N° D'ORDRE
289.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. **BOUSSINESQ**,

1re **THÈSE.** — ÉTUDE SUR LA PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS LES MILIEUX HOMOGÈNES.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS D'ANALYSE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 16 ~~avril~~ mai 1867, devant la Commission d'Examen.

MM. SERRET, *Président.*
BERTRAND, } *Examinateurs.*
BRIOT, }

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1867

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	PONCELET.	
	LEFÉBURE DE FOURCY.	
PROFESSEURS	DUMAS	Chimie.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT	Géologie.
	PUISEUX	Astronomie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	PAUL GERVAIS	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

PREMIÈRE THÈSE.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

ÉTUDE SUR LA PROPAGATION DE LA CHALEUR

DANS

LES MILIEUX HOMOGÈNES.

INTRODUCTION.

Ce Mémoire a pour objet diverses questions générales relatives à la théorie de la chaleur, et spécialement l'étude des surfaces isothermes qui se produisent dans un milieu homogène chauffé en un de ses points.

I.

Les quatre premiers paragraphes sont consacrés à l'établissement des formules fondamentales. J'y considère un corps quelconque en repos, ayant ses divers points à des températures différentes. J'admets comme fait d'expérience le principe suivant : il passe par conductibilité, à travers tout élément plan situé dans un corps, un flux de chaleur, qui dépend de la manière dont la température est distribuée dans un très-petit espace autour de l'élément plan, et qui est nul lorsque cette température est constante. Ce principe, combiné avec celui de la continuité des fonctions naturelles, permet d'obtenir, pour des différences suffisamment petites de température, l'expression des flux de chaleur. La considération du tétraèdre de Cauchy donne d'ailleurs tous les flux relatifs à un même point en fonction de trois d'entre eux, dits principaux.

L'expression des flux principaux contient les trois dérivées partielles de la température par rapport aux coordonnées x, y, z, et neuf coefficients distincts, dépendants de la nature du corps et de la manière dont il se trouve actuellement constitué. Trois de ces coefficients sont positifs, à cause de ce fait, que, si la température est constante sur chaque surface d'une famille de plans parallèles, la chaleur traverse ces plans en allant des plus chauds aux plus froids. Les six autres coefficients peuvent être quelconques : le § V montre qu'il existe un système d'axes dans lequel ils sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Les neuf coefficients se réduisent aux trois premiers quand le milieu est homoédrique, c'est-à-dire lorsqu'il est symétrique par rapport à un système d'axes rectangulaires, choisis pour axes des coordonnées. Tels sont les milieux étudiés par M. Duhamel, dans son Mémoire inséré au tome XIII du *Journal de l'École Polytechnique*. M. Duhamel part du principe suivant : toute molécule d'un corps envoie à une autre molécule très-voisine une quantité de chaleur proportionnelle au temps, à la différence très-petite de leurs températures, et à une certaine fonction-facteur, variable avec la longueur et la direction de la droite qui joint les deux points, mais la même pour deux directions opposées. Il admet en outre que le rayonnement particulaire s'étend à des distances beaucoup plus grandes que celle de deux molécules adjacentes : ce qui permet de faire la somme des quantités de chaleur qui traversent un élément plan, comme si la matière était continue. Les formules obtenues contiennent neuf coefficients, dont les trois premiers sont positifs et distincts, et dont les six autres sont égaux deux à deux. Si on adopte le système d'axes, toujours existant, où ces six derniers sont égaux deux à deux et de signe contraire, ils ne pourront qu'être nuls : ainsi le milieu sera symétrique par rapport à ce système d'axes.

On peut étendre la méthode de M. Duhamel au cas de milieux quelconques. Il suffit de généraliser son principe fondamental. Ce ne sera pas en supposant que la fonction-facteur soit différente pour deux directions opposées, car cette hypothèse ne me paraît pas admissible, du moins quand on assimile les molécules à des points matériels. Soient en effet M et M′ deux molécules, u et u' leurs températures. Évidemment, M′ perd la chaleur qu'elle cède à M, si, par exemple, sa température est la plus élevée ; en d'autres termes, les quantités de chaleur cédées à chacune des molécules par l'autre sont égales et contraires. D'ailleurs les deux excès $u' - u$ et $u - u'$ sont aussi égaux et contraires. Donc la fonction-facteur devra être la même pour les deux directions opposées qui vont de M vers M′ et de M′ vers M. Mais on pourra supposer que la chaleur cédée par M′ à M n'est pas proportionnelle à la différence de leurs températures, qu'elle est une fonction plus compliquée des trois dérivées partielles $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, et des cosinus des angles que fait MM′ avec les axes. L'expérience indique que l'échange est nul quand ces trois dérivées sont nulles, mais elle ne dit rien de plus. Ce n'est que dans le cas d'un milieu isotrope que la chaleur échangée devra être simplement proportionnelle à la différence des températures. Dans ce cas, en effet, on peut adopter la droite MM′ pour axe des z, et puis, sans modifier la formule de l'échange de chaleur, changer l'axe des x ou celui des y en leurs prolongements : or ces transformations d'axes font changer les signes des dérivées $\frac{du}{dx}$ ou $\frac{du}{dy}$, qui ne pourront par suite entrer dans la formule; donc celle-ci ne contiendra que le terme en $\frac{du}{dz}$, proportionnel à la différence $u' - u$.

Avec la généralisation indiquée, la méthode de M. Duhamel donne à l'expression des flux de chaleur neuf coefficients distincts.

Après avoir établi les formules des flux de chaleur, je donne les équations des problèmes sur le mouvement ou sur l'équilibre des températures, et je démontre qu'elles déterminent complétement la solution.

II.

Les paragraphes suivants traitent de la propagation de la chaleur dans un milieu homogène quelconque.

Je considère d'abord un milieu indéfini en tout sens, chauffé dans un espace très-petit autour de l'origine des coordonnées. Après avoir réduit l'équation à la forme de celle de Fourier, par la méthode que donne M. Lamé dans sa troisième Leçon, je démontre que les surfaces isothermes sont des ellipsoïdes semblables et semblablement placés : l'un d'eux est celui que M. Lamé appelle ellipsoïde principal. Il jouit de cette propriété importante, que, si on choisit pour axes de coordonnées un système quelconque de ses diamètres conjugués, l'équation de la chaleur prend la forme simple de celle de Fourier, et ses trois coefficients ne sont autres que les carrés des demi-diamètres correspondants. Je déduis de cette propriété l'équation des cylindres isothermes produits dans le milieu quand on le chauffe également en tous les points d'une droite indéfinie. Ces cylindres sont circonscrits aux ellipsoïdes précédents, et tous ceux d'égale température, dans plusieurs milieux pareils, chauffés de la même manière, mais suivant des droites différentes, sont circonscrits à un même ellipsoïde. Je déduis encore de la propriété fondamentale de l'ellipsoïde principal l'équation des plans isothermes, qu'on produit en chauffant également le milieu sur toute l'étendue d'un plan : avec des milieux pareils et chauffés pareillement, mais suivant des directions différentes, les plans d'égale température sont encore tangents aux ellipsoïdes isothermes. Ils ont ces ellipsoïdes pour enveloppes, de même que, dans la théorie de la lumière, les ondes planes parties simultanément de l'origine ont pour enveloppes les surfaces générales des ondes.

Vient ensuite le problème de la propagation de la chaleur dans une barre, ou dans un milieu qui a une seule dimension finie, les deux autres étant très-petites. Pour obtenir l'équation de la chaleur, je décompose la barre en éléments de volume, par des plans tels, que le flux qui traverse chacun d'eux dépend seulement de la variation de la chaleur suivant le sens de la barre. Ces plans existent, ainsi que le démontre la cinquième Leçon de M. Lamé. L'équation obtenue, j'en déduis que toutes les barres, taillées à partir de l'origine dans le milieu homogène, chauffées également à cette origine, et rayonnant de la même manière, ont leurs points d'égale température sur certains ellipsoïdes semblables et semblablement placés. L'un de ces ellipsoïdes représente par le carré de chacun de ses demi-diamètres le coefficient de conductibilité de la barre de même direction : je l'appelle *ellipsoïde des points isothermes;* peut-être mériterait-il le nom d'*ellipsoïde des conductibilités*. Il coïncide avec l'ellipsoïde principal dans le cas des milieux homoédriques, mais il en est différent dans tous les autres cas. Cependant, si le milieu est presque homoédrique, ces deux ellipsoïdes ne diffèrent que de quantités négligeables du second ordre de petitesse. Dans le cas général, ils se touchent en deux points opposés, et tout plan parallèle aux plans tangents communs les coupe suivant deux courbes semblables et semblablement placées.

Les surfaces isothermes des barres sont des éléments plans parallèles entre eux. Ceux d'égale température sur les diverses barres qui émanent de l'origine, suffisamment prolongés, sont tangents à des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placés. Le point d'une barre où est situé un de ces éléments, et celui où le même élément prolongé est tangent à l'ellipsoïde, sont liés entre eux par des relations simples : je désigne ces deux points sous le nom de *correspondants*. Quand le premier est situé sur l'ellipsoïde des points isothermes, le second l'est sur l'ellipsoïde principal.

Reste l'étude de la propagation de la chaleur dans les plaques, c'est-à-dire dans les milieux qui ont deux dimensions finies, et la troisième très-petite. Pour obtenir l'équation, je décompose la plaque en éléments de volume, par deux systèmes de plans tels, que les flux qui les traversent dépendent seulement de la variation de la chaleur suivant des sens parallèles à la plaque. Je montre ensuite que celle-ci, chauffée dans un très-petit espace autour de l'origine, aura ses courbes isothermes situées sur des ellipsoïdes semblables à celui des points isothermes et semblablement placés. Plusieurs plaques, taillées suivant des sens différents dans un même milieu, chauffées pareillement et rayonnant de la même manière, n'ont pas en général leurs courbes d'égale température sur le même ellipsoïde. Mais, pour toutes ces plaques, les surfaces d'égale température, menées par ces courbes, sont des cylindres de direction déterminée, circonscrits, si on les prolonge, à un même ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde principal et semblablement placé.

III.

Plusieurs de ces lois sont confirmées par les expériences de M. de Senarmont sur la conductibilité des cristaux pour la chaleur.

M. de Senarmont faisait tailler dans un cristal des plaques minces, à bases parallèles, percées d'un petit trou. On les couvrait d'une légère couche de cire; puis on introduisait par le trou un fil d'argent chauffé au moyen d'une lampe. La cire fondait tout autour dans un espace qui dessinait une ellipse pour courbe isotherme. M. de Senarmont admit que cette courbe aurait eu la même forme et la même disposition, si la plaque, chauffée en un point intérieur, n'avait pas été séparée du reste du cristal. S'appuyant sur ce principe, et sur des expériences faites avec des plaques diversement inclinées par rapport aux axes minéralogiques, il conclut qu'un cristal, chauffé en un point intérieur, devait donner pour surfaces isothermes des ellipsoïdes semblables et semblablement placés.

La théorie prévoit ces résultats de l'expérience, et nous apprend que l'un des ellipsoïdes obtenus par M. de Senarmont est celui des points isothermes : cet ellipsoïde donne, par le carré de chacun de ses demi-diamètres, le coefficient de conductibilité d'une barre de même direction. Mais, à part le cas d'un milieu homoédrique, il n'est pas semblable aux surfaces isothermes qui seraient produites dans un cristal de même nature, chauffé en un point intérieur : celles-ci sont en effet représentées par l'ellipsoïde principal.

Toutefois, dans un corps peu hémiédrique, les deux ellipsoïdes ne diffèrent que d'une quantité négligeable du second ordre de petitesse. Alors le principe de M. de Senarmont peut être regardé comme vrai. Or divers motifs portent à croire que ce cas doit embrasser la totalité des cristaux naturels. Et d'abord, tous les cristaux connus sont homoédriques, ou très-près de l'être, au point de vue des ondes lumineuses qui les traversent. Le quartz, le plus hémiédrique de tous, ne manifeste ce défaut de symétrie que sur les rayons sensiblement parallèles à l'axe optique : pour des rayons de tout autre sens, la cause, déjà si faible, qui produit la double réfraction, suffit pour masquer complétement l'hémiédrie. L'analogie porte à croire qu'il en est de même à l'égard de la chaleur. Une autre raison peut se tirer de l'observation des cristaux du système cubique. Il y a tout lieu de penser que, chez ces cristaux, l'ellipsoïde principal est une sphère, comme la surface de l'onde. Or les expériences de M. de Senarmont font voir que l'ellipsoïde des points isothermes y est également sphérique : donc l'hémiédrie doit y être à peine sensible.

Observons qu'une hémiédrie assez faible peut n'avoir pas d'influence appréciable sur l'ellipsoïde des points isothermes, pour la raison indiquée, et produire cependant d'autres effets, par exemple l'électrisation par la chaleur.

§ I. — *Flux de chaleur.*

Considérons un corps en repos, et appelons x, y, z les coordonnées d'un quelconque M de ses points, par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes. Désignons par u la température en M, et par t le temps : u sera généralement fonction de x, y, z, t. La théorie de la chaleur a pour but de déterminer cette fonction, quand on connaît : 1° certains éléments de la constitution physique du corps, sa forme et ses dimensions; 2° la valeur de u en chacun de ses points pour une certaine époque, pour $t = 0$, par exemple; 3° enfin l'influence calorifique exercée du dehors sur le corps ou le milieu considéré.

Il faudra d'abord évaluer l'augmentation infiniment petite que reçoit, pendant un instant dt, la température d'un élément de volume situé en M. Cette augmentation est égale à la quantité de chaleur reçue par l'élément, divisée par le volume de cet élément, et divisée en outre par sa capacité calorifique. Celle-ci est la quantité de chaleur qu'il faudrait communiquer à un volume égal à 1 d'une matière pareille à celle de l'élément, pour élever sa température de 1 degré. Quand u est assez peu variable, la capacité est un coefficient constant pour une même matière; nous la désignerons par ρ.

La quantité de chaleur reçue par un élément de volume se compose en général de deux parties. L'une lui est communiquée par la matière immédiatement adjacente, ou qui n'en est qu'à une distance insensible : elle est désignée sous le nom de *chaleur de conductibilité*. L'autre lui vient d'une distance finie, par exemple d'autres corps voisins : elle est alors appelée *chaleur rayonnante*. Elle pourrait aussi être immédiatement produite dans l'élément de volume, si celui-ci était le siége de quelque action chimique. La théorie de la chaleur ne s'est occupée jusqu'à ce jour que des corps athermanes, c'est-à-dire de ceux où la propagation ne se fait à l'intérieur que par conductibilité. Toutefois les résultats de ce Mémoire s'étendent aux corps qui se laissent traverser par la chaleur rayonnante, pourvu que la quantité de cette chaleur gagnée ou perdue par un élément de volume soit une fonction donnée du temps et de la température de l'élément.

La quantité de chaleur qui pénètre pendant l'instant dt dans un élément de volume, et qui vient de la matière adjacente, est cédée aux molécules de sa surface par les molécules extérieures très-voisines. Ce phénomène se passe dans une couche d'une épaisseur insensible, qu'on peut regarder comme la surface même de l'élément de volume. Si celui-ci est limité par des faces planes, ces faces sont appelées des *éléments plans*, et les quantités de chaleur qui les traversent des *flux de chaleur*.

Décomposons l'un de ces éléments plans en parties égales très-petites : la matière qui environne toutes ces parties se trouve sensiblement dans les mêmes circonstances, à cause de la continuité; ainsi la quantité de chaleur qui traverse une partie de l'élément plan est égale à celle qui traverse toute autre partie. Cela revient à dire que les flux de chaleur sont proportionnels aux éléments de surface qu'ils traversent. Par la même raison de continuité, ils sont proportionnels à l'élément de temps dt pendant lequel ils sont produits. On peut donc les rapporter à l'unité de surface et à l'unité de temps.

Faisons passer par le point M une infinité d'éléments plans, et menons à chacun une normale dans un sens déterminé. La matière située du côté de l'élément plan où l'on a mené la normale cède à celle qui est de l'autre côté un certain flux de chaleur : nous désignerons ce flux par F, après l'avoir rapporté à l'unité de surface et à l'unité de temps; ce flux sera variable avec la direction de l'élément plan, c'est-à-dire avec les cosinus des angles que fait la normale avec les axes. Soient m, n, p ces cosinus : F sera fonction de m, n, p. Cette fonction devra être telle, que si on change m, n, p en $-m, -n, -p$, elle prenne la même valeur absolue, mais avec un signe contraire. En effet, changer à la fois de signe m, n, p, cela revient à considérer le même élément plan, mais du côté opposé : le flux sera la même quantité de chaleur que dans le premier cas, mais le côté considéré la perdra, si l'autre la gagnait, ou réciproquement.

La fonction F se détermine en m, n, p par la considération du tétraèdre de Cauchy. Supposons d'abord que m, n, p soient positifs, c'est-à-dire qu'une droite parallèle à la normale et de même sens, menée à partir de l'origine, soit située dans l'angle des coordonnées positives. Construisons, à partir du point M, un tétraèdre infiniment petit, ayant trois arêtes parallèles aux trois axes des coordonnées, et de même sens, ayant de plus la face opposée perpendiculaire à la direction (m, n, p).

Soient : ω_1, ω_2, ω_3 les trois premières faces, respectivement perpendiculaires aux axes des x, y, z; F_1, F_2, F_3 les trois flux, rapportés à l'unité de surface et à l'unité de temps, qui traversent ces faces en venant des parties positives des axes. Pendant l'instant dt, le tétraèdre gagnera par ces faces des quantités de chaleur respectivement égales à

$$-F_1\omega_1\,dt,\quad -F_2\omega_2\,dt,\quad -F_3\omega_3\,dt.$$

Appelons ω la quatrième face diagonale. Le flux qui pénètre par elle dans le tétraèdre est, sauf erreur négligeable, $F\omega\,dt$; car, cette face passant par des points infiniment voisins de M, le flux qui la traverse diffère infiniment peu de celui qui traverse, en M, un élément plan de même direction.

On a d'ailleurs

$$\omega_1 = m\omega,\quad \omega_2 = n\omega,\quad \omega_3 = p\omega.$$

La chaleur totale de conductibilité reçue dans le tétraèdre pendant l'instant dt est donc

$$(F - mF_1 - nF_2 - pF_3)\,\omega\,dt.$$

Si on y joint la chaleur reçue par rayonnement ou par action chimique, la somme sera égale au produit du tétraèdre par le calorique spécifique et par l'augmentation de la température durant l'instant dt. Désignons par ϖ le volume du tétraèdre, volume incomparablement plus petit que la surface ω : ces derniers termes seront du même ordre de petitesse que le produit $\varpi\,dt$. Donc la chaleur reçue par conductibilité est du même ordre; divisée par $\omega\,dt$, elle donnera

$$F - mF_1 - nF_2 - pF_3 = 0,$$

ou bien

$$F = mF_1 + nF_2 + pF_3. \tag{1}$$

Nous avons supposé m, n, p positifs; mais le résultat serait le même, si m, par exemple, était négatif. En effet, on prendrait alors provisoirement, au lieu de l'axe des x, son prolongement, ce qui changerait m en $-m$; on se trouverait ainsi ramené au cas précédent, et l'on aurait la formule (1). Pour revenir ensuite au premier axe des x, il suffirait de changer à la fois le signe de m et celui de F_1, ce qui ne change rien à la formule.

Ainsi les flux de chaleur qui traversent les éléments plans situés en M sont tous fonction de trois d'entre eux, F_1, F_2, F_3 : nous appellerons ceux-ci *flux principaux*. L'expérience montre qu'ils dépendent eux-mêmes de la valeur qu'a la température au point M et tout autour dans une sphère d'un très-petit rayon. Or cette valeur est suffisamment définie par u et par ses trois dérivées partielles en x, y, z. En effet, soient $x+h$, $y+k$, $z+l$ les coordonnées de tout autre point M′ très-voisin de M; u étant la température de M, celle de M′ au même instant sera

$$u+\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}l:$$

elle est donc connue, si $u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ le sont. Ainsi F_1, F_2, F_3 sont des fonctions de u et de ses dérivées partielles en x, y, z. Pour des valeurs suffisamment petites des variables, ces fonctions continues peuvent être développées par la série de Taylor limitée aux termes du premier degré. Comme d'ailleurs l'expérience montre que les flux sont nuls, quand la température ne varie pas d'un point aux points voisins, il ne restera que les termes en $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$. Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots, \gamma''$ des coefficients indépendants de u, et nous pourrons poser

$$(2)\qquad \begin{cases} F_1=\alpha\dfrac{du}{dx}+\beta\dfrac{du}{dy}+\gamma\dfrac{du}{dz}, \\ F_2=\alpha'\dfrac{du}{dy}+\beta'\dfrac{du}{dz}+\gamma'\dfrac{du}{dx}, \\ F_3=\alpha''\dfrac{du}{dz}+\beta''\dfrac{du}{dx}+\gamma''\dfrac{du}{dy}. \end{cases}$$

Les coefficients $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont toujours positifs. En effet, supposons qu'on ait, par exemple, $\frac{du}{dy}=0, \frac{du}{dz}=0, \frac{du}{dx}>0$: la température sera constante pour tous les points situés sur un même plan perpendiculaire aux x, mais elle croîtra d'un de ces plans aux plans suivants. Or l'expérience montre que la chaleur traverse ces plans en allant des plus chauds aux plus froids : donc il faudra que F_1 soit positif, et pour cela α devra l'être.

Les coefficients α, β, γ,..., γ'' s'appellent *coefficients de conductibilité :* ils dépendent de la nature de la matière en M, et probablement aussi de la température elle-même. Mais, lorsque celle-ci varie assez peu, on peut les regarder comme constants. Ils seront donc en général, ainsi que la capacité ρ, des fonctions données de x, y, z.

Le milieu ou le corps est dit homogène, lorsque toutes ces fonctions se réduisent à des constantes.

§ II. — *Cas des milieux homoédriques et des milieux isotropes.*

On dit qu'un corps ou un milieu est homoédrique, lorsque, ce corps étant rapporté à un système particulier d'axes rectangulaires, les coefficients de conductibilité restent les mêmes, si l'on vient ensuite à prendre, au lieu d'un quelconque des axes, son prolongement. En d'autres termes, le milieu est symétrique par rapport au système des axes considérés. Supposons que, dans un milieu pareil, on ait adopté les axes mêmes de symétrie pour axes coordonnés, et qu'on vienne à prendre ensuite, au lieu de celui des x, son prolongement : F_1 continuera à représenter le même flux en valeur absolue, mais changera de signe; F_2 et F_3 ne changeront pas. Cette transformation revient donc analytiquement à changer à la fois x en $-x$ et F_1 en $-F_1$. Par hypothèse, les formules de F_1, F_2, F_3 devront rester les mêmes; donc les termes en $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, qui ne varient pas, ne peuvent exister dans F_1, ni celui en $\frac{du}{dx}$, qui varie, dans F_2 et F_3. En changeant de même y en $-y$ et F_2 en $-F_2$, puis z en $-z$ et F_3 en $-F_3$, on réduira les flux principaux à la forme simple

$$F_1 = \alpha \frac{du}{dx}, \quad F_2 = \alpha' \frac{du}{dy}, \quad F_3 = \alpha'' \frac{du}{dz}.$$

On dit qu'un milieu est hémiédrique ou dissymétrique, lorsqu'il n'est symétrique par rapport à aucun système d'axes rectangulaires.

Enfin un milieu est isotrope, lorsque les formules de F_1, F_2, F_3 y sont les mêmes pour tout système d'axes rectangulaires. Il est évident que, dans ce cas, le milieu est symétrique par rapport à tout système d'axes rectangulaires; ainsi tous les coefficients de conductibilité y sont nuls, excepté α, α', α''. De plus, ceux-ci sont égaux, car si, par exemple, on échange entre eux les axes des x et des y, F_1 se change en F_2, et réciproquement; donc $\alpha' = \alpha$. Les flux principaux seront donc pour tout système d'axes rectangulaires

$$F_1 = \alpha \frac{du}{dx}, \quad F_2 = \alpha \frac{du}{dy}, \quad F_3 = \alpha \frac{du}{dz}.$$

Le flux qui traverse l'élément parallèle à un plan coordonné s'obtient en multipliant α par la variation de la température le long de la normale à l'élément, et divisant par la longueur correspondante infiniment petite de cette normale. Comme on peut prendre les plans coordonnés dans toutes les directions, cette règle doit pouvoir s'appliquer à tout élément. C'est en effet ce que donne la formule (1), qui devient ici

$$F = \alpha \left(\frac{du}{dx} m + \frac{du}{dy} n + \frac{du}{dz} p \right)$$

La parenthèse représente le rapport au chemin parcouru de la variation que reçoit u le long de la normale à l'élément. Car, si l est ce chemin, ses projections sur les axes sont ml, nl, pl, et l'augmentation correspondante de u est

$$\frac{du}{dx} ml + \frac{du}{dy} nl + \frac{du}{dz} pl.$$

§ III. — *Mise en équation des problèmes.*

Proposons-nous de déterminer u en fonction de x, y, z, t, connaissant la température initiale de chaque molécule du corps, les coefficients ρ, α, β,..., γ'', et l'influence calorifique, autre que la conductibilité, exercée en chaque point.

Cherchons d'abord l'équation différentielle pour les points intérieurs. Considérons, à partir de M, un parallélipipède rectangle, à arêtes parallèles aux axes, et respectivement égales à dx, dy, dz. Le flux de chaleur de conductibilité, qui sort pendant l'instant dt par la première face perpendiculaire aux x, est $F_1\, dy\, dz\, dt$; celui qui entre par la face opposée dépasse celui-là de $\frac{dF_1}{dx} dx\, dy\, dz\, dt$: le parallélipipède aura donc gagné par ces deux faces une quantité de chaleur égale à ce dernier terme. En faisant de même pour les autres faces et ajoutant, on verra que la chaleur entrée par conductibilité dans le parallélipipède est

$$\left(\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz}\right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

Le parallélipipède peut recevoir en outre de la chaleur rayonnante : nous supposerons celle-ci, rapportée à l'unité de volume et à l'unité de temps, égale à une fonction φ de u, x, y, z, t. D'après le principe de la propagation de la chaleur, un corps est d'autant moins disposé à s'échauffer qu'il est déjà plus chaud. Nous supposerons donc la fonction φ croissante ou décroissante en sens inverse de u.

Le parallélipipède aura gagné en tout une quantité de chaleur égale à

$$\left[\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} + \varphi(u, x, y, z, t)\right] dx\, dy\, dz\, dt.$$

Cette quantité est d'ailleurs exprimée par le produit

$$\rho \frac{du}{dt} dx\, dy\, dz\, dt.$$

De là l'équation de la chaleur

$$(3) \qquad \rho \frac{du}{dt} = \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} + \varphi(u, x, y, z, t).$$

A F_1, F_2, F_3 on substituera leurs expressions (2) en $\frac{du}{d(x, y, z)}$. Les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \gamma''$ et la capacité ρ seront des fonctions déterminées de x, y, z; de plus ρ, α, α', α'' seront positifs.

A la surface du corps, il y aura des conditions spéciales, dépendant de l'action exercée du dehors sur le milieu matériel considéré. Nous supposerons qu'en certaines parties de la surface on donne immédiatement u en fonction de x, y, z, t, et que les autres parties reçoivent du dehors une quantité de chaleur rayonnante égale, pour l'unité de surface et pour l'unité de temps, à une fonction φ_1 de u, x, y, z, t. D'après une remarque déjà faite, cette fonction variera en sens inverse de u.

Aux premières parties de la surface, on aura la relation

$$u = \text{fonction donnée de } x, y, z, t.$$

Occupons-nous actuellement des autres parties. Désignons par m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à un élément quelconque de ces parties de la surface, menée vers le dehors; et construisons un tétraèdre infiniment petit, limité par cet élément de surface, et par trois éléments parallèles aux plans coordonnés. L'équilibre de la chaleur dans ce tétraèdre donnera la relation cherchée

$$m F_1 + n F_2 + p F_3 = \varphi_1(u, x, y, z, t).$$

Si l'on joint enfin à ce système d'équations la condition que, pour $t = 0$, u doit se réduire à l'état initial donné en x, y, z, on pourra déterminer u. En effet, puisque la température y satisfait, ce système d'équations admet au moins une solution. D'autre part, nous allons démontrer que cette solution est unique.

§ IV. — *Unité de la solution.*

Nous ferons voir pour cela que, si l'on remplace dans tout le système u par $u + u'$, on est forcément conduit à poser

$$u' = 0.$$

Substituons donc $u + u'$ à u, en nous rappelant que u satisfait à toutes les conditions. Les équations en u' seront : à l'intérieur,

$$\rho \frac{du'}{dt} = \frac{dF'_1}{dx} + \frac{dF'_2}{dy} + \frac{dF'_3}{dz} + [\varphi(u + u', x, y, z, t) - \varphi(u, x, y\, z, t)];$$

à la surface, soit

$$u' = 0,$$

soit

$$mF'_1 + nF'_2 + pF'_3 = [\varphi_1(u + u', x, y, z, t) - \varphi_1(u, x, y, z, t)];$$

pour $t = 0$,

$$u' = 0.$$

Nous désignons, afin d'abréger, par F'_1, F'_2, F'_3 ce que deviennent F_1, F_2, F_3, lorsqu'on remplace u par u'.

Les parenthèses qui contiennent φ et φ_1 peuvent être mises sous la forme $-Ku'$, $-K_1u'$, les quantités K, K_1 étant positives; cela résulte de ce que les fonctions φ, φ_1 varient en sens inverse de u.

Convenons actuellement d'effacer les accents, et les équations deviennent: à l'intérieur,

$$(4) \qquad \rho\frac{du}{dt} = \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dy} + \frac{dF_3}{dz} - Ku;$$

à la surface, soit

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = 0, \\ \text{soit} \\ mF_1 + nF_2 + pF_3 = -K_1 u; \end{array} \right.$$

pour $t = 0$,

$$u = 0.$$

Soient: $d\varpi$ un élément de volume du corps, et $\int_\varpi$ une intégrale prise dans toute son étendue; $d\sigma$ un élément de la surface, et $\int_\sigma$ une intégrale prise sur toute la surface; enfin U une fonction quelconque de x, y, z, et U_0, U_1 les valeurs de cette fonction en deux points opposés où la surface est rencontrée par une parallèle à l'axe des x, on aura

$$\int_\varpi \frac{dU}{dx}\,d\varpi = \int_\varpi \frac{dU}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int U_1\,dy\,dz - \int U_0\,dy\,dz.$$

L'élément $dy\,dz$ du plan des yz est la projection de deux éléments de la surface, situés sur une même parallèle à l'axe des x : de plus, ces éléments font avec le plan des yz des angles qui ont pour cosinus la valeur absolue de m en ces portions de la surface. En désignant par $d\sigma$ l'un ou l'autre de ces éléments, on aura

$$dy\,dz = m\,d\sigma \text{ pour le premier,} \quad \text{et} \quad dy\,dz = -m\,d\sigma \text{ pour le second.}$$

On pourra donc écrire la formule fondamentale

$$\int_\varpi \frac{dU}{dx}\,d\varpi = \int_\sigma mU\,d\sigma.$$

Si la surface était rencontrée en plus de deux points par une parallèle à l'axe des x, on raisonnerait sur deux consécutifs de ces points comme il vient d'être fait, et le résultat serait le même.

Cela posé, multiplions l'équation (4) par $u\,d\varpi$, et intégrons les deux membres dans toute l'étendue du corps. La première intégrale du second membre se transformera comme il suit :

$$\int_\varpi u\frac{dF_1}{dx}\,d\varpi = \int_\varpi \frac{d.uF_1}{dx}\,d\varpi - \int_\varpi F_1\frac{du}{dx}\,d\varpi = \int_\sigma umF_1\,d\sigma - \int_\varpi F_1\frac{du}{dx}\,d\varpi.$$

En transformant de même les autres intégrales, on aura

$$\begin{aligned}\int_\varpi \rho u\frac{du}{dt}\,d\varpi &= \int_\sigma (mF_1 + nF_2 + pF_3)\,u\,d\sigma \\ &\quad - \int_\varpi \left(F_1\frac{du}{dx} + F_2\frac{du}{dy} + F_3\frac{du}{dz}\right)d\varpi - \int_\varpi Ku^2\,d\varpi,\end{aligned}$$

ou bien, d'après les relations (5),

$$\int_\varpi \rho u\frac{du}{dt}\,d\varpi = -\int_\sigma K_1u^2\,d\sigma - \int_\varpi \left(F_1\frac{du}{dx} + F_2\frac{du}{dy} + F_3\frac{du}{dz}\right)d\varpi - \int_\varpi Ku^2\,d\varpi.$$

Cherchons la signification de la parenthèse qui est dans la deuxième intégrale du second membre. Si nous la divisons par

$$+\sqrt{\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}},$$

elle deviendra égale au flux de chaleur qui traverse l'élément plan perpendiculaire à une certaine direction. Cette direction fait avec les axes des angles qui ont pour cosinus

$$\frac{\frac{du}{dx}}{+\sqrt{\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}}},\quad \frac{\frac{du}{dy}}{+\sqrt{\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}}},\quad \frac{\frac{du}{dz}}{+\sqrt{\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}}}.$$

Elle coïncide avec celle de la normale à la surface isotherme qui passe par le point x, y, z, et qui a pour équation $u =$ const. De plus, elle est menée du côté de cette surface où la température va en croissant. En effet, si on avance dans cette direction d'une petite quantité dl, les x, y, z croîtront de quantités égales respectivement aux cosinus ci-dessus, multipliés par dl. L'accroissement de la température sera donc

$$du = +\sqrt{\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}}\cdot dl.$$

Par suite, le flux de chaleur perpendiculaire à cette direction est positif. Désignons par F ce flux, et la parenthèse vaudra

$$\mathrm{F}\sqrt{\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}} = \mathrm{F}\frac{du}{dl}.$$

La relation obtenue devient

$$\int_\varpi \rho u \frac{du}{dt}\,d\varpi = -\int_\sigma \mathrm{K}_1 u^2\,d\sigma - \int_\varpi \mathrm{F}\frac{du}{dl}\,d\varpi - \int_\varpi \mathrm{K} u^2\,d\varpi.$$

Le second membre est négatif. Donc le premier l'est aussi, et l'on a

$$\int_\varpi \rho u \frac{du}{dt}\,d\varpi < 0, \quad \text{ou bien} \quad \int_\varpi \rho\,\frac{d\,(u^2)}{dt}\,dt.d\varpi < 0.$$

Intégrons par rapport à t, en observant que, pour $t = 0$, $u = 0$. L'inégalité devient

$$\int_\varpi \rho\,u^2\,d\varpi < 0.$$

D'où il suit $u = 0$; ce qu'il fallait démontrer.

Lorsque les équations du mouvement ne contiennent pas explicitement le temps, on peut chercher une fonction u de x, y, z, qui donne

3.

$\frac{du}{dt} = 0$. Cette fonction représente la température dans l'état permanent du milieu. La solution de ce problème est en général unique. Si en effet on remplace, dans les équations de l'état permanent, u par $u + u'$, et qu'on opère absolument comme ci-dessus, on obtiendra la relation

$$0 = -\int_\sigma K_1 u'^2 \, d\sigma - \int_\varpi F' \frac{du'}{dl} \, d\varpi - \int_\sigma K u'^2 \, d\varpi.$$

Chaque terme étant essentiellement négatif, on devra poser $u' = 0$.

Si cependant K et K_1 étaient nuls partout, on pourrait prendre seulement $\frac{du'}{dl} = 0$, ou $u' =$ constante arbitraire.

Il peut arriver que le corps dont on calcule la température s'étende très-loin dans certaines directions. Supposons que le milieu environnant soit maintenu à une température constante dans toute son étendue, d'abord égale zéro, mais lentement variable d'un moment à l'autre, et que, la température primitive du corps étant nulle, on vienne à le chauffer en un de ses points. Il est clair qu'aux points très-éloignés, la température sera sensiblement la même à tout instant que celle du milieu extérieur. On pourra donc, pour la commodité du calcul, supposer le corps indéfini dans ces directions, pourvu qu'on assujettisse la température à prendre cette valeur aux points très-éloignés. C'est ce que nous ferons dans les questions traitées aux paragraphes suivants.

Observons enfin que le milieu étudié peut se composer de plusieurs corps distincts juxtaposés. Les conditions spéciales à la surface de séparation de deux d'entre eux s'obtiendront alors : 1° en exprimant que la température est égale de part et d'autre de cette surface, ou, plus généralement, que la différence de ces températures est une fonction donnée de x, y, z, t; 2° que les flux gagnés à travers la surface par un des corps sont perdus par l'autre. Les solutions des problèmes du mouvement et de l'équilibre des températures seront également uniques. Pour le démontrer, on considérera, dans chacun des corps en particulier, les équations intégrales ci-dessus : puis on ajoutera les résultats. Les termes relatifs aux surfaces de séparation s'entre-détruiront comme égaux deux à deux et contraires; et les résultats définitifs seront les mêmes que pour le cas d'un corps unique.

§ V. — *Équation de la chaleur dans un milieu homogène.*

Nous étudierons dans les paragraphes qui vont suivre certaines lois de la propagation de la chaleur dans un milieu homogène. Nous supposerons d'abord ce milieu indéfini dans tous les sens.

Les coefficients ρ, α, α',..., γ'' seront constants. La fonction φ, qui exprime la chaleur rayonnante, sera supposée dépendre seulement de u et de t. L'équation différentielle, déduite de (3), sera

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \alpha \frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha' \frac{d^2 u}{dy^2} + \alpha'' \frac{d^2 u}{dz^2}$$
$$+ (\beta' + \gamma'') \frac{d^2 u}{dydz} + (\beta'' + \gamma) \frac{d^2 u}{dzdx} + (\beta + \gamma') \frac{d^2 u}{dxdy}.$$

Changeons les axes rectangulaires des x, y, z en d'autres des x', y', z', faisant avec les premiers des angles dont les cosinus sont désignés respectivement par m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p''. Les formules de transformation seront

$$\frac{d}{dx} = m \frac{d}{dx'} + m' \frac{d}{dy'} + m'' \frac{d}{dz'},$$
$$\frac{d}{dy} = n \frac{d}{dx'} + n' \frac{d}{dy'} + n'' \frac{d}{dz'},$$
$$\frac{d}{dz} = p \frac{d}{dx'} + p' \frac{d}{dy'} + p'' \frac{d}{dz'}.$$

Si on faisait aussi le même changement des coordonnées dans l'ellipsoïde

$$\alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + (\beta' + \gamma'') yz + (\beta'' + \gamma) zx + (\beta + \gamma') xy = 1,$$

les formules de transformation seraient

$$x = mx' + m' y' + m'' z',$$
$$y = nx' + n' y' + n'' z',$$
$$z = px' + p' y' + p'' z'.$$

On voit que les coefficients de $\frac{d^2 u}{dx'^2}$, $\frac{d^2 u}{dy'^2}$,..., dans l'équation différentielle transformée, sont les mêmes que ceux de x'^2, y'^2,..., dans l'équation de l'ellipsoïde. Si donc on choisit pour nouveaux axes coordonnés les axes mêmes de l'ellipsoïde, les termes en $\frac{d^2 u}{dy'\,dz'}$, $\frac{d^2 u}{dz'\,dx'}$, $\frac{d^2 u}{dx'\,dy'}$ disparaîtront.

Puisque ce système d'axes existe, nous admettrons qu'il ait été choisi d'abord. Alors l'équation différentielle peut s'écrire

$$(6) \qquad \rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

Nous représentons les coefficients des termes en $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$, $\frac{d^2 u}{dz^2}$ par des carrés, afin de rappeler qu'ils sont essentiellement positifs.

Quant aux flux de chaleur, ils prendront la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} F_1 &= a^2 \frac{du}{dx} + \nu \frac{du}{dy} - \mu \frac{du}{dz}, \\ F_2 &= b^2 \frac{du}{dy} + \lambda \frac{du}{dz} - \nu \frac{du}{dx}, \\ F_3 &= c^2 \frac{du}{dz} + \mu \frac{du}{dx} - \lambda \frac{du}{dy}. \end{aligned} \right.$$

Sans cela on n'aurait pas

$$\beta' + \gamma'' = 0, \quad \beta'' + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma' = 0.$$

C'est M. Lamé qui a découvert ce système d'axes.

§ VI. — *Ellipsoïde principal.*

Admettons que tout le milieu soit actuellement à la température zéro, et qu'on vienne à le chauffer dans un très-petit espace, situé à l'origine des coordonnées, et limité par la surface $f(x, y, z) = 0$. La température u prendra des valeurs qui vérifieront partout l'équation différentielle ci-dessus, et qui de plus équivaudront, pour $f(x, y, z) = 0$, à celles données à chaque instant en x, y, z, t.

Posons

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c}.$$

Les équations

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad f(x, y, z) = 0,$$

deviennent

$$(8) \qquad \rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{d^2 u}{d\zeta^2}, \quad f(a\xi, b\eta, c\zeta) = 0.$$

Considérons un milieu isotrope, qui aurait l'unité pour coefficient de conductibilité, et dont un point quelconque aurait pour coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ. D'après les équations (8), u représenterait sa température, si ce milieu était primitivement à zéro, et si on le chauffait dans un très-petit espace autour de l'origine, limité par la surface $f(a\xi, b\eta, c\zeta) = 0$. Or, il est évident que, dans ce cas, la température serait la même au même instant pour tous les points situés à égale distance de l'origine. Ainsi u n'est fonction que de t et de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

On aura les surfaces isothermes en posant

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{const.}$$

Les surfaces isothermes sont donc des ellipsoïdes semblables et semblablement placés.

L'un d'eux a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

nous le désignerons sous le nom d'*ellipsoïde principal*. M. Lamé l'a considéré à d'autres points de vue, et lui a donné ce nom.

§ VII. — *Équation de la chaleur en coordonnées obliques.*

M. Lamé a fait voir que, si l'on rapporte l'ellipsoïde principal à un système de diamètres conjugués, de manière à mettre son équation sous la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1,$$

l'équation de la chaleur, avec le même système d'axes, sera

$$\rho\frac{du}{dt}=\varphi(u,t)+a'^2\frac{d^2u}{dx'^2}+b'^2\frac{d^2u}{dy'^2}+c'^2\frac{d^2u}{dz'^2}.$$

Cette importante proposition nous servira au paragraphe suivant. Nous allons la démontrer en partant de la transformation

$$\frac{x}{a}=\xi,\quad \frac{y}{b}=\eta,\quad \frac{z}{c}=\zeta.$$

Afin d'abréger l'écriture, nous représenterons, dans la suite de ce Mémoire, par S une somme de trois termes, dont le premier sera sous le signe, et dont les deux autres se déduiraient de celui-là respectivement par une et par deux permutations circulaires effectuées sur les lettres correspondantes; ces lettres seront : x, y, z; ξ, η, ζ; a, b, c; λ, μ, ν; m, n, p; etc. Par exemple, l'équation de l'ellipsoïde principal s'écrira ainsi :

$$\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Une relation telle que

$$(nz-py)m'+(px-mz)n'+(my-nx)p'=0$$

s'écrira de même

$$\mathrm{S}(nz-py)m'=0.$$

Cela posé, nous avons vu au paragraphe précédent que les variables ξ, η, ζ, substituées à x, y, z, mettent les expressions

$$\mathrm{S}a^2\frac{d^2u}{dx^2}\quad\text{et}\quad\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}$$

sous les formes respectives

$$S\frac{d^2 u}{d\xi^2} \quad \text{et} \quad S\xi^2.$$

Substituons à ξ, η, ζ de nouvelles variables ξ', η', ζ', données par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = m\xi' + m'\eta' + m''\zeta', \\ \eta = n\xi' + n'\eta' + n''\zeta', \\ \zeta = p\xi' + p'\eta' + p''\zeta'. \end{cases}$$

L'expression $S\xi^2$, transformée, prendra la même forme $S\xi'^2$, à la condition nécessaire et suffisante qu'on ait les six relations

$$(2) \qquad \begin{cases} Sm^2 = 1, & Sm'^2 = 1, & Sm''^2 = 1, \\ Sm'm'' = 0, & Sm''m = 0, & Smm' = 0. \end{cases}$$

Alors les équations (1), respectivement multipliées par m, n, p, ou par m', n', p', ou par m'', n'', p'', et ajoutées, donneront les relations inverses

$$\xi' = Sm\xi, \quad \eta' = Sm'\xi, \quad \zeta' = Sm''\xi.$$

De ces relations on déduira, pour transformer les dérivées partielles de u, les formules symboliques

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\xi} = m\dfrac{d}{d\xi'} + m'\dfrac{d}{d\eta'} + m''\dfrac{d}{d\zeta'}, \\ \dfrac{d}{d\eta} = n\dfrac{d}{d\xi'} + n'\dfrac{d}{d\eta'} + n''\dfrac{d}{d\zeta'}, \\ \dfrac{d}{d\zeta} = p\dfrac{d}{d\xi'} + p'\dfrac{d}{d\eta'} + p''\dfrac{d}{d\zeta'}. \end{cases}$$

Elles sont pareilles aux relations (1), et changeront $S\dfrac{d^2 u}{d\xi^2}$ en $S\dfrac{d^2 u}{d\xi'^2}$.

Si actuellement on pose

$$\xi' = \frac{x'}{a'}, \quad \eta' = \frac{y'}{b'}, \quad \zeta' = \frac{z'}{c'},$$

les expressions

$$Sa^2\frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{et} \quad S\frac{x^2}{a^2}$$

seront devenues respectivement

$$\mathrm{S}a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\frac{x'^2}{a'^2}.$$

De plus, les relations (1) seront

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{am}{a'}x' + \frac{am'}{b'}y' + \frac{am''}{c'}z', \\ y &= \frac{bn}{a'}x' + \frac{bn'}{b'}y' + \frac{bn''}{c'}z', \\ z &= \frac{cp}{a'}x' + \frac{cp'}{b'}y' + \frac{cp''}{c'}z'. \end{aligned} \right.$$

Ces formules représenteront une transformation des coordonnées rectangulaires x, y, z en d'autres obliques x', y', z', pourvu que les coefficients de x' puissent représenter les cosinus des angles que fait avec les axes des x, y, z une direction quelconque, choisie pour axe des x', et qu'il en soit de même des coefficients de y' et de ceux des z'. Il suffira donc qu'on ait

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{S}a^2 m^2}{a'^2} = 1, \quad \frac{\mathrm{S}a^2 m'^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{\mathrm{S}a^2 m''^2}{c'^2} = 1.$$

Ces relations déterminent les valeurs qu'il faut donner à a', b', c'.

En adoptant ces valeurs et tenant compte des relations (2), la transformation (1) revient donc à changer les axes des x, y, z en d'autres des x', y', z', qui correspondent à un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal. D'ailleurs la même transformation (1) peut conduire à tout système de diamètres conjugués de cet ellipsoïde. Car soient x', y', z' les coordonnées d'un point rapporté à un système quelconque de ces diamètres, les formules de transformation pourront être représentées par les relations (4), jointes à (5), pourvu que les neuf quantités m, n, p; m', n', p',; m'', n'', p'' y soient convenablement choisies. Or ces quantités devront vérifier les relations (2), si l'on veut que les formules (4) transforment l'équation

$$\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \text{en} \quad \mathrm{S}\frac{x'^2}{a'^2} = 1.$$

La même transformation (1) changera d'ailleurs l'équation de la chaleur

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \mathrm{S}a^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

en

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \mathrm{S}a'^2 \frac{d^2u}{dx'^2}.$$

§ VIII. — *Cylindres et plans isothermes.*

Supposons que le milieu homogène, au lieu d'être chauffé en un seul point, le soit de la même manière en tous les points d'une droite indéfinie : il est clair que la température sera constante sur toute parallèle à cette droite. Si donc nous prenons celle-ci pour axe des z', et, pour axes des x' et des y', deux droites formant avec elle un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde principal, l'équation de la chaleur sera

$$\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + a'^2 \frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2u}{dy'^2}. \tag{6}$$

Effectuons la transformation

$$\frac{x'}{a'} = \xi, \quad \frac{y'}{b'} = \eta, \quad \frac{z'}{c'} = \zeta.$$

Cette équation deviendra

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2}.$$

u, considéré comme fonction de ξ, η, ζ, t, exprimerait la température dans un milieu isotrope, où ξ, η, ζ seraient des coordonnées rectangulaires d'un point quelconque, et où le coefficient de conductibilité vaudrait 1. De plus, les autres conditions se réduiraient à exprimer que, pour $t = 0$, u est nul partout, et que sur un cylindre très-petit, presque identique à l'axe des ζ, la température est une fonction donnée de ξ, η, t. Or il est évident que, dans ce cas, u ne dépendrait que de t et de la distance de chaque point à l'axe des ζ. Ainsi, u est fonction de t et de $\xi^2+\eta^2$. L'équation des surfaces isothermes est

$$\xi^2+\eta^2=\text{const.},$$

ou bien

$$(7)\qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=\text{const.}$$

Elle représente des cylindres qui ont leurs génératrices parallèles à la droite chauffée, et sont circonscrits aux ellipsoïdes isothermes du § VI.

Concevons plusieurs milieux homogènes pareils et superposés, où la fonction $\varphi(u, t)$ soit la même, et dont la température initiale soit nulle. Supposons qu'on les chauffe simultanément suivant des lignes différentes, menées à partir de l'origine, de telle manière que la condition relative à l'échauffement se trouve la même pour tous les milieux isotropes correspondants en ξ, η. Il est clair que u sera pour tous la même fonction de ξ, η, t. Ainsi l'équation (7) représentera les surfaces d'égale température qui se produiront au même instant dans tous les milieux. La constante du second membre sera la même pour tous, mais les demi-diamètres conjugués a', b' de l'ellipsoïde principal varieront d'un milieu à l'autre avec la direction de la ligne chauffée. Les cylindres d'égale température auront donc pour enveloppes les ellipsoïdes isothermes du § VI, c'est-à-dire des surfaces semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placées.

Concevons enfin un milieu homogène indéfini, chauffé de la même manière sur toute l'étendue d'un plan. Il est clair que la température sera constante sur tout plan parallèle à celui-là. Prenons ce plan pour celui des $x'y'$, et dirigeons l'axe des z' suivant le diamètre conjugué de l'ellipsoïde principal. L'équation de la chaleur sera

$$(8)\qquad \rho\frac{du}{dt}=\varphi(u, t)+c'^2\frac{d^2u}{dz'^2}.$$

Effectuons encore la même transformation en ξ, η, ζ. L'équation deviendra

$$\rho \frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2 u}{d\zeta^2}.$$

Concevons une infinité de milieux pareils et superposés, où la fonction $\varphi(u, t)$ soit la même, et dont la température initiale soit zéro. Supposons qu'on les chauffe simultanément de la même manière suivant des plans différents passant par l'origine. Il est clair que les conditions exprimées en ζ et t seront les mêmes pour tous. Donc u sera pour tous la même fonction de t et ζ, et les surfaces isothermes auront pour équation

$$\zeta = \text{une constante } k, \quad \text{ou } \frac{z'}{c'} = k.$$

Ce sont des plans parallèles aux plans chauffés, et tangents aux ellipsoïdes

$$\mathrm{S} \frac{x'^2}{a'^2} = k,$$

dont l'équation, avec les coordonnées x, y, z est

$$\mathrm{S} \frac{x^2}{a^2} = k.$$

Les enveloppes des plans d'égale température dans les divers milieux sont donc des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placés.

Il y a quelque analogie entre l'ellipsoïde principal et la surface de l'onde dans la théorie de la lumière. En effet, l'ellipsoïde est l'enveloppe des surfaces isothermes que produit un égal échauffement des plans de direction diverse passant par l'origine, et la surface de l'onde est aussi l'enveloppe de toutes les ondes planes parties simultanément de son centre.

§ IX. — *Équation de la chaleur dans une barre.*

Après avoir étudié les surfaces isothermes dans un milieu indéfini en tout sens, nous allons traiter la même question pour des corps ayant deux dimensions très-petites, ou seulement une seule. Nous appellerons les premiers des barres, les seconds des plaques.

Cherchons donc l'équation de la chaleur dans une barre homogène rectiligne, à section normale constante.

Considérons d'abord, en un point quelconque (x, y, z) d'un milieu homogène, un élément plan, dont la normale fasse avec les axes de l'ellipsoïde principal des angles ayant respectivement pour cosinus f, g, h. Le flux de chaleur qui le traverse est

$$F = fF_1 + gF_2 + hF_3,$$

ou bien

$$F = Sf\left(a^2 \frac{du}{dx} + \nu \frac{du}{dy} - \mu \frac{du}{dz}\right),$$

ou encore

$$F = S(a^2 f - \nu g + \mu h)\frac{du}{dx}.$$

Cherchons, avec M. Lamé, s'il existe, à partir du point (x, y, z) et du même côté de l'élément plan que la normale, une ligne infiniment petite dl, telle que F soit égal à une constante k^2, multipliée par le rapport à dl de la variation que reçoit u le long de cette ligne. Si nous désignons par f', g', h' les cosinus des angles que fait avec les axes une ligne de longueur dl, menée à partir de (x, y, z), la variation de u le long de cette ligne sera

$$\frac{du}{dx} f' \, dl + \frac{du}{dy} g' \, dl + \frac{du}{dz} h' \, dl,$$

et le rapport de cette variation à dl, rapport que nous désignerons par $\frac{du}{dl}$, sera égal à

$$Sf' \frac{du}{dx}.$$

Pour que l'on puisse poser $F = k^2 \frac{du}{dl}$, quelles que soient les dérivées

$\dfrac{du}{d(x, y, z)}$, il faut et il suffit que

$$(1) \qquad \begin{cases} k^2 f' = a^2 f - \nu g + \mu h, \\ k^2 g' = \nu f + b^2 g - \lambda h, \\ k^2 h' = -\mu f + \lambda g + c^2 h. \end{cases}$$

De ces relations, et de

$$\mathrm{S} f'^2 = 1,$$

on tire

$$f' = \frac{a^2 f - \nu g + \mu h}{\sqrt{\mathrm{S}(a^2 f - \nu g + \mu h)^2}},$$

$$g' = \frac{b^2 g - \lambda h + \nu f}{\sqrt{\mathrm{S}(a^2 f - \nu g + \mu h)^2}},$$

$$h' = \frac{c^2 h - \mu f + \lambda g}{\sqrt{\mathrm{S}(a^2 f - \nu g + \mu h)^2}};$$

$$k^2 = \sqrt{\mathrm{S}(a^2 f - \nu g + \mu h)^2}.$$

Le radical doit être pris avec le signe $+$, car le cosinus de l'angle des deux directions (f, g, h) et (f', g', h') doit être positif par hypothèse. Or, ce cosinus est

$$\mathrm{S} f f' = \frac{\mathrm{S} a^2 f^2}{\sqrt{\mathrm{S}(a^2 f - \nu g + \mu h)^2}}.$$

Il existe donc toujours une direction, faisant un angle aigu avec la normale à l'élément, telle, que le flux de chaleur qui traverse l'élément plan considéré ne dépend que de la variation de la chaleur suivant cette direction.

Réciproquement, les trois équations (1), résolues par rapport à

$$\frac{f}{k^2}, \quad \frac{g}{k^2}, \quad \frac{h}{k^2},$$

donnent

$$\frac{f}{k^2} = \frac{b^2 c^2 f' + \lambda \mathrm{S} \lambda f' + \nu c^2 g' - \mu b^2 h'}{a^2 b^2 c^2 + \mathrm{S} \lambda^2 a^2},$$

$$\frac{g}{k^2} = \frac{c^2 a^2 g' + \mu \mathrm{S} \lambda f' + \lambda a^2 h' - \nu c^2 f'}{a^2 b^2 c^2 + \mathrm{S} \lambda^2 a^2},$$

$$\frac{h}{k^2} = \frac{a^2 b^2 h' + \nu \mathrm{S} \lambda f' + \mu b^2 f' - \lambda a^2 g'}{a^2 b^2 c^2 + \mathrm{S} \lambda^2 a^2}.$$

De ces relations, combinées avec $Sf^2 = 1$, on déduit

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
f &= \frac{b^2c^2f' + \lambda S\lambda f' + \nu c^2 g' - \mu b^2 h'}{\sqrt{S(b^2c^2f' + \lambda S\lambda f' + \nu c^2 g' - \mu b^2 h')^2}},\\
g &= \frac{c^2a^2g' + \mu S\lambda f' + \lambda a^2 h' - \nu c^2 f'}{\sqrt{S(b^2c^2f' + \lambda S\lambda f' + \nu c^2 g' - \mu b^2 h')^2}},\\
h &= \frac{a^2b^2h' + \nu S\lambda f' + \mu b^2 f' - \lambda a^2 g'}{\sqrt{S(b^2c^2f' + \lambda S\lambda f' + \nu c^2 g' - \mu b^2 h')^2}},\\
k^2 &= \frac{a^2b^2c^2 + S\lambda^2 a^2}{\sqrt{S(b^2c^2f' + \lambda S\lambda f' + \nu c^2 g' - \mu b^2 h')^2}}.
\end{aligned}\right.$$

Le radical doit être pris avec le signe +, pour la même raison que ci-dessus.

Quelle que soit la direction donnée (f', g', h'), il existe donc un élément plan tel, que le flux qui le traverse ne dépend que de la variation de la chaleur suivant la direction donnée.

Cela posé, considérons une barre mince qui parte de l'origine des coordonnées et s'étende à l'infini dans la section (f', g', h'). Soient σ une section normale, et s son contour. Désignons par l la distance à l'origine d'un point quelconque.

Découpons la barre en éléments très-petits de longueur dl, par des plans perpendiculaires à la direction (f, g, h). Ces plans donnent aux éléments de volume des bases égales à la direction normale σ, divisée par le cosinus de l'angle des deux directions (f, g, h) et (f', g', h') : ces bases sont donc exprimées par

$$\frac{\sigma}{Sff'}.$$

L'un des éléments de volume cède dans l'instant dt, au volume précédent, la quantité de chaleur

$$k^2 \frac{du}{dl} \frac{\sigma}{Sff'} dt.$$

Il reçoit du volume suivant la même quantité, augmentée de sa différentielle

$$k^2 \frac{d^2 u}{dl^2} dl \frac{\sigma}{Sff'} dt;$$

le gain de chaleur est donc exprimé par cette différentielle.

La surface latérale sdl du même élément gagne une quantité de chaleur qui dépend de u, et de la température du milieu environnant. Nous supposerons celle-ci une fonction donnée du temps, la même pour tout le milieu. Alors la quantité de chaleur sera de la forme $s\,dl\,dt$, multipliée par une fonction donnée de u et de t. Si, par exemple, le milieu environnant est maintenu à la température zéro, et que u ne soit pas trop considérable, la chaleur gagnée par un élément $ds\,dl$ de la surface latérale sera $-hu\,ds\,dl\,dt$, h désignant un coefficient positif de conductibilité extérieure, appelé *pouvoir émissif*. Ce coefficient sera constant le long d'une même génératrice de la surface, mais pourra être variable d'une génératrice à l'autre. La chaleur gagnée par toute la surface sdl sera donc

$$-\,u\,s\,dl\,dt\,\frac{\int_0^s h\,ds}{s}.$$

De plus, si le corps est diathermane, il y aura un terme proportionnel à l'élément de volume σdl, à dt, et à une fonction, que nous supposerons donnée, des variables u et t. En somme, pour toutes les barres où le rapport de s à σ sera le même, et qui auront un pouvoir émissif constant ou un pouvoir rayonnant constant, le gain de chaleur dû au rayonnement pourra être exprimé par

$$\varphi(u, t)\,\sigma\,dl\,dt.$$

La somme de ces gains de chaleur donne l'accroissement total

$$\rho\,\frac{du}{dt}\,\sigma\,dl\,dt.$$

On a donc l'équation

$$\rho\,\frac{du}{dt} = \frac{k^2}{\mathrm{S}ff'}\cdot\frac{d^2u}{dl^2} + \varphi(u, t).$$

Les valeurs (2) de f, g, h permettent de former l'expression du cosinus $\mathrm{S}ff'$. En divisant ensuite par cette expression la valeur de k^2, et substituant dans l'équation de la barre, on aura pour celle-ci

$$(3)\qquad \rho\,\frac{du}{dt} = \frac{1 + \dfrac{\mathrm{S}\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}}{\mathrm{S}\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{(\mathrm{S}\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}\cdot\frac{d^2u}{dl^2} + \varphi(u, t).$$

§ X. — *Ellipsoïde des points isothermes.*

Supposons que des barres, rayonnant de la même manière, partent toutes de l'origine des coordonnées, et y soient chauffées au même instant et pareillement. Admettons que leur température initiale soit zéro, et proposons-nous de trouver le lieu des points qui seront à chaque moment à une même température sur toutes les barres.

Si on pose, dans l'équation ci-dessus,

$$l'^2 = l^2 . \frac{S\frac{f'^2}{a^2} + \frac{(S\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}{1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}},$$

l'équation, transformée en l', sera la même pour toutes les barres. Les autres conditions étant aussi les mêmes, u sera pour toutes la même fonction de t et de l'. Donc, il y aura, entre tous les points isothermes, la relation

$$(4) \qquad l^2 . \frac{S\frac{f'^2}{a^2} + \frac{(S\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}{1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}} = \text{const.}$$

Les coordonnées du point situé sur la barre (f', g', h'), à la distance l de l'origine, sont

$$x = lf', \quad y = lg', \quad z = lh'.$$

L'équation du lieu des points isothermes est donc

$$S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right) \cdot \text{const.}$$

Ces points forment des ellipsoïdes semblables et semblablement placés. Si nous prenons la constante égale à 1, nous aurons en particulier l'ellipsoïde

$$S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = 1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Nous le désignerons sous le nom d'ellipsoïde des poins isothermes. Le carré l^2 d'un demi-diamètre quelconque y est égal, d'après l'équation (4), au coefficient de conductibilité de la barre de même direction; c'est pourquoi nous croyons qu'on pourrait l'appeler ellipsoïde des conductibilités. Il est d'ailleurs très-différent de la surface de ce nom, que considère M. Lamé dans sa quatrième Leçon.

Observons qu'il reste le même, si on change simplement de signe les coefficients λ, μ, ν.

§ XI. — *Rapports des deux ellipsoïdes.*

L'ellipsoïde principal

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1$$

diffère généralement de celui des points isothermes :

$$S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = 1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

En effet, leurs équations ne coïncident que si les coefficients λ, μ, ν sont nuls, c'est-à-dire dans le cas d'un milieu homoédrique.

Lorsque ces coefficients sont très-petits, on peut encore regarder les deux ellipsoïdes comme identiques; car les termes en λ, μ, ν de la dernière équation sont alors du second ordre de petitesse.

Dans le cas général, les deux ellipsoïdes n'ont que deux points communs. En effet, on voit que les valeurs de x, y, z qui vérifient à la fois les deux équations donnent

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{et} \quad S\lambda x = \pm\sqrt{S\lambda^2 a^2}.$$

Or, si on mène à l'ellipsoïde principal les plans tangents perpendiculaires à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à λ, μ, ν, on trouve pour équation de ces plans tangents

$$S\lambda x = \pm\sqrt{S\lambda^2 a^2}.$$

Ainsi les points communs aux deux ellipsoïdes se réduisent aux deux points de contact de ces plans tangents avec l'ellipsoïde principal. Les deux surfaces se touchent en ces points, y ont les mêmes plans tangents. Par suite, si l'on mène par l'origine un plan parallèle à ceux-ci, son diamètre conjugué, dans l'un et l'autre ellipsoïde, sera la droite qui joint les deux points communs. Or, aux points où l'on a $S\lambda x = 0$, c'est-à-dire aux points de ce plan, l'équation du second ellipsoïde se réduit à

$$S\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2};$$

c'est celle d'une surface semblable à l'ellipsoïde principal.

Les courbes d'intersection des deux ellipsoïdes par le plan $S\lambda x = 0$ sont donc deux ellipses semblables et semblablement placées; la plus grande est celle de l'ellipsoïde des points isothermes : son rapport à l'autre est

$$1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Si l'on prend pour axes de coordonnées x' et y' deux diamètres conjugués quelconques de ces ellipses, et pour axe des z' la ligne menée aux points de contact, les deux ellipsoïdes seront rapportés l'un et l'autre à un système de diamètres conjugués. Le troisième diamètre sera commun, les deux premiers seront proportionnels dans les deux surfaces, mais plus petits dans l'ellipsoïde principal. Celui-ci est donc intérieur à l'autre.

Quand les trois coefficients a, b, c sont égaux, comme cela doit avoir lieu probablement chez tous les cristaux du système cubique, l'ellipsoïde principal est une sphère. Alors tous ses diamètres sont perpendiculaires aux plans conjugués, et ses intersections par ceux-ci sont des cercles. Donc l'ellipsoïde des lignes isothermes sera de révolution aplati, et les cosinus des angles que fera son axe principal avec ceux des x, y, z seront proportionnels à λ, μ, ν.

Les paragraphes suivants montreront d'autres rapports entre les deux ellipsoïdes.

§ XII. — *Autre méthode pour l'équation de la barre.*

Revenons à l'équation (3) du § IX. Si l'on y fait abstraction du terme $\varphi(u, t)$ dû au rayonnement, cette équation est établie en supposant que les flux sont nuls à travers toute portion de la surface latérale. On devra donc l'obtenir quelle que soit la forme des volumes élémentaires adoptés, pourvu qu'on suppose nuls ces flux. L'expression de ceux-ci en $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ est en réalité très-petite et sensiblement nulle, alors même que le rayonnement existe. En effet les flux qui traversent la section normale de la barre sont du même ordre de petitesse que cette section; et, s'ils laissent varier d'une manière continue la température d'éléments de volume incomparablement plus petits, c'est qu'ils leur ôtent à chaque instant presque autant de chaleur qu'ils leur en donnent. Il n'en est pas ainsi des flux qui entrent ou qui sortent par les faces latérales : ceux-ci ne dépendent que de u, de t et du pouvoir émissif; ils ne se neutralisent pas, et sont par conséquent du même ordre de grandeur que les éléments de volume, c'est-à-dire incomparablement plus petits que les premiers.

Voyons les conséquences qu'entraîne cette condition. Soient m, n, p les cosinus des angles que fait, avec les axes des x, y, z, la normale à un élément de la surface. Le flux qui le traverse, et dont il faut égaler l'expression à zéro, est

$$\mathrm{S}\left(a^2\frac{du}{dx}+\nu\frac{du}{dy}-\mu\frac{du}{dz}\right)m=0.$$

Cette expression, égalée à zéro, signifie que l'élément de la surface doit être parallèle à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus respectivement proportionnels à

$$a^2\frac{du}{dx}+\nu\frac{du}{dy}-\mu\frac{du}{dz},\quad b^2\frac{du}{dy}+\lambda\frac{du}{dz}-\nu\frac{du}{dx},\quad c^2\frac{du}{dz}+\mu\frac{du}{dx}-\lambda\frac{du}{dy}.$$

A cause de la continuité, les dérivées partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ varient très-peu sur toute l'étendue d'une même section très-petite de la barre par un plan; on peut les regarder comme égales à la valeur qu'elles ont en un point particulier de la section, et mettre cependant pour m, n, p les cosinus de la normale à un élément quelconque de la surface latérale.

Or la seule direction qui soit parallèle à tous les éléments de la surface est celle de la barre. La condition imposée revient donc à la double égalité

$$(6)\qquad \frac{a^2\frac{du}{dx}+\nu\frac{du}{dy}-\mu\frac{du}{dz}}{f'}=\frac{b^2\frac{du}{dy}+\lambda\frac{du}{dz}-\nu\frac{du}{dx}}{g'}=\frac{c^2\frac{du}{dz}+\mu\frac{du}{dx}-\lambda\frac{du}{dy}}{h'}.$$

Appelons k la valeur commune de ces fractions, et résolvons par rapport à $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$. Les équations (6) ne diffèrent de celles (1) du § IX que par le changement de signe de λ, μ, ν; elles donneront, d'après les résultats (2) du même paragraphe,

$$\frac{du}{dx}=k\,\frac{b^2c^2f'+\lambda S\lambda f'-\nu c^2g'+\mu b^2h'}{a^2b^2c^2+S\lambda^2a^2},$$

$$\frac{du}{dy}=k\,\frac{c^2a^2g'+\mu S\lambda f'-\lambda a^2h'+\nu c^2f'}{a^2b^2c^2+S\lambda^2a^2},$$

$$\frac{du}{dz}=k\,\frac{a^2b^2h'+\nu S\lambda f'-\mu b^2f'+\lambda a^2g'}{a^2b^2c^2+S\lambda^2a^2}.$$

Actuellement, on peut avoir $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ en fonction de $\frac{du}{dl}$, qui égale $Sf'\frac{du}{dx}$. Il suffit de multiplier respectivement les trois dernières relations par f', g', h', et d'ajouter. On obtient

$$(7)\qquad \frac{du}{dl}=k\,\frac{Sb^2c^2f'^2+(S\lambda f')^2}{a^2b^2c^2+S\lambda^2a^2};$$

on déduira de là k et par suite $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$.

Cela posé, proposons-nous d'obtenir l'équation (3), en décomposant la barre en éléments perpendiculaires à la longueur. Le flux qui traverse une section normale est

$$F=Sf'\left(a^2\frac{du}{dx}+\nu\frac{du}{dy}-\mu\frac{du}{dz}\right).$$

D'après les relations (6), cette valeur revient à

$$F = kSf'^2 = k,$$

ou bien, en tenant compte de (7),

$$F = \frac{1 + \dfrac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}}{S\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{(S\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}} \cdot \frac{du}{dl}.$$

Considérons l'élément de volume situé à la distance l de l'origine. Il cède au précédent, durant le temps infiniment petit dt, un flux égal à $F\sigma dt$; mais il reçoit du suivant le même flux, augmenté de $\frac{dF}{dl}\sigma dl dt$. En ajoutant à cet excès la chaleur gagnée par rayonnement $\sigma dl dt \varphi(u, t)$, on a la valeur de l'augmentation totale $\rho \frac{du}{dt} \sigma dl dt$. L'équation obtenue est bien identique à (3).

§ XIII. — *Éléments isothermes des barres. Points correspondants.*

Nous avons vu que la température de la barre vérifie les équations (6) du paragraphe précédent. Or, en un point (x, y, z), les dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface isotherme qui passe par ce point. Les relations (6) montrent donc que ces cosinus sont déterminés dès que la direction de la barre l'est elle-même; les valeurs, données un peu plus bas (§ XII), des dérivées partielles de u, font voir à quelles quantités ils sont proportionnels.

Ainsi les surfaces isothermes d'une barre sont des éléments plans parallèles entre eux, et de direction constante.

Concevons un milieu indéfini de même nature que la barre, et où les plans de même direction que ses éléments isothermes se trouvent dans toute leur étendue à une même température. Celle-ci vérifiera les relations (6) du paragraphe précédent, et les flux seront nuls sur tout élément parallèle à la direction (f', g', h'). Par conséquent, si on y découpe par la pensée une barre identique à la proposée, cette barre aura la même équation de chaleur que si elle était séparée du reste du milieu. Il faudra toutefois supposer que le milieu indéfini est diathermane, et reçoit par unité de volume, dans l'unité de temps, une quantité de chaleur rayonnante égale à $\varphi(u, t)$. Adoptons un plan de coordonnées x' et y' parallèle aux plans isothermes, et pour axe des z' le diamètre conjugué à ce plan dans l'ellipsoïde principal : l'équation (8) du § VIII sera celle de la chaleur dans le milieu indéfini, et par suite dans la barre.

D'après ce qui est démontré au même § VIII, les plans isothermes, correspondants à toutes les barres chauffées simultanément à l'origine, auront pour enveloppes des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placés. Si en particulier on mène à l'ellipsoïde principal une infinité de plans tangents, ces plans rencontreront en des points d'égale température les barres pour lesquelles ils sont des éléments isothermes.

Menons un plan tangent en un point quelconque (x, y, z) d'un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde principal, et proposons-nous de trouver le point (x_1, y_1, z_1) où ce plan tangent rencontre la barre qu'il coupe suivant un élément isotherme.

La normale au plan tangent en (x, y, z) à l'ellipsoïde proposé fait avec les axes des angles qui ont leurs cosinus proportionnels à

$$\frac{x}{a^2}, \quad \frac{y}{b^2}, \quad \frac{z}{c^2}.$$

Ce plan tangent devra coïncider avec un élément isotherme de la barre cherchée. Donc, u désignant la température de la barre, les trois quantités ci-dessus sont proportionnelles respectivement aux dérivées

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}.$$

De plus, le point (x_1, y_1, z_1) étant sur la barre, ses coordonnées sont proportionnelles aux cosinus f', g', h' des angles qu'elle fait avec les axes.

Cela posé, les relations (6) du paragraphe précédent pourront s'écrire

$$\frac{x_1}{x+\nu\frac{y}{b^2}-\mu\frac{z}{c^2}}=\frac{y_1}{y+\lambda\frac{z}{c^2}-\nu\frac{x}{a^2}}=\frac{z_1}{z+\mu\frac{x}{a^2}-\lambda\frac{y}{b^2}}.$$

Il suffira que ces relations soient vérifiées, pour que le point x_1, y_1, z_1 appartienne à une barre ayant ses éléments isothermes parallèles au plan tangent proposé. Mais, comme on veut de plus que ce point soit sur le plan tangent lui-même, il faut qu'il vérifie l'équation de ce dernier et donne

$$S\frac{xx_1}{a^2}=S\frac{x^2}{a^2}.$$

Désignons par k la valeur commune des rapports précédents; tirons ensuite x_1, y_1, z_1, et portons leurs expressions dans l'équation ci-dessus. Nous aurons simplement

$$kS\frac{x^2}{a^2}=S\frac{x^2}{a^2},\quad \text{ou bien}\quad k=1.$$

Par suite, le point (x_1, y_1, z_1) a pour coordonnées

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1&=x+\nu\frac{y}{b^2}-\mu\frac{z}{c^2},\\ y_1&=y+\lambda\frac{z}{c^2}-\nu\frac{x}{a^2},\\ z_1&=z+\mu\frac{x}{a^2}-\lambda\frac{y}{b^2}.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de vérifier que le lieu géométrique des points (x_1, y_1, z_1) est une surface semblable à celle des points isothermes et semblablement placée. Pour cela, nous allons calculer l'expression

$$S\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2},$$

qui est le premier membre de l'équation de ces surfaces.

On aura

$$x_1^2=x^2+2a^2\frac{x}{a^2}\left(\nu\frac{y}{b^2}-\mu\frac{z}{c^2}\right)+a^2\frac{\left(\nu c.\frac{y}{b}-\mu b.\frac{z}{c}\right)^2}{a^2b^2c^2},$$

et par suite

$$(9) \qquad S\frac{x_1^2}{a^2} = S\frac{x^2}{a^2} + \frac{S\left(\nu c.\frac{y}{b} - \mu b.\frac{z}{c}\right)^2}{a^2b^2c^2}.$$

Or, d'après une identité connue,

$$S\left(\nu c.\frac{y}{b} - \mu b.\frac{z}{c}\right)^2 = S\lambda^2a^2 S\frac{x^2}{a^2} - (S\lambda x)^2.$$

D'ailleurs, les relations (8) donnent

$$S\lambda x = S\lambda x_1.$$

Substituons cette valeur dans l'identité précédente, puis remplaçons le premier membre de celle-ci, dans (9), par le second membre, et transposons. Il viendra

$$(10) \qquad S\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right) S\frac{x^2}{a^2}.$$

On voit que, si le point (x, y, z) est situé sur la surface

$$S\frac{x^2}{a^2} = \text{const.},$$

le point (x_1, y_1, z_1) le sera sur celle-ci :

$$S\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2} = \left(1 + \frac{S\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}\right) \text{const.}$$

Lorsque en particulier le premier point est sur l'ellipsoïde principal, le second est sur celui des points isothermes.

Nous appellerons correspondants deux points entre les coordonnées desquels existeront les relations (8).

La résolution des équations (8) en x, y, z serait la même que celle des équations (6), effectuée au paragraphe précédent. Leur forme linéaire montre que tout point de l'espace (x_1, y_1, z_1) a un correspondant (x, y, z).

Si le point (x_1, y_1, z_1) est sur un plan quelconque

$$(11) \qquad mx_1 + ny_1 + pz_1 = k, \quad \text{ou} \quad Smx_1 = k,$$

le point (x, y, z) se trouve sur un autre plan

$$\mathrm{S}m\left(a^2\frac{x}{a^2}+\nu\frac{y}{b^2}-\mu\frac{z}{c^2}\right)=k.$$

La dernière équation revient à

$$(12)\qquad \mathrm{S}(a^2m-\nu n+\mu p)\frac{x}{a^2}=k.$$

Le point (x, y, z) est donc situé sur un plan conjugué, dans l'ellipsoïde principal, à la droite dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à

$$a^2m-\nu n+\mu p,\quad b^2n-\lambda p+\nu m,\quad c^2p-\mu m+\lambda n.$$

On a vu, au § IX, que le flux qui traverse un élément parallèle au plan $\mathrm{S}mx_1=k$ dépend de la variation de la chaleur suivant une droite dont la direction est déterminée par les mêmes cosinus. Convenons de dire que cette droite et le plan $\mathrm{S}mx_1=k$ sont correspondants. Alors la relation (12) pourra s'énoncer ainsi :

Lorsque le point (x_1, y_1, z_1) se meut sur un certain plan, le point (x, y, z) se meut sur un autre plan, conjugué, dans l'ellipsoïde principal, à la direction correspondante au premier.

§ XIV. — *Étude des plaques. Formules de transformation.*

Proposons-nous maintenant d'étudier le mouvement de la chaleur dans une plaque mince indéfinie, à bases parallèles, tirée d'un corps homogène. Cette plaque sera supposée chauffée en un de ses points, pris pour origine des coordonnées (x, y, z). Quant à la température du milieu environnant, nous admettrons qu'elle est constante partout, mais variable d'une manière quelconque d'un instant à l'autre.

Prenons, à partir de l'origine, de nouveaux axes rectangulaires des (x', y', z') de même sens que les premiers, ceux des x' et des y' parallèles à la plaque, celui des z' perpendiculaire. Désignons respectivement par m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p'', les cosinus des angles que font les

6.

nouveaux axes des x', y', z' avec les axes des x, y, z, qui sont ceux de l'ellipsoïde principal. Désignons aussi par F'_1, F'_2, F'_3 les flux de chaleur qui traversent les éléments plans perpendiculaires aux nouveaux axes.

Nous aurons les formules de transformation

$$\frac{d}{dx} = m\frac{d}{dx'} + m'\frac{d}{dy'} + m''\frac{d}{dz'}, \quad x' = \mathrm{S}mx,$$
$$\frac{d}{dy} = n\frac{d}{dx'} + n'\frac{d}{dy'} + n''\frac{d}{dz'}, \quad y' = \mathrm{S}m'x,$$
$$\frac{d}{dz} = p\frac{d}{dx'} + p'\frac{d}{dy'} + p''\frac{d}{dz'}, \quad z' = \mathrm{S}m''x,$$

avec les relations

$$\mathrm{S}m^2 = 1, \quad \mathrm{S}m'm'' = 0,$$
$$\mathrm{S}m'^2 = 1, \quad \mathrm{S}m''m = 0,$$
$$\mathrm{S}m''^2 = 1, \quad \mathrm{S}mm' = 0;$$

$$m = n'p'' - p'n'', \quad m' = n''p - p''n, \quad m'' = np' - pn',$$
$$n = p'm'' - m'p'', \quad n' = p''m - m''p, \quad n'' = pm' - mp',$$
$$p = m'n'' - n'm'', \quad p' = m''n - n''m, \quad p'' = mn' - nm'.$$

La formule générale des flux donnera

$$F'_1 = m F_1 + n F_2 + p F_3,$$
$$F'_2 = m' F_1 + n' F_2 + p' F_3,$$
$$F'_3 = m'' F_1 + n'' F_2 + p'' F_3.$$

Portons dans ces expressions les valeurs de F_1, F_2, F_3, données au § V, en fonction des dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$; puis transformons ces dérivées, par les formules ci-dessus, en celles relatives aux nouveaux axes, et réduisons. Nous aurons des expressions de la forme

$$F'_1 = \alpha\frac{du}{dx'} + \beta\frac{du}{dy'} + \gamma\frac{du}{dz'},$$
$$F'_2 = \alpha'\frac{du}{dy'} + \beta'\frac{du}{dz'} + \gamma'\frac{du}{dx'},$$
$$F'_3 = \alpha''\frac{du}{dz'} + \beta''\frac{du}{dx'} + \gamma''\frac{du}{dy'}.$$

Les valeurs des coefficients seront

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{S}m^2 a^2, & \beta &= \mathrm{S}a^2 mm' + \mathrm{S}\lambda m'', & \gamma &= \mathrm{S}a^2 m'' m - \mathrm{S}\lambda m',\\
\alpha' &= \mathrm{S}m'^2 a^2, & \beta' &= \mathrm{S}a^2 m' m'' + \mathrm{S}\lambda m, & \gamma' &= \mathrm{S}a^2 mm' - \mathrm{S}\lambda m'',\\
\alpha'' &= \mathrm{S}m''^2 a^2, & \beta'' &= \mathrm{S}a^2 m'' m + \mathrm{S}\lambda m', & \gamma'' &= \mathrm{S}a^2 m' m'' - \mathrm{S}\lambda m.
\end{aligned}$$

§ XV. — *Équation de la chaleur dans une plaque homogène.*

Dans le nouveau système d'axes, les deux flux F'_1, F'_2 dépendent généralement de la dérivée $\frac{du}{dz'}$. Proposons-nous de changer l'axe des z' en un autre des z'', oblique à la plaque, mais tel, que les deux flux de chaleur qui traverseront les éléments plans parallèles aux $x'z''$ et aux $y'z''$ ne contiennent plus la dérivée $\frac{du}{dz''}$. Si nous désignons par f, g, h les cosinus des angles que fait avec les axes des x', y', z' le nouvel axe Oz'', les formules de transformation seront

$$\begin{aligned}
x' &= x'' + fz'', & \frac{d}{dx'} &= \frac{d}{dx''},\\
y' &= y'' + gz'', & \frac{d}{dy'} &= \frac{d}{dy''},\\
z' &= hz'', & \frac{d}{dz'} &= \frac{1}{h}\frac{d}{dz''} - \frac{f}{h}\frac{d}{dx''} - \frac{g}{h}\frac{d}{dy''}.
\end{aligned}$$

La normale au plan des $y'z''$, menée du côté des x' positifs, fait avec les axes des x', y', z' des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{h}{\sqrt{f^2+h^2}}, \quad 0, \quad \frac{-f}{\sqrt{f^2+h^2}}.$$

Nous supposons h positif, c'est-à-dire l'axe des z'' mené du même côté de la plaque que celui des z'.

Par suite, le flux de chaleur qui traverse l'élément parallèle aux $y'z''$ est

$$F''_1 = \frac{hF'_1 - fF'_3}{\sqrt{f^2+h^2}},$$

ou bien

$$F''_1 = \frac{h\left(\alpha\frac{du}{dx'}+\beta\frac{du}{dy'}+\gamma\frac{du}{dz'}\right)-f\left(\alpha''\frac{du}{dz'}+\beta''\frac{du}{dx'}+\gamma''\frac{du}{dy'}\right)}{\sqrt{f^2+h^2}}.$$

On aura de même, pour le flux de chaleur qui traverse l'élément plan parallèle aux $x'z''$,

$$F''_2 = \frac{h\left(\alpha'\frac{du}{dy'}+\beta'\frac{du}{dz'}+\gamma'\frac{du}{dx'}\right)-g\left(\alpha''\frac{du}{dz'}+\beta''\frac{du}{dx'}+\gamma''\frac{du}{dy'}\right)}{\sqrt{g^2+h^2}}.$$

Les seconds membres de ces formules cesseront de contenir $\frac{du}{dz'}$, et par suite $\frac{du}{dz''}$, si l'on a

$$h\gamma - f\alpha'' = 0, \quad h\beta' - g\alpha'' = 0,$$

ou bien

$$\frac{f}{\gamma} = \frac{g}{\beta'} = \frac{h}{\alpha''}.$$

Comme α'' a toujours une valeur positive finie, l'axe des z'' aura toujours une direction parfaitement déterminée, hors du plan des $x'y'$.

Cherchons actuellement l'équation différentielle de la chaleur dans la plaque.

Soient x', y' les deux premières coordonnées d'un point d'une face de la plaque. A partir de ce point, construisons un parallélipipède dont les arêtes soient parallèles aux axes des x', y', z'', qui ait pour base $dx'\,dy'$ et pour hauteur l'épaisseur ε de la plaque. Les faces parallèles au plan des $y'z''$ sont égales chacune à

$$\frac{dy'\,\varepsilon\sqrt{g^2+h^2}}{h}.$$

Par suite le flux de chaleur qui, pendant l'instant dt, sort par la première de ces faces, est

$$F''_1\,\frac{dy'\,\varepsilon\sqrt{g^2+h^2}}{h}\,dt = \frac{dy'\,\varepsilon\,dt}{\alpha''}\left[(\alpha''\alpha-\gamma\beta'')\frac{du}{dx'}+(\alpha''\beta-\gamma\gamma'')\frac{du}{dy'}\right].$$

Le flux qui entre par la face opposée dépasse celui-là de

$$\frac{dx'\,dy'\,\varepsilon\,dt}{\alpha''}\left[(\alpha''\alpha-\gamma\beta'')\frac{d^2u}{dx'^2}+(\alpha''\beta-\gamma\gamma'')\frac{d^2u}{dx'\,dy'}\right].$$

De même, l'ensemble des deux faces parallèles aux $y'z''$ donnera une quantité de chaleur égale à

$$\frac{dx'\,dy'\,\varepsilon\,dt}{\alpha''}\left[(\alpha''\alpha'-\beta'\gamma'')\frac{d^2u}{dy'^2}+(\alpha''\gamma'-\beta'\beta'')\frac{d^2u}{dx'\,dy'}\right].$$

Enfin le rayonnement fait acquérir une quantité de chaleur que nous supposerons généralement une fonction φ de u et de t, multipliée par $\varepsilon dx'\,dy'\,dt$. Si le corps est athermane, u peu variable, et le milieu environnant à zéro, cette quantité est égale à un coefficient constant négatif, multiplié par u et par $dx'\,dy'\,\varepsilon dt$. Mais quand le corps est recouvert d'une substance aisément fusible, comme dans les expériences de M. de Senarmont, cette substance en fondant change de pouvoir émissif, et le coefficient devient lui-même fonction de u. La température du milieu environnant peut encore varier d'un instant à l'autre. Pour toutes ces raisons, nous supposerons la chaleur émise par la surface égale à une fonction quelconque de u et de t. Si le corps est diathermane, le rayonnement donne de plus un terme sensiblement proportionnel à une fonction de u et de t, et au produit $\varepsilon dx'\,dy'\,dt$. Quoi qu'il en soit, comme l'épaisseur ε est constante, ces deux termes ont une somme de la forme

$$\varphi(u,t)\,dx'\,dy'\,\varepsilon dt.$$

La somme de tous ces accroissements égale l'accroissement total $\rho\frac{du}{dt}\varepsilon dx'\,dy'\,dt$. D'où l'équation différentielle cherchée,

$$\rho\frac{du}{dt}=\varphi(u,t)+\frac{1}{\alpha''}\left[(\alpha''\alpha-\gamma\beta'')\frac{d^2u}{dx'^2}+(\alpha''\alpha'-\beta'\gamma'')\frac{d^2u}{dy'^2}\right.$$
$$\left.+(\alpha''\beta+\alpha''\gamma'-\gamma\gamma''-\beta'\beta'')\frac{d^2u}{dx'\,dy'}\right].$$

En raisonnant comme au § V, nous verrons qu'il existe dans le plan des $x'y'$ deux axes de coordonnées rectangulaires qui font disparaître de l'équation différentielle ci-dessus le terme en $\frac{d^2 u}{dx'\,dy'}$. Ce sont les deux axes de l'ellipse

$$(\alpha''\alpha - \gamma\beta'')\,x'^2 + (\alpha''\alpha' - \beta'\gamma'')\,y'^2 + (\alpha''\beta + \alpha''\gamma' - \gamma\gamma'' - \beta'\beta'')\,x'y' = 1.$$

Supposons donc qu'on ait adopté ce système. La condition qu'il doit vérifier pour cela est

$$\alpha''\beta + \alpha''\gamma' - \gamma\gamma'' - \beta'\beta'' = 0.$$

Si nous posons alors

$$\frac{\alpha''\alpha - \gamma\beta''}{\alpha''} = A^2, \quad \frac{\alpha''\alpha' - \beta'\gamma''}{\alpha''} = B^2,$$

l'équation différentielle sera

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + A^2\frac{d^2 u}{dx'^2} + B^2\frac{d^2 u}{dy'^2}.$$

§ XVI. — *Lignes isothermes.*

Opérons dans l'équation précédente la transformation

$$\xi = \frac{x'}{A}, \quad \eta = \frac{y'}{B}.$$

Elle deviendra

$$\rho\frac{du}{dt} = \varphi(u, t) + \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2}.$$

On voit que u serait la température d'une plaque isotrope, si ξ, η représentaient les coordonnées de ses divers points, et si cette plaque était chauffée dans un très-petit espace autour de l'origine. Or, dans ce cas, u dépendrait seulement de t et de la distance à l'origine $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Ainsi les lignes isothermes auront pour équation

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{const.},$$

ou bien

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} = \text{const.}$$

Elle représente des ellipses semblables et semblablement placées.

On voit aussi que la constante est la même pour les lignes d'égale température qui se produisent à l'instant t sur toutes les plaques d'un même cristal, pourvu que la fonction $\varphi(u, t)$ soit la même pour toutes, et qu'elles soient chauffées à l'origine des coordonnées de manière que l'échauffement soit égal à chaque instant chez toutes les plaques isotropes correspondantes en ξ, η. Afin d'abréger, nous dirons qu'elles sont alors chauffées pareillement.

Exprimons les relations qui déterminent la direction des axes et leur grandeur, en fonction des cosinus m, n, p; m', n', p'; m'', n'', p''.

La direction des axes, indépendamment de la condition de rectangularité, doit vérifier la relation

$$\alpha''\beta + \alpha''\gamma' - \gamma\gamma'' - \beta'\beta'' = 0.$$

Portons-y les valeurs (§ XIV) de α'', β, β', β'', γ, γ', γ''. Elle deviendra successivement

$$2\mathrm{S}a^2 mm' \mathrm{S}m''^2 a^2 - 2\mathrm{S}a^2 mm'' \mathrm{S}a^2 m'm'' - 2\mathrm{S}\lambda m \mathrm{S}\lambda m' = 0,$$

$$\mathrm{S}b^2c^2(nn'p''^2 + pp'n''^2) - \mathrm{S}b^2c^2(nn''p'p'' + pp''n'n'') - \mathrm{S}\lambda m.\mathrm{S}\lambda m' = 0,$$

$$\mathrm{S}b^2c^2(n'p'' - p'n'')(n''p - p''n) + \mathrm{S}\lambda m \mathrm{S}\lambda m' = 0,$$

$$\mathrm{S}b^2c^2 mm' + \mathrm{S}\lambda m \mathrm{S}\lambda m' = 0,$$

$$\mathrm{S}\frac{mm'}{a^2} + \frac{\mathrm{S}\lambda m\,\mathrm{S}\lambda m'}{a^2b^2c^2} = 0. \tag{1}$$

Évaluons actuellement les quantités A^2, B^2. Nous avons

$$\mathrm{A}^2 = \frac{\alpha''\alpha - \gamma\beta''}{\alpha''},$$

$$\begin{aligned}\alpha''\alpha - \gamma\beta'' &= \mathrm{S}m^2a^2\mathrm{S}m''^2a^2 - (\mathrm{S}ma.m''a)^2 + (\mathrm{S}\lambda m')^2\\ &= \mathrm{S}b^2c^2(n''p - p''n)^2 + (\mathrm{S}\lambda m')^2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{A}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{S}m''^2a^2}\left[\mathrm{S}\frac{m'^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda m')^2}{a^2b^2c^2}\right].$$

On trouverait de même

$$\mathrm{B}^2 = \frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{S}m''^2a^2}\left[\mathrm{S}\frac{m^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda m)^2}{a^2b^2c^2}\right].$$

D'où l'équation des ellipses isothermes

$$\left[\mathrm{S}\frac{m^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda m)^2}{a^2b^2c^2}\right]x'^2+\left[\mathrm{S}\frac{m'^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda m')^2}{a^2b^2c^2}\right]y'^2$$
$$=\text{const.}\,\frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{S}m''^2a^2}\left[\mathrm{S}\frac{m^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda m)^2}{a^2b^2c^2}\right]\left[\mathrm{S}\frac{m'^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda m')^2}{a^2b^2c^2}\right].$$

On peut simplifier le second membre. En tenant compte de la relation (1), et supposant égale à 1 la constante arbitraire, ce second membre peut s'écrire

$$\frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{S}m''^2a^2}\left[\mathrm{S}\frac{m^2}{a^2}\,\mathrm{S}\frac{m'^2}{a^2}-\left(\mathrm{S}\frac{mm'}{a^2}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\mathrm{S}\dfrac{m'^2}{a^2}(\mathrm{S}\lambda m)^2+\mathrm{S}\dfrac{m^2}{a^2}(\mathrm{S}\lambda m')^2-2\,\mathrm{S}\dfrac{mm'}{a^2}\,\mathrm{S}\lambda m.\mathrm{S}\lambda m'}{\mathrm{S}a^2m''^2}.$$

Une identité connue réduit le premier terme à

$$\frac{a^2b^2c^2}{\mathrm{S}a^2m''^2}\,\mathrm{S}\frac{(np'-pn')^2}{b^2c^2}=\frac{\mathrm{S}a^2(np'-pn')^2}{\mathrm{S}a^2m''^2}=1.$$

Passons au second terme. Son numérateur peut s'écrire

$$\mathrm{S}\left(\frac{m'}{a}\,\mathrm{S}\lambda m-\frac{m}{a}\,\mathrm{S}\lambda m'\right)^2.$$

Or, en remplaçant dans la parenthèse $\mathrm{S}\lambda m$, $\mathrm{S}\lambda m'$ par le développement de ces expressions, on trouve pour cette parenthèse

$$\frac{\nu(pm'-mp')-\mu(mn'-nm')}{a}=\frac{\nu n''-\mu p''}{a}.$$

Le numérateur du second terme devient

$$\mathrm{S}\frac{(\nu n''-\mu p'')^2}{a^2}=\frac{\mathrm{S}(\nu c.bn''-\mu b.cp'')^2}{a^2b^2c^2}=\frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2\mathrm{S}m''^2a^2-(\mathrm{S}\lambda a^2m'')^2}{a^2b^2c^2}.$$

L'équation des ellipses isothermes, en y supposant égale à 1 la constante arbitraire, est donc

$$(2)\quad\left(\mathrm{S}\frac{m^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda m)^2}{a^2b^2c^2}\right)x'^2+\left(\mathrm{S}\frac{m'^2}{a^2}+\frac{(\mathrm{S}\lambda m')^2}{a^2b^2c^2}\right)y'^2=1+\frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}-\frac{(\mathrm{S}\lambda a^2m'')^2}{a^2b^2c^2\mathrm{S}m''^2a^2}.$$

§ XVII. — *Lieux des ellipses isothermes.*

Concevons actuellement une infinité de plaques qui passeraient par l'origine, et qui seraient dirigées de toutes les manières possibles par rapport à l'ellipsoïde principal. Cherchons si les courbes isothermes correspondantes de toutes ces plaques concorderont pour donner certaines surfaces.

A l'inspection de l'équation précédente et de la relation (1), on reconnaît que l'ellipse isotherme est l'intersection du plan $Sm''x = 0$, c'est-à-dire de la plaque, par l'ellipsoïde

$$(3) \qquad S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2b^2c^2} = 1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2b^2c^2} - \frac{(S\lambda a^2 m'')^2}{a^2b^2c^2 S m''^2 a^2}.$$

En effet, menons dans le plan $Sm''x = 0$ deux rayons rectangulaires de l'ellipsoïde suivant deux directions déterminées par des cosinus (m, n, p) et (m', n', p'). La condition, pour que le second de ces rayons soit parallèle au plan tangent mené à l'extrémité du premier, est

$$Sm'\left(\frac{m}{a^2} + \frac{\lambda S\lambda m}{a^2b^2c^2}\right) = 0\ ;$$

c'est la relation (1) du paragraphe précédent.

Or l'un des deux rayons rectangulaires est parallèle au plan tangent mené à l'extrémité de l'autre, à la condition nécessaire et suffisante que la droite tangente, à cette extrémité, à la courbe d'intersection de l'ellipsoïde par la plaque, soit perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact. Ainsi le point de contact est un sommet de l'ellipse d'intersection, et les deux rayons considérés sont ses deux axes. Ceux-ci ont donc la même direction que ceux de l'ellipse isotherme.

De plus, si on calcule les rayons correspondants de l'ellipsoïde, on les trouve égaux aux demi-axes de même direction de l'ellipse isotherme (2). Cette ellipse est donc bien l'intersection considérée.

On arriverait plus directement à ce résultat, en remplaçant, dans l'équation (2), x', y' par leurs valeurs Smx, $Sm'x$, puis en éliminant les cosinus qui se trouvent au premier membre. Cette élimination se fera au moyen des relations

$$Sm'^2 = 1, \quad Smm' = 0 \quad \text{et} \quad Sm''x = 0.$$

La dernière peut s'écrire

$$S(np' - pn')x = 0 \quad \text{ou} \quad S(nz - py)m' = 0.$$

De celle-ci et des précédentes on tirera

$$m' = \frac{x - mSmx}{\sqrt{Sx^2 - (Smx)^2}}, \quad n' = \frac{y - nSmx}{\sqrt{Sx^2 - (Smx)^2}}, \quad p' = \frac{z - pSmx}{\sqrt{Sx^2 - (Smx)^2}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (2), et qu'on tienne compte de la relation (1), les cosinus m, n, p s'élimineront d'eux-mêmes, et l'on tombera sur (3).

On voit que les lieux géométriques des lignes de même température qui se produisent à la fois sur toutes les plaques sont les ellipsoïdes représentés par l'équation (3); ils sont semblables à celui des points isothermes et semblablement placés. Les plaques dont les lignes isothermes correspondantes se trouvent sur un même ellipsoïde sont celles pour lesquelles le second membre de (3) prend la même valeur.

Ce second membre peut être mis sous une forme plus simple. Concevons la direction fixe dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels à λa, μb, νc, et la direction variable dont les cosinus pareils sont proportionnels à am'', bn'', cp''; appelons θ l'angle de ces deux directions. Nous aurons

$$\frac{(S\lambda a^2 m'')^2}{a^2 b^2 c^2 Sm''^2 a^2} = \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2} \cos^2\theta,$$

et le second membre de (3) deviendra

$$1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2} \sin^2\theta.$$

Ce second membre varie donc entre les limites

$$1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{S\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Il atteint sa première limite pour la plaque $S\lambda x = 0$, perpendiculaire à la direction déterminée par des cosinus proportionnels à λ, μ, ν. Alors on a l'ellipsoïde

$$S\frac{x^2}{a^2} + \frac{(S\lambda x)^2}{a^2 b^2 c^2} = 1.$$

Celui-ci est intérieur à l'ellipsoïde principal, car en ses points on a généralement

$$S\frac{x^2}{a^2} < 1.$$

Aux points de la plaque, ou pour $S\lambda x = 0$, il touche intérieurement l'ellipsoïde principal.

Observons que cette plaque a les mêmes lignes isothermes que si le milieu était homoédrique, ou que les coefficients λ, μ, ν fussent nuls.

Le second membre atteint sa deuxième limite lorsque $\sin\theta = 1$, ou que la plaque contient la direction déterminée par des cosinus proportionnels à λa^2, μb^2, νc^2. Alors l'ellipsoïde est le même que celui des points isothermes; nous savons qu'il est tangent extérieurement, en deux points opposés, à l'ellipsoïde principal.

Ainsi les lignes isothermes correspondantes de toutes les plaques sont situées sur des ellipsoïdes semblables à celui des points isothermes et semblablement placés; ces ellipsoïdes sont compris entre celui qui est tangent intérieurement à l'ellipsoïde principal, et celui qui lui est tangent extérieurement; ils coupent l'ellipsoïde principal suivant des courbes semblables, situées sur des plans parallèles à $S\lambda x = 0$.

Si le milieu devient homoédrique, tous ces ellipsoïdes coïncident avec l'ellipsoïde principal. Le même fait se produit, sauf erreur du second ordre de petitesse, quand les coefficients λ, μ, ν sont très-petits.

§ XVIII. — *Autre méthode pour l'équation de la plaque. Cylindres isothermes.*

On peut obtenir l'équation de la chaleur dans une plaque par la méthode employée pour la barre au § XII. Les considérations données au commencement de ce paragraphe montrent que les flux de chaleur rayonnante qui traversent les deux faces de la plaque sont extrêmement petits par rapport aux flux qui traversent les éléments plans d'une autre direction. Avec les notations du § XIV, cela signifie que l'expression de F'_3 peut être égalée à zéro. On aura donc

$$(4) \qquad \alpha'' \frac{du}{dz'} + \beta'' \frac{du}{dx'} + \gamma'' \frac{du}{dy'} = 0.$$

Les dérivées partielles de u étant peu différentes aux divers points de toute droite très-petite qui traverse la plaque, on peut regarder cette relation comme vérifiée en tous les points de la plaque.

Cela posé, adoptons un élément de volume droit, ayant pour base le rectangle $dx'dy'$, et pour hauteur l'épaisseur ε de la plaque. Le flux perdu, pendant l'instant dt, par la première face perpendiculaire aux x', sera $F'_1\, dy' \varepsilon dt$; le flux gagné par la face opposée dépassera cette quantité de $\frac{dF'_1}{dx'} dx' dy' \varepsilon dt$. En faisant de même pour les faces perpendiculaires aux y', et ajoutant la chaleur gagnée par rayonnement, on aura l'équation

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{dF'_1}{dx'} + \frac{dF'_2}{dy'} + \varphi(u, t).$$

On remplacera F'_1, F'_2 par leurs expressions données au § XIV, après avoir substitué dans celles-ci, à $\frac{du}{dz'}$, sa valeur tirée de (4); et on trouvera l'équation déjà obtenue au § XV.

La relation (4), exprimée au moyen des coordonnées x, y, z, conduit à des résultats importants. On l'obtient ainsi exprimée en se rappelant que son premier membre est la valeur de F'_3, c'est-à-dire du flux qui traverse un élément parallèle à la plaque. Nous appellerons ici f, g, h les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la plaque. Alors nous aurons (*voir* § IX)

$$(5) \qquad F'_3 = S(a^2 f - \nu g + \mu h) \frac{du}{dx} = 0.$$

Désignons par f', g', h' les cosinus des angles faits avec les axes par la direction que nous avons convenu, à la fin du § XIII, d'appeler correspondante à la plaque. Cette relation deviendra

$$S f' \frac{du}{dx} = 0.$$

Elle exprime que les surfaces isothermes d'une plaque sont en tous leurs points parallèles à la droite correspondante; ce sont donc des cylindres ayant leurs génératrices parallèles à cette droite.

Concevons un milieu indéfini de même nature que la plaque, ayant pour surfaces isothermes des cylindres indéfinis placés dans ce milieu comme les cylindres isothermes le sont dans la plaque. Sa température vérifiera la relation (5), et les flux seront nuls sur tout élément perpendiculaire à la direction (f, g, h). Par conséquent, si on y découpe par la pensée une plaque identique à la proposée, celle-ci aura la même équation de chaleur que si elle était séparée du reste du milieu. Nous supposons que le milieu indéfini reçoit, par unité de volume et dans l'unité de temps, une quantité de chaleur rayonnante égale à $\varphi(u, t)$.

Adoptons, à partir de l'origine, un nouvel axe des z' parallèle aux génératrices des cylindres isothermes, c'est-à-dire de même direction que la droite correspondante à la plaque, et pour axes des x' et des y' deux diamètres conjugués entre eux et conjugués à l'axe des z' dans l'ellipsoïde principal. L'équation (6) du § VIII sera celle de la chaleur dans le milieu indéfini, et par conséquent dans la plaque. Par suite, d'après ce qui est démontré à ce paragraphe, les cylindres isothermes seront circonscrits à des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal et semblablement placés. Si on considère en particulier l'ellipsoïde principal, on pourra énoncer le principe suivant :

Les cylindres circonscrits à l'ellipsoïde principal coupent les plaques correspondantes à la direction de leurs génératrices, suivant des surfaces isothermes.

Nous terminerons le Mémoire actuel en démontrant par l'analyse cette proposition.

§ XIX. — *Cylindres circonscrits à l'ellipsoïde principal.*

Cherchons l'intersection de la plaque

$$\mathrm{S} fx = 0,$$

par le cylindre, circonscrit à l'ellipsoïde principal, qui a ses génératrices parallèles à la direction définie par les cosinus f', g', h'.

Menons, en un point (x, y, z) de l'ellipsoïde principal, un plan tangent à cet ellipsoïde, et soient ξ, η, ζ les coordonnées courantes; son équation sera

$$\text{(6)} \qquad S\frac{x\xi}{a^2} = 1.$$

Exprimons que ce plan tangent est parallèle à la direction (f', g', h'), et a par conséquent pour enveloppe le cylindre circonscrit proposé, nous aurons la condition

$$\text{(7)} \qquad S\frac{x}{a^2}f' = 0.$$

Reportons-nous à la théorie des points correspondants du § XIII. Désignons par (x_1, y_1, z_1) le correspondant de (x, y, z), donné par les relations

$$x_1 = x + \nu\frac{y}{b^2} - \mu\frac{z}{c^2}, \quad y_1 = y + \lambda\frac{z}{c^2} - \nu\frac{x}{a^2}, \quad z_1 = z + \mu\frac{x}{a^2} - \lambda\frac{y}{b^2}.$$

D'après les formules (11) et (12) du § XIII, la relation (7) équivaut à

$$Sfx_1 = 0.$$

Ainsi le point correspondant de (x, y, z) appartient à la plaque proposée. D'ailleurs une propriété fondamentale de ce point est d'être situé sur le plan tangent

$$S\frac{x\xi}{a^2} = 1,$$

et en outre sur l'ellipsoïde des points isothermes.

Le point correspondant (x_1, y_1, z_1) est donc à l'intersection de la plaque par le plan tangent et par l'ellipsoïde des points isothermes. Si l'intersection du plan tangent et de la plaque était tangente à cet ellipsoïde, il est clair que le plan tangent le serait à la courbe d'intersection du même ellipsoïde par la plaque; par suite, l'enveloppe des plans tangents, ou le cylindre circonscrit proposé, couperait la plaque suivant la même courbe que l'ellipsoïde des points isothermes. Le problème serait résolu.

Mais il n'en est pas ainsi : généralement la droite d'intersection du plan tangent par la plaque coupe l'ellipsoïde en deux points, dont l'un est (x_1, y_1, z_1), et dont nous désignerons l'autre par (x'_1, y'_1, z'_1). Nous appellerons (x', y', z') le correspondant de (x'_1, y'_1, z'_1); ce point sera évidemment situé sur l'ellipsoïde principal. L'équation (6) étant vérifiée par les coordonnées du point (x'_1, y'_1, z'_1), on aura

$$\mathrm{S}\frac{x}{a^2}\left(x' + \nu\frac{y'}{b^2} - \mu\frac{z'}{c^2}\right) = 1$$

ou bien

$$\mathrm{S}\frac{xx'}{a^2} + \frac{\mathrm{S}\lambda a^2(yz' - zy')}{a^2 b^2 c^2} = 1. \tag{8}$$

D'ailleurs le même point (x'_1, y'_1, z'_1) appartient à la plaque, et les coordonnées x', y', z' de son correspondant vérifient la relation (7); celle-ci donne donc

$$\mathrm{S}\frac{f'}{a^2}x' = 0.$$

De cette relation et de (7) on tirera

$$\frac{yz' - zy'}{\frac{f'}{a^2}} = \frac{zx' - xz'}{\frac{g'}{b^2}} = \frac{xy' - yx'}{\frac{h'}{c^2}}.$$

Appelons r l'un quelconque de ces rapports, et prenons la valeur des trois antécédents pour les porter dans (8). Celle-ci deviendra

$$\mathrm{S}\frac{xx'}{a^2} + r\frac{\mathrm{S}\lambda f'}{a^2 b^2 c^2} = 1,$$

ou bien, en transposant et élevant au carré,

$$\left(\mathrm{S}\frac{xx'}{a^2}\right)^2 = \left(1 - r\frac{\mathrm{S}\lambda f'}{a^2 b^2 c^2}\right)^2. \tag{9}$$

On a d'autre part l'identité

$$\mathrm{S}\frac{x^2}{a^2}\,\mathrm{S}\frac{x'^2}{a^2} - \left(\mathrm{S}\frac{xx'}{a^2}\right)^2 = \frac{\mathrm{S}a^2(yz' - zy')^2}{a^2 b^2 c^2},$$

qui devient

$$1 - \left(\mathrm{S}\,\frac{xx'}{a^2}\right)^2 = r^2\,\frac{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2}}{a^2 b^2 c^2}.$$

Ajoutons membre à membre cette relation à (9), nous aurons pour r une valeur constante, et nous trouverons ensuite

$$\mathrm{S}\,\frac{xx'}{a^2} = \frac{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2} - \dfrac{(\mathrm{S}\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{(\mathrm{S}\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}.$$

Cette dernière relation, ajoutée à celle-ci :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}\,\frac{x'^2}{a^2} = 1,$$

donne

$$\mathrm{S}\,\frac{\left(\dfrac{x+x'}{2}\right)^2}{a^2} = \frac{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2}}{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{(\mathrm{S}\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}.$$

Les quantités $\frac{x+x'}{2}$, $\frac{y+y'}{2}$, $\frac{z+z'}{2}$ sont les coordonnées du milieu de la droite qui joint les points (x, y, z) et (x', y', z') : nous les désignerons par X, Y, Z.

D'après la forme linéaire des relations qui existent entre les points correspondants, il est aisé de voir que le correspondant de (X, Y, Z) est le milieu de la droite qui joint les points (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z'_1). Désignons par (X_1, Y_1, Z_1) ses coordonnées; la formule ci-dessus et celle (10) du § XIII donneront

$$\mathrm{S}\,\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda X_1)^2}{a^2 b^2 c^2} = \left(1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2 a^2}{a^2 b^2 c^2}\right) \frac{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2}}{\mathrm{S}\,\dfrac{f'^2}{a^2} + \dfrac{(\mathrm{S}\lambda f')^2}{a^2 b^2 c^2}}.$$

Substituons dans le second membre, aux cosinus f', g', h', leurs valeurs en f, g, h, valeurs respectivement proportionnelles à

$$a^2 f - \nu g + \mu h, \quad b^2 g - \lambda h + \nu f, \quad c^2 h - \mu f + \lambda g.$$

Nous aurons, en négligeant partout un même facteur qui disparaît à la fin,

$$\mathrm{S}\frac{f'^2}{a^2} = \mathrm{S}a^2f^2 + \mathrm{S}\frac{(-\nu c.gb + \mu b.hc)^2}{a^2b^2c^2} = \mathrm{S}a^2f^2 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2\mathrm{S}a^2f^2 - (\mathrm{S}\lambda a^2 f)^2}{a^2b^2c^2},$$

$$(\mathrm{S}\lambda f')^2 = (\mathrm{S}\lambda a^2 f)^2.$$

Il viendra ainsi

$$(10) \qquad \mathrm{S}\frac{\mathrm{X}_1^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda\mathrm{X}_1)^2}{a^2b^2c^2} = 1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2} - \frac{(\mathrm{S}\lambda a^2 f)^2}{a^2b^2c^2\mathrm{S}a^2f^2}.$$

Cette équation montre que les plans tangents menés à l'ellipsoïde principal, parallèlement à la direction correspondante à la plaque, coupent la courbe d'intersection de l'ellipsoïde des points isothermes par la plaque, suivant une corde dont le milieu est toujours situé sur un même ellipsoïde semblable à celui des points isothermes et semblablement placé. Or il est aisé de voir géométriquement que cette corde est tangente en son milieu à l'ellipsoïde considéré. C'est ce qu'on voit encore en prenant la différence des deux relations

$$\mathrm{S}\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda x_1')^2}{a^2b^2c^2} = 1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2},$$

$$\mathrm{S}\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(\mathrm{S}\lambda x_1)^2}{a^2b^2c^2} = 1 + \frac{\mathrm{S}\lambda^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{X}_1}{a^2} + \frac{\lambda\mathrm{S}\lambda\mathrm{X}_1}{a^2b^2c^2}\right)(x_1' - x_1) = 0;$$

ce résultat signifie que la corde qui joint les deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_1', y_1', z_1') est tangente en son milieu à l'ellipsoïde (10).

Ainsi, non-seulement les plans considérés coupent l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde des points isothermes par la plaque, suivant une corde dont le milieu appartient à l'ellipsoïde (10), mais encore cette corde y est tangente au même ellipsoïde. Donc l'enveloppe de ces plans, ou le cylindre circonscrit à l'ellipsoïde principal, coupe la plaque suivant la même courbe que l'ellipsoïde (10). Telle est la réponse à la question proposée.

Or, (10) est identique à l'équation (3) du § XVII, et représente des

8.

ellipses d'égale température des diverses plaques. D'autre part, le cylindre circonscrit à l'ellipsoïde principal a bien ses génératrices parallèles à la direction correspondante à la plaque, comme il est nécessaire, d'après la relation (5) du paragraphe précédent, pour que ce cylindre soit isotherme par rapport à la plaque. Le principe est donc démontré, savoir que :

Les cylindres circonscrits à l'ellipsoïde principal coupent les plaques correspondantes à leurs génératrices, suivant des surfaces isothermes.

La démonstration fait voir de plus que ces cylindres coupent les diverses plaques, supposées chauffées simultanément et pareillement, suivant des surfaces d'égale température.

Vu et approuvé.

Le 5 février 1867.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 5 février 1867.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS D'ANALYSE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1° Méthode des variations;

2° Application à la recherche des maxima et des minima des intégrales simples et doubles.

Vu et approuvé.

Le 5 février 1867.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 5 février 1867.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.