N° D'ORDRE :

669.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

**Par M. ZAREMBA.**



1re THÈSE. — Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 30 novembre 1889, devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

PICARD, } *Examinateurs.*
POINCARÉ, }



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889

# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

| | MM. | |
|---|---|---|
| **DOYEN** | HÉBERT, Professeur | Géologie. |
| **PROFESSEURS HONORAIRES** | PASTEUR. | |
| | DUCHARTRE | Botanique. |
| **PROFESSEURS** | DE LACAZE-DUTHIERS. | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | HERMITE | Algèbre supérieure. |
| | TROOST | Chimie. |
| | FRIEDEL | Chimie organique. |
| | O. BONNET | Astronomie. |
| | DARBOUX | Géométrie supérieure. |
| | TISSERAND | Astronomie. |
| | LIPPMANN | Physique. |
| | HAUTEFEUILLE | Minéralogie. |
| | BOUTY | Physique. |
| | APPELL | Mécanique rationnelle. |
| | DUCLAUX | Chimie biologique. |
| | BOUSSINESQ | Mécanique physique et expérimentale. |
| | PICARD | Calcul différentiel et Calcul intégral. |
| | POINCARÉ | Calcul des probabilités, Physique mathématique. |
| | Yves DELAGE | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | BONNIER | Botanique. |
| | DASTRE | Physiologie. |
| | DITTE | Chimie. |
| **PROFESSEURS ADJOINTS** | WOLF | Physique céleste. |
| | CHATIN | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée. |
| | JOLY | Chimie. |
| **SECRÉTAIRE** | PHILIPPON. | |

15524 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

DÉDIÉ

A

M. É. PICARD. | M. L. RAFFY.

Hommage de haute estime et de reconnaissance.

ZAREMBA.

# PREMIÈRE THÈSE.

## SUR UN PROBLÈME

CONCERNANT

## L'ÉTAT CALORIFIQUE D'UN CORPS SOLIDE HOMOGÈNE INDÉFINI.

ÉTUDE D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS EN 1858.

### I.

### Introduction.

1. La question qui fera l'objet de ce travail a été posée par l'Académie des Sciences de Paris en 1858 dans les termes suivants :

*Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes.*

Il paraît que le seul travail consacré à ce sujet est le Mémoire de Riemann présenté par l'auteur à l'Académie des Sciences le 1er juillet 1861. Ce Mémoire n'a pas obtenu le prix, les calculs n'y étant que très incomplètement développés; il est publié sous le n° XXII, p. 370 des *Œuvres de Riemann*, par M. Weber, qui y a joint une Note où, après avoir donné une solution complète du problème qui consiste à déterminer tous les cas où la température d'un corps homogène indéfini peut être donnée par une fonction du temps et d'une seule autre variable indépendante, il traite un cas particulier de la question ci-dessus.

L'étude approfondie du Mémoire de Riemann nous a bientôt conduit à la conclusion que les résultats définitifs obtenus par ce savant ne représentaient qu'une solution très particulière du problème; croyant être parvenu à combler la plus grande partie de la lacune que nous venons de signaler, nous nous proposons d'exposer ici les résultats de nos recherches, après avoir communiqué une solution entièrement nouvelle de la première question traitée dans la Note de M. Weber; ce problème, étranger en apparence à notre sujet, exige des considérations qui nous seront utiles dans la suite.

La disposition des matières s'imposera d'elle-même après que la conception fondamentale de la méthode aura été exposée : c'est donc de cela que nous allons nous occuper.

2. Soient $s_1$ et $s_2$ deux fonctions des coordonnées d'un point du corps dont il s'agit d'étudier l'état calorifique et supposons que les courbes de la congruence formée par les isothermes soient données par les équations

$$s_1 = \text{const.}, \qquad s_2 = \text{const.}$$

Désignons par $s_3$ une troisième fonction quelconque des coordonnées, indépendante de $s_1$ et de $s_2$. On sait que, $u$ étant la température d'un point considéré à l'époque $t$ et déterminé par l'intersection des trois surfaces

$$s_1 = \text{const.}, \qquad s_2 = \text{const.}, \qquad s_3 = \text{const.},$$

on pourra toujours mettre l'équation du mouvement de la chaleur sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial s_3^2} \\ & \quad + 2 a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial s_2 \, \partial s_3} + 2 b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial s_3 \, \partial s_1} + 2 c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \, \partial s_2} \\ & \qquad + e \frac{\partial u}{\partial s_1} + f \frac{\partial u}{\partial s_2} + g \frac{\partial u}{\partial s_3} - k \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients seront certaines fonctions de $s_1$, $s_2$ et $s_3$. La fonction $u$ devant pouvoir être représentée en fonction de $t$ et de $s_1$ et $s_2$ seuls, on doit pouvoir satisfaire à l'équation suivante :

$$(2) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2c_1\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + e\frac{\partial u}{\partial s_1} + f\frac{\partial u}{\partial s_2} - k\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cette équation doit avoir lieu quelle que soit la valeur particulière attribuée à $s_3$; si donc on désigne par $a^{(m)}, c_1^{(m)}, b^{(m)}, \ldots$ les valeurs de $a, c_1, b, \ldots$, pour $s_3 = s_3^{(m)}$, on devra évidemment avoir, en appelant $s_3^{(1)}, s_3^{(2)}, s_3^{(3)}, s_3^{(4)}$ et $s_3^{(5)}$ cinq valeurs quelconques de $s_2$,

$$\begin{vmatrix} a^{(1)} & c_1^{(1)} & b^{(1)} & e^{(1)} & f^{(1)} & k^{(1)} \\ a^{(2)} & c_1^{(2)} & b^{(2)} & e^{(2)} & f^{(2)} & k^{(2)} \\ a^{(3)} & c_1^{(3)} & b^{(3)} & e^{(3)} & f^{(3)} & k^{(3)} \\ a^{(4)} & c_1^{(4)} & b^{(4)} & e^{(4)} & f^{(4)} & k^{(4)} \\ a^{(5)} & c_1^{(5)} & b^{(5)} & e^{(5)} & f^{(5)} & k^{(5)} \\ a & c_1 & b & e & f & k \end{vmatrix} = 0,$$

puisque l'on aurait autrement

$$u = \text{const.},$$

solution dont il n'y a pas lieu de s'occuper.

On voit par conséquent qu'en appelant F le premier membre de (2) et $F^{(m)}$ ce qu'il devient pour $s_3 = s_3^{(m)}$, il doit nécessairement exister une relation de la forme suivante

$$(3) \qquad F = \sum_{i=1}^{i=m} C_m F_m \qquad (m \leq 5),$$

où $C_m$ sont les seuls éléments dépendant de $s_3$ dans le second membre.

Il est aisé de s'assurer que l'entier $m$ ne peut en réalité surpasser 4; car, s'il était 5, on pourrait toujours déduire des cinq équations

$$F^{(1)} = 0, \qquad F^{(2)} = 0, \qquad F^{(3)} = 0, \qquad F^{(4)} = 0, \qquad F^{(5)} = 0$$

une équation de la forme

$$(4) \qquad A\frac{\partial u}{\partial s_1} + B\frac{\partial u}{\partial s_2} = 0;$$

il viendrait, par conséquent,

$$u = \Phi[f(s_1, s_2), t],$$

$f$ étant une intégrale de (4).

Or il suffirait évidemment de prendre $f(s_1, s_2)$ pour l'une des variables indépendantes pour que $u$ ne contienne, outre $t$, que la seule variable $f(s_1, s_2)$, ce qui ne doit pas avoir lieu par hypothèse.

Cela posé, l'ordre de l'exposition s'offre de lui-même : certaines propriétés de l'équation (1) étant mises en évidence, il faudra successivement considérer les quatre cas $m = 1, 2, 3$ et $4$.

Il convient seulement, ainsi que nous l'avons déjà fait observer, de traiter préalablement le cas où la température est donnée par une fonction du temps et d'une seule autre variable indépendante. C'est ce que nous allons faire.

## II.

### Détermination de tous les cas où la température peut être exprimée au moyen du temps et d'une seule autre variable indépendante.

3. Supposons que l'une des trois variables [1] $s_1$, $s_2$ et $s_3$, qui figurent dans l'équation (1) du numéro précédent, égalée à une constante, donne les surfaces isothermes; voici alors l'équation qui déterminera $u$ si $s_1$ est cette variable

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + e\frac{\partial u}{\partial s_1} - k\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

où nous ferons, pour simplifier l'écriture, $k = 1$. Des considérations tout à fait analogues à celles qui viennent d'être développées au n° 2 font immédiatement reconnaître que, si $a$ et $e$ ne sont pas fonctions de la seule variable $s_1$, le premier membre de (1) ne pourra qu'être une fonction linéaire des premiers membres de deux équations, telles que celles-ci

$$(2) \qquad \begin{cases} a'\dfrac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + b'\dfrac{\partial u}{\partial s_1} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\[2ex] a''\dfrac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + b''\dfrac{\partial u}{\partial s_1} = 0, \end{cases}$$

où $a'$, $b'$, $a''$ et $b''$ ne dépendent que de $s_1$. Un changement de variable

---

[1] Ce ne sont pas les considérations préliminaires qui font l'objet de ce numéro que nous considérons comme neuves, mais bien les calculs développés dans les numéros suivants.

permettra toujours de mettre la seconde de ces deux équations sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = 0;$$

d'où

$$u = s_1 \Phi_1(t) + \Phi_2(t),$$

$\Phi_1$ et $\Phi_2$ étant deux fonctions arbitraires du temps seul.

Substituant dans (2), il vient

$$(3) \qquad b'_1 \Phi_1(t) = s_1 \Phi'_1(t) + \Phi'_2(t).$$

Il est évident que le déterminant suivant, où $(b')^{(m)}$ $s_1^{(m)}$ désignent les valeurs de $b_1$ et de $s_1$ pour $s_1 = s_1^{(m)}$, doit être nul

$$\begin{vmatrix} (b')^{(1)} & s_1^{(1)} & 1 \\ (b')^{(2)} & s_1^{(2)} & 1 \\ b' & s_1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

car il viendrait autrement

$$u = \text{const.}$$

Il faudra par conséquent avoir

$$b' = c_1 s_1 + c_2,$$

$c_1$ et $c_2$ étant des constantes.

L'équation (3) devient maintenant

$$s_1[c_1\Phi_1(t) - \Phi'_1(t)] + c_2\Phi_1(t) - \Phi'_2(t) = 0;$$

il en résulte

$$\Phi_1 = e^{c_1 t},$$

$$\Phi_2 = \frac{c_2}{c_1} e^{c_1 t},$$

$$u = \left(s_1 + \frac{c_2}{c_1}\right) e^{c_1 t},$$

ou, plus simplement,

$$(4) \qquad u = s_1 e^{c_1 t}.$$

Si l'on suppose, ainsi que nous allons le faire, que l'équation du mouvement de la chaleur en coordonnées rectangulaires $x_1$, $x_2$, $x_3$ soit la suivante

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = k\frac{\partial u}{\partial t},$$

$k$ étant une constante, il suffira de donner une valeur arbitraire à la constante $c_1$ dans (4) et de déterminer $s_1$ par l'équation

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2} = k\, c_1 s_1,$$

pour obtenir la solution qui correspond au cas où (1) se décompose en deux équations.

4. Nous passons à l'étude bien moins simple du cas où les fonctions $a$ et $e$ ne dépendent que de la seule variable $s_1$. Comme l'équation (1) du nº 3 doit se déduire de la transformée de (5) quand on y remplace les variables $x_1$, $x_2$ et $x_3$, par $s_1$, $s_2$ et $s_3$ on est conduit à chercher toutes les solutions communes aux équations

$$(6) \qquad a = \mathrm{E}(s_1) = \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right)^2 = \mathrm{f}(s_1),$$

$$(7) \qquad e = \Delta(s_1) = \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2} = f(s_1),$$

où $f(s_1)$ et $\mathrm{f}(s_1)$ sont deux fonctions entièrement inconnues de la variable $s_1$. Voici en quelques mots la marche suivie par M. Weber.

Ayant fait observer qu'un changement de fonction permettra de rendre $f(s_1) = 0$, il détermine, en employant la transformation de Legendre, l'intégrale générale de (6) pour y déterminer ensuite les éléments arbitraires de manière à satisfaire à l'équation

$$\Delta(s_1) = 0.$$

Nous allons garder au contraire les équations (6) et (7) sous leur forme actuelle, ce qui, sans compliquer le calcul, nous fera peut-être gagner en clarté.

Voici l'idée que nous allons appliquer dans cette recherche. Il est évident *a priori* que les rapports

$$(8) \qquad \psi_1 = \frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}, \qquad \psi_2 = \frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}} \text{ [1]}$$

---

[1] Il va sans dire que l'on fait implicitement l'hypothèse $\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2} \neq 0$; mais il n'y a rien de restrictif en ceci, puisque, s'il existe une fonction $s_1$ répondant à la question, il faut bien que l'une au moins de ses dérivées ne soit pas nulle.

doivent contenir justement ce qu'il y a de caractéristique dans la fonction $s_1$, puisqu'ils jouissent de la propriété d'invariance relativement à une substitution de la forme

$$s_1 = \mathrm{F}(t_1),$$

$t_1$ étant une nouvelle fonction, et que par suite l'introduction de $\psi_1$ et de $\psi_2$ doit être équivalente à une transformation des équations (6) et (7) en une forme se laissant le plus facilement traiter.

C'est donc $\psi_1$ et $\psi_2$ que nous allons introduire dans les équations du problème, qui peuvent s'écrire ainsi

$$(9)\qquad \frac{\dfrac{\partial[\mathrm{E}(s_1)]}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial[\mathrm{E}(s_1)]}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{\partial[\mathrm{E}(s_1)]}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}},$$

$$(10)\qquad \frac{\dfrac{\partial[\Delta(s_1)]}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}} = \frac{\dfrac{\partial[\Delta(s_1)]}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}} = \frac{\dfrac{\partial[\Delta(s_1)]}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}}.$$

La solution évidente $s_1 = \text{const.}$ étant écartée, le *crochet* des deux équations (8) doit être une combinaison linéaire de ces deux équations. Or il vient

$$\left(\psi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_1} = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$(11)\qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \psi_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \psi_1 \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}.$$

Si l'on effectue les opérations indiquées dans les équations (9) et que l'on retranche de chaque membre la quantité $\Delta(s_1)$, on pourra les écrire comme il suit

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}}\right)\right] &= \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}}\right)\right] \\ &= \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}\right)\right].\end{aligned}$$

Les quantités $\psi_1$ et $\psi_3$ étant introduites dans ces équations, on trouve immédiatement

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = 0, \\ &\psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit de transformer maintenant les équations (10) de manière qu'elles ne contiennent plus que les fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$. Observons dans ce but que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta(s_1) = \Delta\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_i}\right)$$

et remplaçons dans (10) $\frac{\partial s_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial s_1}{\partial x_3}$ par $\psi_1 \frac{\partial s_1}{\partial x_2}$ et $\psi_2 \frac{\partial s_1}{\partial x_2}$; il vient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \Delta(\psi_1)\frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 0, \\ &2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \Delta(\psi_2)\frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}\right.$$

On déduit d'ailleurs des équations (8)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \psi_1 \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}, \\ &\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \psi_1 \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} \quad = \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\psi_1^2 \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} = -\left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2}$$

et, pareillement,

$$\psi_2^2 \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2} = -\left(\psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2}.$$

Ajoutons ces équations membre à membre et employons (7); il vient

$$(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2)\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} = f(s_1) - \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2}.$$

On trouve ensuite, non moins aisément, en réduisant les résultats au moyen de (11) et de (12),

$$\begin{aligned} &(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2)\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \psi_1 f(s_1) - \left(\psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + 2\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2}, \\ &(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2)\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2 \partial x_3} = \psi_2 f(s_1) - \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + 2\psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

On remarque tout d'abord, en substituant ces valeurs des dérivées secondes de $s_1$ dans (13), que $f(s_1)$ ne figurera pas dans le résultat, à cause de (12); puis, après avoir fait quelques autres réductions fort simples, on arrive aisément aux équations que voici :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\frac{\partial\psi_1}{dx_1}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

La question est donc ramenée à déterminer toutes les solutions communes des cinq équations (11), (12) et (14).

5. Les équations (12) s'intègrent immédiatement; il vient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &F_1(x_1-\psi_1 x_2,\ x_3-\psi_2 x_2,\ \psi_1,\ \psi_2)=0,\\ &F_2(x_1-\psi_1 x_2,\ x_3-\psi_2 x_2,\ \psi_1,\ \psi_2)=0,\end{aligned}\right.$$

$F_1$ et $F_2$ étant deux fonctions arbitraires. Nous allons supposer d'abord que l'on puisse résoudre ces équations par rapport à $x_1-\psi_1 x_2$ et $x_3-\psi_2 x_2$, en nous réservant de traiter plus tard le cas où cela n'a pas lieu; la chose n'offrira d'ailleurs aucune difficulté.

Nous poserons, en conséquence,

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &x_1-\psi_1 x_2=P_1(\psi_1,\psi_2),\\ &x_3-\psi_2 x_2=P_2(\psi_1,\psi_2),\end{aligned}\right.$$

$P_1$ et $P_2$ étant deux fonctions arbitraires de $\psi_1$ et de $\psi_2$. On déduit de (16), en posant

$$D=\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}-\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}+\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)x_2+x_2^2=M-Nx_2+x_2^2,$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}=\frac{1}{D}\left(x_2-\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right), && \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}=\frac{1}{D}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1},\\ &\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}=\frac{1}{D}\left(\psi_1\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}-\psi_1 x_2\right), && \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=\frac{1}{D}\left(\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}-\psi_1\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}-\psi_2 x_2\right),\\ &\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}=\frac{1}{D}\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}, && \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}=\frac{1}{D}\left(x_2-\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right).\end{aligned}\right.$$

Portant ces valeurs dans (11), on trouve que les termes en $x_2$ se détruisent, et il vient

$$(18)\qquad (1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}+\psi_1\psi_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}=(1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}+\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}.$$

Il est aisé de trouver les expressions les plus générales de $P_1$ et de $P_2$ qui satisfont à cette équation; on démontre, en effet, qu'il suffit de poser

$$P_1=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}(1+\psi_1^2)+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\psi_1\psi_2\right]\sqrt{1+\psi_1^2+\psi_2^2},$$

$$P_2=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\psi_1\psi_2+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}(1+\psi_2^2)\right]\sqrt{1+\psi_1^2+\psi_2^2},$$

où $\varphi$ est une fonction arbitraire de $\psi_1$ et de $\psi_2$; mais il n'y a pas lieu d'insister là-dessus, parce qu'il est plus simple de garder l'équation (18) au lieu d'employer ces expressions.

Chacune des équations (14) étant transformée au moyen des formules (17), on trouve que les termes en $x_2^4$ disparaissent, et l'on obtient deux polynômes du troisième degré en $x_2$ dont les coefficients ne dépendent que de $\psi_1$ et $\psi_2$. Les variables $\psi_1$, $\psi_2$ et $x_2$ étant indépendantes, chaque coefficient devra être nul par lui-même, ce qui nous fournira huit équations qui détermineront les fonctions $P_1$ et $P_2$.

Nous communiquerons ce calcul, très élémentaire mais un peu long en détail, afin de faciliter la vérification.

Faisons d'abord la remarque suivante, qui fournit un moyen de vérification très utile : si l'on change dans les trois premières équations (17) $\psi_1$ en $\psi_2$ et $P_1$ en $P_2$, $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}$ se transforme en $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}$, $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}$ en $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}$ et $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}$ en $\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}$; d'autre part, si l'on change dans la première des équations (14) $\psi_1$ en $\psi_2$, elle se transforme en la seconde, qui ne change pas quand on y change $x_1$ et $x_3$; il résulte de ceci que les coefficients des puissances de $x_2$ dans les transformées des équations (14) doivent se déduire les uns des autres par la permutation des lettres $\psi_1$, $\psi_2$ et de $P_1$, $P_2$.

Voici ce que l'on trouve, en posant $Q=1+\psi_1^2+\psi_2^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_2-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}}{Q.D}\right)\\&=\frac{\left\{-QD\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_1\partial\psi_2}-\left(x_2-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)\left[\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_1}-x_2\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_1}+x_2^2\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_1}\right]\right\}\left(x_2-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)}{Q^2D^3}\\&+\frac{\left\{-QD\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_2^2}-\left(x_2-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)\left[\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_2}-x_2\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_2}+x_2^2\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_2}\right]\right\}\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_1}}{Q^2D^3},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}-\psi_1 x_2}{QD}\right)$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\Big\{QD\dfrac{\partial}{\partial\psi_2}\left(\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right)-\left(\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}-\psi_1 x_2\right)\\ \qquad\times\left[\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_2}-x_2\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_2}+x_2^2\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_2}\right]\Big\}\left(\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}-\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_1}-\psi_2 x_2\right)\end{array}\right\}}{Q^2D^3}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}\Big\{QD\left[\dfrac{\partial}{\partial\psi_1}\left(\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right)-x_2\right]-\left(\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}-\psi_1 x_2\right)\\ \qquad\times\left[\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_1}-x_2\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_1}+x_2^2\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_1}\right]\Big\}\left(\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}-\psi_1 x_2\right)\end{array}\right\}}{Q^2D^3}$$

$$+\frac{QD\left[-\psi_1 D-\left(\psi_1\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}-\psi_1 x_2\right)(-N+2x_2)\right]}{Q^2D^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}}{QD}\right)$$

$$=\frac{\left\{QD\dfrac{\partial^2P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}-\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\left[\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_1}-x_2\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_1}+\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_1}x_2^2\right]\right\}\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}}{Q^2D^3}$$

$$+\frac{\left\{QD\dfrac{\partial^2P_1}{\partial\psi_2^2}-\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\left[\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_2}-x_2\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_2}+x_2^2\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_2}\right]\right\}\left(x_2-\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)}{Q^2D^3}$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\Big\{-QM\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_2\,\partial\psi_1}+\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_1}+\left[QN\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_1}-\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_1}\right]x_2\\ \qquad+\left[-Q\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}+\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_1}+\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_1}\right]x_2^2-\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_1}x_2^3\Big\}\left(x_2-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)\end{array}\right\}}{Q^2D^3}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}\Big\{-QM\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_2^2}+\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_2}+\left[QN\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_2^2}-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_2}-\dfrac{\partial(MQ)}{\partial\psi_2}\right]x_2\\ \qquad+\left[-Q\dfrac{\partial^2P_2}{\partial\psi_2^2}+\dfrac{\partial(NQ)}{\partial\psi_2}+\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_2}\right]x_2^2-\dfrac{\partial Q}{\partial\psi_2}x_2^3\Big\}\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\end{array}\right\}}{Q^2D^3}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)\\
&= \frac{1}{Q^2 D^3}\Bigg\{ QM \frac{\partial}{\partial \psi_1}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) - \left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) \frac{\partial (QM)}{\partial \psi_1}\\
&\qquad + \left[ -QM - QN \frac{\partial}{\partial \psi_1}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) + \psi_1 \frac{\partial (QM)}{\partial \psi_1} + \left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) \frac{\partial (NQ)}{\partial \psi_1}\right] x_2\\
&\qquad + \left[ QN + Q \frac{\partial}{\partial \psi_1}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) - \psi_1 \frac{\partial (NQ)}{\partial \psi_1} - \frac{\partial Q}{\partial \psi_1}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right)\right] x_2^2\\
&\qquad\qquad + \left(-Q + \psi_1 \frac{\partial Q}{\partial \psi_1}\right) x_2^3 \Bigg\}\\
&\qquad \times \left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2} - \psi_1 x_2\right)\\
&\quad + \frac{1}{Q^2 D^3}\Bigg\{ QM \frac{\partial}{\partial \psi_2}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) - \left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) \frac{\partial (MQ)}{\partial \psi_2}\\
&\qquad + \left[ -QN \frac{\partial}{\partial \psi_2}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) + \psi_1 \frac{\partial (MQ)}{\partial \psi_2} + \left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) \frac{\partial (NQ)}{\partial \psi_2}\right] x_2\\
&\qquad + \left[ Q \frac{\partial}{\partial \psi_2}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) - \frac{\partial Q}{\partial \psi_2}\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) - \psi_1 \frac{\partial (NQ)}{\partial \psi_2}\right] x_2^2 + \psi_1 \frac{\partial Q}{\partial \psi_2} x_2^3 \Bigg\}\\
&\qquad \times \left(\psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_1} - \psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_1} - \psi_2 x_2\right)\\
&\qquad + \frac{QD\left[ -\psi_1 M + N\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) - 2\left(\psi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} - \psi_2 \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) x_2 + \psi_1 x_2^2\right]}{Q^2 D^3},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_3}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right)\\
&= \frac{\left\{ QM \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} - \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2} \dfrac{\partial (MQ)}{\partial \psi_1} + \left[ -QN \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} + \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2} \dfrac{\partial (NQ)}{\partial \psi_1}\right] x_2 + \left(Q \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} - \dfrac{\partial Q}{\partial \psi_1} \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right) x_2^2 \right\} \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2}}{Q^2 D^3}\\
&\quad + \frac{\left(\begin{array}{l} \left\{ QM \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_2^2} - \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2} \dfrac{\partial (MQ)}{\partial \psi_2} + \left[ -QN \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_2^2} + \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2} \dfrac{\partial (NQ)}{\partial \psi_2}\right] x_2 \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(Q \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_2^2} - \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_2} \dfrac{\partial Q}{\partial \psi_2}\right) x_2^2 \right\} \left(x_2 - \dfrac{\partial P_1}{\partial \psi_1}\right) \end{array}\right)}{Q^2 D^3}.
\end{aligned}
$$

Je crois inutile de transcrire les expressions correspondantes relatives à la seconde des équations (14); elles se déduisent d'ailleurs, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer, de celles-ci, en changeant $P_1$ en $P_2$, $\psi_1$ en $\psi_2$ et $x_1$ en $x_3$. Je fais encore les deux observations suivantes avant de communiquer les résultats définitifs : 1° les termes du premier ordre relativement aux dérivées de $P_1$ et de $P_2$ par rapport à $\psi_1$ et $\psi_2$ disparaissent tous dans les coefficients des diverses puissances de $x_2$ en vertu de l'équation (18); 2° voici l'ordre qu'il convient de suivre dans le calcul des coefficients des puissances de $x_2$, afin de pouvoir les réduire en faisant usage de ceux que l'on aura déjà calculés : il faut commencer par calculer le coefficient de $x_2^3$ (celui de $x_2^4$ est, ainsi qu'il a été déjà dit, nul par lui-même), puis celui de $x_2^2$, et alors c'est celui de $x_2^0$ qu'il convient de déterminer avant celui de $x_2$. On arrive de la sorte aux équations suivantes, que nous écrivons dans l'ordre qui vient d'être indiqué pour leur calcul. La première des équations (14) donne

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+\psi_1^2)\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2} + 2\psi_1\psi_2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2} + (1+\psi_2^2)\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2^2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2}\left[\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2} - (1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right]\\ &\quad + \frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\left[\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}(1+\psi_1^2) + \frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}(1+\psi_2^2)\right]\\ &\qquad + \frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2^2}\left[\psi_1\psi_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} - (1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right] = 0,\\ &T_1\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2} + T_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2} = 0, \end{aligned}\right.$$

$T_1$ et $T_2$ ayant des valeurs que nous communiquerons tout à l'heure.

On déduit pareillement de la seconde des équations (14)

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+\psi_1^2)\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1^2} + 2\psi_1\psi_2\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2} + (1+\psi_2^2)\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_2^2} = 0,\\ &\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1^2}\left[\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2} - (1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right]\\ &\quad + \frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\left[\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}(1+\psi_1^2) + \frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}(1+\psi_2^2)\right]\\ &\qquad + \frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_2^2}\left[\psi_1\psi_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} - (1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right] = 0,\\ &T_1\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1} + T_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que l'on aura

$$T_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad T_2 = 0,$$

à moins qu'il n'existe la relation

$$(21)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial \psi_2}-\frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial \psi_1}=0.$$

Je dis que cette relation ne peut avoir lieu que si $P_1$ et $P_2$ sont des constantes. Il en résulte, en effet,

$$P_2=\Phi(P_1),$$

ce qui donne, en substituant dans la seconde des équations (20) et en ayant égard à la seconde des équations (19),

$$\begin{aligned}\Bigg\{\left(\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}\right)^2&[\psi_1\psi_2-(1+\psi_1^2)\Phi']\frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\\ &+\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}\frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\left[(1+\psi_1^2)\Phi'\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}+(1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right]\\ &\qquad+\left(\frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}\right)^2[\psi_1\psi_2\Phi'-(1+\psi_2^2)]\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}\Bigg\}\Phi''=0.\end{aligned}$$

Soit d'abord $\Phi''\neq 0$. Il vient, après quelques réductions,

$$\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}+\Phi'\frac{\partial P_1}{\partial \psi_2}=0$$

ou bien

$$\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1}+\frac{\partial P_2}{\partial \psi_2}=0.$$

On peut, par conséquent, poser

$$P_1=\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2},\qquad P_2=-\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1},$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\psi_1$ et de $\psi_2$. Substituons ces expressions dans (18), il vient

$$(22)\qquad (1+\psi_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \psi_1^2}+2\psi_1\psi_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \psi_1\,\partial \psi_2}+(1+\psi_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \psi_2^2}=\lambda(\varphi)=0.$$

Or il faut que la fonction $\varphi$ satisfasse encore aux équations suivantes à cause des premières équations des systèmes (19) et (20)

$$(23)\qquad \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1}\right)=0,\qquad \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2}\right)=0.$$

On déduit, par dérivation de (22) en ayant égard à (23),

$$\psi_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = 0,$$

$$\psi_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_2^2} + \psi_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = 0;$$

puis, en combinant avec (22),

$$(1 - \psi_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1^2} + (1 + \psi_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_2^2} = 0,$$

$$(1 + \psi_1^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1^2} + (1 - \psi_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_2^2} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi_2^2} = 0,$$

ce qui donne

$$P_1 = \text{const.}, \qquad P_2 = \text{const.}$$

Soit maintenant $\Phi'' = 0$. On pourra poser

$$P_2 = CP_1 + C',$$

C et C' étant des constantes. L'équation (18) donne alors

$$(24) \qquad [\psi_1 \psi_2 - C(1 + \psi_1^2)] \frac{\partial P_1}{\partial \psi_1} + [(1 + \psi_2^2) - C\psi_1 \psi_2] \frac{\partial P_1}{\partial \psi_2} = 0.$$

On en déduit aisément

$$P_1 = \chi\left(\frac{\psi_1 + C\psi_2}{\sqrt{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}}\right)$$

et

$$P_2 = C\chi\left(\frac{\psi_1 + C\psi_2}{\sqrt{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}}\right) + C',$$

$\chi$ étant une fonction arbitraire.

On pourrait substituer ces valeurs dans les équations (19); mais on arrive plus vite au but en remarquant que l'on peut exprimer maintenant les coefficients des dérivées secondes de $P_1$ dans la seconde des équations (19) au moyen de $\psi_1$ et de $\psi_2$; il vient, en supprimant un facteur commun,

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} &[\psi_1 \psi_2 - C(1 + \psi_1^2)]^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_1^2} + [C\psi_1 \psi_2 - (1 + \psi_2^2)]^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_2^2} \\ &\quad + \{[1 + \psi_2^2 + C^2(1 + \psi_1^2)]\psi_1 \psi_2 - 2C(1 + \psi_1^2)(1 + \psi_2^2)\} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Il vient enfin, en différentiant (24),

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\psi_1\psi_2 - C(1+\psi_1^2)]\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2} \\
&\qquad + [(1+\psi_2^2) - C\psi_1\psi_2]\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2} + (\psi_2 - 2C\psi_1)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1} - C\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2} = 0, \\
&[\psi_1\psi_2 - C(1+\psi_1^2)]\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2} \\
&\qquad + [(1+\psi_2^2) - C\psi_1\psi_2]\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2^2} + \psi_1\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1} + (2\psi_2 - C\psi_1)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

La première des équations (19) et les équations (24), (25) et (26) établissent cinq relations linéaires et homogènes entre les cinq quantités $\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2}$, $\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}$, $\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2}$, $\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}$ et $\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}$. Le déterminant de ces équations n'étant pas nul, on trouve cette fois encore

$$P_1 = \text{const.}, \qquad P_2 = \text{const.}$$

Ces valeurs de $P_1$ et de $P_2$ correspondent à une solution du problème contenue dans une autre plus générale; il n'y a donc pas lieu d'insister sur ce sujet.

Nous sommes donc conduits à poser

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2}\left[(1+\psi_1^2)\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)^2 - 2\psi_1\psi_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2} + (1+\psi_2^2)\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right)^2\right] \\
&\quad + 2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\left[\psi_1\psi_2\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1} + \frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\right) - (1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} - (1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right] \\
&\qquad + \frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2^2}\left[(1+\psi_1^2)\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\right)^2 - 2\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} + (1+\psi_2^2)\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)^2\right] = 0
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1^2}\left[(1+\psi_1^2)\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)^2 - 2\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2} + (1+\psi_2^2)\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right)^2\right] \\
&\quad + 2\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\left[\psi_1\psi_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2} + \frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\right) - (1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} - (1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right] \\
&\qquad + \frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_2^2}\left[(1+\psi_1^2)\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\right)^2 - 2\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1} + (1+\psi_2^2)\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)^2\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

C'est maintenant qu'il convient de calculer les coefficients de $x_2$ dans les transformées des équations (14). Cela donne

$$(29)\quad \begin{cases} (1+\psi_2^2)\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_2^2} \\ \quad + 2\psi_1\psi_2\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}+\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)\left(\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}-\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\right)=0, \\ (1+\psi_1^2)\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2} \\ \quad + 2\psi_1\psi_2\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}+\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}-\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\right)=0. \end{cases}$$

Nous avons à chercher les solutions les plus générales des équations (18), (19), (20), (27), (28) et (29).

Retranchons de l'équation (27) la première des équations (19) multipliée par $\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}+\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_1}$; il vient, en réduisant les coefficients des dérivées secondes de $P_1$ au moyen de (18),

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2}\left[(1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)-\psi_1\psi_2\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}+\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)\right] \\ &\quad -2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}\left[(1+\psi_1^2)\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}+(1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_1}{\partial\psi_2}\right] \\ &\quad +\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2^2}\left[(1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}-\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)-\psi_1\psi_2\frac{\partial P_2}{\partial\psi_1}\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}+\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)\right]=0. \end{aligned}$$

Ajoutons à cette équation la seconde des équations (19) multipliées par $\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}+\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}$.

Il vient, en transformant le coefficient de $\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}$ au moyen de (18),

$$2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1^2}(1+\psi_1^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\psi_1\psi_2\left(\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}-\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\right)^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}+2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_2^2}(1+\psi_2^2)\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}=0.$$

Retranchons enfin de celle-ci la première des équations (19) multipliée par $2\dfrac{\partial P_1}{\partial\psi_1}\dfrac{\partial P_2}{\partial\psi_2}$; on trouve

$$\psi_1\psi_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}+\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}=0.$$

On déduit d'une manière analogue

$$\psi_1\psi_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial\psi_1}+\frac{\partial P_2}{\partial\psi_2}\right)^2\frac{\partial^2 P_2}{\partial\psi_1\,\partial\psi_2}=0.$$

L'hypothèse

$$\frac{\partial P_1}{\partial \psi_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \psi_2} = 0,$$

conduit, par un raisonnement identique à celui de la page 14, aux solutions

$$P_1 = \text{const.}, \qquad P_2 = \text{const.}$$

Nous poserons, en conséquence,

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial \psi_1 \, \partial \psi_2} = \frac{\partial^2 P_2}{\partial \psi_1 \, \partial \psi_2} = 0.$$

Le reste de la discussion s'achève avec la plus grande facilité en considérant les équations (29), les premières équations des systèmes (19) et (20) et l'équation (18).

On trouve finalement

$$P_1 = a_1 - a_2 \psi_1,$$
$$P_2 = a_3 - a_2 \psi_2,$$

$a_1$, $a_2$ et $a_3$ étant des constantes arbitraires. Les équations (16) donnent

$$\psi_1 = \frac{x_1 - a_1}{x_2 - a_2},$$
$$\psi_2 = \frac{x_3 - a_3}{x_2 - a_2}.$$

Il résulte de là que $s_1$ ne peut qu'être, dans l'hypothèse de la résolubilité des équations (15) par rapport à $x_1 - \psi_1 x_2$ et $x_3 - \psi_2 x_2$, une fonction de $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2$, c'est-à-dire

$$s_1 = \Phi[(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2]. \tag{30}$$

5. Il nous reste à étudier le cas où les équations (15) ne pourraient pas être résolues par rapport aux quantités $x_1 - \psi_1 x_2$ et $x_3 - \psi_2 x_2$. Cela ne peut se présenter que lorsque ces équations sont de la forme suivante :

$$F_1[F_2(x_1 - \psi_1 x_2, x_3 - \psi_2 x_2, \psi_1, \psi_2), \psi_1, \psi_2] = 0,$$
$$F_2(x_1 - \psi_1 x_2, x_3 - \psi_2 x_2, \psi_1, \psi_2) = 0.$$

Or ces équations peuvent être remplacées par celles-ci

$$\begin{cases} \psi_2 = f(\psi_1), \\ \psi_1 = F(x_1 - \psi_1 x_2, x_3 - \psi_2 x_2). \end{cases} \tag{31}$$

On reconnaît immédiatement qu'en faisant abstraction de la solution évidente $\psi_1 = \text{const.}$, $\psi_2 = \text{const.}$ et en se bornant à considérer les valeurs réelles de $\psi_1$ et de $\psi_2$, les seules qui semblent offrir de l'intérêt, il n'y a qu'une relation linéaire entre $\psi_1$ et $\psi_2$ qui puisse avoir lieu. Substituons en effet la valeur (31) de $\psi_2$ dans la seconde des équations (14); il vient, en tenant compte de la première d'entre elles,

$$\frac{f''}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\left[\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}\right)^2\right]=0.$$

Nous devrons donc poser

$$\psi_2 = C\psi_1 + C', \tag{32}$$

C et C′ étant des constantes. Il suffit de se rappeler la définition de $\psi_1$ et de $\psi_2$, donnée par les équations (8), pour en déduire

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - C\frac{\partial s_1}{\partial x_1} - C'\frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 0.$$

Il n'y a qu'à changer la direction des axes pour que cette équation se transforme en

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_3} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\psi_2 = 0.$$

L'équation (11) devient alors

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} = 0$$

et la seconde des équations (31) nous donne

$$\psi_1 = F(x_1 - \psi_1 x_2)$$

ou bien

$$x_1 - \psi_1 x_2 = f(\psi_1); \tag{33}$$

d'où

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{f'(\psi_1)+x_2}, \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \frac{-\psi_1}{f'(\psi_1)+x_2}.$$

Il nous reste la première des équations (14) à satisfaire; or on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{(1+\psi_1^2)(f'+x_2)}\right] = -\frac{(f'+x_2)2\psi_1+(1+\psi_1^2)f''}{(1+\psi_1^2)^2(f'+x_2)^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\psi_1}{(1+\psi_1^2)(f'+x_2)}\right]$$
$$= \frac{(1+\psi_1^2)(f'+x_2)-\psi_1[2\psi_1(f'+x_2)+(1+\psi_1^2)f'']}{(1+\psi_1^2)^2(f'+x_2)^3}\psi_1 + \frac{\psi_1}{(1+\psi_1^2)(f'+x_2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}}{1+\psi_1^2+\psi_2^2}\right) = 0.$$

La transformée de (14) devient, après la suppression des termes qui se détruisent,

$$-(1+\psi_1^2)^2 f'' = 0,$$

ce qui entraîne

$$f'' = 0$$

et

$$f(\psi_1) = a_1 - a_2\psi_1,$$

$a_1$ et $a_2$ étant des constantes arbitraires. L'équation (33) nous donne

$$\psi_1 = \frac{x_1-a_1}{x_2-a_2},$$

et nous aurons, par conséquent,

$$s_1 = \Phi[(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2], \tag{34}$$

$\Phi$ étant une fonction arbitraire. On conclut de tout ce qui a été développé dans ces deux derniers numéros que les familles de surfaces $s_1 =$ const., $s_1$ étant une fonction qui satisfait simultanément à deux équations telles que (6) et (7), ne peuvent qu'être des sphères concentriques, des cylindres à base circulaire ayant le même axe ou enfin des plans parallèles entre eux.

6. Il est aisé maintenant d'écrire les équations aux dérivées partielles qui serviront dans chaque cas à déterminer la température $u$ en fonction de $s_1$ et du temps $t$. Soit d'abord $s_1$ une fonction linéaire de $x_1$, $x_2$ et $x_3$,

l'équation (1) du n° 3 donne alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = k\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{35}$$

$k$ étant une constante. Si l'on posait, en second lieu,

$$s_1 = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$$

ou bien

$$s_1 = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2},$$

il viendrait, dans le premier cas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{2}{s_1}\frac{\partial u}{\partial s_1} = k\frac{\partial u}{\partial t} \tag{36}$$

et dans le second

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{1}{s_1}\frac{\partial u}{\partial s_1} = k\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{37}$$

où il est à remarquer que la première de ces équations peut être ramenée à la forme (35), qui est bien connue dans la théorie mathématique de la conductibilité; elle peut en effet s'écrire ainsi

$$\frac{\partial_2(us_1)}{\partial s_1^2} = k\frac{\partial(us_1)}{\partial t} \quad (^1).$$

L'objet de ce Chapitre est complètement épuisé, puisque toutes les formes possibles de la fonction $s_1$ ont été déterminées et les équations différentielles devant donner $u$ en fonction de $s_1$ et de $t$ déduites.

## III.

### Propriétés caractéristiques de l'équation de mouvement de la chaleur en coordonnées arbitraires.

7. Le point de départ de nos recherches devant être, comme on le sait déjà, l'équation de mouvement de la chaleur transformée par l'introduction des variables $s_1$, $s_2$ et $s_3$ au lieu des coordonnées rectangulaires et

(1) Riemann, *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, p. 152.

rectilignes $x_1$, $x_2$ et $x_3$, on conçoit que l'étude des coefficients de la transformée, considérés comme fonctions de $s_1$, $s_2$ et $s_3$, constitue un préliminaire indispensable.

Ce sujet se trouve traité par Riemann, dans le Mémoire qui nous sert de base, avec toute la généralité qu'il comporte; nous devrons nous borner, par conséquent, à reproduire les considérations du célèbre géomètre en les complétant par la démonstration d'une proposition qu'il se contente de supposer implicitement.

8. Voici la proposition dont nous venons de parler : désignons par

$$(1)\qquad \sum_{(k,h)} a_{k,h}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_h}\quad (a_{kh}=a_{hk})\quad (k,h=1,2,3,\ldots,n)$$

l'ensemble des termes du second ordre d'une équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre par rapport aux $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les quantités $a_{kh}$ n'étant fonctions que de ces $n$ variables (cette restriction est nécessaire parce que nous n'excluons pas le cas où des dérivées de $u$ par rapport à d'autres variables figureraient aussi dans l'équation considérée).

Soient, de plus,

$$(2)\qquad \sum_{(p,q)} b_{p,q}\frac{\partial^2 u}{\partial s_p\,\partial s_q}\quad (b_{p,q}=b_{q,p}),\quad (p,q=1,2,3,\ldots,n)$$

les termes du second ordre dans le résultat de la transformation de l'expression (1) par le changement des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$ et $x_n$ en $s_1, s_2, \ldots$ et $s_n$. Posons, en outre,

$$\alpha_{\nu\mu}=(-1)^{\nu+\mu}\,|a_{ik}|\qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,\nu-1,\ \nu+1,\ldots,n\\ k=1,2,\ldots,\mu-1,\ \mu+1,\ldots,n\end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{D(s_1,\ldots,s_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\right]^2\beta_{lm}=(-1)^{l+m}\,|b_{rs}|\qquad \begin{pmatrix} r=1,2,\ldots,l-1,\ l+1,\ldots,n\\ s=1,2,\ldots,m-1,\ m+1,\ldots,n\end{pmatrix},$$

et considérons enfin les deux formes différentielles

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{(\nu,\mu)}\alpha_{\nu\mu}\,dx_\nu\,dx_\mu \quad\text{et}\quad \sum_{(l,m)}\beta_{lm}\,ds_l\,ds_m \qquad (\nu,\mu,l,m=1,2,3,\ldots,n),\\ \qquad \alpha_{\nu\mu}=\alpha_{\mu\nu},\qquad \beta_{lm}=\beta_{ml}.\end{array}\right.$$

Nous nous proposons de montrer que la seconde de ces deux formes n'est que la transformée de la première quand on y remplace les $dx_\nu$ par leurs expressions au moyen des $ds_m$.

On a, en effet,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{(i)} \frac{\partial u}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h} = \sum_{(i,r)} \frac{\partial^2 u}{\partial s_i \partial s_r} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \frac{\partial s_r}{\partial x_h} + \sum_{(i)} \frac{\partial u}{\partial s_i} \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_k \partial x_h};$$

d'où

$$\sum a_{kh} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k d x_h} = \sum_{i,r} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial s_i \partial s_r} \left( \sum_{k,h} a_{kh} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \frac{\partial s_r}{\partial x_h} \right) \right]$$

$$+ \text{ des termes du premier ordre.}$$

Nous avons, par conséquent,

$$b_{ir} = \sum_{(k,h)} a_{kh} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \frac{\partial s_r}{\partial x_h} \qquad (k, h = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Le théorème de Cauchy-Binet donne

$$(-1)^{l+m} \left[ \frac{D(s_1, \ldots, s_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \right]^2 \beta_{lm} = \left| \sum_{(k,h)} a_{kh} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \frac{\partial s_r}{\partial x_h} \right|$$

$$= \left| \sum_{(k)} \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \sum_{(h)} a_{kh} \frac{\partial s_r}{\partial x_h} \right) \right|$$

$$= \sum_{\nu} \left( \left| \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \right| \cdot \left| \sum_{(h)} a_{kh} \frac{\partial s_r}{\partial x_h} \right| \right) = \sum_{\nu} \left[ \left| \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \right| \cdot \sum_{\mu} \left( |a_{kh}| \cdot \left| \frac{\partial s_r}{\partial x_h} \right| \right) \right]$$

$$= \sum_{\nu,\mu} |a_{k,h}| \cdot \left| \frac{\partial s_i}{\partial x_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial s_r}{d x_h} \right|$$

$$\left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, \quad l-1, \quad l+1, \ldots, n \\ r = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, \quad \nu - 1, \quad \nu + 1, \ldots, n \\ h = 1, 2, \ldots, \quad \mu - 1, \quad \mu + 1, \ldots, n \\ \nu, \mu = 1, 2, \ldots, n \end{array} \right).$$

En d'autres termes,

$$\beta_{l,m} = (-1)^{l+m} \left[ \frac{D(s_1, \ldots, s_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \right]^{-2}$$

$$\times \sum_{\nu,\mu} (-1)^{\nu+\mu} \alpha_{\nu,\mu} \frac{D(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, \ldots, s_n)}{D(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)} \frac{D(s_1, \ldots, s_{m-1}, s_{m+1}, \ldots, s_n)}{D(x_1, \ldots, x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n)}.$$

On tire, d'autre part, des équations

$$ds_i = \sum_{(r)} \frac{\partial s_i}{\partial x_r} dx_r,$$

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial s_l} = (-1)^{\nu+l} \frac{\mathrm{D}(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, \ldots, s_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)} : \frac{\mathrm{D}(s_1, \ldots, s_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)},$$

ce qui donne

$$\beta_{l,m} = \sum_{(\nu,\mu)} \alpha_{\nu\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial s_l} \frac{\partial x_\mu}{\partial s_m},$$

expression qui montre que l'on a bien

$$\sum \alpha_{\nu\mu}\, dx_\nu\, dx_\mu = \sum \beta_{lm}\, ds_l\, ds_m.$$

Notons tout de suite une conséquence immédiate de la proposition qui précède; elle nous sera souvent utile. Soit $n = 2$; les termes (1) se réduisent à

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

et l'on aura

$$\alpha_{11} = a_{22}, \qquad \alpha_{22} = a_{11}, \qquad \alpha_{12} = -a_{12}.$$

Or on sait que la forme quadratique

$$a_{22}\, dx_1^2 - 2 a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{11}\, dx_2^2$$

peut toujours être transformée en $2\beta_{12}\, ds_1\, ds_2$, à moins qu'elle ne soit un carré parfait, cas où elle se ramènera à $\beta_{22}\, ds_2^2$. Ceci montre qu'il est toujours possible de transformer l'expression ci-dessus, de telle sorte que le résultat ne contienne plus qu'un seul terme du second ordre $2 b_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1\, \partial s_2}$ ou bien $b_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}$ suivant que $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ est ou n'est pas différent de zéro.

9. Nous sommes en mesure maintenant de traiter l'objet principal de ce Chapitre. On sait que les données de la Physique contemporaine conduisent à admettre que les lois du flux calorifique s'expriment par une équation de la forme suivante

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{13} \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{23} \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_2} \\ &\qquad + \frac{\partial\left(a_{31} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{32} \frac{\partial u}{\partial x_2} + a_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)}{\partial x_3} = h \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

$u$ étant la température d'un point, $x_1$, $x_2$ et $x_3$ ses coordonnées rectangulaires et rectilignes et $t$ l'époque à laquelle ce point est considéré. Quant aux quantités $a_{ik}$ et $h$, elles peuvent être regardées, sans erreur sensible, comme fonctions des coordonnées indépendantes du temps et de la température, et qui vérifient la relation

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Rappelons en outre que la forme quadratique

$$\sum_{i,k} a_{ik}\alpha_i\alpha_k \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

les $\alpha_i$ étant des variables quelconques, doit nécessairement être positive. On sait, en effet, qu'en désignant par N la normale en un point $x_1$, $x_2$, $x_3$ à une surface $u =$ const. qui passe par ce point en un instant donné, on pourra représenter la quantité de chaleur rapportée à l'unité de temps et de surface qui traverse un élément de la surface $u =$ const. aux environs du point $x_1$, $x_2$, $x_3$ par l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} \Sigma a_{ik}\alpha_i\alpha_k,$$

les $\alpha_i$ étant les cosinus directeurs de N. Mais, comme en vertu de la seconde loi de la Thermodynamique la chaleur ne peut point passer d'un point où la température est moins élevée à un autre où elle l'est plus sans que ce phénomène soit contrebalancé par un autre de nature exactement opposée et invariablement lié à lui, il faut que le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$, dans l'expression citée tout à l'heure, ne puisse jamais devenir négatif, ce qui établit le fait annoncé.

Le problème proposé par l'Académie des Sciences se rapporte à un corps homogène : aussi pourrions-nous dès maintenant considérer les $a_{ik}$ comme des constantes, cas où une substitution linéaire ramènerait l'équation (4) à la forme plus simple

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = h\frac{\partial u}{\partial t},$$

$h$ étant une constante. Nous n'introduirons pourtant pas cette hypothèse particulière dans ce Chapitre, parce que le cas plus général où les $a_{ik}$ et $h$

seraient fonctions des coordonnées n'offre, dans la question qui nous occupe ici, aucune difficulté.

Observons avec Riemann que l'équation (4) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que, en désignant par $\delta u$ une variation arbitraire, mais infiniment petite de la fonction $u$, l'expression

$$\delta \int\int\int \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_1\, dx_2\, dx_3 + 2 \int\int\int h \frac{\partial u}{\partial t} \delta u\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \tag{6}$$

où les intégrales doivent être étendues à une surface fermée quelconque, ne dépende que de la valeur de $\delta u$ à cette surface. Or cette expression devient, par l'introduction des nouvelles variables indépendantes $s_1, s_2, s_3$,

$$\delta \int\int\int \sum_{\nu, \mu} b_{\nu\mu} \frac{\partial u}{\partial s_\nu} \frac{\partial u}{\partial s_\mu} ds_1\, ds_2\, ds_3 + 2 \int\int\int k \frac{\partial u}{\partial t} \delta u\, ds_1\, ds_2\, ds_3, \tag{7}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned} b_{\nu\mu} &= \frac{\displaystyle\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial s_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial s_\nu}{\partial x_k}}{\dfrac{\mathrm{D}(s_1, s_2, s_3)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)}}, \\ k &= \frac{h}{\dfrac{\mathrm{D}(s_1, s_2, s_3)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

On constate aussi que les quantités $\mathrm{A} = |a_{ik}|$ et $\mathrm{B} = |b_{ik}|$ vérifient la relation

$$\frac{h}{\mathrm{A}} = \frac{k}{\mathrm{B}}. \tag{9}$$

On conclut d'abord de ces équations que le changement de variables considéré n'altère pas la forme de l'équation (4); il résulte ensuite immédiatement de la proposition du numéro précédent que les formes $\Sigma \alpha_{ik}\, dx_i\, dx_k$ et $\Sigma \beta_{i,k}\, ds_i\, ds_k$, adjointes aux formes $\Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ et $\Sigma b_{ik}\, ds_i\, ds_k$, ne sont chacune que la transformée de l'autre. On a, en d'autres termes, la relation

$$\Sigma \alpha_{ik}\, dx_i\, dx_k = \Sigma \beta_{ik}\, ds_i\, ds_k, \tag{10}$$

qui est d'ailleurs évidemment caractéristique; elle exprime que les $\beta_{ik}$ doivent être des fonctions des $s_i$ telles, qu'il soit possible de réduire la relation (10) à une identité en déterminant convenablement les $s_i$ en fonctions des $x_k$.

Riemann a montré que les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela ait lieu pouvaient être mises sous la forme d'équations différentielles qu'il a déduites, ne contenant que les $\beta_{ik}$ et leurs dérivées relatives aux variables $s_1$, $s_2$ et $s_3$. L'étude de cette question a été reprise depuis avec détails par MM. Cristoffel et Lipschitz dans le 70e Cahier du *Journal de Crelle;* aussi croyons-nous pouvoir nous contenter de citer simplement les résultats où ils nous seront utiles. Observons seulement que les savants qui viennent d'être cités ne pouvaient profiter que des indications qui se trouvent dans le Mémoire de Riemann, intitulé : *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (p. 265 des *Œuvres complètes*), parce que le Mémoire, dont nous développons ici les idées succinctement indiquées, n'était pas publié à cette époque.

## IV.

### Le cas $m = 1$.

10. Ce cas, le seul qui ait été étudié par M. Weber, l'a été d'une manière complète; nous n'aurons par conséquent qu'à reproduire son travail en développant les calculs avec un peu plus de détails qu'il ne l'a fait.

La transformée de l'équation (4) du Chapitre précédent se réduira, en posant, pour abréger l'écriture, à

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial b_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial b_{12}}{\partial s_2} + \frac{\partial b_{13}}{\partial s_3},\\ e_2 &= \frac{\partial b_{21}}{\partial s_1} + \frac{\partial b_{22}}{\partial s_2} + \frac{\partial b_{23}}{\partial s_3}\end{aligned}\right.$$

et en égalant à zéro les dérivées de $u$ relatives à $s_3$, à

$$(2)\qquad b_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2\,b_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} + b_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + e_1\frac{\partial u}{\partial s_1} + e_2\frac{\partial u}{\partial s_2} = k\frac{\partial u}{\partial t},$$

où les rapports des coefficients ne doivent dépendre que de $s_1$ et $s_2$.

On pourrait évidemment diviser l'équation (2) par l'un des coefficients, et alors ceux de l'équation obtenue de la sorte seraient indépendants de $s_3$; mais, après cette opération, les formules du Chapitre précédent ne seraient plus directement applicables, puisque l'on ne serait pas en droit de prêter aux coefficients la forme définie par les équations (8). Ces équations montrent cependant que l'on peut effectuer la même simplification en supposant la variable, absolument arbitraire, $s_3$, déterminée par l'équation

$$\frac{D(s_1, s_2, s_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = h,$$

ce qui donne $k = 1$.

La remarque faite à la fin du n° 8 [1] nous autorise à nous contenter de l'examen des deux hypothèses

$$b_{11} = b_{22} = 0$$

et

$$b_{12} = b_{22} = 0.$$

La seconde d'entre elles est d'ailleurs inadmissible si l'on se borne, comme nous allons le faire, à chercher les solutions réelles du problème.

L'hypothèse $b_{22} = 0$ entraîne, en effet,

$$\mathbf{E}(s_2) = \sum a_{ik} \frac{\partial s_2}{\partial x_i} \frac{\partial s_2}{\partial x_k} = 0.$$

Or les $a_{ik}$ donnent lieu, ainsi que nous l'avons fait remarquer au n° 9, à une forme essentiellement positive; il faudra par conséquent poser

$$s_2 = \alpha + \beta i,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux fonctions réelles assujetties à vérifier les équations

$$\mathbf{E}(\alpha) = \mathbf{E}(\beta),$$

$$\Theta(\alpha, \beta) = \sum a_{ik} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_k} = 0.$$

Il faut, d'autre part, pour que les équations $s_1 = \text{const.}$, $s_2 = \text{const.}$ correspondent à des courbes réelles, que $s_1$ soit fonction de $\alpha$ et $\beta$, soit

$$s_1 = f(\alpha, \beta).$$

Mais, comme $b_{12}$ s'évanouit, on aura

$$\Theta(s_1, s_2) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big[\mathbf{E}(\alpha) + i\,\Theta(\alpha, \beta)\Big] + \frac{\partial f}{\partial \beta}\Big[i\,\mathbf{E}(\beta) + \Theta(\alpha, \beta)\Big] = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + i\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

d'où

$$f = f(\alpha + i\beta),$$

---

[1] Page 24.

conséquence évidemment absurde, puisque $s_1$ et $s_2$ devaient être des variables indépendantes entre elles. Nous allons donc poser dans ce qui va suivre

$$k = 1, \qquad b_{11} = b_{22} = 0.$$

11. L'équation de mouvement de la chaleur en coordonnées rectangulaires et rectilignes étant supposée être l'équation (5) du Chapitre précédent, la forme

$$\sum_{(i,k)} a_{i,k}\, dx_i\, dx_k$$

sera simplement

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \tag{3}$$

de sorte que nous aurons à déterminer les $b_{ik}$ en fonction des $s_i$ et les $s_i$ en fonction des $x_i$ par la condition que la forme

$$\sum \beta_{ik}\, ds_i\, ds_k \tag{4}$$

puisse être regardée comme la transformée de (3). Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les $\beta_{ik}$ satisfassent aux six équations suivantes [1]

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \beta_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}\, \partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 \beta_{\iota',\iota'''}}{\partial s_{\iota}\, \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 \beta_{\iota,\iota'''}}{\partial s_{\iota'}\, \partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 \beta_{\iota',\iota''}}{\partial s_{\iota}\, \partial s_{\iota'''}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{(\nu,\nu')} (p_{\nu,\iota',\iota'''} p_{\nu',\iota,\iota''} - p_{\nu,\iota,\iota'''} p_{\nu',\iota',\iota''}) \frac{v_{\nu,\nu'}}{\Gamma} = 0, \\ &\qquad\qquad \nu, \nu' = 1, 2, 3, \\ &(\iota\iota', \iota''\iota''') = (23, 23), (31, 31), (12, 12), (13, 12), (21, 23), (32, 31), \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$p_{l,m,n} = \frac{\partial \beta_{l,m}}{\partial s_n} + \frac{\partial \beta_{l,n}}{\partial s_m} - \frac{\partial \beta_{m,n}}{\partial s_l},$$

$$\Gamma = |\, \beta_{i,k} \,|\ (i, k = 1, 2, 3) \qquad \sum_{(i)} \beta_{i,k} v_{i,l} = 0, \qquad \sum_{(i)} \beta_{i,k} v_{i,k} = \Gamma, \qquad l \neq k.$$

Nous avons

$$(6) \quad \sum_{(i,k)} \beta_{i,k}\, ds_i\, ds_k = 2(2 b_{13} b_{23} - b_{12} b_{33})\, ds_1\, ds_2 - (b_{23}\, ds_1 + b_{13}\, ds_2 - b_{12}\, ds_3)^2.$$

---

[1] *Œuvres de Riemann*, p. 381.

L'équation (9) du Chapitre précédent donne, en se souvenant que $s_1$ est choisi de manière à rendre $k = 1$,

$$(7) \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{12}(2b_{23}b_{13} - b_{12}b_{33}) = \frac{1}{h} = \text{const.}$$

Les équations (1) nous apprennent en outre que les quantités $b_{13}$ et $b_{23}$ ne peuvent qu'être linéaires relativement à $s_3$. Ces remarques permettent de simplifier la forme (6) : on conclut d'abord de (7) que la quantité

$$m = 2b_{23}b_{13} - b_{12}b_{33}$$

est indépendante de $s_3$; puis, comme les quantités $b_{13}$ et $b_{23}$ sont linéaires relativement à $s_3$, on pourra, en changeant $s_3$ en une fonction linéaire de cette variable, ramener

$$-(b_{23}\,ds_1 + b_{13}\,ds_2 - b_{12}\,ds_3)^2$$

à la forme

$$(a\,ds_1 + c\,ds_3)^2,$$

$a$ étant linéaire en $s_3$ et $c$ indépendant de cette variable. La forme que nous avons à étudier se réduit donc à

$$(8) \qquad (a\,ds_1 + c\,ds_3)^2 + 2m\,ds_1\,ds_2,$$

de sorte que nous aurons

$$\beta_{11} = a^2, \quad \beta_{22} = 0, \quad \beta_{33} = c^2, \quad \beta_{23} = 0, \quad \beta_{31} = ac, \quad \beta_{12} = m,$$

ce qui donne

$$\Gamma = -m^2c^2,$$

$$\varrho_{11} = 0, \quad \varrho_{22} = 0, \quad \varrho_{33} = -m^2, \quad \varrho_{23} = acm, \quad \varrho_{31} = 0, \quad \varrho_{12} = -mc^2.$$

On trouve ensuite

$$p_{111} = 2a\frac{\partial a}{\partial s_1}, \qquad p_{211} = 2\frac{\partial m}{\partial s_1},$$

$$p_{122} = 2\frac{\partial m}{\partial s_2}, \qquad p_{222} = 0,$$

$$p_{133} = 2\frac{\partial (ac)}{\partial s_3} - 2c\frac{\partial c}{\partial s_1}, \qquad p_{233} = -2c\frac{\partial c}{\partial s_2},$$

$$p_{112} = 2a\frac{\partial a}{\partial s_1}, \qquad p_{212} = 0,$$

$$p_{123} = \frac{\partial(ac)}{\partial s_2}, \qquad p_{223} = 0,$$

$$p_{131} = 2a\frac{\partial a}{\partial s_3}, \qquad p_{231} = -\frac{\partial(ac)}{\partial s_2},$$

$$p_{311} = 2\frac{\partial(ac)}{\partial s_1} - 2a\frac{\partial a}{\partial s_3},$$

$$p_{322} = 0,$$

$$p_{333} = 0,$$

$$p_{312} = \frac{\partial(ac)}{\partial s_2},$$

$$p_{323} = 2c\frac{\partial c}{\partial s_2},$$

$$p_{331} = 2c\frac{\partial c}{\partial s_1}.$$

Il vient, en substituant ces valeurs dans les équations (5) et en effectuant quelques simplifications évidentes,

$$(1, 1) \qquad m\frac{\partial^2 c}{\partial s_2^2} - \frac{\partial c}{\partial s_2}\frac{\partial m}{\partial s_2} = 0,$$

$$(2, 2) \qquad mc\left(\frac{\partial^2 c}{\partial s_1^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial s_1\,\partial s_3}\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial s_3} - \frac{\partial c}{\partial s_1}\right)\left(c\frac{\partial m}{\partial s_1} + m\frac{\partial a}{\partial s_3}\right) = 0,$$

$$(3, 3) \qquad 2mc\left[\frac{\partial^2(a^2)}{\partial s_2^2} - 2\frac{\partial^2 m}{\partial s_1\,\partial s_2}\right] + 4c\frac{\partial m}{\partial s_2}\left(\frac{\partial m}{\partial s_1} - a\frac{\partial a}{\partial s_2}\right) - \frac{m}{c}\left[\frac{\partial(ac)}{\partial s_2}\right]^2 = 0,$$

$$(2, 3) \qquad \left\{\begin{aligned} &2mc\left[\frac{\partial^2(a^2)}{\partial s_2\,\partial s_3} - \frac{\partial^2(ac)}{\partial s_1\,\partial s_2}\right] + 4m\frac{\partial c}{\partial s_2}\left(a\frac{\partial c}{\partial s_1} - a\frac{\partial a}{\partial s_3} + c\frac{\partial a}{\partial s_1}\right) \\ &\quad + 2c\left(c\frac{\partial a}{\partial s_2} - a\frac{\partial c}{\partial s_2}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial s_1} - a\frac{\partial a}{\partial s_2}\right) - 2m\frac{\partial c}{\partial s_1}\frac{\partial(ac)}{\partial s_2} \\ &\qquad + a\frac{\partial(ac)}{\partial s_2}\left(c\frac{\partial a}{\partial s_2} - a\frac{\partial c}{\partial s_2}\right) = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(3, 1) \qquad 2mc\frac{\partial^2(ac)}{\partial s_2^2} - 2c\frac{\partial(ac)}{\partial s_2}\frac{\partial m}{\partial s_2} - 2m\frac{\partial c}{\partial s_2}\frac{\partial(ac)}{\partial s_2} = 0,$$

$$(1, 2) \qquad 2m\left[2c\frac{\partial^2 c}{\partial s_1\,\partial s_2} - \frac{\partial^2(ac)}{\partial s_2\,\partial s_3}\right] + \left(c\frac{\partial a}{\partial s_2} - a\frac{\partial c}{\partial s_2}\right)^2 = 0.$$

La fonction $a$ étant linéaire en $s_3$ et $m$ et $c$ ne contenant pas cette variable, on conclut de la dernière de ces équations que la quantité

$$c\frac{\partial a}{\partial s_2} - a\frac{\partial c}{\partial s_2},$$

et par conséquent aussi

$$\frac{\partial\left(\frac{a}{c}\right)}{\partial s_2},$$

ne dépend pas de $s_3$ ; on peut donc poser

$$a = a_1 + c f(s_1) s_3,$$

$a_1$ ne dépendant que de $s_1$ et $s_2$. L'expression (8) s'écrit par conséquent ainsi

$$\{ a_1\, ds_1 + c[f(s_1)\, ds_1 + ds_3] \}^2 + 2m\, ds_1\, ds_2,$$

ce qui montre qu'en changeant $s_3$ en $s_3 + \int f(s_1)\, ds_1$, elle se transforme en une autre de même forme, à cette différence près que tous les trois coefficients qui y figurent deviennent indépendants de $s_3$. Ceci permet d'employer les six équations $(i, k)$ en y posant

$$\frac{\partial a}{\partial s_3} = 0.$$

On déduit, dans cette hypothèse, des deux équations (1, 1) et (2, 2)

$$\frac{\partial \log \frac{\partial c}{\partial s_2}}{\partial s_2} = \frac{\partial \log m}{\partial s_2},$$

$$\frac{\partial \log \frac{\partial c}{\partial s_1}}{\partial s_1} = \frac{\partial \log m}{\partial s_1};$$

d'où

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial s_1} &= m\,\varphi(s_2), \\ \frac{\partial c}{\partial s_2} &= m\,\psi(s_1). \end{aligned} \right.$$

Il convient de distinguer trois cas. Soit, en premier lieu,

$$\varphi(s_2) = \psi(s_1) = 0,$$

ce qui donne

$$c = \text{const.}$$

L'équation (1, 2) se réduit à

$$\frac{\partial a}{\partial s_2} = 0,$$

et l'on peut, par conséquent, prendre pour nouvelle variable, au lieu de $s_3$,

$$\int a\, ds_1 + c s_3.$$

Mais cela équivaut à faire dans (8)

$$a = 0 \qquad \text{et} \qquad c = 1,$$

hypothèse qui réduit l'équation (3, 3) à

$$m \frac{\partial^2 m}{\partial s_1\, \partial s_2} - \frac{\partial m}{\partial s_1} \frac{\partial m}{\partial s_2} = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 \log m}{\partial s_1\, \partial s_2} = 0;$$

d'où

$$2m = \chi(s_1)\, \Im(s_2),$$

et la forme (8) devient, en prenant

$$\int \chi(s_1)\, ds_1 \quad \text{et} \quad \int \Im(s_2)\, ds_2$$

pour nouvelles variables,

$$ds_3^2 + ds_1\, ds_2,$$

qui se transforme en

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

en posant

$$s_3 = x_3, \qquad s_1 = x_1 + i x_2, \qquad s_2 = x_1 - i x_2.$$

Les isothermes seront, par conséquent, des droites parallèles entre elles et la température satisfera à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = h \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Soit en second lieu l'une des deux fonctions $\varphi$ ou $\psi$ égale à zéro ; ces deux hypothèses étant au fond équivalentes, il suffira d'examiner les conséquences de l'une d'entre elles. Posons, par exemple,

$$\varphi(s_2) = 0,$$
$$\psi(s_1) \neq 0,$$

on déduit alors des équations (9)

$$c = \mathrm{f}(s_2), \qquad m = \frac{\mathrm{f}'(s_2)}{\psi(s_1)},$$

et l'équation (1, 2) donne

$$c\frac{\partial a}{\partial s_2} - a\frac{\partial c}{\partial s_2} = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial\left(\frac{a}{c}\right)}{\partial s_2} = 0;$$

d'où

$$a = \mathrm{f}(s_2)f(s_1).$$

Portant ces valeurs dans l'expression (8), il vient

$$\mathrm{f}(s_2)^2[f(s_1)\,ds_1 + ds_3]^2 + \frac{2\mathrm{f}'(s_2)}{\psi(s_1)}\,ds_1\,ds_2$$

ou bien, en prenant pour nouvelles variables

$$\int f(s_1)\,ds_1 + s_3, \qquad \int \mathrm{f}'(s_2)\,ds_2 = \mathrm{f}(s_2), \qquad \int\frac{2\,ds_1}{\psi(s_1)},$$

$$s_2^2\,ds_3^2 + ds_1\,ds_2,$$

expression qui, en employant la substitution

$$s_2 = x_1 + ix_2,$$

$$s_1 - s_2 s_3^2 = x_1 - ix_2,$$

$$s_2 s_3 = x_3,$$

se transforme en

$$dx_1^2 + dx_2 + dx_3^2.$$

Mais on reconnaît que les courbes

$$s_1 = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad s_2 = \text{const.}$$

sont imaginaires.

Il nous reste à étudier en troisième lieu le cas où aucune des deux fonctions $\varphi(s_2)$ et $\psi(s_1)$ n'est nulle.

Introduisons, au lieu de $s_1$ et de $s_2$, les nouvelles variables

$$\int\frac{ds_2}{\varphi(s_2)} \quad \text{et} \quad \int\frac{ds_1}{\psi(s_1)},$$

ce qui n'altérera pas la forme de l'expression (8) et n'influera par conséquent pas non plus sur celle des équations $(i, k)$. La nouvelle valeur de $m$ étant $m\varphi(s_2)\psi(s_1)$, les équations (9) deviennent

$$\frac{\partial c}{\partial s_1} = \frac{\partial c}{\partial s_2} = m;$$

d'où

$$(10) \qquad \begin{cases} c = f(s_1 + s_2), \\ m = f'(s_1 + s_2). \end{cases}$$

Observons maintenant que l'équation (3, 1) s'écrit ainsi

$$\frac{\partial \log\left[\dfrac{\partial(ac)}{\partial s_2}\right]}{\partial s_2} = \frac{\partial \log cm}{\partial s_2},$$

ou bien, en intégrant et en ayant égard à (10),

$$(11) \qquad ac = f^2 F_1(s_1) + F_2(s_1).$$

Portant ces valeurs dans (8), il vient

$$\left\{\left[f(s_1+s_2)F_1(s_1) + \frac{F_2(s_1)}{f(s_1+s_2)}\right] ds_1 + f(s_1+s_2)\, ds_3\right\}^2 + 2f'(s_1+s_2)\, ds_1\, ds_2.$$

Ceci montre que l'on peut poser

$$F_1(s_1) = 0,$$

car il n'y a qu'à changer $s_3$ en

$$\int F_1(s_1)\, ds_1 + s_3$$

pour réaliser cette circonstance si elle n'avait pas lieu. Nous ferons, par conséquent,

$$F_1 = 0.$$

L'équation (1, 2) donne, dans cette hypothèse,

$$\frac{f^3 f''}{f'} = -[F_2(s_1)]^2.$$

Le premier membre de cette équation étant fonction de $s_1 + s_2$ et le second de $s_2$, chacun d'eux doit être égal à une constante $k^2$. La fonction $f$ devra, par conséquent, satisfaire à l'équation différentielle

$$f'' - k^2 \frac{f'}{f_3} = 0; \tag{12}$$

on aura, en outre,

$$-F_2^2 = k^2$$

et par suite, à cause de (11),

$$a^2 f^2 = -k^2. \tag{13}$$

Les valeurs tirées des équations (10), (12) et (13) vérifient d'ailleurs les six équations $(i, k)$.

Effectuons dans la forme que nous étudions le changement de variables défini par les équations

$$s_1 = y_1 + iy_2, \qquad s_2 = y_1 - iy_2, \qquad s_3 = ik\int \frac{dy_1}{f^2} + y_3. \tag{14}$$

Il vient

$$\begin{aligned}(a\,ds_1 + c\,ds_3)^2 + 2m\,ds_1\,ds_2 &= \left(f\,dy_3 + \frac{k}{f}\,dy_2\right)^2 + 2f'(dy_1^2 + dy_2^2)\\ &= f^2\,dy_3^2 + 2k\,dy_2\,dy_3 + \left(2f' + \frac{k^2}{f^2}\right)dy_2^2 + 2f'\,dy_1^2.\end{aligned}$$

On déduit d'ailleurs de (12), en intégrant une première fois et en désignant par $k_1^2$ la constante de l'intégration,

$$2f' = k_1^2 - \frac{k^2}{f^2}.$$

Soit d'abord

$$k_1 \neq 0.$$

On a, comme on le vérifie, en se rappelant que $f(s_1 + s_2) = f(2y_1)$,

$$2f'\,dy_1^2 = \frac{(df)^2}{2f'} = \frac{f^2(df)^2}{k_1^2 f^2 - k^2}.$$

Posons

$$\frac{f^2(df)^2}{k_1^2 f^2 - k^2} = dz^2$$

et, par conséquent,

$$z = \frac{1}{k_1^2}\sqrt{k_1^2 f^2 - k^2},$$

$$f^2 = k_1^2 z^2 + \frac{k^2}{k_1^2}.$$

La forme considérée devient

$$\left(\frac{k}{k_1}dy_3 + k_1\,dy_2\right)^2 + k_1^2 z^2\,dy_3^2 + dz^2.$$

Si l'on pose maintenant

$$(15)\qquad z = r,\qquad k_1 y_3 = \varphi,\qquad \frac{k}{k_1}y_3 + k_1 y_2 = x_3,$$

on arrive à l'expression bien connue

$$dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dx_3^2,$$

qui se transforme en

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

par le changement de variables

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{x_2}{x_1}.$$

Les équations $s_1 = \text{const.}$, $s_2 = \text{const.}$ entraînent, comme on le voit par les équations (14),

$$y_1 = \text{const.},\qquad y_2 = \text{const.},$$

qui, à cause de (15), nous conduisent aux suivantes :

$$r = \text{const.},$$

$$x_3 - \frac{k}{k_1^2}\varphi = \text{const.}$$

Les isothermes sont donc ici des hélices qui, lorsque $k = 0$, dégénèrent en cercles.

L'équation différentielle que satisfait $u$ est facile à écrire; en posant

$$s = x_3 - \frac{k}{k_1^2}\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{k}{k_1^2} = c,$$

il vient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = h\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Considérons enfin le cas particulier

$$k_1 = 0.$$

Il vient, en conservant les notations de la page précédente,

$$z = \frac{if^2}{2k},$$

et la forme quadratique devient

$$-2kiz\,dy_3^2 + 2k\,dy_2\,dy_3 + dz^2,$$

ou bien, en écrivant au lieu de

$$z,\quad \frac{2k}{\sqrt{-2ki}}\,y_2 \quad \text{et} \quad \sqrt{-2ki}\,y_3,$$

$$s_1,\quad s_2 \quad \text{et} \quad s_3,$$

$$s_1\,ds_3^2 + ds_2\,ds_3 + ds_1^2,$$

expression qui se change en

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

si l'on pose

$$x_1 + ix_2 = s_2 + s_1 s_3 - \tfrac{1}{12}s_3^3,$$

$$x_1 - ix_2 = s_3,$$

$$x_3 = s_1 - \tfrac{1}{4}s_3^2.$$

Ceci montre que les courbes

$$s_1 = \text{const.},\qquad s_2 = \text{const.}$$

sont imaginaires.

La conclusion de ce Chapitre est que le cas $m = 1$ ne peut se présenter que lorsque les isothermes sont des droites parallèles entre elles ou encore des hélices, tracées sur des cylindres coaxiaux à base circulaire, ces hélices pouvant d'ailleurs dégénérer en cercles.

## V.

### Le cas $m = 2$.

12. Les cas $m = 2$, 3 et 4 n'ont point été étudiés par M. Weber et, abstraction faite du cas $m = 4$, ils ne l'ont été que très incomplètement par Riemann.

Ce géomètre trouve, en particulier, pour $m = 2$,

$$u = f(s_1) + \Phi(s_2),$$

expression qui ne répond même pas entièrement à la question, puisque, étant indépeudante du temps, elle convient à l'état de l'équilibre calorifique où les isothermes sont indéterminées.

Sans être parvenu à trouver toutes les solutions comprises dans le cas $m = 2$, nous en ferons néanmoins connaître plusieurs exemples de quelque généralité qui jouiront rigoureusement de toutes les propriétés requises.

Les principes du Chapitre III ne paraissant guère applicables lorsque $m$ n'est pas 1, à cause de l'extrême complication des calculs, un léger changement dans les notations, que nous conserverons d'ailleurs dans l'ensemble des recherches subséquentes, se trouve être utile. Nous introduirons dans la transformée de l'équation (5) du Chap. III les quantités

$$c_{\nu\mu} = \frac{D(s_1, s_2, s_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}\, b_{\nu\mu},$$

au lieu des $b_{\nu\mu}$. La transformée en question s'écrira par conséquent, après y avoir égalé à zéro les dérivées de $u$ relatives à $s_3$, ainsi

$$(1) \qquad c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} + c_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d_1\frac{\partial u}{\partial s_1} + d_2\frac{\partial u}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t},$$

les coefficients ayant les valeurs suivantes :

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned}
c_{11} &= \mathrm{E}(s_1) = \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right)^2,\\
c_{12} &= \Theta(s_1, s_2) = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_2}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_2}\frac{\partial s_2}{\partial x_2} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\frac{\partial s_2}{\partial x_3},\\
c_{22} &= \mathrm{E}(s_2) = \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial s_2}{\partial x_3}\right)^2,\\
d_1 &= \Delta(s_1) = \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2},\\
d_2 &= \Delta(s_2) = \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}\right.$$

L'équation (1) se décompose, dans le cas qui nous occupe, en deux autres dont les coefficients ne seront plus fonctions que de $s_1$ et $s_2$. Il importe de faire observer qu'il doit être impossible de déduire de ces deux équations une autre, indépendante de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et qui soit du premier ordre; car, autrement, une intégrale de cette équation étant prise pour nouvelle variable indépendante, $u$ ne serait fonction que du temps et de cette variable.

Nous aurons

$$(3) \qquad \lambda'(u) = c'_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2c'_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} + c'_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d'_1\frac{\partial u}{\partial s_1} + d'_2\frac{\partial u}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t} \quad (^1),$$

$$(4) \qquad \lambda''(u) = c''_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + 2c''_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} + c''_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d''_1\frac{\partial u}{\partial s_1} + d''_2\frac{\partial u}{\partial s_2} = 0,$$

où les remarques du n° 8 nous autorisent à supposer les variables $s_1$ et $s_2$ choisies de telle sorte que l'équation (4) ne contienne qu'une seule dérivée du second ordre. Ceci donne lieu à deux cas différents que nous distinguerons en lieu convenable.

On déduit immédiatement de (3) et (4)

$$(5) \qquad \lambda''[\lambda'(u)] = h\lambda''\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = h\frac{\partial}{\partial t}[\lambda''(u)] = 0.$$

Il peut se faire que cette équation ne soit qu'une simple conséquence de (4), c'est-à-dire qu'il existerait la relation

$$(6) \qquad \lambda''[\lambda'(u)] = \Theta[\lambda''(u)],$$

$\Theta$ désignant une caractéristique différentielle. C'est l'hypothèse que nous allons envisager au numéro suivant.

13. La relation (6) ayant lieu, toute intégrale de (3), qui à une époque particulière $t = t_0$ en est aussi une de (4), ne cessera pas de l'être avec le cours du temps.

On a, en effet,

$$\lambda'^{(n)}(u) = h^n\frac{\partial^n u}{\partial t^n},$$

$$\lambda''[\lambda'^{(n)}(u)] = h^n\frac{\partial^{(n)}}{\partial t^{(n)}}[\lambda''(u)];$$

d'ailleurs, à cause de (6),

$$\lambda''[\lambda'^{(n)}(u)] = \Theta\{\lambda''[\lambda'^{(n-1)}(u)]\} = \Theta^{(n)}[\lambda''(u)].$$

---

(1) Observons, pour éviter des longueurs dans la suite, que si l'on a $c''_{ik} = 0$ ou bien $d''_i = 0$, les égalités suivantes ont lieu : $c_{ik} = c'_{ik}$ ou bien $d_i = d'_i$.

L'équation

$$[\lambda''(u)]_{t=t_0} = 0$$

entraîne par conséquent

$$\left\{ \frac{\partial^n [\lambda''(u)]}{\partial t^n} \right\}_{t=t_0} = 0,$$

ce qui rend l'exactitude de la proposition annoncée manifeste.

Il s'agit maintenant de savoir quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de la relation (6). La proposition suivante nous conduira aisément au but : si l'on applique à une fonction quelconque successivement plusieurs caractéristiques différentielles, l'ordre du résultat sera *toujours* égal à la somme des ordres des caractéristiques appliquées. Il est parfaitement évident qu'il en sera ainsi en général, mais il n'est pas inconcevable *a priori* que les dérivées des ordres les plus élevés disparaissent dans des cas particuliers; nous verrons que cela ne peut jamais arriver.

Soient, en effet, $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux caractéristiques d'ordres $m_1$ et $m_2$ respectivement. Choisissons dans $\Omega_1$ un terme

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}\, \partial_{s_1}^{m_1 - i_1}\, \partial_{s_2}^{i_1 - i_2} \ldots \partial_{s_\nu}^{i_\nu},$$

tel que les entiers $i_1$, $i_2$, ..., $i_\nu$ soient simultanément, pour ce terme, les plus grands ou les plus petits possible; soit en même temps

$$b_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}\, \partial_{s_1}^{m_2 - k_1}\, \partial_{s_2}^{k_1 - k_2} \ldots \partial_{s_\nu}^{k_\nu}$$

celui des termes de $\Omega_2$ qui jouisse relativement aux $k_\alpha$ de la propriété analogue. La fonction $\Omega_1[\Omega_2(u)]$ contiendra le terme du $(m_1 + m_2)^{\text{ième}}$ ordre

$$a_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}\, b_{k_1, k_2, \ldots, k_\nu}\, \partial_{s_1}^{m_1 + m_2 - (k_1 + i_1)}\, \partial_{s_2}^{k_1 + i_1 - (k_2 + i_2)} \ldots,$$

qui, étant unique, ne pourra jamais disparaître. Cela posé, on simplifie notablement les calculs, en observant que la caractéristique

$$\lambda''\lambda' - \lambda'\lambda''$$

est nécessairement du troisième ordre, et, par suite, si (6) a lieu, elle doit pouvoir être obtenue en opérant sur $\lambda''$ avec une caractéristique du premier ordre.

Soit maintenant, en premier lieu,

$$\lambda''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + d_1'' \frac{\partial u}{\partial s_1} + d_1'' \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0. \tag{7}$$

Je dis que l'on peut, sans altérer la forme de (7), choisir les variables $s_1$ et $s_2$ de telle manière que $c_{12} = c'_{12}$ soit nul, à moins que $c'_{22} = c_{22}$ ne le soit, hypothèse que nous écarterons pour les mêmes raisons qu'au n° 10 ([1]).

Les formules (2) donnent, en effet,

$$\begin{aligned} c'_{12} = c_{12} = \Theta(s_1, s_2) &= \Phi(s_1, s_2), \\ c'_{22} = c_{22} = \mathrm{E}(s_2) \quad &= \psi(s_1, s_2), \end{aligned}$$

puisque les coefficients $c'_{12}$ et $c'_{22}$ sont indépendants de $s_3$. Introduisons, au lieu de $s_1$, une nouvelle variable $\varphi(s_1, s_2)$; le coefficient $c_{22}$ ne changera pas et la nouvelle valeur de $c_{12}$ sera

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi, s_2) &= \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \Theta(s_1, s_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \mathrm{E}(s_2) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \Phi(s_1, s_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \psi(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Or rien n'empêche de prendre $\varphi$ égal à une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \Phi(s_1, s_2) + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \psi(s_1, s_2) = 0.$$

Le coefficient $c_{12}$ s'évanouira alors et l'équation (3) pourra être mise sous la forme

$$\lambda'(u) = c_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d'_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + d'_2 \frac{\partial u}{\partial s_2} = h \frac{\partial u}{\partial t}; \tag{8}$$

la forme de (7) n'aura d'ailleurs pas varié.

Il vient

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda''[\lambda'(u)] - \lambda'[\lambda''(u)] = {} & 2 \frac{\partial c_{22}}{\partial s_1} \frac{\partial^3 u}{\partial s_1 \partial s_2^2} + \left( 2 \frac{\partial d'_2}{\partial s_1} - 2 c_{22} \frac{\partial d''_1}{\partial s_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} \\ & + \left[ \lambda''(c_{22}) - 2 c_{22} \frac{\partial d''_2}{\partial s_2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + 2 \frac{\partial d'_1}{\partial s_1} \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} \\ & + [\lambda''(d'_1) - \lambda'(d''_1)] \frac{\partial u}{\partial s_1} + [\lambda''(d'_2) - \lambda'(d''_2)] \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Les dérivées du premier ordre de (7) ne contenant pas $\frac{\partial^3 u}{\partial s_1 \partial s_2^2}$, on doit avoir

$$\frac{\partial c_{22}}{\partial s_1} = 0.$$

---

([1]) Page 28.

On fera par conséquent $c_{22} = 1$ en changeant $s_2$ en une fonction convenablement choisie de cette variable. Cela étant, (9) ne peut différer de (7) que par un facteur, ce qui entraîne

$$\frac{\partial d''_2}{\partial s_2} = 0,$$

$$\frac{\partial d'_2}{\partial s_1} - \frac{\partial d''_1}{\partial s_2} = 0.$$

On en déduit que l'on peut poser, en désignant par $\varphi$ une fonction de $s_1$ et de $s_2$,

$$(10) \qquad d'_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}, \qquad d''_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1},$$

et il est aisé de voir en outre qu'un choix convenable de la variable $s_1$ réduira $d''_2$ à l'unité si cette quantité n'est pas nulle; nous poserons, pour ne pas avoir à nous occuper spécialement de cette dernière possibilité,

$$(11) \qquad d''_2 = e = \text{const.}$$

Les seules équations qu'il y ait encore à satisfaire sont celles-ci

$$\lambda''(d'_1) - \lambda'(d''_1) = 2\, d''_1 \frac{\partial d'_1}{\partial s_1},$$

$$\lambda''(d'_2) - \lambda'(d''_2) = 2\, d''_2 \frac{\partial d'_1}{\partial s_1},$$

ou bien, en posant pour la symétrie des notations

$$d'_1 = \Phi,$$

et en tenant compte de (10) et (11)

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_1^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} + e \frac{\partial \Phi}{\partial s_2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2^2} - \Phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2} = 0, \\ & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2 \partial s_1^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1 \partial s_2} + e \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} - 2e \frac{\partial \Phi}{\partial s_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

L'intégration générale de ces équations ne semble guère praticable, et cette difficulté n'est probablement encore pas la plus grande d'entre celles qu'il faudrait vaincre avant d'arriver à exprimer $s_1$ et $s_2$ au moyen de $x_1$, $x_2$

et $x_3$. Nous devrons donc nous borner à citer un exemple particulier d'une solution de la classe considérée.

On peut satisfaire aux équations (12), en posant

$$e = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = f(s_2), \qquad \Phi = 0.$$

Les formules (2) nous fournissent alors les équations suivantes :

$$\mathrm{E}(s_2) = 1, \qquad \Delta(s_2) = f(s_2),$$
$$\Theta(s_1, s_2) = 0, \qquad \Delta(s_1) = 0.$$

Les résultats du Chapitre II [1] font immédiatement connaître toutes les solutions de ces équations. En voici un exemple :

$$s_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1^2},$$

ce qui donne

$$f(s_2) = \frac{2}{s_2},$$

$$s_1 = \mathrm{F}\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right) = \mathrm{F}(\alpha, \beta)$$

où nous avons posé, pour simplifier l'écriture,

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \beta = \frac{x_3}{x_2}.$$

Or il faut encore vérifier l'équation

$$\Delta(s_1) = 0;$$

d'où l'on déduit que F doit être une intégrale quelconque de l'équation

$$(1 + \alpha^2)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \alpha^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \alpha\, \partial \beta} + (1 + \beta^2)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \beta^2} - 2\alpha\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \alpha} - 2\beta\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \beta} = 0.$$

Cela étant, les équations (3) et (4) deviennent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + \frac{2}{s_2}\frac{\partial u}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = 0;$$

---

[1] Page 20, fin du n° 5.

d'où

$$(\text{I}) \qquad u = s_1\psi_1(s_2, t) + \psi_2(s_2, t),$$

expression dans laquelle chacune des fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$ doit être une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s_2^2} + \frac{2}{s_2}\frac{\partial\psi}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Nous avons à considérer en second lieu l'hypothèse où l'équation (4) serait réductible à la forme

$$(13) \qquad \lambda''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} + d''_1\frac{\partial u}{\partial s_1} + d''_2\frac{\partial u}{\partial s_2} = 0.$$

L'équation (3) pourra alors s'écrire, après l'élimination de $\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2}$ au moyen de (13), ainsi

$$(14) \qquad \lambda'(u) = c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + c_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d'_1\frac{\partial u}{\partial s_1} + d'_2\frac{\partial u}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Il est aisé de voir que si la relation (6) doit avoir lieu, la combinaison

$$(15) \qquad \lambda''[\lambda'(u)] - \lambda'[\lambda''(u)]$$

ne peut contenir $\frac{\partial^3 u}{\partial s_1^3}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial s_2^3}$; il faut donc que

$$\frac{\partial c_{11}}{\partial s_2} = \frac{\partial c_{22}}{\partial s_1} = 0.$$

On pourra par conséquent, en choisissant convenablement les fonctions $s_1$ et $s_2$, rendre

$$c_{11} = c_{22} = 1,$$

à moins que ces quantités ne soient nulles, cas qui va être étudié plus loin.

On reconnaît ensuite que, les coefficients $c_{11}$ et $c_{22}$ étant réduits à l'unité, la combinaison (15) doit aussi être libre de $\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}$, ce qui donne

$$\frac{\partial d'_2}{\partial s_1} - 2\frac{\partial d''_2}{\partial s_2} = 0, \qquad \frac{\partial d'_1}{\partial s_2} - 2\frac{\partial d''_1}{\partial s_1} = 0.$$

Nous pouvons donc poser

$$d'_1 = 2\frac{\partial m}{\partial s_1}, \qquad d''_1 = \frac{\partial m}{\partial s_2},$$

$$d'_2 = 2\frac{\partial n}{\partial s_2}, \qquad d''_2 = \frac{\partial n}{\partial s_1},$$

où $m$ et $n$ sont des fonctions de $s_1$ et $s_2$ qui, pour que (6) ait lieu, doivent encore vérifier les équations suivantes

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} 2\lambda''\left(\frac{\partial m}{\partial s_1}\right) - \lambda'\left(\frac{\partial m}{\partial s_2}\right) &= 2\left(\frac{\partial^2 m}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial s_2^2} - \frac{\partial^2 m}{\partial s_2^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial s_1^2}\right)\frac{\partial m}{\partial s_2},\\ 2\lambda''\left(\frac{\partial n}{\partial s_2}\right) - \lambda'\left(\frac{\partial n}{\partial s_1}\right) &= 2\left(\frac{\partial^2 m}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial s_2^2} - \frac{\partial^2 m}{\partial s_2^2} - \frac{\partial^2 n}{\partial s_1^2}\right)\frac{\partial n}{\partial s_1}.\end{aligned}\right.$$

Les équations (13) et (14) prennent en même temps la forme

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda'(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + 2\frac{\partial m}{\partial s_1}\frac{\partial u}{\partial s_1} + 2\frac{\partial n}{\partial s_2}\frac{\partial u}{\partial s_2} = \lambda\frac{\partial u}{\partial t},\\ \lambda''(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial m}{\partial s_2}\frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial n}{\partial s_1}\frac{\partial u}{\partial s_2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les mêmes raisons que tout à l'heure nous forcent à restreindre très considérablement la suite de cette analyse. La solution particulière des équations (16) qui s'offre tout d'abord consisterait à égaler $m$ et $n$ à des fonctions linéaires quelconques.

Nous laisserons cependant cette solution de côté parce que l'on peut démontrer que les valeurs correspondantes de $s_1$ et $s_2$ en fonction de $x_1$, $x_2$ et $x_3$ n'existent pas.

Nous ferons

$$\frac{\partial m}{\partial s_2} = \frac{\partial n}{\partial s_1} = 0,$$

$$2\frac{\partial m}{\partial s_1} = \varphi(s_1), \qquad 2\frac{\partial n}{\partial s_2} = \psi(s_2).$$

Les équations (17) deviennent alors

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda'(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + \varphi(s_1)\frac{\partial u}{\partial s_1} + \psi(s_2)\frac{\partial u}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t},\\ \lambda''(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} = 0,\end{aligned}\right.$$

et les formules (2) donnent

$$
\begin{aligned}
E(s_1) &= 1, \qquad \Delta(s_1) = \varphi(s_1), \\
E(s_2) &= 1, \qquad \Delta(s_2) = \psi(s_2).
\end{aligned}
$$

Nous connaissons toutes les solutions de ces équations (Chap. II) [1]. Elles peuvent d'ailleurs être accouplées arbitrairement, à cette restriction près toutefois que la quantité $\Theta(s_1, s_2) = \sum_i \frac{\partial s_1}{\partial x_i}\frac{\partial s_2}{\partial x_i}$ soit une fonction indépendante de $s_1$ et de $s_2$; car, si cela n'était pas, on ne réaliserait pas le cas $m = 2$.

Posons, par exemple,

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
s_2 &= \sqrt{x_2^2 + x_3^2},
\end{aligned}
$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
\varphi(s_1) &= \frac{1}{s_1}, \\
\psi(s_1) &= \frac{1}{s_2}, \\
\Theta(s_1, s_2) &= \frac{x_2^2}{s_1 s_2}.
\end{aligned}
$$

Toutes les conditions requises sont manifestement remplies et il vient

$$
\text{(II)} \qquad u = F_1(s_1, t) + F_2(s_2, t),
$$

$F_1$ et $F_2$ étant les intégrales des équations

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_1}{\partial s_1^2} + \frac{1}{s_1}\frac{\partial F_1}{\partial s_1} + \Phi(t) &= h\frac{\partial F_1}{\partial t}, \\
\frac{\partial^2 F_2}{\partial s_2^2} + \frac{1}{s_2}\frac{\partial F_2}{\partial s_2} - \Phi(t) &= h\frac{\partial F_2}{\partial t},
\end{aligned}
$$

où $\Phi(t)$ est une fonction arbitraire du temps.

Il nous reste à examiner le cas où les coefficients $c_{11}$ et $c_{22}$ de l'équation (14) ne seraient pas tous deux différents de zéro.

L'expression de $u$ que nous obtiendrons sera, il est vrai, indépendante du temps; elle mérite peut-être cependant d'être citée, parce que c'est juste-

---

[1] Page 20, fin du n° 5.

ment cette solution que Riemann semble avoir eue en vue et parce que les résultats obtenus paraissent susceptibles d'être appliqués à certains problèmes de Physique mathématique. Nous déterminerons en effet de la manière la plus générale deux fonctions $\alpha$ et $\beta$ des trois variables $x_1$, $x_2$, $x_3$ de telle sorte que chaque intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0 \tag{19}$$

en donnera aussi une de l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0, \tag{20}$$

si l'on y remplace $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs en $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

Or la détermination des éléments arbitraires dans l'intégrale de (19), conformément aux conditions dites *aux limites*, est bien moins difficile que le problème analogue relatif à (20). D'autre part, le second de ces deux problèmes dépendra du premier d'entre eux, toutes les fois que le caractère physique des points que l'on aura à considérer pourra être entièrement déterminé par les valeurs correspondantes de $\alpha$ et $\beta$.

Ces observations faites, revenons à notre sujet.

On remarque tout d'abord que l'on peut se borner à considérer le cas

$$c_{11} = c_{22} = 0,$$

car soient

$$c_{11} = 0 \quad \text{et} \quad c_{22} \neq 0;$$

les formules (2) donneraient

$$E(s_1) = 0, \qquad E(s_2) \neq 0.$$

Posons

$$s_1 = \alpha + i\beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des fonctions réelles. Il est évident que les équations

$$s_1 = \text{const.}, \qquad s_2 = \text{const.}$$

ne représenteront des courbes réelles que lorsque $s_2$ est fonction de $\alpha$ et $\beta$ seuls et partant de $s_1 = \alpha + i\beta$ et de $\alpha - i\beta$. Or l'introduction de la variable $\alpha - i\beta$, au lieu de $s_2$, rendra évidemment

$$c_{22} = 0.$$

Nous posons, d'après cela,

$$(21) \qquad \begin{cases} \lambda''(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + d_1'' \dfrac{\partial u}{\partial s_1} + d_2'' \dfrac{\partial u}{\partial s_2} = 0, \\ \lambda'(u) = d_1' \dfrac{\partial u}{\partial s_1} + d_2' \dfrac{\partial u}{\partial s_2} = h \dfrac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

L'existence de (6) exige

$$\frac{\partial d_1'}{\partial s_2} = \frac{\partial d_2'}{\partial s_1} = 0,$$

ce qui montre que les coefficients $d_1'$ et $d_2'$, s'ils sont différents de zéro, sont réductibles à l'unité par un choix convenable des variables $s_1$ et $s_2$.

La discussion du cas où l'on attribuerait, dès maintenant, la valeur zéro aux deux quantités $d_1'$ et $d_2'$ à la fois ou même à l'une d'entre elles seulement, étant très facile et peu intéressante, il nous suffira d'étudier les conséquences de l'hypothèse

$$d_1' = d_2' = e = \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases}$$

On trouve ensuite, sans aucune peine,

$$d_1'' = \Phi_1(s_1 - s_2), \qquad d_2'' = \Phi_2(s_1 - s_2),$$

où les fonctions $\Phi_1$ et $\Phi_2$ sont entièrement arbitraires.

Nos équations se mettent, d'après cela, sous la forme

$$\lambda''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + \Phi_1(s_1 - s_2) \frac{\partial u}{\partial s_1} + \Phi_2(s_1 - s_2) \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0$$

$$\lambda'(u) = e \frac{\partial u}{\partial s_1} + e \frac{\partial u}{\partial s_2} = h \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On déduit de là, en introduisant les variables réelles $\alpha$ et $\beta$,

$$u = F\left(\alpha + \frac{e}{h} t, \beta\right),$$

où la fonction F doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} + P(\beta) \frac{\partial F}{\partial \alpha} + Q(\beta) \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

qui est la transformée de $\lambda''(u) = 0$.

L'achèvement de la solution dépend, comme le montrent les formules (2), de l'intégration des équations

$$(22)\qquad \begin{cases} E(s_1) = E(s_2) = 0, \\ \Delta(s_1) = e + 2\Phi_1(s_1 - s_2)\Theta(s_1, s_2), \\ \Delta(s_2) = e + 2\Phi_2(s_1 - s_2)\Theta(s_1, s_2). \end{cases}$$

Nous allons poursuivre dans l'hypothèse

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0,$$

où tout se ramène à l'intégration des équations

$$(23)\qquad E(s_1) = 0, \qquad \Delta(s_1) = e,$$

parce que, $s_1$ et $s_2$ étant des imaginaires conjuguées, il suffit de calculer une seule de ces fonctions; l'autre s'en déduira immédiatement.

Nous nous trouvons en présence d'un problème exactement analogue à celui qui a déjà été traité au Chap. II; la différence consiste uniquement en ce que la quantité $E(s_1)$ est nulle, au lieu d'être essentiellement différente de zéro.

Posons

$$(24)\qquad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} - \psi_1 \frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \psi_2 \frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 0.$$

Nous aurons, comme au Chap. II,

$$(25)\qquad \begin{cases} \psi_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \psi_2 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = 0, \\ \psi_1 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \psi_2 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = 0, \\ \qquad \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \psi_2 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \psi_1 \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{cases}$$

et

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial s_1}{\partial x_2} \Delta(\psi_1) + 2\theta\left(\psi_1, \dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial s_1}{\partial x_2} \Delta(\psi_2) + 2\theta\left(\psi_2, \dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}\right) = 0. \end{cases}$$

Il faut seulement modifier un peu la transformation ultérieure des équations (26).

On déduit de (24)

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1\,\partial x_2}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\,\frac{\partial s_1}{\partial x_2}+\psi_1\,\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2\,\partial x_3}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\,\frac{\partial s_1}{\partial x_2}+\psi_2\,\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2}.$$

On trouve, en portant ces valeurs dans (26) et en tenant compte des deux premières équations (25),

$$(27)\qquad\left\{\begin{array}{l}\Delta(\psi_1)+2\,\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\,\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+2\,\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}\,\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=0,\\[2ex] \Delta(\psi_2)+2\,\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\,\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+2\,\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\,\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=0.\end{array}\right.$$

Le système d'intégrales le plus général des deux premières équations (25) qui soit compatible avec la condition $E(s_1)=0$ est le suivant

$$(28)\qquad\left\{\begin{array}{l}F(x_1-\psi_1 x_2,\ x_3-\psi_2 x_2,\ \psi_1)=0,\\ \psi_1^2+\psi_2^2+1=0,\end{array}\right.$$

où F est une fonction arbitraire. Ce système satisfait d'ailleurs de lui-même à la dernière des équations (25). On déduit ensuite de (28) et (27)

$$E(\psi_1)=E(\psi_2)=0,$$

ce qui entraîne

$$F(x_1-\psi_1 x_2,\ x_3-\psi_2 x_2,\ \psi_1)=F(\psi_1 x_1+x_2+\psi_2 x_3,\ \psi_1).$$

On s'assure facilement que les valeurs de $\psi_1$ et de $\psi_2$, tirées des deux équations

$$(29)\qquad\left\{\begin{array}{l}\psi_1^2+\psi_2^2+1=0,\\ F(\psi_1 x_1+x_2+\psi_2 x_3,\ \psi_1)=0,\end{array}\right.$$

vérifient les équations (27), et l'on reconnaît en même temps que l'on a

$$\Delta(\psi_1)=\Delta(\psi_2)=0.$$

Cela posé, il est aisé de calculer la valeur de $\Delta(s_1)$. Les équations (24) donnent en effet

$$\psi_1^2\,\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_1^2}=-\left(\psi_1\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2},$$

$$\psi_2^2\,\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_3^2}=-\left(\psi_2\,\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_2};$$

d'où

$$(1+\psi_1^2+\psi_2^2)\frac{\partial^2 s_1}{\partial x_2^2}-\Delta(s_1)=\left[\frac{1}{2}\frac{\partial(\psi_1^2+\psi_2^2)}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right]\frac{\partial s_1}{\partial x_2},$$

ou bien, à cause de (29),

$$\Delta(s_1)=0.$$

Or la seule hypothèse que nous ayons faite sur $\Delta(s_1)$ dans le cours de ce calcul consistait à considérer $\Delta(s_1)$ comme fonction de $s_1$. Nous concluons, par conséquent, du résultat obtenu que les équations

$$\Delta(s_1)=f(s_1) \qquad \text{et} \qquad E(s_1)=0$$

ne peuvent être compatibles que lorsque $f(s_1)$ est nul.

Les équations

$$\Delta(\psi_1)=\Delta(\psi_2)=E(\psi_1)=E(\psi_2)=0$$

nous apprennent, en outre, que les fonctions $\psi_1$ et $\psi_2$ jouissent elles-mêmes des propriétés de $s_1$. Ceci montre qu'une classe d'intégrales des équations

$$(30) \qquad \Delta(s_1)=0, \qquad E(s_1)=0$$

peut simplement être obtenue en résolvant par rapport à $s_1$ l'équation

$$(31) \qquad F\left(s_1 x_1+x_2+i\sqrt{1+s_1^2}\,x_3,\ s_1\right)=0,$$

où F est une caractéristique arbitraire. Cette équation épuise-t-elle toutes les variétés des intégrales des équations (30)? Il n'en est rien évidemment puisque, tandis qu'une fonction linéaire peut simultanément vérifier les deux équations (30), elle ne peut être représentée par l'équation (31). On pourrait cependant désirer approfondir un peu le phénomène analytique qui se présente ici. Ce phénomène s'exprime ainsi : les équations

$$s_1\frac{\partial s_1}{\partial x_1}+\frac{\partial s_1}{\partial x_2}+i\sqrt{1+s_1^2}\,\frac{\partial s_1}{\partial x_3}=0$$

et

$$E(s_1)=0,$$

qui conduisent à l'expression (31) et qui peuvent être remplacées par les suivantes

$$A=s_1\psi_1+1+i\sqrt{1+s_1^2}\,\psi_2=0$$

et

$$E(s_1)=0$$

entraînent

$$\Delta(s_1)=0.$$

Mais les équations

$$\mathrm{E}(s_1) = 0, \qquad \Delta(s_1) = 0$$

n'ont pas pour conséquence nécessaire

$$\mathrm{A} = 0,$$

car, si cela était, (31) donnerait toutes les intégrales communes des équations (30).

L'identité suivante mettra en évidence la liaison mutuelle de toutes ces équations. On a

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\frac{\partial s_1}{\partial x_3}\frac{\partial \mathrm{E}(s_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3}\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathrm{E}(s_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\frac{\partial \mathrm{E}(s_1)}{\partial x_3}\right] \\ &\qquad = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\frac{\partial s_1}{\partial x_3}\Delta(s_1) + \left(\frac{\partial s_1}{\partial x_2}\right)^2\left(\psi_1^2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \psi_2^2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right) \\ &\qquad\quad + \mathrm{E}(s_1)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial x_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_3}\right). \end{aligned}\right.$$

Exprimons la quantité

$$(33)\qquad \psi_1^2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \psi_2^2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}$$

au moyen de A.

On trouve

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_3} = s_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + i\sqrt{1+s_1^2}\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \left(\psi_1 + \psi_2\frac{is_1}{\sqrt{1+s_1^2}}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_1} = s_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + i\sqrt{1+s_2^2}\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \left(\psi_1 + \psi_2\frac{is_1}{\sqrt{1+s_1^2}}\right)\frac{\partial s_1}{\partial x_1}.$$

Multiplions la première de ces équations par $\psi_1$, la seconde par $\psi_2$ et retranchons membre à membre la seconde de la première en tenant compte des relations

$$\psi_1\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \psi_2\frac{\partial s_1}{\partial x_1} = \frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}\frac{\partial s_1}{\partial x_3} - \frac{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_4}}{\dfrac{\partial s_1}{\partial x_2}}\frac{\partial s_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = -\frac{\psi_1}{\psi_2}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = -\frac{\psi_2}{\psi_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1},$$

il vient

$$(34)\qquad \psi_1\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_3} - \psi_2\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_1} = \frac{\psi_2 s_1 - i\sqrt{1+s_1^2}\,\psi_1}{\psi_1\psi_2}\left(\psi_1^2\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \psi_2^2\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right).$$

Les équations (32) et (34) montrent que, $E(s_1)$ étant supposé être nul, la liaison entre $\Delta(s_1)$ et A est de la forme suivante :

$$M\,\Delta(s_1) + N\left(\psi_1 \frac{\partial A}{\partial x_3} - \psi_2 \frac{\partial A}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Cette relation rend compte avec toute la clarté désirable de ce fait que l'équation $\Delta(s_1) = 0$ est une conséquence de $A = 0$ sans que la réciproque ait lieu.

Il résulte de tout ce qui vient d'être dit que les intégrales communes des équations (30) contiennent une classe de fonctions, qui peuvent simplement être obtenues en résolvant par rapport à $s_1$ l'équation (31), tandis que la détermination de toutes ces intégrales dépend de l'intégration des équations (24) après y avoir porté les valeurs de $\psi_1$ et de $\psi_2$, tirées des équations (29). L'intégration des équations (29) se ramène, comme on le sait d'ailleurs, à celles de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre. La fonction

$$s_1 = \alpha + i\beta$$

étant déterminée, $s_2$ sera l'imaginaire conjuguée

$$s_2 = \alpha - i\beta,$$

et les équations (21) deviennent

$$0 = h\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} = 0;$$

d'où

$$u = f(s_1) + \Phi(s_2), \tag{III}$$

$f$ et $\Phi$ étant des fonctions arbitraires.

Il est évident, en outre, que toute intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0 \tag{35}$$

en sera aussi une de celle-ci

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 0. \tag{36}$$

On s'assure avec la plus grande facilité que les fonctions $\alpha$ et $\beta$ qui rendent (36) une conséquence de (35) se déduisent toutes des intégrales communes des équations (30). Introduisons en effet dans (36) les variables $\alpha$, $\beta$ et $v$, $v$ étant une fonction arbitraire, à la place de $x_1$, $x_2$ et $x_3$ et égalons à zéro les dérivées de V relatives à $v$. Il vient

$$E(\alpha)\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + 2\,\Theta(\alpha,\beta)\frac{\partial^2 V}{\partial\beta\,\partial\alpha} + E(\beta)\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} + \Delta(\alpha)\frac{\partial V}{\partial\alpha} + \Delta(\beta)\frac{\partial V}{\partial\beta} = 0$$

ou bien

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} & E(\alpha)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}\right) \\ & \quad + 2\,\Theta(\alpha,\beta)\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\,\partial\beta} + [E(\beta) - E(\alpha)]\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} + \Delta(\alpha)\frac{\partial V}{\partial\alpha} + \Delta(\beta)\frac{\partial V}{\partial\beta} = 0, \end{aligned}\right.$$

équation qui devrait être satisfaite par l'intégrale générale de (35).

Considérons, pour plus de simplicité, au lieu de cette dernière, la suivante

$$V = \Phi(\alpha + i\beta),$$

et substituons-la dans (37).

Il vient

$$[2\,\Theta(\alpha,\beta)i - E(\beta) + E(\alpha)]\Phi'' + [\Delta(\alpha) + i\,\Delta(\beta)]\Phi' = 0.$$

Mais, comme cette équation doit avoir lieu quelle que soit la forme de la caractéristique $\Phi$, il faut considérer $\Phi''$ et $\Phi'$ comme deux variables absolument arbitraires. Ceci conduit aux équations

$$\Theta(\alpha,\beta) = 0,$$
$$E(\alpha) = E(\beta),$$
$$\Delta(\alpha) = \Delta(\beta) = 0,$$

qui conduisent à leur tour aux équations (30).

14. Nous supposerons maintenant que la relation (6) n'ait pas lieu.

On a alors, outre l'équation

$$(38)\qquad \lambda'(u) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

les deux suivantes qui ne contiennent pas $\frac{\partial u}{\partial t}$,

$$\lambda''(u) = 0, \qquad \lambda''[\lambda'(u)] = 0,$$

ce système pouvant être remplacé avec avantage par les équations

$$(39)\qquad \begin{cases} \lambda''(u) = 0, \\ \lambda''[\lambda'(u)] - \lambda'[\lambda''(u)] = 0, \end{cases}$$

dont l'ordre ne surpassera pas le nombre trois.

Nous allons montrer que les équations (38) et (39) conduisent à une relation de la forme

$$(40)\qquad \sum_{(\nu)} A_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, p),$$
$$p \leqq 6,$$

à moins que l'une des équations (39) ne soit de la forme

$$(41)\qquad \sum_{(\mu)} B_\mu \frac{\partial^\mu u}{\partial s_\varepsilon} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$
$$q \leqq 3,$$

l'indice $\varepsilon$ étant égal à 1 ou à 2.

En effet, soit d'abord

$$(42)\qquad \lambda''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \, \partial s_2} + d''_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + d''_2 \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0.$$

On déduira, à l'aide de cette équation de la seconde des équations (39),

$$(43)\qquad \sum_{\nu} a_\nu \frac{\partial^\nu u}{\partial s_1^\nu} + \sum_{\mu} b_\mu \frac{\partial^\mu u}{\partial s_2^\mu} = 0, \qquad (\nu, \mu = 1, 2, 3).$$

Si toutes les quantités $a_\nu$ ou toutes les quantités $b_\nu$ ne sont pas nulles, en d'autres termes, si l'équation (43) n'est pas de la forme (41), on pourra, en faisant usage de (42) et (43), exprimer les dérivées d'ordre quelconque de $u$ relatives aux variables $s_1$ et $s_2$ en fonction linéaire des dérivées du premier ordre, de deux dérivées du deuxième ordre et d'une dérivée du troisième ordre.

On a d'ailleurs

$$\lambda'^{(n)}(u) = h^n \frac{\partial^n u}{\partial t^n};$$

par conséquent, toutes les dérivées de $u$ par rapport au temps sont linéairement exprimables au moyen des mêmes cinq quantités; ce qui rend la proposition annoncée manifeste.

Soit maintenant

$$\lambda''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + d''_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + d''_2 \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0.$$

On réduira alors la seconde des équations (39) à

$$L = f_1 \frac{\partial^3 u}{\partial s_1 \partial s_2^2} + f_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + f_3 \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + f_4 \frac{\partial u}{\partial s_1} + f_5 \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0.$$

Nous supposerons $f_1 \neq 0$, ce qui permet de poser

$$f_1 = 1,$$

et nous nous dispenserons d'examiner l'hypothèse contraire, parce que la discussion en est exactement semblable. On trouve

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} - \frac{\partial^2[\lambda''(u)]}{\partial s_2^2} - f_2 \frac{\partial[\lambda''(u)]}{\partial s_2} - (f_3 - d''_1) L$$
$$= - d''_2 \frac{\partial^3 u}{\partial s_2^3} + \text{des termes du second et du premier ordre} = 0.$$

Il est aisé d'en conclure que, à moins que $d''_2$ ne soit nul, cas où $\lambda''(u) = 0$ aurait la forme (41), une équation telle que (40) pourra être déduite.

Considérons maintenant de plus près le cas où l'équation (40) a lieu. Elle donne

$$u = \sum_\nu \left( e^{\rho_\nu t} \sum_\mu \varphi_{\nu\mu} t^\mu \right). \tag{44}$$

Démontrons avec Riemann que les quantités $\rho_\nu$ sont nécessairement des constantes, même lorsque l'équation de mouvement de la chaleur est supposée être l'équation très générale (4) du Chap. III.

En effet, chaque terme, tel que

$$e^{\rho_\nu t} \sum_{(\mu)} \varphi_{\nu\mu} t^\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n_\nu), \tag{45}$$

doit satisfaire, indépendamment des autres, à l'équation du flux calorifique. Substituons l'expression (45) de $u$ dans l'équation (4) du Chap. III en considérant $\rho_\nu$ et les $\varphi_{\nu\mu}$ comme fonctions de $x_1$, $x_2$ et $x_3$. Le coefficient de

$$\varphi_{\nu n_\nu} e^{\rho_\nu t} t^{n_\nu + 2},$$

dans le résultat de la substitution, doit nécessairement s'évanouir, et cela donne

$$E(\rho_\nu) = \sum_{(i,k)} a_{i,k} \frac{\partial \rho_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial \rho_\nu}{\partial x_k} = 0.$$

Nous avons déjà fait observer à la page 28 qu'une pareille équation n'admettait que des intégrales imaginaires de la forme

$$\rho_\nu = \alpha + i\beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux fonctions réelles assujetties aux conditions

$$E(\alpha) = E(\beta),$$

$$\Theta(\alpha, \beta) = \sum_{(i,k)} a_{i,k} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \beta}{\partial x_k} = 0,$$

qui montrent que $\alpha$ et $\beta$ doivent être des fonctions indépendantes entre elles. Cette remarque autorise à considérer $u$ comme fonction des deux variables

$$\rho_\nu = s_1 = \alpha + i\beta,$$
$$s_2 = \alpha - i\beta.$$

Introduisons ces variables dans les équations

$$\lambda'(u) = h \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\lambda''(u) = 0.$$

Le premier membre de la première d'entre elles sera du premier ordre parce que

$$E(s_1) = E(s_2) = 0.$$

D'autre part, le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial s_1}$ dans $\lambda'(u)$ sera aussi celui de

$$\varphi_{\nu n_\nu} e^{\rho_\nu t} t^{n_\nu+1} = \varphi_{\nu n_\nu} e^{s_1 t} t^{n_\nu+1}.$$

Or ce terme doit disparaître; donc, le coefficient de $\frac{\partial u}{\partial s_1}$ dans $\lambda'(u)$ sera nul, et, comme celui de $\frac{\partial u}{\partial s_2}$ dans $\lambda'(u)$ ne doit être que l'imaginaire conjuguée du premier, il s'évanouira de même. Il viendra, par conséquent,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Ainsi les $\rho_\nu$ dans (44) doivent être des constantes.

Cela posé, il est évident que les fonctions $\varphi_{\nu\mu}$ qui figurent dans l'expression (44) peuvent toujours être déterminées en fonction de $x_1$, $x_2$ et $x_3$ de manière à satisfaire à l'équation du flux calorifique. Il suffit, pour s'en assurer, de substituer l'expression (44) de $u$ dans l'équation en question. Les coefficients des termes, tels que $t^\mu e^{\rho_\nu t}$, étant égalés à zéro, on trouvera autant d'équations qu'il y a de fonctions à déterminer. Il est cependant essentiel de rappeler que l'expression (44) ne peut satisfaire au problème que lorsque deux seulement d'entre les fonctions $\varphi_{\nu\mu}$ sont indépendantes entre elles.

Si $p$ est leur nombre, on devra joindre aux $p$ équations susdites les $p-2$ qui expriment que $p-2$ d'entre leurs déterminants fonctionnels s'évanouissent.

Quand c'est la relation (41) qui a lieu, il vient, en posant $\varepsilon = 1$,

$$u = \varphi_1(s_2, t)\,\psi_1(s_1, s_2) + \varphi_2(s_2, t)\,\psi_2(s_1, s_2) + \varphi_3(s_2, t),$$

expression qui se simplifie un peu en changeant $s_1$ en $\psi_2(s_1, s_2)$. Il vient

$$u = \varphi_1(s_2, t)\,\psi_1(s_1, s_2) + s_1\,\psi_2(s_2, t) + \varphi_3(s_2, t). \tag{46}$$

Les exemples particuliers des expressions (44) et (46), que nous serions en mesure de donner, étant compris dans des formes plus générales de $u$ dont quelques-unes ont déjà été citées, tandis que les autres le seront prochainement, nous croyons pouvoir nous dispenser de rapporter ces exemples ici.

## VI.

### Le cas $m = 3$.

15. L'étude du cas $m = 3$ présente bien moins de difficultés que celle du cas précédent. Toutes les formes possibles de la fonction $u$ pourront être déterminées ici complètement, du moins quant à la manière dont le temps y figure. Nous verrons aussi que le résultat de Riemann pour $m = 3$, savoir

$$u = s_1 e^{\rho t} + f(s_2),$$

où $\rho$ est une constante, n'est qu'un cas très particulier des expressions générales que nous allons faire connaître.

Nous aurons ici trois équations dont deux peuvent être supposées libres du terme en $\frac{\partial u}{\partial t}$. Ces deux équations seront nécessairement du second ordre, parce qu'il doit en général être impossible de déduire des équations que vérifie $u$ une équation indépendante de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et dont l'ordre soit inférieur au second. Cela posé, il est aisé de s'assurer que l'une de ces équations peut toujours être mise sous la forme

$$\lambda'''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \, \partial s_2} + d_1''' \frac{\partial u}{\partial s_1} + d_2''' \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0.$$

En effet, si même cette transformation était impossible pour chacune d'elles, elle ne le serait plus pour leur combinaison linéaire quelconque, à moins que les coefficients des termes du second ordre dans ces deux équations ne soient proportionnels entre eux, chose impossible, puisque l'on pourrait déduire alors une équation du premier ordre indépendante de $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Les équations du problème peuvent, d'après cela, s'écrire comme il suit :

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda'''(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial s_1 \, \partial s_2} + d_1''' \dfrac{\partial u}{\partial s_1} + d_2''' \dfrac{\partial u}{\partial s_2} = 0, \\ \lambda''(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + c_{22}'' \dfrac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d_1'' \dfrac{\partial u}{\partial s_1} + d_2'' \dfrac{\partial u}{\partial s_2} = 0, \\ \lambda'(u) = c_{22}' \dfrac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d_1' \dfrac{\partial u}{\partial s_1} + d_2' \dfrac{\partial u}{\partial s_2} = h \dfrac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

La manière dont la seconde de ces équations est écrite implique l'hypothèse que le terme en $\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}$ ne peut jamais disparaître de cette équation. Nous sommes évidemment en droit de le supposer, puisque cette équation doit en tout cas être du second ordre et doit, par conséquent, contenir l'une au moins des deux quantités $\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}$ ou bien $\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}$.

Si les coefficients $c_{22}''$ et $d_2''$ ne sont pas simultanément nuls, on déduira des équations (1), comme dans le cas analogue du Chapitre précédent, une équation ne contenant que les dérivées de $u$ relatives à $t$. Elle sera évidemment du quatrième ordre et les racines de son équation caractéristique seront constantes pour les mêmes raisons qu'au Chapitre précédent. Voici par conséquent les formes de $u$ qui sont seules possibles ici :

$$(2)\quad \begin{cases} u = \Phi_1(s_1, s_2)e^{\rho_1 t} + \Phi_2(s_1, s_2)e^{\rho_2 t} + \Phi_3(s_1, s_2)e^{\rho_3 t} + \Phi_4(s_1, s_2), \\ u = [\Phi_1(s_1, s_2)t + \Phi_2(s_1, s_2)]e^{\rho_1 t} + \Phi_3(s_1, s_2)e^{\rho_2 t} + \Phi_4(s_1, s_2), \\ u = [\Phi_1(s_1, s_2)t^2 + \Phi_2(s_2, s_2)t + \Phi_3(s_1, s_2)]e^{\rho t} + \Phi_4(s_1, s_2). \end{cases}$$

Rien de plus facile que d'écrire toutes les équations différentielles qui doivent être vérifiées par les fonctions $\Phi_\nu$ qui figurent dans ces expressions. L'intégration de ces équations semble offrir, au contraire, des difficultés très sérieuses, de sorte que nous devrons nous borner à citer un exemple très simple.

Considérons deux fonctions $s_1$ et $s_2$ qui satisfont aux équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta(s_1) \quad = h\rho_1 s_1, \\ \Delta(s_2) \quad = h\rho_2 s_2, \\ \Theta(s_1, s_2) = 0. \end{cases}$$

La fonction $\Phi_3 = s_1, s_2$ satisfera évidemment à l'équation

$$\Delta\Phi_3 = h(\rho_1 + \rho_2)\Phi_3;$$

on pourra, par conséquent, poser

$$u = s_1 e^{\rho_1 t} + s_2 e^{\rho_2 t} + s_1 s_2 e^{(\rho_1+\rho_2)t}.$$

On peut chercher à satisfaire aux équations (3) en posant, par exemple,

$$s_1 = \chi_1(x_1)\psi_1(x_2)\vartheta_1(x_3),$$
$$s_2 = \chi_2(x_1)\psi_2(x_2)\vartheta_2(x_3).$$

On trouve ainsi, entre autres,

$$s_1 = \cos a x_1 \cos b x_2 \, e^{c_1 x_3},$$
$$s_2 = \sin a x_1 \sin b x_2 \, e^{c_2 x_3},$$

les constantes $a$, $b$, $c_1$ et $c_2$ étant liées par les équations

$$c_1^2 \quad - a^2 - b^2 = h\rho_1,$$
$$c_2^2 \quad - a^2 - b^2 = h\rho_2,$$
$$c_1 c_2 - a^2 - b^2 = 0.$$

Il ne serait pas difficile de multiplier des exemples de ce genre, mais cela ne semble pas assez intéressant pour qu'il y ait lieu de s'y arrêter.

16. Considérons maintenant l'hypothèse

$$c''_{22} = d''_2 = 0.$$

Nous allons heureusement pouvoir résoudre complètement toutes les questions qui vont se présenter ici.

Observons d'abord que la seconde des équations (1) peut être transformée en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = 0,$$

sans que les deux autres aient changé de forme. En effet, posons

$$\sigma = f(s_1, s_2)$$

et introduisons cette variable au lieu de $s_1$. Il viendra

$$\lambda''(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}\left(\frac{\partial f}{\partial s_1}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + d''_1 \frac{\partial f}{\partial s_1}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}\frac{\partial f}{\partial s_1}\frac{\partial f}{\partial s_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial s_2}\frac{\partial f}{\partial s_1} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s_1 \partial s_2}.$$

Posons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + d''_1 \frac{\partial f}{\partial s_1} = 0;$$

cela donnera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} = 0;$$

par conséquent

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial s_2}\frac{\partial f}{\partial s_1} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial s_1 \partial s_2},$$

ce qui rend la justesse de notre observation évidente.

Les équations (1) deviennent, en écrivant $s_1$ à la place de $\sigma$,

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} \lambda'''(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + d'''_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + d'''_2 \frac{\partial u}{\partial s_2} = 0,\\ \lambda''(u) &= \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = 0,\\ \lambda'(u) &= c'_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + d'_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + d'_2 \frac{\partial u}{\partial s_2} = h\frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

La seconde de ces équations donne

$$(5) \qquad u = s_1 \Phi_1(t, s_2) + \Phi_2(t, s_2).$$

Substituons cette valeur dans la première des équations (4), il vient

$$(6)\qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + d_1''' \Phi_1 + d_2''' \left( s_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_2} \right) = 0.$$

Attribuons ici à $s_1$ une valeur particulière $(s_1)_1$ et désignons par $(\quad)_1$ les valeurs des fonctions de $s_1$ pour $s_1 = (s_1)_1$, il vient

$$(7)\qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + (d_1''')_1 \Phi_1 + (d_2''')_1 \left[ (s_1)_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_2} \right] = 0.$$

On déduit de (6) et (7), en éliminant $\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial s_2}$,

$$(8)\qquad \left\{ (d_2''')_1 - d_2''' + d_2'''(d_2''')_1 [s_1 - (s_1)_1] \right\} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + [d_1'''(d_2''')_1 - d_2'''(d_1''')_1] \Phi_1 = 0.$$

Les coefficients de cette équation doivent être identiquement nuls. En effet, si cela n'avait pas lieu, il viendrait

$$\Phi_1 = f_1(s_2)\,\psi_1(t).$$

L'équation (6) donnerait alors

$$\Phi_2 = f_2(s_2)\,\psi_1(t) + \psi_2(t)$$

et l'expression (5) de $u$ deviendrait

$$u = [s_1 f_1(s_2) + f_2(s_2)]\,\psi_1(t) + \psi_2(t),$$

ce qui montre que $u$ serait exprimable en fonction du temps et d'une seule autre variable indépendante.

Un changement momentané de notations rendra la suite de cette discussion, très facile d'ailleurs, plus claire. Observons pour cela qu'il s'agit d'étudier les quantités $d_1'''$ et $d_2'''$ relativement à la manière dont elles dépendent de $s_1$ ; les variations de $s_2$ n'interviendront nullement. Considérons donc deux fonctions $\mathrm{f}_1(y)$ et $\mathrm{f}_2(y)$ d'une variable quelconque $y$ et soit $z$ une valeur particulière de cette variable. Les équations fonctionnelles qui découlent de ce fait que les coefficients de l'équation (8) doivent être identiquement nuls peuvent alors s'écrire ainsi

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{L} &= \mathrm{f}_2(z) - \mathrm{f}_2(y) + \mathrm{f}_2(y)\,\mathrm{f}_2(z)\,(y - z) = 0, \\ \mathrm{M} &= \mathrm{f}_1(y)\,\mathrm{f}_2(z) - \mathrm{f}_1(z)\,\mathrm{f}_2(y) = 0. \end{aligned} \right.$$

On trouve

$$\frac{\partial L}{\partial z} = f_2'(z) + f_2(y)\,f_2'(z)\,(y-z) - f_2(y)\,f_2(z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z\,\partial y} = f_2'(y)\,f_2'(z)(z-y) + f_2(y)\,f_2'(z) - f_2'(y)\,f(z) = 0.$$

Multiplions la première de ces identités par $f_2'(y)$ et retranchons-en la seconde multipliée par $f_2(y)$, il vient

$$f_2'(z)\left\{ f_2'(y) - [f_2(y)]^2 \right\} = 0.$$

Deux cas sont à distinguer suivant que la quantité entre les crochets ou $f_2'(z)$ est nulle. Considérons d'abord la première de ces deux hypothèses. Il vient

$$f_2(y) = \frac{1}{a-y}, \tag{10}$$

$a$ étant une quantité indépendante de $y$ et de $z$. L'identité $L = 0$ est satisfaite par cette forme de la caractéristique $f_2$; elle devient en effet

$$\frac{1}{a-z} - \frac{1}{a-y} + \frac{1}{(a-y)(a-z)}(y-z) = 0,$$

ce qui est réellement une identité. La seconde des conditions (9) exige que l'on ait

$$f_1(y) = c\,f_2(y), \tag{11}$$

$c$ étant une quantité indépendante de $y$ et de $z$. Les équations (10) et (11) conduisent immédiatement aux expressions de $d_2'''$ et $d_1'''$; il suffit de changer $y$ en $s_1$ et de remplacer $a$ et $c$ par des fonctions arbitraires $f_1(s_2)$ et $f_2(s_2)$ de $s_2$. Les deux premières équations (4) s'écrivent alors ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2} + \frac{f_2(s_2)}{f_1(s_2)-s_1}\frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{1}{f_1(s_2)-s_1}\frac{\partial u}{\partial s_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = 0.$$

Substituons dans la première de ces équations l'expression (5) de $u$, il vient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + \frac{f_2(s_2)}{f_1(s_2)-s_1}\Phi_1 + \frac{1}{f_1(s_2)-s_1}\left(s_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial s_2}\right) = 0$$

ou bien

$$\frac{1}{f_1(s_2)-s_1}\left[f_2(s_2)\,\Phi_1(s_2,\,t)+f_1(s_2)\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial s_2}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial s_2}\right]=0;$$

d'où

$$(12)\qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial s_2}=-f_1(s_2)\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial s_2}-f_2(s_2)\,\Phi_1.$$

On trouve, en portant la valeur (5) de $u$ dans la dernière des équations (4) et en faisant usage de l'équation (12), un résultat de la forme

$$(13\,a)\qquad \mathrm{A}\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial s_2^2}+\mathrm{B}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial s_2}+\mathrm{C}\,\Phi_1=h\left(s_1\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}\right),$$

où A, B et C sont des fonctions de $s_1$ et de $s_2$. Prenons la dérivée seconde de cette équation par rapport à $s_1$, il vient

$$(13)\qquad \frac{\partial^2\mathrm{A}}{\partial s_1^2}\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial s_2^2}+\frac{\partial^2\mathrm{B}}{\partial s_1^2}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial s_2}+\frac{\partial^2\mathrm{C}}{\partial s_1^2}\,\Phi_1=0.$$

Si les coefficients des dérivées de $\Phi_1$ dans cette équation ne sont pas nuls, il viendra

$$\Phi_1=\chi_1(s_2)\psi_1(t)+\chi_2(s_2)\psi_2(t).$$

L'équation (12) donnera alors

$$\Phi_2=\vartheta_1(s_2)\,\psi_1(t)+\vartheta_2(s_2)\psi_2(t)+\psi_3(t),$$

de sorte que l'expression (5) prendra la forme

$$(14)\qquad u=[\chi_1(s_2)s_1+\vartheta_1(s_2)]\psi_1(t)+[\chi_2(s_2)s_1+\vartheta_2(s_2)]\psi_2(t)+\psi_3(t).$$

Considérons généralement, pour ne pas avoir à y revenir dans la suite, une expression de $u$ comme la suivante

$$(15)\qquad u=\psi(t)+\sum_{\nu}\Phi_\nu\psi_\nu(t)$$

$$(\nu=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n).$$

En la substituant dans l'équation

$$\Delta(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=h\,\frac{\partial u}{\partial t},$$

on trouve

$$(16)\qquad \sum_{\nu} \psi_\nu \Delta(\Phi_\nu) = h\left(\psi' + \sum_{\nu} \Phi_\nu \psi'_\nu\right),$$

où l'on peut supposer qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants entre les $n$ fonctions $\Phi_\nu$; car, s'il en était autrement, l'expression (15) serait réductible à une autre où le nombre des fonctions $\Phi_\nu$ serait moindre, mais où elles seraient linéairement indépendantes les unes des autres. Cela posé, il est aisé de voir que l'on déduira de l'équation (16) $n+1$ relations indépendantes entre elles, linéaires, homogènes et à coefficients constants entre les $n+1$ fonctions $\psi$ et leurs dérivées premières. Il suffira, pour obtenir ces relations, d'attribuer $n+1$ systèmes de valeurs aux trois variables $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

L'une des racines de l'équation caractéristique du système d'équations susdit sera nulle, ce qui donnera

$$\psi' = 0;$$

on aura d'ailleurs

$$\psi_\nu(t) = \sum_{(i)}\left[e^{\rho_i} \sum_{(k)} a_{\nu,i,k,} t^k\right]$$

$$\sum_{(i)} (k_i + 1) = n,$$

$$\begin{pmatrix} k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k_i \\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l \end{pmatrix},$$

où les $\rho$ et les $a$ sont des constantes.

On aura, par conséquent,

$$u = \sum_{(\nu)}\left[e^{\rho_\nu} \sum_{(i)} F_{\nu,i} t^i\right] + \text{const.}$$

L'expression (14) pourra, d'après cela, être mise en changeant convenablement les variables sous l'une des deux formes

$$(17)\qquad \begin{cases} u = s_1 e^{\rho_1 t} + s_2 e^{\rho_2 t} + \text{const.}, \\ u = e^{\rho_1 t}(s_1 t + s_2) + \text{const.} \end{cases}$$

Les fonctions $s_1$ et $s_2$ devront, dans chacun de ces deux cas, satisfaire à l'un des deux systèmes d'équations

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta(s_1) = h\rho_1, \qquad \Delta(s_2) = h\rho_2, \\ \text{ou bien} \\ \Delta(s_1) = h\rho_1, \qquad \Delta(s_1) = h(\rho_1 s_2 + s_1). \end{array}\right.$$

Il est superflu de pousser la discussion plus loin, parce que, quel que soit le système d'intégrales choisi, les expressions (17) satisferont évidemment à toutes les conditions du problème, tel qu'il a été posé par l'Académie des Sciences, bien que les circonstances particulières que nous venons de considérer puissent ne pas se présenter si l'on prend un couple quelconque d'intégrales des équations (18). Nous verrons dans la suite que, lorsque $s_1$ et $s_2$ sont des intégrales quelconques des équations (18), les expressions (17) conviennent au cas $m = 4$.

Rien de plus facile que l'examen des diverses circonstances qui pourraient se présenter si quelques-uns ou tous les coefficients de l'équation (13) étaient nuls. On retrouve un résultat déjà cité ou encore

$$\Phi_1 = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} = 0.$$

La température s'exprimerait dans le premier cas en fonction du temps et d'une seule autre variable indépendante, possibilité qu'il n'y a pas lieu d'envisager.

Si l'on avait

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_2} = 0,$$

il viendrait

$$u = s_1 \psi(t) + \varphi(t, s_2).$$

Nous étudierons bientôt cette forme de la fonction $u$ dans toute sa généralité, nous nous dispenserons donc de l'examiner en ce moment.

Nous devons envisager maintenant l'hypothèse

$$f_2'(z) = 0.$$

On aurait

$$f_2(y) = f_2(z) = C,$$

C étant une quantité indépendante de $y$ et de $z$. La première des identités (9) deviendrait

$$C^2(y - z) = 0,$$

c'est-à-dire

$$C = 0.$$

Cela étant, la première des équations (4) s'écrira ainsi

$$(19) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} + d_1''' \frac{\partial u}{\partial s_1} = 0,$$

où $d_1'''$ ne peut dépendre que de $s_2$, car on trouverait autrement, en substituant dans cette équation la valeur

$$u = s_1 \Phi_1(s_2, t) + \Phi_2(s_2, t),$$
$$\Phi_1 = 0,$$

ce qui ne doit pas être.

Cela nous permettra de simplifier encore l'équation (19) sans altérer la forme des deux autres équations (4). Changeons la variable indépendante $s_1$ en

$$\sigma = s_1 f(s_2),$$

il vient

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial \sigma} f(s_2),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} [f(s_2)]^2,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial s_2} f(s_2) + \frac{\partial u}{\partial \sigma} f'(s_2).$$

$d_1'''$ étant fonction de $s_2$ seul, on déterminera $f$ par la condition

$$f'(s_2) + f(s_2) d_1''' = 0.$$

L'équation (19) se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} = 0,$$

et l'on trouve

$$(20) \qquad u = s_1 \psi(t) + \Phi(s_2, t).$$

Substituons cette expression dans l'équation de mouvement de la chaleur ; il vient

$$\psi(t)\,\Delta(s_1) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial s_2^2}\,\mathrm{E}(s_2) + \frac{\partial\Phi}{\partial s_2}\,\Delta(s_2) = h s_1\,\psi'(t) + h\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{21}$$

Cette équation se décomposera évidemment en deux autres au moins.

Si les quantités $\Delta(s_2)$ et $\mathrm{E}(s_2)$ ne sont pas toutes deux fonctions de $s_2$ seul, l'équation (21) donnera lieu à une relation de la forme

$$\mathrm{A}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_2^2} + \mathrm{B}\,\frac{\partial\Phi}{\partial s_2} + \mathrm{C}\,\psi(t) + \mathrm{D}\,\psi'(t) = 0,$$

où les quantités A, B, C et D seront fonctions de $s_2$ seul. On en déduira

$$\Phi = \chi_1(s_2)\,\psi_1(t) + \chi_2(s_2)\,\psi_2(t) + \chi_3(s_2)\,\psi(t) + \chi_4(s_2)\,\psi'(t). \tag{22}$$

La fonction $u$ sera, par conséquent, de la forme (15) et la solution que l'on obtiendrait rentrerait dans l'un des types (2). Ceci ne semble pas être entièrement exact au premier abord, parce que l'expression considérée dépend de quatre fonctions de $t$, tandis que les formules (2) n'en contiennent que trois. On lève cette objection en observant qu'il existera une relation linéaire à coefficients constants entre les fonctions de $t$ qui figurent dans l'expression (22).

En effet, un coup d'œil jeté sur les équations (20) et (22) nous apprend que les fonctions de $s_1$ et de $s_2$, dont dépendra $u$, seront toutes de la forme

$$\mathrm{C}s_1 + f(s_2), \tag{23}$$

C étant une constante.

Il est aisé de conclure, d'autre part, de ce que nous avons dit sur l'expression (15), qu'il y aura autant de relations linéaires et homogènes à coefficients constants entre les $\Delta\Phi_k$ et les $\Phi_k$ qu'il y a de fonctions $\psi_\nu(t)$ linéairement indépendantes. Par conséquent, si les quatre fonctions de $t$, dont dépend l'expression (22), étaient indépendantes entre elles, on trouverait, en se rappelant que les $\Phi_\nu$ sont ici de la forme (23), qu'il existe quatre relations linéaires entre $\Delta(s_1)$, $\Delta(s_2)$, $\mathrm{E}(s_2)$, $s_1$ et des fonctions de $s_2$. Or il résulterait de là que $\Delta(s_2)$ et $\mathrm{E}(s_2)$ sont fonctions de seul, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Il nous reste à examiner encore le cas où les quantités $\mathrm{E}(s_2)$ et $\Delta(s_2)$ ne dépendraient que de $s_2$. L'équation (21) ne doit pas alors se décomposer en plus de deux équations; car il viendrait

$$\psi(t) = \psi'(t) = 0,$$

et $u$ ne serait fonction que de $s_2$ et de $t$.

Cela posé, on voit que l'une des équations dont (21) sera une combinaison linéaire devra pouvoir s'écrire ainsi

$$A\,\psi(t) = h\,\psi'(t),$$

A étant une constante. Il en résulte

$$\psi(t) = ce^{\frac{A}{h}t},$$

où $c$ est une constante.

On aura d'ailleurs, comme il est facile de le voir,

$$\Delta(s_1) = \varphi(s_2) + A s_1,$$

de sorte que les équations du problème se réduisent en résumé aux suivantes :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta(s_2) = f_1(s_2),\\ &E(s_2) = f_2(s_2),\\ &\Delta(s_1) = A s_1 + \varphi(s_2),\\ &\varphi(s_2)e^{\frac{A}{h}t} + f_2(s_2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial s_2^2} + f_1(s_2)\frac{\partial\Phi}{\partial s_2} = h\frac{\partial\Phi}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Toutes les solutions communes des deux premières d'entre ces équations nous sont parfaitement connues ([1]), elles ont été citées maintes fois. On voit ensuite que la fonction $s_1$ est l'une quelconque des intégrales de la troisième équation où la fonction $\varphi$ peut évidemment être fixée arbitrairement, ainsi que la constante A. Les fonctions $s_1$ et $s_2$ une fois déterminées, il suffira d'intégrer la quatrième des équations ci-dessus pour que tous les éléments de l'expression

$$u = s_1\,\psi(t) + \Phi(s_2, t)$$

deviennent connus.

Tout ce qui a été dit dans ce Chapitre conduit à la conclusion que les expressions (2) et (20) épuisent toutes les formes que peut avoir $u$ lorsque $m$ est égal à trois.

---

([1]) Page 20, fin du n° 5.

## VII.

### Le cas $m=4$.

17. Ce cas, qui n'offre d'ailleurs aucune difficulté, a été complètement traité par Riemann. C'est son raisonnement que nous allons reproduire.

On aura ici trois équations différentielles en $u$ ne contenant pas $\frac{\partial u}{\partial t}$. Ces trois équations, ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires, devront nécessairement être du second ordre; on pourra donc les écrire ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2}+d_1''\frac{\partial u}{\partial_1 s}+d_2''\frac{\partial u}{\partial s_2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_1\,\partial s_2}+d_1'''\frac{\partial u}{\partial s_1}+d_2'''\frac{\partial u}{\partial s_2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2}+d_1^{\text{IV}}\frac{\partial u}{\partial s_1}+d_2^{\text{IV}}\frac{\partial u}{\partial s_2}=0.$$

On voit que toutes les dérivées de $u$ par rapport à $s_1$ et à $s_2$ pourront être exprimées en fonction linéaire et homogène des deux dérivées premières. Il s'ensuit que l'équation

$$d_1'\frac{\partial u}{\partial s_1}+d_2'\frac{\partial u}{\partial s_2}=h\frac{\partial u}{\partial t},$$

qui est la quatrième d'entre celles qui doivent être vérifiées par $u$, conduira à une relation linéaire et homogène entre les trois premières dérivées de $u$ par rapport à $t$. Il en résultera

$$u=f_1(s_1,s_2)\,e^{\rho_1 t}+f_2(s_1,s_2)\,e^{\rho_2 t}+f_3(s_1,s_2) \tag{1}$$

ou encore

$$u=e^{\rho t}\left\{f_1(s_1,f_2)\,t+f_2(s_1,s_2)\right\}+f_3(s_1,s_2), \tag{2}$$

Les quantités $\rho$ étant des constantes.

On démontre sans peine que la fonction $f_3(s_1,s_2)$ doit être une constante dans chacune de ces deux expressions. En effet, changeons $f_1$ et $f_2$ en $s_1$ et $s_2$ et considérons d'abord le cas où l'expression (1) aurait lieu.

On devrait avoir

$$\Delta s_1 = \rho_1 h s_1,$$
$$\Delta s_2 = \rho_2 h s_2,$$
$$\Delta f_3(s_1, s_2) = 0,$$

ou bien, en développant la dernière de ces équations et en tenant compte des deux premières,

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial s_2} \mathrm{E}(s_1) + 2 \frac{\partial^2 f_3}{\partial s_1 \partial s_2} \Theta(s_1, s_2) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial s_2^2} \mathrm{E}(s_2) + \rho_1 h s_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_1} + \rho_2 h s_2 \frac{\partial f_3}{\partial s_2} = 0.$$

Or c'est le cas $m = 4$ que nous étudions en ce moment ; l'équation précédente doit par conséquent se décomposer en quatre autres, dont trois seront les suivantes

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f_3}{\partial s_1^2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial s_2^2} = 0,$$

qui n'ont d'autres solutions communes avec la quatrième

$$(4) \qquad \rho_1 h s_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_1} + \rho_2 h s_2 \frac{\partial f_3}{\partial s_2} = 0$$

que $f_3 = \text{const.}$

Si $u$ était de la forme (2), on retrouverait comme tout à l'heure les équations (3); l'équation (4) serait au contraire remplacée par la suivante :

$$h \rho_2 s_1 \frac{\partial f_3}{\partial s_1} + (h s_1 + \rho h s_2) \frac{\partial f_3}{\partial s_2} = 0;$$

mais cette équation n'a pas non plus d'autres solutions communes avec les équations (3) que $f_3 = \text{const.}$

La fonction $u$ sera un résumé ici de l'une des deux formes

$$u = s_1 e^{\rho_1 t} + s_2 e^{\rho_2 t} + \text{const.}$$
$$u = e^{\rho t} \{ s_1 t + s_2 \} + \text{const.},$$

les fonctions $s_1$ et $s_2$ étant dans le premier cas des intégrales quelconques des équations

$$\Delta(s_1) = \rho_1 h s_1,$$
$$\Delta(s_2) = \rho_2 h s_2;$$

et dans le second cas, celles des équations

$$\Delta(s_1) = \rho h s_1,$$
$$\Delta(s_2) = h s_1 + \rho h s_2.$$

*Vu et approuvé :*
Paris, le 1er août 1889.
Le Doyen,
E. HÉBERT.

*Permis d'imprimer :*
Paris, le 2 août 1889.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

# SECONDE THÈSE.

## PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Exposer, d'après les travaux récents, les théorèmes généraux sur les fonctions analytiques d'une et de deux variables.

*Vu et approuvé :*
Paris, le 1er août 1889.
Le Doyen,
E. HÉBERT.

*Permis d'imprimer :*
Paris, le 2 août 1889.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
GRÉARD.

15524 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.