutions que nous avons données s'appliqueraient encore, avec de légères modifications.

On pourrait encore retrancher de a les produits mb et mc.

CONSTRUCTION DE QUADRILATÈRES.

PROBLÈME I.

202. *Construire un quadrilatère* ABCD (fig. 142), *connaissant les quatre côtés et la droite* EF *qui joint les milieux des côtés opposés* AD *et* BC.

Tirons la droite DE et prolongeons-la d'une longueur égale EG ; menons ensuite BG, AG, et une parallèle à BC, la droite DH qui rencontre en H la droite BG prolongée : on aura

$$BG = DC \quad AG = 2\,EF \quad HB = DC \quad DH = BC$$

de là on déduit la solution suivante :

Construisez un triangle ABG, dont deux côtés AB et BG soient égaux aux côtés opposés AB et DC, et, le troisième, double de EF; prolongez BG d'une longueur égale HB; des points A et H comme centres, avec des rayons égaux aux côtés opposés AD et BC, décrivez deux arcs de cercle qui se coupent en D ; menez enfin DC égale et parallèle à BC : le quadrilatère ABCD sera le quadrilatère demandé.

PROBLÈME II.

203. *Construire un quadrilatère* ABCD (fig. 143), *connaissant les quatre côtés et la droite* EF *qui joint les milieux des diagonales.*

En menant des droites par les milieux E et F des diagonales et les milieux I,G,H,K des côtés, on forme deux parallélogrammes EGFK,EIFH, qui ont la diagonale commune EF et dont les côtés sont les moitiés de ceux du quadrilatère. Alors, si l'on se donne de position la droite EF, on construira facilement les deux parallélogrammes, et en menant par les quatre sommets I,G,H,K des droites, respectivement, parallèles aux droites EK,IF,FK,FH, on aura le quadrilatère demandé.

On pourra, comme exercice, chercher une démonstration synthétique de la construction précédente.

PROBLÈME III.

204. *Construire un quadrilatère inscriptible* ABCD (fig. 144), *connaissant ses côtés.*

Prenons, sur le prolongement d'un des côtés AB, un point E tel que l'on ait

$$\frac{BE}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

et tirons les deux droites AC et CE : le quadrilatère étant inscriptible, les angles ADC,CBE sont égaux, et les deux triangles CBE, ADC sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels : on a donc

$$\frac{AC}{CE} = \frac{DC}{BC}$$

cela posé, donnons-nous AB de position, et proposons-nous de déterminer le sommet C. La circonférence décrite, de B comme centre, avec BC pour rayon, est un premier lieu du point. On en a aussi un second qui est encore une circonférence, puisque le rapport des distances du point C aux deux points A et E est égal au rapport des côtés DC et BC. Le point C est, par conséquent, à la rencontre de deux cercles connus. Ce point étant déterminé, on achèvera la construction de la manière suivante :

On tirera les droites CA et CE, on fera l'angle DCA égal à l'angle BCE, puis on prendra, sur la dernière droite qu'on vient de déterminer, une longueur égale au côté DC, et enfin on mènera AD.

Discussion. Ayant décrit la demi-circonférence FCG qui est le second lieu que nous avons déterminé plus haut, tout revient à exprimer que le rayon BC de l'autre circonférence est compris entre BF et BG ; car, s'il en est ainsi, les deux lieux se couperont, et, une fois le point C déterminé, la construction peut toujours s'achever.

Soient $a,b\ c,d$ les quatre côtés AD,DC,CB,AB : nous allons exprimer BF et BG en fonction des quantités $a,b\ c,d$: dans le cas de la figure, on a

$$\frac{AF}{FE}=\frac{b}{c} \qquad \frac{AE}{FE}=\frac{b+c}{c} \qquad \frac{AB+BE}{BF+BE}=\frac{b+c}{c}$$

mais, d'après la proportion qui a servi à déterminer la position du point E, on a aussi

$$BE=\frac{ac}{b}$$

mettant cette valeur de BE dans l'égalité précédente, et résolvant par rapport à BF, il vient

$$BF=\frac{c\,(d-a)}{b+c}$$

un calcul analogue donnera

$$BG=\frac{c\,(d+a)}{b-c}$$

On voit d'abord que la distance BF est plus petite que BG, et si l'on exprime que le côté c est plus grand que BF, mais plus petit que BG, on arrive aux deux conditions suivantes :

$$d<a+b+c \qquad b<a+c+d$$

le cas de figure supposait que a et c étaient, respectivement, plus petits que d et b ; mais en examinant les autres hypothèses que l'on peut faire sur l'ordre de grandeur des quantités a,b,c,d, on serait conduit aux nouvelles conditions

$$a<b+c+d \qquad d<a+b+c$$

donc, en résumé, pour que l'on puisse construire, avec quatre côtés donnés, un quadrilatère inscriptible et convexe, il faut et il suffit que chacun des côtés soit plus petit que la somme des trois autres, ou, plus simplement, que le plus grand côté soit plus petit que la somme des trois autres.

PROBLÈME IV.

205. *Construire un quadrilatère* ABCD (fig. 145), *connaissant la surface, le côté* AB, *en grandeur et en position, le côté opposé* DC, *en grandeur et direction, et sachant que le sommet* D *se trouve sur une droite donnée* LM.

Laissons de côté la dernière condition, tout revient alors à trouver le lieu du sommet D.

A cet effet, menons, par le point B, la droite BE égale et parallèle à DC, puis tirons les droites CE, DE et DB : les triangles DBE et DCE, qui ont même base DB et même hauteur, sont équivalents, et, par suite, la surface du quadrilatère ABDE est constante. Mais cette surface est égale à la somme des produits des droites AB et BE par leurs distances au point D ; et, comme les droites AB et DE sont connues en position, on est ramené *au lieu du point* D, *tel que la somme des produits de ces distances à deux droites fixes par des nombres donnés est une quantité constante.* Or ce lieu, quand on ne considère que les points situés dans un des angles formés par les deux droites, est une droite, comme on l'a vu au n° (160).

Remarque. Le sommet C est évidemment situé sur une droite parallèle à celle que décrit le point D, et on voit aussi facilement que le centre des moyennes distances des quatre sommets est toujours sur une droite parallèle à celle que décrivent les sommets C et D, et à égale distance de chacune d'elles. On pouvait donc, dans l'énoncé précédent, remplacer le sommet D par le centre des moyennes distances des sommets.

PROBLÈME V.

206. *Construire un quadrilatère* ACC′A′ (fig. 146) *qui soit tel, que le point de rencontre* E *de ses diagonales soit situé sur une droite donnée* LM, *et qui, de plus, satisfasse aux trois premières conditions de l'énoncé précédent.*

D'après le problème précédent, on sait qu'en vertu des trois dernières conditions, si AA′ est le côté fixe, le sommet C décrit une droite, représentons-la par GK.

Menons, par les points A et C′, les droites AK et C′G parallèles à LM, et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre en G et K avec la droite GK : soient aussi EI parallèle à GK, et FH une parallèle à la diagonale AC′, menée par le point d'intersection F de GK et LM ; on prolonge, d'ailleurs, la dernière droite jusqu'à ce qu'elle rencontre en H la droite C′G prolongée.

Nous allons ramener la question à déterminer la longueur AI : dès que cette longueur sera connue, le point I sera déterminé, et on aura le point E par la rencontre de LM et d'une parallèle à KG menée par le point I ; le point E étant obtenu, on achève ensuite facilement le quadrilatère.

Cela posé, les deux triangles semblables FGH, EIA donnent

$$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{EI}} = \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AI}}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{GK}}{\mathrm{EI}} = \frac{\mathrm{GH} + \mathrm{AI}}{\mathrm{AI}}$$

mais EI est constant, et il en est de même de GH + AI, car on a

$$\mathrm{GH} + \mathrm{AI} = \mathrm{C'G} + \mathrm{EF} + \mathrm{AI} = \mathrm{C'G} + \mathrm{AK}$$

on a alors, en désignant par a une droite connue

$$\mathrm{GK} = \frac{a^2}{\mathrm{AI}}$$

Si maintenant on appelle G′, K′ et I′ les points qui sont analogues à G, I, K et qu'on obtient, lorsque, dans les constructions précédentes, on remplace A par A′, et qu'on permute les points C et C′, on aura, a' étant une constante,

$$G'K' = \frac{a'^2}{A'I'}$$

mais, comme CG est constant, la différence entre GK et G′K′ est aussi constante ; représentons-la par d, il viendra

$$\frac{a^2}{AI} - \frac{a'^2}{A'I'} = d$$

en chassant les dénominateurs et posant

$$\frac{a^2}{d} = M \qquad \frac{a'^2}{d} = M'$$

l'équation précédente devient

$$AI \times A'I' - M' \times AI + M \times A'I' = 0$$

ou

$$(M + AI) \quad (M' - A'I') = MM'$$

en posant

$$M + AI = X \quad M' - A'I' = Y$$

il vient enfin

$$XY = MM'$$

et comme la différence ou la somme de A′I′ et AI est connue, on est ramené à trouver deux droites X et Y, connaissant leur produit et leur somme ou leur différence.

PROBLÈMES SUR LES CERCLES.

Nous allons maintenant donner quelques problèmes sur les cercles, en choisissant, de préférence, comme nous l'avons déjà fait pour les triangles, les problèmes qu'on peut traiter d'une manière élégante par la trigonométrie.

PROBLÈME I.

207. *Etant donné un cercle dont le centre est* O (fig. 147) *et deux tangentes en* D *et* E *qui se coupent en* A, *on propose de mener une troisième tangente* BC *qui coupe les deux premières en* B *et* C, *et satisfasse à l'une des conditions suivantes :*

la longueur de BC *est donnée, ou bien on connaît la somme, la différence, le produit ou le quotient des deux segments* AB *et* AC.

1° *On donne* BC. Le périmètre du triangle ABC est, comme on sait, égal à 2AD ; on est donc ramené à construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et le périmètre (193).

Remarque. Si l'on suppose tracé le cercle inscrit au triangle ABC, et que K et L soient ses points de contact avec AD et AC, on sait que les segments DK et EL sont égaux à BC. D'après cela, on voit que le problème revient à mener une tangente commune à deux cercles connus, et qu'ainsi on peut faire toute la construction sur la figure donnée elle-même.

2° *On donne la somme de* AB *et de* AC. En retranchant cette somme du périmètre 2AD du triangle ABC, on connaît BC, et l'on est ramené au premier cas.

3° *On donne le quotient de* AB *par* AC. Le triangle ABC est semblable à un triangle connu ; on peut donc construire l'angle ABC, et l'on est ramené au problème de tracer une tangente BC parallèle à une direction donnée.

4° *On donne le produit* K^2 *des côtés.*

Première solution. Désignons par m le côté du carré équivalent au triangle ABD : alors, observant que le cercle donné est ex-inscrit par rapport au triangle ABC, et adoptant les notations ordinaires, on a

$$\frac{(p-a)\,r}{m^2} = \frac{K^2}{\overline{AD}^2}$$

d'où

$$p - a = \frac{m^2\,K^2}{\overline{AD}^2 \times r}$$

On pourra construire la droite $p-a$, et en la retranchant de p, on aura a, c'est-à-dire, BC ; on est donc encore ramené au premier cas.

Deuxième solution. Menons par le centre O la droite FG parallèle à DE ; en appliquant le théorème VIII (110), on aura

$$BF \times CG = \overline{OF}^2$$

Et en remarquant que les droites BF et CG sont, respectivement, égales à AF—AB et AF—AC, il vient

$$\overline{AF}^2 - (AB + AC) \times AB + K^2 = \overline{OF}^2$$

Cette dernière égalité fait connaître une droite égale à AB + AC ; on est donc ramené à trouver deux droites AB et AC connaissant leur somme et leur produit.

5° *On donne la différence* M *des côtés* AB *et* AC.

Première solution. On a évidemment

$$CG - BF = AB - AC = M$$

En appliquant le même théorème, que plus haut, on est ramené à trouver deux droites, connaissant leur différence et leur produit.

Deuxième solution. On a :

$$AB + BC + AC = 2\,BD \qquad AB - AC = M$$

Ajoutant et retranchant, membre à membre, il vient

$$BC + 2\,AB = 2\,AD + M$$
$$BC + 2\,AC = 2\,AD - M$$

On est ainsi ramené au problème XIII généralisé (204).

PROBLÈME II.

208. *Inscrire dans un cercle donné un triangle dont les côtés passent par trois points quelconques donnés.*

Premier cas. *L'un des points est à l'infini, c'est-à-dire, que l'un des côtés du triangle demandé doit être parallèle à une direction donnée.* Soit ABC (fig. 148) le triangle demandé ; les deux côtés AB et AC passent par les deux points donnés F et E, et le côté BC est parallèle à la direction FL.

Par le point B, menons la droite BH parallèle à EF, et H étant le point de rencontre de BH avec le cercle, tirons HC que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en G avec EF ; puis enfin, du point E, menons EK tangente au cercle.

Les deux triangles ECG,AEF qui ont l'angle E commun et les deux angles EGH,EAF égaux, sont semblables et donnent

$$EA \times EC = EG \times EF$$

mais on a
$$EA \times EC = \overline{EK}^2$$

donc
$$EG = \frac{\overline{EK}^2}{EF}$$

On peut donc construire EG et, par suite, connaître le point G.

Remarquons maintenant que la ligne HC est la corde d'un arc HC qui est intercepté entre les côtés d'un angle HBC égal à l'angle connu EFL ; on aura, par suite, la longueur de HC, en menant, d'un point quelconque du cercle, deux cordes faisant entr'elles un angle égal à EFL, et tirant une droite par les secondes extrémités de ces cordes.

Cela posé, on pourra déterminer le point C, en menant, du point G, une sécante GCH telle, que la partie CH comprise dans le cercle soit égale à une longueur donnée : le point C étant connu, on construit facilement le triangle demandé.

Remarque. Si la direction de BC se confondait avec EF, le point H se confondrait lui-même avec le point C, et on serait conduit à mener une tangente au cercle par le point G, déterminé comme il a été fait plus haut : c'est ce qu'on établit facilement d'une manière directe.

Deuxième cas. *Les trois points sont quelconques.* Nous allons voir que le cas général se ramène au cas particulier que nous venons de traiter.

Soit ABC (fig. 148) le triangle donné, et D,E,F les trois points par lesquels les côtés doivent passer. Menons la droite EF qui joint deux des points, et, par le point B, tirons la droite BH parallèle à EF.

Si on tire la droite CH, et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en G avec EF, on pourra déterminer le point G comme plus haut : on a alors un triangle HCB dont les côtés HC et DB passent par deux points fixes G et D, tandis que le troisième côté BH est parallèle à une droite donnée.

On peut construire le triangle HCB, d'après le cas précédent, et il ne reste plus qu'à déterminer le sommet A : c'est ce que l'on fait, en menant la droite EC et la prolongeant jusqu'à sa rencontre en A avec le cercle.

PROBLÈME III.

209. *Inscrire à un cercle donné un polygone dont les côtés passent par des points donnés.*

Premier cas. *Tous les points, excepté un, sont à l'infini*, c'est-à-dire, que tous les côtés sont parallèles à des directions données, excepté un seul côté qui passe par un point donné.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Si dans un même cercle on inscrit deux lignes brisées d'un nombre de côtés pair, et dont les côtés sont respectivement parallèles et de même sens, les arcs circonscrits aux deux lignes seront égaux,

En effet, il est facile de voir que les sommes des angles de rang impair, dans les deux brisées, se mesurent de la manière, au moyen des deux arcs, et, par suite, les arcs sont égaux en même temps que les deux sommes.

Revenons maintenant au cas proposé, et supposons, d'abord, que le nombre des côtés du polygone cherché est impair.

En commençant par un point quelconque du cercle donné, on inscrit une ligne polygonale dont les côtés sont, respectivement, parallèles aux directions données. Alors, en vertu du lemme, les arcs, sous-tendus par les derniers côtés de la ligne brisée et du polygone, sont égaux, et, par suite, ces côtés eux-mêmes le sont aussi ; on est donc ramené à ce problème connu : *Par un point donné mener une corde d'un cercle, qui soit de longueur donnée.*

Lorsque le nombre des côtés est pair, on construit encore une brisée satisfaisant aux mêmes conditions que plus haut, et on tire une droite qui la ferme : alors, en vertu du lemme, l'angle formé par cette droite et l'un des côtés adjacents a même mesure que l'angle des côtés correspondants dans le polygone cherché. On a ainsi deux angles égaux dont deux côtés sont parallèles, et, par conséquent, les deux autres côtés le sont aussi.

Il résulte de ce qui précède que le dernier côté du polygone cherché qui passe par un point fixe est connu de direction, il peut donc être déterminé et, par suite, le problème est résolu.

Deuxième cas. *Les points donnés sont tous à des distances finies.* Ce cas se ramène facilement au précédent.

En effet, considérons (fig. 149) deux côtés consécutifs AB et BC d'un polygone ABCD... inscrit dans un cercle ; L et M étant les points fixes par lesquels passent les deux côtés, tirons la droite LM, menons, par le point C, la corde CC' parallèle à cette dernière droite, puis faisons passer par les points A et C' une droite AC' que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en P avec LM.

Cela posé, les angles LPA, LBM étant égaux entr'eux, comme égaux, respectivement, à l'angle C', les triangles LAP, LBM sont semblables et donnent

$$LP \times LM = LA \times LB$$

et, comme le produit $LA \times LB$ est la puissance connue du point L, le point P est déterminé.

Au polygone proposé, on peut maintenant substituer un polygone dans lequel les côtés CC' et AC', l'un parallèle à une direction donnée, l'autre passant par le point fixe P, remplaçent les côtés AB et BC. Dans le nouveau polygone, on pourra faire la même transformation, et en continuant toujours, de même, on finira par tomber sur un polygone, dont tous les côtés seront parallèles à des droites données, excepté un seul qui passera par un point fixe: on sera donc ramené au premier cas.

PROBLÈME IV.

210. *Etant donnés deux points* A *et* B, *trouver, sur la droite indéfinie* XY *qui passe par ces deux points, un point* C *tel, que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et une droite donnée* M.

Démontrons d'abord le lemme suivant: (*)

Étant donnés un cercle et l'un quelconque de ses diamètres AF (fig. 150), *par les points* A *et* F, *on mène deux tangentes indéfinies* BD *et* GE, *et une transversale quelconque qui coupe le cercle en* M *et les deux tangentes en* B *et* E; *puis on tire la droite* EF *que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en* C *avec la tangente* AB : *on a toujours*

$$\frac{\overline{AC}^2}{BC} = \frac{\overline{AF}^2}{EF}$$

En effet, si l'on tire AM, cette droite sera perpendiculaire sur FC, et le triangle rectangle CAF donnera

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AF}^2} = \frac{MC}{MF}$$

mais, à cause des triangles semblables MCB, MEF, on a

$$\frac{MC}{MF} = \frac{BC}{EF}$$

donc

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AF}^2} = \frac{BC}{EF'}$$

et en changeant les moyens de place, on a la proportion qu'il fallait démontrer.

(*) Chasles, — *Porisme* 136.

Remarque. On aurait pu mener une droite, du point F au second point d'intersection de la transversale et du cercle, et en prolongeant cette droite jusqu'à la rencontre de la tangente BD, on aurait obtenu un point C à gauche de A. La transversale pourrait aussi couper le cercle, d'un même côté du diamètre AB, et dans ce cas, on obtiendrait deux positions du point C, à gauche de B : mais, quel que soit le cas de figure, le théorème subsiste toujours et la démonstration n'est pas changée.

Corollaire. Si l'on prend EF égal à AF, on a

$$\overline{AC}^2 = BC \times AF$$

Revenons maintenant au problème; le corollaire qui vient d'être énoncé conduit à la construction suivante :

A et B étant les deux points donnés, sur la droite indéfinie XY, élevez au point A une perpendiculaire à cette droite et prenez sur sa direction une longueur AF égale à M ; élevez au point F une perpendiculaire à AF et prenez sur cette droite, à partir du point F et, dans les deux sens, deux longueurs EF et FG égales à M; tirez deux droites, du point B aux deux points E et G, puis des droites, du point F aux points de rencontre du cercle et des deux dernières droites : vous obtiendrez ainsi finalement quatre droites qui par leurs intersections avec AB donneront les solutions du problème.

Discussion. Considérons d'abord la droite EB : elle coupe toujours le cercle en deux points, et, à ces deux points, correspondent deux positions du point C, l'une entre A et B, l'autre à gauche de A.

L'autre transversale BG, au contraire, peut ne pas couper le cercle ; il faut, pour que la rencontre ait lieu, que AB ne dépasse pas une certaine limite AI qu'on obtient en menant par le point G une tangente au cercle : on a alors, d'après un théorème connu

$$FG \times AI = \frac{M^2}{4}$$

et comme FG est égal à M, la longueur de AI est égale au quart de M.

Ainsi les deux dernières solutions n'existeront que si la distance AB est plus petite que le quart de M, et ces deux solutions se réduiront à une seule, quand AB sera égale au quart de la même droite. Les deux positions du point C qui correspondent à la transversale AG sont, d'ailleurs, toutes deux à droite de B. On peut remarquer aussi que, dans le cas où les deux dernières solutions se réduisent à une seule, le point B est le milieu de la distance AC.

Remarque. Si on suppose la droite AB égale à M, le problème devient celui du partage d'une droite en moyenne et extrême raison et on voit bien par la discussion précédente que le problème particulier ne doit avoir que deux solutions.

PROBLÈME V.

211. *Étant donnés sur un cercle, deux points* A *et* B, *et une corde* CD *dont le milieu est* I, *on propose de trouver sur l'un des arcs sous-tendus par la corde un point* G *tel que, si on tire les droites* GA *et* GB, *les segments* IK *et* IH, *que déterminent ces droites sur la corde, soient égaux entr'eux.*

Première solution. Menez la droite AF (fig. 151) et prolongez-la d'une longueur égale IF; tirez ensuite HF et BF. Les triangles IHF, AIK étant évidemment égaux, HF est parallèle à AG, et, par suite, l'angle BHF est supplémentaire de l'angle connu AGH : donc, après avoir tiré, comme il a été dit, les deux droites AF et BF, la solution s'achève en décrivant, sur BF comme corde, un arc capable du supplément de l'angle AGB, car le point H où cet arc rencontre AB étant déterminé, on peut tracer les deux droites GB et GA.

Remarque. Le lieu géométrique des points tels, que, de ces points, on voit une droite donnée sous un angle connu, se compose de deux arcs symétriques par rapport à la droite. Or il est clair ici, qu'au point d'intersection du second arc avec la corde CD, correspond une solution telle, que le point G est situé sur l'arc AKB.

DEUXIÈME SOLUTION. Elle est immédiatement donnée par le théorème III (105).

TROISIÈME SOLUTION. Les deux points K et H (fig. 43) étant de même puissance par rapport au cercle, on a

$$AK \times KG = GH \times HB \qquad \text{ou} \qquad \frac{AK}{HB} = \frac{GH}{KG}$$

Prolongeons maintenant AB jusqu'à sa rencontre en E avec la corde CD, et, du point E, menons la tangente EF au cercle. Soient aussi h, k, l les perpendiculaires abaissées des trois points G, B, A sur CD, on aura

$$\frac{GH}{HB} = \frac{h}{k} \qquad \frac{AK}{KG} = \frac{l}{h}$$

et en multipliant, membre à membre, il vient

$$\frac{GH \times AK}{HB \times KG} = \frac{l}{k}$$

mais on a

$$\frac{l}{k} = \frac{AE}{EB} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{EF}^2}$$

et à cause de la proportion démontrée en commençant, on a aussi

$$\frac{GH \times AK}{HB \times KG} = \frac{\overline{GH}^2}{\overline{KG}^2}$$

donc il vient

$$\frac{GH}{KG} = \frac{AE}{EF}$$

alors l'angle G étant connu, le triangle KGH est semblable à un triangle donné, et on est ramené à tirer, par le point A, une droite qui fasse un angle donné avec la corde CD.

QUATRIÈME SOLUTION. D'après le théorème IX (111) on a (fig. 43)

$$\frac{CK \times DH}{HK} = M$$

M étant une droite de longueur connue.

Mais comme I est le milieu de la corde CD, l'égalité précédente devient

$$\overline{DH}^2 = 2M \times IH$$

et on est ramené au problème IV (213).

PROBLÈME VI.

212. *Tracer deux cercles* O *et* C *dont les rayons aient un rapport donné, et qui soient tangents extérieurement, tandis qu'ils touchent eux-mêmes en deux points donnés* E *et* F *deux droites fixes* AB *et* AD.

Première solution. Soit I(fig. 152) le point de contact des deux cercles; menons les droites OC, OE, CF, IF, EI, et prolongeons la dernière jusqu'à sa rencontre en H avec le cercle C; puis tirons CH et FH.

A cause des triangles isocèles EOI, ICH qui ont les angles en I égaux, la droite CH est parallèle à EO, et, par suite, perpendiculaire à AB; l'angle FCH est, par conséquent, égal à l'angle A, et l'angle EIF est le supplément de sa moitié. Le point I est donc sur l'arc capable du supplément de l'angle $\frac{A}{2}$, décrit sur EF, comme corde.

Menons maintenant IK parallèle à FH; comme l'angle FHD est égal à $\frac{A}{2}$, IK sera parallèle à la bissectrice de l'angle A. D'autre part, les triangles semblables EOI, ICH donnent

$$\frac{EI}{IH} = \frac{OE}{CH}$$

et comme IK est parallèle à FH, il vient

$$\frac{EK}{KF} = \frac{EI}{IH} = \frac{OE}{CH}$$

le rapport de EK à KF est donc égal au rapport donné des rayons ; on arrive ainsi à la solution suivante :

Décrivez, sur la droite EF comme corde, un segment capable de l'angle qui est le supplément de la moitié de l'angle des droites ; partagez EF, au point K, en deux segments dont le rapport soit égal à celui des rayons ; puis, par le point K, menez une parallèle à la bissectrice de l'angle des deux droites : le point I où l'arc précédemment décrit sera rencontré par la parallèle sera le point de contact I des deux cercles cherchés. On achève ensuite facilement la construction.

Deuxième solution. Prolongeons OE et CF (fig. 153) jusqu'à leur rencontre en L ; nous obtiendrons un triangle connu EFL, et on est immédiatement ramené à la question suivante :

Mener dans l'intérieur d'un triangle une droite EC *qui détermine, à partir des sommets* E *et* C, *deux segments* OE *et* CF, *dont la somme est égale à sa longueur et dont le rapport est donné.*

On prouve, d'abord, par une démonstration toute semblable à celle que nous avons donnée pour arriver à la première solution du problème XI, que, lorsqu'une droite OC satisfait à la double condition que nous avons indiquée, on peut déterminer une droite parallèle à sa direction.

Il ne reste plus qu'à mener une droite OC parallèle à une droite donnée, et telle que la somme des segments OE et CF soit donnée. Ce dernier problème n'offre aucune difficulté : IK étant la direction donnée, on mène les bissectrices des angles LIK, LKI ; par les points E et F on tire des parallèles à ces deux droites ; et enfin, par leur point d'intersection M, on mène OC parallèle à IK.

Remarque. Si, au lieu de se donner le rapport des rayons, on donnait leur somme ou leur différence, on serait ramené à construire un triangle, connaissant A, a et $b+c$, ou A, $a+2b$, $a+2c$ (Le triangle qu'il s'agit de construire est le triangle LOC).

THÉORÈME VII.

213. *Déterminer un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Nous avons déjà traité quelques cas particuliers du problème des cercles tangents, mais nous allons faire connaître une solution générale qui est encore applicable, lorsqu'un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des droites ou des points.

Plusieurs cas de figures peuvent se présenter : le cercle peut être tangent, intérieurement ou extérieurement, aux deux cercles donnés ; envelopper un ou deux des cercles donnés, et toucher extérieurement les deux autres ou le troisième. Pour fixer les idées, nous considérerons à la fois les deux cercles qui touchent extérieurement et intérieurement les trois cercles donnés.

La solution du problème s'appuie sur plusieurs théorèmes que nous allons d'abord démontrer.

1. *Le centre radical des trois cercles donnés est le centre de similitude inverse des deux cercles cherchés ; et en ce point viennent concourir les cordes qui joignent les points de contact des deux cercles cherchés avec chacun des trois cercles donnés.*

En effet, soient o, o',o'' (fig. 154) les centres des trois cercles donnés ; c et c' les centres des cercles cherchés ; a,a',a'', d'une part, b,b',b'', de l'autre, les points de contact des cercles c et c' avec les trois cercles o,o',o''.

Menons les cordes ab,$a'b'$,$a''b''$,aa' et bb' ; puis prolongeons les deux dernières jusqu'à leur rencontre en S''.

Lorsque l'on considère les systèmes formés de deux cercles c et c' et de l'un des cercles o,o',o'', les trois cordes ab,$a'b$,'$a''b''$ sont des droites qui joignent deux centres de similitude, l'un direct, l'autre inverse ; elles devront donc passer par le centre T de similitude inverse des cercles c et c'.

Je dis maintenant que le point T est le centre radical des trois cercles donnés. En effet, lorsqu'on associe successivement les cercles c et c' avec les deux cercles o et o', les cordes

aa', bb' sont des droites qui passent par deux centres de similitude inverse; elles doivent donc passer par le centre de similitude directe S″ des deux cercles o et o'. Mais a et a', b et b' sont des points, deux à deux, antihomologues sur ces deux cercles, puisque les deux rayons $oa, o'a'$ viennent concourir en c, et les deux rayons ob, ab' en c' : le point de rencontre des cordes $ab, a'b'$ appartient, par conséquent, à l'axe radical des cercles o et o' (51).

On prouve de même que le point de rencontre de ab et $a''b''$ est sur l'axe radical des cercles o et o'' : le point d'intersection T des trois droites $ab, a'b', ab''$ n'est donc autre que le centre radical des trois cercles donnés. Mais il est en même temps, d'après la première partie de la démonstration, le centre de similitude inverse des deux cercles c et c' ; le premier théorème est donc démontré.

2. *L'axe de similitude directe des trois cercles donnés est l'axe radical des deux cercles cherchés.*

En effet, T étant le centre de similitude inverse des cercles c et c', et les points a et b, ainsi que les points a' et b' étant antihomologues sur ces deux cercles (on le voit comme plus haut), les cordes aa', bb' se coupent sur l'axe radical. Mais leur point de rencontre est justement le centre de similitude directe S″ des deux cercles o et o' ; ce centre de similitude se trouve donc sur l'axe radical des deux cercles c et c'.

On démontre qu'il en est de même des centres de similitude directe S′ et S des cercles O et O″, O′ et O″ pris, deux à deux : donc l'axe de similitude directe des cercles o', o'', o''', et l'axe radical des cercles c et c' se confondent.

3. *La corde, qui passe par les points de contact d'un des cercles donnés avec les deux cercles cherchés, contient le pôle de l'axe de similitude directe des trois cercles donnés, pris par rapport à celui des trois que l'on considère.*

a et b étant, comme nous l'avons dit tout à l'heure, deux points antihomologues qui sont situés sur les deux cercles c et c' et sur un rayon vecteur partant de l'un de leurs centres de similitude T, les tangentes en ces deux points doivent se couper en d sur l'axe radical SS′S″. Mais les droites ad et bd étant tangentes au cercle o', en même temps qu'aux cercles c et c', la corde ab est la polaire du point d et doit, par conséquent, passer par le pôle e de la droite SS′S″, pris par rapport au cercle o.

Des théorèmes précédents on déduit la solution suivante :

Déterminez le centre radical T *et l'axe de similitude directe* SS′S″ *des trois cercles donnés ; prenez, par rapport à chacun d'eux, les pôles* e,e′,e″ *de cet axe ; puis menez les droites* Te,Te′,Te″ *qui coupent les trois cercles* o,o′,o″ *en* a,b,a′,b′, a″,b″ : *le cercle qui passe par les trois points* a,a′,a″, *et celui qui passe par les trois autres points* b,b′,b′ *seront les deux cercles demandes.*

On trouverait, de même, deux solutions qui correspondraient à chaque axe de similitude inverse : le problème a donc, en général, huit solutions.

Cas particuliers.

1. *On donne deux cercles et une droite.* — Un cercle et une droite ont deux centres de similitude (55), il y aura donc, comme dans le cas de trois cercles, quatre axes de similitude.

L'axe radical d'un cercle et d'une droite, étant cette droite elle-même (40), on aura le centre radical T par l'intersection de la droite avec l'axe radical des deux cercles.

Maintenant le pôle d'une droite, par rapport à une autre droite, est un point à l'infini sur la première droite (27), et, par suite, la droite qui joint ce point au centre radical T est parallèle à la droite donnée et même confondue avec elle, puisque le point T lui appartient. On en conclut seulement, ce qu'on savait d'avance, que les points de contact des cercles cherchés avec la droite donnée sont sur cette droite ; mais on peut déterminer les pôles de chaque axe de similitude par rapport aux deux cercles donnés, et en tirant des droites qui joignent ces pôles au centre radical T, on connaîtra les points de contact des cercles cherchés avec les deux cercles donnés, ce qui suffira, évidemment, pour que l'on puisse achever la construction.

Le problème a en général huit solutions, puisqu'il y a quatre axes de similitude.

2. *On donne un cercle et deux droites.* — Les centres de similitude du cercle et des deux droites, seront aux extrémités f, f', h, h' des diamètres du cercle, perpendiculaires aux deux droites.

Il y aura encore quatre axes de similitude qui seront les deux côtés $fg, f'g'$ et les deux diagonales fg', gf' du rectangle $ff'gg'$; les centres de similitude des deux droites seront alors considérés comme étant à l'infini sur les quatre droites $fg, f'g'$, $f'g'$ et gf', ou placés à leur rencontre avec les droites données (57).

Le centre radical T sera, d'ailleurs, le point d'intersection des deux droites données (40).

Pour achever la construction relative à l'un des axes de similitude, on prendra le pôle de cet axe, par rapport au cercle donné, et on tirera la droite qui joint ce pôle au centre radical, on obtiendra ainsi les deux points de contact a et b de deux des cercles cherchés avec le cercle donné O : menant alors les droites oa et ob, et les prolongeant jusqu'à leur rencontre avec la bissectrice de l'angle des deux droites, on aura les centres des cercles, et, par suite, leurs rayons : les deux cercles sont donc déterminés.

A chacun des trois autres axes correspondent deux cercles qu'on détermine de la même manière que les précédents, et le problème a encore, en général, huit solutions.

3. *On donne deux cercles et un point.* — Les deux cercles ont deux centres de similitude ; mais un point et un cercle n'ayant qu'un seul centre de similitude (53), il n'y aura que deux axes de similitude, et par suite, seulement, quatre solutions.

On trouvera, d'ailleurs, facilement ces solutions, comme dans les cas précédents, en se rappelant que le pôle d'une droite par rapport à un point est ce point lui-même (26).

4. *On donne un cercle, une droite et un point.* — Les centres de similitude d'un point et d'un cercle ou d'une droite étant confondus avec ce point lui-même, il n'y a que deux axes de similitude, et, par suite, quatre solutions seulement.

On n'aura à considérer que les pôles des deux axes de similitude par rapport au cercle et au point (25) : ce qui suffira pour déterminer les cercles demandés.

5. *Un cercle et deux points.* — Les centres de similitude d'un point et d'un cercle se réduisent à ce point lui-même (53), il n'y a donc qu'un seul axe de similitude qui est la droite joignant les deux points donnés, et le problème n'a plus que deux solutions qu'on trouve encore comme précédemment.

Il ne reste plus à considérer que les quatre cas où, parmi les données, ne figure aucun cercle ; mais ces cas échappent à la méthode, et on les traite *directement* sans difficulté.

Problèmes de géométrie dans l'espace.

Parmi les problèmes de géométrie de l'espace, les uns n'ont leur solution effective qu'en géométrie descriptive, et les autres ne sont intéressants qu'au point de vue de l'algèbre à laquelle ils fournissent d'utiles exercices : nous n'en donnerons donc ici que quelques-uns.

PROBLÈME I.

214. *Etant donné un triangle, trouver hors de son plan un point tel, que de ce point on puisse voir les trois côtés sous des angles droits.*

Première solution. Soit (fig. 155) ABC le triangle donné, et ses trois hauteurs AD, BE, CF qui se coupent en H ; soit aussi S le point cherché. On sait que ce point, qui est le sommet d'un angle trièdre trirectangle SABC se projette au point d'intersection H des hauteurs du triangle ABC.

Il en résulte que, si, du point S, on abaisse une perpendiculaire sur l'un des côtés AB du triangle donné, le pied de cette perpendiculaire se confondra avec le pied F de la hauteur CF.

Cela posé, pour résoudre le problème, rabattons le triangle rectangle SAB sur le plan du triangle ABC, en le faisant tourner autour de AB ; le point S tombera en S_1 sur la hauteur CF.

Ce dernier point sera, d'ailleurs, déterminé par la rencontre de la hauteur CF et du demi-cercle décrit sur AB comme diamètre. Menant alors par le point H la droite HG parallèle à AB, et décrivant, du point F comme centre avec FS_1 comme rayon, une circonférence qui coupe FG en S_2, on obtiendra la distance HS_2 du sommet S au plan du triangle. Mais la projection H du point S étant connue, le point lui-même peut être considéré comme déterminé.

Pour que le problème soit possible, la droite FH doit être plus petite que FS : ce qui exige, puisque l'angle ASB est droit, que l'angle AHB soit obtus, et par suite, que l'angle C soit aigu. Donc, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le triangle donné ait ses trois angles aigus.

Deuxième solution. Soit AD (fig. 156) l'une des hauteurs du triangle ABC, et G,K,L les milieux des trois côtés. Le point cherché S est à des distances des points L et K, respectivement, égales aux moitiés de AB et de AC : il est donc sur le cercle d'intersection des deux sphères qui ont, pour centres, L et K, et, pour rayons, AL et AK. Ce cercle a évidemment pour diamètre AD, et son plan est perpendiculaire au plan donné. Il ne s'agit plus que de trouver, d'un côté du plan, le point d'intersection du cercle avec une sphère qui a G pour centre et GC pour rayon.

Si on suppose le problème résolu, on aura dans l'espace un triangle SDG rectangle en D, dont l'hypothénuse SG sera égale à GC. Alors, si du point G, comme centre, avec GC comme rayon, on décrit un cercle qui coupe AD en M, la droite DM sera égal au côté SD du triangle SDG de l'espace.

Cela posé, rabattons sur le plan du triangle ABC, le demi-cercle considéré tout à l'heure, en le faisant tourner autour de son diamètre : le point S qui est sur le demi-cercle, se trouvera sur son rabattement et sera toujours à une distance du point D égal à SM. On aura donc le rabattement S_1 du point S par l'intersection des deux circonférences qui ont, la première, pour diamètre AD, et la seconde, pour centre, le point D et, pour rayon, DM.

On aura maintenant la projection s du sommet S, en abaissant la perpendiculaire S_1s sur AD : la distance du point S au plan du triangle est, d'ailleurs, égal à sS_1 ; le problème peut donc être considéré comme résolu.

Pour qu'il soit possible, il faut et il suffit que le point M tombe entre D et A : cela exige que la moitié de BC soit plus petite que GA et plus grande que DG ; pour que la première condition soit remplie, il faut évidemment que l'angle A du triangle donné soit aigu, et, par suite, il doit en être de même des autres angles. Alors la seconde condition est remplie d'elle-même : on arrive donc à la même conclusion que précédemment.

Troisième solution. Comme on connaît (fig. 157) les milieux F, G, K des côtés du triangle donné, la question peut être posée comme il suit :

Étant donnée la base FGK *d'un tétraèdre, trouver son sommet* S, *sachant qu'il est situé à des distances des trois sommets de la base respectivement égales aux côtés opposés de cette base.*

Prenons la question plus générale : *construire un tétraèdre connaissant sa base et les distances de son sommet aux trois sommets de cette base.*

Dans le plan du triangle LGK, décrivons en prenant les points L, G, K comme centres, des cercles dont les rayons soient les distances données du sommet S aux trois points : soient S_1 et

S_2 les points d'intersection du premier cercle et du second, du second et du troisième. Abaissons, de ces points, les perpendiculaires S_1P,S_2Q sur GF et GK, et prolongeons-les jusqu'à leur rencontre en s. Le point s aussi obtenu sera, comme il est facile de le voir, la projection du sommet S sur le plan du triangle ANC.

Reste maintenant à trouver la distance du pointS au même plan. A cet effet, par le point s on mème sR parallèle à LG, et du point P comme centre avec PS_1 comme rayon, on décrit un cercle qui coupe SR au point S_3; la distance demandée sera la droite sS_3.

Pour que le problème soit possible, il faut que dans les triangles FGS_1,GKS_2 le plus grand côté soit plus petit que la somme des deux autres, et, de plus, que la droite PS_1 soit plus grande que Ps_1. Si nous revenons maintenent au problème particulier que nous avions en vue, on voit d'abord que la première condition est toujours satisfaite, puisqu'alors les triangles FGS_1,GKS_2 ne sont autres que le triangle LGK lui-même. Quant à la seconde, pour qu'elle soit remplie, il faut et il suffit que les trois angles du triangle donné soient aigus. C'est ce qu'on verra facilement.

Remarque. Le problème, de couper un angle trièdre trirectangle par un plan tel, que la section soit égale à un triangle donnée, est évidemment le même que celui que nous venons de résoudre.

PROBLÈME II.

215. *Etant donnée une pyramide quadrangulaire dont a base est un parallélogramme, on propose de la partager en deux parties équivalentes par un plan mené par un des côtés de sa base.*

Soit (fig. 58) SABCD la pyramide donnée, et le plan ABF, celui qui satisfait à la question. Ce plan coupe la face SCD suivant une droite EF parallèle à CD; et tout revient à déterminer l'un des points E et F où elle coupe les arêtes SC et SD.

Menons les diagonales AC et AE de la base et de la section ABEF, et faisons passer un plan par les deux arêtes SA et SC; nous décomposerons ainsi les deux pyramides quadrangulaires SABCD, SABEF en deux tétraèdres.

Cela posé, comparons les deux tétraèdres SCDA, SEFA; ces tétraèdres peuvent être considérés comme ayant, pour bases, les triangles SCD, SEF, et, pour sommet commun, le point A. Ils sont, par suite, entr'eux, comme leurs bases : on a donc

$$\frac{\text{SEFA}}{\text{SCDA}} = \frac{\text{SEF}}{\text{SCD}}$$

Mais les triangles SEF, SCD, étant semblables, sont, entr'eux, comme les carrés des côtés homologues, et il vient

$$(1) \qquad \frac{\text{SEFA}}{\text{SCDA}} = \frac{\overline{\text{SE}}^2}{\overline{\text{SC}}^2}$$

D'autre part, les deux tétraèdres ESBA, CSBA, ayant même base SBA, sont, entr'eux, comme leurs hauteurs, et par conséquent, comme les droites SE et SC : on a ainsi

$$(2) \qquad \frac{\text{ESBA}}{\text{CSBA}} = \frac{\text{SE}}{\text{SC}}$$

Mais par hypothèse, on a

$$\text{SEFA} + \text{ESBA} = \text{SCDA}$$

l'égalité précédente devient donc

$$1 = \frac{\overline{\text{SE}}^2}{\text{SC}} + \frac{\text{SE}}{\text{SC}}$$

ou

$$\overline{\text{SE}}^2 = \text{SC} \times (\text{SC} - \text{SE}) = \text{SC} \times \text{CE}$$

Le point E partage donc l'arête SE en moyenne et extrême raison.

Remarque. On sait qu'une droite EF, qui est parallèle à l'un des côtés CD d'un triangle et divise les deux autres côtés en moyenne et extrême raison, partage la surface du triangle dans le même rapport, mais dans l'ordre inverse. On peut dire, par conséquent, que le plan qui partage la pyramide en deux parties équivalentes, divise, en moyenne et extrême raison, la face latérale opposée à l'arête de la base par laquelle le plan est mené.

PROBLÈME III.

216. *Couper un prisme triangulaire par un plan de manière que la section soit un triangle semblable à un triangle donné.*

Remarquons d'abord que l'on peut obtenir avec compas les distances des arêtes du prisme, et, par conséquent, connaître les trois côtés de la section droite.

Maintenant prenons arbitrairement, sur l'une des arêtes, un point A par lequel nous supposerons que soient menés les plans de la section droite et de la section demandée, et fendons le prisme suivant l'arête qui contient le point. Si alors on étend la surface latérale du prisme sur un plan quelconque passant par cet arête, la section droite deviendra une ligne droite ABCD (fig. 159), et les arêtes latérales qui passent par les sommets B et C de la section se placeront sur des perpendiculaires BP et CQ à la droite ABCD. Quant à la section cherchée, son développement sera la ligne brisée AEFD.

Les points A et D, et les droites BP et CQ peuvent être construits; et, si l'on pouvait déterminer les points E et F sur ces dernières droites, on connaîtrait les distances entre les sommets E et F de la section cherchée AEF et le plan de la section droite ; dès lors le problème serait résolu.

Cela posé, décrivons deux cercles, des points E et F comme centres, avec EA et FD comme rayons ; ces cercles se couperont en deux points G et H, et couperont la droite AD aux deux points A′ et D′ symétriques de A et D, par rapport à BP et CQ. Menons aussi la corde commune GH qui est perpendiculaire en L sur la ligne des centres EF; puis tirons les droites GE, GF.

Le triangle GEF est égal au triangle demandé et la droite GLL est la hauteur correspondante à la base EF : il résulte, de là, que les rapports de EL et LG à LF sont connus ; et, par suite, si l'on prend sur EF une longueur LM égale à LG, et que, par les points L et M, on mène les droites SI et UT parallèles à BP, les rapports de BI et TI à IC seront déterminés. On peut donc dire que les points L et M se trouvent sur deux droites connues SI et UT.

Je remarque maintenant qu'on peut déterminer le point de rencontre K des deux droites AD et GH. En effet, le point K étant sur l'axe radical des deux cercles de la figure, est d'égale puissance par rapport aux deux couples de points (A, A'), (D, D') : si donc on mène un cercle quelconque par les deux points de chaque couple, et qu'on détermine le point K où la corde d'intersection des deux cercles coupe AD, ce point sera le point demandé.

D'autre part, en formant deux expressions différentes de la puissance du point K, par rapport aux deux cercles de la figure, on a

$$\overline{LG}^2 - \overline{LK}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{BK}^2$$

ou en remplaçant LG par LM

$$\overline{LM}^2 - \overline{LK}^2 = \overline{BA}^2 - \overline{BK}^2$$

Enfin, si l'on tire MK, on a un triangle rectangle LMK qui satisfait aux conditions suivantes :

Un des sommets des angles aigus passe par un point fixe ; les deux autres sommets sont sur des droites données, parallèles entr'elles ; et la différence des carrés des côtés de l'angle droit est connue.

Toute la difficulté se trouve maintenant réduite à la solution du problème précédent, car les points M et L étant connus, les points de rencontre de la droite LM avec les droites BP et CQ seront les points demandés E et F.

Résolvons le problème de géométrie plane.

Soient GH, KL et C (fig. 160) les parallèles et le point donnés : en abaissant BD et CE perpendiculaires sur GH, on obtient deux triangles semblables AEC, ABD qui donnent

$$(1)\qquad AE \times AD = EC \times BD$$

D'autre part, les mêmes triangles donnent

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 \qquad \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

D'où l'on tire en retranchant, membre à membre,

$$(2)\qquad \overline{AE}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{CE}^2$$

Mais les lignes BD et CE sont connues, ainsi que la différence des carrés des côtés de l'angle droit AC et AB ; le second membre de l'égalité (2) est donc connu, et peut être remplacé par le carré d'une ligne connue M ; on a donc

$$(3)\qquad \overline{AE}^2 - \overline{AD}^2 = M^2$$

Maintenant, élevons au carré les deux membres de l'égalité (1) ; puis divisons ses deux membres par M^2 et les deux membres de l'égalité (2) par M, il vient

$$\frac{\overline{AE}^2}{M} - \frac{\overline{AD}^2}{M} = M$$

$$\frac{\overline{AE}^2}{M} \times \frac{\overline{AD}^2}{M} = \frac{\overline{EC}^2 \times \overline{BD}^2}{M^2}$$

et en posant

$$\frac{\overline{AE}^2}{M} = P \qquad \frac{\overline{AD}^2}{M} = Q \qquad \frac{\overline{EC}^2 \times \overline{BD}^2}{M^2} = N^2$$

on a

$$P - Q = M \qquad PQ = N^2$$

On est ainsi ramené à trouver deux droites P et Q, connaissant leur différence et leur produit.

Les droites P et Q étant connues, on aura ensuite AE et AD en prenant des moyennes proportionnelles entre P et M, et entre P et Q. Portant, maintenant, la longueur EA sur GH de E en A, on a le sommet A et, par suite, le sommet B.

CHAPITRE IV.

DES MAXIMA ET MINIMA EN GÉOMÉTRIE.

MÉTHODES POUR LES DÉTERMINER.

217. En mathématiques, on dit qu'une grandeur qui varie d'une manière continue et suivant une loi déterminée, passe par un maximum ou un minimum, lorsqu'elle atteint une valeur plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent ou qui la suivent immédiatement. Il résulte de cette définition que deux minima sont toujours séparés par un maximum et réciproquement.

Nous allons donner plusieurs méthodes pour la détermination des maxima et des minima en géométrie.

Première méthode. — Par la discussion d'un problème déterminé.

218. On regarde la grandeur géométrique, dont on demande le maximum ou le minimum, comme ayant une valeur arbitraire et déterminée ; puis on résout et discute complètement le problème de géométrie ordinaire qui se trouve ainsi substitué à la question proposée. En général, pour que le problème soit possible, il faudra que la quantité qu'on aura considérée comme constante en posant le nouveau problème, et à laquelle on restitue son caractère de variable dans la discussion, soit plus grande ou plus petite que certaines quantités : de là, on conclura le maximum ou le minimum demandés.

1. *Trouver sur un arc de cercle* AB (fig. 161) *un point* C *tel, que la somme des distances* AC *et* BC *aux extrémités de l'arc soit maximum.*

Résolvons, suivant la méthode indiquée, le problème qui a pour but de déterminer un point C, tel que la somme de ses distances aux deux points A et B soit égale à une longueur donnée.

Pour cela, prolongeons AC d'une longueur CD égale à BC.

Le triangle BCD étant isocèle, l'angle D est la moitié de l'angle constant ACB, et le point D se trouve sur un arc capable de la moitié de l'angle ACB et ayant AB pour corde. Le même point se trouve, d'ailleurs, sur un cercle ayant, pour centre, le point A, et, pour rayon, la somme donnée : Le point D, et, par suite, le point C sont donc déterminés et le problème est résolu.

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que la somme donnée soit plus petite que le diamètre de l'arc ADB. Mais le diamètre est la droite AF qui passe par le milieu E de l'arc AEB : le maximum demandé est donc AF ou la somme des distances du milieu E de l'arc à ses extrémités A et B.

2. *Trouver sur un arc ou sur un cercle donnés un point tel que, de ce point, on voie la droite qui joint deux points fixes sous un angle maximum ou minimum* (Concours).

Supposons que l'angle dont il s'agit soit donné, le point demandé sera à la rencontre du cercle ou de la droite avec l'arc, qui est capable de l'angle donné et qui est décrit sur la droite qui joint les deux points fixes : Faisons maintenant la distinction des deux cas.

1° *Le point cherché est sur une droite* EF (fig. 162). A et B étant les deux points donnés, l'arc ABCD capable de l'angle donné coupe, en général, la droite EF, en deux points C et D, et le problème a deux solutions.

On voit maintenant par la mesure des angles sur le cercle ABCD, que, suivant qu'un point est pris sur la droite indéfinie EF, entre les deux points C et D, ou en dehors de leur intervalle, l'angle sous lequel on voit la droite AB est plus grand ou plus petit que l'angle donné. Par conséquent, si l'angle donné augmente, les points C et D se rapprocheront l'un de l'autre, et l'angle atteindra sa valeur maximum, lorsque les points C et D seront confondus, c'est-à-dire, lorsque le cercle sera tangent à la droite donnée.

Comme, par deux points, on peut mener, en général, deux cercles, il y aura deux maxima. Ils seront, d'ailleurs, séparés par un minimum, puisque, du point de rencontre des deux droites AB et EF, on voit la droite AB sous un angle nul.

Quand les droites AB et CF sont parallèles, il n'y a plus qu'un maximum.

2° *Le point cherché doit se trouver sur un cercle.*

Le principe de la discussion est toujours le même, seulement il faut distinguer plusieurs cas de figure.

Premier cas. *La droite* AB *qui joint les deux points donnés, étant prolongée indéfiniment, ne rencontre pas le cercle.*

Si on mène par les deux points A et B deux cercles tangents au cercle donné, on voit, par le même raisonnement que tout à l'heure, qu'à l'un des points de contact correspond un maximum, et à l'autre, un minimum.

Deuxième cas. *La droite* AB *est tangente au cercle.*

Ce cas se subdivise en plusieurs cas secondaires, suivant que les deux points A et B sont, d'un même côté, de part et d'autre du point de contact, ou que l'un des deux est confondu avec le point de contact lui-même; mais on trouve toujours un maximum et un minimum.

La droite AB joue, d'ailleurs, le rôle de cercle tangent extérieurement ou intérieurement : seulement, quand l'un des deux points fixes est confondu avec le point de contact, la droite AB représente, à la fois, les deux cercles, et, à son point de contact, correspondent un maximum et un minimum.

Troisième cas. *La droite* AB *prolongée indéfiniment rencontre le cercle en deux points.*

Ce cas se subdivise en plusieurs autres, suivant que les points donnés sont : tous deux extérieurs ou intérieurs au cercle; l'un extérieur et l'autre intérieur; l'un d'eux, ou tous deux, à la fois, confondus avec les points de rencontre de la droite indéfinie et du cercle.

Dans les deux premières positions, on peut mener deux cercles qui sont tangents, tous deux, extérieurement ou intérieurement, au cercle donné; il y a, alors, deux maxima ou deux minima, mais qui sont séparés par deux minima ou maxima correspondant aux points de rencontre de la droite et du cercle. Quand l'un des deux points A et B est extérieur au cercle, et l'autre intérieur, on ne peut plus mener de cercles tangents; mais il y a alors un maximum et un minimum qui correspondent aux points de rencontre de la droite et du cercle.

Les autres cas secondaires du troisième cas principal se traitent sans difficulté.

3° *Par l'un des points d'intersection* A *de deux cercles* O *et* C *qui se coupent en* A *et* E (fig. 163), *mener une sécante, telle que le produit des cordes interceptées dans les deux cercles soit maximum.*

Supposons que le produit des deux cordes soit égal au carré d'une droite donnée m : nous distinguons deux cas.

PREMIER CAS. *Les deux points de rencontre* B *et* D *de la sécante* BAD *avec le cercle sont d'un même côté du point* A.

Tirons AE, et faisons passer un cercle par les trois points B,E,D : ce cercle coupera le prolongement de AE en un point F, tel qu'on aura

$$AE \times AF = AE \times AD = m^2$$

de là on déduit

$$AF = \frac{m^2}{AE}$$

et le point F est déterminé.

D'autre part, si l'on tire BF et ED, et que l'on mène la tangente AH au cercle C, on a, à cause de l'égalité des mesures,

$$\widehat{BFE} = \widehat{BDE} = \widehat{EAH}$$

Et, par suite, les droites BF et AH sont parallèles. On arrive ainsi à la solution suivante :

Déterminez, sur le prolongement de la corde d'intersection AE des deux cercles, un point F dont la distance au point A soit une troisième proportionnelle à AE et m; menez la tangente AH à l'un des deux cercles; tirez la parallèle FB à cette tangente; et enfin faites passer deux droites par le point A et les deux points de rencontre de FB avec le second cercle : les deux sécantes ainsi obtenues satisferont aux conditions données.

Discussion. On voit que le problème a deux solutions, lorsque la droite BF coupe le cercle OA. Il n'en a plus qu'une, lorsque la droite BF devient tangente au même cercle, et il est impossible lorsqu'elle lui est extérieure.

Il résulte évidemment de là que la plus grande valeur que puisse prendre AF et, par suite, m^2, est obtenue, lorsque les tangentes en B et A aux cercles O et C sont parallèles, ou, ce qui revient au même, lorsque les rayons de points de contact sont eux-mêmes parallèles. On aura donc la sécante à laquelle correspond le maximum demandé, en tirant une droite du point A au centre de similitude externe des deux cercles.

Deuxième cas. *Les deux points de rencontre de la sécante avec les cercles sont d'un même côté du point* A.

On voit, par une discussion toute semblable à la précédente, qu'on obtient la sécante à laquelle correspond le maximum, en menant des droites par le point A et le centre de similitude interne des cercles donnés.

Remarque. Quand on fait tourner la sécante autour du point A, les deux maxima sont séparés, comme cela doit avoir lieu, par deux minima qui correspondent aux deux positions où la sécante est tangente à l'un ou l'autre des deux cercles.

4° *Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle tel, que la somme ou la différence de la base et de la hauteur soit maximum.*

Supposons, d'abord, que c'est la somme de la base et de la hauteur qui est connue.

Soient O le cercle donné et ABC le triangle isocèle demandé (fig. 164). Le diamètre AD pouvant être supposé connu de position, si on prolonge la hauteur AH d'une longueur EH égale à BC, la droite AE sera connue de longueur et de position.

Mais le triangle isocèle serait évidemment déterminé, si on connaissait le point B; et comme ce point se trouve sur le cercle, tout revient à en déterminer un lieu géométrique.

Or BH étant la moitié de EH, le point B appartient au lieu des points tels que si, de l'un d'eux, on abaisse une perpendiculaire sur une droite fixe AE, cette perpendiculaire est la moitié de la distance de son pied à un point E fixe sur la droite. Le point E appartient, d'ailleurs, au lieu, et on en a un second F, en prenant, sur la tangente AN au point A, une longueur AF égale à la moitié de AE.

Maintenant, on voit facilement que le lieu demandé est la droite EF elle-même.

En effet, B étant supposé un point quelconque de la droite, les deux triangles semblables EHB,EAF montrent que HB est la moitié de EH, et, par suite, on a

$$AH + BC = AH + 2\,HB = AH + EH = AE$$

Ainsi le point B est déterminé par l'intersection du cercle et de la droite EF facile à construire.

Supposons maintenant que, la hauteur étant plus grande que la base, on se donne la différence entre ces deux droites. A′B′C′ étant le triangle demandé, on porte, à partir du pied H de la hauteur AH, une longueur H′E′ égale à B′C′; alors la différence se trouve représentée par AE′, et si l'on prend sur la tangente AN une longueur AF′ égale à la moitié de la différence donnée, puis qu'on mène la droite E′F′, cette droite sera un lieu du point C′ et, par sa rencontre avec le cercle, donnera ce point.

Enfin, la base étant plus grande que la hauteur, la différence donnée entre ces deux droites, se trouve portée de A en E″ sur le prolongement de AD, au-dessus de A. Ici, le lieu analogue aux précédents, s'obtient en prenant AF″ égale à la moitié de AE″, sur le prolongement de la tangente AN à gauche du point A.

Discussion. Lorsqu'on fait varier la somme ou la différence donnée, la droite EF se transporte parallèlement à elle-même;

car AF étant toujours la moitié de AE, les triangles tels que AEF sont semblables entr'eux.

Cela posé, admettons, d'abord, que la droite mobile AF soit tangente au demi-cercle BA et coupe au point L le diamètre AD prolongé ; alors le problème proposé n'a qu'une solution, et la somme a sa valeur maximum AL qu'on trouve facilement être égale à R. $(1 + \sqrt{5})$

Le point de rencontre de la droite mobile allant maintenant du point L au point D, c'est-à-dire, la somme donnée variant, depuis son maximum jusqu'à 2R, le problème a deux solutions.

Lorsque le point de rencontre est en D, on peut dire encore qu'il y a deux solutions; seulement, un des triangles est nul.

La droite mobile EF, s'avançant toujours dans le même sens, coupera le diamètre AD entre D et A, et le cercle en deux points, l'un, à droite du diamètre AD, l'autre à sa gauche. Au point, qui est à droite, correspond un triangle isocèle, dans lequel la somme de la base et de la hauteur est égale à la longueur donnée; mais à l'autre point correspond un triangle dans lequel cette longueur est la différence entre la hauteur et la base.

Quand le point mobile E est arrivé en A, c'est-à-dire quand la longueur donnée est nulle, la seconde solution subsiste toujours, seulement la base et la hauteur du triangle sont alors égales. On peut dire aussi que la première a encore lieu, puisque le triangle étant nul, la somme de la base et de la hauteur est elle-même nulle.

Supposons enfin que la sécante mobile rencontre le prolongement de AD au-dessus de A, il y aura alors deux solutions mais qui se rapporteront au cas où, la base étant plus grande que la hauteur, on se donne la différence entre ces deux droites.

Les deux solutions existeront toujours, tant que la droite mobile ne sera pas tangente au cercle ; mais dans ce dernier cas, il n'y aura plus qu'une solution, et si la droite continue son mouvement, le problème deviendra impossible.

Le maximum de la différence entre la base et la hauteur a lieu quand la droite est tangente au cercle, et on trouve qu'il est égal à $R\left(\sqrt{5}-1\right)$.

On voit que la discussion complète du problème a mis en évidence l'existence de deux maxima pour la somme et la différence.

On a aussi trouvé deux minima pour ces deux quantités, puisqu'elles ont passé par zéro.

Deuxième méthode. — Par substitutions successives.

219. Elle consiste ici, comme dans la démonstration des théorèmes ou la résolution des problèmes ordinaires, à ramener la question à une autre, soit immédiatement, soit en passant par plusieurs questions intermédiaires.

Nous allons donner des exemples.

1. *Etant donnés* (fig. 165) *un angle droit* ABE *et un point* A *sur l'un de ses côtés, mener, par le point donné, deux droites* AC *et* AD *telles, que le rapport de* BC *à* AD *soit égal à celui de deux droites connues* M *et* N, *et que leur angle* CAD *soit maximum* (Concours).

Menons par le point C la droite CG parallèle à AD : l'angle CGA sera égal à l'angle CAD, et, de plus, on aura

$$\frac{BG}{AB}=\frac{BC}{BD}=\frac{M}{N}$$

le point G sera donc connu.

On est ainsi ramené à trouver sur BE un point C tel, que, de ce point, on voie AG sous un angle maximum. Prob. 2 (221).

2. *Etant donnés un cercle* OA, *deux tangentes parallèles* AE *et* BD, *et un point* C *sur le diamètre* AB *qui joint leurs points de contact; une tangente mobile* ED *coupe les deux premières en* E *et* D : *on demande quel est l'angle minimum sous lequel on peut voir, du point* C, *la tangente mobile.*

D'abord, il y a un minimum. En effet, l'angle est droit, lorsque le point E est confondu avec le point A, ou s'éloigne à l'infini sur la tangente AE, et, pour toute autre position du point E, l'angle ECD est aigu, puisque le point C est extérieur au cercle qui est décrit sur ED comme diamètre.

Première solution. Menons la droite EC (fig. 166), et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en K avec la tangente au point B ; puis faisons passer un cercle par les trois points D, C, K : je dis qu'il coupera le prolongement du diamètre AB en un point F déterminé par l'égalité

$$BF = \frac{\overline{AO}^2}{AC}$$

En effet, les triangles semblables AEC, BCK donnent

$$\frac{BK}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

et dans le cercle CDF on a

$$BF \times BC = BD \times BK$$

Multipliant, membre à membre, les deux dernières égalités, il vient

$$\frac{BF}{AE} = \frac{BD}{AC} \qquad \text{d'où} \qquad BF = \frac{AE \times BD}{AC}$$

On sait que le produit AE $\times$ BD est égal au carré du rayon CA : on a donc bien l'expression indiquée plus haut.

Cela posé, on voit que les angles DFB, CKD sont égaux, comme inscrits dans le même arc, et, par suite, l'angle BDF est égal à 90° — AEC. D'autre part, si l'on prend BG égal à BC, l'angle BDG sera égal à l'angle CDB, et l'angle GDF aura pour valeur 90° — (AEC + CDB) ou 90° — ECD.

La question de trouver le minimum de l'angle ECD est donc ramenée à trouver le maximum de l'angle GDF, et on revient encore au problème 2 (221).

Cherchons maintenant à déterminer la tangente DE.

D'après le problème cité, on a

$$DB^2 = BG \times BF$$

et, en remplaçant la droite BG par son égale BC et BF par sa valeur précédemment trouvée, il vient

$$DB^2 = BC \times \frac{\overline{AO}^2}{AC}$$

Divisant maintenant les deux membres de l'égalité précédente par AE, et remplaçant le rapport de $\overline{AO}^2$ à AE par DB, on a

$$\frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

ou, H étant le point de contact de ED,

$$\frac{EH}{HD} = \frac{BC}{AC}$$

Il résulte, de là, que le point de contact de la tangente, à laquelle correspond l'angle minimum, sera à la rencontre du cercle et d'une perpendiculaire élevée en C au diamètre AB.

Deuxième solution. Abaissons, du centre O (fig. 167), les perpendiculaires OL et OM sur CE et CD; l'angle LOM sera égal à l'angle ECD dont on demande le minimum. Je dis maintenant que, si on mène la droite LM, son point de rencontre H avec le diamètre AB est fixe.

En effet. les deux triangles OLM, LCM, pouvant être considérés comme ayant même base LM, sont, entr'eux, comme les hauteurs correspondantes, ou comme OH est à CH : mais ils ont aussi les angles supplémentaires LOM, LCM et sont, par suite, entr'eux, comme les produits OL $\times$ OM et LC $\times$ CM : on a donc

$$\frac{OH}{CH} = \frac{OL \times OM}{CL \times CM} = \frac{OL}{CL} \times \frac{OM}{CM}$$

Mais les deux triangles OLC et AEC, OMC et BCD sont semblables, deux à deux, et donnent

$$\frac{OL}{CL} = \frac{AE}{AC} \qquad \frac{OM}{CM} = \frac{BD}{BC}$$

Donc, en substituant dans la première égalité les valeurs des rapports $\frac{OL}{CL}$ et $\frac{OM}{CM}$ données par les deux dernières, il vient

$$\frac{OH}{CH} = \frac{AE \times BD}{AC \times BC}$$

Et, si on remplace $AE \times BD$ par $\overline{OA}^2$, on a

$$\frac{OH}{CH} = \frac{\overline{AO}^2}{AC \times BC}$$

Le point H est donc fixe, comme nous l'avons dit.

Cela posé, on voit que, si on décrit un cercle sur OC comme diamètre, l'angle LOM sera d'autant plus petit que la corde LM sera elle-même plus petite, et on est ramené au problème de trouver la plus petite corde qu'on puisse mener par un point donné dans l'intérieur d'un cercle.

On sait que le minimum a lieu, lorsque la corde est perpendiculaire au diamètre passant par le point. De là on déduit facilement la même construction que tout à l'heure.

En effet, dans le cas du minimum, la droite LM étant perpendiculaire à OC, on a dans le triangle rectangle OLC

$$\frac{OH}{CH} = \frac{\overline{OL}^2}{\overline{CL}^2}$$

Remplaçant maintenant, dans cette égalité, les rapports de OL et OH à CL et CH par les valeurs précédemment trouvées, il vient

$$\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AO}^2}{AC \times BC}$$

D'où l'on déduit facilement comme dans la première solution

$$\frac{BD}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

3. *Trouver l'angle maximum de deux diamètres conjugués dans l'ellipse* (Concours).

Première solution. Soient (fig. 168) OA et OB les demi-axes de l'ellipse : du point O, comme centre, avec ces droites comme rayons, décrivons deux demi-cercles ; menons, dans le plus grand, les deux rayons rectangulaires OC et OD ; et, des points C et D, abaissons DP et CQ perpendiculaires sur le diamètre AA'.

Maintenant, si par les points E et F où OC et OD rencontrent le plus petit cercle, nous menons des parallèles EH et FG à AA′, jusqu'à la rencontre de DP et CQ, en G et L, et que nous tirions OG et OH, l'angle GOH sera l'angle des diamètres conjugués de l'ellipse, c'est-à-dire, celui dont on demande le maximum.

Cela posé, si, de l'angle GOH, on retranche l'angle droit DOC, il reste la somme des angles GOD, COH dont il revient, au même, de trouver le maximum.

Pour que ces deux angles se trouvent ajoutés, de manière à n'en former qu'un seul, faisons tourner le triangle OCQ autour du centre O jusqu'à ce que OC vienne coïncider avec OD ; alors le triangle se fixera dans la position DOM où il forme avec le triangle DOP un rectangle DMOP, et la droite EH se placera suivant une droite FK située, de telle manière que la figure DKFG sera aussi un rectangle; enfin la droite OH prendra une certaine position OK.

La question est maintenant ramenée à trouver le maximum de l'angle GOK.

Or, si on mène la diagonale GK, on a

$$GK = DF = OD - OF$$

et on a aussi

$$OL = \frac{OD + OF}{2}$$

Dès lors, la droite GK étant considérée comme fixe, le point O est sur un cercle qui a, pour centre, le point d'intersection L des diagonales du rectangle DKFG, et pour rayon, la demi-somme des demi-axes de l'ellipse : on est donc ramené au problème 2 (221).

Dans le cas particulier qui se présente ici où le centre L du cercle se trouve au milieu de la droite GK, on voit facilement par la discussion du problème cité, que le triangle GOK doit être isocèle; alors la figure DKFG devient un carré, et l'angle GDF ou son égal COA est un angle de 45°. Cette condition suffit pour déterminer le rayon OC, et, par suite, les diamètres conjugués dont l'angle est maximum. Ces diamètres conjugués feront, d'ailleurs, comme il est facile de le voir, des angles supplémentaires avec le demi-axe OA.

Deuxième solution. Plaçons le triangle OCQ sur son égal DOP (fig. 168). Alors la droite OH prend la position DR et l'angle DSO, formé en S par les deux droites OG et DK, est supplémentaire de la somme des angles GOD et SDO ou GOH. La question se trouve donc ramenée à trouver le maximum de l'angle DSO.

Mais, si l'on considère la droite DO comme fixe, on démontre facilement que le lieu du point S est un cercle qui a pour centre le milieu de OD ; on est donc ramené au même problème que dans la première solution.

4. *Un triangle rectangle* ABC, *dont le périmètre est donné, exécute une révolution complète autour de son hypothénuse, on demande le maximum du volume engendré.*

a représentant l'hypothénuse, on trouve facilement, pour expression du volume, $\frac{4\,p^2(p-a)^2}{3\,a}$, et, sous cette forme, on voit qu'au minimum de l'hypothénuse correspond le maximum de volume ; on est alors ramené à la question suivante :

Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, quel est celui qui a la plus petite hypothénuse ?

Nous allons maintenant ramener ce problème lui-même à cet autre :

Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, quel est celui dans lequel la bissectrice de l'angle droit est maximum ?

Pour cela, cherchons une relation entre $2p, a$ et cette bissectrice que nous désignerons par d.

En décomposant le triangle rectangle ABC, en deux triangles, par la bissectrice de l'angle droit, et écrivant que la surface totale est égale à la somme des surfaces partielles, on obtient pour expression de la surface du triangle rectangle

$\frac{(2p-a)d}{2\sqrt{2}}$. Mais la surface du triangle est aussi égale à $p(p-a)$; on a donc

$$d=\frac{2p(p-a)\sqrt{2}}{2p-a}$$

ou

$$\frac{d}{2p\sqrt{2}}=\frac{p-a}{2p-a}=\frac{2p-a-p}{2p-a}=1-\frac{p}{2p-a}$$

donc le maximum de d correspond au minimum de a.

Pour résoudre maintenant le dernier problème, il suffit de remarquer que si on trace (fig. 169) celui des cercles ex-inscrits au triangle ABC qui touche l'hypothénuse BC, ce cercle est déterminé, puisque l'on a

$$AE=AF=p$$

l'hypothénuse BC sera donc toujours tangente à l'arc EIF, et la longueur de la bissectrice AD sera plus petite que la longueur AI comprise, sur la bissectrice, entre le point A et l'arc du cercle : il n'y a d'exception que pour le cas où le point de contact de la tangente serait le point I lui-même ; alors la bissectrice atteint sa valeur maximum AI et le triangle ABC est isocèle.

On conclut de là que le triangle rectangle qui engendre le volume maximum est aussi isocèle ; ce qui suffit pour le déterminer.

TROISIÈME MÉTHODE. — PAR LA VARIATION SUCCESSIVE D'UN CERTAIN NOMBRE DE VARIABLES, LES AUTRES RESTENT FIXES.

220. Quand la grandeur géométrique dont on demande le maximum ou le minimum dépend de plusieurs variables, on peut souvent résoudre la question en donnant des valeurs déterminées à quelques-unes des variables.

Exemples :

1. *Parmi tous les triangles* ABC *inscrits dans un cercle donné, quel est celui qui a la plus grande surface?*

La quantité dont on demande le maximum dépend de trois variables qui sont les côtés du triangle. Supposons que le côté BC reste fixe, on aura encore deux variables AB et AC, mais qui dépendent l'une de l'autre, puisque le point A doit rester sur le cercle donné.

Quand le point A se déplace sur l'arc BAC, la base BC du triangle restant constante, la surface de ce triangle sera maximum, lorsque la hauteur correspondante AH sera elle-même maximum, c'est-à-dire, quand le point A sera au milieu D de l'arc; alors le triangle est isocèle. Mais, comme le côté qu'on a laissé constant est l'un quelconque des trois, on conclut, de ce qui précède, que deux côtés quelconques du triangle maximum doivent être égaux et, par suite, que le triangle demandé est équilatéral.

2. *Parmi tous les polygones, dont le nombre de côtés est donné et que l'on peut inscrire dans un cercle, quel est celui qui a le plus grand périmètre ou la plus grande surface?*

Soit inscrit dans le cercle donné un polygone quelconque de n côtés. Si on change seulement deux côtés, la somme des deux côtés sera maximum, lorsque ces côtés seront égaux (221): donc le polygone, dont le périmètre est maximum, doit avoir tous ses côtés égaux, et, par suite, est le polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle.

On démontrerait d'une manière analogue que le polygone régulier de n côtés est maximum en surface.

3. *Trouver un point tel que la somme de ses distances aux trois sommets d'un triangle donné soit minimum.*

Soit ABC le triangle donné (fig. 170), et D le point cherché; il faut trouver le minimum de la somme $AD + BD + CD$. Laissons constante la première de ces quantités; alors le point D se déplace sur un cercle qui a pour centre le point A et, pour rayon, AD; et il s'agit de trouver sur ce cercle un point, tel, que la somme de ses distances aux points B et C soit minimum.

Supposons que le point D soit choisi sur le cercle, de manière que la tangente GH en ce point fasse des angles égaux GDB, HDC avec les droites BD et BC; puis, ayant pris un point quelconque F de la tangente GH, tirons les droites FB, FC; d'après un théorème bien connu, on aura

$$BD + DC < BF + FC$$

Mais si on prolonge BF jusqu'à sa rencontre en E avec le cercle, et qu'on mène EC, on a

$$BF + FC < BE + EC$$

et, par suite,

$$BD + DC < BE + EC$$

Ainsi le point D correspondant au minimum demandé doit être tel, que les angles GDB, HDC soient égaux, ou ce qui revient au même, que le prolongement de la droite AD soit la bissectrice de l'angle BDC. Comme la longueur, qu'on a laissée constante, est l'une quelconque des trois distances du point D aux trois sommets du triangle, il en résulte que, si on prolonge chacune des trois droites, ces droites et leurs prolongements feront six angles consécutifs, égaux entr'eux et, par suite égaux chacun à 60°. Le point D correspondant au minimum est donc tel, que de ce point on voit les trois côtés du triangle sous des angles de 120°, et il sera déterminé par la rencontre de deux arcs capables de l'angle 120° et décrits sur deux côtés du triangle comme cordes.

Discussion. Si l'un des angles du triangle était égal à 120°, les deux arcs capables seraient tangents au sommet de cet angle, et à ce dernier point correspondrait le minimum demandé.

Si l'un des angles du triangle était plus grand que 120°, les deux arcs capables de l'angle 120°, décrits sur les côtés de l'angle obtus du triangle comme cordes, se couperaient hors de ce triangle, et, du point de rencontre, on verrait ces deux côtés sous des angles de 60°.

Comme la condition, que, du point donné, on voie les trois côtés du triangle sous des angles égaux, a été montrée nécessaire, du moins, quand le point D ne se confond pas avec un sommet du triangle donné, il en résulte, que, dans le cas actuel, aucun point du plan, excepté les sommets du triangle, ne peut correspondre au minimum demandé. Comme, d'ailleurs, il y a toujours nécessairement un minimum, on peut affirmer qu'il a lieu, lorsque le point D se confond avec l'un des sommets du triangle, et ce sommet est évidemment celui de l'angle obtus.

4. *Trouver, parmi les quadrilatères convexes, que l'on peut former avec trois côtés, celui qui a la plus grande surface.*

Soit ABCD (fig. 171) l'un des quadrilatères dans lequel on donne AB, AD et BC: menons la diagonale AC, et supposons que le triangle ABC reste fixe; alors le triangle ACD aura évidemment une surface maximum, quand l'angle DAC sera droit. De même, si on mène la diagonale BD, on voit que l'angle DBC doit être droit: le quadrilatère maximun est donc un quadrilatère inscriptible, et le côté inconnu doit être le diamètre du cercle dans lequel le quadrilatère est inscrit.

Nous allons voir que cette condition détermine la figure.

En effet, désignons par $a,b,c,$ les côtés AB, AD et BC, par x et y les diagonales BD et AC, et par z le côté inconnu DC: les triangles rectangles DAC, BCD donnent

$$z^2 - y^2 = b^2 \qquad z^2 - x^2 = c^2$$

et, comme le quadrilatère ABCD est inscriptible, on a

$$bc + az = xy$$

En éliminant x et y entre les trois équations, on a une équation du troisième degré qu'on ne peut pas, en général, abaisser à un degré moindre; mais si on suppose deux des côtés égaux, par exemple, les côtés opposés b et c, le problème peut être résolu avec la règle et le compas.

En effet, le quadrilatère ABCD, étant inscriptible et ayant les côtés opposés égaux, devient un trapèze isocèle dans lequel les diagonales sont égales: alors, en appliquant le théorème du quadrilatère inscrit, on a

$$az + b^2 = x^2$$

et l'un des triangles rectangles donne

$$x^2 = z^2 - b^2$$

En éliminant x entre les deux équations, il vient

$$z^2 - az - 2b^2 = o \quad \text{ou} \quad z - \frac{2b^2}{z} = a$$

On est donc ramené à trouver deux droites, connaissant leur différence a et leur produit $2b^2$; la plus grande sera le diamètre du cercle circonscrit au trapèze isocèle : ayant décrit le demi-cercle, on achève ensuite facilement la construction de la figure.

Remarque. Le trapèze isocèle que nous avons trouvé est le plus grand des quadrilatères que l'on peut former avec trois côtés, quand les deux côtés qui sont opposés sont égaux ; il est donc, en particulier, le trapèze maximum parmi tous les trapèzes isocèles que l'on peut former avec les mêmes côtés.

Généralisation. — Le raisonnement, que nous venons de faire pour un quadrilatère, s'étend évidemment à un polygone quelconque dont on donne tous les côtés, excepté un seul : le plus grand des polygones doit être tel qu'il soit inscrit dans un demi-cercle dont le côté inconnu est le diamètre.

La condition précédente suffit, d'ailleurs, pour déterminer le polygone, lorsqu'on fait connaître l'ordre dans lequel les côtés donnés se succèdent (*).

Avant de démontrer cette dernière proposition, remarquons, d'abord, que, si deux arcs ont une corde commune, des deux angles au centre appuyés sur cette corde, le plus grand correspondra au plus petit cercle ; car le centre de ce dernier cercle étant plus près de la corde, l'angle correspondant est enveloppé par l'autre.

Cela posé, admettons qu'on ait trouvé un demi-cercle qui satis-

(*) Legendre — Appendice au livre IV. Propositions IV et V.

fasse à la question. Si on prend un cercle plus grand, les côtés donnés du polygone, qui sont des cordes, répondront à des angles au centre plus petits : la somme de ces angles au centre sera donc moindre que deux angles droits, et, par suite, le polygone ne sera plus inscrit dans un demi-cercle. Le contraire aura lieu si on prend un cercle plus petit ; donc le polygone dont il s'agit, ne peut être inscrit que dans un seul cercle, et, quand on donne l'ordre des côtés, il est parfaitement déterminé.

Remarque. — Le maximum serait encore le même, si l'ordre des côtés avait été laissé arbitraire. En effet, d'après le raisonnement qui précède, le diamètre du cercle circonscrit resterait évidemment le même ; d'ailleurs, la surface du polygone ne changerait pas non plus, puisqu'elle serait toujours égale à la différence entre le demi-cercle et la somme des segments qui est indépendante de l'ordre des côtés.

Quatrième méthode. — Par renversement.

Elle est fondée sur le théorème suivant :

221. *Lorsque deux quantités variables* u *et* v *sont liées entr'elles de telle sorte que, si la première prend une valeur déterminée* a, *la seconde passe par une suite de valeurs dont la plus grande est* b ; *réciproquement, quand la seconde aura la valeur déterminée* b, *la première aura pour valeur minimum* a, *pourvu que la valeur maximum* b *de la quantité* v *diminue en même temps que la valeur donnée* a *de la variable* u.

Il s'agit de faire voir que, lorsque v prend la valeur b, la valeur minimum de u est a. En effet u ne peut prendre une valeur a' plus petite que a, puisque, par hypothèse, la plus grande des valeurs de v, qui correspondrait à a' serait une valeur b' plus petite que b.

Le théorème que nous venons de démontrer permet de ramener les unes aux autres les questions de maxima et de minima.

EXEMPLES.

1° *Parmi tous les triangles de même surface, quel est celui auquel est circonscrit le plus petit cercle?*

Nous savons que le triangle de surface maximum inscrit dans un cercle est le triangle équilatéral. Il est évident, d'ailleurs, que lorsque la surface du cercle décroît, il en est de même de celle du triangle équilatéral qui est représentée par $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$: donc, dans la question inverse, le triangle demandé est aussi équilatéral.

2° *Parmi tous les triangles rectangles qui, en tournant autour de leurs hypothénuses, engendrent un volume donné, quel est celui qui a le plus petit périmètre?*

Dans la question inverse, problème 4 (219), le triangle rectangle, satisfaisant à la condition de maximum est isocèle. D'ailleurs, on s'assure que, lorsque le périmètre diminue, le volume engendré diminue lui-même; donc le minimum demandé a lieu aussi quand le triangle rectangle est isocèle.

L'application de la méthode étant toujours très-simple, nous ne donnerons pas d'autres exemples.

CINQUIÈME MÉTHODE. — PAR LES INFINIMENT PETITS.

222. Cette méthode va étendre beaucoup les ressources de la géométrie dans les recherches qui nous occupent. Elle donnera, en particulier, dans un grand nombre de cas, des solutions, simples et presque intuitives, de questions qu'on ne traite ordinairement en algèbre qu'à l'aide de calculs compliqués ou qui exigent une discussion minutieuse. Elle repose sur les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME I.

223. *Si une quantité* Y *est la somme de deux quantités* U *et* V *qui dépendent d'une même variable* x, *et dont la première croît, tandis que la seconde décroît pour des valeurs* *croissantes de* x; *le maximum ou le minimun de* Y *auront lieu, quand l'accroissement de* x *tendant vers zéro, la limite correspondante du rapport de l'augmentation de* U *à la diminution de* V *aura pour valeur l'unité.*

En effet, soient k et l l'accroissement et la diminution de U et de V qui correspondent à un même accroissement très-petit de x. Si k est plus grand que l, ou, ce qui revient au même, si $\frac{k}{l}$ est plus grand que 1, la quantité Y croîtra ; et elle décroîtra, au contraire, quand $\frac{k}{l}$ sera plus petit que 1. Alors, suivant que le rapport $\frac{k}{l}$ passera d'une valeur plus grande que 1 à une valeur plus petite, ou que le contraire aura lieu, la quantité Y passera par un maximum ou un minimum : l'un ou l'autre de ces deux états de grandeur sera donc obtenu quand le rapport $\frac{k}{l}$ sera égal à 1.

Comme on veut trouver les variations de grandeur de la quantité Y, quand elle passe d'une valeur à une autre infiniment voisine, les accroissements k et l doivent être considérés comme tendant vers zéro, en même temps que l'accroissement h donné à x tend lui-même vers zéro. Ce que nous venons de dire s'applique donc à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{k}{l}$, lorsque h tend vers zéro.

THÉORÈME II.

224. *Si une grandeur* Y *est la différence de deux autres* U *et* V *qui croissent ou décroissent ensemble, et en même temps qu'une variable* x, *dont elles dépendent, augmente* : *on aura le maximum ou le minimum de la grandeur, en exprimant que la limite du rapport des deux accroissements de* U *et* V *a pour valeur l'unité, quand on fait tendre l'accroissement de* x *vers zéro.*

La démonstration est la même que celle du premier théorème.

Remarque. Les deux théorèmes précédents ne diffèrent pas, au fond, du théorème de Fermat relatif aux maxima et minima, mais ils présentent peut-être une idée plus nette à l'esprit, et, d'ailleurs, comme on va le voir, ils se prêtent, de la manière la plus heureuse, à des applications très-variées.

Exemples.

1. *Etant donnés* (fig. 172) *un angle* DOE, *et un point* C *dans son intérieur, mener par ce point une droite* AB, *telle que le triangle* AOB, *déterminé par cette droite et les deux côtés de l'angle, ait une surface minimum.*

Il est d'abord évident que la surface du triangle doit passer par un minimum différent de zéro. Pour le déterminer, considérons la droite ACB à laquelle correspond le minimum demandé, et une droite infiniment voisine A'CB' qui passe aussi par le point C; puis tirons OC. Le triangle OAB étant considéré comme la somme des triangles OCA et OCB, l'augmentation et la diminution sont représentées, respectivement, par les surfaces des triangles ACA' et BCB' : on devra donc avoir d'après le théorème I

$$lim \frac{CAA'}{CBB'} = 1$$

ou, parce que les triangles ont les angles en C égaux,

$$lim \frac{CA \times CA'}{CB \times CB'} = 1$$

Mais, à la limite, les points A' et B' se confondent avec A et B, on a donc

$$\frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2} = 1 \quad \text{ou} \quad CA = CB$$

La droite demandée est donc celle qui est partagée en deux parties égales au point C.

2. *Trouver parmi tous les rectangles inscrits dans un demi-cercle celui qui a le périmètre maximum.*

Soit ABCD (fig. 173) l'un des rectangles inscrits dans le demi-cercle EGF : La question revient à trouver le maximum de BC + 2OC. Considérons un rectangle A′B′C′D′ infiniment voisin du premier, et abaissons du point B′ la perpendiculaire B′I sur BC; l'accroissement de 2OC sera 2CC′ ou 2IB′ et la diminution de BC sera IB : le rapport de l'augmentation à la diminution est donc $\frac{2\,IB'}{IB}$. Mais si on tire la corde BB′, et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre en K du diamètre EF, on a

$$\frac{IB'}{IB} = \frac{CK}{BC}$$

et, par suite,

$$lim\,\frac{2IB'}{IB} = lim\,\frac{2CK}{BC}$$

Menons maintenant la tangente au point B, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en T avec le diamètre EF : le point B′ se confond avec le point B, le point K avec le point T, et on a

$$lim\,\frac{2IB'}{IB} = \frac{2CT}{BC}$$

Mais les triangles semblables CBT, OBC donnent

$$\frac{CT}{BC} = \frac{BC}{OC}$$

et, par suite, on a

$$lim\,\frac{2IB'}{IB} = \frac{2BC}{OC}$$

Si on suppose actuellement que le sommet B s'avance de G en F, le rapport $\frac{2BC}{OC}$ commence par être infini, et le périmètre croît d'abord ; quand le sommet est en F, le rapport, au contraire, est nul et le périmètre finit par décroître : il a donc dû passer par un maximum. D'après le théorème I on obtient ce maximum, en posant

$$\frac{2BC}{OC} = 1$$

on a donc finalement

$$BC = \frac{OC}{2}$$

et, de là, on déduit facilement une construction pour déterminer le point B.

3. *Étant donnés* (fig. 174) *un angle droit* DOE *et un point* C *pris sur l'un des côtés* OD, *mener par ce point deux droites* CA *et* CB *qui coupent le côté* OE *en deux points* A *et* B, *tels que le rapport des segments* OA *et* OB *soit égal au rapport de deux lignes données* M *et* N, *et que l'angle* ACB *soit maximum* (Concours).

Nous avons déjà donné une solution de ce problème : voici une de celles qui ont été trouvées par l'*élève qui a obtenu le premier prix.*

Quand le point A se confond avec le sommet O de l'angle, ou quand il s'éloigne à l'infini sur le côté OE, l'angle est nul. Par conséquent, il existe une position des droites CA et CB pour laquelle l'angle ACB est maximum.

Soient ACB l'angle maximum et A'CB' un angle formé par les droites CA' et CB' infiniment voisines des droites CA et CB : l'angle ACB étant partagé en deux par une droite quelconque menée dans son intérieur, on voit que l'une des parties augmente de l'angle ACA', tandis que l'autre diminue de l'angle BCB'.

D'après le théorème 1 les angles ACA', BCB' doivent être égaux : alors les deux triangles ACA', BCB', ayant un angle égal, sont, entr'eux, comme les produits $CA \times CA'$, $CB \times CB'$ des côtés qui comprennent les angles égaux ; mais les mêmes triangles, ayant même hauteur OC, sont, entr'eux, comme leurs bases; on a, par conséquent,

$$\frac{CA \times CA'}{CB \times CB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

mais des égalités

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{M}{N}$$

on déduit

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{M}{N}$$

Il vient donc

$$\frac{CA \times CA'}{CB \times CB'} = \frac{M}{N}$$

Et, en passant à la limite, on a

$$(1) \qquad \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{M}{N}$$

Mais dans les triangles rectangles OCA,OCB on a

$$(2) \qquad \overline{CA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OA}^2 \qquad \overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2$$

et l'égalité (1) devient

$$\frac{\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2}{\overline{OC}^2 + \overline{OB}^2} = \frac{M}{N} = \frac{2OA \times OC}{2OB \times OC}$$

Ajoutant et retranchant, terme à terme, la première et la troisième fraction, puis extrayant les racines on a

$$\frac{OC + OA}{OC + OB} = \frac{OC - OA}{OB - OC} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{N}}$$

(Dans le second membre, on n'a pas écrit OC—OB, parce qu'en ajoutant les fractions, terme à terme, on arrivait à cette conséquence que M est égale à N).

Ajoutant maintenant et retranchant, membre à membre, les deux dernières fractions, il vient

$$\frac{OA}{OC} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{N}} \qquad \frac{OC}{OB} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{N}}$$

Et en divisant, membre à membre, on a

$$\overline{OC}^2 = OA \times OB$$

De cette dernière égalité et de celle qu'on a, par hypothèse,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{M}{N}$$

on déduit

$$\frac{\overline{OA}^2}{OC^2} = \frac{M}{N} \quad \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{N}{M}$$

Et les points A et B peuvent être facilement construits.

Remarque 1. — On peut objecter à la démonstration précédente que les angles ACA′,BCB′ ne sont rigoureusement égaux que, lorsqu'ils sont nuls, et qu'alors les triangles dont on s'est servi n'existent plus. Mais on peut la rendre plus rigoureuse de la manière suivante :

Soient h et k les arcs qui mesurent les angles ACA′,BCB′ dans le cercle de rayon 1 : on aura

$$\frac{CA \times CA' \sin h}{CB \times CB' \sin k} = \frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{CA \times CA'}{CB \times CB'} \times \frac{\frac{\sin h}{h}}{\frac{\sin k}{k}} \times \frac{h}{k} = \frac{M}{N}$$

Maintenant, quand on passe à la limite pour avoir le maximum, $\frac{h}{k}$ a pour limite l'unité, et il en est de même des rapports $\frac{\sin h}{h}$, $\frac{\sin k}{k}$. On a donc bien, comme précédemment

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{M}{N}$$

Remarque 2. — On pourra résoudre tout à fait de la même manière le problème 2 (219).

4. *Trouver parmi tous les cylindres que l'on peut inscrire dans une sphère celui dont la surface totale est maximum.*

Soient OBAC et OB′A′C′ (fig. 175) les rectangles qui engendrent les moitiés de deux cylindres inscrits dans la sphère OD et qui sont infiniment voisins, l'un de l'autre. Quand on passe du premier au second, la diminution des deux bases est $2\pi\left(\overline{OC}^2 - \overline{OC'}^2\right)$ et l'augmentation de la surface latérale, si toutefois elle augmente, est égale à

$$4\pi\,(OC' \times IA' - AC \times (OC - OC')$$

(On trouve ce dernier résultat, en prenant pour terme de comparaison la surface convexe du cylindre engendré par le rectangle double du rectangle OBI).

Mais on a

$$OC - OC' = AI \qquad \overline{OC}^2 - \overline{OC'}^2 = AI \times (OC + OC')$$

Alors on obtient pour l'expression du rapport de l'augmentation à la diminution

$$\frac{4 \times (OC' \times IA' - AC \times IA)}{2IA \times (OC + OC')} \quad \text{ou} \quad \frac{OC' \times \frac{IA'}{IA} - AC}{\frac{OC + OC'}{2}}$$

Passant maintenant aux limites, et remarquant qu'ici, comme dans le problème 2, on a

$$lim\, \frac{IA'}{IA} = \frac{OC}{AC}$$

On trouve pour la limite de l'augmentation à la diminution

$$\frac{\frac{\overline{OC}^2}{AC} - AC}{OC} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}{OC \times AC}$$

On voit, d'abord, que, lorsque OC est plus petit que AC la surface latérale diminue au lieu d'augmenter : alors la surface totale diminue, pour une double raison, jusqu'à ce qu'elle devienne nulle au moment où le sommet A du rectangle générateur est à l'extrémité du rayon OF perpendiculaire au diamètre ED.

Quand le sommet A, au contraire, se confond avec le point D, l'expression du rapport limite devient infinie, et par suite, la surface totale du cylindre commence par croître, quand le sommet A part du point D : il y a donc nécessairement un maximum. Pour le déterminer, on pose, suivant la règle

$$\frac{\overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}{OC \times AC} = 1$$

D'où l'on tire

$$\overline{AC}^2 = OC\,(OC - AC)$$

Il résulte, de là, que, si l'on portait sur le rayon OD une longueur OH égale à AC, on aurait

$$\overline{OH}^2 = OC \times HC$$

et, par suite, le rapport de AC à OC est égal à celui du plus grand segment d'une droite, partagée en moyenne et extrême raison; à la droite entière. On arrive ainsi à la construction suivante :

Portez sur la tangente en D, à partir du point de contact, une longueur EL égale au côté du décagone régulier inscrit dans le grand cercle, et menez la droite OL passant par le centre O de la sphère ; le point, où cette droite rencontrera le cercle, sera le sommet A correspondant au rectangle qui engendre le cylindre de surface totale maximum.

5. *Etant données deux sphères extérieures l'une à l'autre, trouver, sur la ligne de leurs centres et dans l'intervalle qui les sépare un point. tel que, si on le prend pour sommet commun de deux cônes de révolution tangents aux sphères, la somme des deux zônes comprises dans l'intérieur des deux cônes soit maximum.*

Soient r et r' les rayons de la plus grande et de la plus petite sphère, x et x' les distances aux deux centres du sommet des deux cônes, d la distance des centres : on trouve facilement pour expression de la somme des deux zônes $2\pi\left(r^2+r'^2-\frac{r^3}{x}-\frac{r'^3}{x'}\cdot\right)$ En laissant de côté le multiplicateur 2π et la somme $r^2+r'^2$, on voit qu'on est ramené à étudier les variations de la quantité $\frac{r^3}{x}+\frac{r'^3}{x'}$

Supposons que x prenne un accroissement h; comme la somme de x et x' est constante, x' diminuera de h ; la première quantité $\frac{r^3}{x}$ diminuera de $\frac{hr^3}{(x+h)x}$, et la seconde augmentera de $\frac{hr'^3}{x'(x'-h)}$; le rapport de l'augmentation à la diminution sera donc

$$\frac{r'^3 x}{r^3 x'} \times \frac{x+h}{x'-h}$$

et sa limite sera

$$\frac{r'^3 x^2}{r^3 x'^2}$$

Supposons, d'abord, que le sommet du cône soit le point où la ligne des centres rencontre la plus grande sphère, le rapport limite devient alors $\frac{r'}{r} \times \left(\frac{r'}{d-r}\right)^2$.

Mais la fraction $\frac{r}{r'}$ est évidemment plus petite que 1, et il en est de même de la fraction $\frac{r'}{d-r}$, puisque les deux sphères étant extérieures, d est plus grand que $r+r'$; la limite du rapport commence donc par être plus petite que 1, et la quantité $\frac{r^3}{x}+\frac{r^3}{x'}$ commence par décroître.

Si on fait maintenant coïncider le sommet du cône avec le point où la ligne des centres rencontre la plus petite sphère, la limite du rapport devient égale à $r' \frac{(d-r')^2}{r^3}$, et elle sera plus grande ou plus petite que 1, suivant que d sera plus grand ou plus petit que $r'+r\sqrt{\frac{r}{r'}}$: considérons successivement les deux cas.

Premier cas. — On a

$$d < r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Alors la valeur maximum du rapport $\frac{r'^3 x^2}{r^3 x'^2}$ est plus petite que 1, et, par suite, le rapport de l'augmentation à la diminution est toujours plus petit que l'unité : la quantité $\frac{r^3}{x}+\frac{r'^3}{x'}$ va donc constamment en diminuant, et, la somme des deux zônes en augmentant, quand le sommet des deux cônes marche de la plus grande sphère à la plus petite.

DEUXIÈME CAS. — On a

$$d > r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Alors comme la fonction commence par décroître et finit par croître, on a évidemment un minimum pour la quantité $\frac{r^3}{x} + \frac{r'^3}{x}$, et, par suite, un maximum pour la somme des zônes. Le minimum s'obtient d'ailleurs comme à l'ordinaire en écrivant que le rapport limite $\frac{r'^3 x^2}{r^3 x'^2}$ est égal à 1.

On en déduit

$$\frac{x}{x'} = \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{r'^3}}$$

et par suite,

$$x = \frac{d\sqrt{r^3}}{\sqrt{r^3} + \sqrt{r'^3}}$$

Pour que la valeur de x soit admissible, il faut qu'elle soit comprise entre r et $d - r$: en écrivant qu'il en est ainsi, on retrouve la condition

$$d > r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$$

6. *Etant donnée une feuille de papier rectangulaire, on enlève un carré aux quatre coins, et on relève les quatre rectangles, qui font saillie par rapport à la partie centrale de la figure, jusqu'à ce que leurs plans soient perpendiculaires à celui de la feuille de papier : on demande quel doit être le côté du carré pour que le volume de la boîte ainsi formée soit maximum.*

Soient EFGH (fig. 176) le rectangle donné, et EI le côté du carré auquel correspond le maximum demandé. Menons des parallèles aux quatre côtés du rectangle donné, à des distances égales à EI; ces droites détermineront par leurs intersections un rectangle ABCD qui sera la base du parallélipipède rectangle demandé, tandis que AI ou son égale EI en sera la hauteur.

Considérons maintenant un parallélipipède rectangle infini ment peu différent du premier et dont la base A'B'C'D' a ses côtés, respectivement, parallèles à ceux de la base ABCD et à unemême distance II'.

Quand on passe du premier parallélipipède à un second qui a, pour base, le rectangle A'B'C'D', mais même hauteur que le premier, il y a une diminution qui est représentée par $(AB \times AD - A'B' \times A'D') \times EI$; et quand on passe de celui-ci au parallélipipède qui a, pour base, A'B'C'D' et, pour hauteur, EI, il y a une augmentation qui est représentée par $A'B' \times A'D' \times II'$.

On a donc pour valeur du rapport de l'augmentation à la diminution,

$$\frac{A'B' \times A'D' \times II'}{(AB \times AD - A'B' \times A'D') \times EI}$$

Le dénominateur peut s'écrire sous cette forme

$$(AB - A'B') \times AD + (AD - A'D') \times A'B'$$

Et en observant qu'on a

$$AB - A'B' = AD - A'D' = 2\,II'$$

il devient

$$2II' \times (AD + A'B')$$

Le rapport est donc égal à

$$\frac{A'B' \times A'D'}{(AD + A'B')\,EI}$$

Et en écrivant que sa limite est égale à 1, on a

$$EI = \frac{AB \times AD}{2\,(AB + AD)}$$

On voit, par là, que le parallélipipède maximum est tel, que le quadruple de sa hauteur est moyenne harmonique entre les dimensions de sa base.

Si on veut maintenant trouver l'équation qui donne le côté EI du carré cherché, on pose

$$EF = a \quad EH = b \quad EI = x$$

on a alors

$$AB = a - 2x \qquad AD = b - 2x$$

et en substituant dans l'équation de condition, on trouve

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0$$

Nous allons maintenant donner, comme dernière application de la méthode infinitésimale, la démonstration de deux théorèmes auxquels on arriverait, du reste, facilement, à l'aide de simples identités algébriques (*).

THÉORÈME I.

225. *Étant donné, dans un triangle rectangle* ABC (fig. 177), *l'un des côtés de l'angle droit* AC, *si* m *et* n *représentent deux nombres constants dont le premier est le plus grand, la quantité* m BC — n AB *passera par un minimum, quand on aura*

$$\frac{BC}{AB} = \frac{m}{n}$$

Voyons, d'abord, comment varie la quantité mBC — nAB, quels que soient les nombres m et n, lorsque le sommet B se meut sur la ligne indéfinie AI, depuis le point A jusqu'à l'infini. Pour cela, formons, suivant la méthode, l'expression du rapport des deux accroissements de mBC et nAB.

Soient B et B′ deux positions très-voisines du sommet mobile. Si, du point C, comme centre, et avec CB, comme rayon, nous décrivons un cercle qui coupe CB en D, la première augmentation sera m DB, et, la seconde, nBB′. D'après le théorème II (224). Il s'agit de trouver la limite de $\frac{mDB'}{nBB'}$

Mais en appliquant le théorème relatif aux sécantes d'un cercle, on a

(*) Voir la fin de la note 1, page 290.

$$\text{DB}' \times (\text{DB}' + 2\text{DC}) = \text{BB}' \times (\text{BB}' + 2\text{AB})$$

ou

$$\frac{\text{DB}'}{\text{BB}'} = \frac{\text{BB}' + 2\text{AB}}{\text{DB}' + 2\text{CB}}$$

et, en passant aux limites, il vient

$$\frac{\text{DB}'}{\text{BB}'} = \frac{\text{AB}}{\text{CB}}$$

La limite cherchée est donc $\frac{m\text{AB}}{n\text{CB}}$.

On voit, d'abord, que, lorsqu'on a m plus grand que n ou *égal à ce nombre*, le rapport est toujours plus petit que 1 : par conséquent, la quantité $m\text{BC} - n\text{AB}$ va constamment en diminuant, et il n'y a pas lieu de poser la question de minimum.

Supposons maintenant qu'on a m plus grand que n. Le rapport $\frac{m\text{AB}}{n\text{CB}}$ commence par être nul, quand le point B coïncide avec le point A, et par suite, la quantité $m\text{BC} - n\text{AB}$ commence par décroître.

Lorsque le point B est à l'infini sur AL, on a

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{AC}}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\overline{\text{BC}}^2} = 1 - \frac{\overline{\text{AC}}^2}{\overline{\text{BC}}^2}$$

et, par suite,

$$\mathit{lim}\ \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\overline{\text{CB}}^2} = 1$$

La limite de $\frac{m\text{AB}}{n\text{CB}}$ est donc $\frac{m}{n}$ nombre, par hypothèse, plus grand que 1. La quantité $m\text{BC} - n\text{AB}$ finit donc par croître ; par conséquent elle a dû passer par minimum.

On obtient ce minimum suivant la règle, en posant

$$\frac{m\text{AB}}{n\text{CB}} = 1$$

On a ainsi

$$\frac{\text{BC}}{\text{AB}} = \frac{m}{n}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

TRÉORÈME II.

226. *Étant donnés deux nombres positifs* m *et* n *et l'hypothénuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC (178), *la quantité* m AC + n AB *passera par un maximum, lorsqu'on aura*

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$$

Sur l'hypothénuse BC comme diamètre décrivons une demi-circonférence, et soient A et A′ deux positions très-voisines du sommet de l'angle droit : tirons CA, BA, CA′, BA′, et, des points C et B comme centres avec des rayons respectivement égaux à CA′ et BA′, traçons des arcs de cercles qui rencontrent le prolongement de CA en E, et AB en D. Quand le sommet de l'angle droit passe de la position A à la position A′, le rapport de l'augmentation à la diminution est $\frac{m\mathrm{AE}}{n\mathrm{AD}}$.

Pour trouver maintenant la limite de ce rapport, imitons la méthode que l'on donne ordinairement pour démontrer que la tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs menés du point de contact aux deux foyers.

A cet effet, tirons AA′, DA′, EA′, par le point B menons BF parallèle à DA′, puis par le point de rencontre F de cette parallèle avec AA′ prolongée, menons FG parallèle à EA′, jusqu'à la rencontre en G avec la droite indéfinie CA. On a, par des triangles semblables,

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AB}$$

Mais, si on passe à la limite et qu'on désigne par K la position limite du point F sur la tangente en A, le quadrilatère GABF devient un rectangle GABK, et l'on a

$$\frac{AE}{AD} = \frac{BK}{AB}$$

d'autre part, les triangles ABK,ABC sont évidemment semblables et donnent

$$\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$

La valeur limite du rapport de l'accroissement à la diminution est donc enfin $\frac{m\mathrm{AB}}{n\mathrm{AC}}$.

Quand le point A est confondu avec le point C, le rapport est égal à l'infini, et la quantité $m\mathrm{AC}+n\mathrm{AB}$ commence par croître. Mais le rapport est nul quand le point A vient en B ; par conséquent, la même quantité finit par décroître : il y a donc un maximum et on l'obtient par l'égalité

$$\frac{m\mathrm{AB}}{n\mathrm{AC}}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{m}{n}$$

Sixième méthode. — Par l'emploi des deux théorèmes précédents.

227. Dans cette méthode, on essaie de donner à l'expression de la quantité, dont on demande le maximum ou le minimum, une forme telle, que l'un des deux théorèmes lui soit applicable.

Exemples :

1. Alvéole des abeilles. — Le problème est le suivant :

Étant donné un prisme droit dont les deux bases sont des hexagones réguliers, on mène les diagonales AD,AC,DC *de la base supérieure* ABCDE, *et on prolonge l'axe du prisme d'une longueur déterminée* OH, *au dessus de la base supérieure ; si alors, par le point* H *et les trois diagonales, on mène trois plans que l'on prolonge jusqu'à la rencontre de la surface latérale du prisme, on obtiendra un volume qui restera constant lorsque le point* H *se déplacera sur la perpendiculaire* OH : *on demande le minimum de la surface totale de ce volume.*

On démontre facilement que le volume est constant.

Maintenant nous remarquons que la surface totale se compose de la base inférieure du prisme, de six trapèzes égaux, et de trois losanges, aussi égaux, qui se coupent en H.

Si on désigne l'arête latérale du prisme par l, le côté de l'hexagone par a, la droite OH par x, et la perpendiculaire abaissée du point H sur AC par y, on aura, pour expression de la surface de chaque trapèze, $\frac{(2l - x)\,a}{2}$, et pour celle de la surface de chaque losange $ay\sqrt{3}$. Si on laisse de côté la base inférieure dont la surface est constante, on peut dire qu'on est ramené à trouver le minimum de la quantité $3a\,(2l + y\sqrt{3} - x)$, ou, tout simplement, de la quantité $y\sqrt{3} - x$.

Mais on si mène OI, on voit que y et a sont l'hypothénuse et le côté variable d'un triangle rectangle dont le côté OI égal à $\frac{a}{2}$ est constant : d'ailleurs, dans l'expression $y\sqrt{3} - x$ le multiplicateur de y est plus grand que celui de x ; on peut donc appliquer le théorème I (228), et le minimum aura lieu quand on aura

$$\frac{y}{x} = \sqrt{3}$$

Si on veut calculer x, de l'égalité précédente on déduit

$$\frac{y^2}{x^2} = 3 \qquad \frac{y^2 - x^2}{x^2} = 2 \qquad \frac{a^2}{4x^2} = 2$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

2. Problème du chemin de fer. — *Le baron T** qui habite le château* B, *situé à une distance* BC *d'une voie de chemin de fer* DE (fig. 180), *demande qu'une gare soit placée sur cette voie dans une position* F, *telle que, s'il se rend dans sa voiture à la gare, puis, en chemin de fer, de la gare à une ville* E *située sur la voie, il arrive à destination dans le temps le plus petit possible. On demande de trouver la position du point* F *où la gare doit être placée.*

Soient v et v' les vitesses de la voiture et des wagons, et t la durée de l'arrêt en gare; la quantité dont il faut trouver le minimum a pour expression

$$\frac{\mathrm{BF}}{v} + t + \frac{\mathrm{EC}}{v'} - \frac{\mathrm{FC}}{v'}$$

mais comme $t + \frac{\mathrm{EC}}{v'}$ est constant, tout revient à trouver le minimum de $\frac{\mathrm{BF}}{v} - \frac{\mathrm{FC}}{v'}$

Le triangle BCF étant un triangle rectangle dans lequel un côté de l'angle droit BC est constant, et $\frac{1}{v}$ étant plus grand que $\frac{1}{v'}$, on peut appliquer le théorème I (228), et on aura

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}} = \frac{v'}{v}$$

Par un calcul semblable à celui du problème précédent, on déduit de là

$$\mathrm{FC} = \mathrm{BC} \times \frac{v}{\sqrt{v'^2 - v^2}}$$

ou en posant

$$\frac{v'}{v} = m$$

$$\mathrm{FC} = \frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

La dernière formule montre que, lorsque la vitesse du chemin de fer croît par rapport à la vitesse de la voiture, FC diminue, mais ne peut jamais devenir nulle.

3. Problème sur la lumière. — *Deux disques semi-circulaires et infiniment minces s'appuient sur un même miroir horizontal par le diamètre qui les termine; ils sont, d'ailleurs, dans un même plan perpendiculaire au plan de ce miroir : un rayon lumineux qui se meut dans ce plan vient raser la circonférence de l'un des disques, et après s'être réfléchi sur le miroir vient toucher la circonférence du second; on demande de prouver que le chemin suivi par le rayon lu-*

mineux est le plus long de tous les chemins qui sont tangents aux deux disques et qui rencontrent le miroir.

Le problème revient évidemment à trouver, sur la ligne des centres de deux cercles O et C, un point H tel, que, si de ce point on mène des tangentes AB et CD, leur somme soit maximum.

Désignons par m et n des constantes indéterminées: La question de trouver le maximum de $AB + AD$ revient à celle de trouver le minimum de $mOC - n(AB + AD)$, ou de $(mOA - nAB) + (mCA - nAD)$.

Si l'on peut déterminer le point A et les constantes m et n de telle sorte que les deux quantités $mOA - nAB$ et $mCA - nAD$ soient minima en même temps, le problème sera résolu. Or, en supposant m plus grand que n, on peut appliquer le théorème I aux deux expressions, et on a

$$\frac{OA}{AB} = \frac{m}{n} \quad \frac{CA}{AD} = \frac{m}{n}$$

de là on déduit

$$\frac{OA}{AB} = \frac{CA}{AD}$$

Et, par suite, les triangles OAB, CAD sont semblables et les angles OAB, CAD égaux.

Si, maintenant, on mène la droite AE tangente au cercle C, l'angle EAC est égal à l'angle DAC, et par suite, à l'angle OAB. Les droites AB et AE sont donc le prolongement l'une de l'autre, et le point A est le point où la tangente commune BE aux deux cercles rencontre la ligne des centres. On voit bien, d'ailleurs, que le point A déterminé comme il vient d'être dit, est tel que les quantités $mOA - nAB$ et $mCA - nAD$ sont minima en même temps, quand on prend pour m et n des constantes, telles que leur rapport soit égal à celui de la distance des centres à la longueur de la tangente commune.

Si on revient maintenant à l'énoncé primitif, on remarque que le chemin maximum BAD est bien celui du rayon lumineux.

4. *Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel que la somme des carrés de ses distances à ses trois côtés soit minimum.*

Nous allons appliquer ici le théorème II renversé.

Le théorème II peut s'énoncer ainsi :

Lorsque la somme des carrés de deux quantités variables x *et* y *est constante, le maximum de* mx + ny *a lieu quand le rapport de* y *à* x *est égal au rapport des constantes* m *et* n.

En renversant le théorème (4^me^ méthode), on en conclut que, réciproquement, quand la quantité $mx + ny$ est donnée, $x^2 + y^2$ est minimum, si l'on a

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

Cela posé, soient ABC le triangle donné (fig. 182), D un point pris dans son intérieur, et DE, DF, DG les distances de ce point aux trois côtés.

En désignant par S la surface du triangle ABC, on a

$$BC \times DE + AC \times DF + AB \times DG = 2S$$

Et il s'agit de trouver le minimum de la quantité

$$\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{DG}^2$$

Supposons, d'abord, que le point D se meuve sur une parallèle IK à BC, le produit $BC \times DE$ étant constant, on sera ramené à trouver le minimum de $\overline{DF}^2 + \overline{DG}^2$, la quantité $AC \times DF + AB \times DG$ étant constante ; donc, d'après le théorème inverse du théorème II, le minimum aura lieu, quand on aura

$$\frac{DF}{DG} = \frac{AC}{AB}$$

Maintenant, comme on peut laisser constantes, à leur tour, les distances DF et DG, il en résulte que le point D devra être tel que l'on ait

$$\frac{DE}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{DG}{AB}$$

Multipliant maintenant les deux termes de chaque rapport respectivement, par BC,AC et AB et ajoutant, on a

$$\frac{DE}{BC}=\frac{DF}{AC}=\frac{DG}{AB}=\frac{2S}{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}$$

D'où l'on déduit les valeurs de DE,DF et DG, et, par suite, la position du point D.

SIXIÈME MÉTHODE. — PAR LA SYNTHÈSE.

228. Cette méthode est surtout une méthode de vérification, mais elle est quelquefois très-élégante.

1. *Nous allons, d'abord, donner, d'après M. Poudra, une nouvelle solution du dernier problème qui vient d'être traité.*

Soit ABC (fig. 183) le triangle donné, et D le point qui est tel, que la somme des carrés des perpendiculaires DE,DF,DG, abaissées de ce point sur les trois côtés, est un minimum. Je dis que le point D est le centre de gravité du triangle EFG formé en joignant les pieds des trois perpendiculaires par des droites.

En effet, le point D, par hypothèse, est tel, que la somme des carrés de ses distances aux trois points E,F,G est moindre que la somme des carrés des distances d'un autre point D′ aux trois côtés du triangle ABC, et à plus forte raison, moindre que la somme des carrés des distances ED′,FD′ et GD′.

Pour déterminer maintenant le point D, nous allons démontrer que ce point est à la rencontre des trois droites qui partent des trois sommets du triangle donné et qui partagent les côtés opposés dans le rapport des carrés des côtés adjacents; à cet effet, on observe que les trois triangles obtenus en joignant le centre de gravité d'un triangle à ses trois sommets sont équivalents. On peut alors écrire :

$$\frac{GDF}{ABC} = \frac{GDE}{ABC} = \frac{DEF}{ABC}$$

Mais si on remarque que les trois angles en D sont, respectivement, supplémentaires des angles du triangle donné, et qu'on se rappelle que deux triangles qui ont deux angles supplémentaires sont, entr'eux, comme les produits des côtés qui comprennent cet angle, on aura

$$\frac{GD \times DF}{AB \times AC} = \frac{GD \times DE}{AB \times BC} = \frac{DE \times DF}{AC \times BC}$$

ou, comme nous l'avons trouvé précédemment, d'une autre manière,

$$\frac{DE}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{DG}{AB}$$

Menons maintenant la droite AD que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en I avec BC, tout revient à prouver l'égalité

$$\frac{BI}{CI} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Soient AH la hauteur correspondante à la base BC, et IK, IL les perpendiculaires abaissées du point I sur AB et AC ; on aura des triangles semblables BIK et ABH, ILC et AHC qui donneront

$$\frac{BI}{AB} = \frac{IK}{AH} \qquad \frac{AC}{IC} = \frac{AH}{IL}$$

Et en multipliant, membre à membre, il vient

$$\frac{BI}{IC} = \frac{IK}{IL} \times \frac{AB}{AC}$$

Mais on a

$$\frac{IK}{IL} = \frac{DG}{DF} = \frac{AB}{AC}$$

donc

$$\frac{BI}{IC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

2. *Par un point* D *pris dans l'intérieur d'un angle* C

(fig. 184), *on mène une droite* AB, *telle, que, si on abaisse du sommet de l'angle une perpendiculaire* CE *sur cette droite, le segment* EB *soit égal à* AD : *il faut démontrer que la droite* AB *est la plus petite de toutes celles qui passent par le point* D.

Soit FG une seconde droite quelconque passant par le point D : il faut démontrer qu'elle est plus grande que AB.

Par les points A et B menons AH et BH, respectivement, parallèles à BC et AC, de leur point d'intersection H, abaissons HK perpendiculaire sur FG, puis tirons les droites HF, HD, HG et AG.

Les deux triangles ADH, CBE sont égaux, parce qu'ils ont les angles alternes-internes HAB, CBA égaux, les côtés AH et BC égaux, comme côtés opposés d'un parallélogramme, et les côtés AD et BE égaux, par hypothèse. La droite HD est donc perpendiculaire sur AB, et, par suite, oblique sur FG, et on a

$$\mathrm{HD} > \mathrm{HK}$$

Cela posé, nous remarquons que le triangle AFH est plus petit que le triangle AFG qui a même base AF et une hauteur plus grande. Si donc, du quadrilatère AFGH, on retranche successivement les deux triangles AFH, AFG, il restera le triangle FHG plus petit que le triangle AHG ou que son équivalent le triangle AHB qui a même base AH et même hauteur.

Mais la hauteur HK du triangle FHG est plus petite que la hauteur HD du triangle AHB, il faut donc bien que la base FG du premier triangle soit plus grande que la base AB du second (*).

Remarque 1. — Lorsque le point D est quelconque, le problème de mener par ce point une sécante minimum dans l'intérieur d'un angle donné ne peut être résolu avec la règle et le compas. Mais le théorème précédent apprend que le point E, à la détermination duquel tout revient, peut être construit par

(*) Cette élégante démonstration m'a été communiquée par M. Collins, professeur au collége de la Trinité, à Dublin.

l'intersection d'un cercle décrit sur CD comme diamètre et d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point.

Remarque 2. Les perpendiculaires, élevées aux deux côtés de l'angle par les extrémités A et B de la droite minimum, et la perpendiculaire à cette dernière droite menée par le point fixe, se coupent en un même point : elles sont, en effet, les trois hauteurs du triangle AHB.

3. *Étant donnés* (fig. 185) *deux droites indéfinies* AC *et* BK, *et un point* A *sur la première ; trouver sur la seconde un point* M, *tel que, de ce point, on voie, sous un angle donné, un segment minimum* AD *compté, à partir du point* A, *sur la première droite.*

Menons par le point A une droite AE faisant avec AC un angle EAC égal à l'angle donné, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en F avec BC : Je dis que si on prend sur cette dernière droite, à partir du point F, une longueur FM égale à AF, le point M ainsi obtenu sera le point demandé.

En effet, concevons un arc de cercle qui touche les deux droites EF et BC aux points A et M, et soit D le second point où cet arc coupe AC ; si l'on mène les droites MA et MD, l'angle AMD sera égal à l'angle EAC, et, par suite, à l'angle donné.

Prenons maintenant sur BK un point quelconque N ; tirons la droite AN qui rencontre en G l'arc AMD, puis menons DG : l'angle AGD sera égal à l'angle donné, et, par suite, si par le point N on mène NH parallèle à GD, l'angle ANH sera égal à l'angle donné ; mais comme le segment AH est évidemment plus grand que AD, le théorème est démontré.

Remarque. Le problème précédent est intéressant, parce que l'on y ramène immédiatement un problème de mécanique dont voici l'énoncé :

Étant donnés un point et une droite dans un même plan vertical, par le point on mène une infinité de plans perpendiculaires au premier, puis on pose un point matériel pesant, successivement, sur chacun des plans et au point donné :

on demande, en admettant que le frottement soit le même sur tous les plans, quel est celui des plans que le mobile doit suivre pour arriver à la droite dans le temps le plus petit possible.

L'angle constant du problème de géométrie n'est autre chose que l'angle de frottement augmenté de 90°.

CHAPITRE V.

MAXIMA ET MINIMA DANS LA DISCUSSION DES PROBLÈMES.

229. Il ne faut pas voir seulement dans les questions de maximum et de minimum des problèmes d'un intérêt tout spécial; il est bon aussi de remarquer que la connaissance préalable des maxima et minima fait quelquefois prévoir, d'avance, les résultats d'une discussion qui est souvent pénible et délicate, lorsqu'on la fait d'une manière directe. C'est ce qu'on pourra vérifier sur de nombreuses questions. Nous nous contenterons ici de deux exemples.

1. *Trouver sur la ligne des centres de deux sphères un point tel que, si on le prend pour sommet de deux cônes de révolution tangents aux deux sphères, la somme des deux zônes interceptées soit égale à une surface donnée.*

D'après la question de maximum qui a été traitée problème 5 (227), nous sommes conduits à distinguer deux cas, suivants qu'on a d plus petit ou plus grand que $r' + r\sqrt{\frac{r}{r}}$.

Premier cas. — On a

$$d < r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$$

On sait alors que la somme des deux zônes va constamment en croissant, lorsque le sommet du cône se déplace en partant de la première sphère pour arriver à la seconde.

Le problème proposé ne pourra donc jamais avoir qu'une solution, et pour qu'elle ait lieu, il faudra que la surface donnée soit comprise entre les deux zônes interceptées sur chaque sphère par le cône qui a son sommet sur l'autre.

Deuxième cas. — On a

$$d > r' + r\sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Si on déplace maintenant le sommet du cône entre les mêmes positions extrêmes que dans le cas précédent, la somme des zônes va en croissant jusqu'à un certain maximum, puis décroît jusqu'à une valeur plus grande que sa valeur initiale. Il résulte de là que lorsque la somme des zônes est donnée, le problème a deux solutions, si la somme est comprise entre la valeur finale et le maximum, et qu'il n'en a plus qu'une, lorsque cette somme sera comprise entre les valeurs initiale et finale. Enfin on voit que le problème est impossible, lorsque la somme est plus grande que la valeur maximum ou inférieure à la valeur initiale.

2. *On donne* (fig. 186) *deux parallèles* AB *et* CD *coupées par une tranversale indéfinie* LM, *et un point fixe* G *sur l'une des parallèles ; on propose de mener une seconde transversales* GI, *telle que la somme des deux triangles* FIH, EIG *soit égale à une surface donnée.*

Essayons de prévoir le nombre des solutions, suivant les cas. Supposons d'abord que le point I soit à l'infini sur FM, c'est-à-dire, que GI soit parallèle à LM : alors la somme des triangles est infinie. Si le point I se rapproche du point F, la somme des triangles diminue, et elle continue à diminuer, lorsque le point I commence à se mouvoir sur FE, parce que l'augmentation l'emporte, d'abord, sur la diminution ; mais il n'en est pas ainsi jusqu'à la fin, puisque, lorsque le point I est en E, la somme des deux triangles est infinie. Il y a donc un minimum pour une certaine position du point I entre E et F.

La sécante continuant son mouvement, le point I se déplace de E à l'infini sur la partie EL, et la somme des triangles part d'une valeur infinie pour arriver à une seconde valeur infinie. On en déduit l'existence d'un second minimum. Les deux minima se déterminent, d'ailleurs, très-simplement par la méthode infinitésimale, et on voit que la valeur du second est plus grande que celle du premier.

Cela posé, on arrive aux conclusions suivantes : Lorsque la somme donnée est plus petite que le plus petit minimum, le problème est impossible. Il a une seule solution, lorsque la somme donnée est égale à la valeur de ce minimum, deux solutions, lorsque la somme est comprise entre le plus petit et le plus grand minimum, trois solutions, lorsque la somme atteint cette dernière valeur, et enfin, quatre solutions, lorsqu'elle la dépasse.

NOTES

SUR L'ALGÈBRE ET LA TRIGONOMÉTRIE.

Le but des Notes qui vont suivre est de montrer l'appui mutuel que se prêtent, dans un grand nombre de questions, la Géométrie, l'Algèbre et la Trigonométrie.

NOTE I.

SUR L'EMPLOI DE CERTAINES IDENTITÉS DANS LES QUESTIONS DE MAXIMA ET MINIMA.

x et y désignant des quantités quelconques, on a

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy \tag{1}$$
$$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2) \tag{2}$$

La première identité, si l'on y suppose successivement $x+y$ et xy constants, fait voir que, *pour partager un nombre en deux parties dont le produit soit maximum, il faut que les deux parties soient égales*, et réciproquement, que *la somme de deux nombres, dont le produit est donné, est minimum, lorsque les deux facteurs sont égaux*.

On voit, de même, par la seconde identité *qu'un nombre donné est tel, que la somme des carrés de ses deux parties est minimum, lorsque ces parties sont égales*, et que réciproquement, *lorsque la somme des carrés de deux nombres est donnée, le maximum de leur somme correspond à leur égalité*.

Lorsque x et y désignent des variables auxiliaires ayant, chacune, leur signification particulière, il peut arriver que leur égalité soit impossible, et que l'une d'elles x, par exemple, soit toujours plus grande que l'autre; alors, les quatre théorèmes qu'on vient de démontrer ne sont plus applicables, mais on peut tirer un autre parti des identités.

De la première, par exemple, on conclut que le produit xy de deux facteurs, dont la somme est constante et dont l'un x est toujours supérieur à l'autre, varie en sens contraire de la différence $x - y$. Mais comme la somme $x + y$ est constante, à un accroissement de x correspond une diminution de y et réciproquement; donc le produit xy varie en sens contraire de x, et au minimum ou au maximum de x correspondent le maximum ou le minimum du produit.

On voit de même que la somme de deux quantités, dont le produit est constant et dont l'une est toujours plus grande que l'autre, varie dans le même sens que la plus grande; et qu'au maximum et au minimum de cette dernière quantité correspondent le maximum et le minimum de la somme.

L'identité (2) conduirait à des conséquences analogues.

Remarque. — Dans le cas précédent où x et y ne peuvent pas devenir égales, non-seulement nous avons déterminé les maxima et minima des quantités, mais nous avons vu comment varie leur grandeur. Il en est encore, de même, lorsque l'égalité de x et y peut avoir lieu: Tout revient toujours à étudier les variations de grandeur de la différence $x - y$.

Si y est la valeur initiale de la plus petite des quantités x et y (cette valeur est zéro, quand x et y ne sont soumises à aucune condition), la différence $x - y$ décroît jusqu'à zéro, lorsque la quantité y augmente de sa valeur initiale à celle qu'elle prend en devenant égale à x. Puis, à partir de là, la quantité y continuant de croître devient plus grande que x, et la différence, prise dans l'ordre inverse, augmente jusqu'à ce que y prenne sa valeur la plus grande.

Appliquons les remarques précédentes à des exemples.

1. *Parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, quel est celui dans lequel la somme de l'hypothénuse et de la*

hauteur correspondante est un maximum ou minimum.

h étant la hauteur et z l'hypothénuse, on trouve facilement

$$h + z = z + \frac{2p^2}{z} - 2p$$

On est donc ramené à trouver le maximum ou le minimum de la quantité $z + \frac{2p^2}{z}$, c'est-à-dire, de la somme de deux quantités dont le produit est constant.

Traitons d'abord la question de minimum. On voit immédiatement qu'on ne peut pas résoudre la question, en prenant les deux facteurs du produit égaux, car on trouverait alors pour z la valeur inadmissible $p\sqrt{2}$. Mais le facteur $\frac{2p^2}{z}$ étant toujours plus grand que l'autre z, le minimum demandé correspondra au minimum du facteur $\frac{2p^2}{z}$ c'est-à-dire au maximum de z, qui est évidemment p.

L'hypothénuse n'atteignant son maximum p que, lorsque le triangle est nul, on voit que, *dans tout triangle rectangle, la somme de l'hypothénuse et de la hauteur correspondante est toujours plus grande que le demi-périmètre.*

Si l'on veut maintenant trouver le maximum de $z + h$, on sait, d'après ce qui a été dit plus haut, que ce maximum correspond au maximum $\frac{2p^2}{z}$, c'est-à-dire au minimum de z; mais ce minimum a lieu, lorsque le triangle rectangle est isocèle (222. 4): donc, *parmi tous les triangles rectangles de même périmètre, celui qui est tel, que la somme de l'hypothénuse et de la hauteur est la plus grande possible, est le triangle rectangle isocèle.*

2. *Trouver parmi tous les troncs de cône, qui ont même hauteur et sont inscrits dans une même sphère, celui qui a le plus grand ou le plus petit volume.*

Soient r le rayon de la sphère, h la hauteur du tronc,

$\frac{1}{3}\pi\, a^2h$ son volume : prenant pour inconnue l'apothème x du tronc, on trouve facilement l'équation suivante, que le tronc soit du premier ou du second genre,

$$x^4 - 4\,(a^2 + h^2)\,x^2 + 12\,h^2r^2 = 0$$

d'où l'on tire

$$4\,a^2 = x^2 + \frac{12h^2r^2}{x^2} - 4\,h^2$$

On est ainsi ramené à trouver le maximum et le minimum, ou plus généralement, à étudier les variations de grandeur de la quantité $x^2 + \frac{12h^2r^2}{x^2}$. Mais, comme on le sait, on doit distinguer deux cas principaux, suivant que l'égalité des quantités x^2 et $\frac{12h^2r^2}{x^2}$ est ou n'est pas permise, ou, ce qui revient au même, suivant que x peut ou non prendre la valeur $\sqrt{2rh\sqrt{3}}$. Cette dernière valeur est toujours plus grande que h, mais elle sera plus petite, plus grande que $2r$ ou égale à cette quantité, suivant qu'on aura

$$h <>= \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Traitons successivement les deux cas auxquels on vient d'être conduit.

PREMIER CAS. $\qquad h < \frac{2r\sqrt{3}}{3}$

Il y a alors un minimum qui correspond à la valeur $\sqrt{2rh\sqrt{3}}$ donnée à x, mais on peut voir, de plus, comment varie le volume, lorsque la variable x croît depuis h jusqu'à $2r$.

En effet, lorsque x croît depuis h jusqu'à $\sqrt{2rh\sqrt{3}}$, la valeur de x^2 étant plus petite que celle de $\frac{12h^2r^2}{x^2}$, la différence $\frac{12h^2r^2}{x^2} - x^2$ et, par suite, le volume du tronc diminue. Mais lorsque x croît depuis $\sqrt{2rh\sqrt{3}}$ jusqu'à $2r$, la différence précédente devant être prise en sens contraire, le volume va toujours en augmentant. On voit, d'ailleurs, que le tronc, dont l'apothème est h, est plus grand que celui dont l'apothème est $2r$. Le plus grand volume correspondra alors au cas où l'apothème sera égal à h, c'est-à-dire au cas du cylindre.

DEUXIÈME CAS. $h >$ ou $= \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$

Quand h est égale à $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$, les valeurs $\sqrt{2rh\sqrt{3}}$ et $2r$ deviennent égales, et le volume va constamment en décroissant, depuis son maximum qui correspond à x égal à h, jusqu'à son minimum qu'il atteint, quand x est égal à $2r$.

Lorsque la hauteur h est plus grande que $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$, les deux quantités $\dfrac{12h^2r^2}{x^2}$ et x^2 ne peuvent plus devenir égales, et on s'assure facilement que la première est toujours plus grande que la seconde : on est donc ramené à étudier les variations de grandeur de la différence $\dfrac{12h^2r^2}{x^2} - x^2$. Mais cette différence diminue constamment, lorsque x croît de h à $2r$; la conclusion est donc la même que dans le cas où h est égal à $\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

On peut, dans les questions de maxima et de minima, tirer parti d'identités autres que celles que nous avons données en commençant : soient, par exemple, les deux suivantes

$$(mx - ny)^2 - (nx - my)^2 = (m^2 - n^2)(x^2 - y^2)$$
$$(mx + ny)^2 + (nx - my)^2 = (m^2 + n^2)(x^2 + y^2)$$

dans lesquelles m, n, x, y désignent des nombres positifs, les deux premiers constants, les deux autres variables, et m un nombre plus grand n.

Si dans ces identités on suppose, successivement constantes, les quantités $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, $mx - ny$, $mx + ny$, on en déduira immédiatement les théorèmes I et II (228 et 229), ainsi que leurs réciproques.

NOTE II.

SUR LA DÉTERMINATION DES MAXIMA ET MINIMA PAR LA TRIGONOMÉTRIE.

Nous donnerons seulement deux exemples.

1. *Etant donnés* (fig. 192) *un angle* DOE *et un point* C *dans son intérieur*, *mener par ce point une droite* AB *telle que le triangle* AOB *ait une surface minimum.*

Le problème a déjà été traité (227). Tirons la droite OC et désignons par α et α' les angles qu'elle fait avec OA et OB : soient aussi a la distance OC et x l'angle OCA, la question revient à trouver le minimum du produit OA $\times$ OB ou le maximum de l'inverse de ce produit ; or on a

$$\text{OA} = \frac{a \sin x}{\sin(x + \alpha)} \qquad \text{OB} = \frac{a \sin x}{\sin(x - \alpha')}$$

Il s'agit donc de déterminer le maximun de

$$\frac{\sin(x + \alpha)}{\sin x} \times \frac{\sin(x - \alpha')}{\sin x}$$

Mais en développant les numérateurs des deux fractions, et les divisant, respectivement, par les produits $\sin x \sin \alpha$, $\sin x \sin \alpha'$, on est ramené au maximum du produit

$$(\cot \alpha + \cot x)(\cot \alpha' - \cot x)$$

Les deux facteurs ont une somme constante, donc le minimum demandé correspond à la valeur de x donnée par l'équation

$$\cot x = \frac{\cot \alpha' - \cot \alpha}{2}$$

De là on conclut facilement que la droite AB doit être partagée au point C en deux parties égales.

2. *Etant donnés deux cercles* O *et* C (fig. 181), *trouver sur la ligne des centres un point* A, *tel que la somme des tangentes* AB *et* AD, *menées de ce point aux deux cercles*, *soit maximum.*

C'est le problème (3) du n° (230). Soient d la distance des centres, r et r' les rayons des deux cercles, et m la somme variable des deux tangentes : on a

$$(1) \qquad \frac{r}{tg.\ \mathrm{BAO}} + \frac{r'}{tg.\ \mathrm{DAC}} = m$$
$$\frac{r}{sin.\ \mathrm{BAO}} + \frac{r'}{sin.\ \mathrm{DAC}} = d$$

Exprimons maintenant les tangentes et les sinus des angles BAO et DAC, en fonction des tangentes des moitiés des mêmes angles : soient u et u' ces dernières tangentes, on aura

$$tg.\ \mathrm{BAO} = \frac{2u}{1 - u^2} \qquad sin\ \mathrm{BAO} = \frac{2u}{1 + u^2}$$

et des valeurs semblables pour tgDAC et sin DAC.

En remplaçant, dans les équations (1), les deux tangentes et les deux sinus par leurs expressions en u et u', il vient

$$\frac{r\ (1 + u^2)}{u} + \frac{r'\ (1 + u'^2)}{u'} = 2d$$
$$\frac{r\ (1 - u^2)}{u} + \frac{r'\ (1 - u'^2)}{u'} = 2\ m$$

et en ajoutant, puis retranchant, membre à membre, les équations précédentes, on a

$$\frac{r}{u} + \frac{r'}{u'} = d + m$$
$$ru + r'u' = d - m$$

multipliant enfin, membre à membre, les deux dernières équations, il vient

$$r^2 + r'^2 + rr' \left(\frac{u'}{u} + \frac{u}{u'}\right) = d^2 - m^2$$

On voit ainsi qu'on est ramené à trouver le minimum de la quantité $\frac{u'}{u} + \frac{u}{u'}$, c'est-à-dire, de la somme de deux nombres dont le produit est constant. Le minimum aura donc lieu quand les deux nombres $\frac{u'}{u}$ et $\frac{u}{u'}$, ou, ce qui revient au même, les deux nombres u et u' seront égaux. On arrive ainsi à la même conclusion qu'au n° (230).

Note III.

Sur l'usage en trigonométrie et l'interprétation géométrique de l'équation.

$$(1) \qquad a\sin x + b\cos x = c$$

Des problèmes très-variés se ramènent immédiatement à la résolution de l'équation précédente. On peut même, comme nous allons le voir, y ramener toute équation du second degré.

En effet, soit une équation quelconque du second degré

$$ay^2 + by + c = o$$

on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$ay + \frac{c}{y} + b = o$$

ou, en posant y égale à tgx

$$a\, tg\, x + c\, cotg\, x + b = o$$

Mais, si l'on remplace tgx et $cotgx$ par leurs valeurs en fonction de $sinx$ et $cosx$, il vient

$$a\, six^2n + c\, cos^2x + b\, sin\, x\, cos\, x = o$$

Multipliant maintenant les deux membres de l'équation précédente par 2, et remplaçant les quantités $2sin^2x$,$2cos^2x$ et $2sinxcosx$, respectivement, par $1 - cos2x$,$1 + cos2x$ et $sin2x$, on a

$$- b\, sin2x + (a - c)\, cos2x = a + c$$

c'est-à-dire, une équation de la forme demandée.

CONSTRUCTION DES RACINES DE L'ÉQUATION (1).

Première méthode. — Supposons que les trois membres a, b et c soient positifs, et appelons α un angle aigu dont la tangente est égale à $\frac{b}{a}$: on sait que l'équation (1) peut être remplacée par la suivante

$$sin\,(x + \alpha) = \frac{c}{b}\,sin\,\alpha$$

Sous cette nouvelle forme, il est visible qu'on est ramené à construire un triangle, connaissant deux côtés b et c et l'angle α opposé à l'un d'eux b : l'angle x sera opposé au troisième côté du triangle.

Si les signes de a,b,c étaient quelconques, on voit facilement qu'on serait toujours ramené au même problème.

Deuxième méthode. — Considérons a,b,c comme étant des droites données, et soient u et v des droites inconnues, respectivement, égales aux produits de $sin x$ et $cos x$ par la droite $\sqrt{a^2 + b^2}$: l'équation (1), si l'on y introduit u et v, deviendra

$$au + bv = c\sqrt{a^2 + b^2}$$

Alors une propriété bien connue du quadrilatère inscriptible conduit à la construction suivante :

Faites un triangle rectangle ABC *dont les deux côtés* CB *et* CA *soient* a *et* b, *et tracez le cercle circonscrit ; puis du sommet* C *de l'angle droit, comme centre, avec un rayon égal à* c *décrivez un cercle et déterminez les points* D *et* D′ *où les deux cercles se coupent : les droites qui joignent les deux points* D *et* D′ *aux points* A *et* B *donneront deux systèmes de valeurs pour* u *et* v, *et on aura ensuite facilement l'angle cherché.*

Il y aurait ici une discussion intéressante à faire : on devrait distinguer plusieurs cas suivant la position du point C sur l'arc ACB ou sur l'arc supplémentaire ; on pourrait supposer aussi que a, b, c ont des signes quelconques, mais nous laisserons ces détails que les élèves trouveront facilement.

On voit, par les développements qui précèdent, comment on peut trouver la solution d'un problème de géométrie, en passant par l'intermédiaire de l'algèbre et de la trigonométrie.

NOTE IV.

SUR L'EMPLOI DE LA GÉOMÉTRIE DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.

Rien n'est plus remarquable en mathématiques que le secours mutuel que se prêtent la géométrie et l'algèbre dans un grand nombre de questions. M. Chasles dans son *Traité de géométrie supérieure*, et M. Liouville, dans son *célèbre Mémoire*, en ont donné de très-beaux exemples. Peut-être qu'un nouvel exemple, suffisamment simple, est-il bon à faire connaître, même dans un ouvrage élémentaire.

La question que nous nous proposons est celle-ci: En s'aidant de la géométrie, résoudre, dans quelques cas particuliers, le système suivant :

$$(1)\qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 + qxy &= c^2 \\ x^1 + z^2 + rxz &= b^2 \\ y^2 + z^2 + tyz &= a^2 \end{aligned}$$

PREMIER CAS. — *Les constantes* q, r, t *sont égales à l'unité.*

On s'appuie, d'abord, sur le théorème suivant, facile à démontrer :

Si, sur le côté BC *d'un triangle* ABC, *on construit deux triangles équilatéraux* BCD,BCD', *et qu'on désigne par* m^2 *la surface du triangle donné, par* $2\mathrm{K}^2$ *la somme des carrés des côtés de ce triangle, on a*

$$(2)\qquad \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AD}'}^2 = 2\mathrm{K}^2 \qquad \overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{AD}'}^2 = 4m^2\sqrt{3}$$

En ajoutant et retranchant les équations (2), membre à membre, il vient

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{K}^2 + 2m^2\sqrt{3}} \qquad \mathrm{AD}' = \sqrt{\mathrm{K}^2 - 2m^2\sqrt{3}}$$

Nous représenterons, pour abréger, par n et n' les valeurs de AD et AD'.

Admettons maintenant que le plus grand des trois membres a, b, c, soit plus petit que la somme des deux autres, et déterminons un triangle ABC dont les côtés soient mesurés par ces nombres. Si sur les trois côtés de ce triangle on construit trois triangles équilatéraux extérieurs, comme dans la fig. 42, et qu'on tire les droites AD,CF,BE qui se coupent en un même point I (théorème II, page 66), on sait que les trois angles BIC,AIC,AIB sont égaux à 120°. De là, on conclut facilement que si l'on désigne par x, y, z, les mesures des droites IA,IB,IC, ces nombres satisferont aux équations (1) dans lesquelles on fera q, r, t égales à l'unité.

Cela posé, traçons (fig. 42) le cercle circonscrit au quadrilatère BDCI, et soit G le point où ce cercle coupe le côté AB, on a

$$\mathrm{IA} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{AG}}{\mathrm{AD}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{c}{n} \times \mathrm{AG}$$

et toute la difficulté se trouve réduite à exprimer AG, en fonction de a, b, c.

A cet effet, projetons le point C en H sur le prolongement de AB, on a

$$\mathrm{AG} = \mathrm{GH} - \mathrm{AH}$$

Mais on a, d'abord,

$$\mathrm{AH} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c} = \frac{a^2 - \mathrm{K}^2}{c}$$

d'autre part, l'angle HGC étant égal à 60°, on a

$$\mathrm{CH} = \frac{\mathrm{CG}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{GH}\sqrt{3}$$

d'où

$$\mathrm{GH} = \frac{\mathrm{CH}\sqrt{3}}{3} = \frac{2m^2\sqrt{3}}{3c}$$

Il vient donc enfin

$$\mathrm{AG} = \frac{2m^2\sqrt{3} + 3\mathrm{K}^2 - 3a^2}{3c} = \frac{n^2 + 2\mathrm{K}^2 - 3a^2}{3c}$$

et, par suite, on a

$$x = \frac{n^2 + 2\mathrm{K}^2 - 3a^2}{3n}$$

En remplaçant, dans la valeur de x, a par b et c, on aura

$$y=\frac{n^2+2K^2-3b^2}{3n} \qquad z=\frac{n^2+2K^2-3c^2}{3n}$$

Remarque 1. — Les valeurs de x, y, z satisferont aux équations proposées, sans qu'il soit tenu compte de l'inégalité que nous avons supposée exister entre a, b, c; cette hypothèse peut donc être écartée.

Remarque 2. — Les valeurs de x,y,z peuvent être soumises à deux vérifications, car, d'après le théorème II (page 64), leur somme doit être égale à AD, et la somme des triangles qui ont un sommet commun en F étant égale au triangle ABC, la somme $xy+xz+yz$ doit avoir pour valeur $\frac{4m^2\sqrt{3}}{3}$

Remarque 3. — Les valeurs de x,y,z, changés de signe, satisfont aussi aux équations données.

On peut encore trouver deux autres solutions du système proposé. A cet effet, construisons encore trois triangles équilatéraux BCD′,ACF′,ABF′ sur les côtés du triangle ABC, comme bases, mais du côté opposé aux triangles équilatéraux précédemment construits. On sait, (théorème II page 67), que les trois droites AD′,BE′,CF′ se coupent en un même point F : seulement, de ce point, on voit deux côtés sous des angles de 60° et le troisième sous un angle de 120°.

Supposons que BC soit celui des trois côtés qui est vu sous un angle égal à 120°, on prouve facilement, alors, que, si l'on représente — AD′,BE′ et CF′, respectivement, par x,y,z, on a

$$x=\frac{n'^2+2K^2-3a^2}{3n'} \qquad y=\frac{n'^2+2K^2-3b^2}{3n'}$$

$$z=\frac{n'^2+2K^2-3c^2}{3n'}$$

Remarque. — On aura une quatrième solution du système proposé, en prenant les valeurs précédentes en signe contraire.

Solution algébrique. On peut être curieux de vérifier par l'algèbre les résultats précédents. Pour cela, retranchons, membre à membre, la première et la seconde, la première et la troisième, puis divisons, membre à membre, les deux équations obtenues, on aura

$$(b^2 - c^2)\, x + (c^2 - a^2)\, y + (a^2 - b^2)\, z = o$$

Cette équation étant homogène, on a l'idée de chercher à former une autre *combinaison homogène.* A cet effet, on multiplie la première et la seconde équation du système, respectivement, par b^2 et c^2, et l'on retranche, membre à membre, les équations obtenues, on a ainsi

$$(b^2 - c^2)\, x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 + b^2xy - c^2xz = o$$

et, en prenant pour inconnus les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, toute la difficulté se trouve réduite à résoudre un système de deux équations dont l'une est du premier et l'autre du second degré. En faisant les calculs, on retombe bien sur les quatre systèmes trouvés par la géométrie.

Deuxième cas. — On a

$$q^2 + r^2 + t^2 + qrt = 4$$

ici la trigonométrie servira d'intermédiaire entre la géométrie et l'algèbre. On considérera les nombres $-\frac{t}{2}$, $-\frac{r}{2}$, $-\frac{q}{2}$ comme les cosinus de trois angles compris entre 0° et 180°. Alors la somme des trois angles sera égal à 360°, ou l'un des angles sera égal à la somme des deux autres.

Si c'est le premier cas qui se présente, on se proposera de déterminer un point I tel, que de ce point on voie sous les angles connus, les trois côtés a, b, c du triangle ABC. Alors les trois nombres x, y, z qui mesurent IA, IB, IC satisferont au système (1).

Pour résoudre la question proposée, on suivra une marche toute semblable à celle du premier cas, mais en s'aidant de la trigonométrie. Ainsi, on commencera par construire un triangle BCD, tel que les angles CBD, BCD soient, respectivement, supplémentaires des angles sous lesquels on voit, du point I, les côtés AC et AB ; on construira aussi le triangle CBD′ symétrique du premier par rapport à AB... etc. : nous n'en dirons pas davantage, la méthode étant suffisamment indiquée.

Si l'un des angles donné doit être égal à la somme des deux autres, on procédera d'une manière toute semblable.

TROISIÈME CAS. — On a

$$q^2 + r^2 + t^2 = 4$$

Dans ce cas, c'est la trigonométrie seule qui intervient.

Accentuons, dans les équations (1), toutes les lettres, excepté q,r et t, et remplaçons d'abord, a'^2,b'^2 et c'^2 par a,b,c. Construisons ensuite un triangle avec les trois côtés a,b,c (on suppose que la condition connue est remplie); soient désignés, comme à l'ordinaire, le périmètre par $2p$, et les angles du triangle par A,B,C.

Nous remarquons d'abord que la condition entre q,r et t permet de poser

$$\frac{q}{2} = \sqrt{tg\,\frac{A}{2}\,tg\,\frac{B}{2}} \qquad \frac{r}{2} = \sqrt{tg\,\frac{A}{2}\,tg\,\frac{C}{2}}$$

$$\frac{t}{2} = \sqrt{tg\,\frac{B}{2}\,tg\,\frac{C}{2}}$$

x,y,z, désignant des angles inconnus et α,β,γ, des angles connus nous poserons encore

$$a = p\ sin^2\alpha \qquad b = p\ sin^2\beta \qquad c = p\ sin^2\gamma$$

$$x'^2 = p\ cos^2 x \qquad y'^2 = p\ cos^2 y \qquad z'^2 = p\ cos^2 z$$

Alors en faisant les substitutions, la première des équations (1) devient

$$cos^2 x + cos^2 y + 2 cos x\, cos y\ \frac{\sqrt{tg\,\frac{A}{2}\,tg\,\frac{B}{2}}}{p} = sin^3\gamma$$

mais on a

$$\frac{tg\,\frac{A}{2}\,tg\,\frac{B}{2}}{p} = 1 - \frac{c}{p} = cos^2\gamma$$

il vient donc finalement

$$cos^2x + cos^2y + cos^2\gamma + 2cosx\ cosy\ cos\gamma = 1$$

et on a deux autres équations semblables : on est ainsi ramené à un système que l'on sait résoudre par la trigonométrie.

Note V.

Sur la discussion des problèmes de géométrie par l'algèbre.

Je suppose que le problème puisse être résolu avec la règle et le compas, c'est-à-dire, qu'on ait obtenu un système d'équations dont la résolution se ramène à celle d'équations du premier ou du second degré à une seule inconnue.

Pour faire la discussion du problème, on devra exprimer les conditions qui doivent être remplies, pour que toutes les inconnues aient des valeurs réelles, et, si la nature de la question l'exige, des valeurs positives et inférieures ou supérieures à des limites données. Ordinairement, on voudra savoir comment les variations de grandeur d'une quantité donnée a dépendent des valeurs attribuées aux autres quantités connues. On résoudra alors par rapport à a, toutes les inégalités que l'on suppose du premier ou du second degré en a.

Parmi les inégalités, il pourra y en avoir qui seront nécessaires et d'autres qui ne le seront pas : ces dernières devront d'abord être exclues, si elles sont en contradiction avec les autres.

Supposons que ce premier travail étant fait, on ait trouvé comme inégalités nécessaires

$$a > l \quad a > l' \quad a > l''$$
$$a < m \quad a < m' \quad a < m''$$

Si nous supposons que les nombres l, l', l'' soient rangés dans l'ordre de grandeur décroissante, m, m', m'' dans l'ordre de grandeur croissante, on n'aura à satisfaire qu'aux deux premières inégalités de sens contraire, c'est-à-dire, que la quantité a pourra croître depuis l jusqu'à m.

Mais la discussion ne sera pas toujours aussi simple. Il pourra, d'abord, arriver que l'ordre de grandeur des quantités l, l', l'', m, m', m'' dépende des données, et qu'on soit obligé de résoudre de nouvelles inégalités pour établir, selon les cas, l'ordre relatif de grandeur. Il peut arriver aussi que, parmi les inégalités, il y en ait qui ne soient pas nécessaires, et qu'on ait, par exemple, à examiner trois cas, suivant que la quantité a est plus grande ou plus petite que l' ou égale à cette quantité.

Je vais donner un exemple où toutes ces difficultés se rencontrent, mais auparavant je reviens sur un détail précédent.

Après avoir exprimé que les deux racines d'une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont réelles et positives, on peut vouloir exprimer aussi qu'elles sont toutes deux plus grandes ou plus petites qu'un nombre donné n, ou que n est compris entr'elles. Supposons, par exemple, qu'on veuille exprimer que les deux racines sont toutes deux plus petites que n, et admettons aussi que le coefficient de x^2 soit positif. n étant un nombre supérieur aux deux racines, le résultat de la substitution dans le trinôme $ax^2 + bx + c$ doit être positif, et l'on aura la condition

$$an^2 + bn + c > 0$$

Cependant l'inégalité précédente ne suffit pas, car elle exprime seulement que n n'est pas compris entre les racines; mais si l'on écrit que la somme des racines est plus petite que $2n$ ou que leur produit est plus petit que n^2, on obtient

$$2an + b > o \quad \text{ou} \quad c - an^2 < 0$$

En adjoignant l'une de ces inégalités à la précédente, on aura exprimé complétement la condition demandée.

On écrirait évidemment que les deux racines sont plus grandes que n en changeant le sens des inégalités que nous venons de trouver ; et si n devait être compris entre les deux racines, on aurait pour condition nécessaire et suffisante

$$an^2 + bn + c < 0$$

Si l'une des racines était positive et l'autre négative, on exprimerait que la racine positive est plus grande ou plus petite qu'un nombre donné n, au moyen d'une seule inégalité.

Le problème auquel nous voulons appliquer la méthode est le suivant : Inscrire dans une sphère donnée dont le rayon est r, *un tronc de cône dont on connaît la hauteur* h *et le volume* $\frac{1}{3}\pi$ a^2 h.

x étant l'apothème inconnue du cône, on trouve, comme nous l'avons déjà dit (note I), pour équation du problème,

$$(1) \qquad x^4 - 4(a^2 + h^2)x^2 + 12h^2r^2 = 0$$

On voit facilement, d'ailleurs, que, selon que l'apothème du tronc sera égal à $\sqrt{2rh}$, plus grand ou plus petit que cette quantité, on aura un cône, un tronc du premier genre, ou un tronc du second genre.

Discussion.

Analyse. — Pour qu'une valeur de x soit admissible, elle doit être réelle, positive et comprise entre h et $2r$. Le tronc sera, d'ailleurs, du premier ou du second genre, suivant que la valeur de x sera plus petite ou plus grande que $\sqrt{2rh}$.

En considérant x^2 comme l'inconnue, on trouve, d'abord, pour condition de réalité des racines

$$a^2 > h(r\sqrt{3} - h)$$

Et d'ailleurs, dès que cette condition est remplie, l'équation (1) montre que les deux valeurs de x^2 sont toutes deux positives et, par suite, que celles de x sont réelles et positives.

Substituons maintenant dans le premier membre de l'équation (1), à la place de x^2, successivement, $h^2, 4r^2$ et $2rh$, nous obtiendrons les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll}
(3) & h^2\,(12r^2 - 4a^2 - 3h^2) \\
(4) & 4r^2\,(4r^2 - 4a^2 - h^2) \\
(5) & 8rh\,(2rh - h^2 - a^2)
\end{array}$$

En égalant à zéro les polynômes précédents, nous obtiendrons, pour valeurs de a^2, $\frac{3}{4}(4r^2 - h^2)$, $\frac{4r^2 - h^2}{4}$, et $h(2r - h)$: représentons ces quantités respectivement, par e, d, c, et désignons aussi par b le second membre de l'inégalité (2).

On doit maintenant chercher quel est l'ordre de grandeur des quantités b, c, d, e.

Il est, d'abord, évident que les quantités b et d sont, respectivement, plus petites que c et e. On voit facilement aussi que les quantités b et c sont, respectivement, plus petites que d et e, car en écrivant qu'il en est ainsi, on a

$$(h\sqrt{3} - 2r)^2 > o \qquad (h - 2r)(h - 6r) > o$$

et ces deux inégalités sont toujours satisfaites. (Dans le cas particulier où h est égal à $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$ les deux limites b et d deviennent égales).

Reste à trouver l'ordre relatif de grandeur de c et d : or la différence $c - d$ a pour expression $3h^2 + 8rh - 4r^2$ ou $(3h - 2r)(2r - h)$; donc, suivant que la hauteur h sera plus petite ou plus grande que $\frac{2}{3}r$ ou égale à cette quantité, c sera plus petit, plus grand que d ou égal à d.

Examinons maintenant quelles sont les conséquences auxquelles conduit la considération des signes des polynômes (3), (4) et (5).

D'abord, suivant que le polynôme (3) est positif, nul ou négatif, on a a^2 plus petit que e, égal à e ou plus grand que e, et réciproquement.

Si a^2 est plus petit que e, mais plus grand que b (nous venons de voir plus haut que les deux conditions sont compatibles), les deux valeurs de x^2 seront toutes deux réelles et positives. D'ailleurs, d'après le signe du polynôme (3), elles ne peuvent comprendre h^2 entr'elles ; elles ne peuvent pas non plus être toutes deux plus petites que h^2, puisque leur produit $12\,h^2r$ est supérieur à h^4 : elles sont donc supérieures à h^2.

Si a^2 est égal à e, l'une des valeurs de x^2 est égale à h^2 et l'autre plus grande.

Enfin si a^2 est plus grand que e, l'une des valeurs de x^2 est plus petite que h^2 et l'autre plus grande.

Prenons maintenant le polynôme (4) ; s'il est négatif, ou, ce qui revient au même, si a^2 est plus grand que d, il y a toujours une valeur de x plus petite que $2r$ et l'autre plus grande.

Mais quand a^2 est compris entre b et d, le terme $12h^2r^2$ fait voir que, suivant que h est plus petit ou plus grand que $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, les deux valeurs de x sont toutes deux plus petites ou plus grandes que $2r$.

Quand a^2 est égal à d, on voit qu'une des valeurs de x est égale à $2r$, et que l'autre est plus petite, plus grande que $2r$, ou égale à cette quantité, suivant que l'on a

$$h <> ou = d$$

La considération du polynôme (5) et du terme $12\,h^2r^2$ de l'équation (1) conduit enfin aux conclusions suivantes :

Quand a^2 est compris entre b et c, les deux valeurs de x^2 sont toutes deux plus petites que $2rh$; quand a^2 est plus grand que c, l'une des valeurs de x^2 est plus petite que $2rh$ et l'autre plus grande ; et quand a^2 est égal à c, l'une des valeurs de x^2 est égale à $2rh$ et l'autre plus grande.

Synthèse. — L'analyse précédente conduit à considérer quatre cas dans la discussion, savoir :

$$0 < h < \frac{2}{3}r \qquad h = \frac{2}{3}r$$

$$\frac{2}{3}r < h < \frac{2r\sqrt{3}}{3} \qquad h > \text{ou} = 2r\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Premier cas. — On a

$$0 < h < \frac{2r}{3}$$

Les quantités b, c, d, e étant alors rangées dans l'ordre où nous venons de les nommer, on fera croître a^2 entre b et c, entre c et d, puis entre d et e. Examinant alors les signes que prennent les polynômes (3), (4) et (5) pour les différentes hypothèses, on établit facilement le tableau suivant.

Tableau des valeurs de a^2	Nombre des solutions. 1er G	2e G
$a^2 < b$	0	0
$a^2 = b$	0	1
$b < a^2 < c$	0	2
$a^2 = c$	cone	1
$c < a^2 < d$	1	1
$a^2 = d$	1	1
$d < a^2 < e$	1	0
$a^2 = e$	cylindre	0
$a^2 > e$	0	0

Les autres cas se traitent d'une manière toute semblable.

Remarque. — Les résultats de la discussion complète pouvaient être prévus, comme la conséquence de ceux qu'on a trouvés dans la note I, lorsqu'on a étudié les variations de volume du tronc.

TABLE ANALYTIQUE
DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIES GÉNÉRALES.

CHAPITRE I. — THÉORIES DES TRANSVERSALES.

Théorèmes.

DEUXIÈME PARTIE

DES METHODES EN GEOMETRIE ET APPLICATION DE CES METHODES A DES EXEMPLES CHOISIS.

CHAPITRE I. DES THÉORÈMES — MÉTHODES A SUIVRE POUR LES DÉMONTRER.

Exemples.

Théorèmes.

APPLICATION DES THÉORIES GÉNÉRALES A LA DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES.

Théorèmes.

Théorèmes sur la perspective.

CHAPITRE II. — Des lieux géométriques. — Méthodes et exemples. — Lieux plans.

Méthodes pour la recherche des lieux géométriques. — lieux géométriques. — Plans.

MÉTHODE DES FIGURES SEMBLABLES.

Exemples.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

CONSTRUCTION DES TRIANGLES.

Problèmes.

CONSTRUCTION DE QUADRILATÈRES.

Problèmes.

Problèmes sur les cercles.

Problèmes de géométrie dans l'espace.

CHAPITRE V. — DES MAXIMA ET MINIMA DANS LA DISCUSSION DES PROBLÈMES

Exemples.

NOTES SUR LA CORRESPONDANCE ENTRE LA GÉOMÉTRIE ET L'ALGÈBRE.

FIN DE LA TABLE.

Versailles. — Imp. de CHÉTÉ et DUPUIS.

ERRATA.

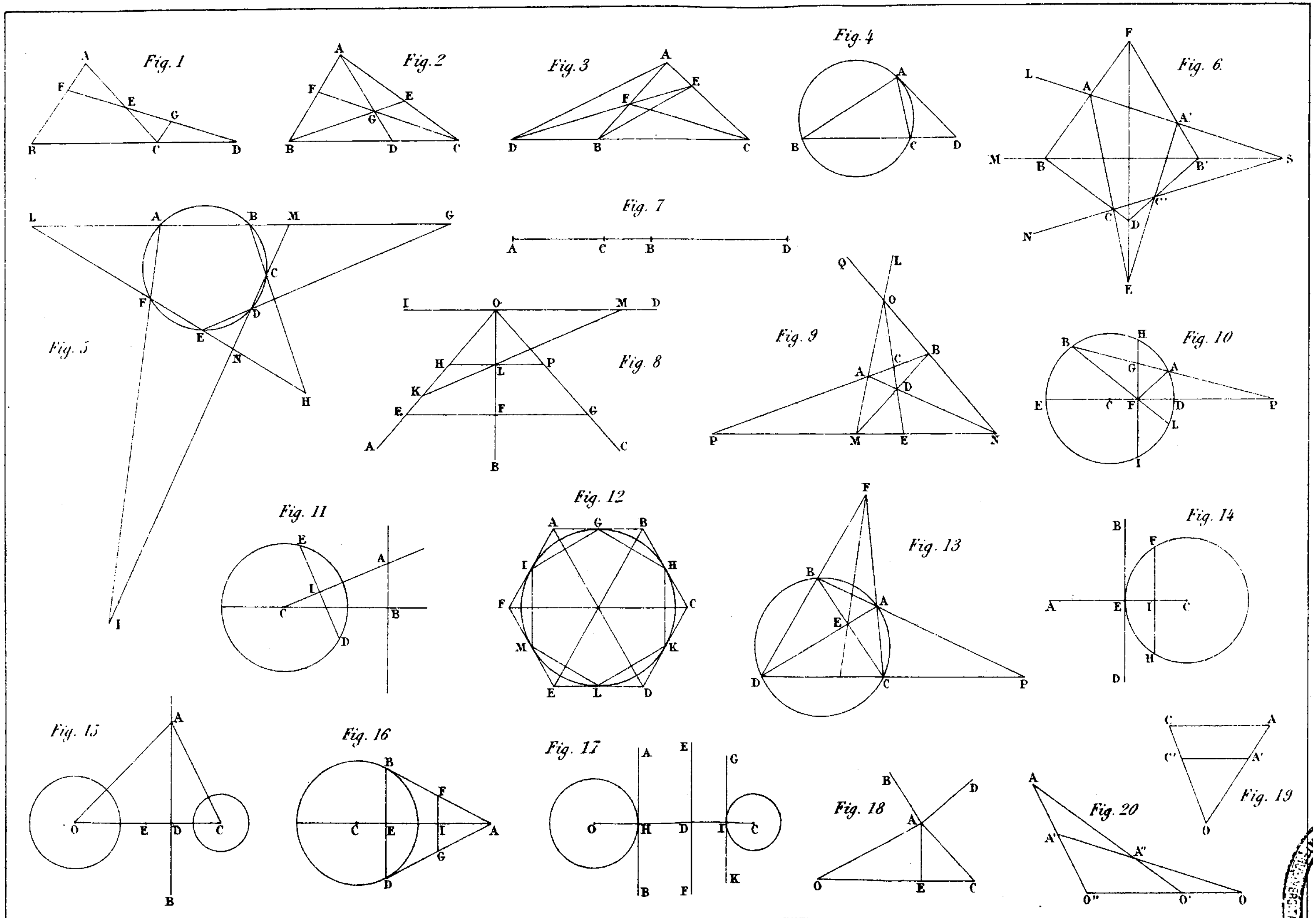
Pages.	lignes.		
3	13	*en descendant,*	ADF *lisez* : AEF.
4	5	*en montant,*	ABC *lisez* : ABD.
6	9	*id.*	LHN *lisez* : LMN.
11	14	*en descendant.*	(127) *lisez* : (125).
Id.	6	*en montant,*	$a-c$ *lisez* : $b-c$.
13	12	*en descendant,*	$\frac{CA}{OA}$ *lisez* : $\frac{CA}{DA}$.
24	7	*id.*	$ED = R^2-r^2$ *lisez* : $ED = \frac{R^2-r^2}{2d}$
32	2	*en montant,*	$\frac{R'}{R}$ *lisez* : $\frac{R}{R'}$.
33	2	*en descendant,*	$\frac{R}{R'}$ *lisez* : $\frac{R'}{R}$.
44	2	*en montant,*	$\overline{dC}$ *lisez* : $\overline{eC}^2$.
44	4	*id.*	$\overline{eG}^2$ *lisez* : $\overline{dG}^2$.
47	2	*id.*	SC *lisez* : SB.
49	11	*id.*	AMB *lisez* : $SA_1M_1B_1$.
71	4	*en descendant,*	BFC *lisez* : C′FC.
Id.	5	*id.*	F *lisez* : D.
72	2,4 et 7	*id.*	*lisez* : $m, 2m, 4\cos^2 a$.
Id.	1	*en montant,*	OD *lisez* : OB.
Id.	14	*id.*	OF *lisez* : DF.
73	2, 4 et 6	*en descendant,*	OD *lisez* : OB.
90	14	*en montant,*	$\frac{1}{r_1}$ *lisez* : $\frac{1}{h_1}$
90	13	*id.*	*lisez* : les différents termes.
93	12	*en descendant,*	EG,AB et B *lisez* : égales et parallèles à SF.
99	7	*en montant,*	$+\overline{CG}^2 + AD \times CG$ *lisez* : $-\overline{CG}^2 - AD \times CG$.
102	12	*id.*	dans lesquels *lisez* : en remarquant que
103	10	*en descendant,*	MC,AD,BF *lisez* : MA,MB,MC
104	13	*en descendant,*	LB *lisez* : LD.
109	6	*id.*	EAB *lisez* : EAP.
111	4	*id.*	P *lisez* : I.
112	1	*id.*	OK *lisez* : PK.
118	1	*id.*	BAE *lisez* : BIE.

Pages.	lignes.		
118	8 et 9	*id.*	$\frac{IF}{IH}$ *lisez :* $\frac{IF}{FH}$
121	13	*en montant,*	d'un même plan *lisez :* de deux plans parallèles.
126	17	*en descendant,*	AC et BD *lisez :* EC et ED.
134	6	*id.*	AEBG *lisez :* AEBH.
135	1	*en montant,*	CD *lisez :* CM.
149	15	*id.*	BS *lisez :* RS.
197	12	*id.*	$AH \times 2R$ *lisez :* $AB \times AC$.
208	12	*id.*	$\frac{AE}{AB}$ *lisez :* $\frac{AE}{AD}$
214	15	*id.*	somme *lisez :* demi-somme.
222	14	*en descendant,*	EF *lisez :* MF.
223	7	*en descendant,*	B *lisez :* A.
223	15	*en montant,*	ajoutez : décrivez un cercle sur A F comme diamètre.
234	8	*id.*	SM *lisez :* DM.
236	9	*en montant,*	*lisez :* donc en ajoutant, membre à membre, les équations (1) et (2).
239	2	*en montant,*	P *lisez :* M.
249	7	*id.*	$\frac{EH}{ED}$ *lisez :* $\frac{HD}{AE}$
250	9,10,	*en montant,*	supprimez ces deux lignes.
262	12	*en descendant,*	le point B′ *lisez :* à la limite, le point B′.
266	13	*id.*	OBI *lisez :* OBIC′.
269	14	*en montant,*	$d-r$ *lisez :* $d-r'$.
291	3	*en descendant,*	(fig. 192) *lisez :* (fig. 172).
299	1 et 3	*en montant,*	supprimez p au-dessous du produit des tang
302	15	*en montant,*	*lisez :* plus petite ou plus grande.
304	6	*en montant,*	petites *lisez :* grandes.
Id.	10	*id.*	d *lisez :* $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$

ERRATA POUR LES FIGURES.

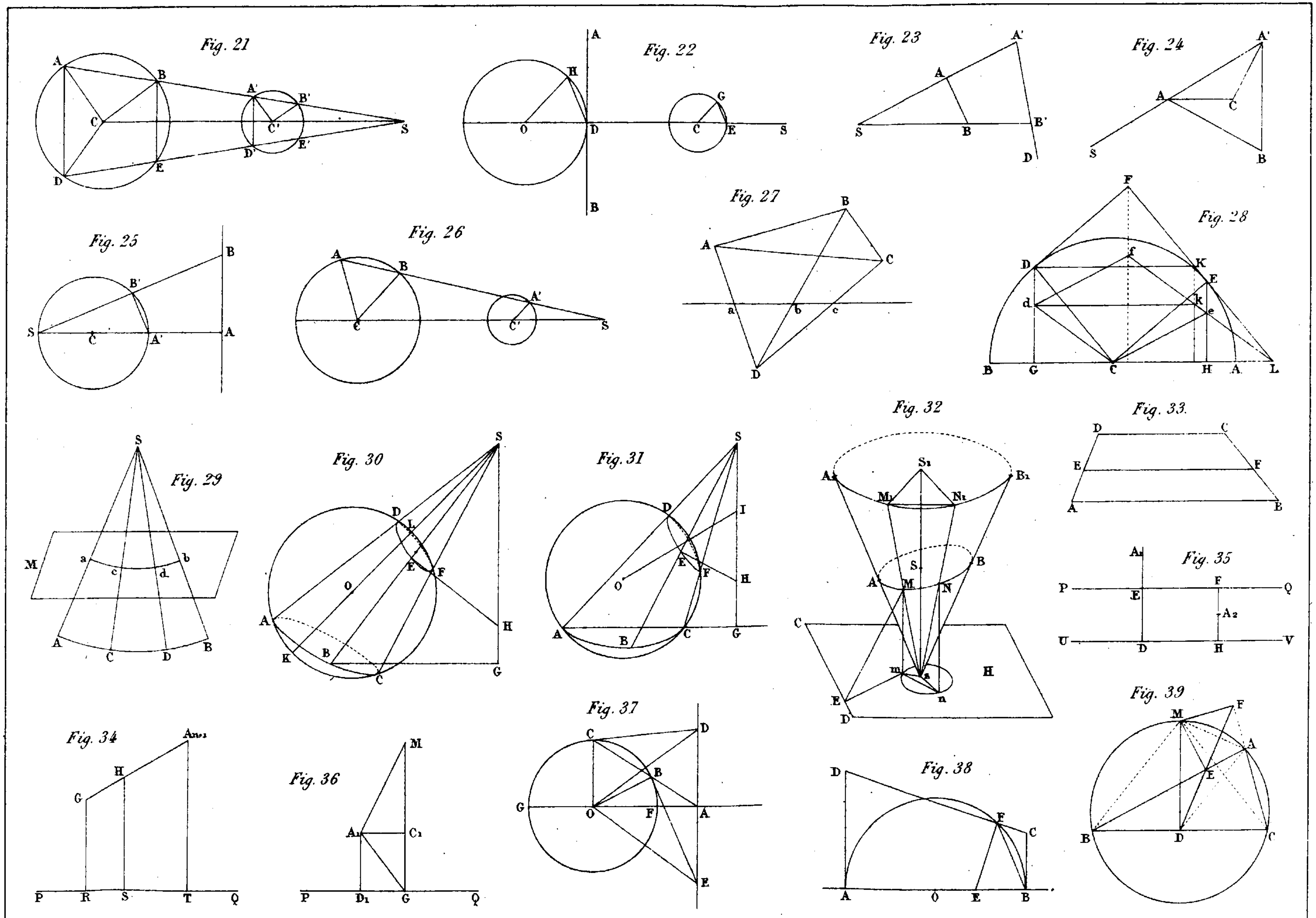
(Fig. 8). Remplacez H par N et mettez H sur KM.
(Fig. 40). Échangez les lettres A et D.
(Fig. 43). Remplacez E par G sur le prolongement de FI.
(Fig. 50). Échangez les lettres G et C.
(Fig. 83). Remplacez L,D,E,M,Q,P, respectivement, par P,E,M,Q,S,R.
(Fig. 85). Échangez les lettres F et F_1.

NOTA. — *Les numéros de renvoi cités dans le texte doivent être diminués de trois unités lorsqu'ils sont supérieurs à* 117.



Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis

Lith. Camaron, r. St Jacques



Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris.

Lith. Clamaron, r. St. Jacques 254.

Fig. 40

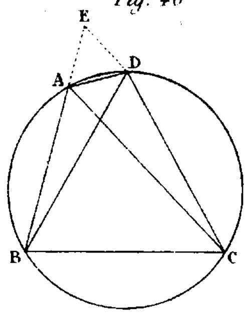


Fig. 41

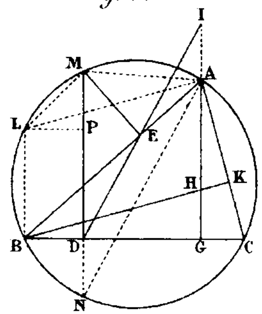


Fig. 42

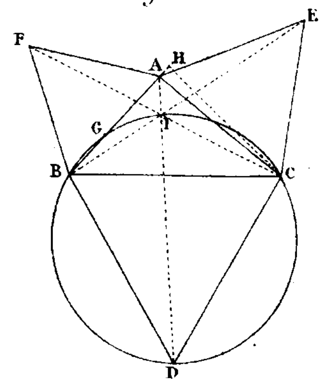


Fig. 43

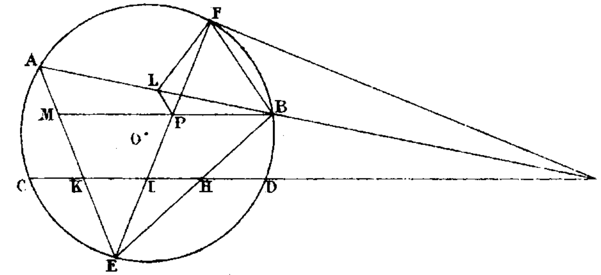


Fig. 48

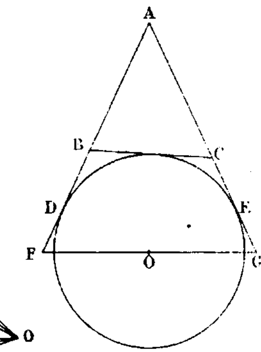


Fig. 44

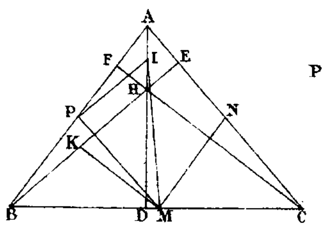


Fig. 45

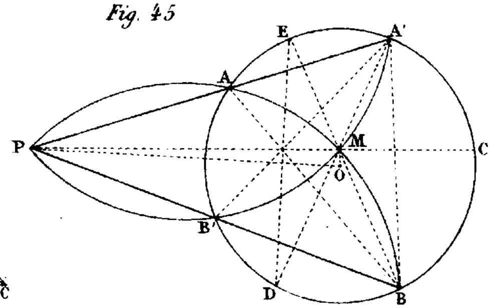


Fig. 46

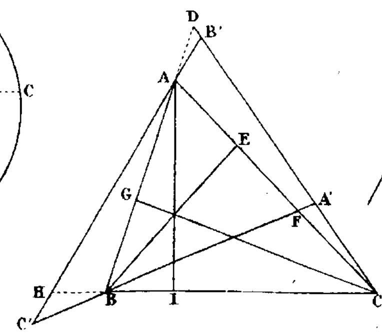


Fig. 47

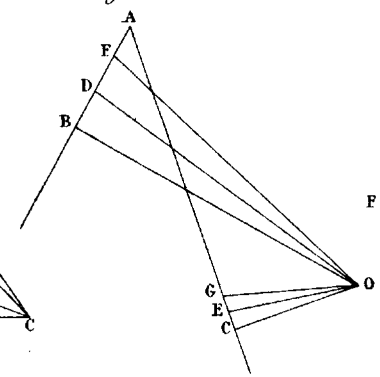


Fig. 49

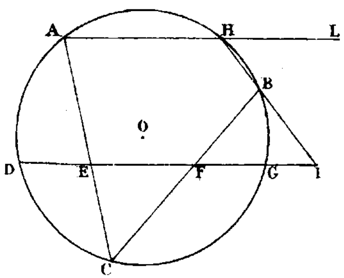


Fig. 50

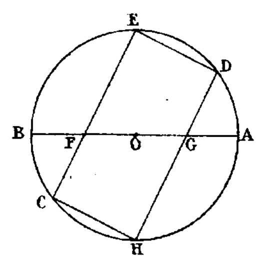


Fig. 51

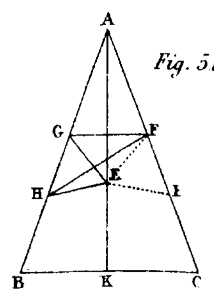


Fig. 52

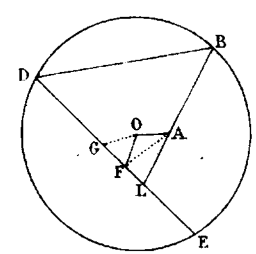
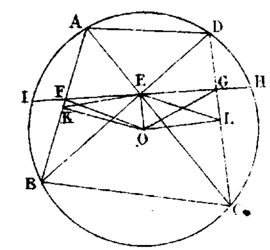
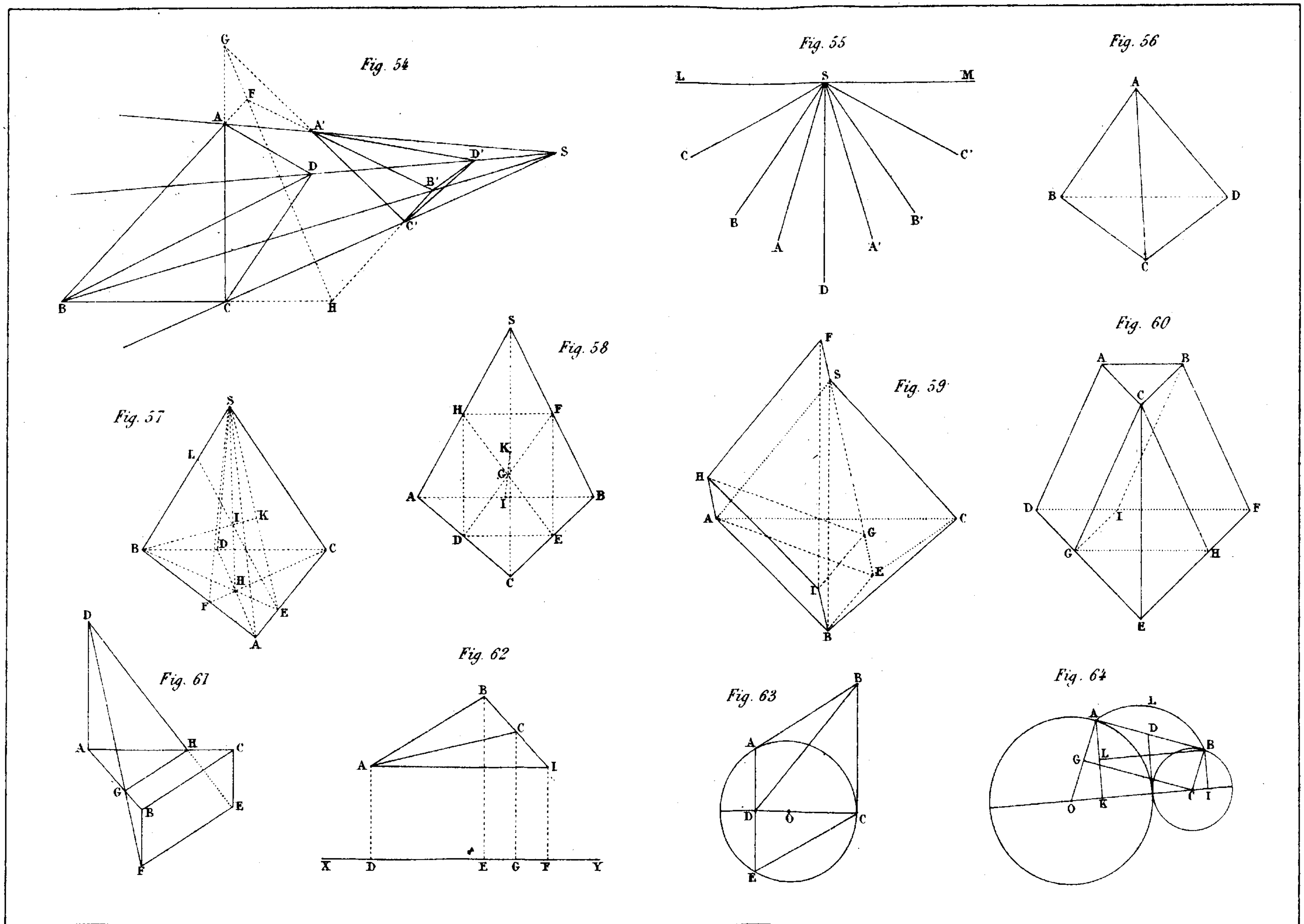


Fig. 53

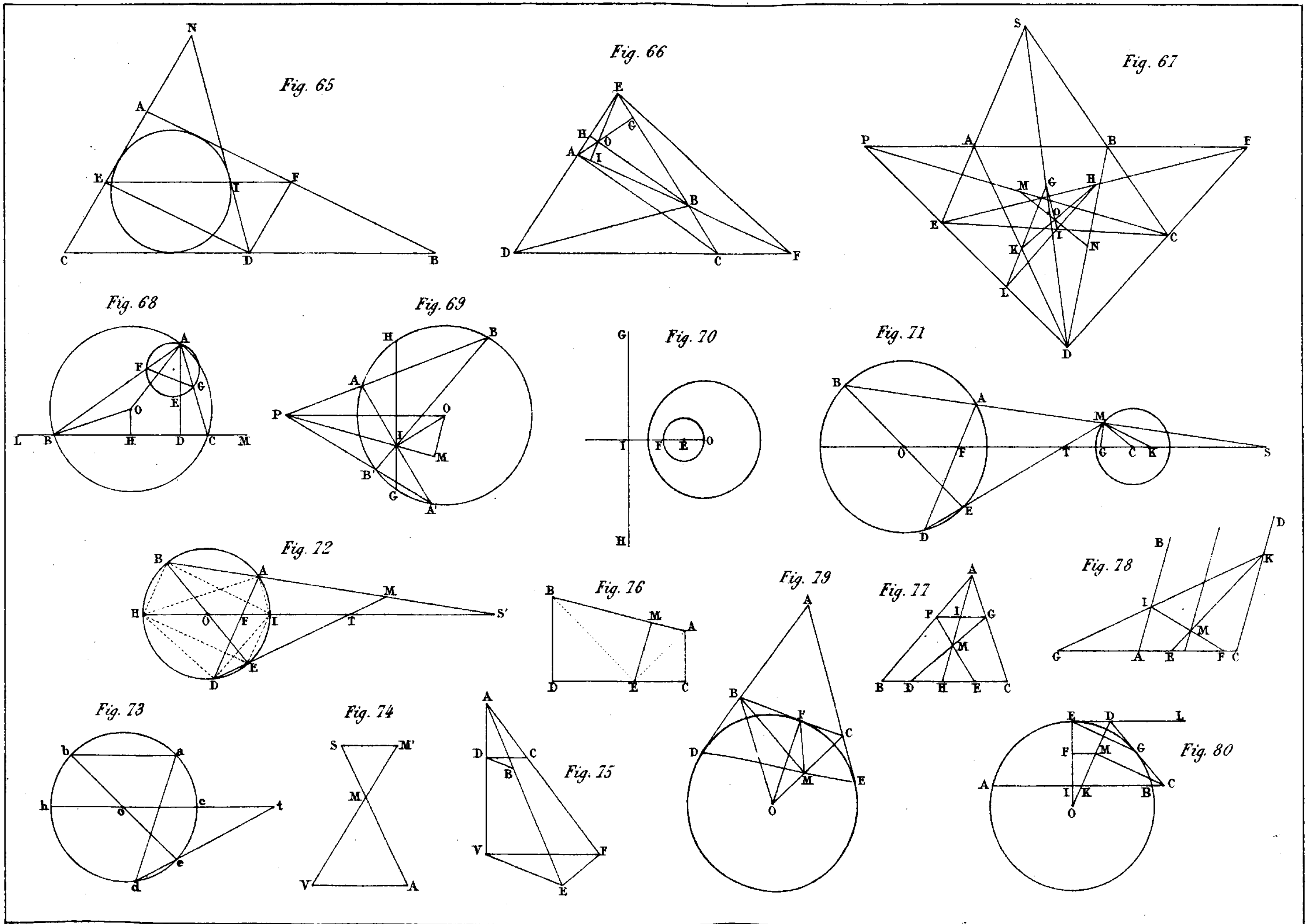


Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris.
Lith. Clamaron, r. St Jacques 254.



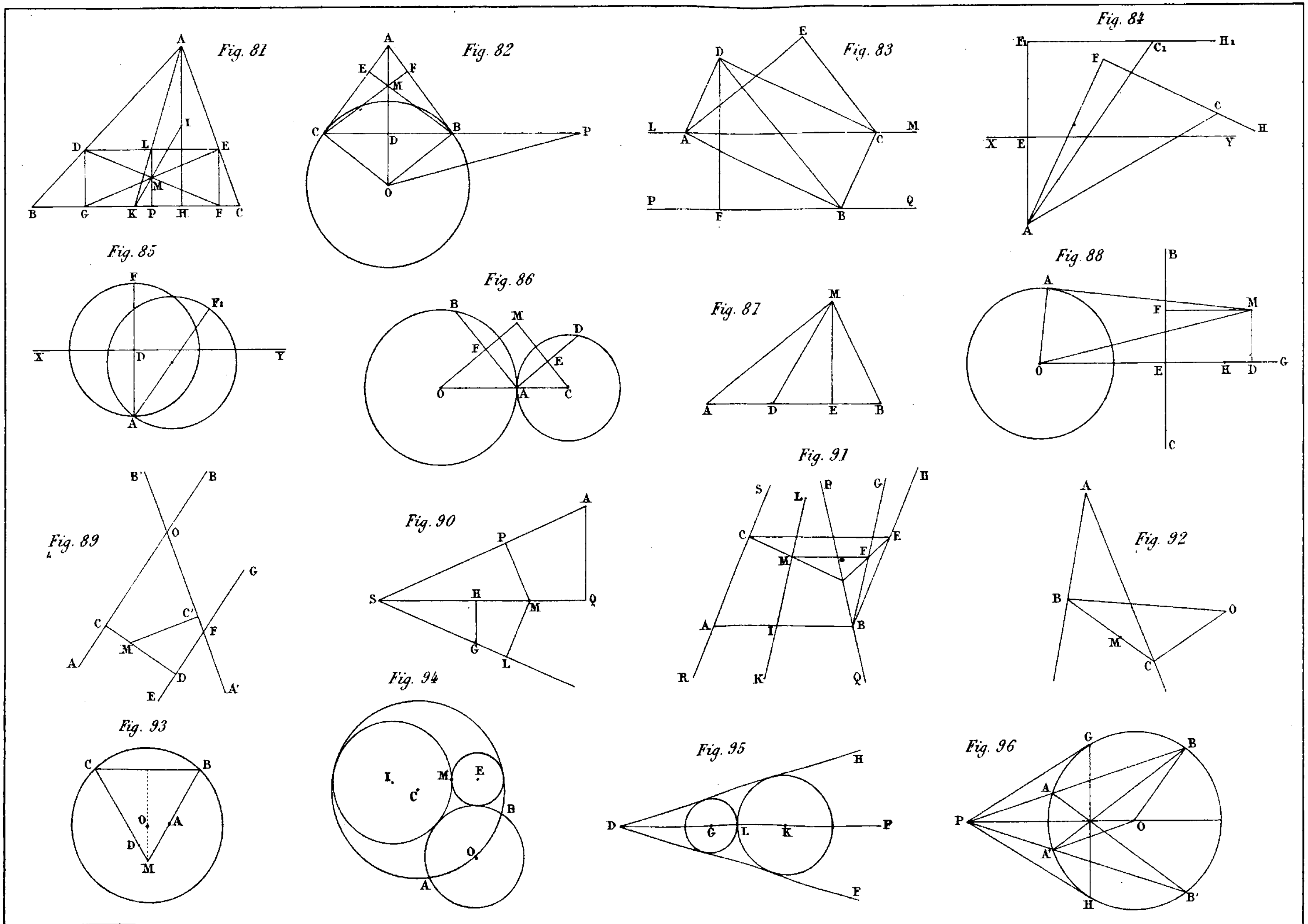
Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris

Lith. Clamaron, r. St Jacques 254.

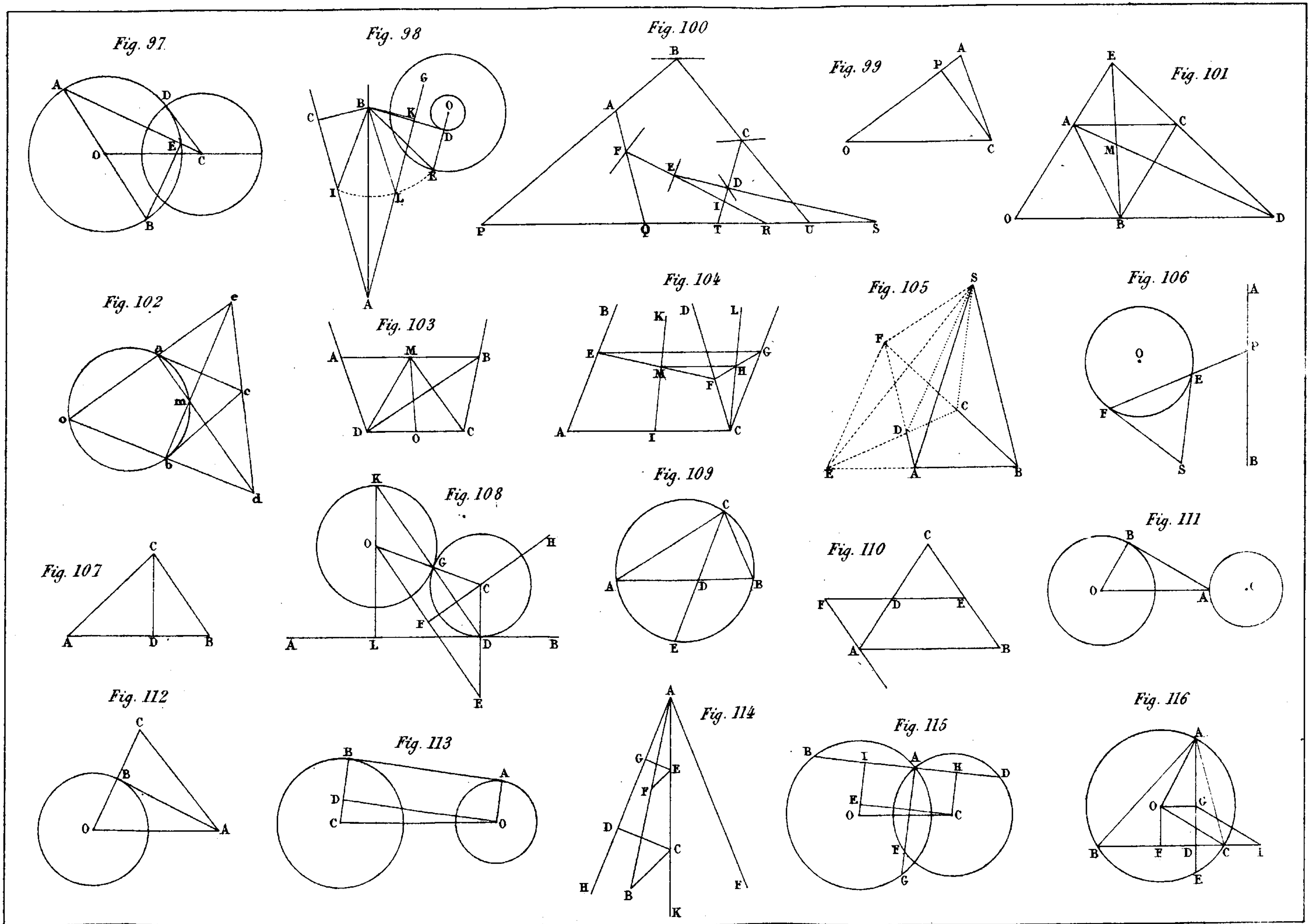


Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris.

Lith. Clamaron, r. St Jacques 254.

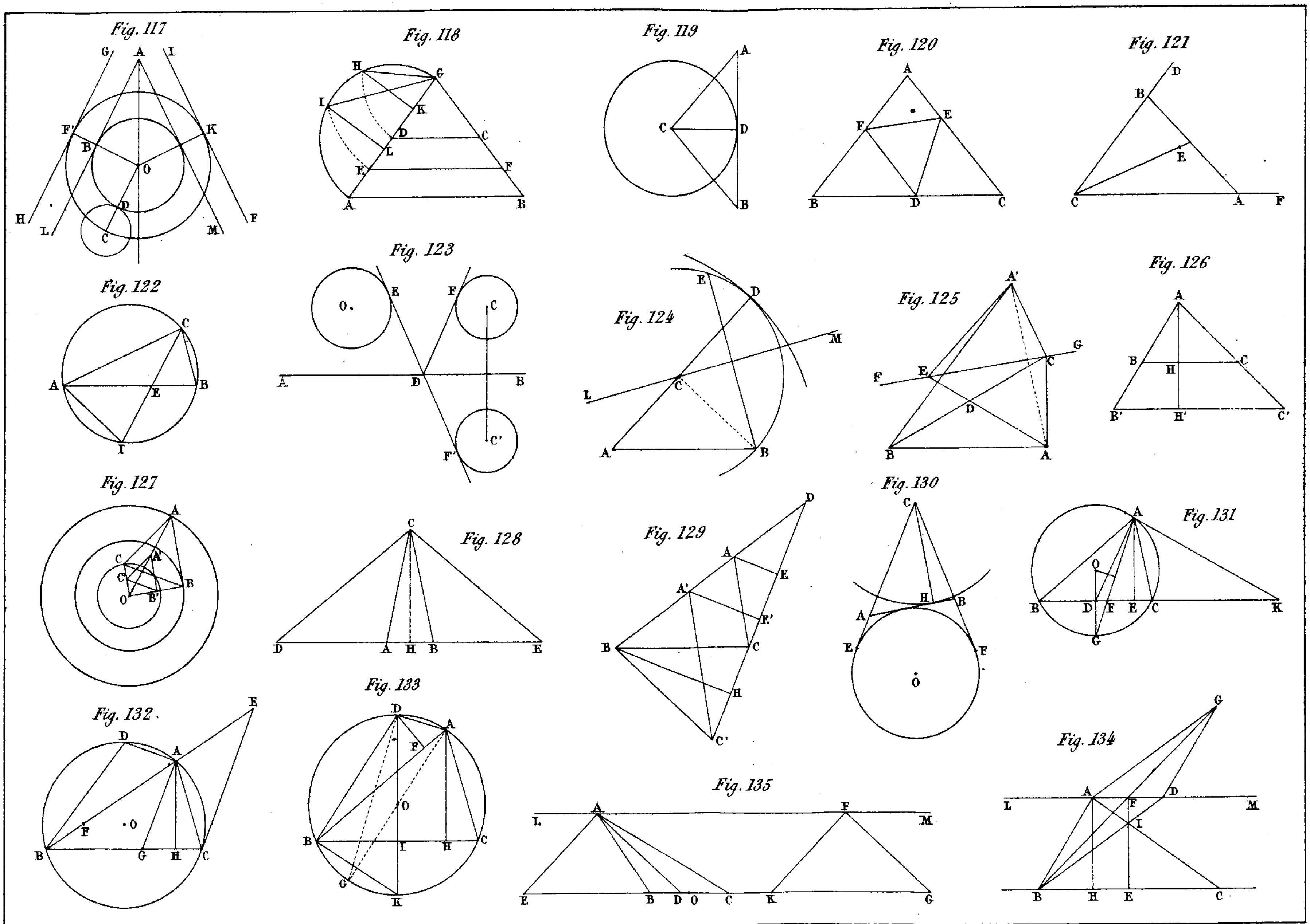


Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris. Lith. Camaron, r. St Jacques 254.

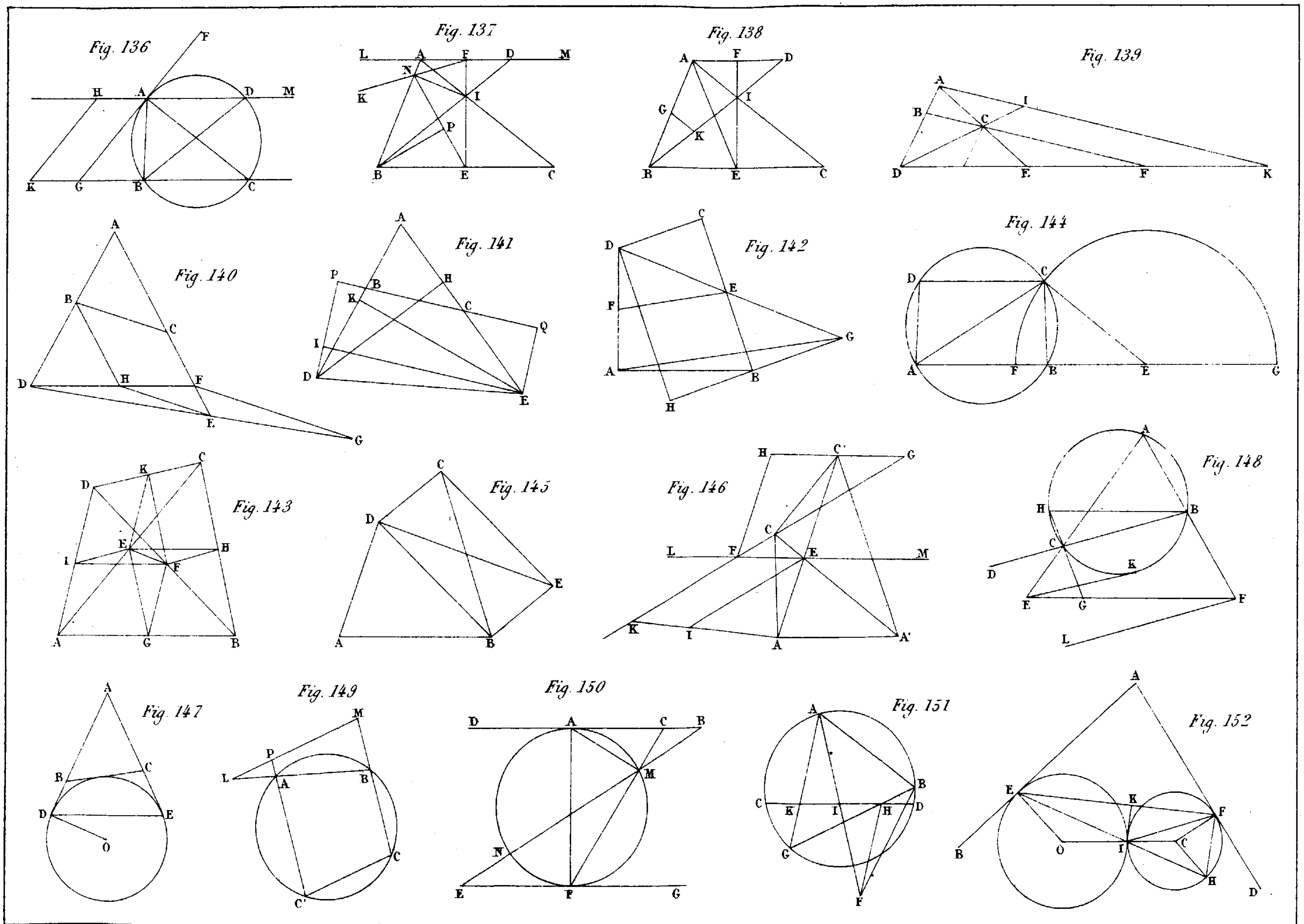


Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4bis Paris.

Lith. Clamaron, r. St Jacques 254.



Gravé par Hautz, r. du Cherche-Midi 4 bis — Lith. Clamaron, r. St Jacques 254.



Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4bis Paris. Lith. Clamaron, r. St Jacques 254.

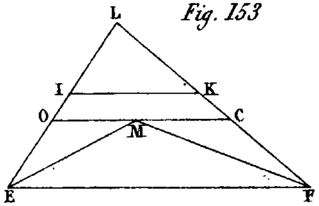


Fig. 153

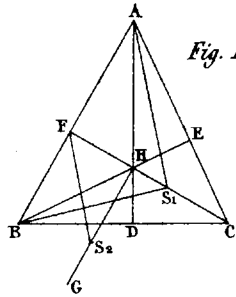


Fig. 155

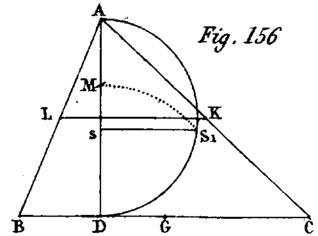


Fig. 156

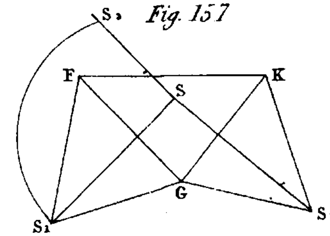


Fig. 157

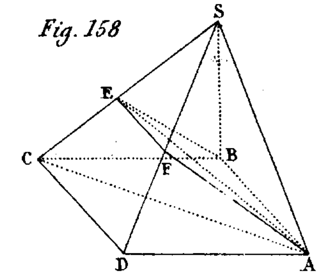


Fig. 158

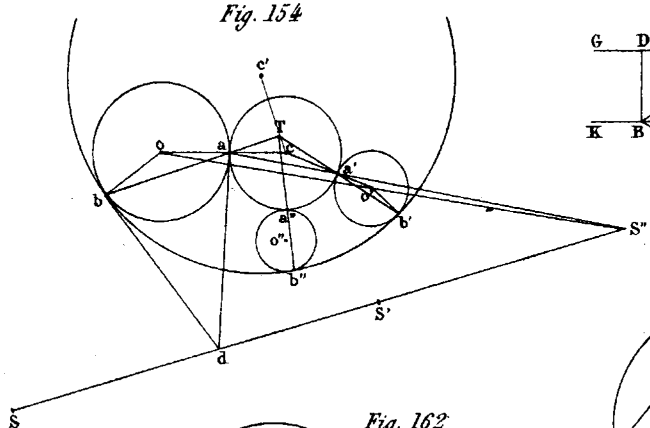


Fig. 154

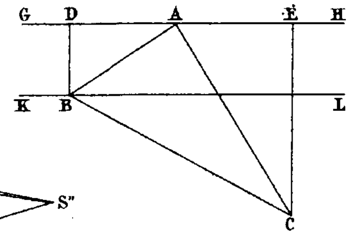


Fig. 160

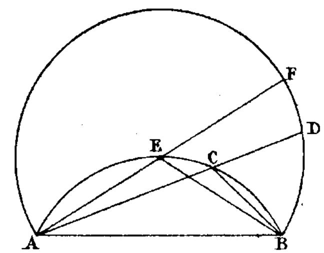


Fig. 161

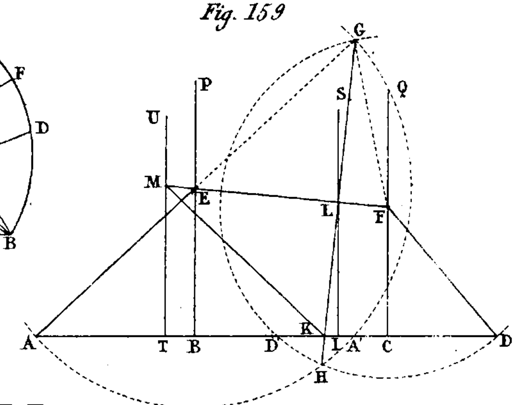


Fig. 159

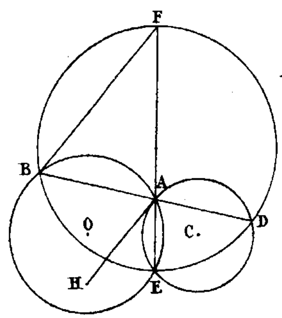


Fig. 163

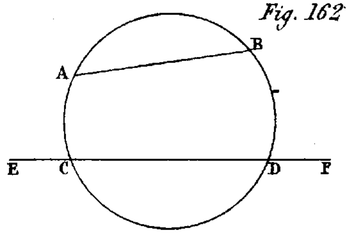


Fig. 162

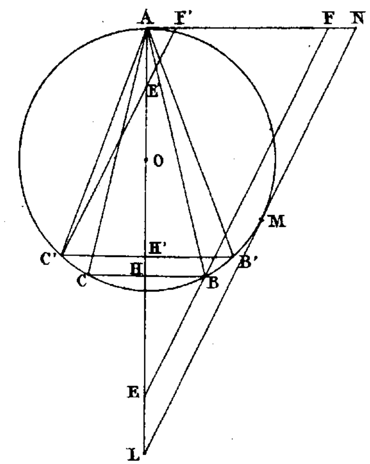


Fig. 164

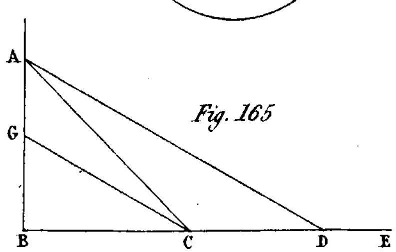


Fig. 165

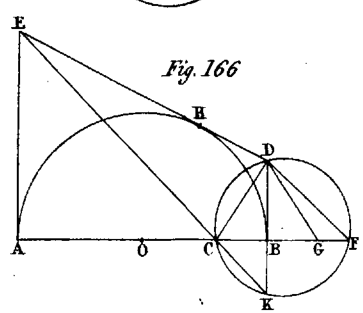


Fig. 166

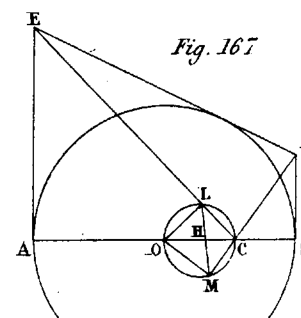
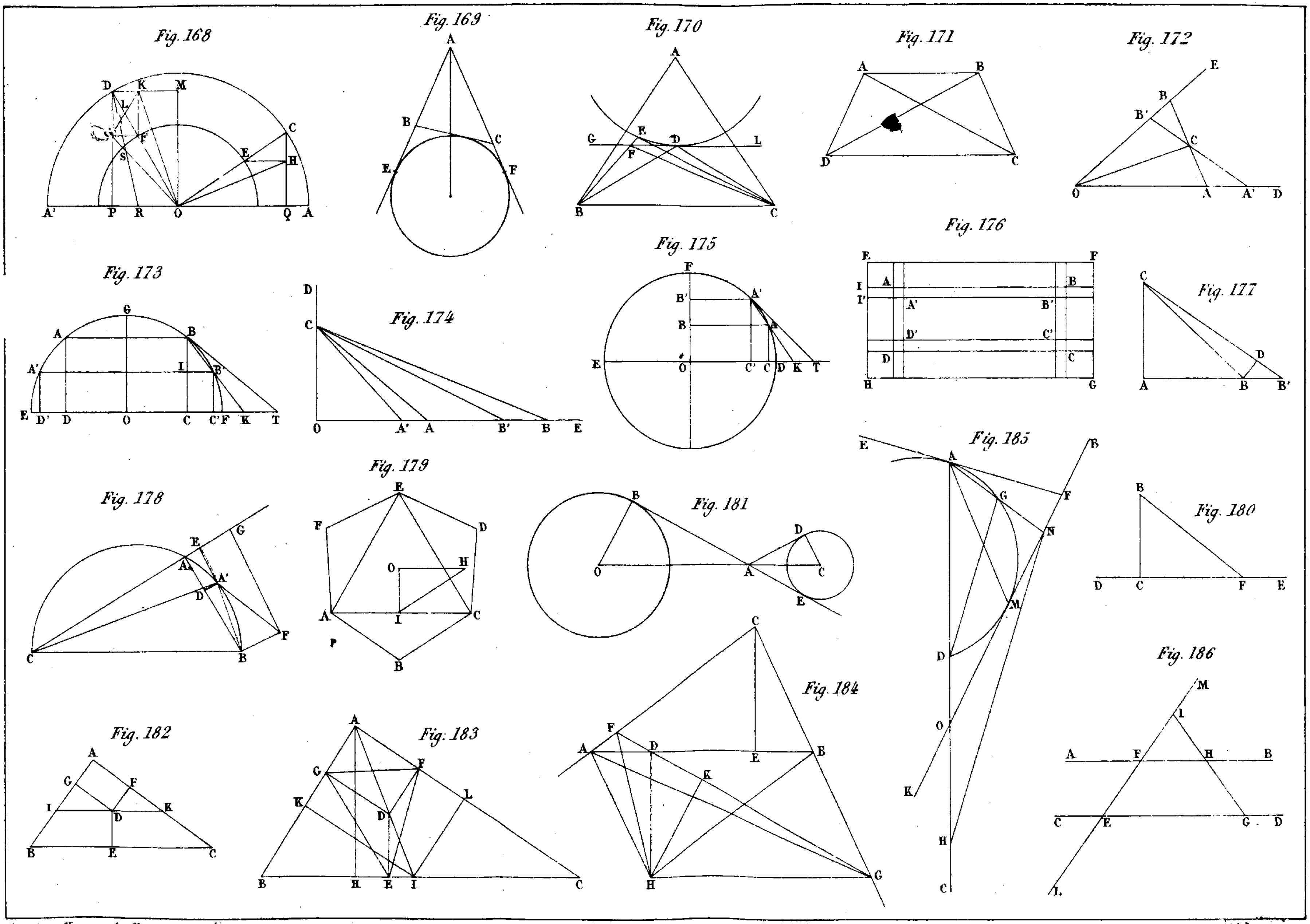


Fig. 167

Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris.

Lith. Clavaron, r. St Jacques 254



Gravé par Kautz, r. du Cherche-Midi 4 bis Paris. Lith. Clamaron