ÉCOLE NORMALE SPÉCIALE DE CLUNY

COURS DE MÉCANIQUE

PURE ET APPLIQUÉE

PROFESSÉ

PAR M. CH. VIRY

INGÉNIEUR CIVIL
ANCIEN ÉLÈVE ET ANCIEN RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, ETC., ETC.

TOME TROISIÈME

DYNAMIQUE APPLIQUÉE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

1re PARTIE. — Introduction à la dynamique des machines.
2e PARTIE. — Les résistances.

Ce Cours a été entièrement recueilli et rédigé par les élèves de M. VIRY

NOTAMMENT PAR

MM. JURISCH, MULLER, FONTAINE, BUROT, RÉGNIER

Il s'adresse aux professeurs de l'Enseignement spécial et de toutes les Écoles professionnelles, aux élèves des Écoles Centrale, Normale et Polytechnique, ainsi qu'aux Ingénieurs, Architectes et Constructeurs

PARIS

VICTOR MASSON ET FILS

PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE

1870

École Normale Spéciale de Cluny.

Ensemble de la 3ème Section du Cours de Mécanique de 2ème Année

Professé par Mr Viry Ingénieur civil Ancien élève et ancien répétiteur de Mécanique à l'École centrale, Agrégé de l'Université

1868. Dynamique appliquée des Systèmes matériels 1869.

1ère Partie — Introduction de la dynamique des Machines.

- **Chap. 1er considérations générales sur les machines.**
  - Art. 1er Théorème de la transmission du travail dans les machines.
  - Art. II – Discussion de l'équation à laquelle conduit ce théorème.
  - Art. III. Nécessité du régulateur et du modérateur.
- **Ch. II – Des masses en mouvement. Théorie dynamique des volants et contrepoids.**
  - Art. 1er Variations des actions mutuelles entre les organes d'une machine. Nécessité du volant pour les restreindre
  - Art. II – Mouvement périodiquement uniforme des machines, Nécessité du volant pour régulariser ce mouvement.
  - Art. III – Contrepoids considérés comme organe régularisateur de mouvement.
  - Art. IV – Contrepoids considérés comme organes assurant la stabilité des machines en mouvement.
- **Ch. III. Théorie dynamique des Modérateurs.**
  - Art. 1er – Théorie du pendule conique ordinaire – Poids des boules.
  - Art. II – Inconvénients du pendule conique et de ses congénères
  - Art. III – Modérateurs à air, à eau, à mouvement d'horlogerie.
  - Art. IV Modérateurs agissant sur le travail résistant soit utile, soit nuisible
  - Résumé.

2ème Partie — Étude des résistances de toute nature s'opposant au mouvement des machines

- **Ch. 1er Théorie du frottement de glissement dans les solides les liquides et les Gaz**
  - Art. 1er – Nature physique de la résistance dite de glissement. – Lois et expression analytique de cette résistance.
  - Art. II – Mouvement d'un corps sur un plan horizontal en tenant compte du frottement. Travail absorbé dans le guidage de la tige du piston des machines à vapeur.
  - Art. III – Mouvement d'un corps sur un plan incliné en tenant compte du frottement.
  - Art. IV – Applications : Frottement dans la presse à coins, la vis à filet carré, la vis sans fin.
  - Art. V – Frottement dans les engrenages plans et coniques.
  - Art. VI – Frottement dans la poulie, le treuil, les boutons de manivelle les excentriques, crapaudines, Collets &a.
  - Art. VII Frottement de glissement dans les liquides et les gaz. Lois expérimentales.
- **Ch. II Théorie du frottement de roulement.**
  - Art. 1er – Nature physique de la résistance dite de roulement, Lois et expressions analytique de cette résistance.
  - Art. II Roulement uniforme puis varié d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan horizontal. – Des effets dans le jeu du billard. Transport des matériaux à l'aide de rouleaux d'interposition. – Plaques tournantes.
  - Art. III – Roulement uniforme puis varié d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan incliné – Applications.

2e Partie. — Étude des résistances de toute nature s'opposant au mouvement des machines

- **Ch. II. Théorie du frottement du mouvement** (suite)
- **Ch. III. Frottement mixte de roulement et de glissement**
  - Art. 1er – Du frottement dans les roues de voiture à essieu fixe. 1° sur un plan horizontal 2° sur un plan incliné. – Application. Tirage des voitures, Adhérence dans les locomotives, Travail d'une locomotive remorquant un train
  - Art. II – Frottement des tourillons reposant sur galets croisés. Applications. Machines d'Atwood. Grosse cloche de Metz. – frottement dans le transport sur galets.
- **Ch. IV Théorie du frottement des cordes.**
  - Art. 1er Théorie du glissement des cordes. Application.
  - Art. II – Théorie de la raideur des cordes. Applications.
- **Chap. V:** Théorie de la résistance des milieux.
- **Chap. VI.** Théorie des pertes de puissances vives dues aux chocs et vibrations.
- **Ch. VII. Applications utiles de toutes les résistances étudiées plus haut.**
  - Art. 1er – Applications utiles du frottement de glissement dans les solides.
  - Art. II – Applications utiles du frottement de glissement des cordes.
  - Art. III. Applications utiles du frottement du roulement.
  - Art. IV – Applications utiles de la résistance des milieux.
  - Art. V – Applications utiles de la résistance due au choc.
  - Résumé.

3e Partie — Étude des puissances motrices

- 1ère Série (Voir tableau A 4e volume.) Pneumatique & Hydraulique.
- 2ème Série (Voir tableau B 5ème volume) Thermodynamique et Électrodynamique.

3me Section

Dynamique appliquée des Systèmes matériels

Nous diviserons cette section en trois parties :

1ère Partie — Introduction à la Dynamique des machines.

2me Partie — Étude des résistances de toute nature s'opposant au mouvement des machines.

3me Partie — Étude des puissances motrices.

1ère Partie de la Dynamique appliquée ou Introduction à la Dynamique des machines

Chapitre 1er.

Considérations générales sur les machines

Art. 1er.

Théorème de la transmission du travail dans les machines.

Nous savons qu'on appelle *machine* tout appareil servant d'intermédiaire entre le travail naturel et celui qu'on veut effectuer.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70-3

Il résulte de là que toute machine se compose essentiellement de 3 parties :

1° Un *Récepteur*, ou organe destiné à recevoir l'action des forces motrices (cylindre dans la machine à vapeur. – roue dans les machines hydrauliques. – ailes dans les machines à vent. &c.)

2° Un *Outil* un organe au moyen duquel la machine agit directement sur la matière à travailler.

3° Une *transmission entre le récepteur et l'outil*. – C'est l'ensemble des organes disposés entre le récepteur et l'outil ; cet ensemble étant calculé de façon que le mouvement du récepteur étant donné, celui de l'outil soit tel qu'il le faut pour la bonne exécution du travail à effectuer.

Or quelque soit la machine proposée, elle constitue dans son ensemble un véritable système matériel auquel nous pouvons dès lors appliquer le théorème des puissances vives

Nous avons donc pour un intervalle de temps quelconque.

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma \text{T. F} \quad \text{(intérieures et extérieures)}$$

Relation qui exprime que la somme des variations de puissance vive de tous les différents éléments de la machine est égal à la somme des travaux de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures qui agissent sur elle.

Or, les forces agissant sur une machine quelconque sont de diverses nature. Analysons la nature de ces forces :

1° *Forces motrices* – La machine est en mouvement, il y a donc des forces motrices, ce sont celles qui agissent sur le récepteur et déterminent le mouvement de la machine. Elles sont variables dans les diverses machines : élasticité de la vapeur, dans la machine à vapeur. – poids de l'eau dans les roues hydrauliques. – Courant électrique dans les machines électriques. – impulsion du vent dans les moulins à vent. – élasticité des ressorts, &c.

Ces forces donnent lieu pendant l'intervalle de temps considéré à un certain *travail moteur* T_m

2° *Les forces réactives* dues à la résistance des)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 54 VIR 763

matières que l'on travaille.

Ces forces réactives donnent lieu à un travail résistant utile puisque c'est celui que l'on se propose de produire, je le désigne par T_u pendant l'intervalle de temps que nous considérons.

3°. Les forces réactives dues cette fois aux résistances passives qui se développent par suite du mouvement même de la machine et qui par conséquent ne correspondent à aucun travail utile.

Ces résistances étudiées en détail plus loin (frottements, chocs vibrations &c) consomment, absorbent en pure perte une certaine portion du travail moteur que je désigne par T_f pour l'intervalle de temps considéré

4°. Enfin une dernière force peut encore agir, c'est la pesanteur (machines mobiles) le travail de cette force est positif si le centre de gravité de la machine s'abaisse, négatif s'il s'élève et il a pour expression :

$$\pm P(H - H_0)$$

L'équation ci dessus peut alors s'écrire en remplaçant $\Sigma \mathcal{T} F$ par la somme des travaux énumérés :

$$(1) \quad \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2 = T_m - T_u - T_f \pm P(H - H_0)$$

De cette relation je tire :

$$T_u = T_m \pm P(H - H_0) - \left(\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2\right) - T_f$$

Mise sous cette forme elle nous prouve que.

Dans toute machine le travail utile est égal au travail moteur augmenté du travail dû à la pesanteur et diminué du travail dû aux résistances passives ainsi que de l'excès de la puissance vive finale sur la puissance vive initiale du système.

Si le travail de la pesanteur est nul, l'équation précédente dite de la transmission du travail dans les machines se réduit à :

$$(2) \quad T_u = T_m - T_f - \left(\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2\right)$$

Arch

Art. II.
Discussion.

1° Le mouvement de la machine est uniforme (Roues hydrauliques) ou bien est arrivé à l'uniformité.

La variation de puissance vive est alors nulle dans cette hypothèse quelque soit l'intervalle de temps considéré et la formule précédente devient :

(3 $T_u = T_m - T_f$

Donc dans ce cas le travail utile transmis est toujours inférieur au travail moteur reçu de tout le travail absorbé par les résistances passives.

Il ne devient égal au travail moteur T_m que dans le cas irréalisable où $T_f = 0$

Dans cette hypothèse où T_f serait nul, on aurait donc :

$$T_u = T_m$$

Dans ce cas s'il n'y avait qu'une seule force motrice P et une seule résistance utile Q en désignant par x et y les chemins décrits par leurs points d'application ces chemins étant comptés dans la direction de ces forces : l'égalité $T_u = T_m$ deviendrait

$$Q\,y = P\,x \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{y}{x}$$

Relation montrant que la puissance et la résistance sont entr'elles dans le rapport inverse des chemins parcourus dans la direction de ces forces : d'où la maxime bien connue

Ce que l'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru et réciproquement.

Ainsi donc dans aucun cas le travail utile ne peut surpasser le travail moteur même dans cette hypothèse de $T_f = 0$ — j'ai dit qu'elle était irréalisable et en effet : toute machine en mouvement repose sur des appuis qui exercent sur elle un frottement, donc le terme T_f n'est jamais nul ; de ce que le travail utile transmis T_u ne peut jamais dépasser le travail moteur reçu T_m : il résulte : Que le mouvement perpétuel, problème dans lequel on se propose de

Document autorisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

disposer une machine qui une fois mise en mouvement non seulement continue à se mouvoir sans le secours d'aucun moteur, mais produise même un travail utile comme par exemple d'élever de l'eau à une certaine hauteur est un problème essentiellement chimérique.

Une machine d'après ce qui précède est complètement incapable de produire plus de travail qu'elle n'en reçoit et même de transmettre intégralement ce travail.

L'emploi d'une machine n'a donc pas pour effet d'ajouter à la puissance du moteur. – On ne peut même pas dire, comme on l'a dit quelquefois d'une manière trop générale, que par l'emploi d'une machine on gagne en force ce que l'on perd en vitesse ou que l'on gagne en vitesse ce que l'on perd en force. Cela n'est vrai ainsi qu'on vient de le dire que dans l'hypothèse irréalisable en pratique de $T_f = 0$

– On peut dire exactement au contraire que l'on gagne toujours moins en force que l'on ne perd en vitesse, ou que l'on gagne moins en vitesse que l'on ne perd en force

Le véritable avantage des machines ce qui fait qu'il vaut mieux transmettre le travail moteur par leur intermédiaire que de l'appliquer directement aux corps sur lesquels on veut agir, c'est qu'une machine permet en changeant les facteurs du travail, en augmentant le chemin décrit si l'on ne dispose que d'une petite force, ou en augmentant la force si l'on ne veut faire décrire à son point d'application qu'un court chemin, d'effectuer avec facilité un travail qui serait quelquefois impossible ; c'est encore qu'on peut recueillir le travail moteur sur un point donné et le consommer en d'autres points souvent fort distants du premier, c'est en un mot que l'on peut faire varier d'une infinité de manière selon les besoins d'une industrie l'emploi du travail dont on dispose

L'équation (3) peut encore s'écrire en divisant par T_m les 2 membres.

$$R = \frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}$$

Le rapport $\frac{T_u}{T_m}$ du travail utile au travail moteur est le rendement R de la machine ou coëfficient d'effet utile.

Il est d'autant plus grand que T_f est plus petit il n'atteint l'unité que pour l'hypothèse irréalisable de $T_f = 0$ – Les efforts du mécanicien doivent donc tendre constamment à diminuer T_f

2° Le mouvement n'est que périodiquement uniforme :

Le plus généralement (Machines à vapeur) les relations géométriques des organes de la machine sont telles que le mouvement ne peut être uniforme mais seulement périodiquement uniforme, c'est à dire que les vitesses des différents points de la machine tout en variant à chaque instant repassent exactement par les mêmes valeurs au bout de certaines périodes de temps égales – Dans ce cas l'égalité $T_m = T_u + T_f$ exprimant qu'il y a égalité entre le travail moteur et le travail résistant total n'a plus lieu pour ~~un~~ intervalle de temps quelconque à cause de la variation de puissance vive qui n'est plus nulle à chaque instant.

Mais si au lieu d'appliquer l'équation générale à un intervalle de temps quelconque nous l'appliquons seulement à la durée entière d'une période : puisqu'à l'instant final de la période les vitesses sont redevenues les mêmes qu'à l'instant initial, la variation de puissance vive de la machine pendant cette période est nulle, et on a encore

$$T_u = T_m - T_f$$

ou $$T_m = T_u + T_f$$

Or cette relation applicable à une période entière sera évidemment applicable à un nombre entier quelconque de périodes : Elle existe donc en moyenne pendant tout le mouvement quoiqu'elle n'ait pas lieu pour une portion de période – De là on conclut que le travail moteur est encore égal au travail résistant total dans le cas où le mouvement de la machine est périodiquement uniforme.

3° Appliquons la formule générale (2) à la totalité du temps pendant lequel se meut la machine.

A l'instant initial et à l'instant final, la machine est au repos, la puissance vive est donc nulle à ces 2 instants :

Il en est donc de même de la variation de puissance vive pendant cette durée d'action et on aura encore par conséquent

$$T_u = T_m - T_f$$

ou $$T_m = T_u + T_f .$$

4° Le mouvement de la machine s'accélère dans un temps marqué (mise en train de la machine)

Si nous appliquons le théorème général (2) à ce temps marqué, comme dans ce cas, la puissance vive finale est plus grande que la puissance vive initiale, le terme $\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 > 0$

Donc on a :

$$T_u + \left[\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 \right] = T_m - T_f \text{ ou } T_u < T_m - T_f$$

Ainsi il y a eu dans ce cas une partie du travail moteur perdu comme travail utile mais il n'est pas perdu d'une façon absolue, il s'est transformé en puissance vive pour produire l'accélération de vitesse qu'a éprouvée la machine

En d'autres termes la machine a encore transmis ici la totalité du travail moteur reçu mais non plus seulement sous forme de travail résistant T_f et de travail utile T_u mais encore sous forme de puissance vive.

5° Le mouvement de la machine se ralentit dans un temps marqué (période d'arrêt de la machine)

Le terme $\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2$ est alors < 0

et l'on a :

$$T_u > T_m - T_f$$

Ainsi il y a eu en apparence un travail gagné ; mais l'excès du travail utile sur la différence $T_m - T_f$ qui représente ce travail gagné provient d'une restitution de puissance vive acquise qui se transforme actuellement en travail.

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70-3

Ainsi en résumé, 1° lorsqu'une machine commence à fonctionner il y a gain de puissance vive on a :

$$T_u < T_m - T_f$$

2° Pendant tout le temps que son mouvement reste uniforme ou périodiquement uniforme on a

$$T_u = T_m - T_f$$

3° Pendant la période d'arrêt de la machine il y a perte de puissance vive on a :

$$T_u > T_m - T_f$$

Et l'excès de travail produit dans cette dernière période provient de la puissance vive emmagasinée par la machine pendant la 1ère période et qu'elle restitue intégralement sous forme de travail dans cette dernière période.

Concluons donc de toute cette discussion : que toute machine transmet intégralement soit sous forme de travail soit sous forme de puissance vive la totalité du travail moteur qu'elle reçoit. Cette proposition est l'énoncé en langage ordinaire du théorème de la transmission du travail dans les machines.

Art. III.

Régulateur et Modérateur

Nécessité de ces deux appareils dans toute machine pour obtenir la régularité de marche nécessaire à la bonne exécution du travail à effectuer.

Certains travaux délicats comme ceux qui s'exécutent dans les filatures et tissages exigent pour leur bonne exécution une grande régularité d'action de la part des machines qui effectuent ces travaux.

Deux appareils sont employés dans les machines pour régulariser leur mouvement et atteindre par suite le but proposé ce sont le régulateur ou volant et le modérateur.

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 76/3

Mais avant de traiter de ces appareils, il est nécessaire de rechercher les causes d'irrégularités auxquelles sont sujettes les machines.

Une première cause d'irrégularité tient au mode même d'action de la machine, résultant des relations géométriques qui lient entre eux les différents organes constituant cette machine.

Ces variations sont périodiques. Considérons la machine à vapeur par exemple et supposons qu'elle ait à vaincre une résistance Q constante ~~r~~appliquée tangentiellement à une poulie de rayon q calée sur l'axe moteur, supposons de même que la pression de la vapeur sur le piston soit constante. L'effort de la tige du piston sera par suite constant, il en sera de même de la poussée de la bielle si on néglige son obliquité toujours très faible.

Or, pour que le mouvement de rotation de l'axe fut constamment uniforme, il faudrait que le moment de la puissance P fut constamment égal à celui de la résistance Q. Or ce dernier est constant, mais le 1er ne l'est pas puisque le bras de levier de la puissance P varie de longueur et devient même nul aux points morts. Donc le mouvement de l'axe ne peut pas être uniforme, il sera varié, mais périodiquement varié. En effet la loi de ce mouvement varié est donnée comme on sait par la relation:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{M}f}{I} = \frac{Pp - Qq}{I}$$

Or quelque soit I l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ varie avec p, mais reprend constamment la même valeur quand p bras de levier de la puissance P repasse aussi par les mêmes valeurs c'est-à-dire quand par suite du mouvement de la machine les organes qui la composent ont repris les mêmes situations. — L'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ repassant par les mêmes valeurs à ces instants là ; Il en résulte que les vitesses sont les mêmes à ces instants ou en d'autres termes que le mouvement est périodiquement

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70 3

varie C. q. f. d.

2° Une 2e cause provient des variations qui surviennent soit dans la résistance soit dans la puissance.

Ces irrégularités ne peuvent plus comme les premières se prévoir et elles ne sont plus généralement périodiques.

Considérons une machine à vapeur dénuée de puissance vive, c'est-à-dire réduite à ses axes géométriques complètement dénuées de masse. — Alors: 1° Quand le moment de la puissance devient inférieur à celui de la résistance, lequel est constant, il y aurait arrêt brusque de la machine. 2° Quelque faible soit de plus la résistance Q, quand le bouton de la manivelle passera aux points morts le moment de la puissance P sera nul, mais celui de Q aura une certaine valeur si petite elle soit, donc la machine si forte elle soit et quelque faible soit la résistance ne pourra jamais dépasser les points morts.

Rendons actuellement la matérialité à notre machine et pour augmenter sa masse adjoignons-lui un volant calé sur l'axe moteur. Alors à l'instant où le moment de la puissance deviendra plus petit que le moment de la résistance il n'y aura plus arrêt de la machine, car la puissance vive emmagasinée dans ce volant se transformera alors en travail et le mouvement se continuera en se ralentissant, ralentissement qui sera d'autant plus lent que la puissance vive du volant et par conséquent sa masse sera plus grande.

On conçoit donc qu'en donnant une masse suffisante à ce volant on puisse non seulement dépasser les points morts mais encore obtenir un mouvement aussi régulier qu'on le désirera.

« L'emploi d'un volant ne nécessite d'ailleurs d'autre surcroît de force motrice que celle qui est nécessaire pour vaincre le frottement développé sur ses tourillons. Ce surcroît est toujours peu considérable et les avantages de ce régulateur compensent largement le léger inconvénient du frottement développé. On a dit qu'un volant était un *réservoir de force* ; il faut entendre par là que c'est un réservoir de puissance vive.

En effet, si le travail moteur l'emporte pendant quelque temps sur le travail de la résistance, la puissance vive totale de la machine augmente ; mais une partie de cet excès de travail est employée à accroître la puissance vive du volant ; on conçoit donc que la vitesse des autres pièces soit moins augmentée que s'il n'y avait pas de volant. Si au contraire, c'est le travail résistant qui l'emporte pendant un certain temps sur le travail moteur, la puissance vive totale diminue mais une partie de l'excès de travail est employée à ralentir le volant, les autres pièces de la machine sont donc moins ralenties que si le volant n'y était pas. Le volant a donc pour fonction d'emmagasiner la puissance vive en excès, pour la restituer quand celle des autres pièces vient à diminuer et c'est en ce sens que ce régulateur peut être regardé avec raison comme un réservoir de force.

Le volant est connu de temps immémorial dans le rouet des fileuses. Son application aux machines à vapeur est due à F Fitz-Gerald et date de 1758.

Le volant seul suffit également pour parer aux irrégularités qui proviennent d'une variation brusque, mais passagère de P ou de Q.

En effet : Au moment où le moment de P devient brusquement plus petit que celui de Q la puissance vive emmagasinée dans la masse du volant se transformera en travail et la machine au lieu de s'arrêter brusquement ce qui arriverait si elle était complètement dénuée de masse, continuera son mouvement en se ralentissant.

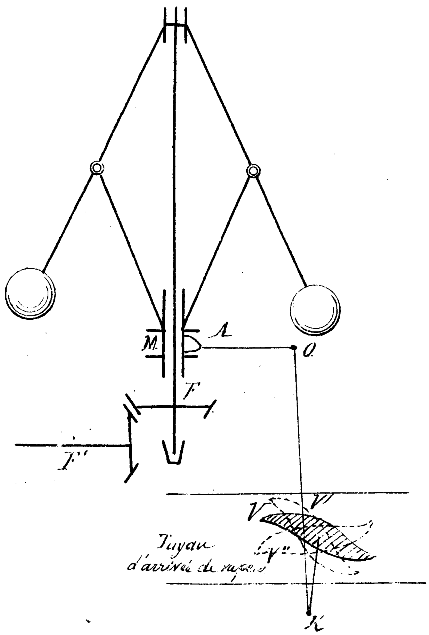
C'est ce qui arrive dans les laminoirs au moment de la passe d'une tôle : A cet instant la résistance devient énorme et il y aurait nécessairement arrêt brusque de la machine si elle n'était munie d'un énorme volant qui transforme cet arrêt brusque en un simple ralentissement.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

Si au contraire le moment de P, devient brusquement > celui de Q, le mouvement de la machine au lieu de s'accélérer subitement ce qui donnerait lieu à des chocs, s'accélérera d'une manière lente et progressive et d'autant moins rapidement que la masse sera plus considérable: Tous ces résultats sont d'ailleurs contenus implicitement dans la formule $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - Qq}{I}$: En effet pour les mêmes variations de P, Q, p, q: $\frac{d\omega}{dt}$, l'accélération angulaire varie d'autant moins et tend d'autant plus vers 0 que I, le moment d'inertie de la machine et par suite sa masse est plus grande — Or $\frac{d\omega}{dt}$, tendant vers 0 indique que le mouvement tend à l'uniformité.

Ainsi donc le volant seul est capable de remédier aux irrégularités périodiques, tenant au jeu même des organes de la machine, ainsi qu'aux irrégularités brusques mais passagères, provenant soit de l'augmentation de la puissance, soit de l'augmentation de la résistance.

Mais supposons actuellement que la résistance augmente et devienne supérieure à la puissance non plus d'une façon passagère, mais d'une manière permanente, alors le volant n'est plus suffisant, il empêche, il est vrai, la machine de s'arrêter brusquement, mais le mouvement va se ralentir petit à petit et la machine s'arrêtera — De même, supposons que la puissance augmente d'une manière permanente, la résistance restant la même; le volant n'empêchera que l'accroissement brusque de la vitesse, mais le mouvement de la machine n'en ira pas moins en s'accélérant de plus en plus et finalement la machine s'emportera.



Il faut donc pour parer aux variations permanentes de la puissance et de la résistance, faire usage d'un nouvel appareil destiné à proportionner à chaque instant la puissance à la résistance. Cet appareil est le Modérateur; Le plus employé est le modérateur à force centrifuge.

Modérateur à force centrifuge.
(Watt en est l'Inventeur)

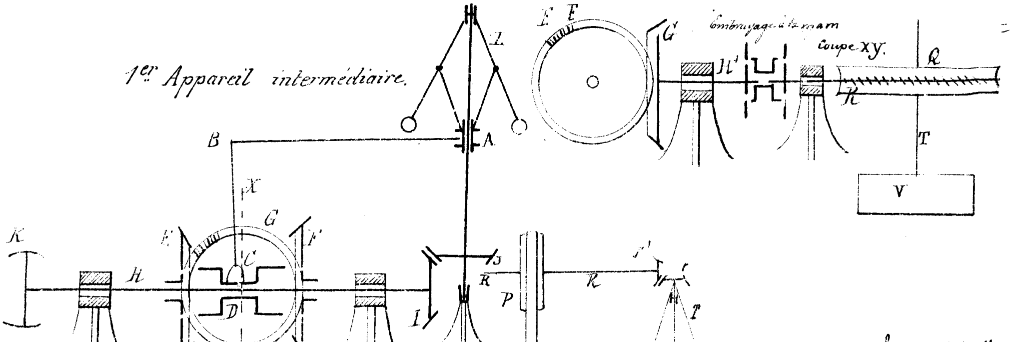
C'est un losange articulé qui se compose de 2 branches terminées par des sphères massives de fonte de grand poids. L'articulation supérieure participe au mouvement de l'arbre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 56 VIR 70-3

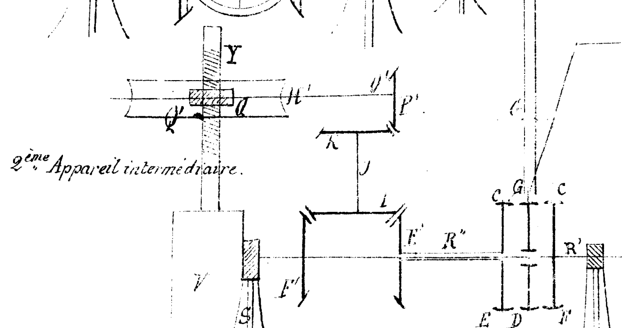
vertical. L'articulation inférieure est un manchon M qui peut se mouvoir le long de l'arbre vertical. Cette articulation est embrassée par une fourchette A constituant l'extrémité d'un levier coudé AOK. oscillant en O.

L'extrémité K est liée à une valve d'arrivée qui se trouve dans le tuyau de vapeur T. Le mouvement est communiqué à ce modérateur par la machine elle même au moyen de 2 roues d'angle F, F'.

Cela posé, voici comment l'appareil fonctionne : - La machine ayant sa vitesse de régime, la valve est je suppose en V - Imaginons maintenant qu'à un certain moment, la tension de la vapeur vienne à augmenter, le mouvement de la machine va tendre à s'accélérer et les 2 boules divergeront, le manchon sera soulevé entraînera la fourchette et fera osciller le levier en O, la valve V prendra la position V' et diminuera ainsi l'orifice d'entrée de la vapeur, il arrivera donc moins de vapeur et le mouvement se ralentissant tendra à revenir au régime. Si, au contraire le mouvement se ralentit, les boules s'abaissent V vient en V". il entre par conséquent plus de vapeur et



le mouvement tend encore en s'accélérant cette fois à revenir au régime.



Modérateur avec appareil intermédiaire pour roues hydrauliques. - Dans les machines à vapeur ainsi qu'on vient de le dire on peut relier l'extrémité du levier AOK à la valve attendu que celle ci offrant peu de résistance peut être facilement mue par la puissance d'ascension du manchon M - Mais dans les roues hydrauliques, il est évident qu'on ne peut lier directement le modérateur à la vanne attendu sa force résistante : On interpose alors entre le modérateur et la vanne l'un ou l'autre des appareils intermédiaires suivants imaginés par Mr Callon - 1er Appareil - Le mouvement est

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

communiqué au modérateur L par l'intermédiaire de la poulie K, de l'arbre H et des deux roues d'angles I.J. – L'extrémité G du levier ABG embrasse un manchon d'embrayage D susceptible d'un mouvement de translation suivant l'axe. H peut alors embrayer l'une des 2 roues d'angles E,F folles sur l'arbre. Quand il embraye E par exemple la roue G reçoit le mouvement et son axe H' tourne dans un certain sens. Quand le manchon embraye l'autre roue, G et par suite H' tourne dans l'autre sens. Sur H' est disposé un filet de vis Q qui engrène une roue tangente R qui fait l'office d'écrou par rapport à la tige T de la vanne V. Cet appareil est disposé de telle manière que pour la vitesse de régime, le manchon reste entre les 2 roues folles et n'en embraye aucune : la vanne reste alors immobile. Quand le mouvement se ralentit ou s'accélère le manchon d'embrayage embraye alors E ou F et la vanne V se lève ou s'abaisse pour laisser arriver plus ou moins d'eau sur la roue hydraulique, la vitesse de régime est ainsi à chaque instant rétablie.

2e Appareil. – Le modérateur T est mis en mouvement par l'arbre R et les deux roues r et r'. L'extrémité C du levier coudé mû par le modérateur embrasse une courroie mue par la poulie P calée sur R. Elle peut la faire passer, par suite du jeu du modérateur, sur l'une ou l'autre des poulies F.D.E ; la poulie F est calée sur l'arbre R' à l'extrémité duquel se trouve une roue d'angle F' également calée sur R'. La courroie étant sur la poulie F, la roue F' tourne dans un certain sens. Quant à la poulie D, elle est folle sur R' et si donc la courroie est placée sur cette poulie, R' sera au repos ; il en sera de même de F' et de E'. Enfin la poulie E est calée sur un canon creux R'' qui porte une roue E' = à E. Si la courroie vient à passer sur E, la roue E' tourne dans le même sens que F' tout à l'heure. Or ces deux roues E.E' engrènent une roue satellite I en relation avec la vanne V par le système JKP'H'QQ'. Donc, suivant que E' ou F' tournera, I et par suite la vanne V se mouvra dans un sens ou dans l'autre. Lorsque la machine possède sa vitesse de régime la courroie est sur la poulie D. Quand la vitesse augmente ou diminue, la courroie est transportée respectivement sur F ou sur E. L'arbre I tourne dans un sens ou dans un autre. De même que K.L et R''', la vanne s'abaisse ou s'élève alors, l'afflux de l'eau est ainsi diminué ou augmenté (le mouvement de la vanne se fait encore au moyen d'une vis tangente).

On voit qu'au moyen de ces deux appareils ingénieux, c'est la force même de la machine qui soulève la vanne, la force d'ascension des boules du modérateur n'étant employée qu'au déplacement d'un manchon ou d'une courroie.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

Enfin pour terminer ces notions générales sur le régulateur et le Modérateur: disons que ces deux appareils se complètent dans une même machine le volant ou régulateur outre son action propre consistant à parer aux irrégularités périodiques qui tiennent aux relations géométriques des organes de la machine, ainsi qu'aux irrégularités brusques et passagères de la puissance ou de la résistance, donne encore au modérateur le temps d'agir. Sans ce volant, en effet, et si le reste de la machine n'avait aucune puissance vive, il y aurait comme nous l'avons dit arrêt brusque à l'instant de l'accroissement de résistance parce que le modérateur qui doit agir sur la puissance exige toujours un certain temps pour le faire lors même qu'il y ait liaison complète. – Enfin les volants dans les machines en produisant la regularité de marche ont de plus cet avantage de parer aux chocs qui proviennent des variations brusques des actions mutuelles qui s'exercent entre les divers organes de la machine, variations d'autant plus considérables que le mouvement est plus irrégulier.

Chapitre II.

Théorie dynamique des volants ou plus généralement des masses en mouvement.

Transition. – Après avoir indiqué sommairement dans le chapitre précédent, l'utilité, le mode d'action et les relations des Modérateurs et Régulateurs, il nous reste à y appliquer la théorie afin de savoir dans chaque cas particulier calculer ces appareils selon les effets que l'on veut produire.

Pour procéder avec ordre dans cette étude nous commencerons par l'étude des masses en mouvement et nous envisagerons successivement le volant 1°. Comme moyen de restreindre les variations des actions mutuelles entre les divers organes d'une machine, variations, résultant des variations brusques d'intensité que peuvent éprouver les forces extérieures agissant sur la machine.

2°. Comme moyen de restreindre les variations périodiques de la vitesse dans le mouvement périodiquement uniforme des machines, puis nous passerons à la théorie dynamique des modérateurs qui fera l'objet du Chapitre III.

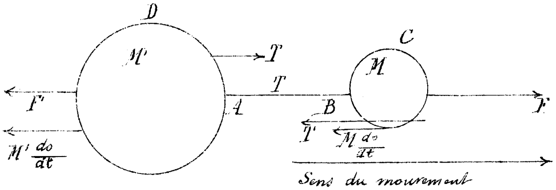
Article 1er. – Théorie des variations des actions mutuelles s'exerçant entre deux ou plusieurs corps soumis à un certain système de forces pouvant

varier brusquement d'intensité.

Utilité du volant pour restreindre ces variations.

1er Cas. — Deux corps C, D, de masses M, M' sont reliés par un fil AB, M' est sollicité par une force F'. M par une force F. Ces deux forces sont dans la direction de AB mais de sens contraire et tendent à tendre le fil. — On demande la tension T de ce fil.

Le mouvement ayant lieu je le suppose, dans le sens de la force F : le corps M auquel elle est appliquée sera le corps moteur et le corps M' sera le corps mû. Ces conventions établies : à chaque instant du mouvement de ce système, chacun des deux corps qui le composent sera en vertu du principe de d'Alembert en équilibre dynamique sous l'action des forces qui le sollicitent y compris la résistance d'inertie. Considérons d'abord le corps moteur M. sollicité par les forces réelles F, T. et d'inertie $M\frac{dv}{dt}$ dont les flèches indiquent le sens de ces forces, formant à chaque instant un système en équilibre on aura en projetant sur la direction du mouvement.



$$F = T + M\frac{dv}{dt} \quad (1)$$

De même l'équilibre dynamique du corps mû M donnera $T = T' + M'\frac{dv}{dt}$ (2)

Des relations (1) et (2) on déduit : $\frac{F-T}{T-F'} = \frac{M}{M'}$ (3).

D'où on tire pour la valeur de la tension T cherchée $T = \frac{FM' + MF'}{M + M'}$ (4)

Discussion. Mettons l'expression (4) sous la forme :

$$T = \frac{F + \frac{M}{M'}F'}{1 + \frac{M}{M'}}$$

1° Supposons que $F = F'$: alors, de deux choses l'une, ou le mouvement sera uniforme où il y aura repos absolu. La valeur de T se réduit dans ce cas à :

$$T = F = F'$$

2° Supposons que F devienne brusquement plus grand que F' ; soit : $F = F' + \delta$ par exemple. La valeur de la tension T devient alors en remplaçant dans la formule F par sa valeur : $T = \frac{F'(1 + \frac{M}{M'}) + \delta}{1 + \frac{M}{M'}} = F' + \frac{\delta}{1 + \frac{M}{M'}}$.

La tension T surpasse alors F' de la quantité $\frac{\delta}{1 + \frac{M}{M'}}$.

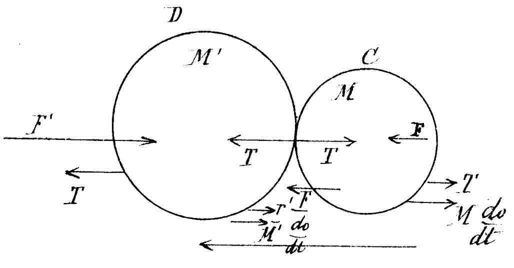
Si dans ce cas nous supposons que la masse M' du corps mû est très grande par rapport à la masse M du corps mouvant la tension T devient : $T = F + \delta$ elle a augmenté subitement dans ce cas de δ : Si au contraire nous supposons que la masse M du corps mouvant est très grande par rapport à la masse M' du corps mû, la tension T devient : $T = F'$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 82 VR 70 3

On voit que dans ce cas la tension est restée la même, elle n'a pas varié.

Entre ces deux hypothèses extrêmes on voit donc que la tension T d'abord égale à F variera d'une quantité comprise entre F et 0. Si l'on veut, par exemple que cette tension varie très peu pour de grandes variations de F il suffira de faire la masse M du corps mouvant très grande par rapport à celle M' du corps mû.

On voit donc la nécessité de donner à l'organe moteur le plus de masse possible afin d'éviter les trop grandes variations des actions mutuelles qui se produisent entre les différentes parties de la machine lorsque les forces motrices viennent à varier brusquement.

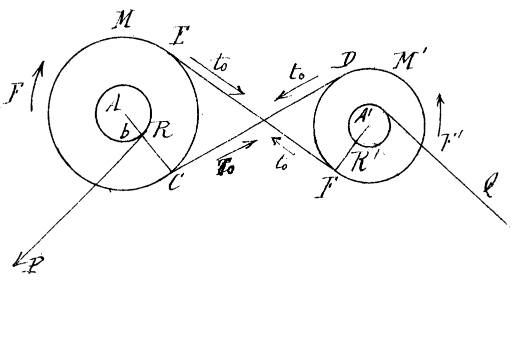


Sens du mouvement

2e Cas. — Les 2 corps M et M' au lieu d'être en relation par le fil AB, sont en contact.

Appelons F et F' les forces qui viennent presser ces 2 corps et étudions les actions mutuelles qui s'exercent en A.

Les forces F et F' ont maintenant changé toutes deux de sens, de même que les tensions en A. Appliquant toujours le principe de d'Alembert (Le mouvement ayant toujours lieu dans le sens de la force F appliqué au corps C, on considère ce corps comme moteur et le corps D comme mû.) nous aurons :



Pour l'équilibre du corps M : $F = T + M\frac{dv}{dt}$ (1)

" " M' $T = F' + M'\frac{dv}{dt}$

D'où $\frac{F-T}{T-F'} = \frac{M}{M'}$

D'où enfin pour la tension :

$$T = \frac{FM' + MF'}{M + M'}$$

valeur qui est la même que la précédente. La discussion sera donc aussi identiquement la même — Mêmes hypothèses — Mêmes résultats ; c'est-à-dire que pour restreindre les variations des actions mutuelles, il faut augmenter la masse du corps par rapport à celle du corps mû.

Corps tournants.

3e Cas. - Considérons 2 poulies tournant autour de A et A'. Ces deux poulies peuvent entraîner dans leur rotation toute espèce de systèmes pesants liés avec elles. Ces deux poulies sont reliées par une courroie à brins croisés. Supposons que A soit la poulie motrice. Elle reçoit son mouvement par l'action d'une puissance P. agissant sur un bras de levier p ; la poulie A sous l'action de cette puissance tourne dans le sens de la flèche F et A' tourne en sens contraire F'

D'ailleurs la poulie mue A' oppose une résistance Q agissant à l'extrémité d'un bras de levier q. - Dans l'état de mouvement, la courroie va prendre une certaine tension. Appelons T_o la tension du brin conducteur CD et t celle du brin conduit. soit : $T = T_o - t_o$.

On demande cette tension T différence entre les tensions des 2 brins?

Considérons l'équilibre dynamique de la poulie A - Cet équilibre a lieu entre les forces extérieures et les résistances d'inertie de tous les points de ce corps tournant - En posant donc l'équation d'équilibre des moments, la seule qui existe ici, on obtient comme on sait : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \text{ cMo Forces exter.}}{\text{moment d'inertie}} = \frac{Pp - T_oR + t_oR}{I} = \frac{Pp - TR}{I}$ (1)

On aura de même pour le corps mû A' : $\frac{d\omega'}{dt} = \frac{TR' - Qq}{I'}$ (2)

Mais d'autre part, comme les arcs parcourus sur les poulies sont égaux on a la condition : $R \frac{d\omega}{dt} = R' \frac{d\omega'}{dt}$

ou en remplaçant $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}$ par leurs valeurs (1)(2)

$$R \cdot \frac{Pp - TR}{I} = R' \cdot \frac{TR' - Qq}{I'} . \quad (3)$$

I représente le moment d'inertie de la poulie motrice A et de tous les systèmes matériels qu'elle peut entraîner dans sa rotation. - Or on peut toujours quelque soit I poser : $I = MR^2$:

M étant une masse fictive déterminée par l'égalité précédente dans laquelle R représente le rayon de la poulie. - Cette masse fictive M est celle qu'il faudrait placer à la distance R de l'axe en la supposant condensée en un seul point pour que son moment d'inertie soit précisément égal au moment d'inertie I.

De même I' représente le moment d'inertie de la poulie mue A' et de tous les systèmes matériels qu'elle peut entraîner dans sa rotation. Nous pourrons

Donc posez comme précédemment : $I' = M'R'^2$ M' étant déterminé par cette égalité je puis poser également $Pp = FR$ et $Qq = F'R'$.

car P, p, R, Q, q, R' étant connus, les facteurs F et F' peuvent se déterminer par ces relations. (F et F' sont des forces tangentes respectivement aux circonférences R, R' et produisant sur le système le même effet que les forces P et Q)

La formule (3) devient alors en remplaçant I, I', Pp, Qq, par ces valeurs

$$\frac{R^2(F-T)}{MR^2} = \frac{R'^2(T-F')}{M'R'^2}$$

ou

$$\frac{F-T}{M} = \frac{T-F'}{M'}$$

D'où enfin

$$T = \frac{FM' + MF'}{M + M'}$$

C'est encore la même formule que la précédente, la même discussion lui est applicable - On conclut donc encore : que pour restreindre les variations de la tension T de la courroie lorsque les forces F et Q viennent à varier brusquement il faut que la masse du corps moteur A soit très grande par rapport à celle du corps mû A'

4°. Considérons maintenant 2 corps agissant par contact, deux roues d'engrenage par exemple, nous allons voir que la même théorie s'applique.

Soit A la roue menante ou motrice, agissant sous l'influence d'une puissance P appliquée à l'extrémité de p, soit A' la roue menée, Q la résistance qu'elle exerce appliquée à l'extrémité de q. On demande la valeur de l'action mutuelle entre deux dents dont le contact actuel est en B par exemple. Menons la normale commune aux 2 dents, laquelle comme on sait passe par le contact des deux circonférences primitives et considérons l'équilibre dynamique de la roue A. Elle est à chaque instant du mouvement en vertu du principe de D'Alembert, en équilibre sous l'action de la force P, de la réaction T de A' sur A et des résistances d'inertie de tous les points de cette roue et des systèmes matériels qu'elle peut entraîner dans sa rotation.

On a donc en appliquant la seule condition d'équilibre qui existe, celle des moments : $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{Pp - TR}{I}$ (1)

Pour l'équilibre dynamique de A', nous aurons de même.

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{TR' - Qq}{I'} \qquad (2)$$

car la pression de A sur A' est égale à la pression de A' sur A, c'est à dire à T. D'autre part les arcs parcourus sur les circonférences primitives sont toujours égaux. Autrement dit, les vitesses linéaires sont égales

$$R\omega = R'\omega'$$

ou en différentiant, $R\frac{d\omega}{dt} = R'\frac{d\omega'}{dt}$ (3)

Remplaçant dans l'expression (3) $\frac{d\omega}{dt}$ et $\frac{d\omega'}{dt}$ par leurs valeurs (1) et (2) on aura :

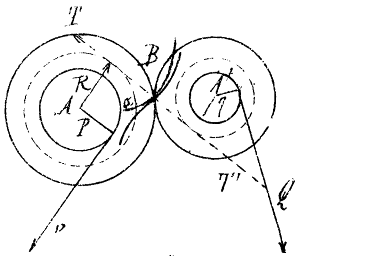
$$R\,\frac{Pp - TR}{I} = R'\,\frac{TR' - Qq}{I'}$$

Posons $Pp = FR$ (F force tangente à la circonférence R produisant le même effet que P)

id $Qq = F'R'$ (F' id id R' id que Q)

Posons également $I = MR^2$, $I' = M'R'^2$ } M et M' étant déterminées par ces relations :

Remplaçant il viendra :



$$\frac{R^2(F-T)}{MR^2} = \frac{R'^2(T-F')}{M'R'^2}$$

ou en simplifiant

$$\frac{F-T}{M} = \frac{T-F'}{M'}$$

$$T = \frac{FM' + MF'}{M + M'}$$

Cette équation est identiquement la même que la précédente et se discute de la même façon après avoir été mise sous la forme

$$T = \frac{F + F'\frac{M}{M'}}{1 + \frac{M}{M'}}$$

On en conclut donc toujours que pour restreindre les variations de la pression T, lorsque les forces P et Q viennent à varier, il faut que la masse du corps moteur soit très grande par rapport à celle du corps mû

5e Cas ou Généralisation. — Application à une transmission quelconque

---

Considérons un ensemble de corps tournants autour des axes A A' A''..... A_1 A_1'... C'est une série de poulies par exemple mêlée si l'on veut de roues d'engrenage. Supposons que la poulie A soit motrice et qu'elle communique le mouvement au système A' A''.. d'une part, au système A_1 A_1', d'autre part ; soient P' P''.... P_1' P_1'' les forces qui s'exercent sur ces poulies et considérons le 1er groupe de poulies ; soit à une époque quelconque ω la vitesse angulaire de la poulie motrice A ; celle de A' sera $K'\omega$, celle de A'' $K''\omega$ (K' désignant le rapport inverse des rayons R et R' de A et de A' –

de même pour K'')

Soient I, I', I'' les moments d'inertie des poulies A, A', A''. La puissance vive de tout le système du 1er groupe sera :

$$\frac{1}{2}\omega^2 I + \frac{1}{2}\omega^2 K'^2 I' + \frac{1}{2}\omega^2 K''^2 I'' + \dots\dots\dots$$

ou : $\frac{1}{2}\omega^2 (I + K'^2 I' + K''^2 I'' + \dots\dots\dots\dots)$

Posons (1) $I + K'^2 I' + K''^2 I'' + \dots\dots = M R^2$, M étant déterminé par cette égalité.

La puissance vive de l'ensemble des corps $A, A', A''\dots\dots$ sera donc.

$$\frac{1}{2}\omega^2 M R^2 \ , \ - R, \text{ rayon de la poulie motrice } A.$$

Considérons maintenant l'ensemble des corps $A_1, A'_1, A''_1 \dots\dots$

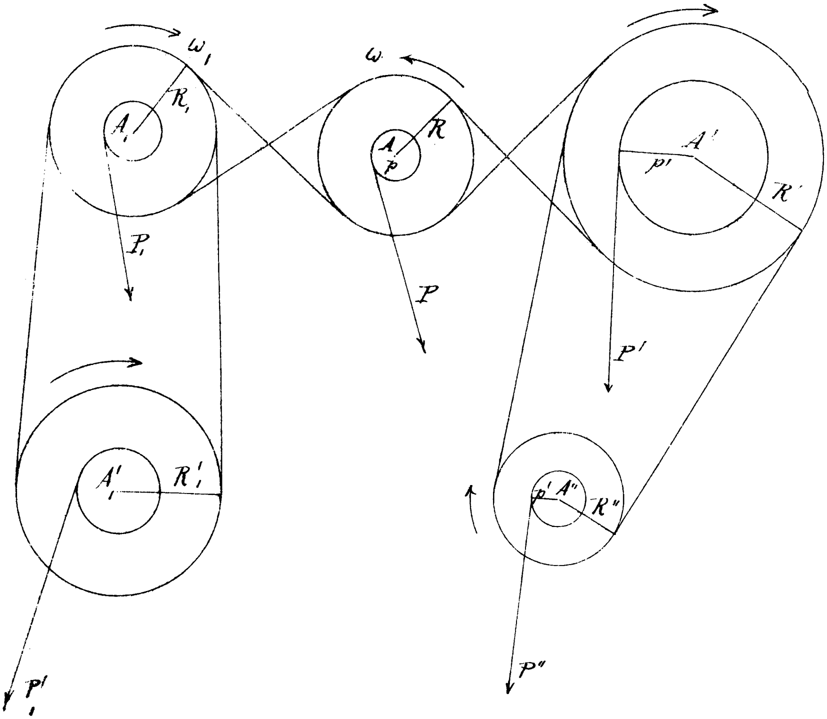
La puissance vive de ce système à l'instant considéré sera de même

$\frac{1}{2}\omega_1^2 M_1 R_1^2$; M_1 étant donné par l'égalité : $\frac{1}{2}\omega_1^2 [I_1 + K_1'^2 I'_1 + K_1''^2 I''_1 + \dots] = M_1 R_1^2$ (2)

Mais on a évidemment la condition

$$\omega_1 R_1 = \omega R$$

donc $\frac{1}{2}\omega_1^2 M_1 R_1^2 = \frac{1}{2}\omega^2 M_1 R^2$



Ainsi pour le système A, A', A'' .... on a $\frac{1}{2}\omega^2 M R^2$ pour puissance vive

.... A_1, A_1', A_1'' .... on a $\frac{1}{2}\omega_1^2 M_1 R^2$ — id —

M et M_1 sont les masses fictives qui satisfont aux relations (1) et (2).

Reprenons le 1er groupe de poulies A, A', A''.... sur lesquelles agissent $P, P' P''$...

Leurs moments sont Pp, $P'p'$, $P''p''$ ....

Et la somme de leurs travaux élémentaires est $Pp\,d\alpha + P'p'd\alpha'' + \ldots$

Or, entre $d\alpha, d\alpha', d\alpha''$.... existent les relations suivantes

$$d\alpha' = K' d\alpha \qquad d\alpha'' = K'' d\alpha \ldots\ldots$$

Donc, la somme des travaux élémentaires des forces agissant sur le premier groupe peut s'écrire : $d\alpha\,(Pp + K'P'p' + K''p''p'' + \ldots\ldots\ldots)$ en en posant la parenthèse égale à $F.R$ et en en déduisant F. il viendra pour cette somme de travaux $d\alpha\,.FR$.

On a ainsi :

	Puissance vive	Travaux élémentaires correspondants
Pour le système $AA'A''$.....	$\frac{1}{2}\omega^2 MR^2$	$d\alpha\ FR$
id id $A_1 A_1' A_1''$.....	$\frac{1}{2}\omega^2 M_1R^2$	$d\alpha\ F_1R$

Appliquons maintenant au système A, le théorème du travail pendant un instant infiniment petit. Ce théorème, comme on sait consiste en ce que la variation de puissance vive pendant ce temps infiniment petit est égale à la somme des travaux élémentaires des forces agissantes. Or, outre le travail $d\alpha\ FR$ qui est un travail moteur, nous avons un travail ~~$d\alpha$~~ TR dû à la tension T qui résiste à ce travail moteur. Donc, la somme algébrique des travaux des forces extérieures est

$$d\alpha\ FR - d\alpha TR \quad \text{ou} \quad d\alpha\,R\,(F-T)$$

Ce travail élémentaire $d\alpha\ R\ (F-T)$ est égal à la variation de puissance vive pendant ce même temps infiniment petit. Or, cette variation de puissance vive pour un temps infiniment petit est la différentielle $\left[d\left(\frac{1}{2}\omega^2 MR^2\right)\right]$ de la puissance vive $\frac{1}{2}\omega^2 MR^2$ à un instant quelconque, donc on a l'égalité : $\quad d\alpha R(F-T = d(\frac{1}{2}\omega^2 MR^2)$

ou en effectuant $\quad d\alpha\,R\,(F-T) = \omega\,d\omega\ MR^2$

Divisant par dt, on aura : $\frac{d\alpha}{dt}\ R\ (F-T) = \omega\frac{d\omega}{dt}\ MR^2$.

et comme $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ il viendra en simplifiant

$$\frac{F-T}{M} = R\,\frac{d\omega}{dt} \qquad (3)$$

Posons de même la relation de la puissance vive pour le système des poulies $A_1 A_1' A_1''$...... Nous aurons en remarquant que le travail élémentaire des forces F_1..

$P_1 P'_1 \ldots = d\alpha F_1 R$ est un travail résistant :

On aura donc dis-je pour le travail total élémentaire s'exerçant sur le système A_1

$$d\alpha TR - d\alpha F_1 R \text{ ou } d\alpha R (T - F_1)$$

il est égal à la variation élémentaire de puissance vive, donc :

$$R\, d\alpha\, (T - F_1) = d\left(\tfrac{1}{2}\omega^2 M_1 R^2\right)$$

ou en opérant la différentiation

$$R\, d\alpha\, (T - F_1) = \omega\, d\omega\, M_1 R^2$$

Divisant par dt : $R\dfrac{d\alpha}{dt}(T - F_1) = \omega\dfrac{d\omega}{dt} M_1 R^2$

Remarquant que $\dfrac{d\alpha}{dt} = \omega$ et simplifiant

$$\frac{T - F_1}{M_1} = R\frac{d\omega}{dt} \qquad (4)$$

Des équations (3) et (4) on tire :

$$\frac{F - T}{M} = \frac{T - F_1}{M_1}$$

D'où enfin.

$$T = \frac{FM_1 + MF_1}{M + M_1}$$

formule identique à celle que nous avons trouvée dans les autres cas. On en conclut donc comme dans les cas précédents, mais cette fois ci d'une manière complètement générale que pour restreindre les variations qui peuvent survenir dans les actions mutuelles s'exerçant entre les organes d'une machine quelconque, lorsque les forces agissantes viennent à varier brusquement, il faut toujours augmenter le plus possible la masse de l'organe moteur par rapport à celle des organes mus

De toute cette étude résulte donc cette règle pratique importante que dans toute transmission de mouvement il importe de caler sur l'axe moteur un volant d'une masse considérable, car, alors les variations des actions mutuelles qui se produisent entre les organes mus par cet arbre moteur seront très faibles même pour des variations brusques et intenses des forces motrices

Ces excès ou ces diminutions brusques de la puissance motrice viendront pour ainsi dire se briser contre la masse du volant de telle sorte que les organes situés au delà de ce volant ne s'en ressentiront pas. Les chocs dûs à ces variations réduites à leur minimum, seront donc considérablement amoindris ce qui permettra de réduire considérablement les dimensions de toutes les pièces de la machine situées au delà de ce volant et le travail consommé par le frottement diminuera par cela même

Il y a donc grand intérêt au point de vue économique et dynamique tout à la fois à rapprocher autant que possible le volant de l'organe moteur.

Dans les machines à vapeur on le calera donc sur l'axe moteur mis directement en mouvement par la tige, la bielle et la manivelle motrice. Mais ces organes tige du piston, bielle et manivelle placés entre le cylindre moteur et le volant n'étant pas placés sous la sauvegarde de ce dernier, supporteront par contre toutes les variations de l'effort moteur. Il faudra donc leur donner des dimensions considérables calculées d'après l'intensité de ces variations.

Etudions donc les variations des actions mutuelles qui se produisent entre les organes (tige du piston, bielle et manivelle) situés en deça du volant.

Article II.

Etude des variations des actions mutuelles qui se produisent en deça du volant

Considérons l'action que la bielle exerce sur la tige du piston et supposons que la machine soit arrivée à l'état de mouvement uniforme, de vitesse angulaire ω dans la position représentée par la figure, la bielle oppose au mouvement de la tige du piston une certaine résistance T.

Cherchons à calculer cette résistance ou compression. Pour cela considérons l'équilibre dynamique du piston, il est soumis à l'action des 3 forces 1° Pression constante Q de la vapeur 2° Compression T inconnue de la bielle 3° Résistance d'inertie $\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$ du piston P désignant le poids de ce dernier.

D'après le principe de d'Alembert, ces trois forces étant en équilibre on a : $Q = T + \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$. D'où $T = Q - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$

Or si nous négligeons l'obliquité de la bielle, le mouvement du piston est le même que celui du point b projection de B (bouton de la manivelle) donc $\frac{dv}{dt} = \omega^2 x$ Remplaçant, il viendra $T = Q - \frac{P}{g}\omega^2 x$ (1)

Discussion. – Pour $x = \alpha$ (points morts), la compression sera $T' = Q - \frac{P}{g}\omega^2\alpha$ –

Quand la pression s'élève, x diminue donc T augmente. Pour $x = 0$ le bouton est en C et la compression $T = Q$. Au delà de C, x devient négatif et croît depuis 0 jusqu'à α en valeur absolue la tension T devient alors $T = Q + \frac{P}{g}\omega^2\alpha$. On voit ainsi que la formule (1) s'applique pour toutes les positions du bouton de la manivelle x variant de α à α et pendant cette ½ révolution, la compression ~~que~~ la bielle exerce sur la tige

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

du piston varie d'une manière continue entre les valeurs extrêmes $T = Q - \frac{P}{g}\omega^2 a$ et $T = Q + \frac{P}{g}\omega^2 a$

Supposons maintenant que la machine entre dans la 2e 1/2 révolution. La bielle va alors exercer sur la tige du piston une extension au lieu d'une compression et pour calculer cette extension T' nous aurons l'équation : (en remarquant que la vapeur agit maintenant en sens contraire)

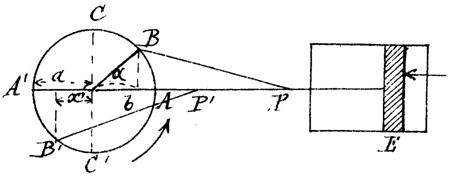
$$Q = T' + \frac{P}{g}\frac{dv}{dt} \qquad \text{d'où} \quad T' = Q - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}.$$

Mais comme tout à l'heure $\frac{dv}{dt} = \omega^2 x'$ et il vient :

$$T' = Q - \frac{P}{g}\omega^2 x'$$

Discussion. — Pr $x' = a$ $T' = Q - \frac{P}{g}\omega^2 a$; x' diminuant jusqu'à 0, T' augmente jusqu'à $T' = Q$ répondant à $x = 0$; à partir de C', x' devient négatif, alors T' croît de $T' = Q$ à $T' = Q + \frac{P}{g}\omega^2 a$ valeur extrême qui répond à $x' = -a$ — Cette discussion montre qu'au point mort A' la tige du piston passe subitement de la compression $Q + \frac{P}{g}\omega^2 a$ à l'extension $Q - \frac{P}{g}\omega^2 a$ (valeurs qui répondent à 2 positions infiniment voisines de A') De là un choc terrible éprouvé par la tige du piston au passage du point mort A' L'effet produit sur la tige du piston est identiquement le même que si on lui appliquait subitement une force $T'' = T + T' = 2Q$

De là résulte cette conséquence pratique :



La tige du piston doit être calculée comme si elle était soumise non pas à l'effort Q mais à l'effort 2 Q, il y a plus, l'effort étant brusque il faut doubler et calculer la tige du piston comme si elle avait à supporter un effort 4 Q.

On sait en effet que l'allongement d'une tige est double lorsqu'au lieu d'appliquer à son extrémité d'une manière lente et progressive un certain poids p par exemple, on applique ce même poids brusquement

= En pratique on diminue énormément le choc supporté par la tige du piston au passage des points morts par l'emploi de la détente la pression Q de la vapeur cesse alors d'être constante. Or :

Nous avons vu que lorsque le bouton de la manivelle arrive près de A' la compression approche de $T = Q + \frac{P}{g}\omega^2 a$ mais s'il y a détente la pression de la vapeur aux environs du point A' au lieu d'être Q est seulement $q < Q$; la compression est alors seulement $T' = q + \frac{P}{g}\omega^2 a$, lorsque le bouton B a dépassé la position A', on a une extension égale à $T' = Q - \frac{P}{g}\omega^2 a$ de sorte que le choc subit est $T'' = T + T' = Q + q$ au lieu de $2Q$, il est donc bien diminué par l'emploi de la détente Cqfd.

Article III.

Du volant considéré comme appareil propre à régulariser le mouvement périodiquement uniforme des machines.

Transition. — On vient de voir de quelle utilité sont les volants convenablement placés pour restreindre les limites entre lesquelles peuvent varier les actions mutuelles d'une machine lorsque l'effort moteur varie brusquement ; les volants rendent un genre de service plus étendu en régularisant autant qu'on le désire le mouvement périodiquement uniforme des machines, mouvement périodique forcé, ainsi qu'il a été dit et dû aux relations géométriques des organes constituant la machine.

Pour comprendre le mode d'action des volants dans ce cas, il suffit d'observer que si un système matériel en mouvement, une machine quelconque possède une grande masse, par suite une grande puissance vive, il pourra recevoir à un certain instant un excès considérable T de travail moteur sur le travail résistant sans que pour cela les vitesses des différents points de la machine varient d'une manière appréciable.

En effet : supposons la machine réduite à un seul corps tournant autour d'un certain axe. Soit ω' la vitesse angulaire de rotation à un certain instant et supposons qu'à partir de cet instant la machine reçoive pendant un temps déterminé un excès T de travail moteur sur le travail résistant ; à l'instant final de ce temps, la vitesse angulaire sera devenue ω'' et sera donnée par la relation des puissances vives appliquée pendant cette durée, laquelle est :

$$\frac{1}{2}\, I\,(\omega''^2 - \omega'^2) = T \qquad (p)$$

Or, cette relation fait voir que quelque grand soit T, on peut toujours faire I c'est-à-dire le moment d'inertie et par suite la masse de la machine assez grande pour que la différence $\omega''^2 - \omega'^2$ et par suite la différence $\omega'' - \omega'$ soit moindre que toute limite imposée d'avance.

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : [illegible]

Nous allons appliquer ce principe à la recherche du poids du volant nécessaire pour un degré de régularisation voulu dans les trois cas suivants :

1° Calcul du volant dans le cas d'une manivelle simple à simple effet

2° -id- -id- double

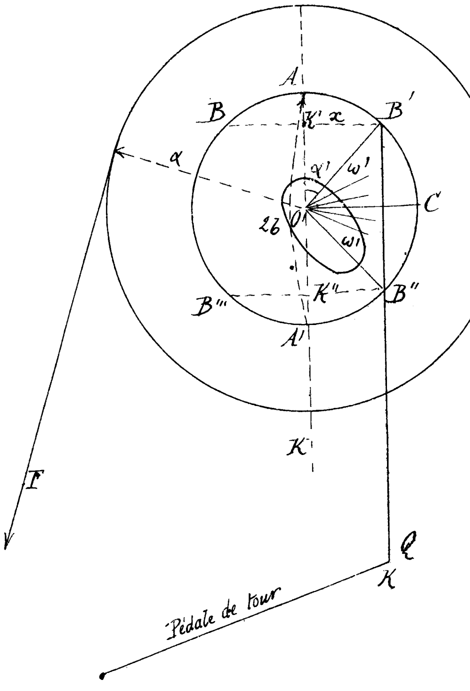
3° -id- -id- double à double effet.

1er Cas. — Calcul du volant dans le cas d'une manivelle simple à simple effet.

Supposons que la bielle B'K exerce un effort constant Q toujours parallèle à lui même et qu'elle n'agisse que pendant la descente (Pédale de tour)

Les résistances constantes F agissent tangentiellement au cercle de rayon a. Pour que le mouvement fut uniforme, il faudrait que le moment de la force F (résistance) fut constamment égal au moment de la force Q (puissance). Or, le moment de la résistance F est toujours égal à Fa : il est constant, tandis que celui de la puissance varie à chaque instant car la force Q est constante mais son bras de levier x varie à chaque instant. Donc le mouvement est varié.

D'ailleurs, la loi de ce mouvement varié, son accélération angulaire sera



donnée par la relation

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_o \text{ des forces extérieures}}{I} = \frac{Qx - Fa}{I}$$

Relation qui fait voir 1° que quelque grand soit I le mouvement est toujours varié puisque $\frac{d\omega}{dt}$ est toujours différent de 0

2° A mesure que croît I, $\frac{d\omega}{dt}$ tend de plus en plus vers 0 donc le mouvement tend de plus en plus à l'uniformité sans jamais l'atteindre à mesure que I augmente

3° Enfin $\frac{d\omega}{dt}$ repassant par les mêmes valeurs pour les mêmes valeurs de x, il en résulte que le mouvement est périodiquement varié

Or, en vertu de l'équation générale de la transmission du mouvement

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70-3

dans les machines pour chaque période (chaque tour ici) le travail moteur doit être égal au travail résistant, ce qui fournit la condition:

$$Q.\,2b = F\,2\pi a \quad \text{ou}\; Qb = F a \pi \quad (1)$$

Discutons actuellement la valeur de cette accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$:

1°. Quand B' est au point culminant A, $x=0$, donc l'accélération angulaire est négative et par suite le mouvement est retardé; x croissant l'accélération angulaire reste négative, mais décroit en valeur absolue jusqu'à 0 qui répond à la valeur $x = \frac{Fa}{Q}$ qui annule $Qx - Fa$. Soit B' la position qui répond à $x = \frac{Fa}{Q}$. On peut conclure de cette première partie de la discussion que de A à B' la vitesse se ralentit et passe par un minimum pour $x = \frac{Fa}{Q}$ qui répond au point B'. En effet, à partir de ce point B' l'accélération angulaire devient positive et par suite la vitesse ω augmente.

2°. x croissant au delà de $\frac{Fa}{Q}$, l'accélération angulaire devient donc positive, croit avec x jusqu'à $x=b$ puis décroit tout en restant positive, jusqu'à 0 le point B' est alors en B'' symétrique de B' répondant encore à la valeur $x = \frac{Fa}{Q}$ qui annule $Qx - Fa$.

On peut conclure de cette 2e partie de la discussion que de B' en B'' la vitesse augmente et passe par un maximum pour $x = \frac{Fa}{Q}$ qui répond au point B''

En effet à partir de ce point B'', $\frac{d\omega}{dt}$ devient négative, par suite la vitesse après avoir été en augmentant diminue, elle passe donc en B'' par un maximum.

3°. Au delà du point B'' l'accélération angulaire devient donc négative et elle augmente en valeur absolue jusqu'à $x=0$ qui répond au point A'.

De cette dernière partie de la discussion on conclut que à partir de B'' point où la vitesse est maximum, la vitesse décroit. En résumé de A en B' la vitesse se ralentit, elle est minimum en B' puis augmente de B' en B'', passe par un maximum en ce dernier point, puis décroit de B'' en A' point où la manivelle cesse d'agir.

Déterminons exactement les situations B' et B'' répondant au minimum et au maximum de la vitesse. Elles sont données par les valeurs d'x satisfaisant à l'égalité $Qx = Fa$ ou bien en remplaçant x par sa valeur en fonction de l'angle α: $x = b\sin\alpha$ par la relation:

$$Qb\sin\alpha = Fa \qquad (2)$$

La comparaison des relations (1) et (2) donne alors $\sin\alpha = \frac{1}{\pi}$ ou $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}$

Formule qui donne les 2 angles supplémentaires.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 34 VIII 20 1

$$\alpha' = 18^\circ\ 33'\ 4''$$

$$\alpha'' = 180^\circ - 18^\circ\ 33'\ 4''$$

Si sur la position OB' du rayon OH, on prend une longueur égale à la vitesse minimum ω', sur OB'' une longueur égale à la vitesse maximum ω'' et sur les rayons successifs à partir du centre des longueurs proportionnelles aux différentes vitesses. J'aurai une courbe qui donnera la vitesse pour chaque position de la manivelle.

Quelque soit I, ces résultats subsistent, c'est à dire qu'il y a toujours une vitesse minimum ω' une vitesse maximum ω'' répondant aux angles α' et α'' (Ceci n'est qu'une vérification puisqu'au commencement nous avons fait voir d'une manière générale que le mouvement était toujours périodiquement varié quelque soit I)

Mais si nous nous rappelons le principe posé en tête de cet article nous savons que nous pouvons toujours choisir I de telle façon que la différence $\omega''-\omega'$ soit moindre que toute quantité donnée. Il suffira ainsi que nous l'avons expliqué de déduire I de la relation des puissances vives

$$\frac{1}{2}\ I\ (\omega''^2 - \omega'^2) = T \quad (p)$$

Dans laquelle T représente l'excès $T_m - T_u$ du travail moteur sur le travail résistant reçu par la machine lorsqu'elle passe de la vitesse minimum ω' à la vitesse maximum ω''. Or (voir la figure) Ici

$$T_m = Q.\, K'K'' = Q\, 2b \operatorname{Cos} \alpha'$$

$$T_u = \frac{F.\, 2\pi a\, (\pi\, 2\alpha')}{2\pi} \quad \text{ou à cause de (1)}$$

$$T_u = Q\, 2b\, \frac{(\pi - 2\alpha')}{2\pi}$$

d'où $T = T_m - T_n = Q.\, 2b.\left(\operatorname{Cos}\alpha' - \frac{\pi - 2\alpha'}{2\pi}\right) = Q.\, 2b\, \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{\pi}\right)$

On en effectuant

$$(3) \quad T = 0\ 5521\, .\, Q\, .\, 2b$$

Imposons nous maintenant la condition que la différence $\omega'' - \omega'$ soit plus petite que le n^e de la vitesse moyenne Ω

on aura la condition $\frac{1}{n}\Omega > \omega'' - \omega'$

mais $\Omega = \frac{\omega' + \omega''}{2}$

($\frac{1}{n}$ est ce qu'on appelle le coefficient de régularité, il est ordinairement compris entre $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{40}$ (Voir le tableau tracé plus loin). Dans les filatures, où la régularité du mouvement est une condition essentielle de la fabrication on adopte cette dernière valeur)

Document numerise par la Bibliotheque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70-3

De ces deux relations on conclut en multipliant membre à membre.

(4) $\frac{\omega''^2-\omega'^2}{2} = \text{ou} < \frac{1}{n}\,\Omega^2$

Remplaçant dans (p) T et $\frac{\omega''^2-\omega'^2}{2}$ par leurs expressions (3) et (4) on a pour déterminer I la relation très simple

$$\frac{1}{n}\,\Omega^2 I = 0{,}5521\,.\,Q.2b \quad (9)$$

(Note – Nous posons $\frac{\omega'+\omega''}{2}=\Omega$ parce que les vitesses angulaires extrêmes ne sont pas connues ; mais on connait ce qu'on appelle la vitesse angulaire de régime c'est à dire celle qu'on déduirait du nombre de tours N faits par l'axe dans une minute si le mouvement était uniforme. On a : $w = \frac{\pi N}{30}$. Or on admet que cette vitesse w est précisément la moyenne entre ω' et ω'', on pose par conséquent : $w = \frac{\omega'+\omega''}{2} = \Omega$.)

Tout est connu dans cette formule sauf le moment d'inertie I cherché, on pourra donc en tirer la valeur.

On obtiendra ainsi le moment d'inertie que doit avoir la machine toute entière pour qu'elle arrive au degré de régularité $\frac{1}{n}$ voulue.

En pratique, pour obtenir encore une plus grande régularité on suppose que les organes de la machine sont dépourvus de puissance vive et on cale sur l'axe moteur un volant dont les dimensions soient telles que son moment d'inertie soit précisément $=$ I – Pour déterminer son poids donnons une autre forme à la relation précédente. (9)

Autre forme de l'équation. – Soit P le poids de la jante du volant. On ne fait entrer dans le calcul afin de le simplifier que le poids de l'anneau ou de la jante du volant, les bras et le moyeu qui sont négligés contribuent à accroître le moment d'inertie et par suite la régularité du mouvement. Soit V la vitesse linéaire d'un point situé à la circonférence moyenne de la jante de ce volant : on aura approximativement :

Puissance vive du volant $= \frac{1}{2}\,\Omega^2 I = \frac{PV^2}{2g}$

et par suite

$$\frac{1}{n}\,\Omega^2 I = \frac{1}{n}\,.\,\frac{PV^2}{g}$$

Remplaçant actuellement $\frac{1}{n}\,\Omega^2 I$ par sa valeur $\frac{1}{n}\,\frac{PV^2}{g}$ dans la relation (9)

Elle devient : $\frac{1}{n}\quad\frac{PV^2}{g} = 0{,}5521\ Q.\ 2\,b.$

Mais Q 2b est le travail moteur pour un tour ; exprimons le en fonction du travail par seconde exprimé en chevaux. Pour cela, désignons par C le nombre de chevaux exprimant la force de la machine par N, le nombre de tours par minute. Le travail moteur par seconde sera $C.75^{km}$, par minute, ce sera $C.75^{km}60$ et par tour $\frac{C.75.60}{N}$ ainsi $Q\,2b = \frac{C.75.60}{N}$

donc $\frac{1}{n}\frac{PV^2}{g} = 0,5521\ \frac{C\,75.60}{N}$

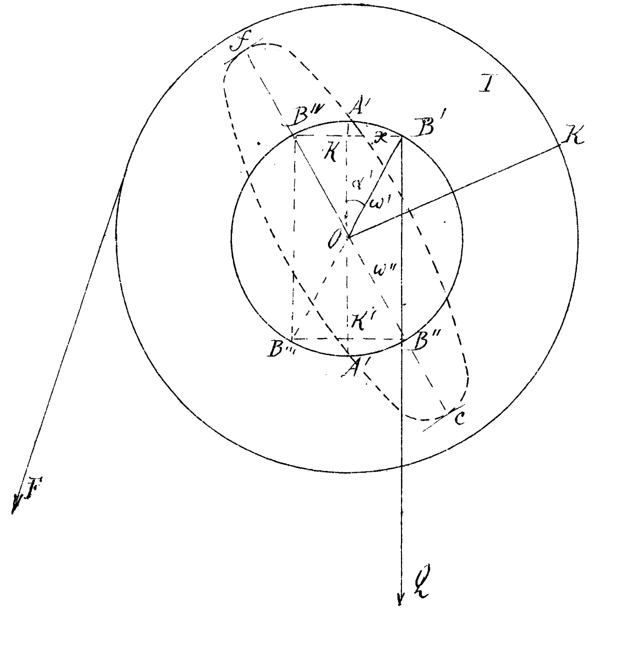
D'où

$$P = 0{,}5521 \times 60 \times 9{,}8 \times \frac{C.n}{NV^2} = \text{environ } 24.300\ \frac{C.n}{NV^2}$$

On obtient ainsi un poids de volant énorme pour la manivelle simple à simple effet. (n est le dénominateur du coefficient de régularité = 40 par exemple si $\frac{1}{n} = \frac{1}{40}$)

2e Cas. Calcul du volant dans le cas d'une manivelle simple à double effet

Nous avons vu que dans le cas où une manivelle simple agit à simple effet le poids du volant à annexer à la machine est considérable. Nous allons montrer qu'on peut beaucoup diminuer le poids de ce volant par l'emploi d'une manivelle simple à double effet, c'est à dire agissant à la fois en descendant et en montant laquelle répartit d'une manière plus uniforme le travail moteur par tours.



La force Q, toujours constante par supposition change de sens à chaque ½ révolution sans cesser toutefois de rester toujours parallèle à elle même, c'est à dire qu'on néglige encore ici l'obliquité de la bielle soit F la résistance constante appliquée tangentiellement au cercle de rayon a.

La loi du mouvement qui va se produire ou l'accélération angulaire aura pour expression

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_o \text{ Forces extérieures}}{I} = \frac{Qx - Fa}{I}$$

Donc 1° quelque soit I le mouvement est varié, car pour qu'il soit uniforme il faudrait que $\frac{d\omega}{dt}$ soit constamment nul, c'est à dire que Qx soit constamment égal à Fa ce qui ne peut pas être puisque x varie à chaque instant entre les limites 0 et b

2° Ce mouvement varié est périodiquement varié, $\frac{d\omega}{dt}$ repassant par les mêmes valeurs pour les mêmes valeurs d'x

3° Ce mouvement étant périodiquement varié. Pour chaque période le travail moteur doit être égal d'après l'équation générale de la transmission du mouvement dans les machines, au travail résistant d'où la condition.

$$F.2\pi a = Q.4b \quad \text{ou} \quad Q\,2b = F.\pi a \qquad (1)$$

qui exprime que la période est d'un demi tour

Quant à la discussion des variations de cette accélération angulaire elle est identique à celle qui a été faite pour le cas de la manivelle simple à simple effet : Résultats : en B', vitesse minimum, en B'' vitesse maximum en B''', minimum — en B'''' maximum.

Pour déterminer exactement les situations B' B''', B'' B'''' répondant aux maximums et aux minimums de la vitesse, il suffit de remarquer qu'elles sont données par les valeurs d'x satisfaisant à l'égalité $Qx = Fa$, or en remarquant que x en fonction de α : $x = b\sin\alpha$, par la relation.

$$Qb\sin\alpha = Fa \qquad (2)$$

mais à cause de la condition $2.Qb = Fa\pi$

On a par division $\quad \sin\alpha = \frac{2}{\pi} \quad$ et $\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$

qui donne $\quad \alpha' = 39°32'4$

$$\alpha'' = 180° - 39°32'4.$$

La construction de la courbe des vitesses se fait également de la même manière et l'on obtient l'espèce d'ellipse indiquée en pointillé dans la figure.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 56 VIR 76 3

– Quelque soit I ces résultats subsistent toujours c'est à dire que pour chaque demi tour il y a une vitesse minimum ω' et une vitesse maximum ω'' répondant aux angles α' et α'' – Mais en se rappelant le principe établi on sait que l'on peut toujours choisir I de telle façon que la différence $\omega''-\omega'$ soit moindre que toute quantité donnée :

Il suffira pour cela ainsi que nous l'avons expliqué de tirer I de l'égalité
$$\frac{1}{2}\, I\,(\omega''^2-\omega'^2) = T \quad (Q)$$
Dans laquelle on s'imposera la différence $\omega''^2-\omega'^2$ ainsi qu'il est dit plus loin, T représentant d'ailleurs l'excès $T_m - T_n$ du travail moteur sur le travail résistant reçu par la machine lorsqu'elle passe de la vitesse minimum ω' à la vitesse maximum ω'' Or ici (voir figure);
$$T_m = Q.KK' = Q.2b\cos\alpha'$$
$$T_n = F.\frac{2\pi a(\pi-2\alpha')}{2\pi} = \frac{F\pi a(\pi-2\alpha')}{\pi} = \text{à cause de } (1) = Q.2b\frac{(\pi-2\alpha')}{\pi}$$

D'où $$T = T_m - T_n = Q\ 2b\left(\cos\alpha' - \left(\frac{\pi-2\alpha'}{\pi}\right)\right) = Q.2b\left[\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}} - 1 + \frac{2\alpha'}{\pi}\right] = 0,1052 \, . \, Q\,4b$$
D'ailleurs en posant encore $\omega''-\omega' < \frac{1}{n}\Omega$

avec la condition $\frac{\omega''+\omega'}{2} = \Omega$

---

d'où on déduit $$\frac{\omega''^2-\omega'^2}{2} = < \frac{1}{n}\Omega^2$$
et remplaçant dans (Q), T et $\frac{\omega''^2-\omega'^2}{2}$ par les valeurs trouvées, on a enfin pour déterminer I la relation: $$\frac{1}{n}\Omega^2 I = 0,\ 1052\ .\ Q.4b$$
Négligeons la masse de la machine elle même et calculons le poids P de la jante d'un volant ayant précisément ce moment d'inertie I.

Pour cela en désignant par V la vitesse linéaire du point moyen de la jante, on a
$$\text{Puissance vive du volant} = \frac{1}{2}\Omega^2 I = \frac{PV^2}{2g}$$
$$\text{et par suite } \frac{1}{2}\Omega^2 I = \frac{1}{n}\frac{PV^2}{g}$$
Si nous remplaçons $\frac{1}{n}\Omega^2 I$ par sa valeur en fonction de P dans la relation précédente : elle deviendra: $$\frac{1}{n}\frac{PV^2}{g} = 0,\ 1052\ Q4b$$
mais $$Q.4b = \frac{C75.60}{N} \qquad \text{Donc}$$
$$\frac{1}{n}\frac{PV^2}{g} = 0.1052\times 75\times 60\ \frac{C}{N}$$
D'où enfin $$P = 0,1052\times 75\times 60\times 9.8\ \frac{C.n}{NV^2} = 4645\ \frac{Cn}{NV^2}\ \text{environ}.$$

Ce poids est beaucoup moins considérable que celui du volant à employer dans le cas d'une manivelle simple à simple effet poids que nous avons trouvé être égal à environ $24300 \frac{Cn}{Nv^2}$. Cela était d'ailleurs facile à prévoir vu la meilleure répartition du travail moteur par tour. La durée de la période en effet, au lieu d'être ici d'un tour n'est que d'un demi tour.

Ainsi l'emploi d'une manivelle simple à double effet réduit déjà considérablement le poids du volant à annexer à la machine pour un même degré de régularisation à obtenir.

3e Cas Calcul du volant dans le cas d'une manivelle double à double effet.

Nous avons vu comment on peut par l'emploi d'une manivelle simple à double effet réduire beaucoup le poids du volant. Nous allons montrer comment on peut diminuer encore le poids de cet organe en distribuant d'une manière plus régulière le travail moteur par tour.

Pour cela accouplons 2 machines à vapeur sur le même axe au moyen d'une manivelle double c'est à dire au moyen de deux manivelles disposées à angle droit sur cet axe moteur.

1° Montrons d'abord comment cette disposition répartit le travail moteur par tour d'une manière plus régulière que la précédente.

Soient OB, OC les deux manivelles dans une position quelconque. Supposons que les bielles sont assez longues pour qu'on puisse négliger leur obliquité et supposer par suite qu'elles demeurent constamment parallèles à elles mêmes. Nous supposons toujours d'ailleurs que l'effort qu'elles exercent toutes deux est le même et constant = Q pendant tout le mouvement.

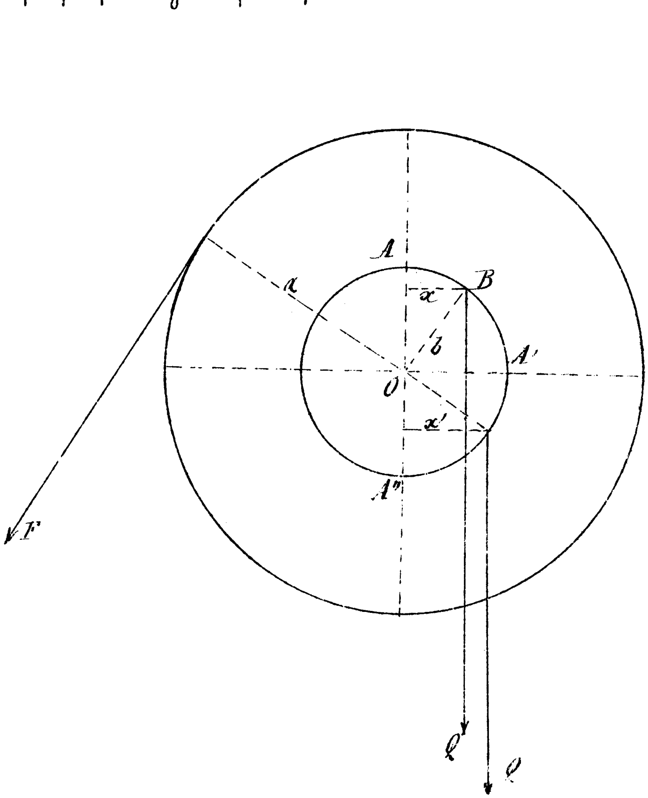
Or lorsque les manivelles sont en OA et OA' le moment de la 1ère force est nul mais celui de la 2e est maximum. En OB et OC, le moment de la 1ère force a augmenté celui de la 2e a diminué et lorsque OB sera en OA' et OC en OA'' le moment de la 1ère force sera maximum, celui de la 2e force sera nul &c... &c.

Ainsi lorsque le moment de l'une des forces augmente, l'autre diminue et réciproquement on comprend donc que la somme de ces moments ou le moment moteur soit plus constant que dans les cas précédents.

La résistance F étant toujours constante et appliquée tangentiellement au cercle de rayon a : son moment est constant celui de la puissance est variable, donc le mouvement

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

quoique plus régulier que le précédent sera néanmoins encore varié



Il sera périodique attendu que les mêmes alternatives se reproduiront à chaque quart de tour.

Tout cela d'ailleurs est facile à conclure de la loi du mouvement qui se produit laquelle n'est autre que l'expression de l'accélération angulaire à chaque instant.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o \text{ Forces exter}}{I} = \frac{Q(x+x') - Fa}{I}$$

Le mouvement étant périodique :

Appliquons à un tour complet le principe de la transmission du travail dans les machines exprimons par conséquent que le travail moteur par tour est égal au travail résistant par tour

On aura la condition : $Q\,8b = F\,2\,\pi a$

ou $Q\,2b = Fa\frac{\pi}{2}$ (1)

Or $Q\,2b$ représente le travail des forces mouvantes pour 1/4 de tour ; $Fa\frac{\pi}{2}$ représente le travail résistant également pour un quart de tour, donc la relation (1) indique que le mouvement est en effet uniformément périodique pour chaque quart de tour, le mouvement sera donc plus régulier que dans les 2 cas précédents ainsi qu'on l'avait déjà fait prévoir.

Étudions actuellement les variations de l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$

1° Quand B est au point culminant A : $x = 0$ $x' = b$ donc $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Qb - Fa}{I}$, or à cause de (1) on a $Qb = Fa\frac{\pi}{4}$, donc $Qb - Fa < 0$, donc l'accélération angulaire est négative, on en conclut que la vitesse se ralentit, le mouvement est retardé

2° Quand les 2 manivelles ont tourné de 1/4 de tour, on a de nouveau

$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Qb - Fa}{I}$, l'accélération angulaire repasse donc par la même valeur, c'est une vérification qui nous prouve une fois de plus que le mouvement est uniformément périodique par chaque quart de tour.

3°. Les maximum et les minimum de la vitesse dans chacune de ces périodes d'un quart de tour sont donnés pour les valeurs d'x et d'x' qui annulent $\frac{d\omega}{dt}$. On aura donc pour déterminer leurs positions l'égalité :

$$Q(x + x') = Fa$$

Or $x = b \sin \alpha$ $\quad x' = b \cos \alpha$ donc l'égalité précédente devient

$$Qb(\sin \alpha + \cos \alpha) = Fa$$

D'où $\quad \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{Fa}{Qb}$

Mais en vertu de la relation (1) $\frac{Fa}{Qb} = \frac{4}{\pi}$, l'égalité devient :

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{\pi} \quad (\alpha)$$

Ce sont les valeurs de α qui satisfont à cette équation qui donnent les positions des 2 manivelles qui répondent aux maximum et aux minimum de la vitesse.

Pour déterminer ces valeurs, je remarque à cause de la forme de l'égalité (α) que si α' y satisfait $\frac{\pi}{2} - \alpha'$ y satisfera aussi. (Ces deux valeurs répondent l'une α' au minimum, et l'autre $\frac{\pi}{2} - \alpha'$ au maximum) Il résulte de là que les positions cherchées OB et OB' sont symétriques par rapport à Oy menée à 45°. — En partant de cette observation pour simplifier l'équation (α) je vais changer de variable et poser : $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$: elle deviendra alors :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{4}{\pi} \quad (\alpha')$$

Développons $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \beta - \sin \beta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \beta + \sin \beta)$$

Additionnant et remplaçant dans (α') il vient :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cos \beta = \frac{4}{\pi} \quad \text{d'où} \quad \cos \beta = \frac{4}{\pi \sqrt{2}}$$

Formule qui donne pour β les 2 valeurs égales et de signes contraires :

$$\beta' = 25° \, 48'$$

$$\beta'' = -25° \, 48'$$

D'où on tire $\quad \alpha' = 45° - 25° 48' = 19° 12'$

$$\alpha'' = 45° + 25° 48' = 70° 48'$$

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

On peut encore trouver plus rapidement α' et α'' de la façon suivante :

On part toujours de la relation : $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{\pi}$ et il s'agit d'en tirer α.

J'ai successivement : $\sin\alpha + \sin(90° - \alpha) = \frac{4}{\pi}$

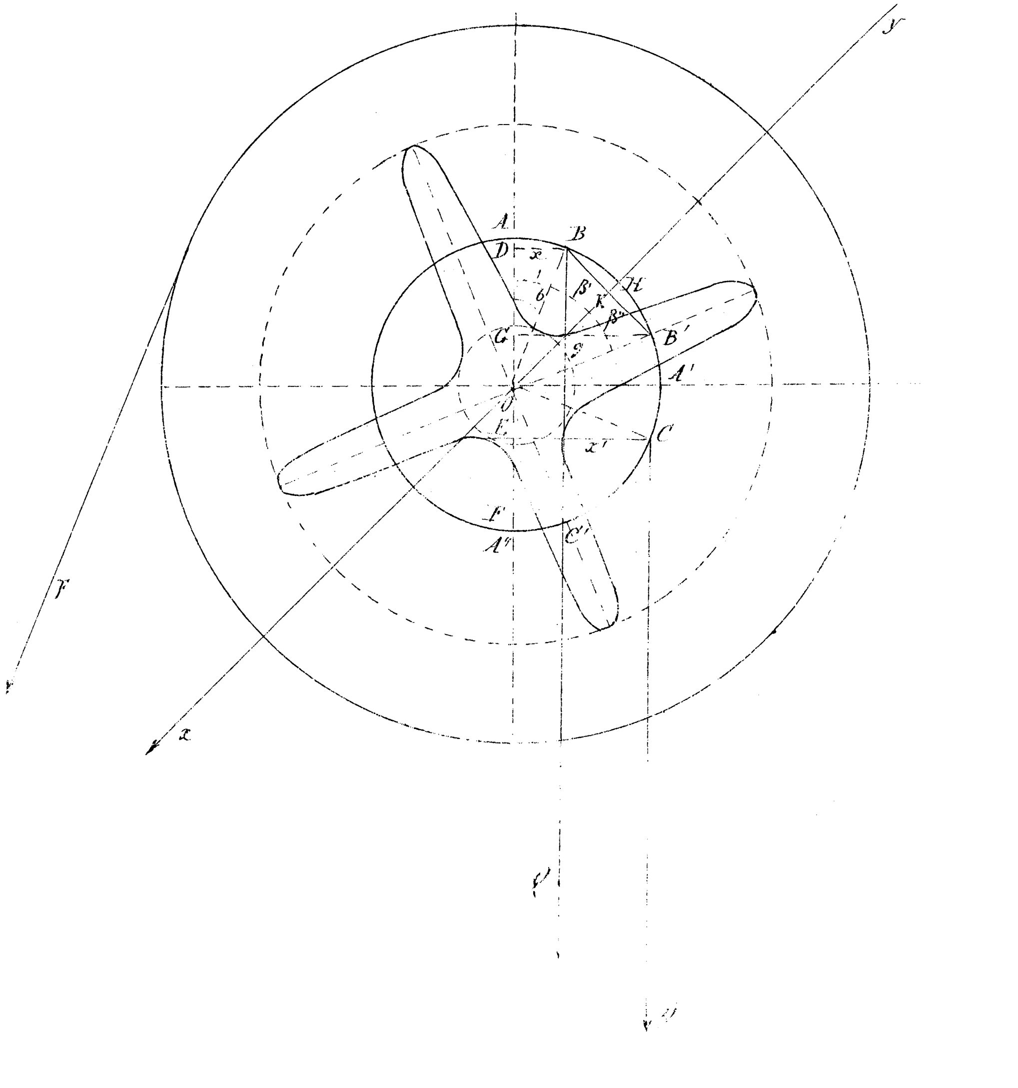
ou $2 \sin 45° \cos(45° - \alpha) = \frac{4}{\pi}$ or $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\cos(45° - \alpha) = \frac{4}{\pi\sqrt{2}}$

on en déduit : en posant

$$45° - \alpha = \beta : \left.\begin{array}{l}\beta' = 25°48' \\ \beta'' = -25°48'\end{array}\right\} \text{et par suite} \left\{\begin{array}{l}\alpha' = 19°12' \\ \alpha'' = 70°48'\end{array}\right.$$

et l'on peut remarquer que $\alpha' + \alpha'' = 90°$



Si sur la figure et sur la direction OB du rayon, je prends une longueur représentant la vitesse minimum ω', sur OB' une longueur représentant la vitesse maximum ω' et en général sur tous les rayons des longueurs représentant les vitesses correspondantes on obtiendra une courbe qui donnera les variations de la vitesse pour chaque position de la manivelle, cette courbe est marquée sur la figure.

Quelque soit I ces résultats subsistent toujours, c'est à dire que pour chaque avant de tour, il y a une vitesse minimum ω' et une vitesse maximum ω'' répondant aux angles α' et α'' — Mais en se rappelant le principe établi on sait que l'on peut toujours choisir I de telle façon que la différence $\omega''-\omega'$ soit moindre que toute quantité donnée. Il suffira pour cela ainsi que nous l'avons expliqué de tirer I de l'égalité.

$$\frac{1}{2} I (\omega''^2 - \omega'^2) = T \quad (9)$$

Dans laquelle on s'imposera la différence $\omega''^2 - \omega'^2$ ainsi qu'il est dit plus loin

T représente d'ailleurs l'excès $T_m - T_u$ du travail moteur sur le travail résistant reçu par la machine lorsqu'elle passe du minimum ω' au maximum ω''

Évaluons donc le travail moteur T_m. — Or quand le bouton de la 1ère manivelle passe de B en B' du 1er minimum au 1er maximum, le travail de la 1ère force Q est $Q \cdot DG$

Quand le bouton de la 2e manivelle passe de OG à OG' le travail de la 2e force Q est $Q \cdot EF$

Par suite le travail moteur est $T_m = Q\,(DG + EF)$ Or $DG = Bg$ et $EF = DG = Bg$

donc $T_m = 2\,Q \cdot Bg$.

Évaluons Bg : Le triangle rectangle $B\,g\,B'$ nous donne

$$\overline{Bg}^2 = \overline{BB'}^2 - \overline{B'g}^2 \qquad \text{Or } Bg = B'g \text{ donc}$$

$$2\,\overline{Bg}^2 = \overline{BB'}^2 \qquad \text{Reste à évaluer } BB'.$$

Or on a $BK = b \sin \beta'$ donc $BB' = 2b \sin \beta'$ et par suite

$$2\,\overline{Bg}^2 = 4\,b^2 \sin^2 \beta'.$$

d'où $\qquad Bg = \sqrt{2} \cdot b \sin \beta'.$

donc enfin $T_m = 2\sqrt{2}\, b \sin \beta'\, Q$.

2°. Évaluons maintenant le travail résistant T_u. Pour un tour complet, ce travail résistant est $F\,2\pi a$. Il nous faut le calculer pour l'angle $2\beta'$;

Il sera évidemment : $T_n = \frac{F 2\pi a \times 2\beta'}{2\pi} = F.2\pi a.\frac{\beta'}{\pi}$

Donc $T' = T_m - T_n = 2\sqrt{2}\, b \sin\beta'.\,Q - F 2\pi a.\frac{\beta'}{\pi}$

mais la condition de périodicité nous a donné la relation :

$$8\,Q b = F 2\pi a.$$

donc $T = T_m - T_n = 8\,Qb\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\beta' - \frac{\beta'}{\pi}\right)$

Effectuant on trouve : $T = 8\,Qb \times 0{,}0106$

D'ailleurs en posant encore

$$\omega'' - \omega' = \frac{1}{n}\Omega$$

avec la condition : $\frac{\omega''+\omega'}{2} = \Omega$

d'où on déduit : $\frac{\omega''^2 - \omega'^2}{2} = \frac{1}{n}\Omega^2$

et remplaçant enfin dans (9) T et $\frac{\omega''^2-\omega'^2}{2}$ par leurs valeurs, il vient enfin $\frac{1}{n}\Omega^2 I = 0{,}0106 \;\; 8\,Q b$

De cette formule on pourra tirer I moment d'inertie du volant cherché.

Pour déterminer le poids P de ce volant, nous raisonnerons comme précédemment et nous aurons en adoptant les mêmes notations.

C. 75 = Travail par seconde exprimé en Kilogrammètres

C. 75. 60 = id id minute

$8\,Qb = \frac{C.75.60}{N} =$ id pour un tour (N représentant le nombre de tours par minute). alors la dernière relation prend la forme, en remarquant de plus que $\frac{1}{n}\Omega^2 I = \frac{1}{n}\frac{PV^2}{g}$

$$\frac{1}{n}\Omega^2 I = \frac{1}{n}\frac{PV^2}{g} = 0{,}0106\,\frac{C.75.60}{N}$$

d'où $P = 0{,}0106 \times 75.60 \times 9{,}8\,\frac{Cn}{NV^2}$ = environ $468\,\frac{Cn}{NV^2}$

Nous voyons aussi qu'à une meilleure répartition du travail moteur correspond un poids du volant beaucoup plus faible que dans tous les cas précédents.

Formule générale donnant le poids du volant à annexer aux divers genres de machines à vapeur.

En résumé, nous avons trouvé que le poids du volant est donné

Dans le cas d'une manivelle simple à simple effet : par la formule $P = 34300.\frac{C}{NV^2}\,n$.

id id id double effet : .... $P = 4645\,\frac{C}{NV^2}.\,n$

id id double à double effet : ..... $P = 468\,\frac{C}{NV^2}\,n$

On voit donc par la comparaison de ces trois formules que le poids du volant est d'autant plus faible que le travail moteur se trouve mieux réparti par tour ce qui était d'ailleurs évident a priori.

Si nous appliquions la même méthode analytique au cas d'une manivelle triple, quadruple etc etc à double effet, nous trouverions pour le même motif des poids de volant de plus en plus faibles.

D'une manière générale la formule donnant le poids de la jante du volant nécessaire pour un degré $\frac{1}{n}$ de régularisation est donc donné quelque soit le genre de la machine et son mode de fonctionnement par la formule

$$P = K \frac{C}{NV^2} . n .$$

dans laquelle P représente le poids du volant ou plutôt de la jante du volant N le nombre de tours par minute, C le nombre de chevaux exprimant la force de la machine n le dénominateur du coefficient de régularité, V la vitesse d'un point situé à la circonférence moyenne de la jante du volant et enfin K un coefficient qui varie suivant la nature de la machine et qui va en diminuant à mesure que le travail moteur se trouve mieux réparti par tour.

Mais dans ces cas compliqués d'une manivelle double triple &a. surtout si l'on veut tenir compte 1°. de l'obliquité de la bielle 2°. des variations de l'effort qu'elle exerce (la machine marchant toujours avec plus ou moins de détente) 3°. de l'inertie des pièces oscillantes 4°. enfin des résistances de frottement toutes circonstances que nous avons négligées : La Méthode analytique précédente pour déterminer le poids du volant devient extrêmement pénible pour ne pas dire impossible. On remplace alors dans ces cas difficiles cette méthode analytique par une méthode graphique extrêmement commode et applicable sans difficultés aux cas les plus compliqués.

C'est cette méthode graphique que nous allons expliquer.

Méthode graphique. Nous négligerons encore dans l'application de cette méthode graphique 1°. l'inertie des pièces oscillantes, 2°. l'influence du frottement ; l'approximation obtenue de cette manière sera suffisante parce qu'on ne fait entrer dans le calcul du poids du volant que sa jante, et que les bras ainsi que le moyeu et les autres pièces montées sur le même axe ajoutent par leur inertie à la régularité cherchée.

= Tableau

Tableau relatif aux machines sans détente à condensation ou sans condensation (Q est alors constant).

Genre de la Machine		Valeurs de K	Valeurs de n
A Balancier et à 1 seul cylindre	Bielle infinie	4645.	
	Bielle = 6 fois la long. de la manivelle	5227.	
	Bielle = 5 id id	5528.	
	Bielle = 4 id id	5829.	32
Sans Balancier La bielle = 5 fois la long. de la manivelle	Pour une manivelle simple	5892.	
	id 2 manivelles à angle droit	1581.	
	id 3 id angles égaux	416.	

Tableau relatif aux machines à détente à condensation ou sans condensation (Q est alors variable)

Genre de la machine		Pression	Détente	K	n
A Balancier	Bielle infinie	5 atmosphères	1/3	7064	
	Bielle égale 5 fois la longueur de la manivelle	5 id....	1/2	7080	
			1/3	8186	
			1/4	9218	
			1/5	10231	
		6 id....	1/2	6975	32
			1/3	7949	
			1/4	8914	
			1/5	9695	
			1/6	10351	
Sans Balancier	Bielle égale à 5 fois la longueur de la manivelle Cylindre oscillant	6 id...	1/4	8598	
			1/2	7292	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 34 VIR 703

Calcul graphique du poids du volant. Application particulière au cas d'une machine à vapeur horizontale à détente en tenant compte du degré de détente et de l'obliquité de la bielle.

Soit A B C [Voir fig(α) et fig (β)] la courbe représentant la loi des variations de la pression dans le cylindre pour chaque coup de piston (le degré de détente étant supposé $= \frac{1}{4}$); on construira une seconde courbe en prenant pour abscisses les angles α décrits dans le cercle de rayon 1 et pour ordonnées les moments moteurs correspondants Qq - Cette courbe OG A H B I G J D représente par conséquent la loi des variations du moment moteur et la surface S le travail moteur par tour car la surface comprise entre deux ordonnées infiniment voisines a pour expression $Qq\,d\alpha$ représentant le travail élémentaire de la force Q.

La résistance étant toujours supposée constante et appliquée tangentiellement à la même circonférence son moment sera également constant, il en résulte que le travail résistant qu'elle effectue par tour sera représenté par un rectangle tel que O E F D mais puisqu'il y a périodicité par tour la surface de ce rectangle c'est à dire le travail résistant est nécessairement égale à la surface S représentant le travail moteur - De là on conclut que si on divise S estimé d'après la méthode de Thomas Simpson par 2π on aura la hauteur de ce rectangle, représentant le moment constant Fa de la résistance - Dès lors 1° les points G H I J qui répondent aux abscisses og, oh, oi, oj donnent les points où le moment moteur est égal au moment résistant c'est à dire les points où la vitesse passe par un minimum ou par un maximum - D'ailleurs il est facile de voir que les points g et i répondent aux minimums et h et j aux maximums. De plus l'aire G A H = S' représente l'excès $T_m - T_n$ du travail moteur sur le travail résistant quand le bouton de la manivelle passe de g en h c'est à dire quand la vitesse passe d'un minimum ω' au maximum ω'' suivant: - Ce travail est précisément celui que le volant doit emmagasiner à l'état de puissance vive en passant de ce minimum à ce maximum. Dès lors le moment d'inertie de ce volant toujours donné par la formule

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2)\, I = T_m - T_n$$

sera en s'imposant comme précédemment la condition $\omega'' - \omega' < \frac{1}{n}\Omega$ Ω représentant la vitesse moyenne $\frac{\omega'+\omega''}{2}$ et en remplaçant $T_m - T_n$ par sa valeur S' mesurée graphiquement au moyen de la formule de Thomas Simpson : sera donnée dis-je par la formule :

$$\frac{1}{n}\ \Omega^2 I = S'$$

Si l'on veut avoir son poids il suffit de remarquer qu'on a approximativement $\frac{1}{n}\ \Omega^2 I = \frac{1}{n}\ P\ \frac{V^2}{g}$. La relation précédente devient donc :

$$\frac{1}{n}\ P\frac{V^2}{g} = S' \quad \text{d'où } P = \frac{S' g \cdot n}{V^2}$$

——— Nous terminons le sujet de cet article en donnant deux tableaux renfermant les valeurs que prend le coefficient K de la formule.

$$P = K\ \frac{G}{N V^2}\ .\ n$$

servant à calculer le poids des volants dans tous les cas qui peuvent se présenter et pour un degré de régularisation donné $\frac{1}{n} = \frac{1}{32}$.

Remarque. — La détente produisant une grande inégalité dans la répartition du travail moteur par tour, on conçoit qu'une machine à détente exige un plus fort volant qu'une machine sans détente et que ce volant soit d'autant plus fort que la détente est peu considérable, c'est ce que vérifie en effet les chiffres des deux tableaux précédents.

Fig (α)

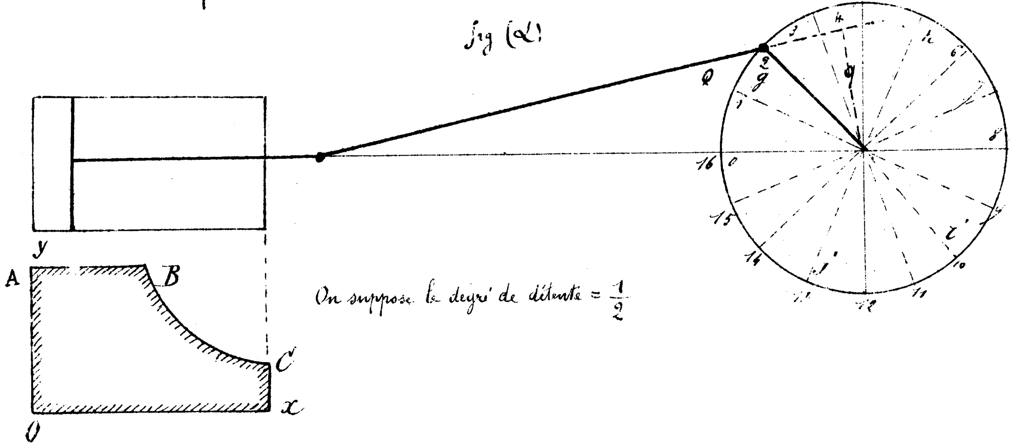
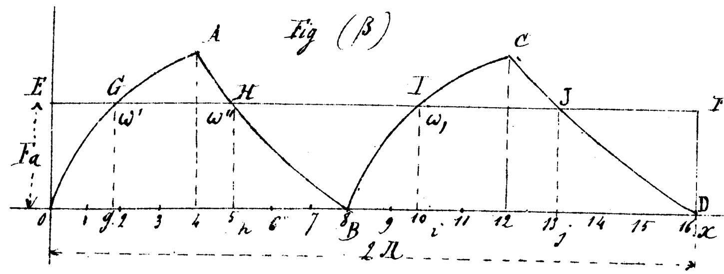
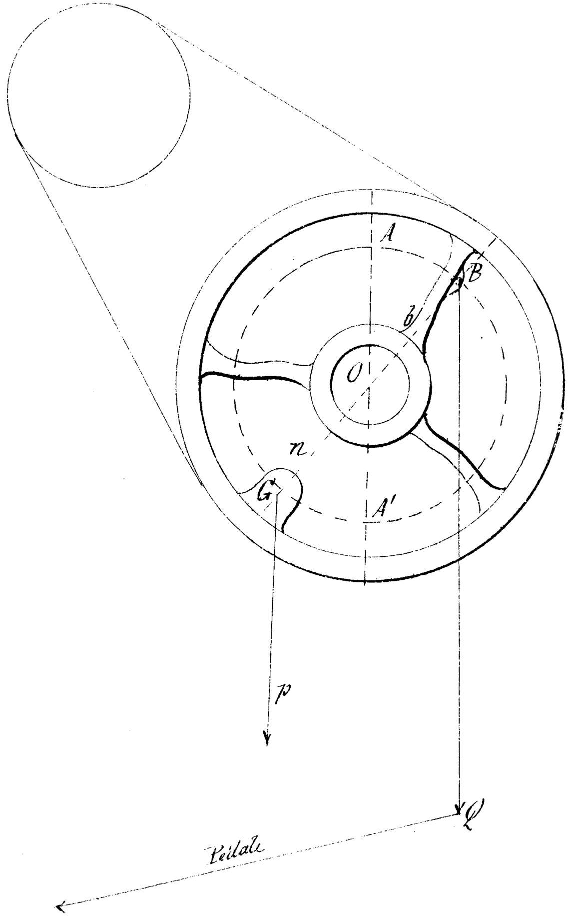


Fig (β)



Article IV

Des contrepoids considérés comme organes propres à mieux répartir le travail moteur par tour et par suite comme organes de régularisation de mouvement.



Jusqu'à présent nous n'avons parlé des masses en mouvement que comme moyen de régulariser le mouvement des machines et de resserrer les limites entre lesquelles peuvent varier les actions mutuelles des divers organes lorsque les forces motrices viennent à varier. Mais pour que ces masses en mouvement puissent avoir cet effet, il faut nécessairement et nous l'avons supposé implicitement — 1° qu'elles soient animées d'un mouvement continu toujours de même sens et par conséquent d'un mouvement de rotation que de plus ces masses en rotation soient parfaitement centrées sans quoi les composantes centrifuges d'inertie en déterminant sur l'axe des tractions variables de direction à chaque instant, donneraient lieu à des vibrations tendant à désorganiser la machine.

Dans certains cas cependant si l'on néglige cet inconvénient les masses excentrées sous forme de contrepoids peuvent présenter certains avantages sérieux entr'autres celui de régulariser le mouvement par suite de la meilleure répartition du travail moteur par tour. — Nous en donnerons comme exemple :

1°. Le contre poids dans la manivelle simple à simple effet. 2°. Le contre poids dans la manivelle simple à double effet.

1°. Du contrepoids dans la manivelle simple à simple effet.

Considérons une manivelle simple à simple effet et calons sur le prolongement de la manivelle OB et en sens contraire de la direction OB, un contrepoids de poids p. Je dis que ce contrepoids p convenablement choisi a un effet tel que la manivelle simple à simple effet, se conduit maintenant comme si elle était à double effet.

En effet : Dans la période de descente, le travail moteur est Q 2b ; mais une partie de ce travail est utilisée à relever le contre poids ; Q 2b ; n'est donc pas totalement utilisé pour le travail que l'on veut effectuer, une partie p 2r sert à l'élévation du contre poids p de sorte que le travail réellement disponible ou le travail utile dans cette période est seulement :

$$Q.2b - p.2r$$

Or, supposons que le contre poids p ait été choisi de façon à satisfaire à l'égalité : $p.2r = Qb$ (dans laquelle tout est connu sauf p) il en résultera que le travail disponible utile sera dans cette période

$$Q.2b - p.2r = Q.2b - Q.b = Q.b.$$

Quand le bouton de la manivelle est en A', la force Q cesse d'agir, mais à ce moment, le contre poids p qui est en A dépasse ce point mort en vertu de l'inertie puis la pesanteur intervenant il restitue par sa chute, le travail p.2r dépensé pour son élévation. Mais ce travail p.2r, dans cette seconde période est égal à Q.b, donc le travail moteur fourni par la chute du contrepoids dans la 2e période est Qb, il est ainsi le même que celui de la force Q pendant la 1ère période (travail utilisé, bien entendu) donc la machine se comporte comme une manivelle simple à double effet. Dès lors on emploiera pour calculer le poids du volant dans ce cas la formule.

$$P = 4645 \frac{Cn}{NV^2}$$

au lieu d'employer la formule : $P = 24300 \frac{Cn}{NV^2}$.

Du contrepoids dans la manivelle simple à double effet.

Considérons maintenant une manivelle simple à double effet et supposons pour un moment que nous ayons placé le contre poids p de la même manière que dans la manivelle simple à double effet.

Je dis que de cette manière au lieu de régulariser le mouvement il aura au contraire pour effet de donner une grande irrégularité à la machine.

En effet dans la période de descente le travail moteur est $Q\,2b$, il est diminué du travail résistant de p qui est $p\,2r$; de sorte que le travail moteur disponible est $Q.2b - p\,2r$; dans la 2e période au contraire le travail moteur $Q\,2b$ de la manivelle lorsque son bouton passe de A' en A est augmenté de $p.2r$, travail restitué par le contre poids, ainsi le travail moteur qui est $Q.2b - p\,2r$ dans la 1re période devient $Q\,2b + p\,2r$ dans la 2e, on voit qu'il a considérablement augmenté (de $p\,4r$) et comme d'ailleurs le travail résistant $F.2\pi$ a par tout resté constant, il en résulte des irrégularités considérables dans le mvt de la machine.

Mais supposons qu'on fixe le contre poids à un axe O' lié à l'axe moteur O par 2 roues d'engrenages telles que lorsque l'axe O fait un tour, l'axe O' en fait deux ($a = 2a'$) supposons de plus que lorsque le bouton B de la manivelle passe aux points morts A et A'' le bras de levier du centre de gravité du contrepoids p soit horizontal

Je dis que le contrepoids ainsi placé aura pour effet de régulariser le mouvement et de permettre de calculer le poids du volant comme dans le cas d'une manivelle double à double effet.

Je dis d'abord que le contrepoids va régulariser le mouvement.

En effet, nous savons que lorsque le bouton de la manivelle passe du point mort A au point B' (Voir la fig suivante) qui répond à un minimum de la vitesse le mouvement est retardé, mais le contre poids descendant de la position G' en G'' exerce un travail positif qui diminue alors l'irrégularité qui tend à se produire dans le mouvement de la machine. De B' en B'' au contraire le mouvement est accéléré le travail moteur augmente, mais une partie de ce travail est employée à élever le contre poids de G'' en G'''; en d'autres termes le travail du contre poids pendant cette période est négatif puisqu'il s'élève et par suite le travail moteur sera diminué.

En résumé, de A en B', la vitesse est retardée mais le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche F', le contre poids tend à accélérer la vitesse en descendant de G' en G'' — De B' en B'' la vitesse va en croissant mais alors le contre poids passe de G'' en G''' et exerce aussi un travail résistant tendant à diminuer cette vitesse, Enfin de B'' en A'' la vitesse se ralentit mais le contrepoids passant de G''' en G' exerce un travail positif tendant à accroître cette vitesse. On conçoit donc ainsi que le contrepoids puisse régulariser le mot

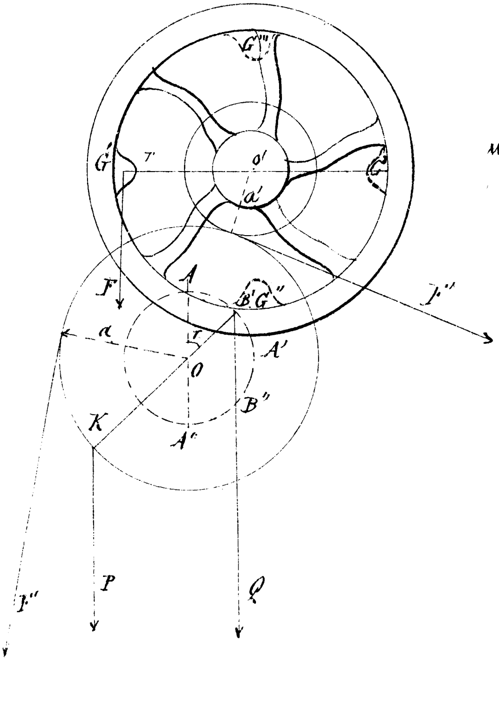
De plus les mêmes dispositions d'organes se reproduisant les mêmes à chaque 1/4 de tour, il suit que le mouvement sera nécessairement périodique par chaque quart de tour.

Calcul du contre poids. - Nous voulons actuellement calculer ce contre poids de façon que la manivelle simple à double effet considérée agisse comme une manivelle double à double effet. Nous raisonnerons comme il suit :

Le mouvement devant être périodique pour chaque quart de tour, l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ doit repasser par les mêmes valeurs aux points A et A'.

Or on a : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{I}$ et comme I est constant il faut que $\Sigma M_o F$ soit le même en A et A'. Mais les forces extérieures qui agissent sont : 1° La force motrice Q. 2° le contrepoids p ; 3° la force résistante F

En A : 1° le moment de la force motrice Q est nul - 2° Calculons le moment du contre poids et pour cela remarquons que p agissant sur un bras de levier r produit le même effet qu'une force F' déterminée par la relation :



$F'a' = pr$ d'où $F' = \frac{pr}{a'}$ et comme le moment de p est le même que celui de F' on a : pour ce dernier en multipliant les deux membres par a $F'a = pr\frac{a}{a'} = 2pr$

tel est donc le moment du contre poids p par rapport à l'axe projeté en O

3° Le moment de la résistance F est Fa,

Donc en A la somme des moments des forces extérieures est :

$$2pr - Fa \quad (1)$$

(J'affecte le moment de la résistance du signe − car en A le moment $2pr$ du contrepoids est moteur, celui Fa de la force F est résistant leur somme algébrique est donc $2pr - Fa$)

Considérons maintenant la position A' du bouton de la manivelle.

En A' : 1° le moment de la force motrice Q est Qb ; 2° Celui du contrepoids p toujours égal à $2pr$ est maintenant résistant ; 3° il en est de même du moment Fa de la force resistante F, donc la somme des moments des forces extérieures est en A'.

$$Qb - 2pr - Fa \qquad (2)$$

En égalant les expressions (1) et (2) nous aurons exprimé qu'en A et A' la vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ repasse par les mêmes valeurs, et que, par suite le mot est périodique pour chaque $1/4$ de tour.

Nous aurons ainsi :

$$2pr - Fa = Qb - 2pr - Fa$$

ou

$$4pr = Qb$$

ou enfin

$$p = \frac{Qb}{4r}$$

Le contre poids ainsi calculé aura une action telle que la manivelle se comportera comme si elle était double et à double effet, dès lors la formule à employer pour le calcul du volant dans ce cas sera

$$P = 468 \cdot \frac{Cn}{NV^2} \text{ au lieu de la formule } P = 4645 \frac{Cn}{NV^2}$$

qui donnerait un poids de volant beaucoup trop considérable.

Article V.

Des contrepoids considérés comme organes propres à assurer la stabilité des machines en mouvement

---

Nous venons de voir dans l'article précédent quelle est l'utilité des contrepoids. Ils permettent de réduire le poids des volants par suite de la meilleure répartition du travail moteur par tour, mais ces masses excéntrées

Document numerise par la Bibliotheque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70-3

non équilibrées autour de l'axe de rotation ainsi que je l'ai déjà dit un grave inconvénient, celui de donner lieu par suite des composantes centrifuges d'inertie développées par la rotation à des vibrations funestes tendant à désorganiser la machine. — Or cet inconvénient que je signale dans le cas particulier des contrepoids, inconvénient dû au changement de position du centre de gravité, se manifeste nécessairement dans toute machine en mouvement, en effet. — Une machine quelconque se compose de deux parties bien distinctes, l'une fixe c'est le bâtis et tous les organes en repos, l'autre mobile se compose de — l'ensemble de tous les organes en mouvement. — Or le centre de gravité de cette partie mobile varie de position à chaque instant, il en résulte des efforts variables sur le bâtis qui est fixe se traduisant par des vibrations dans toutes les directions. Nous allons dans cet article étudier en détail ces actions perturbatrices dues au déplacement du centre de gravité et les moyens employés dans l'industrie pour atténuer leurs funestes effets.

Causes d'instabilité des machines fixes.

Considérons d'abord le cas d'une machine fixe reposant sur un sol parfaitement horizontal, n'exerçant aucun frottement; nous aurons là un système matériel sur lequel n'agira aucune force extérieure et d'après le théorème du mouvement du centre de gravité, quelles que soient les actions intérieures qui se produisent, le centre de gravité général devra rester en repos absolu.

Or supposons qu'à un certain instant par suite du jeu même de la machine le centre de gravité de la partie mobile s'avance en avant pour que le centre de gravité général reste en repos il faudra nécessairement que le centre de gravité de la partie fixe recule en arrière; le bâtis et les pièces fixes prendront donc un mouvement de recul. Un raisonnement analogue montrerait que si le centre de gravité de la partie mobile vient à reculer, la machine (bâtis et organes fixes) prendra nécessairement un mouvement d'arrière en avant. Et comme ce mouvement d'avant et d'arrière du centre de gravité de la partie mobile se fait d'une manière continue par suite du mouvement continu de la machine, celle ci tout entière va prendre un mouvement horizontal vibratoire de va et vient que l'on appelle mouvement de tangage dans les locomotives.

Supposons actuellement que le bâtis soit fixé au sol au moyen d'assemblages quelconques dans ce cas le bâtis ne pouvant plus se déplacer lorsque le centre de gravité de la partie mobile se porte en avant ou en arrière le centre de gravité général du système se portera aussi en avant ou en arrière, mais en vertu du théorème général du mouvement du centre de gravité cela ne peut.

(1) E. 3.

se produire que par suite de l'action d'une force extérieure. Cette force extérieure n'est autre que la réaction N des appuis de la machine sur cette machine réaction variable à chaque instant et due aux mouvements intestins de la partie mobile de cette machine.

Pour trouver l'expression de cette réaction il suffira d'ailleurs d'appliquer au mouvement du centre de gravité général de la machine le principe de d'Alembert: En vertu de ce principe, à chaque instant du mouvement il y a équilibre dynamique entre les forces extérieures: (N et la résistance d'inertie du centre de gravité $\left(M \frac{do}{dt}\right)$

on a donc l'égalité: $$N - M \frac{do}{dt} = 0$$

M masse totale de la machine, $\frac{do}{dt}$ accélération de son centre de gravité

D'où on conclut $N = M \frac{do}{dt}$.

C'est la mesure de l'effort que la machine fait pour s'arracher de ses appuis D'ailleurs $\frac{do}{dt}$ étant alternativement positif et négatif il résulte de ces efforts successifs de signes contraires des vibrations qui absorbent toujours une certaine partie du travail moteur. Ces vibrations existent toujours lors même que les appuis sont inébranlables attendu que tous les matériaux sont tous plus ou moins compressibles.

Nous avons supposé jusqu'à présent des déplacements simplement horizontaux du centre de gravité de la partie mobile de la machine.

Concevons actuellement que le centre de gravité de cette partie mobile s'élève, si nous supposons le sol parfaitement inébranlable le centre de gravité général va également s'élever ce qui ne peut avoir lieu que par l'apparition d'une force extérieure laquelle n'est autre que la réaction verticale N. du sol sur la machine. Or en vertu du principe de d'Alembert à chaque instant du mouvement de ce centre de gravité général il y a équilibre entre les forces extérieures N, P le poids de la machine et la résistance d'inertie. $M \frac{do}{dt}$.

On a donc:

$$P + M \frac{do}{dt} - N = 0 \quad \text{d'où } N = P + M \frac{do}{dt}.$$

De cette formule on conclut 1° Que dans l'état de repos la réaction $N = P$ — 2° Que quand le centre de gravité s'élève $\frac{do}{dt}$ étant positif, cette réaction augmente de $M \frac{do}{dt}$. 3° Que quand le centre de gravité s'abaisse, $\frac{do}{dt}$ devient négatif et cette réaction diminue de $M \frac{do}{dt}$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 34 VIR 70-3

Les mêmes phénomènes se passent également dans les êtres animés qui au point de vue mécanique ne se distinguent aucunement des machines ordinaires. Ainsi quand un homme accroupi se relève brusquement, la réaction du sol est plus grande que celle qui a lieu dans l'état de repos, laquelle est égale au poids du corps. Si au contraire il s'affaise subitement, cette réaction diminue

Si comme dans les locomobiles, la partie mobile était reliée à la partie fixe, (le train de roues) par l'intermédiaire de ressorts, alors de l'élévation et de l'abaissement du centre de gravité résulterait une série d'oscillations ou vibrations verticales. Nous remarquerons que ces vibrations existent lors même qu'il n'y a pas de ressorts attendu que les matériaux étant toujours plus ou moins compressibles agissent comme de véritables ressorts.

Enfin si nous considérons actuellement le mouvement continu de la machine fixe considérée Ces oscillations ou vibrations verticales & horizontales vont se produire successivement à intervalles égaux & donner lieu à un mouvement de galop sur place inverse du mouvement de galop qu'effectue la partie mobile de la machine (Piston, Bielle et Manivelle.)

Ces vibrations sont non seulement funestes au point de vue de la conservation de la machine mais aussi au point de vue du travail utile transmis, car tous ces mouvements anormaux absorbent toujours une certaine portion du travail moteur.

Causes d'instabilité des Machines mobiles.

Nous venons d'étudier les effets nuisibles de déplacement du centre de gravité dans les machines fixes, ces effets sont encore plus accentués dans le cas des machines mobiles comme les locomotives.

Une locomotive se compose en principe de deux machines à vapeur horizontales accouplées reposant ainsi que la chaudière sur un chassis ou plate forme supportée par les essieux des roues. Ces deux machines horizontales en agissant sur des manivelles calées à angle droit sur l'essieu des roues motrices donnent ainsi le mouvement à la machine. On peut donc regarder par conséquent la locomotive comme se composant de deux parties bien distinctes. 1° l'une relativement fixe c'est la réunion du chassis de la chaudière, des cylindres &a 2° l'autre mobile par rapport à la première supposée fixe et se composant des pistons, tiges bielles et manivelles.

Cela établi, considérons actuellement une locomotive remorquant un train ; au bout d'un certain temps le système sera arrivé au régime uniforme et le train remorqué maintiendra à l'état d'uniformité parfaite, le mouvement du centre de gravité général de la locomotive ; mais je l'ai dit, cette locomotive se compose de deux parties, l'une relativement fixe, l'autre mobile : or, à certains instants le centre de gravité de la partie mobile se porte en avant (relativement à la partie fixe) donc pour que le mouvement du centre de gravité général reste parfaitement uniforme, il faudra que la partie relativement fixe, c'est-à-dire le châssis et la chaudière se porte en arrière, l'effet inverse se produira lorsque le centre de gravité de la partie mobile se portera en arrière. Il résulte de là que le déplacement de la locomotive ne sera pas une simple translation mais une translation accompagnée d'oscillations horizontales d'avant en arrière et d'arrière en avant. Ce mouvement oscillatoire s'appelle dans les locomotives mouvement de tangage.

Mais ce mouvement n'est pas le seul effet secondaire venant modifier la parfaite uniformité du mouvement de la locomotive, en effet, le centre de gravité de la partie mobile de la locomotive s'élève et s'abaisse aussi à certains instants qui se répètent périodiquement de là résulte en raisonnant comme pour les machines fixes que si le châssis supportant cette partie mobile repose sur les essieux par l'intermédiaire de ressorts, toute cette partie mobile va osciller dans le sens vertical — autrefois les cylindres moteurs étaient verticaux et les oscillations dont nous parlons étaient tellement fortes que les fonds des cylindres étaient brisés, c'est pourquoi on les dispose aujourd'hui horizontalement.

Si l'on supprime les ressorts intermédiaires, les élévations et abaissements alternatifs du centre de gravité rendent variable, la pression verticale sur les rails elle augmente lorsque le centre de gravité s'élève ; elle diminue quand il s'abaisse et comme le mouvement de toutes les pièces (bielle, tige, manivelle &c.) dépend de celui des roues motrices, il en résulte que ces augmentations et diminutions de pression se reproduisent périodiquement à chaque tour de roue. dès lors ce sont toujours les mêmes points de la jante de ces roues qui éprouvent des réactions maximums, il en résulte que certaines portions des bandages s'usent plus rapidement que les autres, ainsi après un parcours de 20000 Kilom. l'expérience vérifie qu'il s'y est

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3

produit des creux qui atteignent souvent un demi centimètre il faut alors remettre les roues sur le tour pour leur rendre leur forme circulaire et après trois ou quatre réparations semblables, le bandage doit être renouvelé.

Observons actuellement que ces oscillations dans le sens horizontal et vertical coexistant ensemble ou plutôt se suivant périodiquement à intervalles égaux, il en résulte un mouvement de galop inverse du mouvement de galop qu'effectue la partie relativement mobile de la locomotive piston, tige, bielle et manivelle. Ce mouvement a été dans certains cas tellement prononcé qu'il a pu quelquefois sinon causer seul des déraillements par le soulèvement des roues d'avant, du moins, s'ajouter pour une grande part aux autres raisons de ces accidents.

Tout ce qui précède s'applique séparément à chacune des machines horizontales placées de chaque coté de la locomotive, il en résulte si l'on remarque que les manivelles sont calées à angle droit que le mouvement de galop qui a lieu d'un coté d'avant en arrière par exemple, a lieu de l'autre coté d'arrière en avant, d'où résulte deux nouveaux mouvements complémentaires.

1°. Un mouvement de roulis c'est à dire un balancement s'effectuant autour d'un axe horizontal dirigé suivant la voie et passant par le centre de gravité de la locomotive. 2° Un mouvement de lacet c'est à dire un balancement s'effectuant autour d'un axe vertical passant par le centre de gravité. Ce balancement projette alternativement la locomotive sur un rail puis sur l'autre et tend à produire de fréquents déraillements aussi faut il s'attacher à le combattre le plus possible ce qui se fait en rapprochant les cylindres moteurs du plan vertical moyen de la locomotive. Ce mouvement de lacet très dangereux se propage d'ailleurs dans toute l'étendue du convoi de sorte que celui ci s'avance pour ainsi dire en serpentant.

En résumé, nous trouvons dans les machines comme mouvements anormaux :

1°. Mouvement de tangage. 2°. Mouvement vertical. 3°. Mouvement de galop. (résultant des 2 précédents) 4°. Mouvement de lacet. 5°. Mouvement de roulis.

Moyens employés pour éviter ces mouvements anormaux et par suite pour assurer la stabilité des Machines

Comment s'opposera-t-on à la production de ces mouvements anormaux ?

Dans les machines fixes, on assurera solidement la machine au moyen d'assemblages puissants.

Dans les machines mobiles comme les locomotives, on fera usage de contrepoids.

Que faut-il en effet pour éviter tous ces mouvements? Puisqu'ils sont tous dus au déplacement non uniforme du centre de gravité général, il suffit d'établir ce dernier dans un état parfait de mouvement uniforme.

On obtiendra facilement ce dernier résultat en fixant aux roues motrices sur le prolongement des manivelles motrices des contrepoids dont l'expérience aura déterminé la valeur.

Il résultera en effet de cette disposition que lorsque le bouton de la manivelle se portera en avant auquel cas le centre de gravité de la partie mobile se porte aussi en avant; le contrepoids reculera en arrière; on conçoit donc que si le contrepoids a été convenablement choisi, ces deux effets contraires pourront s'équilibrer, c'est-à-dire que le centre de gravité de la partie mobile y compris le contrepoids pourra ainsi se conserver dans un état parfait de repos relatif. On verrait de même que lorsque le centre de gravité de la partie mobile s'élève ou s'abaisse le contrepoids descend ou s'élève & tend toujours à maintenir dans une position fixe le centre de gravité de la partie mobile. Il résulte de là que le centre de gravité général occupe une position parfaitement fixe dans la locomotive et par suite que son mouvement est parfaitement uniforme.

Chapitre III.

Théorie dynamique des Modérateurs.

Nous avons reconnu (Art. III. Chap. 1er) l'insuffisance du volant dans les machines et la nécessité d'autres organes proportionnant à chaque instant la puissance à la résistance. Il s'agit d'étudier ces organes connus sous le nom générique de modérateurs.

Nous examinerons successivement.

1° Les modérateurs à force centrifuge & leurs congénères; 2° les modérateurs à air et à eau; 3° les modérateurs à mouvement d'horlogerie.

Art. 1er

Article 1er.

Modérateur à force centrifuge.

Ce sont des mécanismes employés pour les machines, et particulièrement dans les machines à vapeur pour maintenir dans des limites données les variations de la vitesse de régime.

Le plus généralement adopté est le régulateur de Watt dont nous avons donné la description et le mode d'action au chap. 1er

En voici la théorie mathématique:

1er Point Considérons le système dans son état normal répondant à la vitesse angulaire constante ω vitesse dite de régime — Dans cet état la résistance du manchon se réduit à son propre poids, comme ce poids est très faible relativement au poids des boules on peut le négliger et pour le même motif négliger également le poids des leviers DC, OA. Dès lors on peut considérer la boule A en rotation uniforme autour de OD comme étant en repos relativement à un système de comparaison (A x y z) entraîné en translation circulaire par le centre de gravité de cette boule A. Par suite on peut appliquer à ce système les conditions d'équilibre absolu à la condition de joindre aux forces réelles:

1° Le poids de la boule A

2° La réaction du levier OA.

Les forces apparentes dues au mouvement d'entrainement, or ce dernier mouvement étant circulaire et uniforme les forces apparentes se réduisent à la composante normale d'inertie

3° $\frac{P}{g}\omega^2 r$

dirigée comme l'indique la flèche.

Ces trois forces étant en équilibre la relation des moments autour de l'axe projeté en O donne:

$\frac{P}{g}\omega^2 r \cdot h = P\,r$ (le moment de T = 0 puisque T passe par l'axe O d'où (1) $h = \frac{g}{\omega^2}$

Formule indépendante du poids des boules & de la distance r elle prouve donc:

1° Qu'il n'y a, pour un pendule donné qu'une seule position d'équilibre répondant à la vitesse angulaire donnée.

2° Que la caractéristique h de cette position d'équilibre est indépendante du poids des boules (ce qui suppose qu'on a négligé le poids du manchon et des leviers)

3° que cette caractéristique est également indépendante de la longueur l du pendule, de telle sorte qu'il y a une infinité de pendules répondant à la question.

Si nous voulions tenir compte du poids propre du manchon et des leviers. Nous verrions également que pour la vitesse du régime ω donnée.
1° il n'existe qu'une seule position d'équilibre pour un pendule donné.

2° Mais que la caractéristique h de cette position d'équilibre n'est plus indépendante du poids des boules mais qu'elle en dépend ainsi que de ceux du manchon et des leviers.

2e Point - Supposons maintenant que la vitesse de régime augmente, les boules vont tendre à s'élever mais alors la résistance ($2R$) de la vanne ou valve résistance se communiquant au manchon par l'intermédiaire des leviers bb. va entrer en jeu et s'opposer à l'élévation des boules. On conçoit donc que la vitesse angulaire de rotation ω de l'arbre, doive atteindre une certaine valeur pour que cette résistance ($2R$) du manchon soit vaincue.

Donc, réciproquement : Connaissant cette résistance $2R$ on peut calculer le poids des boules de telle sorte qu'elles ne puissent s'élever ou s'abaisser c'est à dire vaincre la résistance $2R$ que pour telles limites inférieures et supérieures assignées aux variations de la vitesse. Plus ces limites inférieures et supérieures seront rapprochées de la vitesse de régime ω, plus l'appareil sera sensible.

Imposons nous par exemple la condition que les boules ne s'élèvent ou s'abaissent que pour une vitesse.

$$\omega' = \omega \pm \frac{\omega}{K} = \omega\left(1 \pm \frac{1}{K}\right) \quad \begin{array}{l} + \text{ quand les boules s'élèvent} \\ - \text{ . . . . elles s'abaissent} \end{array}$$

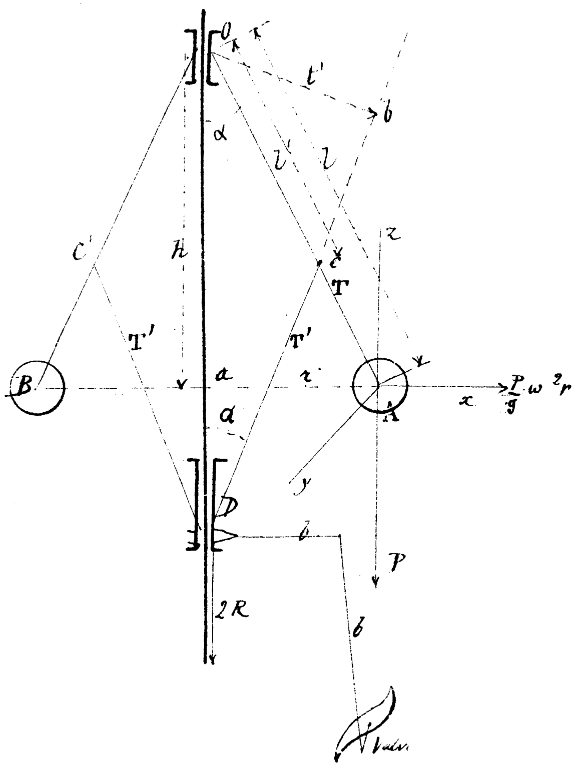
Plus ω' sera rapproché de ω ou plus K sera grand plus l'appareil sera sensible, K mesure donc le degré de sensibilité. C'est le coefficient de sensibilité. Cherchons actuellement quel est le poids à donner aux boules pour qu'elles s'élèvent ou s'abaissent dès que la vitesse ω est devenue ω' ? A cet instant où la vitesse ω' est atteinte, la boule A étant sur le point de s'élever par exemple, est en équilibre relatif sous l'action des forces

Forces réelles $\begin{cases} 1^o\ P \text{ poids de la boule} \\ 2^o\ T \text{ traction ou tension de la tige} \\ 3^o\ T' \text{ traction ou tension du levier } DC \end{cases}$

Force apparente $\{ 4^o\ -\frac{P}{g}\omega^2 r.$

Ces quatre forces étant en équilibre, la relation des moments autour de l'axe projeté en O donne.

(2) $Pr + T't' = \frac{P}{g}\omega^2 r.h$ Le moment de $T = 0$, T passant par l'axe.



Dans cette formule T' et t' ne nous sont pas connues. Calculons-les :

1° Calcul de T'.

Le manchon est en équilibre sous l'action des deux forces T' et de la force $2R$. On doit donc avoir en projetant sur la verticale (les équations de l'équilibre se réduisent évidemment ici à celle de projection sur la verticale)

$$2T'\cos\alpha = 2R$$

d'où $T' = \frac{R}{\cos\alpha}$

mais le triangle rectangle OAa donne $\cos\alpha = \frac{h}{l}$ donc

(3) $T' = \frac{R}{h}.l$

2° Calcul de t'

Les 2 triangles rectangles ObD et OAa sont semblables et nous donnent

(4) $t' = \frac{2l'hr}{l^2}$ (en remplaçant $\cos\alpha$ par sa valeur $\frac{h}{l}$)

Des égalités (3) et (4) on déduit :

$$T't' = \frac{2l'Rr}{l}$$

Remplaçant cette valeur de $T't'$ dans l'équation (2) d'équilibre, on aura :

$$\frac{P}{g}\omega'^2 r h = Pr + \frac{2f'Rr}{l}$$

ou : $\frac{\omega'^2}{g}.h = 1 + \frac{2f'R}{Pl}$ mais $\omega'^2 = \omega^2\left(1+\frac{1}{K}\right)^2$, donc :

la relation précédente devient : $\frac{\omega^2}{g}\left(1+\frac{1}{K}\right)^2.h = 1 + \frac{2f'R}{Pl}$ et comme : $h = \frac{g}{\omega^2}$ (1) on aura :

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^2 = 1 + \frac{2f'R}{Pl} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K^2} + \frac{2}{K} = \frac{2f'R}{Pl}$$

mais $\frac{1}{K^2}$ est une quantité négligeable devant $\frac{2}{K}$ (K étant toujours très grand, ordinairement compris entre 20 et 30) — On aura donc enfin :

$$P = K.R.\frac{f'}{l}$$

formule qui fera connaître le poids à donner aux boules pour atteindre la sensibilité voulue marquée par la valeur de K, R représenté d'ailleurs la 1/2 résistance du manchon.

Si au lieu de considérer l'équilibre à l'instant où la boule A est sur le point de s'élever, mais est sur le point de s'abaisser, il faudrait changer K en −K, mais aussi R en −R ; on arriverait donc à la même valeur pour P ce qui prouvent que les boules n'éprouvent pas plus de difficulté à monter qu'à descendre

La sensibilité de l'appareil étant ainsi qu'il a été dit proportionnelle à K et P en vertu de la formule précédente étant proportionnelle à K, il résulte que la sensibilité est proportionnelle au poids des boules.

Pratiquement, la valeur de 2K varie par suite des poussières interposées et d'une foule d'autres causes : il en résulte que le poids des boules calculé comme il précède peut devenir insuffisant pour soulever le manchon aux limites fixées.

On obvie alors à cet inconvénient en faisant les boules creuses de façon à pouvoir augmenter à volonté leurs poids en versant dans leur intérieur de la grenaille de plomb, suivant les besoins.

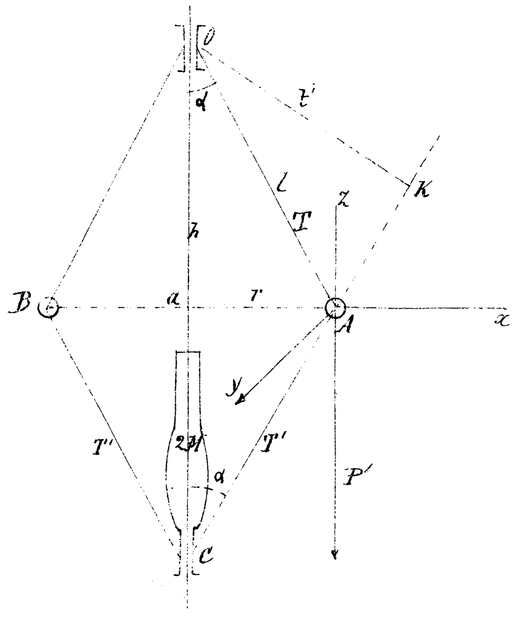
Application. Supposons que $K = 20$ $\frac{l}{l'} = \frac{3}{2}$ et $R = 0^K5$. Ces données fournissent pour le poids des boules 6^K6. Ainsi on voit que les boules doivent être très lourdes pour une résistance $2R = 1K$ relativement faible.

Ce résultat montre bien qu'il est de toute impossibilité d'appliquer directement le modérateur aux vannes des roues hydrauliques présentant une résistance considérable. Car alors il faudrait donner aux boules des dimensions colossales, pour qu'elles puissent vaincre cette résistance. De là la nécessité des appareils intermédiaires que nous avons décrit dans le Chapitre 1er.

Document numerise par la Bibliotheque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote . 84 VIR 70-3

Reprenons la formule précédente donnant le poids des boules & supposons qu'on y fasse $l' = l$, le pendule prend alors la forme d'un simple losange articulé et la formule donnant le poids des boules relatif à ce cas devient : — $P = K\,R$.

Pour la même résistance $2\ R = 1^{kg}$ que ci-dessous on trouverait pour le poids des boules $P = 10^{K}$. On obtient donc un poids de boules plus considérable que dans le cas précédent, il semble donc que cette modification ne soit pas heureuse, mais Mr. Porter a indiqué un perfectionnement qui permet de réduire considérablement ce poids de boules par l'addition d'une masse agissant sur le manchon et le surchargeant.



Nous allons pour cela démontrer que ce poids additionnel 2 M adjoint au manchon produit le même effet sous le rapport de la sensibilité que s'il était transporté à chaque boule.

1er Point. — Considérons en effet l'appareil dans l'état de vitesse de régime uniforme ω. A cet instant la boule A est en équilibre relatif dans le système de comparaison mobile $A\,x\,y\,z$ sous l'action des tensions T, T' du poids P' des boules et de la résistance d'inertie $\frac{P'}{g}\omega^2 r$. On aura donc, en posant l'équation d'équilibre des moments autour de l'axe projeté en O : (On néglige le poids du manchon très petit par rapport à la masse additionnelle 2 M.)

$$\frac{P'}{g}\,\omega^2 r\,h = P'r + T't' \quad (\text{le moment de } T \text{ est nul.})$$

Il nous faut calculer T' et t' = 1° Calcul de T'. La masse additionnelle est en équilibre, sous l'action de son poids 2 M et des 2 tensions T'. en posant l'équation d'équilibre de projection sur la verticale on aura :

$$2M = 2T'\cos\alpha$$

d'où $\quad T' = \dfrac{M}{\cos\alpha} = M\,\dfrac{l}{b}$ (car $\cos\alpha = \dfrac{b}{l}$)

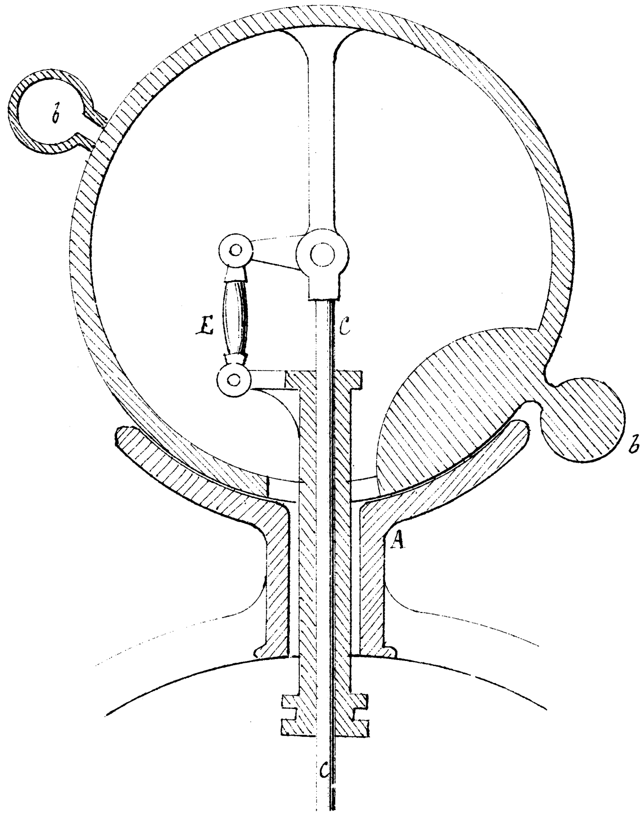
Calcul de t' les triangles OKC et OAa nous donnent :

$$t' = \frac{2hr}{l}$$

Donc $\quad T't' = M \cdot 2r \quad$ et par suite

$$(1) \quad \frac{P'}{g}\omega^2 h = P' + 2M$$

Modérateur de Davies dit Anneau de Saturne.



2e Point - Supposons maintenant que les boules tendent à s'élever : la vitesse de régime augmentant, la résistance de la valve 2 R va alors entrer en jeu

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70-3

et s'ajouter au poids 2 M de la masse additionnelle pour s'opposer à cette élévation, c'est à dire pour qu'elle puisse se reproduire pour que cette résistance 2 M + 2 R soit vaincue il faudra que la vitesse de rotation de l'arbre atteigne une certaine valeur. Supposons par exemple que l'on veuille que l'élévation des boules ne commence que lorsque la vitesse angulaire de rotation a atteint $\omega' = \omega\left(1+\frac{1}{K}\right)$

A cet instant où cette vitesse ω' est atteinte, la boule A est en équilibre sous l'action des forces P', T'_1, T et la résistance d'inertie $\frac{P'}{g}\omega'^2 r$. En posant l'équation d'équilibre on aura donc une relation identique à la précédente seulement le poids 2 M sera remplacé par 2 M + 2 R et ω^2 par ω'^2 on aura donc :

$$\frac{P'}{g}\omega'^2 h = P' + 2M + 2R$$

ou : (2) $\frac{P'}{g}\omega^2\left(1+\frac{1}{K}\right)^2 h = P' + 2M + 2R$

En divisant les équations (1) et (2) membre à membre, on aura :

$$\left(1+\frac{1}{K}\right)^2 = \frac{P'+2M+2R}{P'+2M} = 1 + \frac{2R}{P'+2M}$$

ou

$$\frac{2}{K} + \frac{1}{K^2} = \frac{2R}{P'+2M}$$

$\frac{1}{K^2}$ est négligeable devant $\frac{2}{K}$ on a donc :

$$K = \frac{P'+2M}{R} \qquad \text{d'où} \qquad P'+2M = KR$$

Si je compare cette formule avec la formule trouvée $P = KR$ lorsqu'on ne suppose pas de masse additionnelle, je vois que dans le modérateur de Mr Porter, pour atteindre la même sensibilité il suffit que le poids des boules soit tel que $P'+2M = P$

ou $\qquad P' = P - 2M$

Ainsi, en plaçant sur le manchon mobile une masse de poids 2 M on pourra, pour le même degré de sensibilité diminuer le poids de chaque boule de 2 M. Le poids de chaque boule sera ainsi considérablement diminué et la même sensibilité atteinte.

Modérateurs congénères du Modérateur à force centrifuge.

Nous allons examiner maintenant les diverses formes que l'on donne au modérateur à force centrifuge.

Ces formes diverses très nombreuses et quelquefois fort bizarres cachent au fond le même principe que celui du modérateur à force centrifuge, et la théorie précédente leur est applicable presque sans modifications.

1° Modérateur de Davies, dit Anneau de Saturne

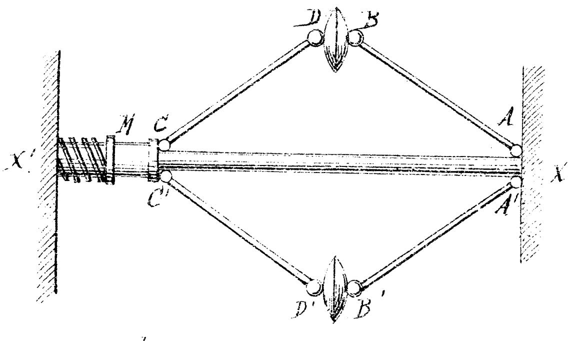
Ici comme dans le modérateur à force centrifuge ordinaire, c'est l'action

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 58 VIR 763

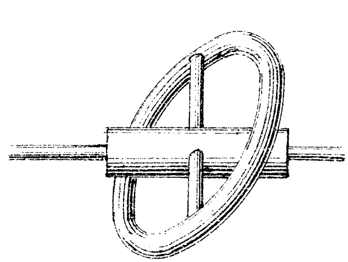
de la pesanteur qui lutte encore contre l'action des composants centrifuges d'inertie et rend ainsi l'appareil sensible aux changements de la vitesse. Le croquis ci-contre indique suffisamment d'ailleurs les détails de l'appareil.

2° Modérateur de Fland. Dans ce modérateur, l'axe de rotation est horizontal l'appareil se compose d'un losange articulé; les leviers A B A' B' sont fixées à l'axe; les lignes C D C' D' sont fixées au manchon. Les boules sont remplacées par des masses de forme lenticulaire qui tendent à s'écarter de l'axe sous l'influence de la force centrifuge. Le manchon qui tend alors à se rapprocher de l'extrémité A A' en glissant le long de l'axe est retenu par un ressort en hélice fixé à l'axe du côté X' et dans cet appareil l'action de la pesanteur est constamment nulle parceque l'une des deux boules s'élève d'une quantité précisement égale à celle dont l'autre s'abaisse mais l'action du ressort remplace cette action en contrebalançant l'effet des composantes centrifuges d'inertie elle empeche ainsi l'aplatissement complet du losange et le rend également sensible aux variations de la vitesse. D'ailleurs comme dans le modérateur Porter, on peut diminuer le poids des boules tout en conservant le même degré de sensibilité en donnant une plus grande puissance au ressort.

Modérateur Fland.



Modérateur de Duvoir.



3° Modérateur de Duvoir ou anneau de Saturne Perpendiculairement à l'axe de rotation est monté un axe secondaire autour duquel peut tourner un anneau pesant embrassant l'axe principal.

L'action de la force centrifuge tend à placer l'anneau dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, tandis qu'un ressort fixé par ses extrémités à

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : B4 VIII 70 3

l'axe et à l'anneau tend à coucher celui-ci le long de l'axe.

L'anneau a généralement 2 positions d'équilibre dont l'une stable et l'autre instable. Le ressort comme dans le modérateur précédent remplace l'action de la pesanteur et contrebalance l'action des composantes centrifuges d'inertie en rendant l'appareil sensible aux variations de la vitesse.

Article II.

Inconvénients du pendule conique ordinaire et de ses congénères.

Nous allons maintenant examiner les divers inconvénients que présentent le pendule conique et ses congénères, et voir les modifications qui ont été apportées à cet appareil en vue d'éviter ces inconvénients

Le pendule conique dont nous venons de donner la théorie ainsi que les congénères présente au point de vue pratique deux inconvénients graves :

1.er Inconvénient — On a vu que pour une vitesse de régime donnée le pendule n'avait qu'une seule position d'équilibre donnée par la relation

$$h = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{ou} \quad h = \frac{g}{\omega^2}\left(1 + \frac{2P'}{P}\right)$$

Si l'on tient compte du poids propre du manchon et des leviers :

Or supposons qu'on

ait besoin de changer, d'augmenter, je suppose, la vitesse de régime de l'usine soit en augmentant la pression dans la chaudière, soit en débrayant des outils : il est clair que le jeu du modérateur va toujours tendre à ramener la vitesse de régime, qui tend à s'accroître, en fermant plus ou moins la valve d'arrivée de vapeur : il faudrait par conséquent pour que l'augmentation de vitesse que l'on désire, se produise que malgré l'augmentation générale de vitesse qui tend à se produire, l'ouverture de la valve reste la même en d'autres termes que l'axe du pendule conserve toujours la même vitesse de régime ω, sans quoi les boules s'élèveraient ou s'abaisseraient infailliblement en vertu de la relation :

$$h' = \frac{g}{\omega'^2} \quad \text{où} \quad h' = \frac{g}{\omega'^2}\left(1 + \frac{2P'}{P}\right)$$

et par suite la valve se fermerait ou s'ouvrirait plus ou moins pour rétablir l'ancienne vitesse

Pour arriver à conserver à l'arbre du pendule cette vitesse de régime constante ω, malgré l'accroissement général de la vitesse de la machine on a imaginé diverses dispositions.

1°. On dispose sur l'arbre du pendule plusieurs poulies de rayons différents

2°. Ou ce qui est préférable un tambour conique dont les diamètres extrêmes seront calculés de façon à prévoir les diverses vitesses de régime que l'on pourra avoir besoin d'établir.

Si l'on veut actuellement augmenter par exemple la vitesse de régime de la machine. En augmentant la pression ou en débrayant des outils, il faudra en même temps faire avancer la courroie motrice du modérateur vers le grand diamètre du tambour conique dont on vient de parler ou la placer sur une poulie d'un diamètre plus grand que celui de la poulie sur laquelle elle se trouvait placée d'abord. - On voit de plus que sans changer la pression dans la chaudière, ni modifier la résistance, il suffira pour augmenter la vitesse du régime de faire aller plus lentement le modérateur, en plaçant la courroie motrice sur un plus grand diamètre et que pour la diminuer il suffira de faire aller plus vite le modérateur en plaçant la courroie motrice sur un plus petit diamètre

3°. On parviendra encore à établir une nouvelle vitesse de régime ω tout en conservant à l'arbre du pendule cette nouvelle vitesse ω' en changeant le point d'attache du levier commandant la valve de telle manière que pour la nouvelle caractéristique :

$$h' = \frac{g}{\omega^2} \text{ ou } h' = \frac{g}{\omega^2} \cdot \left(1 + \frac{2F'}{P}\right)$$

l'ouverture de la valve soit la même que quand cette hauteur était :

$$h = \frac{g}{\omega^2} \text{ ou } h = \frac{g}{\omega^2} \left(1 + \frac{2F}{P}\right)$$

Tel est le 1er inconvénient du pendule conique et les moyens d'y remédier.

2e Inconvénient : Il consiste en ce que pour une même vitesse de régime les boules ne prennent jamais un état d'équilibre bien stable, elles sont toujours en oscillation perpétuelle. Cet inconvénient tient comme le précédent à ce que le pendule conique ne présente qu'une seule position d'équilibre stable ; en effet :

Supposons que la pression augmente dans la chaudière, la vitesse commencera à augmenter et dès qu'elle atteindra la limite

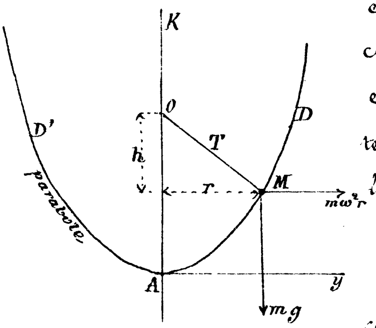
$$\omega' = \omega \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

les boules vont tendre à s'élever, mais alors la vanne se fermant la vitesse diminue, les boules retombent par suite la vanne reprend la même ouverture qui avait donné lieu à l'accélération de mouvement. La même cause ramenant les mêmes effets, les boules s'élèvent de nouveau & abaissent enfin oscillent indéfiniment sans pouvoir jamais se fixer dans une position telle qu'elle correspond précisément à l'ouverture de vanne donnant une puissance égale à la résistance.

Remarque. Observons que dans le cas où le modérateur n'est pas lié directement à la vanne comme dans les moteurs hydrauliques où l'on fait usage ainsi qu'il a été dit d'un appareil intermédiaire ; ce second inconvénient n'existe pas la liaison du modérateur avec la vanne cessant à l'instant même où l'ouverture de vanne qui rétablit la vitesse de régime est obtenue.

Dans le cas des moteurs à vapeur où le modérateur est lié directement avec la vanne : pour que ce second inconvénient, l'oscillation perpétuelle des boules n'ait pas lieu il suffit évidemment de chercher une disposition telle que lorsque l'ouverture de vanne rétablissant le régime est atteinte les boules s'arrêtent sur la courbe qu'elles décrivent et restent aussi dans la position qu'elles ont prises pour produire ce résultat ; en d'autres termes il faut que ces boules soient en équilibre en un point quelconque de la courbe qu'elles parcourent pour la même vitesse de régime ω ; Or cela ne peut avoir lieu dans le cas du pendule conique où pour cette vitesse ω il n'existe qu'une seule position d'équilibre donnée par la relation $h = \frac{g}{\omega^2}$

Mais le problème sera résolu si nous pouvons trouver une courbe telle qu'un point matériel y soit en équilibre relatif stable en un point quelconque lorsque cette courbe tourne avec une vitesse angulaire ω constante. Soit D'AD, cette courbe



cherchée tournant autour de l'axe OA avec la vitesse ω Elle doit être telle qu'un point matériel dont le poids est mg, y soit en équilibre relatif en un point quelconque tel que M par exemple. Or ce point est sollicité par les trois forces.

1°. mg son poids

2°. T la réaction de la courbe normale à cette courbe puisqu'on néglige le frottement

3°. $m\omega^2 r$: la composante centrifuge d'inertie

Ces trois forces sont en équilibre, la relation des moments autour de l'axe projeté en O donnera :

$$m\omega^2 r . h = mg r \quad \text{d'où} \quad h = \frac{g}{\omega^2}$$

Or h représente la sous normale de la courbe cherchée, la formule montre qu'elle est constante quelle que soit la position du point M, donc cette courbe est une parabole dont le paramètre est $2p = 2h = 2\frac{g}{\omega^2}$ - par suite son équation est :

$$y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$$

Si donc nous pouvons astreindre les boules à décrire cette parabole le problème sera résolu.

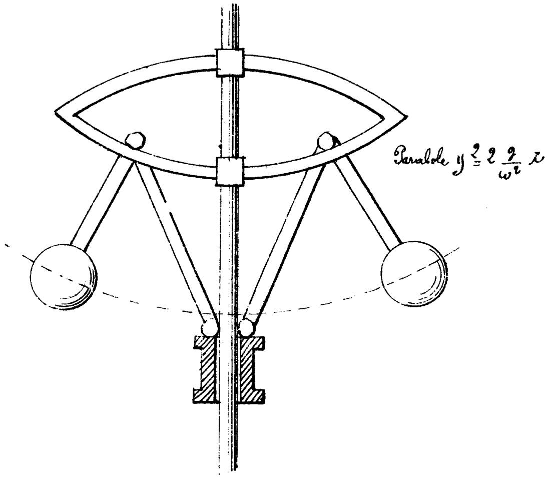
On y est arrivé en pratique de plusieurs manières :

1°. Modérateur de Franke - Ce dispositif atteint rigoureusement le résultat voulu mais il a peu réussi en pratique à cause de sa complication. Les boules sont reliées à des roulettes engagées sur des courbes fixes parallèles à la parabole $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$ qu'elles sont dès lors forcées de parcourir.

2°. Une autre disposition qui réalise aussi rigoureusement la condition voulue consiste à faire glisser les axes horizontaux des 2 sphères dans une rainure affectant la forme de la parabole $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$; une disposition particulière des leviers auxquels est relié le manchon leur permet d'ailleurs de pénétrer plus ou moins dans celles ci (Voir croquis)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 703

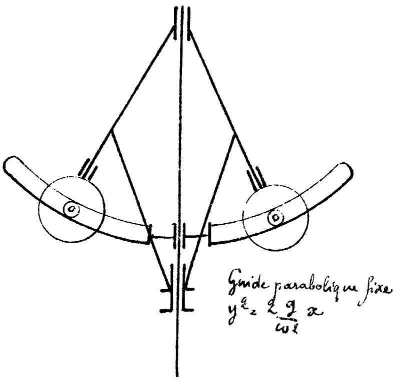
En pratique ces 2 dispositions n'ont pas réussi et à la solution exacte on préfère la solution approximative suivante due à Farcot.

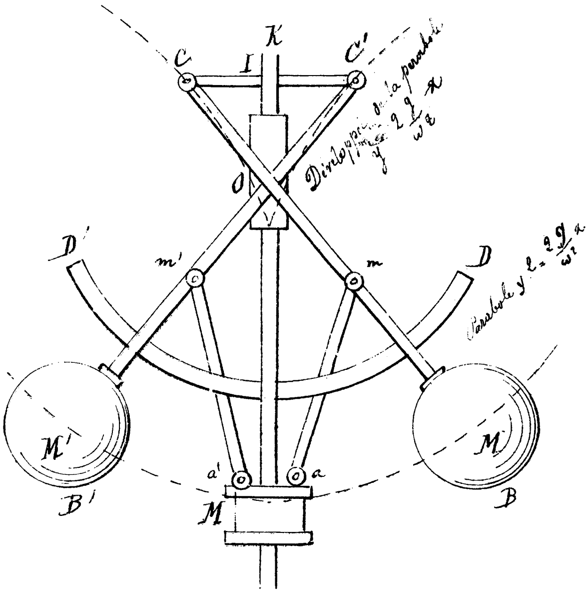


3°. Pendule à tiges croisées de Farcot. — Voici en quoi consiste cette disposition :

Imaginons qu'on ait tracé la parabole $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$ qui a pour sous normale $n = \frac{g}{\omega^2}$, et sa développée (voir la figure)

Considérons les points C et C' centres de courbure des points M et M', points moyens choisis entre le sommet de la courbe et la plus grande excursion





Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70 3

possible de la boule. — En ces points C et C' fixés à l'axe de rotation XX' suspendons les tiges CB et C'B' des boules. Ces 2 tiges se croisent sur l'axe en un point O ; elles sont reliées comme à l'ordinaire au manchon M par les petites tiges am, a'm' et entre elles par un arc de cercle DD', le long duquel elles peuvent glisser et qui a pour centre le point O

Si l'on déplace le manchon le point de croisement O se déplace aussi sur l'axe XX' et les boules se déplacent sur le cercle osculateur de la parabole. Par conséquent, si le déplacement n'est pas très considérable, la normale à ce cercle, c'est à dire le rayon MC diffère peu de la normale à la parabole, de sorte que la sous normale qui n'est autre chose que la projection de OM reste sensiblement constante et égale à h. — Il résulte de là que tant que les écarts ne sont pas considérables les boules restent en équilibre quelque soit leur position pour la même vitesse de régime ω, le second inconvénient est donc évité.
(Voyez dans le Dictionnaire de Sonnet une solution rigoureuse de M.r Foucault du même problème à l'aide d'une disposition fondée sur un principe tout différent.)

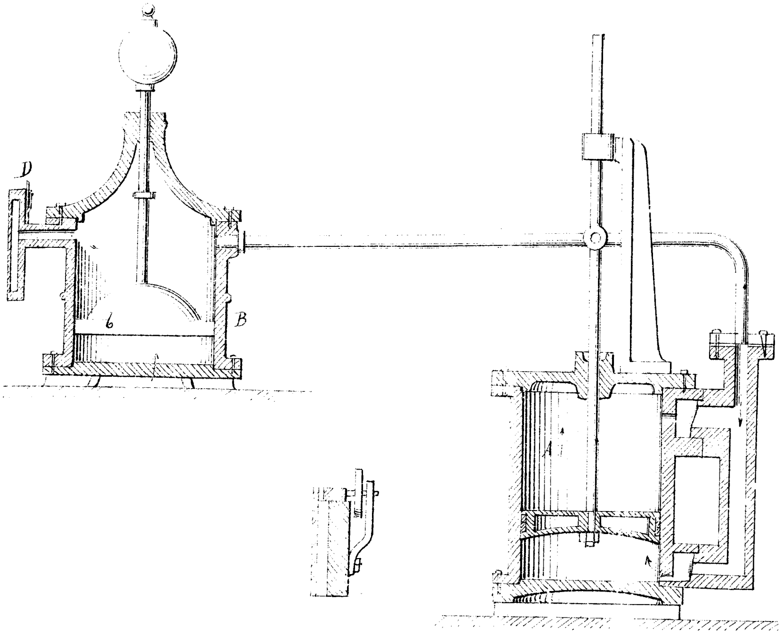
Remarquons que tous ces systèmes qui parent plus ou moins au 2.e inconvénient ne parent point au 1.er et pour une nouvelle vitesse de régime ω', il faudra encore conserver à l'arbre du pendule conique la vitesse ω pour laquelle son paramètre $2\frac{g}{\omega^2}$ a été calculé. — Ici les tambours ou les poulies étagées seront indispensables parce qu'il n'y a plus pour une autre vitesse ω' différente de ω de position d'équilibre comme dans le pendule conique, et les boules pour toute autre vitesse que ω, s'élèvent ou s'abaissent indéfiniment sur la courbe.

De toute cette étude concluons donc que ce n'est que d'une manière incommode que dans les modérateurs à force centrifuge on arrive à remédier aux deux inconvénients signalés.

Article III.

Modérateurs à air, à eau et à mouvement d'horlogerie

Modérateur à air. — Le type de ces modérateurs est le modérateur Larivière sorte de régulateur pneumatique. Il se compose d'un cylindre dans lequel se



ment un piston qui lui sert de fermeture; sur la face inférieure du piston agit librement la pression atmosphérique; au dessus du piston au contraire, dans la partie supérieure du cylindre, on fait le vide à l'aide d'une petite pompe liée au mouvement de la machine; et en même temps on laisse rentrer l'air par un orifice pratiqué à la base supérieure du cylindre et que l'on peut régler à volonté. La tige du piston porte le manchon sur lequel s'articule la fourchette et on s'arrange de façon que pour la vitesse de régime v_0 le piston soit au milieu du cylindre. La pression atmosphérique Q fait alors équilibre au poids P du piston et de sa tige, plus à la pression q de l'air qui agit au dessus du piston. On a donc $Q = P + q$. Supposons que la vitesse de régime augmente, le mouvement de la petite pompe liée à la machine va alors s'accélérer, et comme la rentrée de l'air par l'orifice D est à peu près uniforme, la pression q va diminuer et le piston va alors tendre à s'élever, mais alors la résistance R de la valve va entrer en jeu et l'équation de l'équilibre dans la nouvelle position sera :

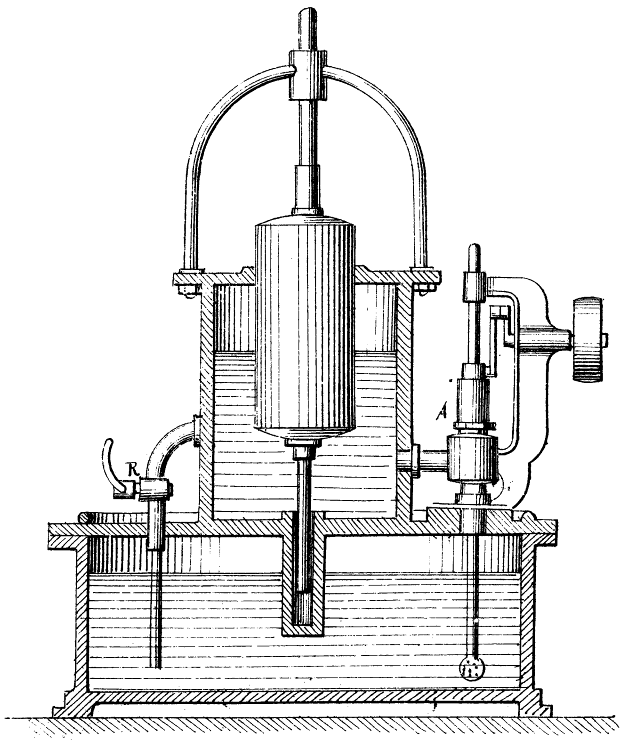
$$Q = P + R + q'$$

q' désignant le nouveau degré de vide, le piston s'élevant détermine la fermeture partielle de la valve, dès lors l'ancienne vitesse reparait et le piston revient nécessairement à son ancienne position d'équilibre.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 76 3

Donc on voit qu'ici comme dans les modérateurs à force centrifuge, il n'y a qu'une seule position d'équilibre correspondant à une vitesse de régime donnée.

De là les mêmes inconvénients que ceux que présentent les modérateurs déjà décrits. Mais l'avantage du modérateur actuel sur les précédents consiste en ce qu'on peut changer facilement la vitesse de régime, il suffit pour cela d'ouvrir plus ou moins l'ouverture D du conduit par lequel l'air extérieur pénètre dans le cylindre. Cet appareil est extrêmement sensible et se répand de plus en plus dans la pratique. Son défaut est son excès de sensibilité. On a vu en effet des machines de cent chevaux s'arrêter par suite de l'introduction accidentelle d'une mouche dans l'orifice d'aspiration d'air D



Modérateur Molinié

Le modérateur est appelé modérateur à soufflet. Il est employé dans l'industrie surtout pour produire l'ouverture de vanne des roues hydrauliques. Il y a alors un appareil intermédiaire. Lorsqu'il est établi avec soin, il est très sensible et accuse des variations très faibles dans l'action du moteur. Le jeu de cet appareil est inverse du jeu de l'appareil précédent.

Modérateurs hydrauliques

Nous décrirons le modérateur George.

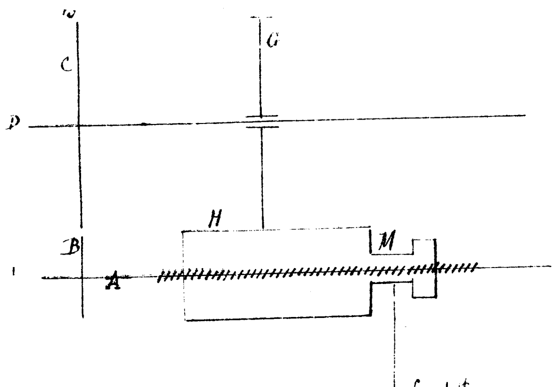
Il se compose de 2 bassins l'un inférieur l'autre supérieur. Une pompe A dont le mouvement est lié à celui de la machine, extrait l'eau du bassin inférieur et la verse dans le bassin supérieur. En même temps l'eau du bassin supérieur s'écoule dans le bassin inférieur par un orifice R que l'on peut régler à volonté. Mais cet écoulement étant sensiblement uniforme, tandis que le jeu de la pompe varie avec la vitesse de la machine, il s'ensuit que le niveau de l'eau dans le bassin supérieur s'élève quand la vitesse de la machine augmente et s'abaisse au contraire quand la vitesse diminue. Ces variations de niveau sont accusées par un flotteur dont le mouvement se transmet à la valve d'admission de vapeur s'il s'agit d'une machine à vapeur ou à la vanne d'écoulement s'il s'agit d'une roue hydraulique. Ce modérateur ne présente d'ailleurs comme les précédents qu'une seule situation d'équilibre. Mais ici comme dans le modérateur à air, on peut changer facilement la vitesse de régime en ouvrant ou en fermant plus ou moins le robinet R si on fermait complètement ce robinet comme l'orifice D dans le modérateur Larivière, le niveau s'élèverait de plus en plus dans le bassin supérieur la valve se fermerait complètement et la machine s'arrêterait.

Modérateurs basés sur divers principes. Considérons un arbre qui reçoit un mouvement de rotation constant ayant pour vitesse la vitesse de régime ω vitesse que l'arbre D reçoit d'un mouvement d'horlogerie en relation avec une roue C fixe sur l'arbre D. Cette roue C engrène avec une roue B calée sur un axe auquel elle communique par conséquent une vitesse constante et uniforme. Sur cet axe A K est monté à vis un long pignon H de même rayon que la roue B et portant à son extrémité un manchon M. Ce pignon engrène avec une roue G folle sur l'axe D et qui reçoit son mouvement de la machine elle même.

Dans l'état de régime la transmission s'opère sans donner lieu à aucune particularité ; la vitesse de régime étant établie, les 2 roues C et G tournent avec la même vitesse qui est la vitesse de régime et communiquent par conséquent à la roue B (par suite à l'axe A et au pignon H qui sont de même diamètre) une même vitesse dès lors le pignon H ayant même vitesse angulaire que l'arbre A fait corps avec cet arbre et n'éprouve aucun déplacement dans le sens horizontal.

Supposons maintenant que la vitesse de la machine vienne à varier à augmenter par exemple, la vitesse de la roue G (et par suite celle du pignon H) va augmenter, comme d'ailleurs l'arbre A ou la vis conserve la même vitesse (qui est (celle de régime) le pignon va prendre un mouvement relatif par rapport à l'axe A, et par conséquent se déplacer d'une certaine quantité le long de cet axe puisqu'il sert d'écrou à la vis filetée sur ce même axe. Si au lieu de s'accroître la vitesse de la machine diminue, le pignon va se déplacer dans un sens inverse du premier. Les variations de vitesse sont donc accusées par le déplacement du pignon H, et le manchon M transmet ce déplacement à la vanne qui règle le mouvement de l'eau, ou à la valve qui règle l'admission de la vapeur selon qu'il s'agit d'une roue hydraulique ou d'une machine à vapeur.

Ce modérateur a sur les précédents ce grand avantage qu'il présente plusieurs positions d'équilibre pour une même vitesse de régime. En effet, supposons que la vitesse de la machine ayant augmenté par exemple, le pignon se soit avancé d'une certaine quantité, ce déplacement du pignon a fermé la vanne d'une certaine quantité; mais aussitôt que l'ouverture de vanne ramenant la vitesse de régime est atteinte, il s'arrête et par suite cette ouverture de vanne se conserve au lieu de revenir à ce qu'elle était d'abord comme il arrive dans les cas précédents.



De plus on changera très facilement la vitesse de régime. Il suffira pour cela d'accélérer ou de diminuer la vitesse du mouvement d'horlogerie.

Malgré ces avantages qui font de ce modérateur un appareil parfait il n'a pas été employé dans la pratique. (Voir dans le Dictionnaire de Sonnet un modérateur qui présente à peu près la même disposition, mais qui est fondé sur un principe différent.)

Article IV

Des modérateurs agissant sur le travail résistant soit utile, soit nuisible.

Tous les modérateurs que nous avons examinés jusqu'à présent régularisent le mouvement en agissant sur le travail moteur, en proportionnant à chaque instant la puissance à la résistance.

Mais ce mode de régularisation peut présenter un grave danger, celui de l'épuisement du fluide moteur quand les résistances viennent à croître considérablement.

En effet, supposons que la résistance augmente beaucoup et d'une manière permanente, la vanne ou la valve vont s'ouvrir davantage par l'effet du jeu du modérateur de manière à donner la quantité de vapeur ou d'eau nécessaire pour rétablir la vitesse mais si ce nouveau débit d'eau ou de vapeur surpasse la quantité d'eau ou de vapeur disponible, c'est à dire qui se produit à chaque instant alors chaudière ou rivière ne tarderont pas à se tarir et la machine s'arrêtera. Il en est de même si la production d'eau ou de vapeur diminue soit par suite d'une sécheresse ou d'un abaissement de pression. Ainsi donc à moins que la puissance motrice soit illimitée, il faudra malgré le volant et le modérateur pour éviter ces effets fâcheux qu'un ouvrier surveille constamment la machine. Dans le cas des machines à vapeur, c'est le chauffeur.

Ainsi donc le modérateur n'est infaillible que pour de faibles écarts de la puissance ou de la résistance ; pour de grands écarts il faut la présence de l'homme pour proportionner à la main la résistance à l'intensité présente de la puissance

Pour les machines qui n'exigent pas trop de régularité ; comme pompes, moulins, on se passe même de modérateurs et on se contente de proportionner à la main la résistance à l'augmentation ou à la diminution de puissance ; en embrayant ou en désembrayant un plus ou moins grand nombre de métiers ou d'outils.

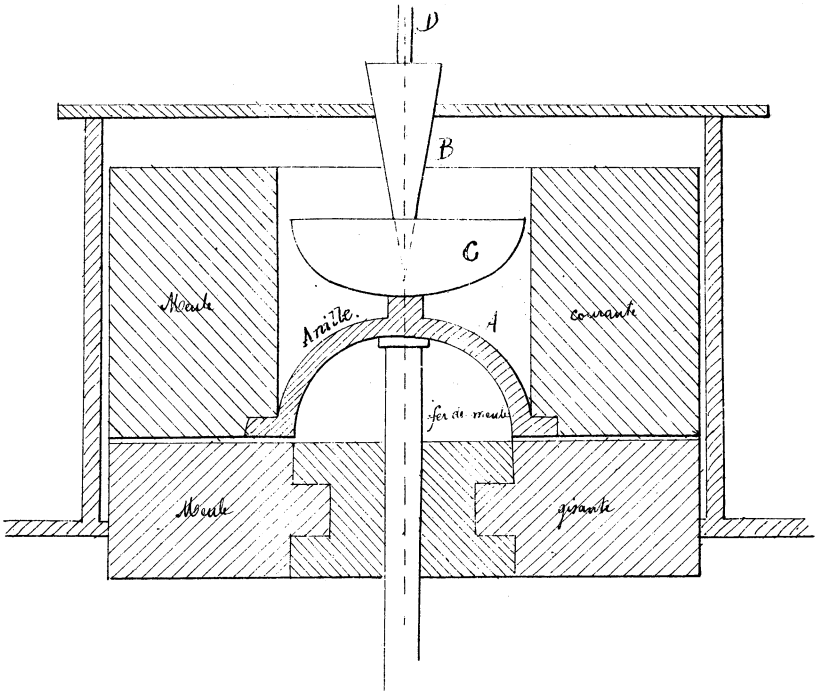
Dans ce cas l'homme agit sur le travail résistant utile. Dans d'autres cas, on maintient la régularité du mouvement de la machine en agissant sur le travail résistant nuisible, c'est ainsi que dans les treuils les grues &c on modère la descente des fardeaux au moyen de freins de diverses natures.

Dans certains cas spéciaux ce mode de régularisation du mouvement consistant à agir non plus sur la puissance mais sur la résistance soit utile, soit nuisible peut s'opérer automatiquement.

Dans la disposition suivante en usage dans les moulins perfectionnés la régularisation est obtenue par l'action automatique de la machine sur le travail résistant utile.

Régularisation automatique dans les moulins perfectionnés.

Le moulin proprement dit se compose de 2 meules l'une gisante



l'autre courante; sur la meule gisante tourne la meule courante

A porte à sa partie supérieure une coupe C qui reçoit le grain par un entonnoir B. Quand la machine a sa vitesse de régime, la force centrifuge projette le grain au dehors de la coupe C; le grain arrive entre les 2 meules où il est broyé par le mouvement de la meule courante. Si la vitesse de la machine augmente, il y a plus de grain projeté: le travail résistant utile augmente et la vitesse tend à revenir au régime en diminuant. Si au contraire la vitesse de la machine diminue la quantité de grain projetée est moins grande, par suite le travail résistant utile diminue et la vitesse tend encore à revenir au régime, en s'accroissant. On voit ainsi comment la machine elle même proportionne à chaque instant la résistance utile à la puissance.

Remarquons d'ailleurs qu'il n'y a là aucune perte de travail moteur puisqu'on agit sur le travail résistant utile et non nuisible.

Enfin, dans certains cas on peut encore régulariser le mouvement en agissant automatiquement non plus sur le travail résistant utile, mais sur le travail résistant nuisible, en faisant intervenir une résistance auxiliaire la résistance de l'air par exemple.

C'est ainsi que dans les tourne broches, la machine d'Atwood, la machine à indications continues du général Morin, le mouvement se trouve régularisé par le jeu d'un volant à ailettes mû par la machine elle même.

Quand le mouvement s'accélère, la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse augmente; quand il diminue, cette résistance diminue. il en résulte qu'une certaine vitesse une fois atteinte se conserve indéfiniment et par suite l'uniformité parfaite du mouvement est obtenue.

Fin de la 1ère Partie de la Dynamique appliquée.

Résumé
analytique et synthétique de la 1ère Partie de la Dynamique appliquée.

Introduction à la dynamique des machines.

Chapitre 1er. – Considérations générales sur les machines.

Article 1er. – Théorème de la transmission du travail dans les machines – Définition d'une machine – Dans une machine complète on distingue trois parties : 1° Le récepteur – 2° L'outil ou opérateur – 3° La transmission du mouvement. – Si on applique à l'ensemble de cette machine supposée en activité le théorème des puissances vives on arrive à cette conséquence : – Que la somme des variations de puissance vive de tous les différents éléments de la machine est égale à la somme de travaux de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures qui agissent sur elles.

Or les forces qui agissent sur la machine sont :

1° Les forces motrices donnant lieu à un certain travail moteur T_m

2° Les résistances utiles —— id —————— id —— résistant T_u

3° Les résistances nuisibles —— id —————— id —— résistant T_f

4° L'action de la pesanteur donnant lieu à un travail positif ou négatif $\pm P(H-H_0)$

De telle sorte que le Théorème précédent peut s'écrire :

$$\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2 = T_m + P(H-H_0) - T_u - T_f$$

d'où on déduit : $$T_u - T_m \pm P(H-H_0) - (\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2) - T_f$$

Si la machine n'est pas locomotive elle se réduit à.

$$T_u = T_m - T_f - (\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2)$$

Signification de cette équation

Article II. – Discussion de l'équation précédente.

On suppose successivement les quatre cas suivants – 1° Le cas où le mouvement de la machine est parfaitement uniforme (Roues hydrauliques turbines) – 2° Le cas où le mouvement de la machine est seulement périodiquement uniforme (Machine à vapeur) – 3° Le cas où pendant l'intervalle considéré la machine s'accélère ou se ralentit (Laminoirs) – 4° Le cas où on applique l'équation précédente à la totalité du temps pendant.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70-3

lequel la machine travaille (Toute espèce de machines)

On fait voir dans tous ces cas qu'une machine transmet soit sous forme de travail, soit sous forme de puissance vive la totalité du travail moteur reçu sans en altérer en rien la valeur. De là résulte l'absurdité du mouvement perpétuel.

Expression du rendement dans les machines. — Article III. Régulateur et Modérateur. Nécessité de ces deux appareils dans toute machine pour obtenir la régularité de marche nécessaire à la bonne exécution du travail à effectuer. — Les irrégularités de marche dans les machines tiennent à deux causes distinctes : 1°. Au mode même de fonctionnement de la machine résultant des relations géométriques des différents organes ; d'où résulte des irrégularités périodiques se reproduisant constamment les mêmes à chaque tour. 2°. aux variations qui peuvent survenir soit dans la résistance soit dans la puissance. Cela posé, on fait comprendre que le régulateur ou volant ou plus généralement une grande masse en mouvement est capable de remédier aux irrégularités périodiques tenant au jeu même de la machine, ainsi qu'aux irrégularités brusques mais passagères qui peuvent résulter d'une augmentation ou d'une diminution instantanée soit dans la puissance soit dans la résistance. Ex. volants de laminoirs. — On fait comprendre ensuite que le volant n'est plus suffisant dès qu'il survient une augmentation ou une diminution permanente soit dans la puissance, soit dans la résistance, de là la nécessité d'un appareil proportionnant à chaque instant la puissance à la résistance. Cet appareil est le modérateur. — Description et mode de fonctionnement du modérateur à force centrifuge. Son application 1°. directe aux machines à vapeur 2°. aux machines hydrauliques au moyen d'un appareil intermédiaire. — Description des deux appareils intermédiaires de Callon.

Transition. — On vient d'indiquer sommairement la nécessité, le mode d'action et les relations des régulateurs et modérateurs, il nous reste à y appliquer la théorie afin de savoir dans chaque cas particulier calculer les dimensions de ces appareils en vue d'un effet déterminé à produire. — Dans le chapitre suivant nous donnerons donc la théorie des volants et dans le 3e Chapitre, nous donnerons celle des modérateurs.

Chapitre II Théorie dynamique des volants ou plus généralement des masses en mouvement — Effets de l'inertie dans les machines en mouvement — Article 1er. — Théorie des variations des actions mutuelles s'exerçant entre deux ou plusieurs corps soumis à un certain système de forces pouvant varier brusquement d'intensité. 1er Cas — Cas de deux corps reliés par un fil et soumis à deux forces FF' de sens contraire et dans la direction du fil. — 2e Cas — Cas de deux corps en contact et pressés l'un contre l'autre par deux forces FF'

Dans ces deux cas de mouvement varié rectiligne on fait voir en appliquant le principe de d'Alembert et en posant l'équation d'équilibre dynamique de chacun des corps que les variations des actions mutuelles sont d'autant moindres que la masse motrice est plus grande par rapport à la masse mue, et réciproquement. — 3e Cas. de deux corps tournants (poulies par ex.) en liaison soit par une courroie soit par engrenages — 4e. Cas d'un nombre quelconque de corps tournante (une transmission de mouvement complète par ex.)

Dans ces deux derniers cas de mouvement varié circulaire on fait encore voir en appliquant le principe de d'Alembert et en posant l'équation d'équilibre de chaque corps que les variations des actions mutuelles sont d'autant moindres que la masse active est plus grande par rapport à la masse mue et réciproquement

De toute cette théorie résulte les deux conséquences pratiques suivantes :-

Si dans une transmission de mouvement quelconque on cale sur l'axe moteur un volant d'une masse considérable 1°. Les variations des actions mutuelles qui se produisent entre les organes mus par cet arbre moteur seront très faibles même pour des variations brusques et intenses des forces motrices, ce qui permet de réduire à leur minimum les dimensions de toutes les pièces de la machine situées au delà de ce volant. Il y a donc intérêt au point de vue dynamique et économique à rapprocher autant que possible le volant de l'organe moteur

Art II. Quant aux organes situés avant le volant (piston, tige, bielle et manivelle) ils supporteront au contraire toutes les variations de la puissance motrice - Si nous appliquons en particulier le principe de d'Alembert au mouvement du piston, nous verrons en ne supposant pas de détente qu'à chaque point mort la tige du piston passe d'une compression

$$T = Q + \frac{P}{g} \omega^2 a$$

P poids du piston. a rayon de la manivelle.
Q pression effective de la vapeur sur piston
ω vitesse angulaire rendue constante par l'effet du volant

à une extension $T' = Q - \frac{P}{g} \omega^2 a$

et éprouve par suite un choc $T + T' = 2Q$ - Ainsi dans le cas supposé d'une machine sans détente, la section de la tige doit être calculée non comme si elle n'avait à supporter que l'effort Q mais l'effort 2Q : On voit donc combien il est important de tenir compte des effets de l'inertie dans le calcul des dimensions des pièces de machines - On démontre ensuite comment au moyen de la détente on arrive à réduire beaucoup le choc éprouvé par la tige aux passages de point mort

Article III. - Des volants considérés comme appareils propres à régulariser complètement le mouvement oscillant et périodiquement uniforme des machines - leur poids dans diverses circonstances pour un coefficient de régularisation donné.

- Nous venons de considérer les volants comme organes propres à resserrer les limites entre lesquelles peuvent varier les actions mutuelles des organes d'une machine, nous allons actuellement les considérer comme organes propres à emmagasiner du travail et par suite comme organes capables de régulariser le mouvement périodiquement uniforme des machines. - 1er Cas - Manivelle simple à simple effet (Tour à pédale par ex). On néglige l'obliquité de la bielle, on suppose son effort constant et l'on demande le poids du volant nécessaire pour un coefficient de régularisation n donné ? - On fait voir que quelque soit l'inertie du système le mouvement périodiquement uniforme par tour présente un minimum de vitesse ω' pour l'angle $\alpha' = 18°, 33' 4$ et un maximum ω'' pour l'angle α'' supplémentaire de α' - On montre ensuite que l'on peut en donnant une masse suffisante au système faire en sorte que la différence ω'' - ω' entre ces vitesses extrêmes devienne moindre que toute quantité donnée auquel cas le mouvement est régularisé au degré voulu ; pour trouver l'expression de cette masse il suffit d'exprimer que la variation de puissance vive qu'elle éprouve en passant de ω' à ω'' est précisément égale à l'excès

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

du travail moteur sur le travail résistant reçu par la machine dans ce n^ième intervalle. On trouve ainsi pour le poids du volant $P = 24300 \frac{C}{NV^2} \cdot n$

C force de la machine en chevaux.

N Nombre de tours par minute

V Vitesse moyenne linéaire de la jante du volant

n Coefficient de régularisation.

2^e Cas. — Manivelle simple à double effet (Machine à vapeur ordinaire) — On néglige encore l'obliquité de la bielle, on suppose son effort constant et l'on se propose les mêmes questions que précédemment. — On fait voir que quelque soit l'inertie du système, le mouvement périodiquement uniforme par demi tour présente à chaque demi tour un minimum et un maximum de vitesse ω' et ω'' répondant aux angles $\alpha' = 39°, 32'4$ et α'' supplémentaire de α'. On résout ensuite la même question que précédemment et on trouve pour le poids du volant :

$$P = 4645 \; \frac{C}{NV^2} \; n$$

les lettres ayant même signification.

3^e Cas. — Manivelle double à double effet (Machines à vapeur accouplées comme dans les locomotives par ex.) Pour simplifier la question on fait les mêmes hypothèses que dans les deux cas précédents et l'on se propose aussi les mêmes questions. — On fait voir que quelque soit l'inertie du système, le mouvement périodiquement uniforme à chaque quart de tour présente un minimum et un maximum ω', ω'' répondant aux angles $\alpha' = 19°, 12'$ et $\alpha'' = 70°, 48$ — On résout ensuite la même question que dans les deux cas précédents et on trouve $P = 468 \frac{C}{NV^2} \cdot n$

De la comparaison de ces trois formules résulte que le poids du volant est d'autant plus faible que le travail moteur se trouve mieux réparti par tour, ce qui était d'ailleurs évident a priori. — Si nous appliquions la même méthode analytique au cas d'une manivelle triple, quadruple, quintuple etc etc à double effet, nous trouverions donc des poids de volant de plus en plus faibles. — Mais dans ces cas compliqués, surtout si l'on veut tenir compte de l'obliquité de la bielle et des variations de l'effort qu'elle exerce (quand la machine est à détente) cette méthode analytique devient extrêmement pénible, alors on la remplace par une méthode graphique extrêmement commode et applicable sans difficulté aux cas les plus compliqués. — Application de cette méthode graphique au calcul du volant dans le cas d'une machine horizontale à vapeur horizontale et à détente — Tableau donnant les poids de volants dans les divers systèmes de machines à vapeur. — La détente produisant une grande inégalité dans la répartition du travail moteur par tour on conçoit qu'une machine à détente exige un plus fort volant qu'une machine sans détente, et que ce volant soit d'autant plus fort que la détente est plus considérable ; c'est ce que démontrent en effet les chiffres du tableau précédent.

Article IV. — Des contrepoids considérés comme organes propres à mieux répartir le travail moteur par tour et par suite comme organes de régularisation de mouvement. —

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 WR 30 3

1er Cas. — Contrepoids dans la manivelle simple à simple effet. — On démontre que si l'on place sur la jante du volant et à l'opposite du bouton de la manivelle un contrepoids suffisant, le système marche comme s'il était à double effet, ce qui permet de réduire le poids du volant. — 2e Cas. — Contrepoids dans la manivelle double à double effet. — On démontre que si l'on place convenablement sur la jante du volant calé sur un arbre mû par l'arbre moteur et faisant deux tours pendant que cet arbre n'en fait qu'un, on démontre que le système marche comme une manivelle double à double effet, ce qui permet encore de réduire le poids du volant. —

Article V. — Des contrepoids considérés comme organes propres à assurer la stabilité des machines en mouvement. 1° Causes tendant à compromettre la stabilité des machines fixes en mouvement. — Moyens d'assurer cette stabilité. — On démontre que les oscillations horizontales et verticales du centre de gravité de la partie mobile de la machine donnent lieu à des oscillations ou trépidations horizontales et verticales inverses des précédentes de la partie fixe de la machine. — De plus ces trépidations horizontales et verticales ayant lieu simultanément, il en résulte un mouvement vibratoire particulier appelé mouvement de galop, lequel est inverse du mouvement de galop qu'exécute la partie mobile de la machine (piston, tige, bielle et manivelle). — Ces vibrations tendent à arracher la machine de ses fondations et de plus absorbent une partie du travail moteur; on les réduit à leur minimum en assurant la rigidité parfaite des assemblages reliant les parties fixes de la machine. — 2° Causes tendant à compromettre la stabilité des machines mobiles en mouvement. — Une locomotive se composant de deux machines à vapeur horizontales accouplées sur le même essieu moteur au moyen de deux manivelles à angle droit et placées de chaque côté de la locomotive. — On comprend que les oscillations horizontales et verticales du centre de gravité de la partie mobile de chaque machine donnent lieu sur chaque côté de la locomotive à un mouvement de galop de la partie relativement fixe, inverse du mouvement de galop qu'exécute la partie mobile. — De ces deux mouvements de galop qu'éprouvent les deux côtés de la partie relativement fixe de la machine résulte 1° un mouvement de lacet projetant la locomotive tantôt sur un rail, tantôt sur l'autre. 2° un mouvement de roulis balançant la locomotive autour d'un axe parallèle à la voie. — Tous ces mouvements anormaux qui tendent au déraillement et à l'usure rapide des bandages étant dus au déplacement relatif du centre de gravité de la partie mobile de chaque machine, on comprend qu'on puisse les éviter en plaçant sur les jantes des roues motrices à l'opposite du bouton de la manivelle des contrepoids convenables, car alors quand le centre de gravité de la partie mobile de chaque machine à vapeur se portera en avant et en arrière, en haut ou en bas, le contrepoids exécutera les mouvements inverses et se portera en arrière ou en avant, en bas et en haut. Si donc ces contrepoids sont bien calculés, le centre de gravité général ne variera plus, par suite tous ces mouvements disparaîtront en grande partie. — On parvient également à réduire au minimum les deux mouvements de lacet et de roulis en rapprochant les deux cylindres du plan médian de la locomotive.

Chapitre III. — Théorie dynamique des modérateurs. — On étudiera successivement 1° les modérateurs à force centrifuge. Pendule conique de Watt et ses congénères. 2° Les modérateurs à air et à eau (Modérateur d'arrivière, Molinié et Modérateur George). 3° Les modérateurs basés sur différents principes.

Art. 1er. — Théorie du pendule conique ordinaire. — Détermination du poids des boules pour un degré de sensibilité donné. On démontre d'abord en négligeant le poids du manchon et des leviers, a qu'il n'y a pour un pendule donné qu'une seule position d'équilibre répondant à une vitesse de régime ω donnée, b que la caractéristique $h = \frac{g}{\omega^2}$ de cette position d'équilibre par la relation : $h = \frac{g}{\omega^2}$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 34 VIR 70 3

est indépendante du poids des boules (quand on néglige le poids du manchon et des leviers). C. Que cette caractéristique est également indépendante de la longueur l du pendule ; de telle sorte qu'il y a une infinité de pendules répondant à la question. On fait voir ensuite qu'en tenant compte de la résistance $2R$ qui s'oppose au mouvement du manchon, que l'on peut calculer le poids P des boules, de telle sorte qu'elles s'élèvent ou s'abaissent, c'est-à-dire surmontent la résistance $2R$ dès que la vitesse dépasse certaines limites imposées à ses variations : On trouve ainsi $P = K.R.\frac{l'}{l}$ K coefficient de sensibilité. R ½ de la résistance du manchon

Dans le cas où $l = l'$ le pendule se réduit à un simple losange articulé, et le poids des boules est alors donné par la formule $P = K.R$ — Ainsi dans ce cas pour une même résistance $2R$ à surmonter avec le même degré de sensibilité K. il faut des boules d'un poids plus considérable que dans le cas du pendule ordinaire, mais on fait voir que si l'on surcharge le manchon d'un poids additionnel $2M$, l'effet est le même que si le poids de chaque boule était augmenté de cette même quantité — Cette surcharge du manchon permet donc de réduire beaucoup pour un même degré de sensibilité le poids des boules. C'est en cela que consiste la modification de Mr Porter. — On a modifié de mille manières les formes extérieures du pendule conique ordinaire dont on vient de donner la théorie parmi ces modifications on citera le Modérateur Davies et les deux modérateurs à axe horizontal de Mr Flond et de Mr Davoir.

Art 11. — Inconvénients du pendule conique ordinaire et de ses congénères. De ce que le pendule conique ne présente pour une vitesse de régime donnée ω qu'une seule et unique position d'équilibre donnée par la relation $h = \frac{g}{\omega^2}$, résultent deux graves inconvénients. Le 1er consiste dans la difficulté de changer la vitesse de régime de la machine. — On remédie à cet inconvénient, en calant sur l'axe du pendule des poulies de différents diamètres ou un tambour conique et l'on fait voir que l'on accélère le mouvement de la machine en faisant marcher le pendule plus lentement et réciproquement qu'on ralentit le mouvement de la machine en accélérant celui du pendule. Le 2e inconvénient tient à ce que quand la puissance varie les boules ne peuvent jamais se fixer sur la courbe qu'elles parcourent dans la position répondant à l'ouverture de vanne ramenant la vitesse de régime (puisqu'il n'y a qu'une position d'équilibre répondant à cette vitesse) — Il en résulte un mouvement d'oscillation indéfini des boules autour de la position répondant au régime. — Pour remédier à cet inconvénient, il suffit évidemment d'astreindre les boules à parcourir une courbe telle qu'elles y soient en équilibre en un point quelconque pour la vitesse de régime ω, or cette courbe est nécessairement la parabole $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$. — On a imaginé un grand nombre de dispositifs pour réaliser pratiquement cette condition : On décrira deux dispositifs atteignant rigoureusement le résultat voulu, le modérateur de Franke, et le modérateur à leviers rentrants et enfin un 3e dispositif ne résolvant qu'approximativement le problème, c'est le modérateur à leviers croisés de Farcot, il est le seul d'ailleurs qui se soit répandu dans la pratique. — Quand le modérateur n'agit pas directement sur la vanne mais sur un appareil intermédiaire comme dans les moteurs hydrauliques, cet inconvénient n'existe pas. — Remarquons d'ailleurs que toutes ces dispositions remédiant au 2e inconvénient ne remédient pas au 1er bien plus pour toute autre vitesse que la vitesse de régime ω, les boules ne pourront trouver de position d'équilibre sur la parabole $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$, elles s'élèveront ou s'abaisseront indéfiniment sur cette courbe.

De tout ce qui précède concluons donc que ce n'est que d'une manière incommode que dans les modérateurs à force centrifuge on arrive à remédier aux deux inconvénients signalés plus haut.

Article III. — Modérateurs à air, à eau, et à mouvement d'horlogerie — Modérateur Larivière — Description. On fait voir que pour une vitesse de régime donnée, ce modérateur ne présente également qu'une seule position d'équilibre de là des oscillations indéfinies du piston autour de la position répondant au régime — Mais dans ce modérateur on change très facilement de vitesse de régime, il suffit d'ouvrir plus ou moins l'orifice d'aspiration d'air — Modérateur Molinié Même appareil et même théorie que précédemment seulement au lieu de faire le vide au dessous du piston, on comprime de l'air sous ce piston. — Modérateur hydraulique de George — Description. — Encore une seule position d'équilibre, mais facilité très grande de changement de vitesse de régime, il suffit en effet de fermer plus ou moins le robinet d'échappement de l'eau où flotte le flotteur. — Modérateur à mouvement d'horlogerie. Cet appareil très simple non usité en pratique est cependant préférable à tous les autres car il ne présente aucun des deux inconvénients signalés en effet 1°. on change de vitesse de régime en changeant simplement la vitesse du mouvement d'horlogerie 2°. D'ailleurs, il ne peut y avoir oscillation du manchon puisqu'il s'arrête nécessairement dès que l'ouverture de vanne rétablissant le régime est atteinte.

Article IV. — Des modérateurs agissant sur le travail résistant soit utile, soit nuisible. — Les modérateurs précédents régularisent le mouvement en agissant sur la puissance en proportionnant à chaque instant le travail moteur au travail résistant, il faut remarquer que dans ce cas il peut se présenter un grave danger c'est celui de l'épuisement du fluide moteur, quand les résistances viennent à croître considérablement. Ainsi le modérateur n'est infaillible que pour de faibles écarts de la puissance ou de la résistance, pour de grands écarts, il faut la présence de l'homme pour proportionner à la main la résistance à l'intensité présente de la résistance — Dans les machines exigeant peu de régularité (ex. Moulins Pompes) on supprime même les modérateurs précédents et l'on se contente de l'action directe de l'homme soit sur la résistance utile, soit sur les résistances nuisibles, dans le 1er cas si la puissance croît, il donne à la machine plus à travailler et réciproquement. Dans le 2e cas on perd inutilement une partie du travail moteur comme dans les treuils et toutes les machines où on fait usage de freins. — Dans certains cas cette action sur la résistance soit utile soit nuisible peut s'effectuer automatiquement. Exemples: Moulins perfectionnés, ailettes de tournebroches de la machine d'Atwood &c &c.

Fin de la 1ère Partie
de la Dynamique appliquée

2me Partie de la Dynamique appliquée

Transition. – Dans la 1ère Partie, nous avons étudié les conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire toute bonne machine et en 1er lieu, nous avons donné l'équation générale de la transmission du travail

$$T_u = T_m \pm P(H - H_0) - \left(\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_0^2\right) - T_f$$

Cette équation générale renferme implicitement la théorie dynamique de toute machine, mais pour en tirer dans chaque cas particulier des conséquences déterminées si l'on veut apprécier par exemple le rendement de la machine considérée supposée arrivée au régime uniforme, comme cette quantité a pour expression

$$R = \frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}$$

il nous faudra pouvoir déterminer T_f et T_m

Il nous reste donc à étudier.

1° T_f, c'est à dire les résistances passives et le travail qu'elles absorbent ce sera l'objet de cette 2e partie.

2° T_m, c'est à dire les puissances motrices et le travail qu'elles fournissent, ce sera l'objet de la 3e partie.

Étude des résistances de toute nature s'opposant au mouvement des machines.

Classification – Les résistances qui s'opposent au mouvement des machines sont de diverses natures et peuvent se ranger dans les six classes suivantes

1° Résistance due au frottement de glissement $\left\{ \begin{array}{l} \text{dans les solides} \\ \text{id. liquides} \\ \text{id. Gaz} \end{array} \right.$

2° Résistance due au frottement de roulement

3° Résistance due au glissement des cordes

4° Résistance due à la raideur des cordes

5° Résistance due à la matérialité des milieux que les machines ou corps en mouvement sont obligés de traverser.

6° Résistance due au choc et aux vibrations.

Nous allons passer en revue chacune de ces résistances et rechercher a la nature physique de chacune d'elles b son expression analytique c et enfin l'expression analytique du travail qu'elle absorbe.

Chapitre 1er

Théorie du frottement de glissement dans les solides, les liquides et les gaz

Art 1er Explication physique de la résistance dite de glissement. – Lois du frottement dans les solides – Expression analytique de cette résistance

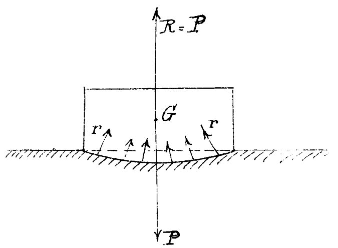
Supposons un corps en repos sur un plan horizontal, l'expérience prouve qu'il faut une force déterminée pour le mettre en mouvement, on en conclut nécessairement que le fait du glissement du corps sur le plan détermine une résistance égale et opposée à cette force nécessaire pour déterminer le mouvement, car si ce glissement ne donnait lieu à aucune réaction en sens inverse du mouvement qui tend à se produire: la moindre force mettrait ce corps en mouvement et en mouvement uniformément accéléré. De même si l'on pose un corps animé d'une vitesse initiale sur un plan horizontal, l'expérience prouve qu'au bout d'un certain temps il s'arrête, donc le fait du glissement donne lieu à une force retardatrice opposée au mouvement, sans quoi le corps en vertu de l'inertie conserverait indéfiniment sa vitesse initiale et par suite se mouvrait indéfiniment en ligne droite, d'un mouvement parfaitement uniforme.

Il s'agit de rechercher 1° quelle est la nature de cette force retardatrice 2° quelle est son expression analytique. 3° quel est le travail qu'elle absorbe.

Nature physique de la résistance du glissement.

Cette résistance au glissement tient à ce que les corps ne sont pas parfaitement durs et qu'ils subissent toujours par leur contact lorsqu'ils sont soumis à une certaine pression, une déformation plus ou moins sensible.

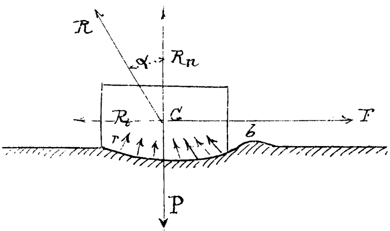
Considérons un corps homogène, reposant sur un plan horizontal également



homogène. Le corps va pénétrer d'une petite quantité dans le plan et il se produira la double déformation symétrique par rapport à la verticale du centre de gravité, indiquée dans la figure.

L'ensemble de toutes les petites réactions qui ont lieu aux divers points du contact, réactions normales aux petits éléments de la surface de séparation se résumant en une seule R qui pour l'équilibre du corps doit passer par son centre de gravité G et être égale et directement opposée à son poids P

Supposons actuellement qu'une force horizontale soit appliquée au centre de gravité G du corps: la proue de ce corps va pour ainsi dire s'enfoncer dans le plan de telle sorte qu'en avant de ce corps se formera un petit bourrelet b qui s'opposera au mouvement.



Dans ce cas l'ensemble des petites réactions normales aux éléments de la surface déformée laquelle n'est plus comme dans le cas précédent symétrique par rapport à la verticale du centre de gravité, se résume en une résultante R, oblique au plan, laquelle pour l'équilibre du corps doit passer par son centre de gravité G et être égale et directement opposée à la résultante des forces F et P, ou à l'action que le corps exerce sur le plan (Principe de Newton égalité de l'action et de la réaction)

Supposons que la force F aille en croissant, le phénomène précédent s'accentuera davantage, l'avant du corps s'enfoncera de plus en plus dans le plan et par suite la réaction totale R s'inclinera aussi de plus en plus sur la verticale, de telle sorte qu'elle puisse faire à chaque instant équilibre aux deux forces F et P

Mais la force F croissant toujours, il arrive un instant, lorsqu'on a dépassé la limite de compression de la matière où le petit bourrelet b est pour ainsi dire écrasé alors le mouvement commence et la réaction R persiste dans sa position limite mais à chaque instant en avant du corps en mouvement se forme comme précédemment un petit bourrelet s'opposant à l'action de la force motrice F, de telle sorte qu'à partir de l'instant où le mouvement commence)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

si la force F a crois plus, le corps se meut d'un mouvement uniforme et en avant de ce corps se produit une agitation de matière assez analogue aux ondes sonores ou lumineuses, déterminées par un premier ébranlement.

Une autre raison naturelle vient s'ajouter encore à la précédente pour expliquer cette résistance au glissement. Non-seulement les corps ne sont pas parfaitement durs, mais encore si polis ils nous paraissent, ils sont en réalité hérissés d'aspérités, il en résulte que lorsque deux corps sont maintenus en contact par une pression quelconque, les aspérités de la surface de l'un s'engageant entre les aspérités de la surface de l'autre, de telle sorte que l'on ne peut les faire glisser l'un sur l'autre, sans courber ou même arracher complètement ces aspérités.

Enfin, une 3e et dernière raison vient encore expliquer cette résistance et le travail qu'elle absorbe. On sait que tout frottement est accompagné d'un développement de chaleur, mais cette chaleur développée (Théorie mécanique de la chaleur) n'est pas autre chose qu'une transformation particulière de travail mécanique. Or ce travail mécanique ainsi transformé ne peut être pris qu'au travail moteur nécessaire au déplacement du corps. Mais de ce fait incontestable doit-on conclure comme certains auteurs que toute la partie de travail absorbé par le frottement résulte de cette transformation? Non, sans doute, car l'expérience prouve aussi que tout frottement est bien réellement accompagné d'usure, d'arrachements de particules représentant un travail moléculaire effectué équivalent en majeure partie à la perte de travail moteur constatée par l'expérience.

Lois expérimentales du frottement. Pour ces divers motifs, la réaction R du plan sur le corps s'incline sur la verticale à l'instant où commence le mouvement d'un certain angle déterminé. Soit donc à cet instant GR, la position limite et l'intensité de la réaction totale R (Voir fig. précéd.): Les trois forces F, P, R situées dans le même plan et passant par le même point se faisant équilibre on aura en projetant sur l'horizontale et sur la verticale:

$$R_t = F \qquad R_n = P$$

R_t, R_n composantes horizontale et verticale de la réaction totale R

Cela posé on appelle frottement de glissement ou résistance de glissement la composante horizontale R_t de R égale et opposée à la force F capable de mettre le solide en mouvement et en mouvement uniforme.

Donc pour trouver l'expression de cette résistance de glissement on les lois du frottement, il suffira d'évaluer expérimentalement la force capable de produire le mouvement uniforme

MM. Coulomb et Morin ont fait ces expériences et il résulte de leur travail les lois suivantes :

1°. Lorsque deux corps glissent l'un sur l'autre, c'est à dire lorsqu'un même élément superficiel de l'un des deux passe successivement et d'une manière continue sur les différents éléments de l'autre, chaque corps reçoit un frottement c'est à dire une réaction tangentielle dont le sens est opposé au mouvement relatif du 1er corps sur le second.

Une infinité d'observations prouvent ce fait - Corps s'arrêtant sur un plan horizontal - Corps en repos sur un plan incliné.

2°. Le frottement est proportionnel à la pression normale et indépendant de l'étendue des surfaces en contact, quand la nature des corps ne change pas et que rien n'altère ni leur poli, ni leurs enduits ; ce qui exige que la pression par unité de surface ne soit pas assez grande pour produire l'écrasement de l'un des corps ni même pour expulser leurs enduits.

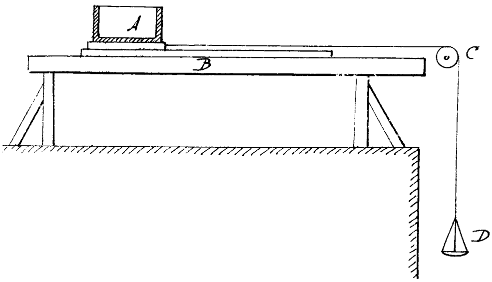
3°. Le frottement est indépendant de l'intensité de la vitesse relative des corps en contact ; au moins dans les cas ordinaires de la pratique.

4°. - Néanmoins entre deux corps qui ont été longtemps en contact et en repos lorsque le mouvement n'est que sur le point de naître, c'est à dire lorsqu'une très petite force additionnelle suffirait pour produire le mouvement le frottement est quelquefois plus considérable que lorsque le mouvement est acquis soit par translation soit par simple ébranlement - Cette différence du frottement au départ et du frottement pendant le mouvement a lieu pour les corps compressibles comme les bois et pour les corps durs dont les enduits ont été expulsés par une pression suffisamment prolongée

5°. Enfin le frottement est doublement spécifique, c'est à dire qu'il dépend de la nature des deux surfaces en contact, de leur plus ou moins grande aptitude à la déformation

Voici comment Coulomb puis plus tard Morin s'y prirent pour trouver ces lois.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3



Ils firent usage de l'appareil représenté ci contre. — Une caisse A qu'on chargeait de poids à volonté pouvait glisser sur deux madriers horizontaux B placés à coté l'un de l'autre, une corde attachée à la Caisse et passant dans la gorge d'une poulie C descendait verticalement et se terminait par un plateau D.

Lois du frottement au départ

Pour les trouver, après avoir chargé la Caisse A, il suffisait de mettre des poids dans le plateau D en quantité Convenable pour que le mouvement commençat à se produire, les poids mis dans le plateau augmentés du poids du plateau lui même étaient la mesure de la force de traction qui avait mis la Caisse en mouvement et par suite la mesure du frottement F_t qui s'opposait à ce mouvement. On pouvait faire varier à volonté 1° la charge de la Caisse A 2° la nature des surfaces frottantes en mettant sur les madriers et en fixant au dessous de la Caisse les corps de diverses espèces qu'on voulait soumettre à l'expérience - 3° enfin la grandeur des surfaces frottantes en faisant varier l'étendue de la surface par laquelle la Caisse s'appuyait — Coulomb ainsi que nous l'avons dit a trouvé ainsi, que le frottement au départ est : a proportionnel à la pression, b indépendant de l'étendue des surfaces frottantes

Lois du frottement pendant le mouvement

Le même appareil a servi à Coulomb pour étudier les lois du frottement pendant le mouvement. A cet effet, il déterminait le glissement de la Caisse en mettant des poids en quantité Convenable dans le plateau D, puis il observait la loi du mouvement produit en évaluant les temps employés par le plateau D à descendre successivement de quantités égales — Il trouva ainsi que le mouvement était uniformément varié ; or cela ne peut être que si la force résultante des forces sollicitant le corps est constante, or cette résultante est égale au poids p du plateau chargé diminué de la résistance R_t du frottement ; puisque cette différence doit être constante que p est constant, il faut donc nécessairement que R_t le soit aussi

Il reste à trouver la valeur de cette résistance constante R_t, pour cela il suffit d'observer l'accélération Constante J du mouvement produit, cette quantité comme, l'équilibre dynamique de la caisse A de poids P donnera en vertu du principe de d'Alembert

$$(1) \quad T - R_t - \frac{P}{g} J = 0 \qquad T \text{ tension de la Corde}$$

L'équilibre dynamique du plateau D donnera de même

$$(2) \quad p - T - \frac{p}{g} J = 0$$

De ces deux relations on peut déduire T et R_t en fonction de J donné par l'observation.

Pour trouver R_t j'ajoute (1) et (2), il vient :

$$-p - R_t - \frac{J}{g} (P+p) = 0$$

d'où $\quad R_t = p - \frac{J}{g} (P+p)$

En opérant ainsi et faisant varier les circonstances dans lesquelles se produisait le glissement comme lorsqu'il s'agissait du frottement au départ, Coulomb a reconnu que le frottement pendant le mouvement est en effet 1° proportionnel à la pression normale P 2° indépendant de l'étendue des surfaces frottantes 3° indépendant de la vitesse 4° plus faible toutes choses égales d'ailleurs que le frottement au départ.

Expression analytique de la résistance R_t de glissement

Les lois de cette résistance déterminées, il est facile d'en trouver l'expression analytique. En effet (avant dernière figure) l'équilibre des trois forces F.P,R nous a donné les deux égalités

$$(1) \quad R_t = F$$

$$(2) \quad R_n = P$$

Mais en fonction de R et de l'angle α que R fait avec la verticale.

$$(3) \quad R_t = R \sin \alpha$$

$$(4) \quad R_n = R \cos \alpha$$

De ces deux dernières on déduit par division

$$\frac{R_t}{R_n} = tg\,\alpha \text{ d'où}$$

$$\text{Frottement} = R_t = R_n\, tg\,\alpha$$

ou à cause de (2) :

$$(5) \quad \text{Frottement} = R_t = P.\, tg\,\alpha$$

Or on vient de prouver expérimentalement que cette résistance R_t est constante pendant tout le mouvement, il en résulte donc puisque P est constant qu'il en est de même de $tg\,\alpha$ et par suite de α pendant tout le mouvement, c'est-à-dire que pendant tout le mouvement la réaction totale R reste constante d'intensité et de direction

Tableau donnant la valeur du Coefficient de frottement f dans diverses circonstances

Indication des surfaces frottantes	Disposition des fibres	État des surfaces	Coefficient de frottement ou Rapport du frottement à la pression	
			au départ après quelque temps de contact	pendant le mouvement
Chêne sur chêne	Parallèles	sans enduit	0.62	0.48
— id — id id	id	Frottées de savon sec	0.44	0.16
— id — id id	Perpendiculaires	sans enduit	0.54	0.34
— id — id id	id	Mouillées d'eau	0.71	0.25
— id — id id	Bout sur plat	sans enduit	0.43	0.19
Chêne sur orme	Parallèles	id	0.38	"
Orme sur chêne	id	id	0.69	0.43
— id — id id	id	Frottées de savon sec	0.41	0.25
— id — id id	Perpendiculaires	sans enduit	0.57	0.45
Frêne, Sapin, Hêtre, Sorbier sur chêne	Parallèles	id	0.53	0.36 à 0.40
Fer sur chêne	id	id	0.62	0.62
id id id	id	Mouillées d'eau	0.65	0.26
id id id	id	Frottées de savon sec	id	0.21
Fonte sur chêne	id	sans enduit	id	0.49
id id id	id	Mouillées d'eau	id	0.22
id id id	id	Frottées de savon sec	id	0.19
Cuivre jaune sur chêne	id	sans enduit	0.62	0.62
Fer sur orme	id	id	id	0.25
Fonte id id	id	id	id	0.20
Cuir tanné sur chêne	Cuir à plat	id	0.61	0.30 à 0.35
id id id	Cuir sur champ	id	0.43	id
id id id	id	Mouillées d'eau	0.79	0.29
id id id	Cuir à plat	id	id	0.29
Cuir noir corroyé ou courroie sur une surface plane	Parallèles	sans enduit	0.74	0.27
id id id	Perpendiculaires	id	0.47	"
Cuir tanné sur fonte ou sur bronze	A plat ou de champ	id	"	0.56
id id id	id id	Mouillées d'eau	"	0.36
id id id	id id	Onctueuses et eau	"	0.23
id id id	id id	huilées	"	0.55
Cuir de bœuf pour garniture de piston sur fonte	id id	Mouillées d'eau	0.62	"
id id id	id id	Huile, suif, saindoux	0.12	"
Cuir noir corroyé sur poulie en fonte	Cuir à plat	sans enduit	0.28	"
id id id	id	Mouillées d'eau	0.38	"
Chanvre en brin en corde sur chêne	Parallèles	sans enduit	"	0.52
id id id	Perpendiculaires	Mouillées d'eau	"	0.33
Natte de chanvre sur chêne	Parallèles	sans enduit	0.50	"

Tableau donnant la valeur du coefficient de frottement f dans diverses circonstances

Indication des surfaces frottantes	Disposition des fibres	État des surfaces	Coefficient de frottement ou Rapport du frottement à la pression — au départ après quelque temps de contact	pendant le mouvement
Plats de charme sur chêne	Parallèles	Mouillées d'eau	0.87	"
Chêne et Orme sur fonte	Id	sans enduit	"	0.38
Poirier sauvage sur fonte	Id	Id	"	0.44
Fer sur Fer	Id	Id	"	"
Fer sur Fonte	Id	Id	0.19	0.18
Fonte sur Bronze	Id	Id	"	0,18
Fonte sur Fonte	Id	Id	0.16	0.15
Bronze sur Bronze	Parallèles	sans enduit	0.16	0.20
id id Fonte	Id	Id	"	0.22
id id Fer	Id	Id	"	0.16
Chêne Orme, poirier sauvage, fonte, fer, acier et bronze glissant l'un sur l'autre ou sur eux mêmes — Les mêmes	Id	Lubrifiées à la manière ordinaire de suif de saindoux à feu ou de saindoux [illegible]	"	0,07 à 0.08
Chêne, Orme, Charme, Fer, Fonte et bronze glissant 2 à 2 l'un sur l'autre		[illegible] suif		0.15
Les mêmes	Id		0.10 0.15	"
Calcaire tendu, dit calcaire volithique bien dressé sur lui même	Id		0.74	0.64
id sur dit muschelkalk bien dressé sur calcaire volithique	Id		0.75	0.67
Brique ordinaire sur calcaire volithique	Id	Id	0.67	0.65
Chêne id id id	Bois de bout	Id	0.63	0.38
Fer Forgé id id id	Parallèles	Id	0.79	0.69
Muschelkalk sur Muschelkalk	Id	Id	0.70	0.38
Calcaire volithique id id	Id	Id	0.75	0.65
Brique ordinaire id id	Id	Id	0.67	0.60
Chêne id id	Bois de bout	Id	0.64	0.38
Fer Forgé id id	Id	Id	0.62	0.24
Id id id	Parallèles	Mouillées d'eau.	"	0.30
Calcaire volithique sur calcaire volithique	"	Mortier de 3 parties de sable fin et une partie de chaux hydraulique	0.74	"

l'angle α constant qui définit cette direction constante s'appelle l'angle de frottement, et la quantité $tg.\alpha$ également constante, s'appelle coefficient de frottement. – Ce coefficient spécifique pour chaque corps se désigne généralement par la lettre f, de telle sorte que (5) devient :

(6) Frottement = $R_t = f.P$

On a quelquefois besoin d'avoir l'expression du frottement R_t en fonction de la réaction totale R : la relation (3) nous donne immédiatement cette expression

$$R_t = R \sin \alpha$$

ou en remplaçant $\sin \alpha$ en fonction de $tg\,\alpha$

$$R_t = R \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

mais puisque nous avons représenté la quantité constante $tg\alpha$ par f : il viendra :

$$R_t = R \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

Posons le rapport constant $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1$

On aura enfin :

$$R_t = f_1 R$$

Nous donnons ci contre un tableau renfermant les valeurs du coefficient de frottement f dans les diverses circonstances qui peuvent se présenter en pratique – De ces valeurs de f il sera toujours facile de déduire les valeurs correspondantes du coefficient f_1 à l'aide de la relation :

$$f_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

Art. II. – Étude du mouvement d'un corps sur un plan horizontal en tenant compte du frottement.

Nous distinguerons les trois cas suivants :

1°. Le corps est au repos ou animé d'une vitesse initiale v_0 et soumis à une force horizontale $F > fP$ de même direction que v_0

2°. Le corps possède une vitesse initiale v_0 et est soumis à une force $F < fP$

3°. Le corps possède une vitesse initiale v_0 et on lui applique une force de sens contraire à la direction de cette vitesse v_0

1er Cas – Soit un corps de poids P placé sur un plan horizontal. J'applique au centre de gravité de ce corps une force horizontale F et je suppose que je la fasse croître d'une manière continue à partir de 0

Pour $F=0$ la réaction totale R est verticale égale et directement opposée à P. F croissant la réaction R par suite de la dissymétrie de la surface de déformation qui s'accuse de plus en plus, s'incline sur la verticale de manière à faire avec elle des angles qui vont aussi en croissant d'une manière continue, de telle sorte qu'elle puisse faire à chaque instant équilibre aux deux forces F et P - Quand F en croissant toujours atteint précisément la valeur de la résistance constante de frottement $R_f = fP$ il y a encore équilibre mais alors la moindre impulsion donnée au corps détermine son mouvement lequel est uniforme

F dépassant cette valeur $R_f = fP$, répondant à la position limite de la réaction totale R, le corps se met en mouvement sous l'action de la force constante :

$$\varphi = F - fP$$

Ce mouvement par suite est uniformément accéléré. L'accélération constante J_0 de ce mouvement sera d'ailleurs donnée par la relation :

$$m\, J_0 = \varphi,\ m \text{ représentant la masse } \frac{P}{g} \text{ du corps}$$

d'où $J_0 = \dfrac{\varphi}{m}$ = en remplaçant $= g\,\dfrac{(F - fP)}{P}$

On peut encore arriver au même résultat en appliquant le principe de d'Alembert — En vertu de ce principe à chaque instant du mouvement qui se produit il y a équilibre dynamique entre les forces réelles $F, -fP$, et la résistance d'inertie opposée au mouvement mJ_0 — Ces forces doivent donc satisfaire à l'équation d'équilibre de projection sur la direction du mouvement ce qui donne l'égalité.

$$F - fP - m\, J_0 = 0$$

d'où $J_0 = \dfrac{F - fP}{m} = g\,\dfrac{F - fP}{P}$, en remplaçant m par sa valeur

Par suite les lois du mouvement du solide seront par deux intégrations successives, en ajoutant les constantes :

$$v = v_0 + J_0 t$$

$$s = s_0 + v_0 t + J_0 \frac{t^2}{2}.$$

Dans lesquelles il suffira de remplacer J_0 par la valeur trouvée.

2^e Cas. — Le corps possède une vitesse initiale v_0 et il est soumis à l'action d'une force $F < fP$

Dans ce cas le mouvement sera uniformément retardé par l'action de la force retardatrice (c'est à dire de direction opposée à v_0) $\varphi = fP - F$ l'accélération J_0' de ce mouvement retardé sera encore donnée par la relation

$$J_0' = \frac{f}{m} = g\,\frac{fP - F}{P}$$

et les lois de ce mouvement seront

$$(1)\quad v = v_0 - J_0' t$$

$$(2)\quad s = s_0 + v_0 t - J_0' \frac{t^2}{2}$$

dans lesquelles on remplacera J_0' par sa valeur

Le mobile s'arrêtera pour $v = 0$ c'est à dire après un temps $t = \frac{v_0}{J_0'}$ et l'espace qu'il aura ainsi parcouru s'obtiendra en remplaçant cette valeur de t dans (2)

d'où : $s = s_0 + \frac{v_0^2}{2J_0'}$

3°. Enfin si le mobile possède une vitesse initiale opposée à l'action de la force F

La résistance de frottement est alors de même sens que F s'ajoute à cette force pour donner une force résultante.

$$f = F + fP$$

retardatrice du mouvement. Le mouvement sera donc uniformément retardé et ses lois seront :

$$J_0'' = \frac{dv}{dt} = \frac{f}{m} = \frac{(F + fP)}{P}\,g$$

D'où en intégrant : $v = v_0 - J_0'' t \quad (1)$ } Dans lesquelles on remplacerait

et $s = s_0 + v_0 t - \frac{J_0'' t^2}{2} \quad (2)$ } J_0'' par sa valeur

Le temps au bout duquel le corps s'arrêtera sera donné par la formule (1) dans laquelle il faut faire $v = 0$ d'où $t = \frac{v_0}{J_0''}$; l'espace parcouru sera dès lors

$$s = s_0 + \frac{v_0^2}{2J_0''}$$

Cela posé, nous aurons 2 cas à distinguer.

1° La force F retardatrice est plus petite que la résistance de frottement fP.

2° id. id. plus grande id id fP

1° Si $F < fP$, le corps persiste dans son repos

2° Si $F > fP$, le mouvement recommence en sens contraire, et nous rentrons alors dans le 1er cas.

Remarque. — Chaque fois que le mouvement change de sens, il est bien entendu que la résultante R des réactions change aussi de sens, car elle est toujours inclinée sur la verticale en sens inverse du mouvement.

Rendement. On peut considérer le plan horizontal comme une machine et chercher son rendement

Or le rendement d'une machine arrivée à l'état de mouvement uniforme est donné par la relation $\frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}$

La force motrice est ici la force F qui sollicite le corps, elle donne lieu pour un déplacement horizontal Δx du centre de gravité du corps à un travail moteur égal à : $T_m = F \Delta x$

La force résistante $R_f = fP$ donne lieu pendant le temps considéré c'est à dire pour le même déplacement à un travail résistant $T_f = fP.\Delta x$, donc le rendement est égal à

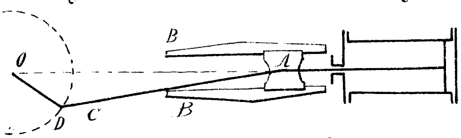
$$\frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{fP}{F}$$

Remarques - 1° Ce rendement n'est égal à l'unité que dans l'hypothèse irréalisable $f=0$ -

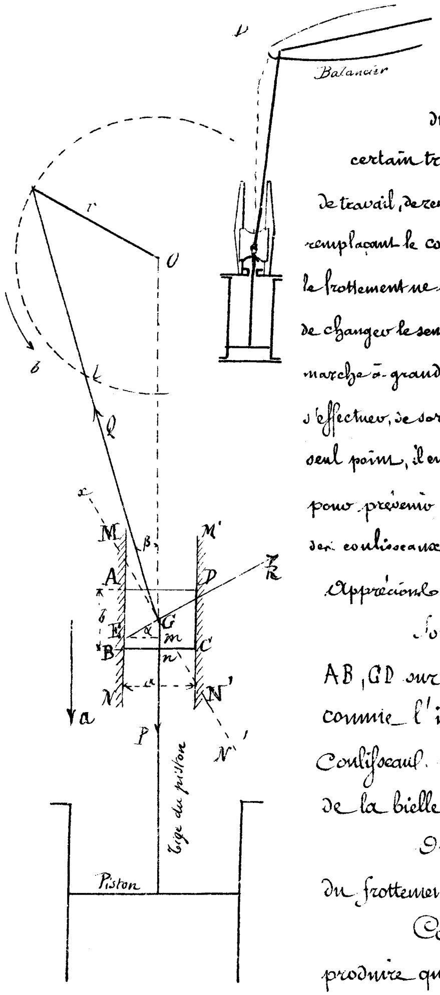
2° Ce rendement est nul pour $fP = F$ ce qui doit être, car dans cette hypothèse le corps est au repos ; on peut encore le voir de la façon suivante pour $fP = F$ le travail moteur T_m = le travail résistant T_f, donc la machine est au repos, puisqu'elle n'était animée auparavant d'aucune vitesse initiale

——— Applications de l'étude précédente à la recherche du travail absorbé dans le guidage de la tige du piston dans les machines à vapeur et dans les pompes.

Dans les machines à vapeur à balancier, nous avons dit en 1ère année que le guidage de la tige du piston s'obtenait au moyen du parallélogramme articulé de Watt. Nous avons également parlé de la disposition d'Oliver Evans actuellement abandonnée à cause de son instabilité. Les Américains pour ces mêmes machines à balancier ont supprimé le parallélogramme et adopté le dispositif en usage dans les machines horizontales dans lesquelles le guidage de la tige du piston est obtenu au moyen d'un coulisseau rectangulaire A fixé à l'extrémité de la tige du piston ce



coulisseau est assujetti à glisser entre deux guides longitudinaux BB. La bielle G s'articule d'une part au centre du coulisseau et d'autre part au bouton de la manivelle motrice OD. Telle est la disposition en usage pour les machines horizontales sans balancier ; eh bien, pour les machines à balancier, les Américains retournent le système précédent et articulent la bielle G à l'extrémité D du balancier ainsi que l'indique le croquis. Ce mode de guidage est également employé dans les machines à vapeur verticales sans balancier, pour comprendre cette disposition il suffit de retourner verticalement le premier croquis



Dans toutes ces dispositions le frottement du coulisseau sur ses guides ou glissières absorbe un certain travail qu'il s'agit d'évaluer. On a bien imaginé pour éviter cette perte de travail, de remplacer le frottement de glissement par le frottement de roulement en remplaçant le coulisseau rectangulaire A par un galet, mais comme nous allons le voir le frottement ne pouvant se manifester que sur l'une des deux glissières, le galet est obligé de changer le sens de sa rotation à chaque point mort, de là résulte que si la machine marche à grande vitesse, ce changement de rotation du galet n'a pas le temps de s'effectuer, de sorte qu'il glisse au lieu de rouler et ce glissement s'effectuant sur un seul point, il en résulte une usure rapide. Aussi a-t-on renoncé à cette disposition et pour prévenir l'altération des surfaces et l'usure on a reconnu qu'il est préférable d'employer des coulisseaux à larges patins.

Apprécions donc le travail absorbé par le frottement qui se manifeste dans ce cas.

Soit ABCD un coulisseau s'appuyant par les patins AB, CD sur les glissières MN, M'N'. Deux forces P et Q dirigées comme l'indiquent les flèches sont appliquées au centre G du coulisseau, l'une représente l'effort du piston, l'autre la résistance de la bielle.

On demande une relation entre P et Q en tenant compte du frottement ?

Comme il existe toujours du jeu, le contact ne peut se produire que sur un coté à la fois AB ou CD, ou diagonalement en D et B ou en A et C.

Le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche a, on voit à priori que l'action des deux forces P et Q ne pourra qu'appuyer le coulisseau sur la glissière MN par toute la face AB, ou diagonalement sur les deux glissières par les angles B et D.

1° Supposons que le contact ait lieu sur AB, la glissière MN va exercer sur le coulisseau une réaction totale R faisant avec la normale AB, l'angle α du frottement. Mais cette réaction étant la résultante de toutes les petites réactions élémentaires aux différents points de AB devra nécessairement passer par un certain point E de AB ; de plus devant faire équilibre aux deux forces P et Q elle devra passer par leur point de concours G.

Sur la figure la direction de cette force R sera donc telle que $E i k$. il en résulte que dans l'hypothèse faite :

$$GM < Gn \text{ c'est à dire : } < \frac{b}{2}$$

Or dans Gm, dans le triangle GEm, $= \frac{a}{2} tg\,\varphi = \frac{fa}{2}$ en remplaçant on a enfin

$$\frac{fa}{2} < \frac{b}{2} \text{ d'où } b > fa \qquad f \text{ coefficient de frottement}$$

Donc pour que l'hypothèse faite se réalise, c'est à dire pour que le contact ait lieu sur toute la face AB, il faut que la longueur b du coulisseau ou des patins de ce coulisseau soit $> fa$ (a étant la largeur de ce coulisseau)

Supposons cette condition remplie. Le coulisseau est en équilibre sous l'action des forces P, Q, R ou sous l'action des forces P, Q, R_n, R_t : R_n, R_t composantes normale et tangentielle de R.

Nous supposons le mouvement uniforme pour n'avoir pas à tenir compte de la résultante d'inertie ; comme le coulisseau ne peut se déplacer que verticalement la seule condition d'équilibre est celle de projection sur cette verticale

$$(1) \quad P - Q \cos\beta - f R_n = 0$$

En projetant sur l'horizontale nous aurons une condition qui nous donnera R_n : $\quad (2) \quad R_n = Q \sin\beta$

Éliminant R_n entre (1) et (2) il vient :

$$P = Q\cos\beta + f Q \sin\beta = Q\,(f\sin\beta + \cos\beta)$$

D'où $\quad \frac{P}{Q} = f\sin\beta + \cos\beta$

On aurait pu arriver directement à cette relation entre la puissance et la résistance en projetant les trois forces P, Q, R sur une direction $x x'$ perpendiculaire à R car alors R se trouve de la sorte éliminé géométriquement : on a ainsi :

$$P\cos\alpha = Q\cos(\alpha - \beta) = Q\,[\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta]$$

d'où $\quad \frac{P}{Q} = f\sin\beta + \cos\beta$

Expression du rendement. — Donnons un déplacement δx au coulisseau. Pour ce déplacement $\quad R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q\,\delta x\cos\beta}{P\,\delta x}$

y remplaçant le rapport $\frac{P}{Q}$ par sa valeur trouvée précédemment, on a

$$R = \frac{\cos\beta}{\cos\beta + f\sin\beta} = \frac{1}{1 + f\,tg\,\beta}$$

Cette expression donne le rendement instantané pour la position présente de la bielle définie par l'angle variable β

Discussion. $R = 1$ pour $f = 0$, c'est à dire quand il n'y a pas de frottement quel

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : M VIR 70 3

que soit β

$R = 1$ quelque soit f; pour $\beta = 0$ c'est à dire aux points morts, β croissant R diminue et passe par un minimum pour β maximum c'est à dire pour la position de la bielle tangente au cercle décrit par le bouton de la manivelle auquel cas β est donné par la relation :

$$r = l . \operatorname{tg} \beta \qquad \begin{array}{l} r \text{ rayon de la manivelle} \\ l \text{ longueur de la bielle} \end{array}$$

Le rendement minimum aura donc pour expression :

$$R_{\text{minimum}} = \frac{1}{1 + f\frac{r}{l}}$$

Si nous admettons que pendant tout le mouvement le rendement est moyen entre ces deux limites extrêmes 1 et $\frac{1}{1+f\frac{r}{l}}$, c'est à dire égal à :

$$R' = \frac{1 + \frac{1}{1+f\frac{r}{l}}}{2}$$

on aura facilement le travail absorbé par le frottement en fonction du travail moteur dépensé. En effet R' désignant le rendement moyen que nous venons de calculer, on a :

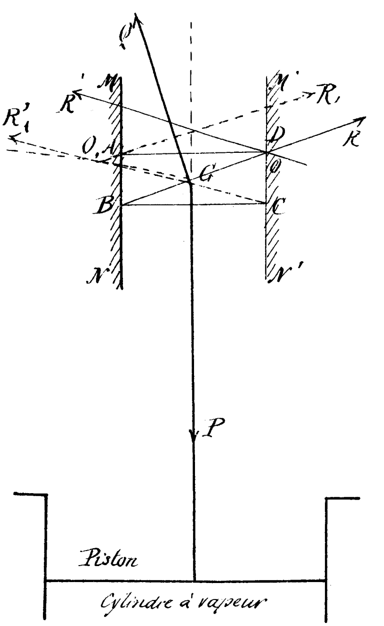
$$R' = 1 - \frac{T_f}{T_m}, \text{ d'où } T_f = T_m (1 - R')$$

Remarque. — Le mouvement de rotation du bouton de la manivelle ayant lieu dans le sens de la flèche b, dans la période de descente du piston, nous venons de voir que le frottement s'effectuait sur la face AB si la condition $b > fa$ était remplie, or ce qu'il faut remarquer c'est que dans la course ascendante du piston, le frottement s'effectuera encore sur cette face AB et non sur CD en effet dans cette 2e période les 2 forces P et Q changent de sens et tendent encore à appuyer le coulisseau sur la glissière MN. Il en résulte que dans le mouvement continu d'une machine, le frottement ne s'opère que sur l'une des deux glissières, si l'on en emploie deux c'est pour se réserver l'avantage de pouvoir marcher indifféremment dans les deux sens

2° Supposons actuellement que la condition $b > af$ ne soit pas satisfaite ce qui arrive quand b est très petit par rapport à a, alors il y a arc boutement, car la réaction R qui pour l'équilibre doit passer par le point G aurait son point d'application E en dehors de AB ce qui est absurde

Je dis, le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche, que cet arc-boutement a lieu en B et D et non en A et C. Cela se sent d'abord a priori ; pour le faire voir rigoureusement supposons que l'arc boutement puisse se produire en A et C, en ces points les réactions seront alors R_1 et R'_1, leur résultante qui passe par leur point de concours O, doit faire équilibre aux deux forces P et Q et par suite passer également

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3



par le point G mais le point O_1 étant du même côté de la verticale du point G que la force Q, il suit que cette résultante GO_1 est située dans l'angle QGP et est par suite incapable de faire équilibre aux deux forces P et Q. L'arc boutement ne peut donc se produire qu'en B et D : En effet dans ce cas, les réactions en B et D sont R et R' et leur point de concours O se trouve de l'autre côté de la verticale du point G ; la résultante GO de ces deux réactions R et R' est donc capable de faire équilibre à P et Q

Cela posé le Coulisseau est en équilibre (en supposant le mouvement uniforme pour n'avoir pas à tenir compte des effets d'inertie) sous l'action des forces — $P\,Q\,R_n\,R_t\,R'_n\,R'_t$

R_n, R_t composantes normale et tangentielle de R
R'_n, R'_t — — — — — — — — R'
Ici comme il y a tendance à la rotation, il y aura trois relations d'équilibre.

1° Projection sur verticale $P - Q\cos\beta - f(R_n + R'_n) = 0$
2° " horizontale $Q\sin\beta + R'_n - R_n = 0$
3° Moments autour de l'axe projeté en G $\frac{b}{2}R'_n + \frac{a}{2}fR'_n + \frac{b}{2}R_n - \frac{a}{2}fR_n = 0$

ou

$$\begin{cases} R_n + R'_n = \dfrac{P - Q\cos\beta}{f} & (1) \\ R_n - R'_n = Q\sin\beta & (2) \\ \dfrac{b}{2}(R_n + R'_n) - f\dfrac{a}{2}(R_n - R'_n) = 0 & (3) \end{cases}$$

Remplaçant dans (3) $(R_n + R'_n)$ $(R_n - R'_n)$ par leurs valeurs (1) et (2) on a enfin :

$$\frac{b}{2}\cdot\frac{P - Q\cos\beta}{f} - \frac{a}{2}\,fQ\sin\beta = 0$$

D'où on tire.

$$\frac{Pb}{2f} = Q\left[f\frac{a}{2}\sin\beta + \frac{b\cos\beta}{2f}\right]$$

et enfin : $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{f^2 a}{b}\sin\beta + \cos\beta$

Telle est dans ce cas la relation entre la puissance et la résistance à chaque instant du mouvement, c'est à dire pour la valeur présente de β

Rendement. Donnons un déplacement δx au coulisseau.
Pour ce déplacement.

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q\,\delta x\cos\beta}{P\,\delta x}$$

et en remplaçant le rapport $\frac{P}{Q}$ par sa valeur trouvée on a :

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 763

$$R = \frac{\cos\beta}{\frac{a}{b} f^2 \sin\beta + \cos\beta} = \frac{1}{1+\frac{a}{b} f^2 \operatorname{tg}\beta}$$

C'est le rendement instantané relatif à la valeur présente de β

Discussion — $R=1$ pour $f=0$ c'est à dire quand on ne tient pas compte de frottement, et cela quelque soit β.

$R=1$ quelque soit f pour $\beta=0$ c'est à dire aux points morts

R est minimum pour $\operatorname{tg}\beta$ maximum donné par la relation

$$r = l \operatorname{tg}\beta \text{ d'où } \operatorname{tg}\beta_{\text{maximum}} = \frac{r}{l}$$

Remplaçant : on aura pour le rendement minimum.

$$R_{\text{minimum}} = \frac{1}{1+\frac{a}{b} f^2 \frac{r}{l}}$$

Le rendement réel est moyen entre les deux limites extrêmes $R=1$ et $R = \frac{1}{1+\frac{a}{b} f^2 \frac{r}{l}}$ De ce rendement moyen, on déduirait comme précédemment le travail absorbé par le frottement, et on verrait que ce travail est bien plus considérable que lorsqu'il n'y a pas arc-boutement — Il faut donc en pratique toujours s'arranger de façon que la condition $b > af$ soit satisfaite, pour cela on munit le coulisseau de très larges patins.

Toute la théorie précédente s'applique au cas où la force P serait résistante et la force Q mouvante comme dans les pompes, il suffit de changer dans les relations précédentes f en $-f$, et on a :

1° Dans le cas du contact d'un seul coté :

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{\cos\beta - f\sin\beta} \text{ d'où } R = \frac{\cos\beta - f\sin\beta}{\cos\beta}$$

2° Dans le cas du contact diagonal $\frac{Q}{P} = \frac{1}{\cos\beta - \frac{a}{b} f^2 \sin\beta}$ d'où $R = \frac{\cos\beta - \frac{a}{b} f^2 \sin\beta}{\cos\beta}$

Procédé général pour calculer dans une machine quelconque son rendement, c'est à dire le rapport du travail résistant utile au travail moteur, connaissant seulement en fonction de f le rapport $\frac{P}{Q}$ de la puissance à la résistance.

Dans l'étude précédente nous avons fait usage d'une méthode élémentaire pour trouver le rendement. Cette méthode consistait à donner à la machine un déplacement compatible avec ses liaisons et on calculait directement pour ce déplacement le travail résistant utile et le travail moteur, puis on prenait le rapport dans lequel pour avoir l'expression du rendement il suffisait de remplacer le rapport $\frac{P}{Q}$ par sa valeur déterminée en 1er lieu.

Mais cette méthode naturelle devient très longue dans le cas de mécanismes compliqués, il est alors avantageux de lui substituer la méthode fort élégante que nous

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 76 3

allons exposer ; laquelle d'ailleurs n'est que la traduction analytique des opérations successives qui constituent la première méthode.

Le rapport de la puissance à la résistance dans le cas du frottement se présente toujours comme dans l'exemple précédent sous la forme :

$$(1) \quad \frac{P}{Q} = F(f) \quad (f \text{ représentant le coefficient de frottement})$$

Pour trouver le rendement, nous donnons au mécanisme un déplacement compatible avec ses liaisons. Soient dans ce déplacement δx, δy les chemins parcourus par les points d'application de la puissance P et de la résistance utile Q ces chemins étant estimés suivant la direction de ces forces ; On aura :

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q\,\delta y}{P\,\delta x}$$

ou en remplaçant le rapport $\frac{P}{Q}$ par sa valeur en fonction de f

$$(2) \quad R = \frac{1}{F(f)} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Or remarquons que le rapport $\frac{\delta y}{\delta x}$ ne dépend que des relations géométriques qui existent entre les organes du mécanisme considéré et nullement de la nature des matériaux employés, c'est à dire de f. Donc ce rapport restera le même si nous supposons $f = 0$

Mais on se rappelle (Cours de 1re année, statique appliquée) :

Que dans ce cas de liaisons théoriques sans frottement : les efforts sont en raison inverse des chemins décrits par les points d'application de ces efforts ces chemins étant estimés suivant leurs directions : on aura donc :

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{\delta y}{\delta x}$$

Le rapport $\frac{P_0}{Q_0}$ étant $F(0)$ c'est à dire ce que devient le rapport $\frac{P}{Q}$ dans (1) lorsqu'on y fait $f = 0$. On a donc : $\frac{\delta y}{\delta x} = F(0)$

Par suite l'expression du rendement sera en substituant dans (2) $\frac{\delta y}{\delta x}$ par sa valeur $F(0)$

$$(3) \quad R = \frac{F(0)}{F(f)}$$

Applications. Dans le cas de Coulisseaux à très larges patins on a trouvé :

$$\frac{P}{Q} = F(f) = f \sin\beta + \cos\beta$$

En appliquant la règle que symbolise la relation (3) on aura :

$$R = \frac{F(0)}{F(f)} = \frac{\cos\beta}{f\sin\beta + \cos\beta} = \frac{1}{1 + f\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

ainsi que nous avions trouvé directement

Dans le cas de coulisseaux à patins très courts on a trouvé :

$$\frac{P}{Q} = F(f) = \cos\beta + \frac{a}{b} f^2 \sin\beta$$

D'où on déduit :

$$R = \frac{F(o)}{F(f)} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta + \frac{a}{b} f^2 \sin\beta} = \frac{1}{1 + \frac{a}{b} f^2 tg\beta}$$

On voit que nous tombons encore sur le résultat que nous avions trouvé directement.

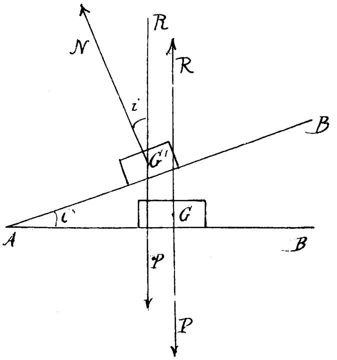
Article III

Étude du mouvement d'un corps sur un plan incliné en tenant compte du frottement

Nous diviserons cette étude en deux parties :

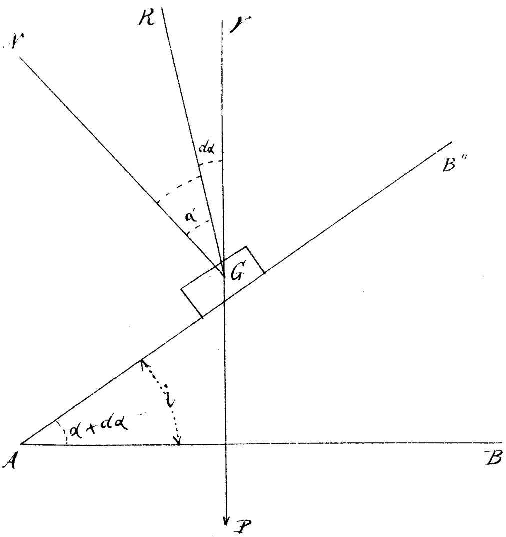
1°. Le corps n'est soumis à aucune force motrice extérieure autre que son poids.

2°. Le corps est soumis à une certaine force motrice extérieure.



I°. Considérons un corps posé sur le plan horizontal AB. Le corps étant au repos les forces qui le sollicitent sont en équilibre ; donc, l'ensemble des réactions du plan sur le corps se résument en une réaction totale R égale et directement opposée au poids P du corps.

Supposons qu'une charnière en A permette de soulever le plan par son extrémité B, en le faisant tourner autour de A nous constatons que nous pouvons soulever le plan jusqu'à un certain angle limite α sans modifier aucunement l'état de repos du corps. Considérons une de ces positions (A B') du plan. Puisque le corps est encore au repos, il faut nécessairement que les forces qui le sollicitent soient en équilibre, il y a donc équilibre entre le poids P du corps force verticale appliquée en G' et la réaction totale R du plan, donc cette réaction est elle même verticale et doit passer par le point G' ; elle fait donc avec N normale au plan AB' un certain angle égal précisément à l'angle B' AB = i du plan incliné avec l'horizon. Ainsi à mesure qu'on soulève le plan incliné, la réaction R toujours égale et directement opposée à P, s'incline de plus en plus sur la normale N du plan incliné en faisant constamment avec cette normale l'angle variable i. Lorsque soulevant de plus en plus le plan incliné nous l'amenons enfin à faire avec le plan horizontal un angle i égal à l'angle de frottement α, la réaction R toujours égale et opposée à P va faire avec la normale N au plan incliné le même angle α de frottement



angle limite qu'elle ne peut dépasser.

Que va-t-il se passer alors si nous soulevons encore tant soit peu le plan ?

Soit AB" sa nouvelle position, la normale N fera avec la verticale du point G un angle égal à $\alpha + d\alpha$, mais puisque la réaction R ne peut faire avec cette normale N, un angle supérieur à α, elle ne pourra prendre la direction GV de cette verticale, elle va donc passer à gauche de GV et prendre une position GR telle que $\widehat{RGN} = \alpha$, dès lors n'étant plus égale et directement opposée à la force P, il n'y aura plus équilibre entre ces deux forces et le mouvement commencera.

On conclut de là un moyen pratique de déterminer les coefficients de frottement des diverses substances ; il suffit de mesurer l'inclinaison du plan incliné sur le plan horizontal au moment où le corps soumis à l'expérience commence à se mettre en mouvement, cet angle représente l'angle de frottement, en en prenant la tangente on obtient le coefficient de frottement.

Il faut remarquer qu'on obtient ainsi le coefficient de frottement au départ toujours plus élevé que le coefficient de frottement pendant le mouvement.

Supposons donc l'angle i du plan incliné plus grand que l'angle α de frottement et proposons nous d'étudier le mouvement qui se produit ;

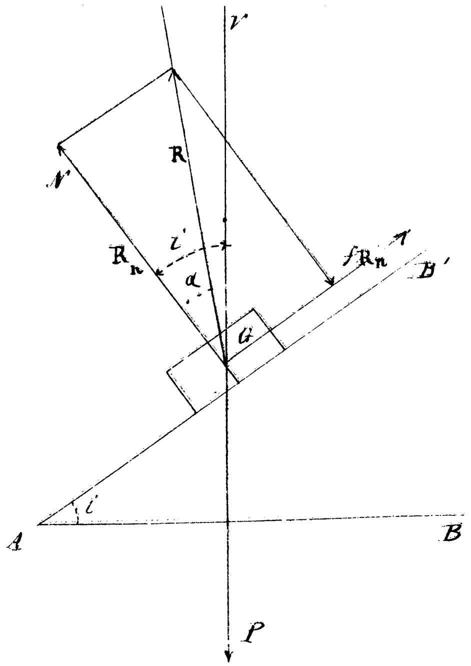
Le corps est soumis aux forces P et R, ou aux forces P, R_t, R_n ; R_t et R_n étant les composantes tangentielle et normale de la réaction R ou encore aux forces P, fR_n et R_n (fR_n étant l'expression de R_t en fonction de R_n)

Or, d'après le principe de d'Alembert, il y a à chaque instant du mouvement équilibre dynamique entre les forces réelles P, fR_n et R_n qui agissent sur le système et la résistance d'inertie $\frac{P}{g} J$ du corps.)

Puisqu'il n'y a qu'un seul mouvement possible, il n'y a qu'une seule équation d'équilibre, celle de projection sur la direction du mouvement. Nous aurons donc :

$$P \sin i - fR_n - \frac{P}{g} J = 0 \qquad (1)$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70-3



Telle est la seule condition d'équilibre.

En projetant sur la normale au plan nous aurons une condition qui nous donnera R_n. En effet cette relation de projection nous donne

$$R_n - P \cos i = 0 \quad (2)$$

Éliminant R_n entre les relations (1) et (2) et tirant la valeur inconnue de J nous aurons

$$J = \frac{g}{P}\,(P \sin i - f P \cos i)$$

ou $J = g\,(\sin i - f \cos i)$ (3)

Telle est l'accélération du mouvement produit.

Elle est constante donc le mouvement est uniformément accéléré et par deux intégrations successives on remontera facilement à la loi des vitesses et à celle des espaces.

Discussion de la valeur de J. Il peut se présenter 3 cas $J = 0$, $J > 0$ et $J < 0$

1° $J = 0$ répond à l'équilibre ou au mouvement uniforme; or $J = 0$, quand $\sin i = f \cos i$ ou quand $f = \tan i$, mais $f = \tan\alpha$, donc $J > 0$ quand $\alpha < \tan i$ ou $i > \alpha$ – 2° $J > 0$ répond au mouvement uniformément accéléré, or $J > 0$ quand $\sin i > f \cos i$ ou quand $f < \tan i$; mais $f = \tan\alpha$: – Donc $J > 0$ quand: $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg} i$; ou bien $i > \alpha$.

Les lois de ce mouvement uniformément accéléré seront par deux intégrations successives $v = v_0 + Jt$ et $s = s_0 + v_0 t + \frac{Jt^2}{2}$ quand le corps est animé d'une vitesse initiale v_0 dans la direction du plan incliné.

3° $J < 0$ répond au mouvement uniformément retardé or $J < 0$ quand $\sin i < f \cos i$ ou quand $f > \tan i$, mais $f = \tan\alpha$ donc $J < 0$ quand $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg} i$ ou quand: $i < \alpha$

Donc si le corps possède une vitesse initiale v_0 il aura un mouvement retardé quand l'angle du plan incliné sera plus petit que l'angle du frottement ——————————— Les lois de son mouvement seront d'ailleurs en intégrant deux fois: $v = v_0 - Jt$ (α) et $s = v_0 t - \frac{Jt^2}{2}$ (β) relations dans lesquelles la valeur de J serait donnée par la formule (3)

Pour avoir le temps au bout duquel le corps s'arrêterait, il suffirait de faire $v = 0$ dans la relation (α) substituant dans (β) on aurait l'espace parcouru

Remarque. – Si dans l'expression (3) de l'accélération: $J = g\,(\sin i - f \cos i)$ on remplace

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

i par sa valeur tg α, elle prend la forme après développement

$$J = g\,\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}$$

Les équations du mouvement uniformement varié du corps seront donc en intégrant $v = g\,\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}.t$ et $S = \frac{1}{2}\,g\,\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}.t^2$

(Nous supposons qu'il n'y a pas de vitesse initiale.)

En comparant ces formules à celles de la chute des corps dans le vide, on voit que l'accélération, la vitesse et l'espace sont diminués dans le rapport de $\sin(i-\alpha)$ à $\cos\alpha$. La nature du mouvement restant d'ailleurs la même le plan incliné offre un moyen commode d'étudier les lois du mouvement des corps pesants, et c'est de cette manière en effet, qu'ont été faites les célèbres expériences de Galilée sur la chute des graves.

Ce mouvement jouit de 2 propriétés remarquables découvertes par Galilée et que nous avons exposé dans notre Introduction à la Dynamique pure d'un point matériel.

—— 2° Étude du mouvement sur un plan incliné d'un corps soumis à une certaine force motrice Q.

Fig(1) soit i l'angle du plan incliné avec l'horizon. Le corps est soumis à son poids P, soit OQ la direction de la force Q faisant avec AB un angle β; soit OV le prolongement de la verticale OP, menons ON perpendiculaire à AB, ce sera la normale au plan incliné

Supposons que le corps sous l'action des forces qui le sollicitent tende à prendre un mouvement ascendant.

Cherchons les lois de ce mouvement !

Si le corps tend à monter dans le sens AB, la réaction R du plan fait avec la normale ON et du côté opposé au mouvement un angle RON $= \alpha$ égal à l'angle du frottement.

En vertu du principe de d'Alembert, il y a à chaque instant du mouvement du corps équilibre dynamique entre les forces P, Q, R et sa résistance d'inertie $\frac{P}{g}\,J$ (J étant l'accélération inconnue du mouvement) ou en remplaçant R par ses composantes normale et tangentielle R_n et fR_n, il y a équilibre dynamique entre les forces P, Q, R_n, fR_n et $\frac{P}{g}\,J$ résistance d'inertie, toutes ces forces étant dans un même plan et le corps ne pouvant prendre qu'un mouvement de translation suivant AB, il n'y a qu'une seule équation d'équilibre, celle de projection sur la direction

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

du mouvement

Nous aurons donc $Q\cos\beta - P\sin i - fR_n - \frac{P}{g}J = 0$

D'où l'on tire : $J = \frac{g}{P}(Q\cos\beta - P\sin i - fR_n)$ (1)

On aurait pu d'ailleurs obtenir cette relation sans parler du principe de d'Alembert, en considérant la force φ qui donne le mouvement.

$\varphi = Q\cos\beta - P\sin i - fR_n$

d'où $J = \frac{\varphi}{m} = \frac{g}{P}(Q\cos\beta - P\sin i - fR_n)$

De quelque manière qu'on ait obtenu la relation (1) il faut faire disparaître R_n qui n'est pas connu.

Pour déterminer cette quantité nous n'avons qu'à poser l'équation de projection de toutes les forces sur la normale au plan. Cette équation de condition est :

$$R_n + Q\sin\beta - P\cos i = 0$$

d'où $R_n = P\cos i - Q\sin\beta$

Remplaçant R_n par sa valeur dans l'équation précédente, nous aurons :

$$J = \frac{g}{P}\left[Q\cos\beta - P\sin i - f(P\cos i - Q\sin\beta)\right] \quad (1)$$

Cette accélération est constante (si Q et β restent constants) le mouvement est alors uniformément varié

Deux intégrations successives donneront les lois des vitesses et des espaces.

La formule (1) est générale et s'applique quels que soient Q et β sous la réserve que R_n soit positive, c'est à dire qu'il faut que le corps presse sur le plan ce qui donne la condition : $P\cos i > Q\sin\beta$ ou $\cos i > \frac{Q}{P}\sin\beta$

Discussion de la valeur de J

$$J = \frac{g}{P}\left[Q\cos\beta - P\sin i - f(P\cos i - Q\sin\beta)\right]$$

3 cas : $J = 0$ $J > 0$, $J < 0$

1° $J = 0$ – Le corps est en repos ou en mouvement uniforme, s'il possédait une vitesse initiale. Or $J = 0$ quand :

$$Q\cos\beta - P\sin i = f(P\cos i - Q\sin.\beta)$$

où $Q(\cos\beta + f\sin\beta) = P(\sin i + f\cos i)$

où enfin quand : $\frac{Q}{P} = \frac{\sin i + f\cos i}{\cos\beta + f\sin\beta}$

telle est la relation qui doit exister entre la force Q et la force P, pour que le corps soit au repos ou en mouvement uniforme

2° $J > 0$ le corps possède alors un mouvement uniformément retardé dans le sens ascendant (car la valeur de $J > 0$ est constante pendant tout le mouvement). Or $J > 0$ quand : $Q\cos\beta - P\sin i > f(P\cos i - Q\sin\beta)$

ou quand : $\frac{Q}{P} > \frac{\sin i + f\cos i}{\cos\beta + f\sin\beta}$

telle est la relation qui doit exister entre Q et P pour que le mouvement soit uniformément accéléré dans le sens ascendant.

3° $J < 0$ – Le corps possède alors un mouvement uniformément retardé dans le sens ascendant : Or $J < 0$ quand :

$$\frac{Q}{P} < \frac{\sin i + f\sin i}{\cos\beta + f\sin\beta}$$

——— Reprenons maintenant le 1er cas, celui du repos ou du mouvement uniforme. Il répond à $J = 0$ c'est à dire à la condition :

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin i + f\cos i}{\cos\beta + f\sin\beta}$$

telle est la relation qui doit exister entre les forces Q et P pour qu'elles se fassent équilibre.

On peut donner à cette expression une autre forme en remplaçant f par sa valeur $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$: On aura ainsi :

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin i + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos i}{\cos\beta + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha + i)}{\cos(\beta - \alpha)} \cdot (\alpha)$$

Vérification directe. – On peut établir directement cette formule.

Supposons en effet le corps en équilibre sous l'action des forces P, Q et R (R faisant l'angle α de frottement) si elles sont en équilibre, l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante des 2 autres ; dès lors (Voyez Statique Décomposer une force R en 2 autres P et Q de directions données) on a $\frac{P}{\sin(\widehat{Q,R})} = \frac{Q}{\sin(\widehat{P,R})} = \frac{R}{\sin(\widehat{P,Q})}$

Mais : $\sin(\widehat{Q,R}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right)$, $\sin(\widehat{P,R}) = \sin[\pi - (\alpha + i)]$

donc en ne considérant que la 1ère proportion, seule utile, on en tire :

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin[\pi - (\alpha + i)]}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right)} = \frac{\sin(\alpha + i)}{\cos(\beta - \alpha)}$$

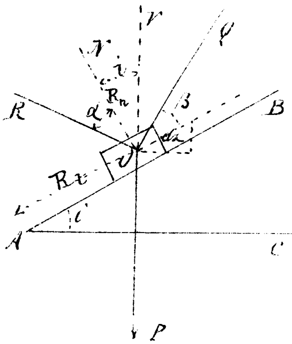
ce qui est la formule (α)

Rendement. – Considérons le plan incliné comme une machine et cherchons en le rendement lorsque le corps est arrivé à l'état de mouvement uniforme, c'est à dire lorsqu'on a $J = 0$

Nous avons trouvé que dans ce cas

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin i + f\cos i}{\cos\beta + f\sin\beta} \quad (1)$$

Considérons un déplacement x du corps, la force motrice est Q et le



travail moteur qu'elle exerce pour le déplacement Δx sera $T_m = Q\cos\beta\cdot\Delta x$.

Quant au travail utile il sera : $T_u = P\sin i\ \Delta x$.

On tire de là :

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{P}{Q}\cdot\frac{\sin i}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta+f\sin\beta}{\sin i+f\cos i}\cdot\frac{\sin i}{\cos\beta}\cdot(1)$$

De là on déduirait le travail absorbé par le frottement pour un parcours déterminé par la formule.

$$T_f = T_m\left(1-\frac{T_u}{T_m}\right)$$

Nous pouvons arriver à l'expression (1) du rendement en appliquant la méthode générale indiquée plus haut.

On a trouvé : $\dfrac{Q}{P} = F(f) = \dfrac{\sin i+f\cos i}{\cos\beta+f\sin\beta}$

d'où $\qquad R = \dfrac{F(0)}{F(f)} = \dfrac{\sin i}{\cos\beta}\cdot\dfrac{\cos\beta+f\sin\beta}{\sin i+f\cos i}$ Comme plus haut

Supposons dans cette formule $\beta=0$, c'est-à-dire que la force Q agisse parallèlement au plan, alors elle se simplifie et devient.

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{\sin i}{\sin i+f\cos i} = \frac{1}{1+\frac{f}{\tan i}}$$

Discussion – Le rendement dans ce cas n'est égal à 1 que pour $f=0$; f ayant une valeur déterminée, le rendement est d'autant plus grand que $\tan i$ est plus grand pour $\tan i=\infty$, le rendement est maximum et égal à 1 (nous vérifions donc encore ici que le travail utile dans une machine ne peut surpasser le travail résistant. Voir 1er Cahier Impossibilité du mouvement perpétuel) d'ailleurs pour $\tan i=\infty$ $i=90$ il n'y a donc plus à proprement parler de plan incliné. On démontrerait d'ailleurs a posteriori que le rendement doit être égal à 1 dans ce cas car le travail moteur de la force Q est $Q\Delta x$ (puisque $\beta=0$), le travail utile est $P\Delta x$ donc $R = \dfrac{T_u}{T_m} = \dfrac{P}{Q}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = \dfrac{P}{Q} = 1$

Reprenons le second cas $J>0$ le mouvement est uniformément accéléré. $J>0$ répond à la condition : $\dfrac{Q}{P} > \dfrac{\sin i+f\cos i}{\cos\beta+f\sin\beta}$ – Rien de particulier à signaler.

Reprenons en dernier lieu le cas où $J<0$, répondant à la condition.

$$\frac{Q}{P} < \frac{\sin i+f\cos i}{\cos\beta+f\sin\beta}$$

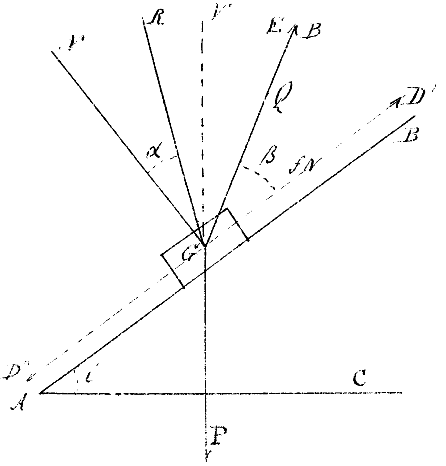
Le mouvement est alors uniformément retardé, et ses lois seront par deux intégrations successives : $v = v_0 - Jt$

$$x = v_0 t - \frac{Jt^2}{2}$$

Le mobile s'arrêtera donc pour $t=\dfrac{v_0}{J}$ après avoir parcouru un espace $s=\dfrac{v_0^2}{2J}$

A partir de cet instant le corps tend à redescendre, par conséquent la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 50 VIR 70 3



résultante R des réactions du plan passe nécessairement de l'autre côté de la normale N au plan incliné, car cette résultante R est toujours de sens contraire au mouvement (Remarque précédente) :

Dès lors elle va s'ajouter à la force Q pour retarder le mouvement descendant; cherchons les lois de ce mouvement. Or, à chaque instant du mouvement du corps il y a équilibre dynamique entre les forces P, Q, R et la résistance d'inertie $\frac{P}{g}J$ du corps (Principe de d'Alembert) ou si nous remplaçons toujours R par ses composantes normale et tangentielle R_n et fR_n; il y a équilibre entre les forces $P, Q, R_n, fR_n, \frac{P}{g}J$

La seule équation d'équilibre est celle de projection sur la direction AB.

Donc on a: $$P\sin i - fR_n - Q\cos\beta - \frac{P}{g}J' = 0 \quad (1)$$

Pour trouver R_n nous projeterons sur la normale au plan incliné, nous aurons ainsi: $$R_n + Q\sin\beta = P\cos i$$

d'où $$R_n = P\cos i - Q\sin\beta. \quad (2)$$

De (1) et (2) nous tirerons

$$J' = \frac{g}{P}\left[P\sin i - Q\cos\beta - f(P\cos i - Q\sin\beta)\right]$$

et nous verrons que le mouvement est uniforme - uniformément accéléré, uniformément retardé suivant qu'on a:

$J'=0$ qui répond à $\frac{Q}{P} = \frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta}$. (b)

$J>0$ -id- à $\frac{Q}{P} = \frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta}$.

$J<0$ -id- à $\frac{Q}{P} = \frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta}$.

Dans le mouvement descendant, la force Q au lieu d'être employée à faire monter le corps sur le plan incliné (comme dans le cas de $J>0$ mouvement ascendant) est employée à le retenir dans la descente pour empêcher son mouvement de s'accélérer.

La formule $$\frac{Q}{P} = \frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta} \quad (b)$$

peut s'écrire $$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(i-\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)} \quad (b')$$

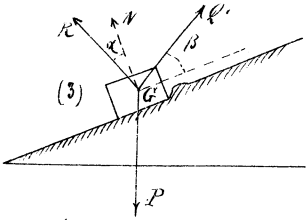
Les formules (b) et (b') ne diffèrent des formules correspondantes du mouvement uniforme ascendant qu'en ce que α est changé en $-\alpha$ où f en $-f$: résultat que l'on pouvait prévoir.

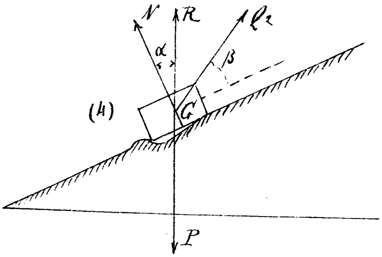
Désignons par Q' la valeur donnée par ces formules, nous voyons que cette valeur est $<$ que celle donnée par les formules correspondantes du mouvement ascendant. En effet si l'on fait la différence, on trouve toutes réductions faites.

$$Q - Q' = \frac{\sin 2\alpha \cos(\beta+i)}{\cos(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha)}$$

quantité toujours positive pourvu que $\beta+i$ soit $< 90°$, ce qui a toujours lieu puisqu'on suppose la force Q ou Q' dirigée à droite de la verticale OV et faisant par conséquent avec l'horizon, un angle $\beta+i$ moindre qu'un angle droit.

Discussion de la formule (b') Pour $i=\alpha$ on a $Q'=0$, c'est à dire qu'il ne faut aucune force pour empêcher le mouvement descendant de s'accélérer et que par conséquent ce mouvement est uniforme. Pour $i<\alpha$, on trouve $Q'<0$ ce qui veut dire que dans ce cas pour entretenir le mouvement uniforme, il faudrait appliquer la force Q' en sens contraire, ou en d'autres termes que sans le secours de cette force le mouvement serait retardé.





Ainsi donc en résumé on a vu 1° que pour qu'un corps placé sur le plan persiste dans son repos mais soit sur le point de monter il faut qu'on ait $J=0$ c'est à dire $\frac{Q}{P} = \frac{\sin i + f\cos i}{\cos\beta + f\sin\beta}$ (3)

que pour que ce corps persiste dans son repos mais soit sur le point de descendre il faut qu'on ait $J=0$ c'est à dire $\frac{Q'}{P} = \frac{\sin i - f\cos i}{\cos\beta - f\sin\beta}$ (4)

On en conclut que si Q est compris entre les deux valeurs Q et Q' données par ces deux relations, le corps persistera dans son état de repos même pour un certain accroissement ou une certaine diminution de la force Q, c'est un état de stabilité qui ne subsiste que parce qu'à chaque variation de Q correspond une déformation imperceptible des corps en contact, d'où résulte la réaction nécessaire pour l'équilibre

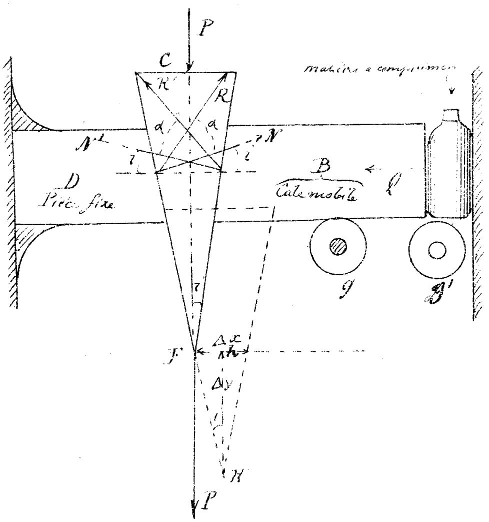
Pour faire sentir ce fait

Soit Q_1 l'intensité de la force Q satisfaisant à la relation (3) capable de faire sortir le corps de son repos en tendant à le faire monter (fig (3). Cette force Q_1

fait équilibre aux deux forces P et R, R réaction du plan faisant avec la normale l'angle α en sens contraire du mouvement ascendant qui tend à se produire — Supposons actuellement que l'intensité de la force Q devienne Q_2 intensité de la force Q satisfaisant à la relation (4) c'est à dire capable de faire sortir le corps de son repos en tendant à le laisser descendre. Cette force Q_2 fait encore équilibre aux 2 forces R et P, mais alors R passe de l'autre côté de la normale (fig 4) et fait encore avec elle l'angle α du frottement — Supposons actuellement que cette force Q aille en augmentant d'une manière continue depuis Q_2 jusqu'à Q_1 la réaction R va nécessairement passer par toutes les positions intermédiaires entre les deux positions limites précédentes et à toutes ces positions correspondront des états particuliers de déformation intermédiaires entre les déformations limites indiquées dans les figures (3) et (4). Et pendant tout ce temps le corps restera nécessairement en repos, du moins en repos d'ensemble

Art IV. Applications de l'étude du frottement sur un plan incliné.

La presse à coin. C'est une machine dans laquelle le coin est employé à exercer une pression sur des matières dont on se propose ordinairement d'extraire un suc liquide. Si l'on exerce un effort vertical P sur la tête du coin, on l'oblige à pénétrer d'une certaine quantité entre les pièces B et D; par suite la pièce mobile B s'écarte et comprime



les matières placées entre elle et une paroi fixe, en exerçant sur elles un effort horizontal qui donne lieu de la part de ces matières à des réactions dont la résultante est Q. (Q étant égale et directement opposée à l'effort horizontal de compression)

Nous nous proposons de trouver une relation entre P et Q en tenant compte du frottement.

On néglige le poids du coin et celui de la pièce mobile B d'ailleurs soutenu par des galets g g' n'exerçant que des résistances de roulement négligeables.

Considérons la machine à l'état de mouvement uniforme et considérons séparément l'équilibre du coin et celui de la pièce B (car si le système entier est en équilibre, chacune des parties qui le composent est séparément en équilibre)

1. Équilibre du coin — Il est soumis à l'effort vertical P et aux réactions des pièces D et B. S'il n'y avait pas de frottement ces réactions seraient normales aux surfaces en contact; comme il y a frottement ces actions R et R' sont inclinées sur la normale commune aux surfaces apparentes d'un certain angle égal à l'angle de frottement. Il y a donc équilibre entre les trois forces P, R et R'. Ces forces sont dans un même plan donc pour qu'elles se fassent équilibre, il faut que la somme algébrique de leurs projections sur 2 axes rectangulaires quelconques soit nulle séparément pour chacun de ces axes.

Comme axes rectangulaires nous prendrons la direction de la force P et celle de la force Q et nous aurons:

a Projection sur l'horizontale : $R_x = R'_x$

Généralement le coin est isocèle donc R et R' sont également inclinées sur la verticale et puisque pour l'équilibre on a $R_x = R'_x$ il en résulte que $R = R'$

b Projection sur la verticale.

$$P = R \sin(\alpha + i) + R' \sin(\alpha + i)$$

Or, d'après la remarque précédente $R = R'$ donc on a

$$P = 2R \sin(\alpha + i) \qquad (1)$$

2° Équilibre du bloc B. Il est soumis à la force Q, à l'action du coin C, action qui d'après le principe de Newton est égale et directement opposée à R' et fait par conséquent avec l'horizontale l'angle $\alpha + i$. Le bloc B ne pouvant prendre qu'un seul mouvement de translation suivant l'horizontale, la seule équation d'équilibre est celle de projection sur cette direction:

$$Q = R \cos(\alpha + i) \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire..

$$(3) \quad \frac{P}{Q} = 2 \operatorname{tang}(\alpha + i) = 2 \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang} i}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang} i} = 2 \frac{f + \operatorname{tang} i}{1 - f \operatorname{tang} i}$$

Si le frottement est nul, les réactions R et R' sont normales aux surfaces en contact et on a: α ou $f = 0$, alors la formule devient.

$$(4) \quad \frac{P}{Q} = 2 \operatorname{tang} i$$

Discussion 1° La comparaison des relations (3) et (4) nous montre que le frottement a pour effet d'augmenter l'angle i de α ce qui veut dire en langage ordinaire que sous le rapport de la transmission de l'effort, le frottement fait le même effet que si au lieu d'employer un coin d'un angle $= 2i$ on employait un coin plus obtus et dont l'angle serait: $2(i + \alpha)$

II La formule (3) nous montre d'ailleurs que la pression Q produite est d'autant plus grande pour un même effort moteur P sur la tête du coin, que le coin est plus aigu, que l'angle i est plus petit.

Cette formule (3) montre aussi que la pression Q diminue quand le frottement augmente. Si l'angle α de frottement augmente jusqu'à satisfaire à la relation $\alpha + i = 90°$ on voit que le rapport $\frac{P}{Q}$ devient infini, c'est à dire que la pression Q exercée est nulle quelque soit l'effort moteur P appliqué sur la tête du coin, ou en d'autres termes quelle que faible soit la résistance des matières comprimées, il faudrait alors une puissance P infinie pour la surmonter, c'est à dire pour mettre le coin en mouvement.

Donc pour que le mouvement soit possible, c'est à dire pour que le système puisse fonctionner comme organe de transmission de mouvement, il faut qu'on ait $\alpha + i < 90°$ d'où $2i < 180° - 2\alpha$

Supposons maintenant que la force Q devienne la puissance et tende à soulever le coin (la force P devenant alors la résistance) le mouvement de celui-ci changeant de sens, les réactions R et R' passent alors de l'autre côté de la normale aux surfaces apparentes (car ces réactions R et R' sont toujours de sens contraire au mouvement produit) elles font d'ailleurs toujours avec la normale l'angle α de frottement et en raisonnant comme précédemment, on trouverait :

Équilibre du coin. $P = 2R \sin(i - \alpha)$

Id du bloc B : $Q = R \cos(i - \alpha)$

d'où $$\frac{Q}{P} = \frac{1}{2 \operatorname{tang}(i - \alpha)} \qquad (1)$$

Resultat que l'on aurait pu poser a priori, en changeant α en $-\alpha$ dans la relation précédente (3)

Discussion Si $\alpha = 0$, c'est à dire si le frottement est nul on a :

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} i} \qquad (2)$$

La comparaison des relations (1) et (2) nous indique que dans le cas où la force Q est la puissance et P la résistance, le frottement a pour effet de diminuer l'angle i de α

Ce qui veut dire en langage ordinaire que sous le rapport de la transmission de l'effort, le frottement agit ici, comme si au lieu d'employer un coin d'un angle i on employait un coin d'un angle $2(i - \alpha)$

La relation (1) nous montre que pour vaincre une même résistance P appliquée sur la tête du coin, il faut une force Q d'autant plus grande que l'angle i est plus petit

Cette relation (1) nous montre encore que pour une même résistance P, la puissance Q doit être d'autant plus grande que le frottement est plus grand

Or quand α en croissant devient précisément égal à i, la formule (1) donne $\frac{Q}{P} = \infty$ c'est-à-dire que dans ce cas quelque soit P il faudrait alors une puissance Q infinie pour soulever le Coin – α croissant encore ou ce qui revient au même l'angle i diminuant encore $(i-\alpha)$ devient négatif et la formule (1) donne $\frac{Q}{P}$ = une quantité négative, ce qui nous indique que pour que le mouvement puisse se produire il faut que la force P au lieu d'être dirigée de haut en bas ainsi que nous l'avons supposé soit dirigée de bas en haut. Sinon le mouvement est impossible et par conséquent le coin ne fonctionne plus comme organe de transmission de mouvement, mais comme organe de serrage. Pour que le mouvement soit possible, P étant positif, c'est à dire dirigé de haut en bas, il faut par conséquent qu'on ait.

$$i > \alpha \text{ ou } 2i > 2\alpha$$

Donc en résumé pour que le coin agisse comme organe de transmission de mouvement soit que l'on Considère P ou Q comme puissance, il faut que son angle 2i soit compris entre les deux valeurs :

$$2\alpha < 2i < 180 - 2\alpha$$

Si au contraire on a :

$$2\alpha > 2i > 180° - 2\alpha$$

tout mouvement devient impossible et le coin ne fonctionne plus que comme organe de serrage.

Rendement. – C'est le rapport entre le travail utile et le travail moteur pour un déplacement quelconque du coin. Supposons que sous l'action de la force P le coin soit descendu (dans le sens de la force P d'une quantité Δy. Le travail moteur sera alors

$$T_m = P \cdot \Delta y$$

Soit Δx, le déplacement horizontal du bloc mobile B repondant au déplacement vertical Δy du coin on aura : $T_u = Q \cdot \Delta x$

Donc le rendement $R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y}$ Or le triangle FhH donne

$\frac{\Delta x}{2} = \Delta y . tg\, i$ d'où $\frac{\Delta x}{\Delta y} = 2 \operatorname{tang}. i$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 98 VIR 76 3

donc $$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P} 2 \tang i = \frac{1-f\tang i}{2(f+\tang i)} 2\tang i = \frac{1-f\tang i}{1+\frac{f}{\tang i}}$$

On en déduirait comme précédemment le travail absorbé par le frottement dans cette machine)

Nous pouvons encore pour trouver ce rendement employer la méthode générale indiquée : On a ici : $\frac{P}{Q} = F(f) = 2\frac{f+tg i}{1+f tg i}$

d'où $$R = \frac{F(o)}{F(f)} = 2tg i \frac{1-f tg i}{2(f+tg i)} = \frac{1-f tg i}{1+\frac{f}{tg i}}$$ comme plus haut

Discussion. – Le rendement n'est égal à 1 que pour $f=0$; f ayant une valeur déterminée le rendement est nul pour $f \tang i = 1$ ou $\tang i = \frac{1}{f} = \frac{1}{\tang \alpha} = \cot \alpha$

ou quand : $i = 90° - \alpha$

Nous avons vu en effet que lorsque cette relation est satisfaite le coin ne peut agir comme organe de transmissions de mouvement. Le rendement est encore nul quand $\tang i = 0$, c'est à dire quand le coin est un cylindre ou un rectangle ; ceci est évident, car alors le coin ne peut, sous l'action de la force P éprouver qu'un déplacement vertical dans le sens de la force P

son déplacement horizontal est donc nul il en est de même pour la pièce mobile B ; donc le rendement dans ce cas est nécessairement nul

Ainsi le rendement est nul pour les 2 valeurs de i : $i=0$ $i=90°-\alpha$, donc ce rendement passe par un maximum pour une valeur de i comprise entre 0 et $90°-\alpha$. Pour déterminer ce maximum il suffit de chercher la valeur de tang i qui annule la dérivée de l'expression : $$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{\tang i - f\tang^2 i}{f+\tang i}$$
dérivée prise par rapport à tang i (posons pour simplifier $\tang i = x$) nous aurons à chercher le maximum de

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{x - fx^2}{f+x}$$

on a :

$$\frac{d\frac{T_u}{T_m}}{dx} = \frac{(f+x)(1-2fx)-(x-fx^2)}{(f+x)^2}$$

Pour que cette dérivée soit nulle il faut que le numérateur soit nul, c'est à dire qu'on ait : $(f+x)(1-2fx)-(x-fx^2) = 0$ d'où : $x^2+2fx-1 = 0$ (1)

d'où on tire pour la valeur de tang i rendant R maximum :

$$\tang i = x = -f \pm \sqrt{1+f^2}.$$

L'équation (1) a une racine négative et une racine positive la racine négative donnerait pour i un angle négatif, donc elle ne convient pas à la question ; le signe + de la valeur de de tang i, répond à la racine positive, donc l'angle i qui donne le rendement maximum est fourni par la relation.

$$\text{tang}\, i = -f + \sqrt{1+f^2}.$$

Remarque. — Dans l'étude précédente nous avons supposé essentiellement que l'effort exercé sur la tête du coin était continu. Si l'on agissait par choc, comme cela a ordinairement lieu, la déformation de la tête du coin et les ébranlements produits dans toute la machine absorberaient une portion notable du travail moteur, et, par suite, une partie notable du travail transmis aux matières pressées et devant cette perte considérable disparaîtrait celle relative au frottement.

Nous reviendrons d'ailleurs plus tard sur ces pertes de travail dues aux chocs et aux vibrations dans les machines.

2° Vis et son Écrou. — C'est une machine simple et un organe de transformation de mouvement dans lequel la rotation autour d'un axe produit une translation suivant cet axe.

La vis supposée à filet carré est ordinairement destinée à vaincre un effort Q qui s'exerce dans le sens de son axe, elle est mise en mouvement par deux forces motrices $\frac{P}{2}$ formant un couple perpendiculaire à l'axe et appliquées aux extrémités d'une barre qui traverse la tête de la vis perpendiculairement à cet axe, soit p le bras de levier de chaque force $\frac{P}{2}$.

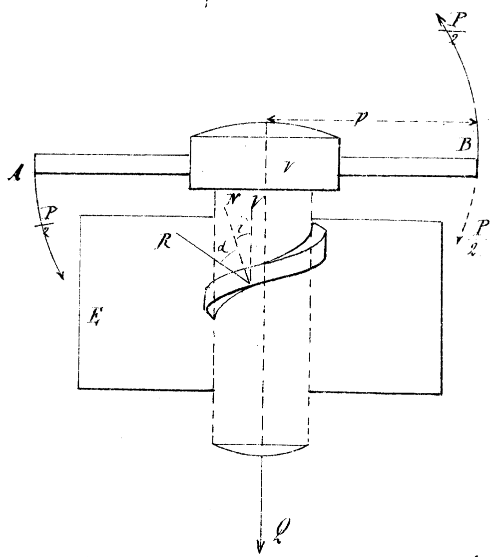
L'égalité des deux forces $\frac{P}{2}$ permet de supposer que la vis n'exerce aucun effort latéral contre les parois de son écrou. On admet de plus que le contact entre l'écrou et le filet ne s'opère que sur une hélice moyenne dont le rayon r est moyen entre celui du noyau et le rayon extérieur du filet.

Nous supposerons l'écrou fixe et nous admettrons que les forces motrices sont employées à élever la vis en soulevant le poids Q. (On a un exemple de cette disposition dans le Vérin, vis qui sert à soulever les fardeaux sorte de cric.)

L'écrou peut devenir mobile sans que la théorie de l'appareil soit modifiée attendu que le mouvement relatif des 2 pièces reste le même.

Nous nous proposons de trouver une relation entre P et Q en tenant compte du frottement.

S'il n'y avait pas de frottement, l'écrou exercerait sur la vis des réactions qui seraient normales aux surfaces en contact c'est à dire normales aux filets de la vis, mais comme il y a frottement, en chaque point de l'hélice moyenne de contact s'exerce de la part de l'écrou une réaction R inclinée sur la normale à l'hélice moyenne



d'un angle α égal à l'angle de frottement en sens inverse du mouvement produit les réactions R font donc toutes avec la verticale l'angle $\alpha+i$. (i angle avec l'horizon de la tangente à l'hélice moyenne)

Cela étant, le mouvement de la vis est un mouvement hélicoïdal, il n'y a donc que 2 conditions d'équilibre ; 1° une de projection sur la verticale qui exprime que le mouvement de translation de la vis dans ce sens ne peut avoir lieu 2° une équation de moments autour de la verticale et qui exprime que le mouvement de translation autour de cette droite est impossible.

1° Projection sur la verticale : $Q = \cos(\alpha+i)\,\Sigma R$ (car les projections des forces $\frac{P}{2}$ sont nulles, puisqu'elles sont perpend. à l'axe),

2° Equation des moments : $Pp = r\sin(\alpha+i)\,\Sigma R$ car le moment de R se réduit à celui de sa composante $R\sin(\alpha+i)$ dans un plan perp. à l'axe de la vis)

En divisant la 2e par la 1ère

$$(1)\quad \frac{P}{Q} = \frac{r}{p}\operatorname{tang}(i+\alpha). = \frac{r}{p}\cdot\frac{\operatorname{tg} i + f}{1 - f\operatorname{tg} i}$$

Remarque. Si $r = 2p$ la formule devient : $\frac{P}{Q} = 2\operatorname{tg}(i+\alpha)$, formule identique à celle trouvée dans le cas du coin ; la vis agit donc sous le rapport de la transmission de mouvt comme le coin

Discussion de la formule (1) Si $\alpha = 0$ on a : $\frac{P}{Q} = \frac{r}{p}\operatorname{tang} i \qquad (2)$

Comparant cette formule avec la formule (1) on voit que le frottement agit comme si l'angle i était augmenté de α ; c'est à dire que cette vis dans laquelle il y a frottement agit comme une vis qui aurait pour angle $(i+\alpha)$ et dans laquelle il n'y aurait pas de frottement

Si l'angle i de l'hélice moyenne est telle que :

$$\left.\begin{array}{l} i + \alpha = 90^\circ \\ \text{ou : } i = 90^\circ - \alpha \end{array}\right\} \text{ : on aurait : } \frac{P}{Q} = \infty$$

c'est à dire que si faible soit la résistance Q il faudrait alors une puissance P infinie pour vaincre cette résistance, soulever la vis, c'est-à dire que le mouvement ascendant devient alors impossible

Si donc on a : $2i \geqq 180^\circ - 2\alpha$ le mouvement est impossible

Pour que le mouvement soit possible dans le sens ascendant il faut donc qu'on ait : $2i < 180° - 2\alpha$.

II. Si maintenant Q devient la puissance et P la résistance on aura pour l'équilibre :

1° Projection sur la verticale $Q = \cos(i-\alpha)\,\Sigma R$
2° Équation des moments $Pp = r \sin(i-\alpha)\,\Sigma R$

car la réaction R passe alors de l'autre côté de la normale aux surfaces apparentes en contact puisque le mouvt change de sens

On tire de là :

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{r}\,\frac{1}{\operatorname{tang}(i-\alpha)}$$

Quand $\alpha = 0$ on a :

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{r}\cdot\frac{1}{\operatorname{tang} i}$$

L'effet du frottement est alors de diminuer la rapidité de la vis de l'angle α (i étant $> \alpha$) Si $i = \alpha$ on a : $\frac{Q}{P} = \infty$, ce qui veut dire que quelque faible soit l'effort P il faudra exercer un effort vertical Q dirigé de bas en haut infini pour le surmonter.

Enfin si on a $i < \alpha$ le rapport $\frac{Q}{P}$ devient négatif, ce qui nous indique que pour que le mouvement de bas en haut puisse se produire, il faut que la force P change de sens et agisse de bas en haut et non de haut en bas. Ainsi dans ce cas la force P doit venir en aide à l'effort Q pour desserrer la vis. Sinon le mouvement est impossible et par conséquent la vis ne fonctionne plus comme organe de transmission de mouvement mais comme organe de serrage elle prend alors le nom de vis de pression. Pour que le mouvement soit possible P étant positif il faut par conséquent qu'on ait :

$$i > \alpha$$

Donc en résumé pour que la vis agisse comme organe de transmission de mouvement soit que l'on considère P ou Q comme puissance il faut que son angle soit compris entre les deux valeurs $\alpha < i < 90° - \alpha$

Si au contraire on a : $\alpha > i > 90° - \alpha$

la vis agit comme organe de serrage ou comme vis de pression.

Rendement. Supposons que la vis tourne d'un tour nous aurons :

T_m = la somme des moments des forces motrices × la déviation angulaire.

$= Pp \cdot 2\pi$

Mais pour un tour, la vis s'élève d'une quantité h égale à son pas, donc

$T_u = Q \cdot h$

donc le rendement : $R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{h}{2\pi p}$

mais h le pas de la vis est égal à :

$h = 2\pi r \text{ tang. } i$ donc :

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{2\pi r \text{ tang } i}{2\pi p} = \frac{\text{tang } i}{\text{tang}(i+\alpha)}$$ (En remplaçant $\frac{Q}{P}$ par sa valeur)

Cette formule peut être écrite sous la forme suivante en développant $tg\,(i+\alpha)$

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1 - f \text{ tang. } i}{1 + \frac{f}{\text{tang. } i}}$$

Sous cette forme elle est identique à la formule donnée pour le coin, dès lors la même discussion lui est applicable et elle conduit aux mêmes résultats (se reporter à la discussion de la formule du rendement dans le coin.)

On calculerait d'ailleurs le travail absorbé par le frottement par la formule $T_f = T_m\left(1 - \frac{T_u}{T_m}\right)$

Nous pouvons encore pour trouver ce rendement employer la méthode générale.

On a ici : $\frac{P}{Q} = F(f) = \frac{r}{p} \cdot \frac{f + tg\,i}{1 - f\,tg\,i}$

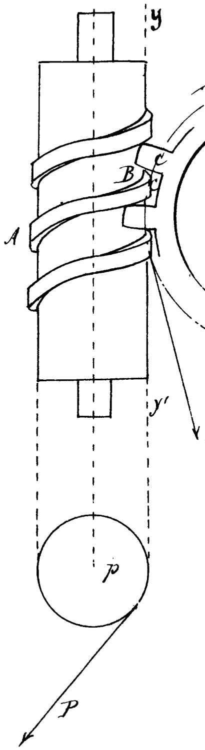
d'où $R = \frac{F(0)}{F(f)} = \frac{r}{p}\,tg\,i \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{1 - f\,tg\,i}{f + tg\,i} = \frac{1 - f\,tg\,i}{1 + \frac{f}{tg\,i}}$, comme plus haut.

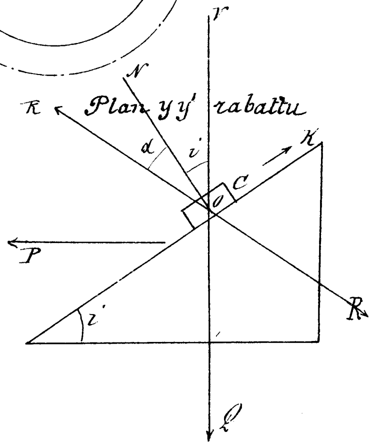
3° Vis sans fin — C'est une vis qui engrène avec une roue dentée. L'axe de la roue est perpendiculaire à celui de la vis et le point milieu de l'axe de la roue est le pied de la perpendiculaire commune aux 2 axes. cette machine sert à transmettre le mouvement de rotation entre 2 axes perpendiculaires entre eux. Le plus ordinairement c'est la vis qui conduit la roue, mais l'inverse peut aussi avoir lieu

Nous verrons les conditions que la vis doit remplir dans les deux cas.

Supposons que la vis qui est à filet carré soit mouvante et tourne dans le sens de la flèche a, sous l'action du moment $P.p$ de la force P tangentielle au noyau moyen de la vis, alors la roue O va tourner dans le sens de la flèche b en opposant une résistance tangentielle que je désigne par Q - On demande une relation entre P et Q

Si je considère le filet AB actuellement en contact avec la dent G, lorsque la vis va tourner, les choses se passeront évidemment dans le plan projeté suivant yy' et rabattu dans le tableau, comme si un plan incliné présentant





précisément l'inclinaison i de l'hélice moyenne du filet de vis se mouvait en translation horizontale et forçait par suite un corps C de poids Q, guidé verticalement et reposant sur lui, à monter.

Dans ce système idéal, identique quant à la transmission et au frottement au système proposé nous avons à considérer successivement l'équilibre du corps C (c'est la dent) et l'équilibre du plan incliné.

1° Équilibre du corps C. - Ce corps C est soumis à une force verticale Q et à la réaction qu'exerce sur lui le plan incliné. Or cette réaction R s'exerce en sens inverse du mouvement relatif de la dent sur le plan incliné et fait avec la normale N, l'angle de frottement. Le mouvement relatif de la dent sur le plan incliné est dirigé dans le sens de la flèche K, donc la réaction R est appliquée comme l'indique la figure; d'ailleurs ce corps ne pouvant prendre qu'un mouvement de translation verticale suivant ov, il n'y a qu'une seule équation d'équilibre, celle de projection sur la verticale.

$$Q = R \cos(\alpha + i). \quad (1)$$

2° Équilibre du plan incliné — Il est soumis à la force P, à la pression de la dent sur ce plan, pression qui est égale et directement opposée à R: le plan incliné prenant un mouvement de translation horizontal, il n'y a qu'une seule équation d'équilibre celle de de projection sur l'horizontale; on aura donc:

$$P = R \sin(\alpha + i). \quad (2)$$

Des relations (1) et (2) on déduit:

$$(3) \quad \frac{P}{Q} = \text{tang}(\alpha + i) = \frac{f + tg\, i}{1 - f\, tg\, i}$$

Supposons que le frottement soit nul, on a: $\frac{P}{Q} = \text{tang.}\, i$

Le frottement agit donc comme si on augmentait l'inclinaison de l'hélice moyenne, de l'angle α de frottement ; la force mouvante P augmente avec le frottement et avec l'inclinaison i du filet de la vis.

Si $\alpha + i = 90°$ on a : $\frac{P}{Q} = \infty$, c'est à dire que si faible soit Q il faut alors pour vaincre cette résistance que P devienne infini, c'est à dire que le mouvement dans ce cas est impossible

Il faut donc pour que la transmission soit possible que l'inclinaison i du filet soit inférieure à la limite $90° - \alpha$, si c'est la vis qui conduit la roue comme nous l'avons supposé

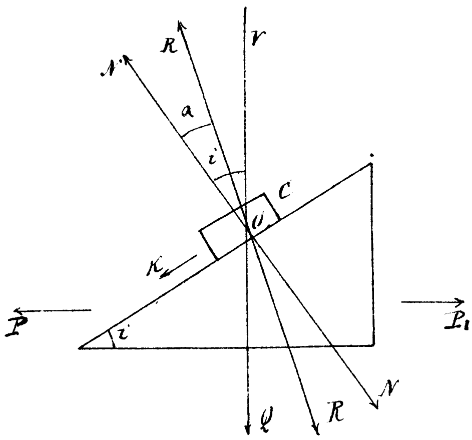
——— Si la roue conduisait la vis, il faudrait regarder Q comme force mouvante, P comme force résistante, renverser le rapport donné par l'équation (3) et changer le signe du frottement puisque le mouvement change de sens ou ce qui revient au même le signe de l'angle α, ce qui donnerait :

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{\text{tang}\,(i - \alpha)}$$

Mais on peut établir cette relation directement de la façon suivante :

Les choses se passent alors dans le plan tangent yy' au cylindre moyen, sous le rapport de la transmission du mouvement et du frottement, comme si un corps C placé sur le plan incliné d'angle i exerçait sur ce plan un effort vertical Q produisant un déplacement du plan incliné dans le sens de P_1 malgré l'action de la force P.

Equilibre du corps C. Il est soumis à la force Q et à la réaction du plan incliné sur le corps, mais dans ce cas le mouvement relatif de C par rapport au plan incliné étant dans le sens de la flèche K, la réaction R passe de l'autre coté de la normale N, elle fait toujours d'ailleurs avec cette normale l'angle α



Cela posé le corps C n'ayant qu'un mouvement de translation verticale il n'y a qu'une seule équation d'équilibre, celle de projection sur cette direction, donc

$$Q = R \cos (i - \alpha)$$

Equilibre du plan incliné. — Il est soumis à la force P et à la pression de la dent sur le plan incliné pression égale et directement opposée à la réaction R du plan incliné sur le corps

Le plan incliné ne pouvant prendre qu'un mouvement de translation horizontale, il n'y a qu'une seule équation d'équilibre, celle de projection sur cette direction, donc :

$$P = R \sin(i-\alpha)$$

D'où : $$\frac{Q}{P} = \frac{1}{\tan(i-\alpha)}.$$

Pour $\alpha = 0$ $\frac{Q}{P} = \frac{1}{\operatorname{tg} i}$ - Ainsi le frottement agit dans ce cas comme si l'angle de la vis était diminué de α

Si $i < \alpha$ $\frac{Q}{P}$ devient négatif, c'est à dire que pour que le mouvement soit possible il faut (Q étant positif, c'est à dire dirigé de haut en bas) que P soit négatif, c'est à dire dirigé en sens contraire du sens supposé, c'est à dire que la force P doit venir en aide à la force Q pour déterminer le mouvement de la vis - Autrement il y a impossibilité de mouvement. Ainsi donc le mouvement n'est possible avec la direction adoptée de la force P que si $i > \alpha$

Donc en résumé pour que ce mécanisme puisse agir comme organe de transmission de mouvement dans les deux sens, il faut qu'on ait :

$$90° - \alpha > i > \alpha$$

Si au contraire $$90° - \alpha < i < \alpha$$

Le mouvement devient impossible, il y a arc boutement.

Rendement - Supposons que la vis soit mouvante et cherchons le rendement de la machine supposée en état de mouvement uniforme ; si on fait tourner la vis d'un tour on a :

$$T_m = Pp \cdot 2\pi$$

$$T_u = Q \cdot h$$

d'où pour le rendement

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{h}{2\pi p} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{2\pi p \operatorname{tg} i}{2\pi p} = \frac{Q}{P} \operatorname{tg} i$$

et en remplaçant $\frac{P}{Q}$ par sa valeur : $R = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg}(i+\alpha)} = \frac{1 - f \operatorname{tg} i}{1 + \frac{f}{\operatorname{tg} i}}$

Par la méthode générale, on trouverait de même :

Puisque : $\frac{P}{Q} = F(f) = \frac{f + \operatorname{tg} i}{1 - f \operatorname{tg} i}$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

On a : $R = \frac{F(0)}{F(f)} = \operatorname{tg} i \cdot \frac{1 - f \operatorname{tg} i}{f + \operatorname{tg} i} = \frac{1 - f \operatorname{tg} i}{1 + \frac{f}{\operatorname{tg} i}}$

Cette expression de rendement a identiquement même forme que dans les deux mécanismes précédemment étudiés. - On discuterait donc cette expression comme il a été indiqué au sujet de la presse à coin et on en tirerait les mêmes conséquences.

C'est à cause de cette identité de théorie que nous avons rapproché dans le même article ces trois mécanismes ; presse à coin, vis et écrou, vis sans fin qui tous trois dérivent du plan incliné.

Remarque. - La vis sans fin est employée dans les manœuvres de vannes, parce qu'en réglant d'une manière convenable les dimensions de l'appareil, on peut faire en sorte qu'un seul homme appliqué à une manivelle suffise pour soulever une vanne d'un poids considérable. En donnant au filet de la vis une faible inclinaison on obtient encore un autre effet, c'est que si par une circonstance quelconque l'homme vient à lâcher la manivelle le poids de la vanne ne peut pas le faire descendre ; et en effet ce poids devenant alors la force mouvante on se trouverait dans le cas de $i \leq \alpha$ on a vu que le mouvement devient impossible dans ce cas.

Remarquons encore que lorsqu'on fait tourner la manivelle en sens contraire pour obliger la vanne à descendre il faut un effort P que l'on déduit de la relation (3) en changeant seulement le signe de α

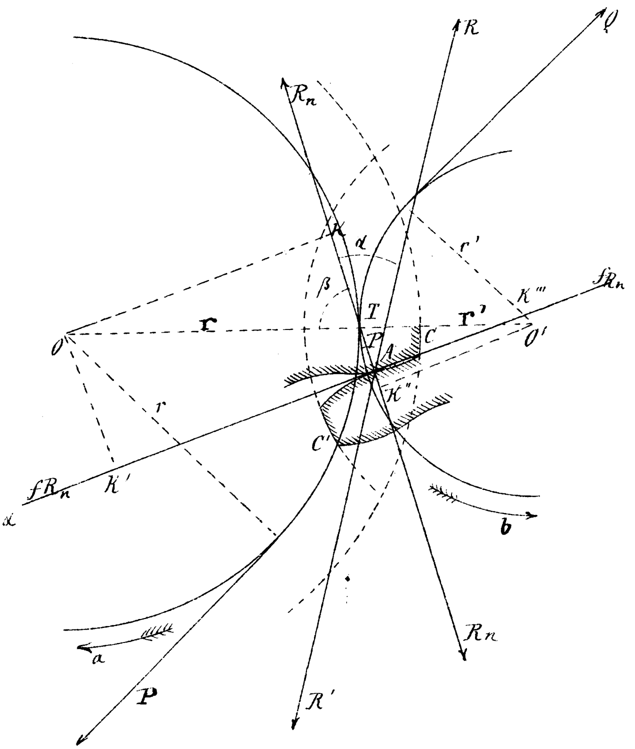
$$\frac{P'}{Q} = \operatorname{tang}(i - \alpha)$$

On emploie aussi la vis sans fin dans les mécanismes à ailettes que l'on rencontre en horlogerie, c'est alors la roue qui conduit la vis. On donne ordinairement dans ce cas au filet une inclinaison de 45°

Art. V. - Du frottement dans les Engrenages

Engrenages Plans. - Considérons deux roues d'engrenage O et O' dont les circonférences primitives sont tangentes en T ; soient C et C' deux dents en contact en A après la ligne des centres, on demande le travail absorbé par le frottement. Pour cela nous allons considérer successivement l'équilibre statique des 2 roues O et O'

Considérons d'abord la roue O ; Elle est soumise à la puissance P qui tend à la faire tourner dans le sens de la flèche a et à la réaction de la dent C' sur la dent C. S'il n'y avait pas de frottement cette réaction serait normale aux surfaces en contact et passerait par conséquent par le point de contact T des circonférences primitives, mais comme



il y a frottement, la réaction de C' sur C s'incline sur la normale d'un certain angle α égal à l'angle de frottement et en sens opposé du mouvement relatif de C sur C'. A cette réaction R nous substituerons dans le calcul, comme nous l'avons déjà fait souvent, ses composantes normale et tangentielle R_n et fR_n.

D'ailleurs le seul mouvement que peut prendre la roue O étant un mouvement de rotation autour de l'axe projeté en O, la seule équation d'équilibre est celle des moments autour de cet axe. En la posant nous aurons :

$$(1)\quad Pr - R_n r \sin\beta - fR_n(r\cos\beta + p) = 0 \qquad \begin{cases} \text{car } OK = r\sin\beta \\ \text{et } OK' = r\cos\beta + p \end{cases}$$

(En désignant par β l'angle de la normale commune aux 2 profils en contact en A et par p la distance TA ; je viens de rappeler que la normale commune passe par le point de contact T des circonférences primitives.)

Considérons en second lieu la roue O' ; elle est soumise à la résistance Q et à la réaction R' (égale et directement opposée à la réaction R de C' sur C et dont les composantes tangentielle et normale sont dès lors R_n et fR_n) de la dent C sur la dent C'. Nous aurons donc :

$$(2)\quad R_n r'\sin\beta + fR_n(r'\cos\beta - p) - Qr' = 0.$$

La relation (1) peut s'écrire : $P = R_n \sin\beta + fR_n\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)$

id (2) id id : $Q = R_n \sin\beta + fR_n\left(\cos\beta - \frac{p}{r'}\right)$

d'où en divisant membre à membre la relation (2) par la relation (1)

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\beta + f\left(\cos\beta - \frac{p}{r'}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)}$$

Ajoutant et retranchant la quantité $f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)$ au numérateur, il viendra :

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right) - fp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)} = 1 - \frac{fp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)} \quad (3)$$

Si le frottement est nul, $f = 0$ et on a : $\frac{Q}{P} = 1$; f n'étant pas nul, P est toujours plus grand que Q et la différence $P-Q=F$ représente précisément l'influence retardatrice du frottement transformée en force résistante appliquée tangentiellement à la circonférence primitive de la roue conduite O' dans le même sens que la résistance principale Q

$$\text{Or } F = P - Q = \frac{P(P-Q)}{P} = P\left(1-\frac{Q}{P}\right) = P\,\frac{fp\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r_1}\right)}$$

En remplaçant le rapport $\frac{Q}{P}$ par sa valeur (3)

D'ailleurs à chaque instant du mouvement l'angle β étant toujours très voisin de $\frac{\pi}{2}$ parce qu'on ne conserve qu'une très faible portion de la saillie des dents, on aura en faisant $\beta = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression précédente

$$F = \frac{Pfp\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}{1+f\,\frac{p}{r}}$$

Or p étant toujours très petit relativement à r le dénominateur est sensiblement égal à l'unité donc enfin : $F = Pfp\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$

Pour un arc ds parcouru le travail élémentaire de cette force est :

$$d.\mathcal{T}.F = Fds = Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) p\,ds$$

et pour un arc égal au pas a

$$\mathcal{T}.F = \int^a Fds = Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\int^a p\,ds$$

mais p variable à chaque instant se confond sensiblement avec l'arc s correspondant donc :

$$\mathcal{T}.F = Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\int_0^a s\,ds = Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{a^2}{2}$$

Tel est le travail absorbé par le frottement pour un pas.

Remarquons que si nous n'avions pas fait les simplifications précédentes nous aurions trouvé :

$$d\,\mathcal{T}.F = Fds = \frac{Pf\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)p\,ds}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)} \quad (d)$$

Calcul du Rendement — On sait que le rendement $R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{T_m - T_f}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}$

Or pour un arc α parcouru par la circonférence primitive, on a :

$T_f = Pf\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$ et $T_m = Pa$ donc

$$R = 1 - \frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

Nous pouvons trouver l'expression de ce rendement en appliquant la méthode générale

$$\text{On a ici } \frac{P}{Q} = F(f) = \frac{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta - \frac{p}{r_1}\right)}$$

$$\text{d'où } R = \frac{F(o)}{F(f)} = \frac{\sin\beta + f\left(\cos\beta - \frac{p}{r_1}\right)}{\sin\beta + f\left(\cos\beta + \frac{p}{r}\right)} = \frac{Q}{P}$$

Ainsi le rendement est exprimé par le rapport $\frac{Q}{P}$, en simplifiant ce rapport ainsi qu'il a été dit, on trouve :

$$R = 1 - f\,p\,\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Cette relation donne le rendement instantané propre à la valeur présente de p - On voit que le rendement diminue à mesure que p augmente il devient donc minimum quand p devient maximum et égal au a - En pratique il ne faut compter que sur un rendement moyen entre le rendement minimum et le rendement maximum 1, répondant par conséquent a : $p = \frac{a}{2}$ - On aura donc enfin comme nous l'avons obtenu directement

$$R = 1 - \frac{fa}{2}\,\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

Autre forme de cette expression - Soit n le nombre de dents de la roue O
n' " O' } on a :

(1) $a = \frac{2\pi r}{n}$

(2) $a = \frac{2\pi r'}{n'}$

De (1) on tire $\frac{a}{2r} = \frac{\pi}{n}$ de (2) $\frac{a}{2r'} = \frac{\pi}{n'}$

Donc en remplaçant dans la formule précédente $\frac{a}{2r}$, $\frac{a}{2r'}$, par ces valeurs on a enfin :

$$R = 1 - f\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n'}\right) = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)$$

———— Supposons que la roue O devienne une crémaillère ; alors r' devient infini et on a

$$R = 1 - f\frac{a}{2r} = 1 - f\pi\,\frac{1}{n}$$

Supposons que la roue O' au lieu d'être extérieure à la roue O lui soit intérieure ; la formule ne subira évidemment d'autre modification que le changement de r' en $-r'$ ou de n' en $-n'$ et on aura :

$$R = 1 - f\left(\frac{a}{2r} - \frac{a}{2r'}\right) = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)$$

Si on compare cette expression à la valeur :

$$R = 1 - f\left(\frac{a}{2r} + \frac{a}{2r'}\right) = 1 - f\pi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)$$

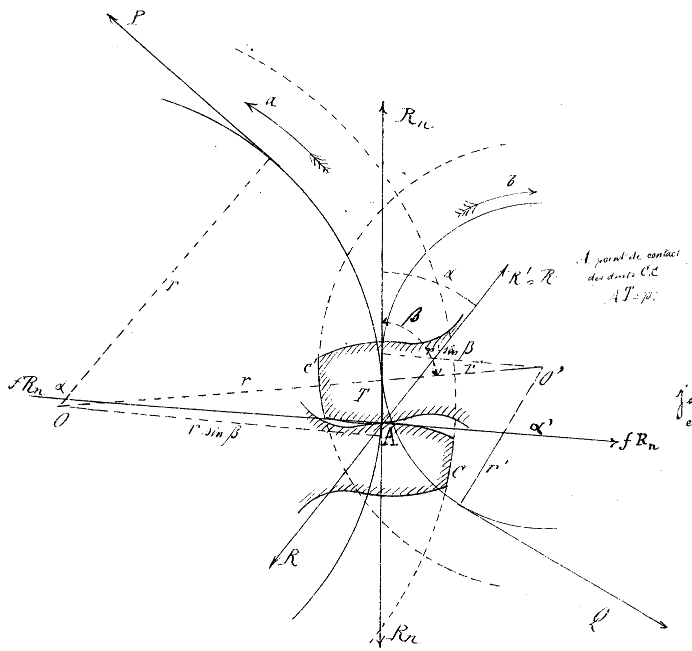
on voit qu'il y a avantage à employer des engrenages intérieurs, toutes choses égales d'ailleurs, puisque leur rendement est plus considérable que celui des engrenages extérieurs

Nous avons supposé dans la théorie précédente que le contact avait lieu par une seule dent, mais en réalité il y a toujours plusieurs dents simultanément en prise, la théorie persiste néanmoins, les efforts P, Q, F se trouvant simplement appliqués en plusieurs points mais toujours tangentiellement aux circonférences primitives au lieu d'être appliqués en un seul point de ces circonférences primitives

Dans la théorie précédente nous avons admis que le contact avait lieu après la ligne des Centres, examinons le cas où le contact a lieu avant la ligne des centres.

Soient C et C' 2 dents en contact avant la ligne des centres.

Équilibre de la roue O : Elle est soumise à la puissance P et à la réaction de C' sur C réaction qui serait normale aux profils en contact s'il n'y avait pas frottement mais laquelle, comme il y a frottement s'incline sur la normale aux surfaces apparentes d'un certain angle α égal à l'angle de frottement, et dans le sens opposé au mouvement relatif de C' sur C ; comme la roue ne peut que tourner autour de l'axe projeté en O ; il n'y a à poser que l'équation des moments autour de cet axe :



(1) $Pr - R_n r \sin\beta + fR_n(r\cos\beta - p) = 0$

Équilibre de la roue O' :

Elle est soumise à la résistance Q et à la réaction de C sur C'. L'équation des moments donne :

(2) $Qr' R_n r \sin\beta + fR_n(r'\cos\beta + p) = 0$

La relation (1) peut s'écrire :

$$P = R_n \sin\beta - fR_n\left(\cos\beta - \frac{p}{r}\right)$$

De même la relation (2) peut s'écrire

$$Q = R_n \sin\beta - fR_n\left(\cos\beta + \frac{p}{r'}\right)$$

D'où $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{\sin\beta - f(\cos\beta + \frac{p}{r'})}{\sin\beta - f(\cos\beta - \frac{p}{r})}$

J'ajoute et je retranche au numérateur : $-f\left(\cos\beta - \frac{p}{r}\right)$

et il vient : $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{\sin\beta - f(\cos\beta - \frac{p}{r}) + f(\cos\beta - \frac{p}{r}) - f(\cos\beta + \frac{p}{r'})}{\sin\beta - f(\cos\beta - \frac{p}{r})}$

D'où : $\dfrac{Q}{P} = 1 + \dfrac{f(\cos\beta - \frac{p}{r}) - f(\cos\beta + \frac{p}{r'})}{\sin\beta - f(\cos\beta - \frac{p}{r})} = 1 - \dfrac{fp(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})}{\sin\beta - f(\cos\beta - \frac{p}{r'})}$

S'il n'y avait pas de frottement on aurait :

$\dfrac{Q}{P} = 1$ ou $Q = P$. Mais comme il y a frottement P est toujours plus grand que Q et la différence $F = P - Q$ représente précisément l'influence de ce frottement appliquée tangentiellement à la roue mue dans le même sens que la résistance principale Q

Travail absorbé par le frottement. — Le travail élémentaire dû à cette force retardatrice de frottement sera : $d\mathcal{T}.F = F ds = (P - Q)\, ds = P\left(1 - \frac{Q}{P}\right) ds$

Remplaçant $\frac{Q}{P}$ par sa valeur, on aura :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 WR 70-3

$$d\,\mathcal{T}_F = F\,ds = \frac{fP\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)p\,ds}{\sin\beta - f\left(\cos\beta - \frac{p}{r}\right)} \quad (d')$$

Telle est l'expression du travail élémentaire absorbé par le frottement, le contact ayant lieu avant la ligne des centres.

Si on compare cette expression à celle (d) qui donne le travail absorbé lorsque le contact a lieu après la ligne des centres on voit que ce dernier est moins considérable. Il y a donc avantage sous le rapport de l'économie du travail moteur à diminuer autant que possible l'arc d'approche. Il y a de plus un autre avantage à réduire au minimum cet arc d'approche, c'est d'éviter le phénomène d'arc boutement qui se produit infailliblement si cet arc est trop grand. En effet. Le travail élémentaire $F\,ds$ devient infini pour

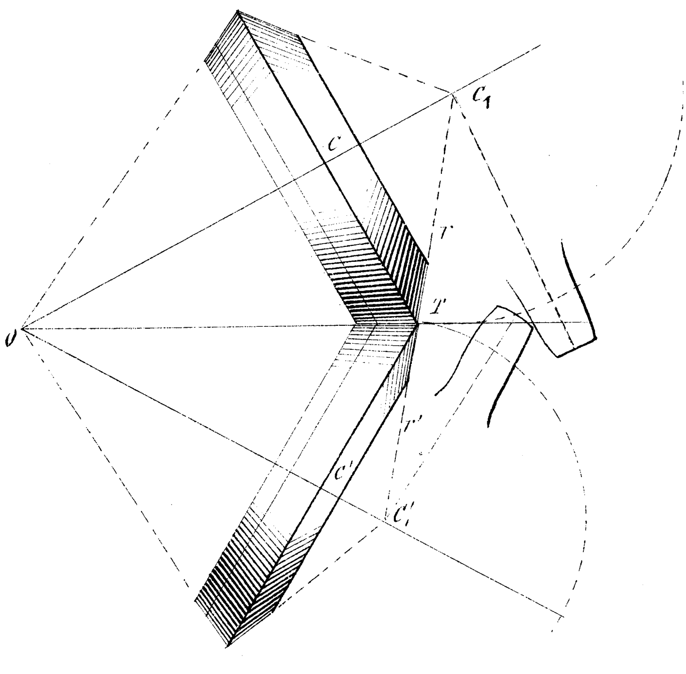
$$\sin\beta = f\left(\cos\beta - \frac{p}{r}\right).$$

ce qui veut dire que le mouvement devient alors impossible et en effet la relation $\sin\beta = f\left(\cos\beta - \frac{p}{r}\right)$ traduite géométriquement exprime que la réaction R de O sur O' passe par O', il en résulte que l'action de la roue motrice O se réduit à appuyer la roue O' sur son axe O' et qu'elle est par suite dans l'impossibilité de la faire tourner.

2°. Du frottement dans les engrenages coniques.

Il est exprimé par la même formule mais r et r' ne représentent plus les rayons, mais les arêtes des cônes de tête TC_1 et TC'_1, quant à p il représente le pas développé sur les circonférences de rayon TC_1, TC'_1.

Tout cela est facile à comprendre parce que les profils des dents se touchant en effet pendant une courte durée comme si elles restaient dans le plan $C_1C'_1$ perpendiculaire à OT et rabattu dans le tableau ainsi qu'il est indiqué.



Art VI

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

Art. VI. – Du frottement de glissement dans tous les organes tournants : poulie treuil, bouton de manivelle, excentrique, crapaudine, collet etc. etc.

1° Frottement dans la poulie fixe. S'il n'y avait pas de frottement (la puissance P et la résistance Q sont supposées verticales) la réaction du coussinet serait normale aux surfaces en contact & passerait par conséquent par le centre du tourillon, de plus elle est toujours verticale puisqu'elle doit faire équilibre aux forces P et Q supposées elles mêmes verticales.

D'où résulte immédiatement que, lorsqu'il n'y a pas de frottement le point de contact des surfaces est nécessairement au milieu A du coussinet, ou ce qui est la même chose, au point le plus bas de la courbe du coussinet.

Si les deux forces P et Q au lieu d'être parallèles et verticales font entre elles un angle β ; la réaction R toujours normale aux surfaces frottantes puisqu'on néglige le frottement, doit pour l'équilibre être égale et directement opposée à la résultante de P et Q. La direction de cette résultante s'obtiendra en joignant le centre O du tourillon au point de rencontre S des forces P & Q et alors le point où cette direction rencontrera le coussinet, sera précisément le point de contact A du tourillon avec le coussinet.

Le corps ne pouvant que tourner autour de l'axe projeté en O, la seule condition d'équilibre sera dans les deux cas celle des moments autour de l'axe projeté en O, on aura donc : $Pr = Qr$ où $P = Q$

Seulement dans le 1er cas où les efforts P et Q sont verticaux, la réaction sera :

$$R = P + Q = 2Q$$

Dans le second cas où ces efforts font entre eux l'angle β, la réaction R sera donnée par l'égalité $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\beta$

comme $P = Q$ elle devient :

$$R^2 = 2Q^2(1 + \cos\beta) = 4Q^2 \cos^2\frac{\beta}{2}$$

$$\text{d'où} \quad R = 2Q\cos\frac{\beta}{2}$$

Résultat que l'on voit d'ailleurs directement sur la figure

Si on ne néglige pas le frottement, la réaction R du coussinet s'incline sur la normale aux surfaces apparentes (laquelle passe toujours par le centre du tourillon) d'un certain angle α égal à l'angle de frottement, cette réaction ne passe donc plus par le point O. d'ailleurs les forces P et Q étant supposées verticales, la réaction R qui doit leur faire équilibre est également verticale, pour déterminer son point d'application c'est à dire le point de contact du tourillon et du coussinet, il suffira de mener par le centre O du tourillon une droite ON faisant avec la verticale du point O l'angle α de frottement.

cette droite NO rencontrera la circonférence qui limite le tourillon en un point A qui sera le point de contact cherché et la verticale AR de ce point donnera la direction de la réaction R des surfaces en contact.

La seule condition d'équilibre nécessaire sera encore celle des moments autour de l'axe projeté en O et nous aurons :

$$Pr = Qr + M_0 R = Qr + \text{Mom de } f R_n$$

Or $f R_n = R \sin\alpha = R \dfrac{\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}} = R f_1 = (P+Q) f_1$ car $R = P+Q$.

Si donc ρ désigne le rayon du tourillon, nous aurons

$$Pr = Qr + f_1 (P+Q)\rho .$$

ou $\quad P(r - f_1\rho) = Q(r + f_1\rho)$

d'où $\quad \dfrac{P}{Q} = \dfrac{r+f_1\rho}{r-f_1\rho}$

Si le frottement est nul $f_1 = 0$ donc $\dfrac{P}{Q} = 1$ (Résultat précédent)

Calculons le rendement. Le rendement a pour expression $\dfrac{T_u}{T_m}$ Or pour une rotation $d\alpha$: $T_u = Qr\,d\alpha$ et $T_m = Pr\,d\alpha$ donc

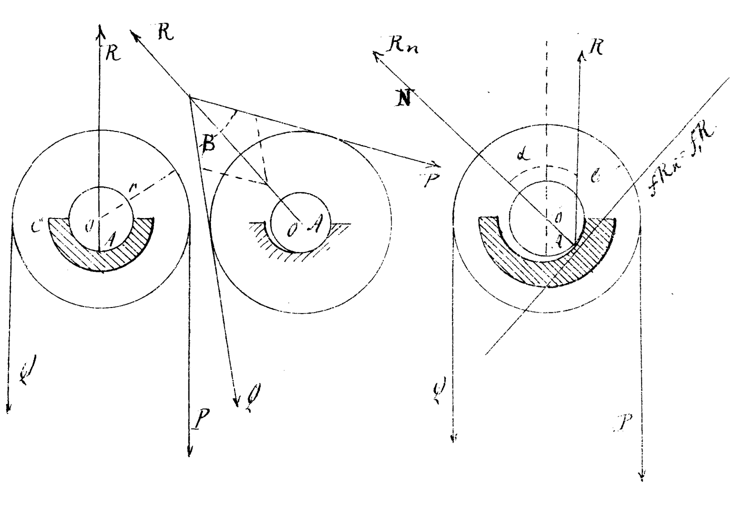
$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q}{P} = \frac{r-f_1\rho}{r+f_1\rho}$$

Cette expression du rendement peut se trouver d'ailleurs par la méthode générale. On a ici : $\quad \dfrac{P}{Q} = F(f) = \dfrac{r+f_1\rho}{r-f_1\rho}$

d'où $\quad R = \dfrac{F(o)}{F(f)} = \dfrac{r-f_1\rho}{r+f_1\rho}$

Discussion. – Quand $f_1 = 0$: Rendement $= 1$

Le frottement ayant une valeur déterminée, le rendement augmente quand ρ diminue, donc il faut en pratique réduire à son minimum le rayon des tourillons (f_1 ayant une valeur déterminée le rendement serait encore égal à 1 pour $\rho = 0$, cas irréalisable en pratique car le tourillon devrait se réduire à un point matériel.)



<u>Travail absorbé par le</u>

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

Frottement. — Pour un tour complet, le travail de la résistance tangentielle R_f est $\mathcal{T}_f = R_f 2\pi\rho$ $= f_1 (P+Q) 2\pi\rho$

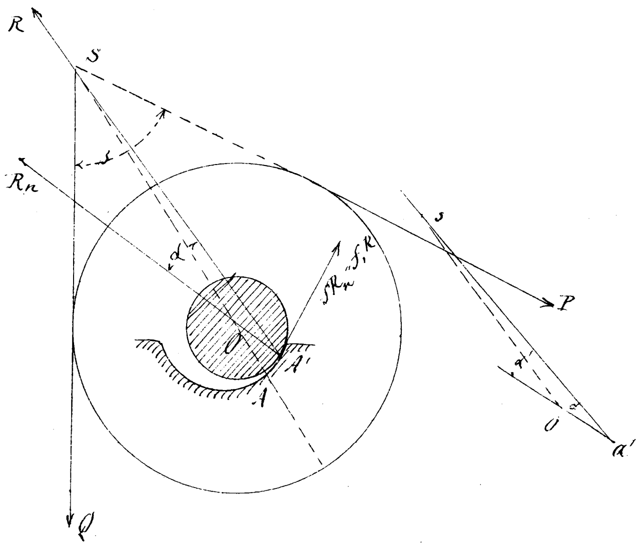
Pour n tours, ce travail serait $\mathcal{T}_f = nf (P+Q) 2\pi\rho$

——— Nous avons supposé que les forces P et Q étaient verticales et par suite parallèles entre elles ; supposons maintenant qu'elles fassent entre elles un certain angle β.

S'il n'y a pas de frottement ; la réaction R, avons nous dit déjà, est normale aux surfaces en contact donc elle passe par le centre O du tourillon, de plus elle doit faire équilibre aux 2 forces P et Q donc elle passe par leur point de concours S elle a donc pour direction la droite SO et le point A où cette droite coupe la circonférence qui limite le tourillon est le point de contact du tourillon et du coussinet.

Supposons qu'il y ait frottement, la réaction R s'incline alors sur la normale aux surfaces apparentes (qui passe toujours par le centre O du tourillon) de l'angle α de frottement, elle ne passe donc plus par O, mais elle passe toujours par S. Donc sa direction est déterminée, en effet :

— Supposons le problème résolu et soit A' le point où cette réaction coupe la circonférence limite du tourillon. Si nous joignons OS nous formerons un triangle OSA' dans lequel nous connaissons les deux cotés OS, OA' et l'angle α opposé à l'un d'eux, au coté OS. Donc si en un point a' de l'espace nous faisons un angle égal à α que sur l'un des cotés nous prenions une longueur a'o = A'O, que du point o comme centre avec OS comme rayon nous décrivions une circonférence, cette circonférence coupera l'autre coté de l'angle α en un point s, (petit s) et l'on formera ainsi un triangle oa's égal au triangle cherché. Il suffira actuellement de le placer sur la 1ère figure, en faisant coïncider le coté So avec le coté SO, alors le point a' viendra se confondre avec le point A' cherché — Ce point A' sera le point de contact



du tourillon et du coussinet dans le cas du frottement, il sera en avant de A point de contact dans le cas où il n'y a pas de frottement. La condition d'équilibre renferme alors le moment de la réaction qui se réduit à celui de sa composante tangentielle $f_1 R$ et on a comme dans le cas ou les forces étaient parallèles

$$Pr - Qr - f_1 R \rho = 0$$

Mais la valeur de R est donnée ici par la relation.

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\beta$ et non plus par la relation $R = P + Q$

Connaissant R et l'introduisant dans la formule précédente on calcule facilement le rapport entre P et Q, le rendement de la machine et le travail absorbé par le frottement.

2°. <u>Frottement dans le treuil</u>. — Un treuil se compose d'un cylindre terminé par 2 cylindres plus petits, ou les ayant le même axe, et que l'on nomme ses tourillons. c'est par ces tourillons que le treuil, le plus souvent horizontal, repose sur ses appuis appelés coussinets creusés à cet effet en forme de demi-cylindres. Sur l'axe du treuil est montée une roue dont le plan est perpendiculaire à cet axe; c'est tangentiellement à la circonférence de cette roue qu'est appliquée la force mouvante P. La force résistante Q est appliquée à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur la surface du treuil, et y est fixée par son autre extrémité. Indépendamment de ces 2 forces le treuil est soumis à son poids π et il reçoit les réactions de ses appuis que nous désignerons par R_1 et R_2. nous désignerons par q le rayon du treuil, par p celui de la roue et par ρ celui de ses tourillons.

Théorie. — Quand le frottement est nul ainsi que la raideur de la corde, les réactions aux tourillons passent nécessairement par l'axe du treuil, donc on a pour l'équilibre dans ce cas puisque les moments des réactions sont nécessairement nuls:

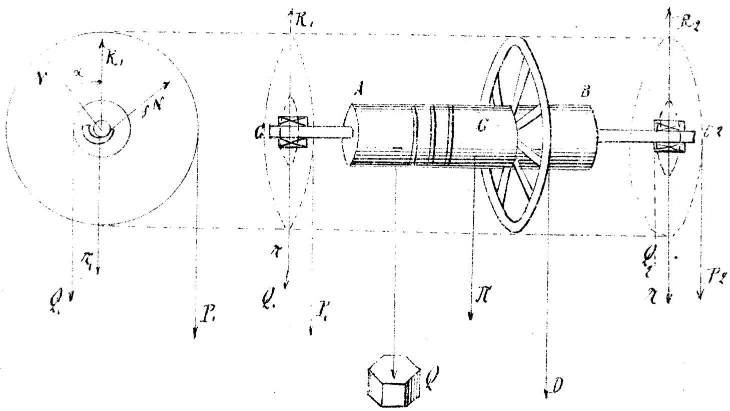
$$Pp - Qq = 0 \qquad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$

S'il y a frottement, les réactions ne passant plus par l'axe, leurs moments ne s'annulent plus et l'équation d'équilibre devient:

$$Pp - Qq - \mathcal{M}_o R_1 - \mathcal{M}_o R_2 = 0$$

Reste à calculer le $\mathcal{M}_o R_1$ et le $\mathcal{M}_o R_2$

Pour cela imaginons par les milieux des tourillons, 2 plans perpendiculaires à l'axe et dans ces plans 2 treuils fictifs indiqués en pointillé sur la figure. — Il est évident que nous ne changerons rien à l'équilibre du système en remplaçant le treuil primitif par les 2 treuils fictifs indiqués sur lesquels nous supposons qu'agissent les forces P_1 et P_2, $Q_1\, Q_2\, \pi_1\, \pi_2$ composantes parallèles des forces P, Q, π supposées verticales qui agissent sur le treuil réel. Examinons ce qui se passe dans un de ces treuils fictifs dont on a supposé le



plan rabattu sur le plan du tableau.

Sur ce treuil agissent les forces P_1, Q_1, π_1 et la réaction R_1 du coussinet sur le tourillon ; ces forces sont en équilibre, donc R_1 égale et opposée à la résultante des 3 autres qui sont verticales aussi pour intensités :

$$R_1 = P_1 + Q_1 + \pi_1 \qquad (1)$$

On aurait de même dans l'autre treuil $R_2 = P_2 + Q_2 + \pi_2$ (2)

De plus comme il y a frottement, R_1 fait avec la normale aux surfaces apparentes qui passe par le centre du tourillon, l'angle α de frottement. Donc $\mathcal{M}_o R_1$ égal au moment de sa composante tangentielle $R_1 f_1$, sera :

$$\mathcal{M}_o R_1 = R_1 f_1 \rho \qquad (\rho \text{ rayon du tourillon})$$

On aurait de même dans l'autre treuil

$$\mathcal{M}_o R_2 = R_2 f_1 \rho$$

L'équation d'équilibre deviendra alors

$$Pp - Qq - f_1\rho\,(R_1 + R_2) = 0$$

Remplaçant R_1 et R_2 par leurs valeurs (1) et (2) nous aurons :

$$Pp - Qq - f_1\rho\,(P_1 + Q_1 + \pi_1 + P_2 + Q_2 + \pi_2) = 0$$

ou $$Pp - Qq - f_1\rho\,(P + Q + \pi) = 0$$

D'où $$P(p - f_1\rho) = Q(q + f_1\rho) + \pi f_1 \rho$$

Donc $$\frac{P}{Q} = \frac{q + f_1\rho}{p - f_1\rho} + \frac{\pi f_1 \rho}{Q\,(p - f_1\rho)}$$

Cette relation est de la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{Q} + \beta$$

Ce qui nous montre que l'emploi d'un même treuil est d'autant plus avantageux que la charge Q est plus considérable, car l'on voit qu'à mesure que la charge augmente, le rapport de la force mouvante à la force résistante diminue en se rapprochant de plus en plus de la limite constante β. Pour une très faible charge le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70 3

rapport $\frac{P}{Q}$ pourrait devenir très grand et dans ce cas l'emploi du treuil serait désavantageux
Il suffirait qu'on eût $\quad Q < \frac{\alpha}{1-\beta}$
pour qu'il en résultât $P > Q$ et dans ce cas, il vaudrait mieux appliquer directement la force mouvante à la charge sans aucun intermédiaire ; mais heureusement ce cas de $P > Q$ ne se rencontre jamais dans la pratique.

Supposons que le poids π du treuil soit très faible relativement aux efforts P et Q agissant sur lui, la formule trouvée deviendra :

$$\frac{P}{Q} = \frac{q+f_1\rho}{p-f_1\rho}$$

Si le frottement est nul : $f_1 = 0$ d'où $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$ (résultat trouvé directement)

Si $q = p = r$. Elle devient $\frac{P}{Q} = \frac{r+f_1\rho}{r-f_1\rho}$

Nous retombons ainsi dans le cas de la poulie simple

Dans ce qui précède nous avons supposé la force P verticale si elle ne l'était pas, il faudrait simplement substituer aux valeurs.

$$R_1 = P_1 + Q_1 + \pi_1$$

$$R_2 = P_2 + Q_2 + \pi_2$$

les valeurs $\quad R_1 = \sqrt{P_1^2 + \Pi_1^2 + 2P_1\,\Pi_1 \cos\alpha.}$

$R_2 = \sqrt{P_2^2 + \Pi_2^2 + 2P_2\,\Pi_2 \cos\alpha.}$

en désignant par Π_1 la résultante des forces parallèles Q_1 et π_1

et par Π_2 id id id Q_2 et π_2 et

par α l'angle de la force P avec la verticale

Rendement – Dans le cas où on néglige π, pour une déviation angulaire $\Delta\alpha$ le travail moteur est $\quad T_m = Pp\,\Delta\alpha$

Le travail utile $\quad T_u = Qq\,\Delta\alpha$

et par suite $\quad R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Qq}{Pp} = \frac{q}{p}\cdot\frac{p-f_1\rho}{q+f_1\rho}$

En faisant usage de la méthode générale, on a ici :

$$\frac{P}{Q} = F(f) = \frac{q+f_1\rho}{p-f_1\rho}$$

D'où $\quad R = \frac{F(0)}{F(f)} = \frac{q}{p}\cdot\frac{p-f_1\rho}{q+f_1\rho}$

Discussion $\quad$ Quand $f_1 = 0$ on a $R = 1$.

f_1 ayant une valeur déterminée, le rendement augmente lorsque le rayon ρ du tourillon diminue ; il faut donc en pratique diminuer autant que possible le rayon des tourillons et lubréfier convenablement les surfaces en contact.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 56 VIR 70 3

On calculerait le travail absorbé comme précédemment. — On peut aussi employer dans ce but une méthode directe.

En effet pour 1 tour du treuil, la composante tangentielle de $R : R_1 f_1$ effectue un travail résistant $f_1 R_1 2\pi\rho$ c'est le travail qu'elle absorbe. De même le travail absorbé par la composante tangentielle de $R_2 : R_2 f_1$ par tour est $f_1 R_2 2\pi\rho$

Donc le travail total absorbé par tour est $2\pi\rho f_1 (R_1+R_2) = 2\pi\rho f_1 (P+Q+\Pi)$

et pour n tours $\mathcal{T}_f = 2n\pi\rho f_1 (P+Q+\Pi)$

Nous venons d'étudier le frottement dans le treuil dans le cas où le système est supposé en équilibre.

——— Supposons maintenant que l'intensité de la force mouvante P devienne plus grande que celle qui est nécessaire pour l'équilibre, il va alors se produire un mouvement uniformément accéléré que nous allons étudier en tenant compte du frottement.

Supposons les forces représentées par des poids. Le système étant en mouvement varié, on ne peut plus poser les conditions d'équilibre statique, il faut poser les conditions d'équilibre dynamique. Or :

En vertu du principe de d'Alembert, il y a, à chaque instant du mouvement, équilibre dynamique entre les forces réelles P, Q, Π, R_1 et R_2 qui agissent sur le corps, les tensions T et T' des fils et les résistances d'inertie des poids P et Q. Considérons séparément 1° L'équilibre de P. 2° Celui de Q. 3° Celui du corps tournant.

1° équilibre dynamique de P : Le corps P est en équilibre dynamique sous l'action de son poids P de sa résistance d'inertie $\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$ et de la tension T du fil, on a donc en posant l'équation de projection sur la verticale (seule condition d'équilibre puisque le corps ne peut que se mouvoir verticalement :) $T = P - \frac{P}{g}\frac{dv}{dt}$ (1) 2° Équilibre dynamique de Q : On aura de même : $T' = Q + \frac{Q}{g}\frac{dv'}{dt}$ (2)

3° Équilibre dynamique du treuil. Il ne peut que tourner autour de l'axe projeté en O : donc la seule équation d'équilibre est celle des moments autour de cet axe). On aura donc : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_0 \text{ Forces extérieures}}{\text{Mom. d'inertie du Corps}} = \frac{Tp - T'q - f_1(R_1+R_2)\rho}{I_0}$

ou $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Tp - T'q - f_1(T+T'+\Pi)\rho}{I_0}$ (3)

Des relations (1) (2) et (3) on peut tirer T, T' et $\frac{d\omega}{dt}$. Calculons d'abord $\frac{d\omega}{dt}$ qui donne l'accélération angulaire du mouvement produit.

Pour cela remplaçons dans les relations (1) et (2) dv' par $q\,d\omega$ et dv par $p\,d\omega$ nous aurons : $T = P - \frac{Pp}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}$ (4)

et $T' = Q + \frac{Qq}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}$ (5) Additionnons : $T + T' = P + Q - \frac{1}{g}\frac{d\omega}{dt}(Pp - Qq)$. (6)

Calculons maintenant $Tp - T'q$. Pour cela multiplions (4) par p et la relation (5) par q, puis retranchons (5) de (4), il viendra : $Tp - T'q = Pp - Qq - \frac{1}{g}\frac{d\omega}{dt}(Pp^2 + Qq^2)$

Enfin remplaçons dans l'égalité (3) $Tp - T'q$ et $T + T'$ par les valeurs que nous venons de trouver et nous aurons :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - Qq - \frac{1}{g}\frac{d\omega}{dt}(Pp^2+Qq^2) - f_1\rho\left[P+Q+\Pi - \frac{1}{g}\frac{d\omega}{dt}(Pp-Qq)\right]}{I_0}$$

— Pour tirer facilement $\frac{d\omega}{dt}$ de cette expression je pose

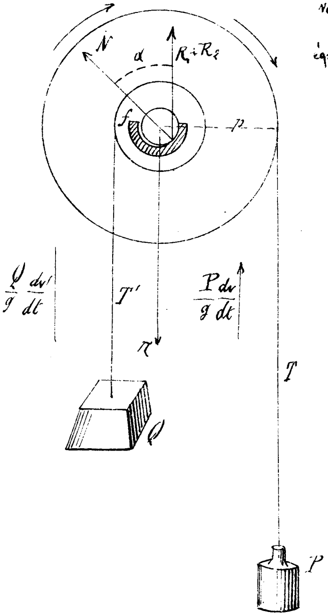
$$\frac{d\omega}{dt} = x \,;\; Pp - Qq = a \,;\; \frac{1}{g}(Pp^2+Qq^2) = b \,;\; f_1\rho = c \,;\; P + Q + \Pi = d$$

$\frac{1}{g}(Pp - Qq) = e$: la relation précédente peut alors s'écrire : $x = \frac{a - bx - c(d - ex)}{I_0}$

d'où on déduit : (A) $x = \frac{a - cd}{I_0 + b - ce} = \frac{Pp - Qq - f_1\rho(P+Q+\Pi)}{I_0 + \frac{1}{g}(Pp^2+Qq^2) - f_1\rho(Pp-Qq)\frac{1}{g}} = \frac{g\left[Pp - Qq - f_1\rho(P+Q+\Pi)\right]}{I_0 g + Pp^2 + Qq^2 + f_1\rho(Qq - Pp)}$

Telle est l'expression de l'accélération angulaire du mouvement. Déterminée elle est constante si la vitesse ne dépasse pas certaines limites (car au delà de certaines limites f_1 varierait avec la vitesse) donc ce mouvement est uniformément accéléré. — En remplaçant actuellement dans les relations (1) (2) $\frac{dv}{dt}$ par la valeur que nous venons de trouver, nous aurions les valeurs de T et de T' et nous verrions que ces

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3



valeurs sont plus grandes que P et et Q ; P et Q sont évidemment les tensions T et T' lorsqu'il y a équilibre ou par un mouvement uniforme. Ainsi les tensions T et T' croissent avec l'accélération du mouvement — celle ci ne doit donc pas dépasser une certaine limite, au delà de laquelle il y aurait rupture des cordes.

Discussion de la formule A. Supposons que $q = p$, auquel cas, le treuil se réduit à une poulie, nous aurons :

$$\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{p(P-Q) - f_1\rho\,(P+Q+\pi)}{Ig + p^2(P+Q) + f_1\rho\,p\,(Q-P)}$$

Supposons que $f_1 = 0$, alors

$$\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{p\,(P-Q)}{Ig + p^2(P+Q)}$$

ce cas où il n'y a pas de frottement est à peu près réalisé dans la machine d'Atwood ; comme la poulie est très légère son moment d'inertie I est négligeable

Nous aurons alors : $\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{(P-Q)}{p\,(P+Q)}$

Si $P = Q$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$ la poulie est au repos. Supposons que $P = Q + \delta$

δ étant aussi faible qu'on voudra, on aura :

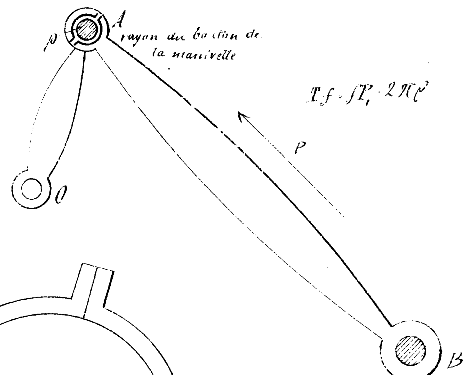
$$\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{\delta}{p\,(2Q+\delta)} = g\,\frac{1}{p\left(\frac{2Q}{\delta}+1\right)}$$

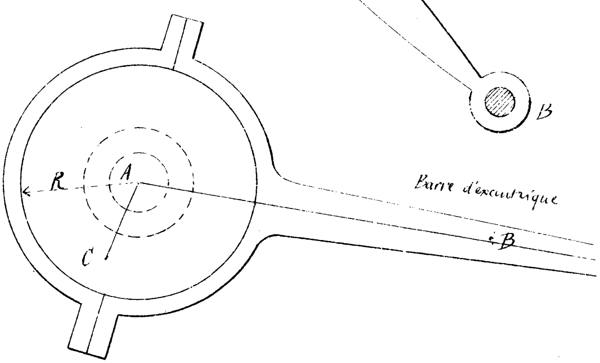
et on voit que δ diminuant indéfiniment, le dénominateur devient très grand, donc $\frac{d\omega}{dt}$ pourra être aussi petite qu'on le voudra et par suite le mouvement se ralentissant autant que l'on voudra pourra être observé facilement.

L'accélération du fil peut être déduite facilement de ce qui précède, en effet connaissant $\frac{d\omega}{dt}$, on en déduit $\frac{dv}{dt}$, car

$$dv = p\,d\omega$$

Donc





Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

$$J = \frac{dv}{dt} = p\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{1}{2Q+1}$$ — Résultat que nous avons déjà trouvé de différentes manières.

3° Frottement dans l'articulation entre bielle et manivelle et dans les excentriques

Bouton de manivelle. Nous allons nous proposer de calculer ce travail absorbé par le frottement pour un tour de manivelle — Ce travail ne dépend évidemment que du mouvement relatif des deux organes, il est donc le même que celui qui serait absorbé si le tourillon ou bouton de la manivelle tournait d'un tour dans l'œil formé par les coussinets qui terminent la tête de la bielle.

Si P est l'effort moyen de la bielle on aura pour le travail cherché:

$$\mathcal{T}F = f_1 P 2\pi\rho$$

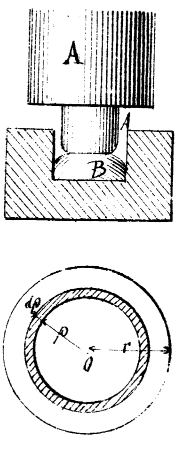
Ce travail est d'autant moindre que ρ est plus petit (ρ rayon du bouton de la manivelle)

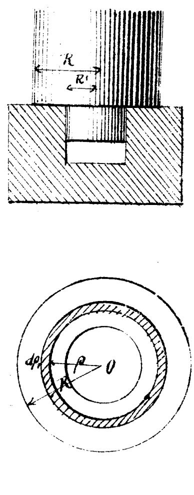
Excentrique. Supposons que le rayon ρ aille en augmentant jusqu'à englober le centre de rotation ; on aura alors le système de transmission par excentrique ; le travail absorbé par le frottement en appelant R, le rayon du disque sera

$$\mathcal{T}.F. = f_1 P 2\pi R.$$

Il est considérable si l'effort P de la barre d'excentrique est grand ; aussi les excentriques ne sont-ils employés que dans le cas de faibles efforts à transmettre

4° Travail absorbé par le frottement dans les crapaudines et sur collets





1° Nous calculerons d'abord le travail absorbé par le frottement de l'arbre A reposant par un pivot sur un tas d'acier B, formant le fond de la crapaudine

Soit P le poids total de l'arbre et de ce qu'il supporte. Le contact ayant lieu sur un petit cercle de rayon r, la pression sur l'unité de surface sera $\frac{P}{\pi r^2}$ — Considérons une bande annulaire infiniment voisine de ce cercle de contact, soit ρ le rayon de cette bande et soit $d\rho$ sa largeur ; sa surface sera à très peu près égale à celle d'un rectangle qui aurait pour base une longueur égale à $2\pi\rho$ et pour hauteur $d\rho$, la surface de cette bande sera donc $2\pi\rho d\rho$ et la pression qu'elle supportera sera $\frac{P}{\pi r^2} 2\pi\rho\, d\rho$, pression qui donne lieu à un frottement élémentaire égal à

$$dF = \frac{fP}{\pi r^2} \cdot 2\pi\rho\, d\rho$$

dont le moment par rapport à l'axe projeté en O est :

$$\mathcal{M}_o\, dF = \rho\, dF = f\,\frac{P}{\pi r^2} \cdot 2\pi\rho^2 d\rho$$

et pour toute la surface de contact, la somme des moments des forces élémentaires sera : $\mathcal{M}_o F = \int^r \mathcal{M}_o\, dF = 2\,\frac{fP}{r^2}\int_o^r \rho\, d\rho = \frac{2fP}{r^2}\cdot\frac{r^3}{3} = \frac{2}{3}\,fPr$

et le travail absorbé par le frottement pour un tour sera :

$$\mathcal{C}.F = \mathcal{M}_o F \,.\, 2\pi = \frac{2}{3} f\, P \cdot 2\pi r.$$

car pour avoir le travail d'une force dans le mouvement de rotation, il faut multiplier le moment ($\frac{2}{3}\,fPr$) de la force par la déviation angulaire (2π) ce qui donne bien $\frac{2}{3}\,fP.2\pi r$.)

_____ Calculons maintenant le travail absorbé par le frottement sur épaulements ou collets.

R et R' désignant les rayons extérieurs et intérieurs de la surface annulaire sur laquelle repose l'arbre :

Cette surface de contact ayant déjà lors pour expression $\pi\,(R^2 - R'^2)$, la pression sur l'unité de surface sera donc : $\frac{P}{\pi(R^2 - R'^2)}$

Considérons une bande annulaire infiniment mince de cette couronne de contact soit ρ' son rayon et $d\rho'$ sa largeur, sa surface sera à très peu près égale à celle d'un rectangle qui aurait pour base une longueur égale à $2\pi\rho'$ et pour hauteur $d\rho'$, cette surface sera donc $2\pi\rho' d\rho'$ et la pression qu'elle supportera sera $\frac{P}{\pi\,(R^2 - R'^2)} \cdot 2\pi\rho' d\rho'$ pression qui donne lieu à un frottement élémentaire dont l'expression est :

$$dF = f\,\frac{2P}{R^2 - R'^2}\,\rho'\, d\rho'$$

Le moment de cette force élémentaire de frottement est :

$$\mathcal{M}_o\, dF = dF.\rho = \frac{2fP}{R^2 - R'^2}\,\rho'^2 d\rho'$$

Répétant le même raisonnement pour toutes les bandes annulaires infiniment minces, nous aurons pour le moment de toutes les forces élémentaires de frottement : $\mathcal{M}_o F = \int \mathcal{M}_o\, dF = \frac{2fP}{R^2 - R'^2}\int^{R} \rho'^2 d\rho' = \frac{2fP}{R^2 - R'^2}\cdot\frac{\rho'^3}{3} + C$

Pour $\rho' = R'$, il n'y a pas de frottement, donc

$$0 = \frac{2fP}{R^2 - R'^2}\;\frac{R'^3}{3} + C \qquad \text{d'où}\quad C = -\frac{2fP}{R^2 - R'^2}\;\frac{R'^3}{3}$$

substituant, il viendra :

$$\mathcal{M}_o F = \int \mathcal{M}_o\, dF = \frac{2fP}{R^2 - R'^2}\left(\frac{\rho'^3}{3} - \frac{R'^3}{3}\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 703

enfin en faisant $\rho' = R$, il viendra :

$$\mathcal{M}_0 F = \int \mathcal{M}_0 \, dF = \frac{2}{3} f P \left(\frac{R^3 - R'^3}{R^2 - R'^2}\right) = \frac{2}{3} f P \left(\frac{R^2 + RR' + R'^2}{R + R'}\right)$$

Il resterait à multiplier par 2π pour avoir le travail absorbé par le frottement pour un tour)

On met généralement l'expression précédente sous une autre forme

Appelons l, la largeur de l'épaulement, nous aurons :

$$(1) \quad l = R - R'$$

Appelons ρ_0 le rayon moyen de l'embase annulaire, nous aurons :

$$(2) \quad \rho_0 = \frac{R + R'}{2} \quad \text{ou} \quad 2\rho_0 = R + R' \quad (2)$$

Remplaçons dans la formule précédente R, R' pour leurs valeurs en fonction de l et de ρ_0 ; pour le faire commodément élevons au carré les relations (1) et (2) elles deviendront :

$$(3) \quad l^2 = R^2 - 2RR' + R'^2$$

$$(4) \quad 4\rho_0^2 = R^2 + 2RR' + R'^2$$

Additionnons (3) et (4) : $\quad l^2 + 4\rho_0^2 = 2(R^2 + R'^2) \quad (5)$

Retranchons (3) de (4) : $\quad 4\rho_0^2 - l^2 = 4RR' \quad (6)$

Ajoutons à (5) la $1/2$ de (6) : $\quad 6\rho_0^2 + \frac{l^2}{2} = 2(R^2 + RR' + R'^2) \quad (7)$;

Or de la relation (2) on tire : $\quad 6\rho_0 = 3(R + R') \quad (8)$

Donc en divisant membre à membre (7) par (8), il vient :

$$\rho_0 + \frac{l^2}{12\rho_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2 + RR' + R'^2}{R + R'}$$

d'où

$$\mathcal{M}_0 F = \int \mathcal{M}_0 \, dF = f P \left(\rho_0 + \frac{l^2}{12\rho_0}\right)$$

Le travail absorbé par le frottement pour un tour sera dès lors

$$\mathcal{T} F = f P . 2\pi \left(\rho_0 + \frac{l^2}{12\rho_0}\right)$$

——— Application de ce qui précède au treuil dont l'axe n'est pas horizontal.

Dans l'étude du treuil, nous avons supposé l'axe horizontal ; si l'axe est mal calé, n'est pas horizontal, le poids de l'appareil va déterminer une pression oblique sur les collets qui entourent le tourillon le plus bas, il en résultera sur ces collets un frottement et le travail absorbé par ce frottement se calculera au moyen de la formule précédente dans laquelle P représentera alors la composante suivant l'axe du treuil du poids de tout l'appareil, la formule à appliquer sera donc encore . $\quad \mathcal{T} F = f P . 2\pi \left(\rho_0 + \frac{l^2}{12\rho_0}\right)$

——— Méthode expérimentale pour calculer le travail absorbé par tous les

Frottements dans un treuil.

1°. Supposons que l'on connaisse la résistance utile Q que l'on veut soulever, désignons par P l'effort nécessaire pour déterminer l'équilibre ou le mouvement uniforme de l'appareil. On aura.

$$P p = Q q + \Sigma M_o \text{ des résistances passives } R.$$

De cette relation on déduit.

$$\Sigma M_o R = P p - Q q$$

Par tour le travail total absorbé sera :

$$2\pi \Sigma M_o R = 2\pi (P p - Q q)$$

2°. Supposons qu'on ne connaisse pas la résistance utile Q on pourra tout de même déterminer d'une manière approximative le travail absorbé par toutes les résistances. Soit en effet P la force qui déterminerait le mouvement uniforme de l'appareil. A l'instant où le moment uniforme tend à se produire l'équation d'équilibre est :

$$P p = Q q + \Sigma M_o R \qquad (1)$$

Supposons maintenant qu'on diminue P jusqu'à ce que le mouvement tende à se produire en sens inverse soit P' la valeur à cet instant de la force P, nous aurons :

$$Q q = P' p + \Sigma M_o R \qquad (2)$$

Remarquons toutefois que $\Sigma M_o R$ dans la relation (2) n'est pas tout à fait la même que dans (1) car la pression qui était $P+Q$ dans le 1er cas est $P'+Q$ dans le 2e, les réactions sur les coussinets ne sont donc plus les mêmes à cause de la variation de P, il en résulte que le frottement a nécessairement varié. Mais si nous négligeons cette variation et si nous additionnons (1) et (2) nous aurons.

$$P p = P' p + 2 \Sigma M_o R.$$

d'où

$$\Sigma M_o R = \frac{P p - P' p}{2} = \frac{p (P - P')}{2}$$

Le travail absorbé pour un tour sera :

$$T.F = 2\pi \Sigma M_o R = p (P - P') \pi$$ En mettant sous la forme

$T.F = \frac{1}{2} (P - P') 2\pi p$ on voit que le travail du frottement est celui d'une force égale à la ½ différence des forces P et P' que l'expérience a fait connaître appliquée tangentiellement au cercle de rayon p. Conclusion. Il résulte de toute cette étude qu'en pratique pour diminuer autant que possible le travail absorbé par le frottement dans les machines, il faudra 1° réduire à leur minimum les dimensions des organes qui les composent (ce minimum est donné par la considération de la résistance des matériaux), 2° et ensuite faire un

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 56 VIR 70 3

usage constant d'huiles, de graisses, d'enduits appropriés et souvent renouvelés, afin de diminuer le coefficient de frottement et par suite le travail qu'il absorbe.

——— Nous terminerons cette étude du frottement de glissement dans les solides par quelques observations sur les lois du frottement.

1° Nous avons dit que le frottement de glissement était indépendant de l'étendue des surfaces frottantes, mais il faut toutefois pour que cette loi soit applicable que l'étendue de l'une de ces surfaces par rapport à l'autre, ne devienne pas trop petite et n'atteigne pas la limite à partir de laquelle il y aurait pénétration de la plus petite surface dans la plus grande.

2° Nous avons dit aussi que le frottement était plus grand au départ que pendant le mouvement. Ce frottement au départ est d'autant plus grand que les corps ont été plus longtemps en contact et qu'il y a eu primitivement des enduits qui ont pu être expulsés ou qui ont séchés. On comprend par suite que cette adhérence des 2 corps à la suite d'une longue station est presqu'insensible dans le cas du frottement à sec des matières métalliques.

3° Le frottement est indépendant de la vitesse relative des corps frottants ; cette loi n'est encore qu'approximative et n'est vraie que tant que la vitesse ne dépasse pas certaines limites.

En réalité le frottement diminue quand la vitesse augmente au delà d'une certaine limite. Pour se rendre compte de ce fait. Considérons un corps se déplaçant à sec et très lentement sur un plan horizontal

Lorsqu'il marche lentement, la pression normale aura le temps de manifester son action, c'est à dire qu'il y aura déformation produite, résistance au mouvement et par suite frottement. Si au contraire le corps est animé d'une vitesse très grande, la pression normale n'aura pas le temps d'exercer son action le corps volera pour ainsi dire sur le plan en l'effleurant à peine, il n'y aura plus déformation ou une déformation négligeable et par suite plus de résistance, il s'interpose dans ce cas entre le corps et le plan horizontal une lame d'air, et c'est en réalité frottement d'air sur air et non plus frottement de solide contre solide qui a lieu. Or ce frottement d'air sur air est tout à fait négligeable. – Ces observations sont confirmées par l'expérience (Expériences de M. Hirn)

Si maintenant le corps ne repose plus à sec, si les surfaces sont enduites de graisse, et que le corps marche lentement, la pression va avoir le temps de manifester son effet, les enduits seront expulsés et les choses se passeront comme s'il n'y en avait pas; si la vitesse devient considérable au contraire la pression n'a pas le temps de chasser les enduits et le frottement ayant lieu enduit sur enduit huile sur huile, sera considérablement diminué.

Plus l'enduit est fluide, plus la vitesse devra être grande pour que cet enduit ne soit pas expulsé.

De ce qui précède résulte qu'il faut augmenter la fluidité des enduits avec la vitesse. Dans le cas de vitesses extrêmement rapides, l'enduit peut même être supprimé à cause de l'interposition de la lame d'air qui en tient lieu ainsi que nous venons de le dire.

M. Girard a remplacé tous les enduits par de l'eau qui arrive entre les organes des machines sous une pression assez considérable, et est arrivé à presqu'annuler le frottement dans ses machines.

Art VII. Résistance due au frottement de glissement dans les fluides liquides et gazeux.

Considérons un liquide ou un gaz s'écoulant dans une conduite. Le fait du frottement du liquide ou du gaz contre les parois de la conduite et des différentes couches de liquide ou de gaz sur elles mêmes va déterminer une résistance qui s'opposera au mouvement du fluide. Ce fait peut se mettre en évidence par une expérience simple. On a 2 conduites d'eau ou de gaz de même diamètre, la charge qui produit l'écoulement dans les 2 cas étant supposée la même, on constate qu'il s'écoule moins d'eau ou de gaz dans le même temps de la conduite qui a le développement le plus considérable, ce qui ne peut provenir que du frottement développé sur les parois de la Conduite, frottement qui est par suite plus grand dans la conduite qui a la plus grande longueur.

On peut se rendre compte de ce qui se passe de la manière suivante:

La couche d'eau immédiatement en contact avec les parois de la conduite est retenue par adhérence; cette couche retarde également par adhérence le mouvement de la couche infiniment voisine, laquelle retarde aussi la vitesse de la suivante et ainsi de suite. La vitesse nulle contre les parois va donc en croissant à mesure qu'on s'approche de l'axe du tuyau de conduite, c'est donc le filet central qui a la plus grande vitesse

Lois du frottement dans les fluides. (Rapprocher les lois suivantes de celles du frottement dans les solides.)

Nous venons de voir que dans les solides

1° Le frottement est proportionnel à la pression.

2° Indépendant de l'étendue des surfaces en contact

3° Indépendant de la vitesse (du moins jusqu'à une certaine limite)

Eh bien, dans les fluides, les lois du frottement sont précisément inverses

1° Le frottement est indépendant de la pression

2° Proportionnel à l'étendue des surfaces en contact.

3° Variable avec la vitesse

Si $\underline{u}$ est la vitesse moyenne du courant d'eau ou de gaz, le frottement varie d'après l'expérience suivant une fonction du second degré de cette vitesse $\underline{u}$

D'après cela, la résistance due au frottement pourra s'écrire

$$F = L\chi(\alpha u + \beta u^2)$$

en appelant L le développement de la conduite d'eau et χ le périmètre mouillé, α et β des coefficients déterminés par l'expérience.

Dans le cas où la vitesse moyenne $\underline{u}$ est très faible on peut négliger βu^2 et écrire

$$F = L\chi\alpha' u. \qquad (1)$$

Si au contraire le courant est très rapide, le terme du 1er degré est négligeable et on a:

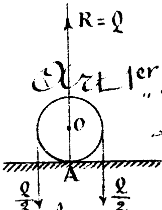
$$F = L\chi\beta' u^2. \qquad (2)$$

La formule (1) s'applique plutôt aux liquides dont la vitesse d'écoulement n'est jamais trop considérable pour ce qui est relatif aux gaz (qui ont toujours une vitesse d'écoulement énorme) le terme du premier degré en u est négligeable devant le terme du 2e degré et on emploie dès lors la formule (2) – Nous nous contenterons pour le moment de ces indications:

La question du frottement dans les liquides et les gaz devant être traitée dans tous ses détails dans la Pneumatique et l'Hydraulique.

Chapitre II.

Théorie du frottement de Roulement



Art 1er. Explication physique de la résistance dite de roulement. Loi expérimentale de cette résistance. Son expression analytique.

Soit un rouleau reposant sur deux madriers horizontaux. Sur ce rouleau est placé une cordelette parfaitement flexible sollicitée à ses deux extrémités par des poids égaux $\frac{Q}{2}$. Dans cet état il y a équilibre entre ces deux forces $\frac{Q}{2}$ et la résultante des réactions du sol laquelle par conséquent est verticale et passe par le centre de rouleau.

Cela posé, si le sol n'exerçait aucune résistance au roulement le moindre poids additionnel placé sur $\frac{Q}{2}$ à droite déterminerait le roulement, or, il n'en est pas ainsi, l'expérience prouve qu'il faut pour que ce roulement se produise que ce poids atteigne une certaine valeur q; donc le sol oppose au roulement c'est à dire à la rotation instantanée qui tend à s'effectuer autour de l'arête du contact A une certaine résistance dont il s'agit d'expliquer la nature et de trouver l'expression analytique.

Cette résistance tient encore à la déformation des surfaces en contact, en effet; à mesure que le poids additionnel croît jusqu'à sa valeur limite q déterminant le roulement, la déformation d'abord symétrique va aller en s'exagérant vers la droite et en avant du contact A se produit encore un petit bourrelet de matière s'opposant à la rotation instantanée autour du point A et par suite au roulement, cet effet indiqué sur la figure va aller en s'exagérant de plus en plus, par suite la résultante des réactions du sol déformé qui ne cesse pas d'être verticale puisqu'elle doit toujours faire équilibre aux forces verticales $\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, q$ va cesser de passer par le centre O du rouleau et s'avancera vers la droite du coté du poids additionnel de manière à faire à chaque instant équilibre aux forces $\frac{Q}{2}, \frac{Q}{2}, q$.

Soit δ sa distance à la verticale du point A à l'instant où le roulement c'est à dire la rotation instantanée autour du point A commence.

On aura en posant la relation unique d'équilibre celle des moments autour de l'axe projeté en A.

$$\frac{Q}{2} r + (Q+q)\delta = \left(\frac{Q}{2}+q\right) r$$

d'où $(Q+q)\delta = qr$ et enfin :

$$\delta = \frac{q}{Q+q}\, r$$

Il résulte des expériences de Coulomb puis de Morin

1° Que cette quantité δ est doublement spécifique, c'est à dire varie avec la nature de chacune des deux substances en contact (toutes choses égales d'ailleurs

2° Qu'elle est indépendante de la pression normale $Q+q$: En effet pour les mêmes substances et le même rayon r, ces messieurs trouvèrent que le rapport $\frac{q}{Q+q}$ ne variait pas en faisant varier Q et par suite le poids nécessaire à la production du mouvement

3° Qu'elle est également indépendante du rayon du rouleau ; en effet l'expérience prouve que r variant le rapport $\frac{q}{Q+q}$ varie précisément en sens inverse de telle sorte que le produit c'est à dire δ reste constant

Il est évident toutefois que cette dernière loi suppose essentiellement que le rayon du cylindre soit $> \delta$ car le point d'application de la réaction R ne peut évidemment être en dehors de ce cylindre.

Mr Dupuit (Essai sur le tirage des voitures 1837) conclut de ses expériences que δ varie proportionnellement à la racine carrée du rayon r du rouleau, de telle sorte qu'on peut écrire. $\delta = a\sqrt{r}$

a étant la valeur de δ déterminée par expérience répondant à un rayon 1.

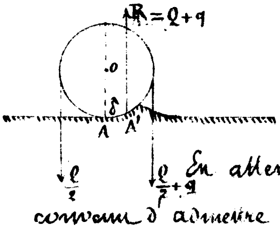
Mr Dupuit a trouvé par expérience les valeurs suivantes de la constante a :

Bois sur bois . . . . $a = 0,0014$

Fer sur bois humide . . . . . . $a = 0,0010$

Fer sur fer . . . . $a = 0,0007$

Roues sur chaussée en empierrement . . $a = 0,03$



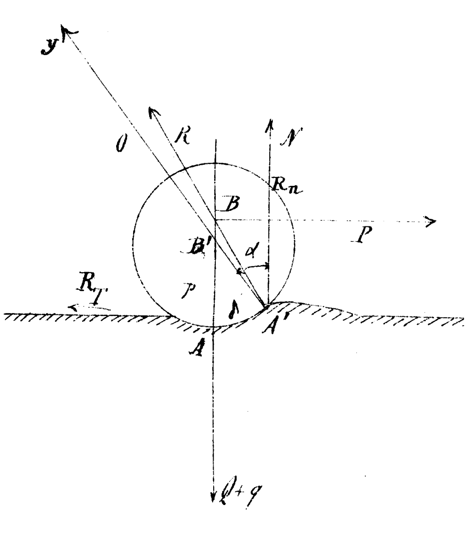
En attendant des expériences plus précises sur ce sujet, on est convenu d'admettre cependant en pratique les résultats de Coulomb

4° Qu'elle est proportionnelle toutes choses égales d'ailleurs à la longueur de l'arête de contact

---

——— Nous avons supposé dans ce qui précède que le roulement du rouleau était obtenu par l'application d'une force verticale q tangente au rouleau, mais on peut encore provoquer ce roulement au moyen d'une force horizontale P appliquée en un point quelconque du rouleau, ce dernier mode de tirage se rapproche d'ailleurs des conditions ordinaires de la pratique, et il s'agit d'étudier ce qui se passe dans ce cas

Considérons donc le même rouleau que précédemment soumis à la même pression normale $Q+q$ représentant son poids et sollicité par une force horizontale P appliquée en un point quelconque de ce rouleau. L'expérience prouve d'abord que le roulement ne commence que pour une certaine valeur de cette force motrice P, donc le sol exerce une certaine résistance dont il est également facile de comprendre la nature, en effet, quand la force $P=0$ la réaction R du sol déformé est verticale, égale et directement opposée à $Q+q$, elle passe donc par le centre, mais à mesure que la force P croît, la déformation produite s'accentue davantage du côté de la force P, ainsi que l'indique la figure, par suite la réaction du sol ainsi déformé va s'incliner sur la verticale de manière à toujours faire équilibre aux deux forces P et $Q+q$, et comme pour cela elle doit nécessairement passer par le point de concours B des deux forces P et $Q+q$, son point d'application ou son pied A' va s'avancer en avant du point de contact géométrique A d'une certaine quantité soit δ cette quantité à l'instant où le roulement, c'est-à-dire la rotation instantanée autour du point A commence, si je remplace la réaction R par ses deux composantes normale et tangentielle R_n, R_T j'aurai pour seule et unique condition d'équilibre entre les forces P, $Q+q$, R_n, R_T la relation des moments autour de l'axe projeté en A, laquelle donne en appelant p. le bras de levier de la force P:



$$P p = R_n \delta \quad (1)$$

D'ailleurs en projetant sur la verticale et sur l'horizontale nous avons les conditions :

$$R_n = Q + q \quad (2)$$

$$R_T = F \quad (3)$$

Éliminant R_r entre (1) et (2), la relation d'équilibre devient :

$$Fp = (Q+q)\,\delta' \quad (4)$$

Or, dans le cas précédent on avait trouvé pour condition d'équilibre à l'instant du mouvement : $qr = (Q+q)\,\delta$ (5).

Cela posé l'expérience ayant prouvé que pour la même pression normale $Q+q$ le moment Fp déterminant le roulement dans le second cas était précisément égal au moment qr déterminant le roulement dans le 1er cas, il résulte nécessairement des deux dernières égalités que $(Q+q)\,\delta' = (Q+q)\,\delta$

ou enfin que $\delta' = \delta$

Il en résulte que les coefficients ayant été déterminés par expérience au moyen du 1er mode de roulement (force verticale appliquée tangentiellement au rouleau) s'appliqueront encore au second mode de roulement qui est le mode de roulement pratique.

Supposons donc ces coefficients δ ou δ' déterminés, des relations (3) et (4) on déduira :

$$R_T = P = (Q+q)\cdot\frac{\delta}{p} \quad (6)$$

c'est à dire que la force P capable de produire le roulement uniforme supposé, c'est à dire capable de vaincre la résistance tangentielle dite adhérence R_T due au frottement, est :

1° proportionnelle à la pression normale $Q+q$

2° " au coefficient δ

3° en raison inverse du bras de levier p de la force P

Ici se présente une question importante, y aurait il en effet roulement ainsi que nous l'avons supposé ou bien glissement !

Il est facile de résoudre cette question, en effet, chaque nature de frottement donne lieu à une résistance tangentielle différente. Dans le cas du roulement cette résistance tangentielle dite adhérence a pour expression :

$$R_T = (Q+q)\,\frac{\delta}{p} \quad (7)$$ δ caractéristique du frottement de roulement

Dans le cas du frottement, cette résistance tangentielle a pour expression :

$$R_f = f\,(Q+q) \quad (8)$$ f caractéristique du frottement de glissement

$(Q+q)$ désignant dans les deux cas la pression normale

Or supposons que la force P d'abord nulle, aille en croissant constamment

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

Il est clair que dès qu'elle aura atteint la plus petite de ces résistances, elle la surmontera et par suite produira le mouvement correspondant si donc :

$$R_T < R_1 \text{ il y aura roulement}$$

Si au contraire $R_T > R_1$ il y aura glissement

La 1ère condition, celle du roulement revient à cause de (7) et (8) à :

$$\frac{\delta}{p} < f \text{ d'où } p > \frac{\delta}{f} \text{ ou } p > \delta \cot g\,\alpha$$

La 2e Condition celle de glissement à :

$$\frac{\delta}{p} < f \text{ d'où } p < \frac{\delta}{f} \text{ ou } p < \delta \cot g\,\alpha$$

Or si par le point A' je mène la droite A'y faisant avec la réaction totale R l'angle de frottement, elle coupera la verticale du point A en un certain point B' et le triangle B'AA' rectangle à la limite (δ étant extrêmement petit) donnera :

$$AB' = \delta \cot g\,\alpha$$

Donc la condition nécessaire au roulement est définitivement :

$$p > AB'$$

et celle nécessaire au glissement est $p < AB'$

c'est à dire que pour qu'il y ait roulement il faut que la force P soit appliquée au dessus du point B' déterminé ainsi qu'il vient d'être dit, or ce point à cause de la petitesse de la quantité δ se trouve généralement au dessous du centre O du rouleau de sorte que si nous supposons la force P appliquée au centre O, il y aura généralement roulement, et l'effort nécessaire pour le déterminer sera alors en faisant $p = r$ dans (6) et en désignant par la seule lettre Q la pression normale $Q + q$:

$$P = Q\frac{\delta}{r}$$

Art II. Étude du roulement uniforme ou varié d'un Cylindre ou d'une sphère sur un plan horizontal.

En vertu de la remarque précédente, la force P étant supposée appliquée au centre O, il y a roulement

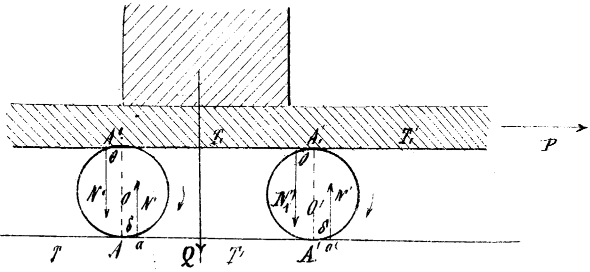
Trois cas peuvent se présenter :

1° Si $P = Q\frac{\delta}{r}$ le roulement est uniforme

2° Si $P > Q\frac{\delta}{r}$ le roulement est uniformément accéléré.

3° Si $P < Q\frac{\delta}{r}$ le roulement est uniformément retardé.

1er Cas. Tout ce qui est relatif au 1er cas a été dit, il reste à en faire quelques



applications pratiques

1° Transport des matériaux à l'aide de rouleaux d'interposition.

Pour faciliter le transport horizontal des fardeaux très lourds on se sert de pièces de bois cylindriques nommées rouleaux (O et O') que l'on place sous des madriers supportant le fardeau à déplacer horizontalement.

Soit Q le poids total des madriers et de la charge qu'ils supportent (on néglige le poids des rouleaux toujours très faible et négligeables par rapport à Q) le calcul de l'effort horizontal P qu'il faut exercer pour opérer le transport par ce moyen est une application de la théorie précédente :

D'abord s'il n'y avait pas de rouleaux, la force P nécessaire au déplacement aurait pour expression fQ, elle serait considérable ; nous allons montrer que l'emploi de ces rouleaux qui substituent au frottement de glissement, le frottement de roulement diminue considérablement cette force nécessaire au déplacement.

Soit P l'intensité de la force mouvante à l'instant où le mouvement uniforme se produit ; le sol va exercer sur le rouleau O une résistance totale R dont le point d'application a sera à une distance δ de A dans le sens du roulement de O sur le sol et dont les composantes tangentielle et normale désignées jusqu'ici par les lettres R_T, R_n seront dorénavant, pour la facilité de l'écriture désignées par les lettres simples T et N, de plus le madrier supérieur exercera sur le même rouleau O une action totale R_1 dont les composantes seront N_1 à une distance δ' de A_1 dans le sens du mouvement relatif du rouleau sur le madrier, et T_1

On aura des forces analogues agissant sur le second rouleau nous les représenterons par les mêmes lettres accentuées : N'T' en bas N'$_1$ T'$_1$ en haut.

Cela étant, il est facile de trouver le rapport entre P et Q, entre la puissance et la charge

1° Considérons l'équilibre du 1er rouleau. A l'instant où le mouvement commence à se produire, le rouleau est en équilibre sous l'action des forces

T T_1 N N_1, ces forces satisfont donc aux 6 relations d'équilibre comme le mouvement se réduit dans un temps très petit à une rotation instantanée autour de l'axe projeté en A ; la seule équation d'équilibre est celle des moments autour de cet axe. Nous aurons donc

$$T_1 2r = N\delta + N_1\delta' \quad (1)$$

car N et N_1 tendent à faire tourner le rouleau dans le même sens ; les relations de projection sur la verticale et l'horizontale, nous donnent ensuite.

$$N = N_1 \qquad T = T_1 \quad (2)$$

et en vertu de ces relations la condition d'équilibre (1) devient :

$$T 2r = N(\delta + \delta')$$

2° Considérons l'équilibre du 2e rouleau. Des raisonnements identiques aux précédents, nous conduiront à la condition d'équilibre :

$$T'_1 2r = N'\delta + N'_1\delta' \quad (3)$$

avec les relations : $N' = N'_1 \qquad T'_1 = T'$

au moyen desquelles la relation (3) devient :

$$T' 2r = N'(\delta + \delta') \quad (4)$$

La Comparaison des relations (1) et (4) nous donne :

$$2r(T + T') = (\delta + \delta')(N + N') \quad (5)$$

3° En considérant maintenant l'équilibre du système total et remarquant que les réactions T, N_1 T', N'_1 disparaissent attendu que les rouleaux exercent sur le madrier des réactions égales et contraires, on obtient

$$T + T' = P \text{ et } N + N' = Q$$

donc la relation (5) devient :

$$P . 2r = Q(\delta + \delta')$$

d'où enfin $\qquad P = Q\dfrac{\frac{1}{2}(\delta + \delta')}{r}$

Telle est l'expression de la force nécessaire pour déterminer le roulement.

Si l'on suppose par exemple $Q = 2000^k$ $\quad r = 0^m20 \quad \delta = 0{,}03\sqrt{r} \quad \delta' = 0{,}001\sqrt{r}$

on trouvera $\quad P = 2000^k \dfrac{\frac{1}{2}\,0{,}031\sqrt{0{,}20}}{0{,}20} = \dfrac{31^k}{\sqrt{0{,}20}} = 69^k32.$

On voit combien est avantageuse la substitution du frottement de roulement au frottement de glissement : $\left(\dfrac{\delta+\delta'}{2}\right)$ étant toujours beaucoup $< f$

Supposons pour plus de simplicité $\delta = \delta'$ ce qui revient à supposer le madrier de même nature que le sol, nous aurons :

$$P = Q ; \frac{\delta}{r}$$

comme si l'effort P était appliqué au centre des rouleaux. Cherchons quel est le travail fourni par la force déterminant le roulement

Si s est le déplacement du fardeau, ce travail égal au travail résistant sera :

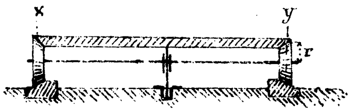
$$\mathcal{E}_m = Q\cdot\frac{\delta}{r}\cdot s$$

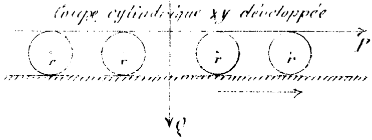
tel est le travail dépensé par le moteur (homme ou animal)

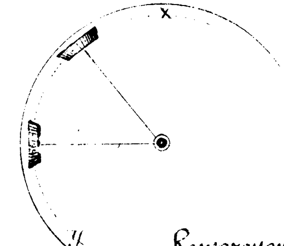
Il est utile de remarquer que ce chemin s parcouru par le madrier est le double du chemin décrit par les axes des rouleaux. En effet, pour un instant très petit le déplacement revient à une rotation instantanée autour de l'axe projeté en A dès lors les vitesses des différents points du rouleau et par suite les chemins parcourus dans le même temps sont proportionnelles à leurs distances à cet axe, il en résulte que la vitesse linéaire du point A, est double de la vitesse du centre O du rouleau (car $A_1A = 2OA$) et comme les arcs développés sur le madrier et sur le rouleau sont égaux, il s'ensuit que l'espace décrit par le point A du madrier est double de l'espace parcouru par le centre O : C q f d

<u>Plaques tournantes des chemins de fer.</u> — Coupons le système par le cylindre moyen XY et développons cette section dans le tableau. On voit alors clairement que la plaque tournante proposée est identique au point de vue de la transmission et par conséquent du frottement au système précédent de transport horizontal par rouleaux d'interposition. On aura donc en désignant par Q le poids total de la plaque et de ce qu'elle supporte et par P l'effort moteur appliqué tangentiellement à cette plaque $P = Q\,\frac{1}{2}\frac{(\delta+\delta')}{r}$

ou $P = Q\frac{\delta}{r}$ si $\delta = \delta'$







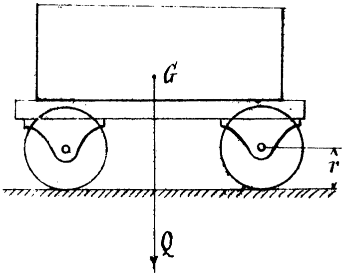
La plaque étant bien établie, il n'y a absolument que cette seule résistance de roulement à vaincre.

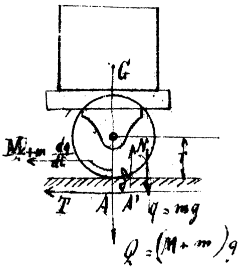
Remarquons qu'ici comme dans le transport par rouleaux d'interposition la vitesse linéaire à la circonférence de la plaque est le double de la vitesse du centre des galets.

<u>2e et 3e Cas — ou étude du mouvement varié d'un corps roulant un wagon ou une voiture par exemple, sur un plan horizontal (On néglige pour l'instant le frottement de glissement des essieux dans leurs boîtes à graisse)</u>

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIII 70 3

Un wagon se compose essentiellement d'une caisse reposant sur les essieux de deux paires de roues égales. Soit Q le poids total de ce wagon y compris le poids des roues et soit q le poids de ces roues ; désignons par P l'effort horizontal de traction appliqué au centre des roues, par conséquent à la distance R du sol.





Il est clair que sous le rapport du mouvement produit, le système proposé est équivalent au système composé d'un seul corps tournant de poids q surchargé d'un poids tel que le tout pèse Q cela étant et P désignant l'effort de traction appliqué au centre du corps tournant. Pour que le mouvement uniforme se produise on sait qu'il faut que

$$P = Q\frac{f}{r}$$

Je suppose actuellement que P devienne plus grand que $Q\frac{f}{r}$ alors le système va prendre un mouvement accéléré qu'il s'agit d'étudier.

Ici, il n'y a plus équilibre statique, mais en vertu du principe de d'Alembert à chaque instant du mouvement varié qui va se produire, il y a équilibre dynamique entre les forces réelles qui agissent sur le système, lesquelles sont Q P — N et T composantes normale et tangentielle de la réaction totale R du sol sur le système et les résistances d'inertie des différents points du système.

Or observons qu'à chaque instant le mouvement du système proposé se compose de deux mouvements simultanés 1° un mouvement de translation en vertu duquel tous les points qui le composent ont même mouvement que celui du centre des roues 2° un mouvement relatif de rotation des roues autour de leurs centres. Pour exprimer dès lors qu'il y a à chaque instant équilibre dynamique entre les forces y compris celles d'inertie agissant sur le système dans son mouvement absolu résultant, il suffira évidemment d'exprimer qu'il y a équilibre entre ces mêmes forces dans chaque mouvement composant.

Si donc je considère d'abord le mouvement d'entraînement de translation, comme ce déplacement est nécessairement rectiligne et horizontal, il n'y a qu'une seule relation d'équilibre, celle de projection de toutes les forces y compris celles d'inertie sur la direction rectiligne horizontale de ce mouvement, laquelle est :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

$$P - T - \underbrace{(M+m)\frac{dv}{dt}}_{\text{Resistance d'inertie}} = 0 \quad \text{D'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{P-T}{M+m} \quad (1)$$

Considérons en second lieu le mouvement relatif de rotation des roues autour de leurs centres, comme ce mouvement est une pure rotation il n'y aura également qu'une seule équation d'équilibre celle des moments de toutes les forces y compris celles d'inertie autour de l'axe des roues - En posant cette relation on trouve comme on sait, en désignant par $\frac{d\omega}{dt}$ l'accélération angulaire et par i le moment d'inertie $m\rho^2$ des roues

$$(2)\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum \mathcal{M}_o F}{i} = \frac{Tr - N\delta}{i} = \frac{Tr - Q\delta}{i} \quad \text{car } N = Q$$

c'Mais entre v et ω on a la condition

$$v = \omega r \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \quad (3)$$

Si dans (3) je remplace $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ par leurs valeurs (1) et (2). il vient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P-T}{M+m} = \frac{Tr^2 - Q\delta r}{i} \quad (4)$$

Des relations (4) nous pouvons tirer les deux inconnues :

1°. $\frac{dv}{dt}$ l'accélération du mouvement d'entrainement ou du centre des roues

2°. T l'adhérence

Mise en evidence de T. On a : $\frac{P-T}{M+m} = \frac{Tr^2 - Q\delta r}{i}$ d'où

$$T\left[r^2(M+m) + i\right] = Pi + (M+m)Q\delta r$$

Et enfin $$T = \frac{P\frac{i}{M+m} + Q\delta r}{r^2 + \frac{i}{M+m}} \quad (5)$$

Mise en évidence de $\frac{dv}{dt}$ - On a : $\frac{dv}{dt} = \frac{Tr^2 - Q\delta r}{i}$

en remplaçant T par l'expression précédent il vient :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{r^2\left[P\frac{i}{M+m} + Q\delta r\right]}{i\left(r^2 + \frac{i}{M+m}\right)} - \frac{Q\delta r}{i} =$$

$$= \frac{r^2\left[P\frac{i}{M+m} + Q\delta r\right] - Q\delta r\left(r^2 + \frac{i}{M+m}\right)}{i\left(r^2 + \frac{i}{M+m}\right)}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\frac{i}{M+m}\left[Pr^2 - Q\delta r\right]}{i\left(r^2 + \frac{i}{M+m}\right)} = \text{Enfin} \quad \frac{Pr^2 - Q\delta r}{(M+m)\left(r^2 + \frac{i}{M+m}\right)} \quad (6)$$

Dans laquelle $i = m\rho^2$

Discussion de la formule (6) Trois cas peuvent se presentent

$$\underbrace{\frac{dv}{dt} = 0}_{\text{Mouvement uniforme}} \qquad \underbrace{\frac{dv}{dt} > 0}_{\text{Mouvement accéléré}} \qquad \underbrace{\frac{dv}{dt} < 0}_{\text{Mouvement retardé}}$$

La formule (6) montrent que ces trois cas se présentent quand.

$$P = Q\frac{\delta}{r} \qquad P > Q\frac{\delta}{r} \qquad P < Q\frac{\delta}{r}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 763

Ce qu'on savait déjà — D'ailleurs dans les deux derniers cas P étant supposé constant, $\frac{dv}{dt}$ l'est également, donc le mouvement est uniformément varié, il est donc facile d'en trouver les lois par deux intégrations successives.

— Dans le 1er cas du mouvement uniforme c'est à dire quand $P = Q\frac{\delta}{r}$ l'adhérence $T = P = Q\frac{\delta}{r}$ indépendante de i ce qu'on savait déjà.

— Dans le 2e cas $P > Q\frac{\delta}{r}$ c'est à dire quand le mouvement est uniformément accéléré, T va en croissant avec P et pour une même valeur de P (supposée plus grande que $Q\frac{\delta}{r}$) cette adhérence va en croissant depuis la valeur $Q\frac{\delta}{r}$ répondant à $i = 0$ jusqu'à P répondant à $i = \infty$

On voit donc que la résistance tangentielle due au roulement et appelée adhérence n'est pas constante comme la résistance tangentielle due au glissement en d'autres termes la réaction totale R due au roulement s'incline de plus en plus sur la normale 1° à mesure que croît P (pour une même valeur de i) 2° et pour une même valeur de P) $Q\frac{\delta}{r}$ à mesure que croît i

Cas particuliers — Considérons le cas particulier où la masse m des [illegible] est assez petite pour que son moment d'inertie $i = m\rho^2$ soit négligeable, alors les formules (5) et (6) deviennent :

$$(5)\text{ bis} \qquad T = Q\frac{\delta}{r} \qquad\qquad (6)\text{ bis} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{P - Q\frac{\delta}{r}}{M+m}$$

La formule (5) bis prouve que quelque soit P c'est à dire quelque soit le mouvement uniforme ou varié, l'adhérence est constante, c'est donc bien le fait de la rotation des roues qui rend variable l'adhérence

La 2e formule (6) bis que l'on aurait pu obtenir directement prouve que le mouvement est encore uniforme, accéléré ou retardé selon que $P =, >$ ou $< Q\frac{\delta}{r}$ seulement l'intensité de l'accélération dans les deux derniers cas est plus grande que lorsqu'on tient compte du moment d'inertie des roues.

Supposons maintenant le cas contraire où la masse M du wagon s'annule le système se réduit par conséquent à un seul corps tournant de masse m et les formules (5) et (6) deviennent en y faisant $M = 0$ $Q = q$ poids du rouleau de masse m et en y remplaçant i par sa valeur $m\rho^2$ (ρ rayon de gyration)

$$(5)\text{ ter} \qquad T = \frac{P\rho^2 + q\delta r}{r^2 + \rho^2} \qquad (6)\text{ ter} \quad \frac{dv}{dt} = g\frac{[Pr^2 - q\delta r]}{q(r^2 + \rho^2)}$$

Le mouvement est uniforme, uniformément accéléré, uniformément retardé selon que l'on a $\frac{dv}{dt} = 0$ $\qquad \frac{dv}{dt} > 0$ $\qquad \frac{dv}{dt} < 0$

Ce qui donne les conditions

$$P = q\frac{\delta}{r} \qquad\qquad P > q\frac{\delta}{r} \qquad\qquad P < q\frac{\delta}{r},$$

Considérons ce dernier cas du mouvement uniformément varié et supposons que $P = 0$, en d'autres termes soit un cylindre ou une sphère animé d'une certaine vitesse initiale, placée sur un plan horizontal, elle n'est sollicitée par aucune force et l'on se propose de trouver les lois du mouvement uniformément retardé qui va se produire : Pour cela il suffit d'introduire la supposition $P = 0$ dans les équations (5) ter (6) ter, elles deviennent :

$$(5)\text{ quater} \quad T = \frac{q\delta r}{r^2 + \rho^2} \qquad\qquad \frac{dv}{dt} = -g\frac{\delta r}{r^2+\rho^2} \quad (6)\text{ quater}$$

La 1ère donne la valeur de l'adhérence dans ce cas.

De la seconde on déduit pour les lois du mouvement cherché par deux intégrations successives :

$$v = v_0 - g\frac{\delta r}{r^2+\rho^2}\, t \qquad (7)$$

$$x = v_0 t - g\frac{\delta r}{r^2+\rho^2}\cdot\frac{t^2}{2} \qquad (8)$$

Le système s'arrêtera donc pour $v = 0$ c'est-à-dire au bout du temps.

$$t = \frac{v_0}{g}\left[\frac{r^2+\rho^2}{\delta r}\right] \qquad (9)$$

après avoir parcouru un espace qu'on obtiendra en remplaçant t par la valeur précédente dans (8). On aura :

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left[\frac{r^2+\rho^2}{\delta r} - \frac{1}{2}\frac{\rho^2+r^2}{\delta r}\right] = \frac{v_0^2}{2g}\left[\frac{\rho^2+r^2}{\delta r}\right] \qquad (10)$$

C. Applications. Supposons qu'il s'agisse d'un cylindre de rayon r alors le carré du rayon de giration : $\rho^2 = \frac{r^2}{2}$, les formules (9) et (10) donnent alors :

$$t = \frac{3}{2}\cdot\frac{v_0}{g}\cdot\frac{r}{\delta} \qquad\qquad x = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{\delta}$$

S'il s'agit d'une sphère de rayon r : $\rho^2 = \frac{2}{5}r^2$, les formules (9) et (10) donnent dans ce cas

$$t = \frac{3}{2}\cdot\frac{v_0}{g}\cdot\frac{r}{\delta} \qquad\qquad x = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{r}{\delta}$$

Nous venons de traiter l'étude du mouvement varié d'un corps roulant sur un plan horizontal en partant du principe de d'Alembert et en posant les équations d'équilibre dynamique pour chacun des deux mouvements composants le mouvement réel donné. nous sommes ainsi arrivés aux deux relations fondamentales (1) et (2). Mais remarquons que nous aurions pu nous dispenser d'invoquer le principe de d'Alembert et écrire immédiatement ces relations fondamentales en disant, en se rappelant deux principes connus : l'équation différentielle du mouvement de translation est : (1) l'équation différentielle du mouvement relatif de rotation est : (2)

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 763

Enfin au lieu de poser les équations différentielles des deux mouvements composants le mouvement donné, nous aurions pu également résoudre la question en appliquant simplement le théorème des puissances vives, lequel, comme on sait, n'est qu'une déduction de ces équations différentielles.)

Résolvons directement par cette méthode le cas particulier précédent : Un corps rond est lancé en roulant avec la vitesse initiale V_0 sur un plan horizontal. On demande l'espace décrit et la durée du mouvement ?

Il est clair que le corps s'arrêtera quand toute la puissance vive qu'il possède en vertu de son double mouvement de translation et de rotation aura été détruite par la résistance au roulement R du sol.

On aura donc l'égalité

$$\underbrace{\tfrac{1}{2} m v_0^2}_{\text{Puissance vive de translation}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\omega_0^2 m\rho^2}_{\text{Puissance vive de rotation}} = \underbrace{\mathcal{T}.R}_{\text{Travail de la résistance } R}$$

Avec la condition $V_0 = \omega r$

Mais le travail de R égal à la somme des travaux de ses deux composantes normale et tangentielle q et T sera : $\mathcal{T}R = \mathcal{T}q + \mathcal{T}T$

Or $\mathcal{T}.T = 0$ En effet le mouvement élémentaire du corps est une rotation instantanée $d\alpha$ autour du contact A. Donc le travail élémentaire correspondant à $\mathcal{T}.T$ de la force T qui passe constamment par le point A est constamment nul, il en est donc de même de son travail total, on a donc : $\mathcal{T}.T = 0$ — Il reste à apprécier le travail $\mathcal{T}q$ de la composante normale. Or pour le déplacement élémentaire $d\alpha$ autour du point A, le travail de q sera

$$d\mathcal{T}q = \underbrace{q\,f}_{\text{moment}} \cdot \underbrace{d\alpha}_{\text{Déviation angulaire}}$$

Mais si dx représente le déplacement du centre du corps répondant à la rotation $d\alpha$ autour du point A on a évidemment

$$dx = r\,d\alpha \quad \text{d'où} \quad d\alpha = \frac{x}{r}$$

Par suite. $\qquad d\mathcal{T}.q = q\,\dfrac{f}{r}.dx$

Par suite si nous désignons par x le chemin total décrit par le centre jusqu'à l'arrêt on aura pour le travail total de q et par suite pour le travail total cherché de R $\qquad \mathcal{T}.R = \mathcal{T}.q = q\,\dfrac{f}{r}.x$

Nous avons donc en définitive la relation.

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 m\rho^2 = q\,\frac{f}{r}.x = mg\,\frac{f}{r}\,x$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

Remplaçant ω_0 par sa valeur en fonction de v_0 et mettant en facteur, on a :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right) = m g \frac{\delta}{r} x \qquad \text{d'où :}$$

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{r^2+\rho^2}{r^2} \cdot \frac{r}{\delta} = \frac{v_0^2}{2g} \left[\frac{r^2+\rho^2}{r\delta}\right]$$ résultat trouvé précédemment.

D'ailleurs cet espace x est parcouru par le centre d'un mouvement uniformément retardé or on sait que dans ce cas il est le même que celui qui serait parcouru d'un mouvement uniforme par un mobile ayant pour vitesse la moyenne des vitesses extrêmes qui est $\frac{v_0}{2}$. On a donc pour déterminer t la relation

$$x = \frac{v_0}{2} t \qquad \text{d'où } t = \frac{2x}{v_0}$$

dans laquelle il suffit de remplacer x par la valeur trouvée précédemment, on a ainsi :

$$t = \frac{v_0}{g} \left[\frac{r^2+\rho^2}{\delta r}\right]$$ comme plus haut.

Remarque : Si nous supposons que ce même corps placé sur le même plan horizontal avec la même vitesse initiale v_0 glisse au lieu de rouler et si nous admettions que la résistance au glissement soit précisément égale à l'adhérence $q\frac{\delta}{r}$, le corps s'arrêterait après avoir parcouru un espace x donné par la relation

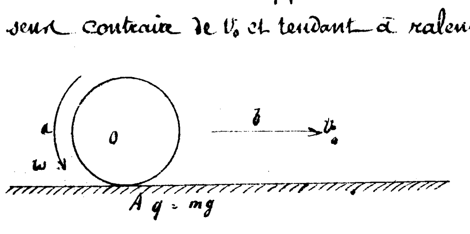
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g \frac{\delta}{r} x$$

$$\text{d'où } \quad x = \frac{v_0^2}{2g} \frac{r^2}{\delta r} \quad < \frac{v_0^2}{2g}\left[\frac{r^2+\rho^2}{\delta r}\right]$$ (relatif au cas du roulement)

ce qui se comprend bien, car dans le cas du roulement la puissance vive initiale est plus considérable que dans le cas de simple glissement, de toute la puissance vive due à la rotation relative du corps autour de son axe.

Des effets dans le jeu de billard.

Nous avons dans le cas particulier précédent supposé une sphère roulant sur un plan dans le sens nécessaire à la translation. Supposons actuellement une sphère dont le sens de la rotation soit précisément inverse de celui nécessaire à la translation, en d'autres termes supposons que le sens de la translation et de la rotation initiale de la bille soient ceux qu'indiquent les flèches b et a, c'est ce qui se produit lorsque sur un billard on veut faire un effet dit rétrograde ou rétrofuge. Au point de contact A va se développer dans ce cas, une résistance de frottement fq ou fmg en sens contraire de v_0 et tendant à ralentir à la fois le mouvement de translation du centre O, et le mouvement relatif de rotation autour de ce point.



Les équations différentielles de ces deux mouvements retardés seront :

1° Pour la translation : $\frac{dv}{dt} = -f\frac{mg}{m}$ 2° Pour la rotation : $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{fmgr}{m\rho^2}$

(Le carré de rayon de gyration est égal dans le cas supposé d'une sphère à $\frac{2}{5}r^2$

Par suite les deux relations précédentes deviennent

$$\frac{dv}{dt} = -fg \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{5}{2}\frac{fg}{r}$$

Intégrant ces deux équations on trouve :

$$v = v_0 - fgt \qquad \omega = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{fg}{r}.t$$

v_0 et ω_0 représentant les vitesses initiales de v et de ω

Or v s'annule pour $t = \frac{v_0}{fg}$ et ω pour $t = \frac{2}{5}\frac{\omega_0 r}{fg}$

il en résulte que si nous supposons que les vitesses linéaires et angulaires initiales v_0 et ω_0 sont liées par la relation $v_0 = \omega_0 r$

la vitesse de rotation ω s'annulera la première, mais comme à cet instant le glissement de la bille sur le billard ne cesse pas d'exister cette vitesse angulaire ω qui s'est annulée la 1ère devient négative et augmente de plus en plus en valeur absolue pendant que v continue à décroître, il arrive donc au bout de quelque temps que l'on a :

$$v + r\omega = 0 \text{ ou } v_0 - fgt + r\omega_0 - \frac{5}{2}fgt = 0$$

D'où $$t = \frac{2}{7}\frac{v_0 + r\omega_0}{fg}$$

A cet instant le frottement n'agit plus, la bille roule uniformément sur ce billard. Cette valeur de t où ce phénomène se produit $= \frac{2}{7}\frac{v_0 + r\omega_0}{fg}$ est comprise entre les valeurs

$$t = \frac{v_0}{fg} \qquad t = \frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{fg}$$

pour lesquelles on a : $v = 0$ $\omega = 0$

Si comme nous l'avons supposé $\frac{v_0}{fg}$ est plus grand que $\frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{fg}$, ω s'annulera avant v et le roulement qui succèdera au glissement se fera dans le sens de la vitesse v_0. Si au contraire $\frac{v_0}{fg}$ est plus petit que $\frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{fg}$ v s'annulera avant ω et la bille roulera en revenant vers son point de départ. Enfin si $\frac{v_0}{fg} = \frac{2}{5}\frac{r\omega_0}{fg}$ v et ω s'annuleront en même temps et la bille restera sur place.

Dans le cas général où l'axe autour duquel s'effectue la rotation initiale de la bille n'est pas perpendiculaire à la direction du mouvement de son centre, le frottement qu'elle éprouve change à chaque instant la direction de ce dernier mouvement c'est à dire que la bille se meut en ligne courbe.

C'est ainsi qu'on peut se rendre compte des effets du jeu de billard. (Pour plus de détails voir Coriolis. Des effets du jeu de billard)

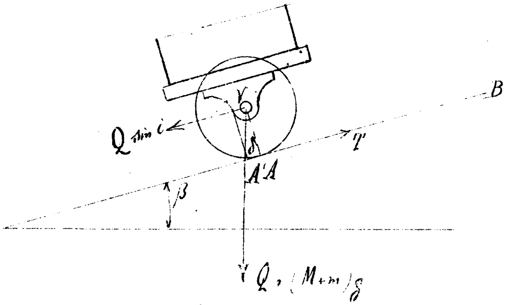
Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 56 VIR 70-3

Art III – Étude du roulement uniforme ou varié d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan incliné.

Dans l'article précédent nous avons étudié le mouvement d'un wagon sur un plan horizontal sous l'action d'une force motrice P et de la résistance totale R due au roulement et nous avons trouvé dans ce cas pour expression de l'adhérence et de l'accélération linéaire du centre des roues.

$$(5)\quad T = \frac{P\frac{i}{M+m} + Q\delta r}{r^2 + \frac{i}{M+m}} \qquad (6)\quad \frac{dv}{dt} = \frac{Pr^2 - Q\delta r}{(M+m)\left[r^2 + \frac{i}{M+m}\right]}$$

Il s'agit actuellement d'étudier le mouvement du même wagon sur un plan incliné sous l'action de son propre poids seulement.



Pour cela il suffira de remplacer dans les formules précédentes, l'effort moteur P par Q sin β composante du poids Q suivant le plan incliné qui est ici la seule force motrice.

D'ailleurs Q qui était la valeur de la composante normale N de la réaction totale R du sol dans le cas précédent, doit être remplacé ici par Q cos β. Les formules précédentes deviennent dès lors :

$$(5)\quad T = \frac{Q\left[\sin\beta \frac{i}{M+m} + \cos\beta\, \delta r\right]}{r^2 + \frac{i}{M+m}} \qquad (6)\quad \frac{dv}{dt} = \frac{Q\left[\sin\beta\, r^2 - \cos\beta\, \delta r\right]}{(M+m)\left(r^2 + \frac{i}{M+m}\right)}$$

Discussion de la formule (6).

$\frac{dv}{dt} = 0$	> 0	< 0
mouvement uniforme	uniformément accéléré	uniformément retardé

selon qu'on a

$\operatorname{tg}\beta = \frac{\delta}{r}$	$\operatorname{tg}\beta > \frac{\delta}{r}$	$\operatorname{tg}\beta < \frac{\delta}{r}$

Discussion de la formule (5). Elle fait voir que l'adhérence T dans le cas du mouvement uniforme c'est-à-dire pour $\operatorname{tg}\beta = \frac{\delta}{r}$ est indépendante de i et égale constamment à

$$T = Q\cos\beta\,\frac{\delta}{r}$$

Dans le second cas ou $\operatorname{tg}\beta > \frac{\delta}{r}$ (mouvement uniformément accéléré) T va en croissant avec Q et pour une même valeur de Q cette adhérence va en croissant depuis $T = Q\cos\beta\frac{\delta}{r}$ répondant à $i = 0$ jusqu'à $T = Q\cos\beta$ répondant à $i = \infty$

Cas particuliers. – Supposons la masse m des roues assez faible pour que son moment

moment d'inertie $i = 0$. les formules precedentes deviendront.

$$(5)_{bis} \quad T = Q \cos\beta \frac{\delta}{r} \qquad (6)_{bis} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{Q\sin\beta - Q\cos\beta\frac{\delta}{r}}{M+m}$$

que l'on pourrait poser immediatement

Dans le cas contraire où $M = 0$ c'est à dire où le système se réduit au poids $q = mg$ des roues les formules deviennent en y faisant $M = 0$ et y remplaçant i par sa valeur $m\rho^2$ (ρ rayon de gyration)

$$T = \frac{mg\left[\sin\beta\,\rho^2 + \cos\beta\,\delta r\right]}{r^2+\rho^2} \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{g\left[\sin\beta\, r^2 - \cos\beta\,\delta r\right]}{r^2+\rho^2}$$

Ou bien

$$(5)_{ter} \quad T = mg\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left[\sin\beta\frac{\rho^2}{r^2} + \cos\beta\frac{\delta}{r}\right] \quad \frac{dv}{dt} = g\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left[\sin\beta - \cos\beta\frac{\delta}{r}\right] \quad (6)_{ter}$$

Discussion – Pour que le mouvement puisse se produire, il faut que

$$\frac{dv}{dt} \gtreqless 0$$

c'est à dire qu'il faut qu'on ait: $\sin\beta \gtreqless \cos\beta\frac{\delta}{r}$ d'où $\operatorname{tg}\beta \gtreqless \frac{\delta}{r}$

En second lieu pour que le mouvement soit un roulement simple il faut que la Composante tangentielle du roulement ou l'adhérence T soit moindre que la composante tangentielle du glissement $fq\cos\beta$ d'où la Condition

$$mg\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left[\sin\beta\frac{\rho^2}{r^2} + \cos\beta\frac{\delta}{r}\right] < f\,mg\cos\beta$$

Divisant les deux membres par $mg\cos\beta$, il vient.

$$\frac{r^2}{r^2+\rho^2}\left[\operatorname{tg}\beta\frac{\rho^2}{r^2} + \cos\beta\frac{\delta}{r}\right] < f$$

D'où

$$\operatorname{tg}\beta\frac{\rho^2}{r^2} < f\frac{r^2+\rho^2}{r^2} - \frac{\delta}{r}$$

Et enfin

$$\operatorname{tg}\beta < \frac{f(r^2+\rho^2) - \delta r}{\rho^2}$$

Ainsi pour que le mouvement puisse se produire et de plus pour que le mouvement soit un roulement simple il faut que $\operatorname{tg}\beta$ soit Compris entre les Deux limites.

$$\frac{\delta}{r} < \operatorname{tg}\beta < \frac{f(r^2+\rho^2) - \delta r}{\rho^2}$$

Applications – Supposons qu'il s'agisse d'un rouleau Cylindrique alors $\rho^2 = \frac{r^2}{2}$ et l'inegalité précédente devient:

$$\frac{\delta}{r} < \operatorname{tg}\beta < 3f - 2\frac{\delta}{r}$$

Ainsi pour qu'il y ait roulement il faut en négligeant $\frac{\delta}{r}$ toujours très petit, que $\operatorname{tg}\beta$ soit plus petit que $3f$

$$\text{si } \operatorname{tg}\beta > 3f$$

il y a glissement

Quant aux expressions de l'adhérence et de l'accélération dans ce cas elles sont en remplaçant ρ^2 par $\frac{r^2}{2}$ dans $(5)_{ter}$ et $(6)_{ter}$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 763

$T = \frac{1}{3} mg \left[\sin\beta + 2\cos\beta \frac{\delta}{r}\right]$ ou approximativement $T = \frac{mg\sin\beta}{3}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \left[\sin\beta - \cos\beta\frac{\delta}{r}\right]$ ou approximativement $\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin\beta$

Dans le cas d'une sphère $\rho^2 = \frac{2}{5} r^2$ et l'inégalité devient alors

$$\frac{\delta}{r} < tg\,\beta < \frac{7}{2} f - \frac{7}{2}\frac{\delta}{r}$$

Ainsi pour qu'il y ait roulement, il faut en négligeant $\frac{\delta}{r}$ que $tg\,\beta$ soit $< \frac{7}{2} f$ — si $tg\,\beta > \frac{7}{2} f$ il y a glissement.

Quant aux expressions de l'adhérence et de l'accélération, elles seront :

$T = \frac{2}{7} mg \left[\sin\beta + \frac{5}{2}\cos\beta\frac{\delta}{r}\right]$ ou approximativement $T = \frac{2}{7} mg \sin\beta$

$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7} g \left[\sin\beta - \cos\beta\frac{\delta}{r}\right]$ ou approximativement $\frac{dv}{dt} = \frac{5}{7} g \sin\beta$

Reprenons le cas d'un rouleau cylindrique nous venons de voir que son accélération avait pour expression approximative.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin\beta$$

Les lois de son mouvement descendant seront donc par deux intégrations successives :

$$v = v_0 + \frac{2}{3} g \sin\beta\, t$$

$$x = v_0 t + \frac{2}{3} g \sin\beta \frac{t^2}{2}$$

On en déduit en éliminant le temps t :

$v^2 - v_0^2 = \frac{4}{3} g \sin i\ x$ et si l'on suppose $v_0 = 0$ il vient :

$$v^2 = \frac{4}{3} g \sin i\ x$$

Or sans frottement d'aucune sorte ni roulement on aurait trouvé :

$$v^2 = 2 g \sin i\ x$$

Ainsi le fait du roulement diminue la vitesse du corps dans son mouvement descendant.

Si je considère actuellement le mouvement ascendant de ce cylindre posé au bas du plan incliné avec une vitesse initiale v_0, les équations de son mouvement seront les mêmes que les précédentes sauf le signe de l'accélération qui devient négative et on en déduira : $v^2 = v_0^2 - \frac{4}{3} \sin i\ x$

Le corps s'arrêtera donc pour $v = 0$ après s'être élevé verticalement sur le plan incliné à une hauteur $x \sin i = \frac{3}{2}\frac{v_0^2}{2g}$

Or si le corps au lieu de s'élever en roulant, se fut élevé en simple translation sans frottement on aurait trouvé :

$$x \sin i = \frac{v_0^2}{2g}$$

Il en résulte que le fait du roulement fait que le corps s'élève plus haut que la hauteur génératrice $\frac{v_0^2}{2g}$ de la vitesse v_0

Ce fait qui peut paraître paradoxal au 1er abord est très facile à comprendre. En effet sans rotation la puissance vive initiale du corps est simplement $\frac{mv_0^2}{2}$ tandis que s'il roule, sa puissance vive initiale est $\frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_0^2 m\rho^2$ plus grande que la puissance vive précédente de toute celle qui répond au mouvement de rotation relatif du corps autour de son centre, il doit donc nécessairement s'élever plus haut, le travail répondant à cette élévation étant précisément égal à la puissance vive initiale.

On comprend tout aussi bien que dans le mouvement descendant la vitesse au bas du plan incliné soit moindre dans le cas du roulement que dans le cas de l'absence de roulement. En effet dans le cas du roulement une partie du travail que le corps emmagasine en tombant se transforme en puissance vive de rotation, tandis que sans rotation ce même travail se transforme entièrement en puissance vive de translation.

Chapitre III.

Frottement de roulement et de glissement

Transition. — Nous avons étudié séparément 1° la résistance due au glissement (Ch. Ier) 2° la résistance due au roulement (Ch. II) mais le plus souvent ces deux résistances se manifestent ensemble dans le même organisme, et leurs actions retardatrices s'ajoutent pour diminuer l'intensité du mouvement.

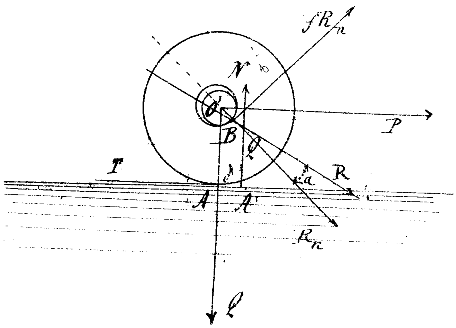
Ainsi dans les engrenages par exemple, il y a à la fois glissement et roulement mais la résistance au roulement dans ce cas étant négligeable, relativement à la résistance de frottement, on n'en tient pas compte dans le calcul ainsi que nous l'avons vu et c'est à cause de cela que nous avons placé cette question dans les applications du frottement de glissement simple.

De même dans le mouvement d'un wagon ou d'une voiture, non seulement il y a frottement de roulement, mais il y a aussi frottement de glissement des essieux dans leurs boîtes à graisse.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3

Nous voulons dans ce chapitre indiquer par quelques exemples la méthode à suivre pour trouver le rapport entre la puissance et la résistance en tenant compte à la fois de ces deux espèces de résistances.

Art 1er. _ Du frottement mixte de roulement et de glissement dans les roues de voiture a essieu fixe 1° sur un plan horizontal 2° sur un plan incliné _ Tirage des voitures _ Adhérence dans les locomotives _ Travail d'une locomotive remorquant un train (Dans toute cette étude on suppose le mouvement uniforme).



1° Déplacement sur un plan horizontal

Considérons une voiture à deux roues reposant sur un plan horizontal. Soit Q le poids de toute la voiture appliqué au centre O' de la fusée, P l'effort moteur que nous considérons comme appliqué au centre O' de la fusée, par exemple. On demande une relation entre P et Q?

Si on néglige le frottement de glissement qui se developpe en B (frottement des essieux des roues dans leurs boites à graisse, il n'y a à tenir compte que de la résistance au roulement R que nous pouvons décomposer en ses composantes normale et tangentielle N et T (T, adhérence) Les forces P, Q, N, T qui agissent sur la roue sont en équilibre et on aura en posant, ainsi qu'il a été dit l'équation des moments par rapport à l'axe instantané de rotation projeté en A :

$$Pr = Q\delta \text{ à cause de } Q = N \text{ d'où } P = \frac{Q}{r}\delta$$

c'est à dire que le tirage (P est ce qu'on nomme le tirage) est :

1° proportionnel à la charge Q, poids de toute la voiture.

2° id à la quantité δ caractéristique du frottement de roulement

3° En raison inverse de r (rayon des roues de la voiture)

Donc, conséquence pratique ; il y a avantage au point de vue du frottement de roulement à augmenter le rayon des roues de la voiture, on diminue ainsi le tirage (force nécessaire au roulement de la voiture)

Remarque. _ Le résultat précédent aurait encore été fourni en prenant pour axe des moments l'axe projeté en O'

En effet, l'équation des moments autour de ce point est :

$$Tr - N\delta = 0$$

C'est la relation d'équilibre, du mouvement relatif de rotation de la roue autour de son centre O'

Or si on projette actuellement sur l'horizontale, j'ai la relation $T = P$ c'est la relation d'équilibre du mouvement de translation du système. — Enfin si je projette sur la verticale j'ai la condition $N = Q$ — Par suite la 1ère égalité devient en remplaçant :

$$Pr - Q\delta = 0 \text{ ou } P = \frac{Q}{r}\delta \text{ comme précédemment}$$

———— Reprenons actuellement la même question en tenant compte cette fois des 2 frottements, de glissement et de roulement et cherchons encore une relation entre P et Q.

Pour cela 1° Considérons d'abord l'équilibre de la roue. — Elle est soumise, à la résistance de roulement dont les composantes sont N et T, au poids Q de la charge enfin à l'action de la fusée fixe sur les parois de la boite à graisse, cette action qui serait normale aux surfaces frottantes et par suite passerait par le point O s'il n'y avait pas de frottement s'incline puisqu'il y a frottement de l'angle α sur cette normale aux surfaces apparentes en sens inverse du mouvement relatif de la roue par rapport à la fusée fixe — Remplaçons cette action par ses composantes normale et tangentielle R_n et $f R_n$

L'équation d'équilibre du mouvement relatif de la roue autour de son centre sera celle des moments autour de l'axe projeté en O' :

$$(1) \qquad Tr - N\delta - f R_n \rho = 0 \quad (\rho \text{ rayon de l'œil du moyeu})$$

2° Je considère actuellement l'équilibre de la caisse de la voiture. Elle est soumise au tirage P, au poids Q de la charge et à la réaction R de la roue sur la fusée fixée à cette caisse ces 3 forces étant en équilibre, l'une d'elles R est égale et directement opposée à la résultante des 2 autres P et Q.

Ces 2 dernières étant rectangulaires, on aura :

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

Mais $\qquad R^2 = R_n^2 + f^2 R_n^2$

Donc $\qquad R_n^2 (1 + f^2) = P^2 + Q^2$

ou :

$$R_n^2 = \frac{P^2+Q^2}{1+f^2} = \frac{1}{1+f^2}(P^2+Q^2)$$

D'où $\qquad R_n = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{P^2+Q^2}$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70 3

Et enfin (2) $f R_n = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{P^2+Q^2} = f_1 \sqrt{P^2+Q^2}$

3°. Enfin si je considère l'équilibre de l'ensemble de la voiture (roues et caisse) comme elle ne peut se déplacer qu'horizontalement il n'y a qu'une seule relation d'équilibre celle de projection sur l'horizontale, or les forces agissantes sont P, Q, N, T plus les actions au contact de la fusée et de la boite à graisse, mais ces actions étant égales et directement opposées se détruisent dans l'équation de projection qui est dès lors.

$$(3) \qquad T = P$$

avec la condition de projection sur la verticale.

$$(4) \qquad N = Q$$

Remplaçant actuellement dans (1) T, N, $f R_n$ par leurs valeurs (2) (3) et (4), elle devient.

$$Pr - Q\delta - f_1 \rho \sqrt{P^2+Q^2} = 0$$

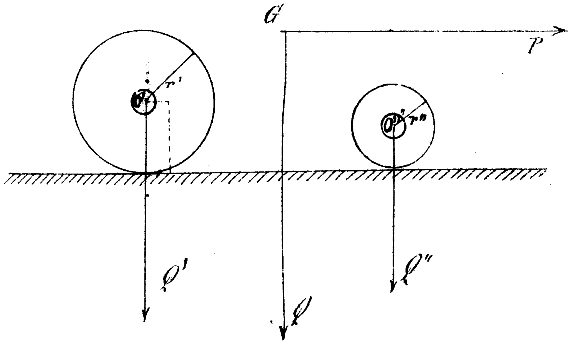
2° Mais l'effort P nécessaire au déplacement de la voiture étant très faible relativement à la charge (voir l'exemple numérique donné plus haut) on peut négliger P^2 devant Q^2 et on a :

$$Pr - Q\delta - f_1 \rho Q = 0$$

d'où

$$P = \frac{Q}{r}\delta + f_1 Q \frac{\rho}{r}$$

On voit donc : que dans le cas où on tient compte des 2 espèces de frottement l'expression du tirage se compose de 2 termes, un terme $\frac{Q}{r}\delta$ relatif au frottement de roulement et un terme $f_1 Q \frac{\rho}{r}$ relatif au frottement de glissement.



Le tirage est d'autant plus faible que ρ est plus faible, il faut donc diminuer ρ autant que possible en pratique.

Supposons maintenant le cas d'une voiture à 4 roues.

Soit G le centre de gravité de la charge, le système est soumis à la charge Q appliquée en G, je la décompose en composantes parallèles Q' et Q'' appliquées aux fusées O' et O''. La question est de déterminer encore le tirage P dans ce cas en tenant compte du frottement de roulement et du frottement de glissement dans les roues de devant et de derrière.

Il est clair que le tirage P devant vaincre la résistance totale doit être égal à la résistance qu'opposent les roues de derrière et les roues de devant. Cela résistance qu'opposent les roues de derrière, se compose en vertu de ce qui précède de 2 termes l'un $\frac{Q'}{r'}\delta$ relatif au frottement de roulement, l'autre $f_1 Q\frac{\rho'}{r'}$ du frottement de glissement cette résistance est donc ; $\frac{Q'}{r'}\delta + f_1 Q'\frac{\rho'}{r'}$. De même la résistance ~~au mouvement~~ inversement opposée par les roues de devant est $\frac{Q''}{r''}\delta + f_1 Q''\frac{\rho''}{r''}$. On aura donc pour le tirage total :

$$P = \frac{Q'}{r'}\delta + f_1 Q'\frac{\rho'}{r'} + \frac{Q''}{r''}\delta + f_1 Q''\frac{\rho''}{r''} =$$
$$= \delta\left(\frac{Q'}{r'} + \frac{Q''}{r''}\right) + f_1\left(Q'\frac{\rho'}{r'} + Q''\frac{\rho''}{r''}\right).$$

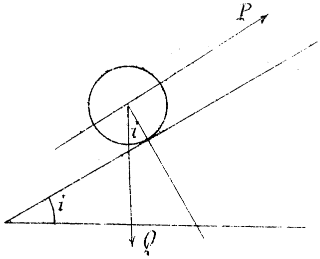
Dans les wagons de chemins de fer, la disposition n'est pas tout à fait la même, les roues de devant et de derrière sont égales, de plus la voiture proprement dite repose sur les essieux qui font corps avec les roues et par suite tournent avec elles — Malgré cela, les résultats précédents sont évidemment applicables en introduisant les conditions $\begin{cases} r' = r'' \\ \rho' = \rho'' \end{cases}$ — Par suite, la relation précédente devient : $P = \delta\frac{Q}{r'} + f_1 Q\frac{\rho'}{r'}$

2° Déplacement sur un plan incliné

Supposons maintenant que la voiture au lieu de se mouvoir sur un plan horizontal, remonte un plan incliné d'inclinaison i

Si la voiture est à 2 roues

Le tirage P doit vaincre comme précédemment les résistances de roulement et de glissement, mais de plus surmonter l'action de la pesanteur



que je désigne par Q'' — Si donc je désigne par Q' la pression normale au plan incliné j'aurai dans ce cas :

$$P = Q'\frac{\delta}{r} + f_1 Q'\frac{\rho}{r} + Q''$$

mais Q' pression normale sur le plan incliné $= Q\cos i$

et Q'' composante tangentielle de $Q = Q\sin i$

En remplaçant Q' et Q'' par leurs valeurs on a :

$$P = Q\cos i\left(\frac{\delta}{r} + f_1\frac{\rho}{r}\right) + Q\sin i$$

Si la voiture est à 4 roues une décomposition analogue à la précédente conduira à l'expression du tirage : $P = Q'\cos i\left(\frac{\delta}{r'} + f_1\frac{\rho'}{r'}\right) + Q'\sin i + Q''\cos i\left(\frac{\delta}{r''} + f_1\frac{\rho''}{r''}\right) + Q''\sin i$ (Q' Q'' composantes parallèles de Q) D'ailleurs ces formules s'appliqueraient au cas des wagons de chemin de fer en introduisant les hypothèses indiquées précédemment ; c'est à dire $r' = r''$, $\rho' = \rho''$

De l'adhérence dans les locomotives

Considérons une locomotive remorquant un train. Il est évident que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 34 VIII 70 3

si le train oppose une très grande résistance au mouvement, la machine va patiner sur place, phénomène qu'on peut observer au départ d'un train lorsqu'on donne trop brusquement la vapeur ; le sol exerce alors en A et A'. sur les roues motrices, les réactions R et R' inclinées de l'angle de frottement α sur la normale dans le sens qu'indiquent les flèches. Si nous considérons les composantes tangentielles de ces réactions :

$$R_t = f R_n \text{ et } R'_t = f R'_n$$

Leur somme constituera une force horizontale tendant à entraîner le train, Cette somme :

$$f(R_n + R'_n)$$

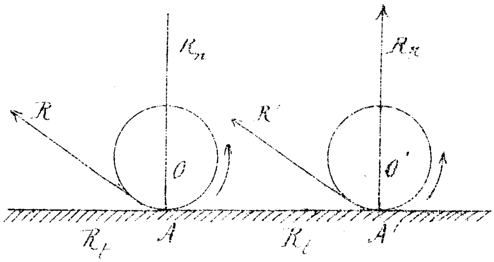
deviendra en remplaçant $R_n + R'_n$ par sa valeur le poids Q_a de la locomotive

$$f\, Q_a$$

Ce qui montre que la force tendant à entraîner le train est proportionnelle au poids Q_a de la locomotive.

Or pour qu'il y ait entraînement, il faut que Q_a, soit tel que la force de traction $f Q_a$ soit précisément égale en intensité, à la somme de toutes les résistances dues au train remorqué.

Ce poids Q_a que doit avoir la locomotive pour déterminer l'entraînement est ce qu'on nomme le poids adhérent.



Deux questions se présentent donc :

1° Calculer le poids adhérent Q_a de la locomotive nécessaire à l'entraînement du poids Q de l'ensemble des wagons.

2° Calculer l'effort que doit développer la locomotive pour déterminer le mouvement.

Pour résoudre la première question, nous remarquerons que la résistance au mouvement due au poids Q_r de l'ensemble des wagons du train se compose des 2 termes :

$$Q_r \frac{\delta}{r} + f_1 Q_r \frac{r'}{r}$$

Le 1er relatif aux résistances de roulement,

le second relatif aux résistances de glissement

(r' rayon des essieux des roues . r rayon de ces roues)

Quant à la résistance offerte par la locomotive.

elle se réduira à la résistance de glissement $f_1 Q_a \frac{r'}{r}$ (r' rayon des essieux des roues de la locomotive R rayon de ces roues) puisque la locomotive patine : les roues tournent mais sans avancer, donc il n'y a pas de résistance de roulement.

Écrivons donc que la force $f Q_a$ qui sollicite le train doit être égale à la somme de toutes les résistances, nous aurons d'après ce que nous venons de dire :

$$f Q_a = f_1 Q_a \frac{\varrho}{R} + Q_r \frac{\delta}{r} + f_1 Q_r \frac{\varrho'}{r}$$

D'où :
$$Q_a = \frac{Q_r\left(\frac{\delta}{r} + f_1 \frac{\varrho'}{r}\right)}{f - f_1 \frac{\varrho}{R}}$$

———— La deuxième question est maintenant toute résolue. Le poids adhérent Q_a de la locomotive nécessaire à l'entraînement de l'ensemble des wagons étant déterminé par la relation précédente, le mouvement va commencer, mais alors la résistance de roulement $Q_a \frac{\delta}{R}$ de la locomotive va entrer en jeu et l'effort P nécessaire à l'entraînement du train sera égal à la somme $f Q_a$ des résistances calculées précédemment augmentée de la résistance au roulement $Q_a \frac{\delta}{R}$ de la locomotive, on aura donc.

$$P = Q_a \frac{\delta}{R} + f Q_a \qquad = Q_a \left(\frac{\delta}{R} + f\right) = Q_r \frac{\left(\frac{\delta}{r} + f_1 \frac{\varrho'}{r}\right)}{f - f_1 \frac{\varrho}{R}} \cdot \left(\frac{\delta}{R} + f\right)$$

Il y a encore à tenir compte d'un élément de plus : comme la vitesse du train est souvent considérable, il faut ajouter à P un terme relatif à la résistance de l'air résistance qui a pour expression $\qquad K A \pi \frac{v^2}{2g}$ (Voir plus loin Résistance des milieux)

Art II. — Du frottement mixte de roulement et de glissement dans le transport sur galets. Frottement des tourillons reposant sur galets croisés, applications à la machine d'Atwood et à la suspension de la grosse cloche de Metz.

Ordinairement pour guider les pièces mobiles d'une machine, on fait usage de galets ronds de petites dimensions qui servent d'intermédiaires pour substituer le roulement au glissement. Les galets peuvent être cylindriques ou coniques. Ils sont en pratique d'un fréquent usage.

Ainsi les extrémités de l'axe de la poulie d'une machine d'Atwood reposent sur 4 galets qui lui donnent une grande mobilité. L'extrémité de la tige du piston d'une machine à vapeur de Maudslay porte un galet qui en roulant dans une rainure longitudinale sert de guide à cette tige, nous avons fait comprendre que cette disposition ne valait rien en pratique.

Les plaques tournantes des chemins de fer reposent sur une série de galets coniques dont les axes sont disposés dans le sens des rayons mais le frottement de glissement des galets sur ces axes peut être évité en disposant convenablement le système, de sorte que l'effort moteur n'a à vaincre ainsi que nous l'avons dit que la résistance au roulement.

La toiture des moulins à vent à l'anglaise tourne tout entière pour orienter les ailes en roulant sur une série de galets disposés circulairement. &c.

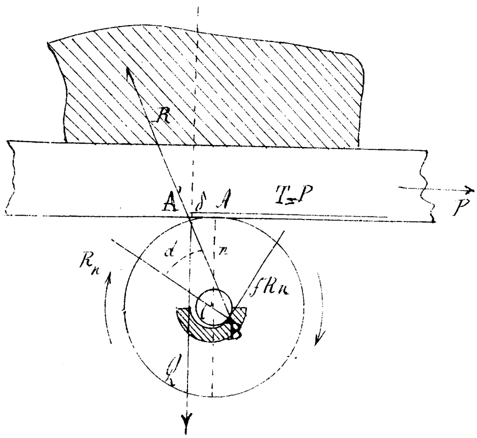
Considerons 2 galets dont les axes sont supportés par des coussinets, ces galets reçoivent une plate forme destinée à supporter les fardeaux

Soit Q le poids total du fardeau et de la charpente superieure (nous negligeons le poids des galets toujours relativement faible par rapport au poids Q) et P l'effort nécessaire au deplacement horizontal uniforme.

Les choses se passeront evidemment au point de vue du frottement comme s'il n'y avait qu'un galet supportant la même charge

La force P doit vaincre la résistance au roulement en A et la résistance au glissement en B.

Les Composantes de la resistance au roulement sont : Q composante normale appliquée en un point A' distant de A de la quantité δ caractéristique du roulement et dans le sens AA', et T composante tangentielle. En B comme il y a frottement de glissement la résultante R des réactions du coussinet sur l'axe s'incline sur la normale de l'angle α égal à l'angle de frottement et en sens inverse du mouvement de l'axe dans son coussinet; soient R_n et fR_n les composantes normale et tangentielle de cette résultante (?)



1° Equilibre du galet. — Les forces auxquelles est soumis le galet sont donc T, Q, R_n, fR_n

Et on aura pour l'équilibre puisqu'il ne peut que tourner autour de l'axe projeté. la relation des moments :

$$T r - Q \delta - fR_n \rho = 0$$

avec la Condition : $$R^2 = T^2 + Q^2$$

ou $$R_n^2 + f^2 R_n^2 = T^2 + Q^2$$

d'où $$R_n^2 = \frac{T^2+Q^2}{1+f^2}$$

Enfin : $$f R_n = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{T^2+Q^2} = \varphi \sqrt{T^2+Q^2}$$

nous pouvons dans cette expression negliger T^2 toujours très faible par rapport à Q^2 donc

$$fR_n = \varphi Q \quad (2)$$

2° Equilibre de la plateforme. — Enfin l'equilibre de la plateforme nous donne $P = T$ (3)

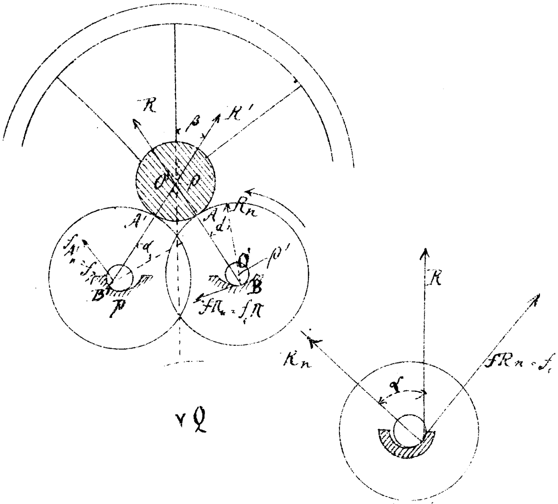
Si donc dans l'équation (1) on remplace T et $f\,R_n$ par leurs valeurs (3) et (2) elle deviendra :

$$Pr - Q\delta - f_1 Q\rho = 0$$

ou

$$P = \frac{Q}{r}\delta + f_1\frac{\rho}{r}Q = Q\left[\frac{\delta}{r} + f_1\frac{\rho}{r}\right]$$

expression composée de 2 termes l'un relatif au frottement de roulement, l'autre au frottement de glissement comme dans le tirage des voitures.



Galets croisés dans la machine d'Atwood

Examinons d'abord ce que serait le frottement si la poulie, au lieu de reposer sur les jantes croisées de 4 roues, reposait par ses tourillons dans des coussinets. Soit Q le poids de la poulie.

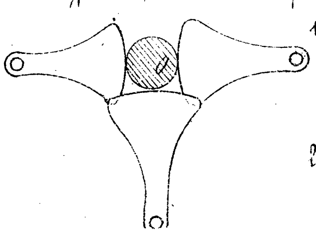
Il est clair que le travail de la réaction totale R = Q pour une déviation angulaire $d\alpha$ se réduit à celui de sa composante tangentielle $fR_n = fR = f_1 Q$ en fonction de R = Q on a donc : $d\mathcal{T} = f_1 R\rho\, d\alpha = f_1 Q\rho\, d\alpha$ (ρ rayon des tourillons)

Étudions maintenant le cas où la poulie repose par son axe sur les jantes croisées de 4 roues. On demande encore le travail absorbé par le frottement quand la poulie tourne de $d\alpha$. Il s'exerce en A et A' un frottement de roulement qu'on néglige vis à vis du frottement de glissement qui se développe en B et B' c'est ce dernier dont on tient compte seulement. (nous négligerons de même le poids des galets).

Équilibre de la poulie. La poulie est soumise au poids Q et aux réactions R et R' des galets, ces réactions sont évidemment égales à cause de la symétrie de la figure, l'équation de projection sur la verticale donne donc :

$$Q = 2R\cos\beta \quad (1)$$

La poulie décrivant l'arc $d\alpha$, les galets vont décrire l'arc $d\alpha\frac{\rho}{r}$ (r rayon des galets) Calculons pour cet angle, le travail de frottement absorbé par O' Or: le travail de R se réduit à celui de $f_1 R$ sa composante tangentielle lequel a pour expression $f_1 R\rho'\, d\alpha\frac{\rho}{r}$



De même le travail absorbé par le frottement dans le second galet est $f_1 R'\rho'\, d\alpha\frac{\rho}{r}$

Dans le travail total absorbé pour l'angle $d\alpha$ est puisque $R = R'$

$$\mathcal{E} = 2 f_1 R \rho' d\alpha \frac{\rho}{r}$$

ou, en vertu de la relation de condition (1)

$$\mathcal{E} = f_1 \frac{Q}{\cos\beta} \rho' \frac{\rho}{r} d\alpha$$

Ce travail de frottement est proportionnel à ρ (diminuer ρ); il est d'autant plus petit que $\cos\beta$ est plus grand, il sera donc minimum pour $\cos\beta = 1$ ou $\beta = 0$ et dans ce cas:

$$\mathcal{E} = f Q \rho \frac{2}{R} d\alpha \quad \mathcal{E} = f_1 Q \rho' \frac{\rho}{r} d\alpha$$

Cette condition $\beta = 0$ est réalisée dans la suspension de la grosse cloche de Metz, dont l'axe de suspension O est supporté par trois secteurs disposés comme l'indique la figure. Les secteurs latéraux n'ont d'autre effet que d'empêcher le déversement latéral de l'axe.

Chapitre IV.

Théorie du frottement des cordes.

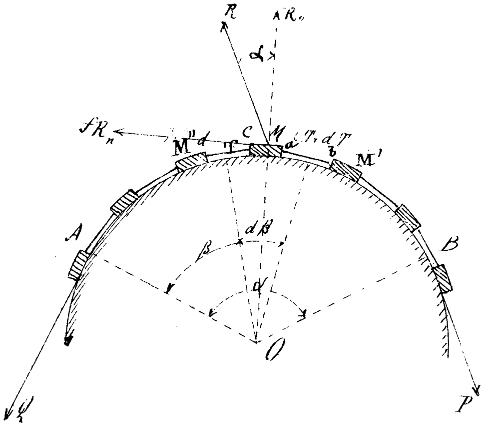
Les cordes peuvent passer sur leurs points d'appui de 2 manières différentes, en glissant ou en roulant. — A chacun de ces genres de mouvement répond une résistance spéciale 1° Résistance de glissement 2° Résistance de roulement ou Raideur des cordes. — Il s'agit d'étudier la nature de ces deux nouvelles résistances et d'en déterminer l'expression analytique.

Art 1er — Résistance de Glissement.

Quand une corde glisse sur un cylindre qu'elle entoure en partie, l'expérience prouve que la puissance est toujours supérieure à la résistance et que la puissance doit être d'autant plus considérable pour vaincre la résistance que l'angle d'enroulement de la corde est plus grand. — On doit conclure de là qu'il se développe un frottement de glissement considérable de la corde sur le cylindre croissant très rapidement avec l'angle d'enroulement. En tenant compte de cette résistance de frottement, nous allons chercher le rapport qui doit exister entre la puissance et la résistance en fonction de l'angle d'enroulement.

Considérons une corde enroulée sur un rouleau et soit α l'angle d'enroulement cherchons une relation entre P, Q et α, à l'instant où le mouvement est sur le point de naître dans le sens de la force mouvante P.

Pour cela considérons la corde comme composée d'une suite de points ou



en éléments matériels reliés entr'eux par des cordons extrêmement flexibles. Il est clair que dans le mouvement général de la Corde chaque élément matériel va frotter sur le cylindre et développer ainsi une certaine résistance et on comprend que la résistance doive augmenter avec le nombre de ces éléments (que nous supposons également espacés) c'est à dire avec l'angle d'enroulement de la Corde.

Nous allons voir que les phénomènes qui se produisent sont encore des conséquences mathématiques des lois de Coulomb.

Considérons l'équilibre de l'élément M de la Corde : il reçoit du tambour fixe sur lequel il glisse une réaction inclinée de l'angle α de frottement sur la normale soient R_n et fR_n, les composantes normale et tangentielle de cette réaction, l'élément M est de plus soumis à la tension T de cd et à la tension T+dT du brin ab. L'élément M est en équilibre sous l'action de ces forces, on a donc en projetant sur l'horizontale

$$f R_n + T \cos\frac{d\beta}{2} = (T+dT)\cos\frac{d\beta}{2}.$$

ou $$f R_n = dT \cos\frac{d\beta}{2}. \quad (1)$$

L'équation de projection sur la verticale donnera pour R_n

$$R_n = T \sin\frac{d\beta}{2} + (T+dT)\sin\frac{d\beta}{2} =$$

$$= (2T + dT)\sin\frac{d\beta}{2} \quad (2)$$

Si on remarque que $d\beta$ est infiniment petit, on voit que $\cos\frac{d\beta}{2}$ tendra vers l'unité et $\sin\frac{d\beta}{2}$ vers arc $\frac{d\beta}{2}$, les formules (1) et (2) deviennent alors :

$$f R_n = dT \quad (3)$$

et $$R_n = (2T + dT)\frac{d\beta}{2} \quad (4)$$

En négligeant dans l'expression (4) l'infiniment petit du second ordre $dT.\frac{d\beta}{2}$ devant l'infiniment du 1er ordre $2T.\frac{d\beta}{2}$ cette expression devient :

$$R_n = 2T.\frac{d\beta}{2} = T d\beta \quad (5)$$

Eliminant R_n entre (3) et (5), il vient en divisant membre à membre :

$$f = \frac{dT}{T.d\beta} = \frac{dT}{T}\cdot\frac{1}{d\beta}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie UPMC Cote : 84 VIR 70 3

D'où : $$\frac{dT}{T} = f\,d\beta$$

En intégrant, il viendra :

$$L.\,T = f\beta + C$$

Déterminons la Constante : pour $\beta = o$ T se confond avec Q, d'où la condition $$L.\,Q = C$$

et par suite $$L.\,T = f\beta + L.\,Q \quad \text{ou}$$

$$L\,T - L\,Q = f\beta$$

$$\text{ou} \quad L.\frac{T}{Q} = f\beta \quad \text{ou} \quad \frac{T}{Q} = e^{f\beta}$$

ou enfin $$T = Q.\,e^{f\beta}$$

relation donnant la tension de la Corde en chacun de ses points répondant aux valeurs successives de β

Si donc nous y faisons $\beta = \alpha$ nous aurons la tension au point B, laquelle est mesurée par P, on aura donc enfin

$$P = Q.\,e^{f\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$$

Si l'enroulement a lieu sur un cylindre on pourra remplacer α par le rapport $\frac{s}{r}$ de l'arc embrassé au rayon du cylindre et l'on aura $$\frac{P}{Q} = e^{f\frac{s}{r}}$$

Pour pouvoir appliquer cette formule, il faut Connaître la valeur de f. Voici quelques résultats donnés par M. Morin.

Courroies ordinaires sur fonte, à sec	$f = 0,28$
Courroies ordinaires sur fonte, humides	$= 0,38$
Courroies sur bois ordinaires	$= 0,47$
Courroies sur bois neuves	$= 0,50$
Cordes de chanvre sur bois	$= 0,50$

Cette formule présente ceci de remarquable que α ou $\frac{s}{r}$ croissant en progression arithmétique, $\frac{P}{Q}$ croit en progression géométrique, le rapport de la puissance à la résistance augmente donc avec une très grande rapidité pour de faibles variations de l'arc d'embrassement. On conclut de là qu'il faut une force énorme pour faire glisser une courroie sur un Cylindre, pour peu qu'on fasse faire à la Courroie 2 ou 3 tours.

Les applications de cette propriété des cordes sont nombreuses et importantes.

Nous en parlerons lorsque nous nous occuperons des applications utiles du frottement. Pour le moment nous nous Contenterons de montrer dans le tableau ci Contre avec quelle rapidité croit le rapport $\frac{P}{Q}$ quand α varie en progression arithmétique.

Tableau donnant quelques résultats de la formule $\frac{P}{Q} = e^{f\alpha}$

Nombre de tours	Rapport $\frac{P}{Q}$ de la puissance à la résistance	
	Bois poli	Bois brut
$\frac{1}{2}$	2.82	4.81
1	7.95	23.90
1 1/2	22.42	111.31
2	63,23	535.47
2 1/2	178.52	2575.80

Art II. – Raideur des Cordes. Considérons une Corde s'enroulant sur une poulie pouvant tourner autour de son axe ; à l'une de ses extrémités est une résistance Q et la Corde est sollicitée à son autre extrémité par la force mouvante P ; le fait expérimental que l'on Constate est le suivant ; la puissance P à developper pour vaincre la résistance Q est toujours plus grande que Q, et si l'on observe de plus près le phénomène, on remarque que du Coté de la force résistante Q, la corde prend une courbure d'un rayon r' plus grand que celui du cylindre ! en sorte que la direction moyenne du brin Correspondant à Q, passe à une distance de l'axe plus grande que le rayon du Cylindre augmenté de celui de la Corde. – C'est précisément ce phénomène physique dû à la raideur de la Corde qui explique que pour l'équilibre de la poulie, il faut que la force P soit plus grande que la force Q. En effet, en prenant les moments des forces autour de l'axe du Cylindre ce qui fera disparaitre le poids de celui ci, on aura en tenant Compte du phénomène que nous venons de décrire

$$Pr = Qr'$$

et Comme r est $< r'$ il faut nécessairement que P soit $> Q$

La différence entre P et Q est ce qu'on nomme la raideur de la Corde. Coulomb chercha expérimentalement l'expression de $(P-Q)$ dans les diverses circonstances qui peuvent se présenter, et il a été conduit à admettre que cette quantité P–Q se compose de 2 parties, l'une indépendante de la tension ou de la charge et que Coulomb a nommée la raideur naturelle, l'autre proportionnelle à la tension et qu'il a nommée pour cette raison la raideur proportionnelle.

D'après cette expérimentation, la raideur de la corde sera donc représentée par une fonction de la forme : $P - Q = \frac{m + nQ}{r}$

r étant le rayon de la poulie augmenté de celui de la corde, m et n sont 2 coefficients déterminés par l'expérience indépendants des quantités Q et r ainsi que de la vitesse du mouvement de la poulie au moins quand les tensions sont un peu fortes.

Ces coefficients varient avec la grosseur et la nature de la corde blanche ou goudronnée, sa sécheresse ou son humidité, son état de vétusté. Voici d'ailleurs des tableaux donnant les valeurs de m et de n, dans les circonstances les plus ordinaires.

Valeurs des Coefficients m et n d'après Coulomb.

Diamètre de la Corde	m	n
	Cordes neuves.	
0m,01	0,0278	0,0012
0,02	0,1112	0,0048
0,03	0,2497	0,0110
0,04	0,4499	0,0195
0,05	0,6951	0,0203
0,08	1,7795	0,0779
	Cordes à demi-usées	
0,01	0,0278	0m,0012
0,02	0,0786	0,0034
0,03	0,1444	0,0063
0,04	0,2224	0,0097
0,05	0,3126	0,0141
0,08	0,6289	0,0275

Si les cordes sont mouillées ou simplement humides, n ne paraît pas changer, mais il n'en est pas de même de m qui augmente notablement.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

Valeur du coefficient variable m.

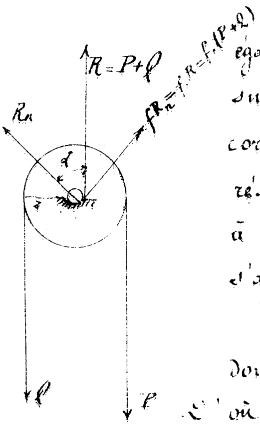
Diamètre de la corde	m — En bon état	m — à demi usée
$0^m,01$	$0^k,0553$	0,0556
0,02	0,2224	0,1572
0,03	0,4995	0,2889
0,04	0,8898	0,4447
0,05	0,3903	0,6253
0,08	3,5543	1,2578

Si les cordes sont goudronnées, les coefficients augmentent encore par l'adjonction de cette pellicule rigide. On peut en juger par le tableau suivant :

Diamètre de la corde	m	n
0,0167	0,0510	0,0031
0,0236	0,1785	0,0062
0,0332	0,2020	0,0123

On a remarqué ainsi que l'indique ces tableaux que lorsque la corde est mouillée, m la raideur naturelle varie et n la raideur proportionnelle reste invariable.

<u>Applications</u> — <u>Équilibre de la poulie en tenant compte du frottement de glissement et de la raideur des cordes.</u>



La réaction du coussinet sur le tourillon est verticale et égale à $R = P+Q$, elle est inclinée de l'angle α sur la normale aux surfaces apparentes. Si nous tenons compte de la raideur de la corde, la poulie est alors soumise à la force mouvante P, à la force résistante Q à la réaction R du coussinet sur le tourillon et enfin à la raideur de la corde $P-Q = \frac{m+nQ}{r}$, résistance passive qui s'ajoute à la résistance utile Q

L'équation des moments autour de l'axe projeté en O, sera donc :

$$Pr = Qr + f_1(P+Q)\rho + m + nQ$$

D'où on conclut le rapport entre P et Q :

$$P(r-f_1\rho) = Q(r+f_1\rho+n) + m$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{(r-f_1\rho)Q} + \frac{r+n+f\rho}{r-f_1\rho}$$

ou encore : $$P = \frac{m}{r-f_1\rho} + \frac{r+n+f_1\rho}{r-f_1\rho}\cdot Q$$

relation qui est de la forme $P = \alpha + \beta Q$.

Si on suppose nuls le frottement et la raideur des cordes on trouve $P = Q$.

<u>On traiterait avec la même facilité l'équilibre du treuil</u>

<u>Équilibre de la moufle en tenant compte du frottement de glissement et de la raideur des cordes.</u>

Dans le cas précédent d'une simple poulie nous avons vu que la relation entre la puissance et la résistance était de la forme.

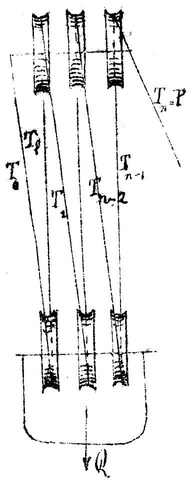
$$P = \alpha + \beta Q$$

$$\alpha = \frac{n}{r - f_1 l} \qquad \beta = \frac{r + n + f_1 l}{r - f_1 l}$$

Supposons actuellement une moufle dont toutes les poulies soient égales, dès lors les quantités α et β seront les mêmes pour chacune d'elles.

Cela posé, en désignant par $T_0\, T_1\, T_2 \dots T_{n-1}$ les tensions des brins et en négligeant leur obliquité la seule relation d'équilibre est évidemment :

$$Q = T_0 + T_1 + T_2 \dots + T_{n-1} = \Sigma T$$



Il reste à exprimer toutes ces tensions en fonction de $T_n = P$ et des résistances dues au glissement et à la raideur des cordes et caractérisées par les constantes α et β

Or, on a généralement :

$$T_n = P = \alpha + \beta T_{n-1}$$

D'où on tire :

$$T_{n-1} = \frac{\overset{T_n}{P} - \alpha}{\beta}$$

Si actuellement nous faisons successivement dans cette expression

$n = n-1 \qquad T_{n-2} = \frac{T_{n-1} - \alpha}{\beta} = \frac{P - \alpha(1+\beta)}{\beta^2}$

$= n-2 \qquad$ Nous aurons $T_{n-3} = \frac{T_{n-2} - \alpha}{\beta} = \frac{P - \alpha(1+\beta+\beta^2)}{\beta^3}$

$= n-3 \qquad T_{n-4} = \frac{T_{n-3} - \alpha}{\beta} = \frac{P - \alpha(1+\beta+\beta^2+\beta^3)}{\beta^4}$

$\dots\dots$

$= 2 \qquad T_1 = \frac{T_2 - \alpha}{\beta} = \frac{P - \alpha(1+\beta+\beta^2 \dots + \beta^{n-2})}{\beta^{n-1}}$

$= 1 \qquad T_0 = \frac{T_1 - \alpha}{\beta} = \frac{P - \alpha(1+\beta+\beta^2 \dots + \beta^{n-1})}{\beta^n}$

Cette dernière valeur de T_0 peut s'écrire :

$$T_0 = \frac{P}{\beta^n} - \frac{\alpha}{\beta^n}\left[\frac{\beta^n-1}{\beta-1}\right] = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{\beta^n}\left[P - \frac{\alpha}{1-\beta}\right]$$

et si nous y faisons successivement $n = 1, 2 \ldots$ nous reproduisons $T_{n-1}, T_{n-2}\, T_0$. En additionnant ces résultats nous aurons :

$$\Sigma\, T = Q = \frac{n\alpha}{1-\beta} + \left[P - \frac{\alpha}{1-\beta}\right]\left[\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} \cdots + \frac{1}{\beta^n}\right] =$$

$$= \frac{n\alpha}{1-\beta} + \left[P - \frac{\alpha}{1-\beta}\right] \cdot \frac{1}{\beta}\left[1 + \frac{1}{\beta} \cdots\cdots + \frac{1}{\beta^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{n\alpha}{1-\beta} + \left[P - \frac{\alpha}{1-\beta}\right] \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\left[\frac{1}{\beta^n} - 1\right]}{\frac{1}{\beta} - 1}$$

Ou enfin $Q = \dfrac{n\alpha}{1-\beta} + \left[P - \dfrac{\alpha}{1-\beta}\right] \dfrac{\left[\frac{1}{\beta^n} - 1\right]}{1-\beta}$

Que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$Q[1-\beta] - n\alpha = \left[P - \frac{\alpha}{1-\beta}\right]\left[\frac{1}{\beta^n} - 1\right]$$

d'où

$$P - \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{Q[1-\beta]\beta^n}{1-\beta^n} - \frac{n\alpha\beta^n}{1-\beta^n}$$

Et enfin :

$$P = \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{n\alpha\beta^n}{1-\beta^n} + \frac{\beta^n(1-\beta)}{1-\beta^n} Q \quad (1)$$

Telle est la relation liant la puissance à la résistance, on remarquera qu'elle est encore de la forme $P = \alpha' + \beta' Q$

$$(2)\ \alpha' = \frac{\alpha}{1-\beta} - \frac{n\alpha\beta^n}{1-\beta^n} \quad (3)\ \beta' = \frac{\beta^n(1-\beta)}{1-\beta^n}$$

Si nous supposons nulle la raideur des cordes ainsi que le frottement α deviendra égal à 0 et β égal à 1

Introduisant d'abord l'hypothèse $\alpha = 0$ dans (1) elle devient : $P = \dfrac{\beta^n(1-\beta)}{1-\beta^n}Q$, ou $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\beta^n(1-\beta)}{1-\beta^n}$ si j'y fais actuellement l'hypothèse $\beta = 1$ elle se présente pour cette valeur sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ pour avoir la vraie valeur de ce rapport on aura en prenant le rapport des dérivées $\dfrac{n\beta^{n-1}[1-\beta] - \beta^n}{-n\beta^{n-1}}$

Or ce rapport pour $\beta = 1$ se réduit comme on voit à $\dfrac{1}{n}$

Donc enfin quand on néglige la raideur des cordes et le frottement la formule générale (1) se réduit à

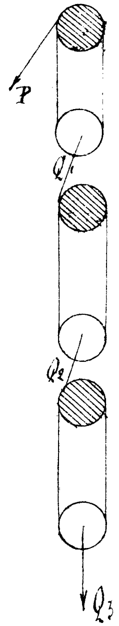
$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{n} Q \quad (4)$$

Résultat trouvé en Statique dans le Cours de 1ère année.

Equilibre d'un train de moufles en tenant compte du frottement de glissement et de la raideur des cordes.

Les diverses moufles composant le train sont placées à la suite l'une de l'autre de manière que le brin libre de chacune soit amarré au crochet de la moufle suivante. Les chapes fixes sont hachées.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70-3



Soit m le nombre des moufles composant le train.

On demande encore une relation entre P et Q_m, en tenant compte du frottement et de la raideur.

En vertu de ce qui précède, on aura :

$$\begin{array}{ll} P = \alpha' + \beta' Q_1 & Q_1 = \dfrac{P-\alpha'}{\beta'} \\ Q_1 = \alpha' + \beta' Q_2 & Q_2 = \dfrac{Q_1-\alpha'}{\beta'} = \dfrac{P-\alpha'[1+\beta']}{\beta'^2} \\ Q_2 = \alpha' + \beta' Q_3 & Q_3 = \dfrac{Q_2-\alpha'}{\beta'} = \dfrac{P-\alpha'[1+\beta'+\beta'^2]}{\beta'^3} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \\ Q_{m-1} = \alpha' + \beta' Q_m & Q_m = \dfrac{Q_{m-1}-\alpha'}{\beta'} = \dfrac{P-\alpha'[1+\beta'+\beta'^2 \dots + \beta'^{m-1}]}{\beta'^m} \end{array}$$

On en déduit

Cette dernière relation peut s'écrire :

$$Q_m = \frac{P}{\beta'^m} - \frac{\alpha'}{\beta'^m}\left[\frac{\beta'^m-1}{\beta'-1}\right] = \frac{P}{\beta'^m} + \frac{\alpha'}{1-\beta'} - \frac{\alpha'}{\beta'^m[1-\beta']}$$

Et en réduisant au même dénominateur :

$$Q_m \beta'^m [1-\beta'] = P[1-\beta'] + \alpha'\beta'^m - \alpha'$$

D'où enfin :
$$P = \frac{\alpha'[1-\beta'^m]}{1-\beta'} + \beta'^m Q_m \quad (5)$$

Telle est la relation cherchée entre P et Q_m, on voit qu'elle est toujours de la forme :
$$P = \alpha'' + \beta'' Q_m$$

Pour vérifier la rigueur de cette formule, il suffit de faire abstraction des résistances. Or quand on néglige le frottement de glissement et la raideur $\alpha = 0$ $\beta = 1$ par suite α' et β' données par les relations (2) et (3) se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, mais ces expressions ont pour vraie valeur en prenant le rapport des dérivées. $\alpha' = 0$ $\beta' = \frac{1}{n}$ n nombre des brins de chaque moufle.

Introduisant ces valeurs dans (5) elle devient :
$$P = \frac{1}{n^m} Q_m$$
Résultat trouvé dans les premiers éléments de statique.

Chapitre V

Résistance dûe à la matérialité des milieux que les machines déplacent dans leur mouvement.

L'expérience prouve que cette résistance est proportionnelle au

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

carré de la vitesse u, à la plus grande section du corps perpendiculaire à la direction de son mouvement (cette section se nomme maître couple ; nous la désignerons par A) au poids spécifique Π du milieu déplacé et enfin proportionnelle à un certain coefficient K variable avec la forme du corps, de sorte que la formule qui donnera l'expression de cette résistance sera :

$$R = K A \Pi \frac{u^2}{2g}$$

Des tables donnent la valeur du coefficient K suivant les formes et de la proue & de la poupe du corps.

Cette formule que nous donnons comme un résultat d'expérience a été démontrée rigoureusement par Newton comme conséquence de la théorie de la similitude en mécanique. Mais ces considérations ne sauraient évidemment être exposées dans un cours élémentaire comme celui-ci.

Nous déduirons d'ailleurs cette même expression de l'étude du choc d'une veine fluide contre un plan dans notre cours de pneumatique et d'hydraulique.

C'est cette résistance qui empêche les projectiles de décrire dans l'espace la parabole théorique. Nous rechercherons d'ailleurs dans nos conférences la courbe exacte décrite en tenant compte de cette résistance. C'est aussi cette résistance qui s'oppose au mouvement des navires et que doit vaincre à chaque instant le vent ou la machine propulsive. Nous étudierons en détail cette question en hydraulique.

Chapitre VI.

Théorie des pertes de puissance vive dues aux chocs et aux vibrations

Exposé. Nous avons fait voir en Dynamique pure que tout choc était nécessairement accompagné d'une perte de puissance vive due soit à une déformation ou à une désagrégation moléculaire permanente constituant un travail réel effectué soit aux vibrations qui accompagnent ce choc, lesquelles donnent lieu à des bruits, et quelquefois même à de véritables sons assourdissants (Ventilateurs). Si ces vibrations sont extrêmement rapides et de faible amplitude elles ne se manifestent plus à nos sens sous forme de son, mais sous forme de chaleur, qui n'est également qu'une transformation spéciale d'une portion de travail moteur perdu par conséquent pour l'effet utile que l'on veut produire.

Il faut donc dans les machines, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, afin d'éviter l'échauffement, les vibrations et les bruits assourdissants, arranger de façon à éviter les chocs, c'est à dire les changements brusques de vitesse. Nous avons vu qu'on y arrivait en pratique par l'emploi simultané du volant et du modérateur.

Il s'agit dans ce chapitre de mettre en évidence et d'évaluer ces pertes de puissance vive pour quelques machines spéciales dans lesquelles par leur destination particulière la puissance motrice doit nécessairement agir par choc.

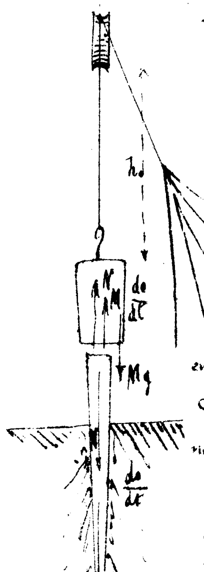
Art. 1er. – Perte de puissance vive dans le battage des pilots ou pilotis, au moyen de la sonnette.

Nous admettrons que le sol est dépourvu d'élasticité, et par conséquent le pilotis n'agissant que comme intermédiaire, les chocs se passent comme dans le choc de deux corps dépourvus d'élasticité.

Soit M la masse du mouton tombant d'une hauteur h_0, chaque période d'un coup de mouton se compose de deux phases.

1° Phase du choc. 2° Phase d'enfoncement commençant à l'instant où la vitesse du mouton est devenue égale à v vitesse du pilotis.

1° Phase de choc



a Équilibre dynamique du mouton — A chaque instant de la durée très petite θ du choc, il est en équilibre dynamique en vertu du principe de d'Alembert sous l'action des 3 forces.

Forces réelles $\begin{cases} N \text{ réaction du pilotis} \\ Mg \text{ poids du mouton} \end{cases}$

Force d'inertie $\left\{ M\frac{dv}{dt} \right.$ résistance d'inertie.

En projetant ces forces sur la verticale on a pour relation d'équilibre en ayant égard aux signes $Mg - N - M\frac{dv}{dt} = 0$ d'où $\frac{dv}{dt} = \frac{Mg - N}{M}$

Mais en remarquant que pendant la durée θ de ce choc, la force Mg est négligeable devant N qui est énorme, il reste :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{N}{M}$$

D'où en intégrant :

Vitesse du mouton immédiatement après le choc :

$$v = -\frac{1}{M}\int^{\theta} N\,dt + C$$

Or pour $t=0$ $v = v_0 = \sqrt{2gh_0}$; on a donc pour déterminer C la condition :

$$v_0 = C$$

Par suite on a : $$v_0 - v = \frac{1}{M}\int_0^\theta N\,dt \quad (1)$$

<u>b</u> Équilibre dynamique du pilot. — Il est également à chaque instant de la durée du choc en équilibre dynamique, sous l'action des 4 forces.

N, action du mouton

$M'g$ poids du pilotis.

R résistance du sol supposée constante (Nous supposons un sol indéfiniment compressible)

$M'\frac{dv}{dt}$ résistance d'inertie

On a donc pour relation d'équilibre en projetant sur la verticale en ayant égard aux signes :

$$N + M'g - R - M'\frac{dv}{dt} = 0$$

d'où en remarquant que $M'g$ et R sont négligeables devant N

$$\frac{dv}{dt} = \frac{N}{M'}$$

En intégrant, et remarquant que la constante est nulle, il vient :

$$v = \frac{1}{M'}\int^\theta N\,dt \quad (2)$$

<u>c</u> Éliminant l'intégrale entre (1) et (2), il vient par division :

$$\frac{v_0 - v}{v} = \frac{M'}{M}$$

D'où : $Mv_0 - Mv = M'v$ ou bien : $Mv_0 = (M+M')v$ (3)

C'est à dire que la quantité de mouvement gagnée par le pilot est précisément égale à la quantité de mouvement perdue par le mouton — ou bien que la quantité de mouvement de l'ensemble des deux corps reste constante avant comme après le choc. Résultats qu'on pouvait d'ailleurs poser à priori on sait en effet que la variation de quantité de mouvement d'un système matériel quelconque = somme des impulsions des forces extérieures seulement. Or pendant la durée θ du choc nous avons supposé que le système du mouton et du pilot n'était soumis à aucune force extérieure puisque pendant cette durée nous avons négligé R, Mg, $M'g$ — Donc la variation de quantité de mouvement devait en effet être nulle.

<u>d</u> Puissance vive perdue par ce choc. — Immédiatement avant le choc, la puissance vive du système égale à la puissance vive du mouton, est :

$$\frac{Mv_0^2}{2}$$

Après le choc, les deux corps ont pris même vitesse v et par conséquent possèdent une puissance vive : $$\frac{(M+M')v^2}{2}$$

et en remplaçant v par sa valeur en fonction de V_0 (3)

$$\frac{M+M'}{2} \cdot \frac{M^2 v_0^2}{(M+M')^2} \text{ ou } \frac{1}{2}\frac{M^2 v_0^2}{M+M'}$$

Donc la perte de puissance vive $\mathcal{E}_r$ sera :

$$\mathcal{E}_r = \frac{M v_0^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{M^2 V_0^2}{M+M'} = \frac{M v_0^2}{2}\left[1-\frac{M}{M+M'}\right]$$

Et en remarquant que $V_0^2 = 2g\,h_0$, puis remplaçant M et M' par leurs valeurs $\frac{P}{g}$ $\frac{P'}{g}$

On a enfin $\mathcal{E}_r = Ph_0\left[1-\frac{P}{P+P'}\right] = Ph_0\left[1-\frac{1}{1+\frac{P'}{P}}\right]$

formule qui fait voir (Ph_0 restant constant), que si P est très grand par rapport à P' : $\mathcal{E}_r$ tend vers 0 il y a donc avantage sous le rapport de l'économie du travail moteur, à employer des moutons très pesants tombant d'une petite hauteur.

2° Phase d'enfoncement

Si l'on admet que la résistance R du sol reste constante (comme dans les terrains indéfiniment compressibles), il y aura enfoncement jusqu'à ce que toute la puissance vive du système $\left(\frac{M+M'}{2}\right)V^2$ ou $\frac{1}{2}\frac{M^2 U_0^2}{M+M'}$ ait été détruite ou absorbée par le travail résistant du sol comprimé — Soit x la quantité dont s'enfonce le pilot, on aura donc pour déterminer cette quantité, l'égalité :

$$\frac{1}{2}\frac{M^2 V_0^2}{M+M'} = R\,x$$

Mais si R était variable à chaque instant, on aurait :

$$\frac{1}{2}\frac{M^2 v_0^2}{M+M'} = \int^x R\,dx$$

Dans le 1er cas on déduirait de l'équation :

$$x = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{2}\frac{M^2 V_0^2}{M+M'} = \frac{1}{R}\,Ph_0\left[\frac{1}{1+\frac{P'}{P}}\right]$$

Le travail dépensé Ph_0 restant constant, on voit que l'enfoncement x croît quand P augmente — Ce qui se comprend bien puisque nous avons vu que dans ce cas la perte de puissance vive allait en diminuant —

Art II. — Du choc dans les pilons ou bocards.

On demande :

1° Le travail moteur que devra recevoir l'arbre à cames par coup de pilon pour conserver son mouvement périodiquement uniforme.

2° De calculer le poids du volant de telle sorte que la différence entre les vitesse angulaire extrême de l'arbre à cames soit au plus égale au n^{me} de la vitesse angulaire moyenne, c'est à dire de telle sorte que :

$$\omega'' - \omega' = \frac{1}{n}\,\frac{\omega' + \omega''}{2} = \frac{1}{n}\,\Omega$$

Chaque période d'un coup de pilon se compose de trois phases :

1° Choc. - 2° Levée, - 3° Marche à vide.

1° Phase du choc

a. Equilibre dynamique du pilon. - A chaque instant de la durée θ du choc, il est en équilibre dynamique sous l'action des trois forces :

Forces extérieures { N' Action de la came sur le mentonnet pendant le choc ; $M'g$ poids du pilon

Force d'inertie { $M'\frac{dv}{dt}$ Résistance d'inertie

En projetant sur la verticale on a pour relation d'équilibre eu égard aux signes :

$$N' - M'g - M'\frac{dv}{dt} = 0$$

d'où en négligeant $M'g$ devant N'

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M'}\,N'$$

En intégrant de 0 à θ en remarquant que la constante est nulle, il vient :

$$v = \frac{1}{M'}\int^{\theta} N'dt \quad (1)$$

donnant la vitesse du pilon à l'instant final du choc

b. Equilibre dynamique de la roue à cames Γ. - A chaque instant de la durée θ du choc, elle est en équilibre dynamique sous l'action des forces :

Forces extérieures {
- N' action du mentonnet sur la came pendant le choc
- Q Effort moteur appliqué tangentiellement à la circonférence de rayon q
- P poids de la roue à cames
- R réaction du coussinet sur l'axe $= P + Q + N'$

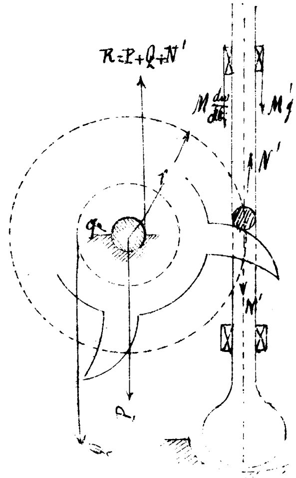
auxquelles il faut joindre les résistances d'inertie des différents points.

La roue à cames ne pouvant que tourner autour de son axe, la seule relation d'équilibre est celle des moments autour de cet axe, qui donne comme on sait :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma\, M_o \text{ forces extérieures}}{I} = \frac{Qq - N'r - f_1\rho\,[P+Q+N']}{I}$$

qui devient en remarquant que pendant la durée du choc P et Q sont négligeables devant N' et en posant $I = Mr^2$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-N'(r + f_1\rho)}{Mr^2}$$



Intégrant et ajoutant la constante, il vient :

$$\omega - \omega_0 = -\frac{r+f_1\ell}{Mr^2}\int^t N'dt$$

qu'on peut écrire en remarquant que $\omega = \frac{v}{r}$ $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$

$$v_0 - v = \frac{r+f_1\ell}{Mr}\int^t N'dt \quad (2)$$

Éliminant actuellement l'intégrale entre (1) et (2) il vient :

$$\frac{v_0-v}{v} = \frac{r+f_1\ell}{Mr}\cdot M' = \frac{M'}{M}\left[1+\frac{f_1\ell}{r}\right] = K\cdot\frac{M'}{M}$$

D'où enfin :

(3) $M(v_0-v) = K.M'v$ en posant $K = 1+\frac{f_1\ell}{r}$

ce qui veut dire que la quantité de mouvement perdue par la masse fictive M est égale sauf le coefficient K à la quantité de mouvement gagnée par le pilon. Quant à ce coefficient on voit qu'il augmente à mesure que r diminue.

d Perte de puissance vive due au choc.

La puissance vive totale dépensée qu'il faudra fournir à l'arbre à cames pour cette phase de choc est : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}M(v_0^2-v^2) = \frac{1}{2}M(v_0-v)(v_0+v)$ (4)

et en admettant que la moyenne des vitesses avant et après le choc est égale à la vitesse moyenne V on aura la condition.

$$v + v_0 = 2V \quad (5)$$

Éliminant actuellement v et v_0 entre (3) (4) (5) il vient :

$$\mathcal{E}_m = K.M'v.V$$

mais (3) et (5) donnant : $v = \frac{2MV}{2M+M'K}$ en remplaçant, on a enfin :

$$\mathcal{E}_m = K\frac{2MM'V^2}{2M+M'K} = M'V^2\frac{K}{1+\frac{KM'}{2M}}$$

Or la puissance vive gagnée par le pilon est seulement dans cette phase de choc.

$$\mathcal{E}_u = \frac{M'V^2}{2}$$

Donc la quantité de puissance vive ou de travail perdue par le choc sera à chaque coup $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_u = M'V^2\left[\frac{K}{1+\frac{KM'}{2M}} - \frac{1}{2}\right]$

Si K=1 (r étant très grand par rapport à ℓ), que de plus M soit très grand par rapport à M' la perte due au choc sera :

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2}M'V^2$$

2° Phase de la levée du pilon. Pendant cette phase on peut considérer le mouvement comme uniforme par suite on n'a plus à tenir compte des résistances d'inertie qui s'annulent.

a Équilibre statique du pilon. Soit y la levée du pilon que l'on peut

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 W 70 3

déterminer par une épure : il est en équilibre pendant cette phase sous l'action des deux forces opposées

N_1 action de la came sur le mentonnet pendant la levée du pilon

$M'g$ ou P' poids du pilon.

On a donc pour l'équilibre.

$$N_1 = M'g = P' \quad (1)$$

b Equilibre statique de la roue à cames. — Elle est en équilibre sous l'action des forces :

N_1 action du mentonnet sur la caisse pendant la levée du pilon

Q. l'effort moteur tangentiel à la circonférence de rayon q

P poids de la roue à cames

R réaction du coussinet $= P + Q + N_1$

En posant l'équation d'équilibre qui est celle des moments on aura :

$$Qq - N_1 r - f_1 \rho \left(P + Q + N_1\right) - f N_1 \frac{y}{2} = 0$$

$f N_1 \frac{y}{2}$ représente le moment moyen du frottement de la came sur le mentonnet

Multipliant tous les termes de cette égalité par la déviation angulaire $\frac{y}{r}$ répondant à la levée y, on aura :

$$Qq \frac{y}{r} - N_1 y - f_1 \rho \left(P + Q + N_1\right) \frac{y}{r} - f N_1 \frac{y^2}{2r} = 0 \quad (2)$$

c Cette relation devient à cause de (1)

$$Qq \frac{y}{r} - P' y - f_1 \rho \left(P + P' + Q\right) \frac{y}{r} - f P' \frac{y^2}{2r} = 0 \quad (3)$$

On en tire

$$Q \frac{y}{r} \left[q - f_1 \rho\right] = P' y \left[1 + \frac{f_1 \rho}{r} + \frac{f y}{2r}\right] + P_1 f_1 \rho \frac{y}{r}$$

D'où enfin :

$$\mathcal{T}''_m = Qq \frac{y}{r} = \frac{P' q y \left[1 + \frac{f_1 \rho}{r} + \frac{f y}{2r}\right]}{q - f_1 \rho} + \frac{P q f_1 \rho \frac{y}{r}}{q - f_1 \rho} \quad (4)$$

Telle est la puissance vive total ou le travail total dépensé pour la levée y du pilon. Cette expression se réduit en faisant f et $f_1 = 0$ c'est à dire en négligeant les frottements à $\mathcal{T}'_m = P' y$

Ce qui devait être :

3° Phase de la marche à vide. — Dans cette troisième phase, la puissance motrice n'a plus à vaincre que les frottements des tourillons et pour avoir le travail $\mathcal{T}'''_m$ dépensé dans cette 3° phase, il suffira de faire dans (4). $P' = 0$ et $y = y'$, y' représentant le chemin décrit par la came jusqu'à ce que la suivante reprenne le mentonnet : on

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 54 VIR 763

obtiendra ainsi : $\mathcal{T}'''_m = \dfrac{P q f_1 \rho \frac{y'}{r}}{q - f_1 \rho}$

se réduisant à 0 si l'on fait $f_1 = 0$

Donc, en résumé le travail total à communiquer à l'arbre à Cames par coup de pilon est :

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}'_m + \mathcal{T}''_m + \mathcal{T}'''_m = M'V^2 \frac{K}{1 + \frac{KM'}{2M}} + \frac{1}{q - f_1\rho}\left[P'q y\left(1 + \frac{f_1\rho}{r} + \frac{fg}{2r}\right) + P q f_1 \frac{\rho}{r}(y + y')\right]$$

Dans laquelle $M = \frac{I}{r^2}$ $M' = \frac{P'}{g}$, V = la vitesse linéaire à la circonférence primitive de la roue à Cames.

Si n représente le nombre des Cames de cette roue, le travail moteur par tour sera : $n\,\mathcal{T}_m = n\left[\mathcal{T}'_m + \mathcal{T}''_m + \mathcal{T}'''_m\right]$

Soit N le nombre de tours par minute, le travail à Communiquer par seconde aura pour expression en Kilogrammètres

$$T_m = n\ \mathcal{T}_m \cdot \frac{N}{60}$$

Quant au Calcul du volant nécessaire pour régulariser le mouvement au degré voulu, on procède identiquement comme dans le cas des marteaux, dont nous allons actuellement nous occuper

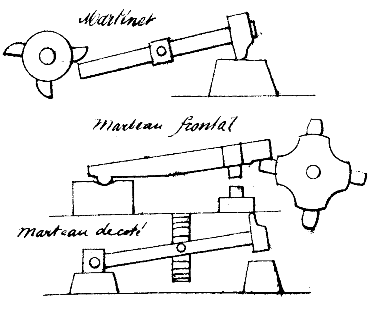
---

Art III. Du choc dans les marteaux

On emploie dans les forges trois espèces de marteaux mus par des Cames.

1° Les marteaux à bascule dits aussi martinets. Ils pèsent au plus 80 Kilog. et frappent de 200 à 400 Coups par minute, la came agit sur la queue, l'axe de rotation est intermédiaire entre la queue et la tête.

2° Les marteaux à l'allemande dont le manche est soulevé latéralement par la Came entre la tête et l'axe de rotation. Le poids est de 300 à 400 Kg, ils frappent de 70 à 200 Coups par minute.



3° Les marteaux frontaux dont la tête est située entre l'axe de rotation et l'extrémité du manche où agit la Came. Ils pèsent de 2500 à 4000 K. et frappent de 60 à 100 Coups par minute.

Exposé de la question. On donne les dimensions le poids, le moment d'inertie du marteau et de la roue à Cames. On connaît le nombre de Coups de mouton par seconde, d'où l'on déduit la vitesse moyenne des cames. On Connaît enfin par le tracé des cames ou par l'expérience l'angle que décrit le marteau depuis l'instant où une Came le saisit jusqu'à celui où elle l'abandonne et l'on demande :

1° Le travail moteur que devra recevoir l'arbre à Cames par coup de marteau pour conserver son mouvement périodiquement uniforme ?

2° De calculer le volant de façon que la vitesse ne s'écarte pas d'$\frac{1}{n}$ de la vitesse moyenne. N ?

Chaque période d'un Coup de marteau se divise en trois phases.

1ère phase. C'est celle du choc qui commence quand le manche en repos est saisi par la Came et finit à l'instant où la vitesse du marteau et celle des Cames sont devenues égales entre elles pour les points situés sur les circonférences passant au point de contact.

2e phase. C'est celle de la levée du marteau en contact avec la Came.

3e phase. C'est celle de la marche à vide de l'arbre à Cames, elle commence à l'instant où la came quitte le manche et finit à l'instant où la Came suivante vient le choquer.

1° Phase du Choc.

Soit un martinet A C B. On peut toujours s'arranger pour que le contact C de la Came au moment où elle se met en prise, soit sur l'horizontale de l'axe de rotation O. Soit G le Centre de gravité du marteau et de son manche il est clair que pour l'étude nous pouvons remplacer le martinet proposé par le levier idéal C O G oscillant autour du point O. Considérons séparément ainsi que nous l'avons fait dans les deux études précédentes, l'équilibre dynamique du marteau ou du levier, puis l'équilibre dynamique de la roue à Cames.

a Equilibre dynamique du marteau. A chaque instant de la durée très petite du choc, le marteau est en vertu du principe de d'Alembert en équilibre sous l'action de toutes les forces extérieures qui agissent sur lui, y compris les résistances d'inertie. Ces forces sont :

1° L'action verticale variable à chaque instant du choc, que le manche reçoit de la Came, action agissant à la distance r' de l'axe O de rotation du marteau.

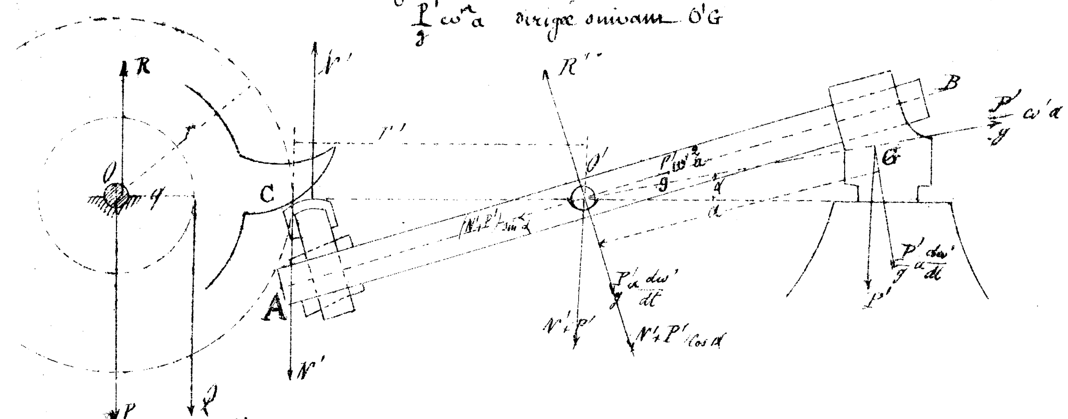
2° Le poids du martinet appliqué en son centre de gravité G

1°. R la réaction des Coussinets embrassant l'axe O de rotation du marteau.

2°. P' poids du martinet appliqué en son centre de gravité G

3°. R' la réaction des Coussinets embrassant l'axe O' dont il s'agit tout d'abord de trouver l'expression à chaque instant. Or on a vu en Dynamique pure que la résultante des actions exercées par les appuis d'un corps tournant autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité est égale et de signe contraire à la résultante de translation des forces extérieures qui sont ici N' et P' et de la force d'inertie de la masse totale supposée concentrée en son centre de gravité, laquelle a pour composantes centrifuge et tangentielle

$\frac{P'}{g}\omega'^2 a$ dirigée suivant O'G



$\frac{P'}{g}a\frac{d\omega'}{dt}$ dirigée tangentiellement au cercle décrit par le point G et dans le sens indiqué par la flèche

Par conséquent, la résultante cherchée des réactions de l'appui O' sera en décomposant N'+P' suivant les directions rectangulaires des deux composantes d'inertie

$$R' = \sqrt{\underbrace{\left[\frac{P'}{g}a\frac{d\omega'}{dt}+(N'+P')\cos\alpha\right]^2}_{Y^2}+\underbrace{\left[\frac{P'}{g}\omega'^2 a-(N'+P')\sin\alpha\right]^2}_{X^2}}$$

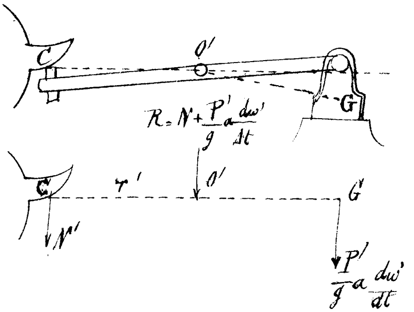
4°. Quant aux forces d'inertie, on sait qu'elles ne sont autres pour chaque point matériel de masse m à la distance r de l'axe que les deux composantes

$$m\,\omega'^2 r\ ,\ m\,r\,\frac{d\omega'}{dt}$$

Puisque toutes ces forces sont en équilibre, que d'ailleurs le système n'est susceptible que d'un mouvement de rotation, la seule relation d'équilibre est celle des moments autour de l'axe O ce qui fournit la relation :

(1) $N'r' - P'a\cos\alpha - f_1\rho'\sqrt{Y^2+X^2} - \frac{d\omega'}{dt}I' = 0$ (ρ' rayon des tourillons)

de laquelle on peut tirer la valeur de $\frac{d\omega'}{dt}$ variable comme on le voit avec l'angle α



Mais on peut simplifier cette relation en remarquant :

1° que P' est négligeable devant N'

2° que pendant toute la durée du choc l'accélération $\frac{d\omega'}{dt}$ étant très grande en comparaison de ω'^2 nul à l'instant du choc, on peut négliger dans le radical $\sqrt{Y^2 + X^2}$ le terme $\frac{P'}{g}\omega'^2 a$ devant le terme $\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt}$

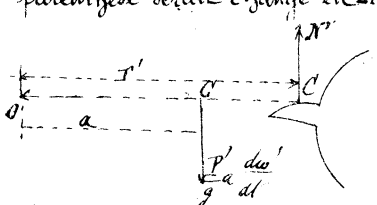
3° Que dans la pratique l'angle α étant toujours très petit surtout si l'on dispose le marteau comme l'indique la figure, on peut supposer $\alpha = 0$ pendant toute la durée du choc et par suite faire $\cos\alpha = 1$ et $\sin\alpha = 0$

En introduisant ces hypothèses dans (1) elle devient simplement :

$$N' - f_1 \rho' \left[\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt} + N'\right] - \frac{d\omega'}{dt} I' = 0 \quad (2)$$

Que l'on aurait pu poser d'ailleurs a priori, en considérant les choses disposées à l'instant initial comme l'indique le croquis ci contre

Si au lieu d'un martinet, nous eussions considéré un marteau de coté ou un marteau frontal, l'équation précédente resterait la même seulement N' dans la parenthèse serait changé en $-N'$



Donc l'équation d'équilibre dynamique des marteaux dans tous les cas possibles est :

$$N' r' - f_1 \rho' \left[\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt} \pm N'\right] - \frac{d\omega'}{dt} I' = 0 \quad (3)$$

le signe + convenant aux martinets et le signe − aux marteaux frontaux et de coté

Si nous considérons en particulier ce second cas on peut déterminer r' de telle sorte que la réaction sur l'axe O' soit nulle ; pour qu'il en soit ainsi il suffit de poser

$$N' = \frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt}$$

et alors la relation d'équilibre (3) devient :

$$N' r' - \frac{d\omega'}{dt} I' = 0$$

De ces deux dernières relations on déduit :

$$(4) \quad r' = \frac{I'}{\frac{P'}{g} a} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{N}{\frac{P'}{g} a} \quad (5)$$

Donc, pour que l'hypothèse faite se réalise :

1° Il faut que la came agisse au centre de percussion.

2° Cela étant l'accélération est donnée par la relation (5)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 94 VIR 70 3

Dans le cas général l'accélération $\frac{d\omega'}{dt}$ déduite de la relation (3) est :

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{N'[r' \mp f_1 \rho']}{I' + f_1 \rho' \frac{P'}{g} a}$$

Posons $I' = M' r'^2$, M' étant une masse fictive satisfaisant à cette égalité et intégrons la relation précédente de 0 à θ ; nous aurons pour la vitesse à l'instant final du choc :

$$\omega' = \frac{r' \mp f_1 \rho'}{M' r'^2 + f_1 \rho' \frac{P'}{g} a} \int_0^\theta N' dt \quad (6)$$

<u>b</u> Équilibre dynamique de la roue à cames — A chaque instant de la durée très petite θ du choc, elle est en vertu du principe de d'Alembert en équilibre dynamique sous l'action des forces extérieures y compris celles d'inertie qui agissent sur elles.

Ces forces sont :

1° $N = N'$. action verticale variable à chaque instant du choc que la came reçoit du manche, action agissant à la distance r de l'axe O de rotation de la roue à cames.

2° P poids de la roue.

3° Q force mouvante appliquée tangentiellement à la circonférence de rayon q

4° R réaction des coussinets sur l'axe O qui se réduit à $[P + Q \pm N]$ puisque la résultante de translation des forces d'inertie est nulle

5° Les résistances d'inertie

Cette roue ne pouvant que tourner autour de l'axe O, la seule équation d'équilibre est celle des moments autour de cet axe, laquelle donne

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Qq - Nr - f_1 \rho (P + Q \pm N)}{I}$$

qui se réduit en remarquant que $P + Q$ est négligeable devant N, à :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-N[r \pm f_1 \rho]}{I} \quad (7)$$

Posons $I = M r^2$ M étant une masse fictive satisfaisant à cette égalité et intégrons la relation précédente de 0 à θ ; nous aurons en ajoutant la constante pour la vitesse à l'instant final du choc :

$$\omega - \omega_0 = -\frac{r \pm f_1 \rho}{M r^2} \int_0^\theta N dt \quad (8)$$

<u>c</u> Éliminant l'intégrale entre (6) et (8) on a par division :

$$(9) \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega'} = -\frac{r + f_1 \rho}{M r^2} \cdot \frac{M' r'^2 + f_1 \rho' \frac{P'}{g} a}{r' \mp f_1 \rho'} = -\frac{r\left(1 + f_1 \frac{\rho}{r}\right)}{r'\left(1 \mp f_1 \frac{\rho'}{r'}\right)} \cdot \frac{M' r'^2 \left(1 + f_1 \rho' \frac{P' a}{g M' r'^2}\right)}{M r^2}$$

Mais à la fin du temps θ la vitesse du point de contact est la même qu'on le considère comme appartenant à la came ou au marteau, on a donc les conditions

$$\omega r = \omega' r' = v$$

de même au commencement du temps θ on a

$$\omega_0 r = \omega'_0 r' = v_0$$

Remplaçant dans (9), ω et ω_0 par leurs valeurs en fonction de v et de v_0 elle devient :

$$\frac{v - v_0}{v} = -\frac{M'}{M} \cdot \frac{1 + f_1 \frac{\rho}{r}}{1 \mp f_1 \frac{\rho'}{r'}} \left[1 + \frac{f_1 \rho' P' a}{M' r'^2 g}\right] \quad (10)$$

Si dans cette formule nous faisons $r' = \infty$ il reste :

$$\frac{v - v_0}{v} = -\frac{M'}{M}\left(1 + f_1 \frac{\rho}{r}\right) \quad (11)$$

Nous retombons ainsi sur la formule relative aux pilons, ce qui devait être.

Si dans (10) je pose $\frac{1 + f_1 \frac{\rho}{r}}{1 \mp f_1 \frac{\rho'}{r'}} \left[1 + \frac{f_1 \rho' P' a}{M' r'^2 g}\right] = K$

elle devient en chassant les dénominateurs :

$$M (v_0 - v) = M' v . K \quad (12)$$

c'est à dire que la quantité de mouvement perdue par la masse fictive M qui représente l'arbre à cames est égale sauf le coefficient K à celle qu'a gagné la masse fictive M' qui représente le marteau.

Dans la pratique le coefficient K diffère peu de l'unité – Poncelet cite des exemples, un marteau à bascule et un marteau à l'allemande pour lesquels il était de 1.0006 et 1.014

d Perte de puissance vive due au choc.

La puissance vive totale dépensée qu'il faudra fournir à l'arbre à cames pour cette phase du choc sera :

$$(13) \quad \mathcal{E}'_m = \frac{1}{2} M (v_0^2 - v^2) = \frac{1}{2} M (v_0 - v)(v_0 + v)$$

et en admettant que la moyenne des vitesses avant et après le choc est égale à la vitesse moyenne V, déduite du nombre de tours observés par minute, on aura la condition (14)

$$v + v_0 = 2V$$

Éliminant actuellement v et v_0 entre (13) et (14) il vient :

$$\mathcal{E}'_m = K . M' v V$$

D'ailleurs en éliminant v_0 entre (12) et (14) on obtient : $v = \frac{2MV}{2M + M'K}$

remplaçant v par sa valeur dans la précédente : il vient enfin : $\mathcal{E}'_m = K \frac{2MM'V^2}{2M + M'K} = M'V^2 \cdot \frac{K}{1 + \frac{KM'}{2M}}$ (X)

quantité peu différente de $M'V^2$ puisque M est très grand par rapport à M' et que K est très peu différent de 1..

Mais la quantité de puissance vive ou le travail $\mathcal{E}_u$ gagné par le moteur dans cette période de choc est seulement

$$\mathcal{E}_u = \frac{M'V^2}{2}$$

Donc la quantité de travail perdu ou absorbée par le choc est :

$$\mathcal{T}_r = \mathcal{T}'_m - \mathcal{T}_u = M'V^2 \left[\frac{K}{2\left(1+\frac{KM'}{2M}\right)} - \frac{1}{2}\right]$$

qui se réduit pour $K=1$ et M très grand par rapport à M' à :

$$\mathcal{T}_r = \frac{M'V^2}{2}$$

Cette quantité de travail perdu pour l'effet utile que l'on veut produire se transforme soit en un travail effectif de déformation et de désagrégation moléculaire soit en vibrations sensibles, soit enfin en vibrations calorifiques.

2° Phase de la levée du marteau.

Pendant cette phase on peut considérer le mouvement comme uniforme par suite on n'a plus à tenir compte des résistances d'inertie qui s'annulent.

a Équilibre statique de la roue à cames.

Soit y le chemin sensiblement vertical que parcourt pendant la levée le point de contact de la came et du manche. - Cette roue sera pendant la durée de cette phase en équilibre statique sous l'action des forces.

N_1 action du manche sur la came, action verticale agissant à la distance r de l'axe O de la roue.

Q l'effort moteur tangentiel à la circonférence de rayon q.

P poids de la roue à cames

R_1 Réaction des coussinets $= P + Q \mp N_1$ selon l'espèce du marteau.

En posant l'équation d'équilibre qui est celle des moments, ou ce qui revient au même, en exprimant que le travail moteur est égal à la somme de tous les travaux résistants tant utiles que nuisibles ; on aura :

$$\underbrace{Qq\frac{y}{r}}_{\text{Travail moteur}} = \underbrace{N_1 y}_{\text{Travail utile}} + \underbrace{f_1 \rho (P+Q\mp N_1)\frac{y}{r}}_{\substack{\text{Travail résistant}\\ \text{dû au frottement}\\ \text{des tourillons}}} + \underbrace{\frac{y^2}{2} f N_1\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}_{\substack{\text{Travail résistant}\\ \text{dû au frottement}\\ \text{de la came.}}}$$

b Équilibre statique du marteau. - Il est en équilibre statique sous l'action des forces

N_1 action de la came sur le manche du marteau, action verticale agissant à la distance r de l'axe

P' poids du marteau appliqué au centre de gravité G

R'_1 Réaction des coussinets $= P' \pm N_1$ suivant le genre du marteau

En posant l'équation d'équilibre qui est celle des moments, ou en exprimant que le travail moteur = travail résistant total, on aura :

(2) $$N_1 y = P' y \frac{a}{r'} + f_1 \rho' (P' \pm N_1) \frac{y}{r'}$$

De cette relation (2) je tire N_1 :

$$N_1 = \frac{P' \frac{y}{r'} (a + f_1 \rho')}{y \mp f_1 \rho' \frac{y}{r'}} = \frac{P' (a + f_1 \rho')}{r' \mp f_1 \rho'}$$

Remplaçant N_1 par sa valeur dans (1) mise sous la forme :

$$Q \frac{y}{r} (q - f_1 \rho) = f_1 \rho P \frac{y}{r} + N_1 y \left[1 \mp f_1 \frac{c}{r} + \frac{1}{2} f y \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right]$$

Il viendra :

$$Q \frac{y}{r} (q - f_1 \rho) = f_1 \rho P \frac{y}{r} + \frac{P' y (a + f_1 \rho')}{r' \mp f_1 \rho'} \left[1 \mp f_1 \frac{c}{r} + \frac{1}{2} f y \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right]$$

On en déduit enfin :

$$\mathcal{T}''_m = Q q \frac{y}{r} = \frac{f_1 \rho P q \frac{y}{r}}{q - f_1 \rho} + \frac{P' q y (a + f_1 \rho')}{(q - f_1 \rho)(r' \mp f_1 \rho')} \left[1 \mp f_1 \frac{c}{r} + \frac{1}{2} f y \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right] \quad (\beta)$$

Telle est l'expression générale du travail à fournir à la roue à cames pendant la levée du marteau — Si on négligeait le frottement cette expression deviendrait simplement en faisant f et $f_1 = 0$: $\quad \mathcal{T}''_m = P' y \frac{a}{r'}$

ce qui est évident.

3° Phase de la marche à vide.

Dans cette troisième phase, la puissance motrice Q n'a plus à vaincre que les frottements des tourillons de l'arbre O et pour avoir le travail $\mathcal{T}'''_m$ dépensé dans cette 3e phase il suffira évidemment de faire dans (β) $P' = 0$ et $y = y'$ y' représentant le chemin décrit par la came jusqu'à ce que la suivante reprenne la queue du marteau on obtiendra ainsi:

$$\mathcal{T}'''_m = \frac{P q f_1 \rho \frac{y'}{r}}{q - f_1 \rho} \quad (\gamma)$$

se réduisant à 0 si l'on fait $f_1 = 0$.

Donc, en résumé le travail total à communiquer à l'arbre à cames par coup de marteau est :

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}'_m + \mathcal{T}''_m + \mathcal{T}'''_m = M' V^2 \cdot \frac{K}{1 + \frac{K M'}{2 M}} + \frac{1}{q - f_1 \rho} \left[\frac{P' q y (a + f_1 \rho')}{r' \mp f_1 \rho'} \left(1 \mp f_1 \frac{c}{r} + \frac{1}{2} f y \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right) + P q f_1 \frac{\rho}{r} (y + y') \right]$$

Si n représente le nombre de cames de cette roue, le travail moteur par tour sera :

$$n \mathcal{T}_m = n \left(\mathcal{T}'_m + \mathcal{T}''_m + \mathcal{T}'''_m \right)$$

Soit N le nombre de tours par minute, le travail à fournir par seconde aura pour expression en kilogrammètres :

$$T_m = n \mathcal{T}_m \cdot \frac{N}{60} = Q q \Omega \quad (\delta)$$

Ω vitesse angulaire moyenne de l'arbre à cames.

Quant au rendement, il est toujours égal au rapport du travail utile au travail moteur. Or le travail utile se compose de la quantité de puissance vive $\frac{M'V^2}{2}$ gagnée par le marteau dans la 1ère phase et de la quantité $P'y\frac{a}{r'}$ gagnée dans la seconde phase ; le rendement est donc :

$$R = \frac{\frac{M'V^2}{2} + P'y\frac{a}{r}}{\mathcal{T}'_m + \mathcal{T}''_m + \mathcal{T}'''_m}$$

Dans le cas des marteaux frontaux la vitesse V est très petite, par suite le terme $\frac{M'V^2}{2}$ au numérateur est négligeable.

Calcul du Volant. — Il nous reste à indiquer la marche à suivre pour calculer le volant nécessaire dans les mécanismes précédents (Pilons et marteaux) pour obtenir un degré voulu de régularisation.

Le travail total fourni par la force constante Q pendant la durée totale d'un coup de marteau $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}'_m + \mathcal{T}''_m + \mathcal{T}'''_m$ étant dépensé pendant le temps que met la Came à soulever le marteau : il faut que le volant ou l'attirail (roue et arbre à came) qui en tiennent lieu le plus souvent, ait une masse telle qu'il puisse accumuler, avec une faible variation de vitesse, depuis l'instant où une came quitte le marteau jusqu'à l'instant où la came suivante le reprend, c'est-à-dire pendant la marche à vide, une quantité de puissance égale à l'excès du travail total $\mathcal{T}_m$ absorbé par coup, sur le travail produit par la force Q pendant la levée y du marteau lequel a pour expression :

$$Q\,q\,\frac{y}{r}$$

ou bien à cause de (δ) :

$$n\mathcal{T}_m\frac{N}{60\Omega}\cdot\frac{y}{r}$$

Cet excès sera donc en le désignant par T

$$T = \mathcal{T}_m - n\mathcal{T}_m\frac{N}{60\Omega}\cdot\frac{y}{r} = \mathcal{T}_m\left[1 - \frac{Nn}{60\Omega}\cdot\frac{y}{r}\right]$$

Cela posé, en désignant, comme dans les questions du Chap II, par ω'' la vitesse angulaire à l'instant du choc, ω' cette vitesse à l'instant où la came quitte le marteau et par I_o le moment d'inertie du volant cherché, on aura.

$$\frac{1}{2}I_o(\omega''^2 - \omega'^2) = T$$

Je suppose qu'on s'impose la condition :

$$\omega'' - \omega' = \frac{1}{m}\Omega$$

avec la relation : $$\frac{\omega''+\omega'}{2} = \Omega$$

On en conclura : $$\frac{\omega''^2 - \omega'^2}{2} = \frac{1}{m}\Omega^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

Remplaçant dans la relation précédente $\frac{1}{2}(\omega'^2-\omega^2)$ et T par leurs valeurs on a pour déterminer I_0 l'égalité :

$$\frac{1}{m}\Omega^2 I_0 = \mathcal{C}_m\left[1-\frac{Nn}{60\Omega}\cdot\frac{y}{r}\right]$$

Chapitre VII.

Applications utiles des diverses résistances étudiées plus haut

Transition. _ Dans les six chapitres précédents nous nous sommes attachés à présenter le frottement et les autres résistances sous leur jour le plus ordinaire, c'est à dire comme une influence nuisible contre laquelle le mécanicien doit lutter incessamment pour augmenter le rendement des machines. _ Mais pour se faire une idée complète de ces résistances et de leurs propriétés, il est nécessaire de placer en parallèle les effets éminemment utiles qu'on peut retirer de leur intervention.

Art. 1er. Applications utiles du frottement de glissement dans les solides.

Sans cette résistance au glissement, la préhension des objets serait à peu près impossible, il serait également impossible aux êtres inanimés et animés de se maintenir en repos sur un plan incliné et réciproquement il leur serait impossible de se déplacer sur un plan horizontal.

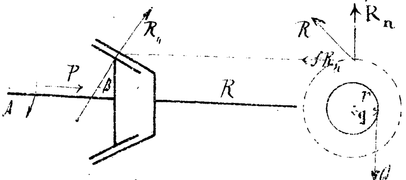
Dans ce dernier cas en effet le corps animé ou inanimé que nous considérons n'est soumis dans ces circonstances qu'à des actions intérieures qui sont incapables comme on sait, de déplacer son centre de gravité, le mouvement n'est donc possible que par suite des réactions obliques dues à la résistance du sol déformé, réactions provoquées par le jeu des actions intérieures et qui sont relativement au corps des forces extérieures qui le poussent en avant. _ C'est ainsi que nous pouvons nous mouvoir sur un sol horizontal, et que la locomotive peut ainsi que nous l'avons fait comprendre, à l'article adhérence, remorquer un train quelconque, pourvu que le poids adhérent soit suffisant pour déterminer une réaction R dont la composante tangentielle surpasse toutes les résistances du train. _ Si le sol était parfaitement poli et indéformable on comprend d'ailleurs que l'être animé par plus que la locomotive quelque soit le poids adhérent ne puissent se déplacer, car alors le jeu des forces intérieures ne pourrait faire naître aucune réaction dans le sens de l'horizontale.

Transmissions par galets et cônes de friction.

Dans les transmissions de mouvement, lorsqu'on a que de faibles efforts à transmettre ; on peut remplacer les roues d'engrenages par de simples galets ou cônes de friction ; l'adhérence due au frottement et que l'on détermine au moyen d'une pression convenable, pouvant devenir suffisante pour vaincre l'effort résistant.

Embrayages et Encliquetages

Embrayages par cônes de friction. — On amène les 2 cônes au contact, le glissement cesse et il y a entraînement d'un cône par l'autre, l'effort nécessaire pour faire adhérer les 2 cônes est d'autant moindre que l'angle des génératrices avec l'axe est plus petit, en effet :



Soit P l'effort horizontal nécessaire pour déterminer l'adhérence des deux cônes et par suite l'entraînement de l'arbre B : le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche : le cône intérieur exerce sur le cône extérieur des actions qui tendent à déterminer son mouvement qui n'est possible que lorsque la somme des moments de ces actions est précisément égal au moment résistant Qq de l'arbre B. On aura donc à l'instant où l'entraînement commence l'égalité :

$$(1)\quad Qq = fR_n r \qquad (r \text{ rayon moyen du Cône extérieur.})$$

D'ailleurs R_n est déterminé par la Condition de projection sur l'horizontale

$$(2)\quad P = R_n \cos\beta \qquad (\beta \text{ angle du Cône})$$

(1) devient en substituant :

$$Qq = f\frac{Pr}{\cos\beta} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{Qq}{fr}\cos\beta$$

relation faisant voir qu'en effet la force à employer pour déterminer l'embrayage est d'autant plus petite que β est plus petit.

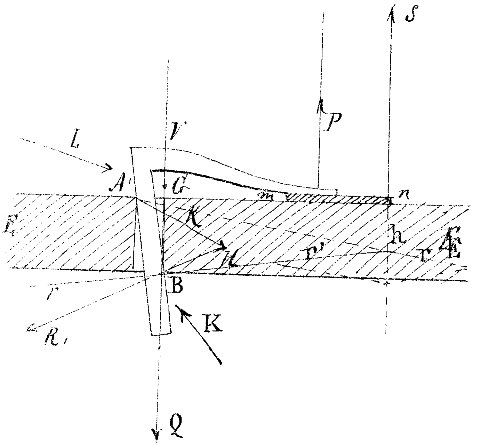
Encliquetages. — Lorsque nous avons traité des engrenages, nous avons vu que dans certains cas (arc d'approche trop grand) il pouvait se produire arcboutement c'est à dire que tout mouvement pouvait devenir impossible. — Cet arc boutement dû au frottement et produisant l'impossibilité de mouvement, est utilisé dans une foule d'encliquetages divers : Vis de pression, Valet de menuisier, Encliquetages Saladin, Dobo, Clair, „ &c.

Vis de pression. — Dans la théorie de la vis, nous avons vu que pour un pas très faible la vis était incapable de remonter quelque soit la réaction verticale qu'elle reçoit. On utilise

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3

cette propriété, phénomène d'arcboutement dû au frottement dans les vis de pression ainsi que nous l'avons déjà dit.

Valet de menuisier. _ Instrument en fer qui sert au menuisier pour fixer sur son établi le bois qu'il travaille.



L'établi EE' est percé d'un trou dans lequel on introduit la pièce en fer V. qu'on enfonce d'un coup de maillet. _ Le morceau de bois mn se trouve alors solidement assujetti c'est-à-dire que quelque grande soit la réaction F exercée par m n, tout mouvement tendant au desserrement est impossible. Au contraire on desserre facilement le tout par un coup frappé en K ou en L dans la direction de la flèche.

Il y a donc arcboutement, il est facile de s'en rendre Compte, en effet:

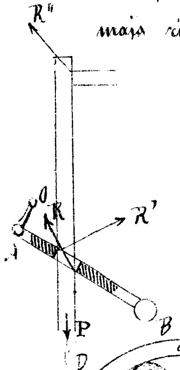
Cherchons les conditions pour que le mouvement soit sur le point de naître dans le sens ascendant

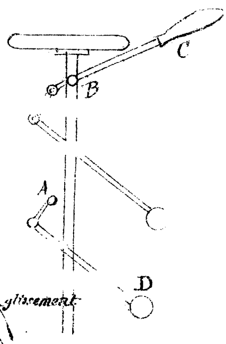
Les forces extérieures qui agissant sur le système sont le poids Q du valet appliqué en son centre de gravité et à la réaction F de la pièce de bois pressée ces 2 forces ont pour résultats une force S qui leur est parallèle et situé du coté de la plus grande P (composition des forces parallèles et ne sont contraire) Outre les forces P et Q le valet est encore soumis aux réactions R et K' en A et B en sens inverse du mouvement qui tend à se produire, pour qu'il y ait équilibre c'est à dire pour que le mouvement ascendant soit sur le point de naître, il faudrait que les réactions R et R' se composassent sur la direction de S, or les dimensions de l'appareil sont calculées de manière que cela ne puisse avoir lieu.

Donc le mouvement dans le sens ascendant n'est pas possible. _ L'équilibre s'établit de telle façon que les réactions en A et en B ne font plus avec la normale l'angle α, mais des angles plus petit de manière que leurs directions r, r' vont précisément se couper aux sur la direction de S la résultante de ces réactions d'ailleurs égale et directement opposée à S.

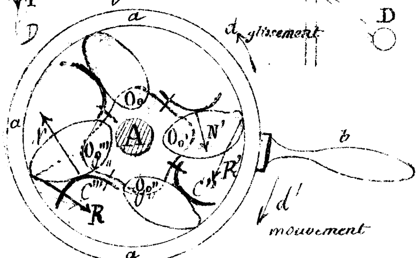
Tant que cet état particulier de stabilité sera établi de cette façon le mouvement ascendant sera impossible, mais si j'exerce en K, une force ascendante détruisant non-seulement la force Q mais la remplaçant par une autre en sens contraire c'est à dire de même sens que P, il est évident que la résultante S va se déplacer, passer entre les directions de P et la direction GB (composition des forces parallèles) et pourra être amenée jusqu'en H ou se croisent les réactions dont l'inclinaison est α, c'est à dire celle qui convient à la rupture de l'équilibre, on soulèvera alors le valet sans difficulté et celui ci se trouvera ainsi desserré.

Encliquetage et presse Saladin à simple et double effet. Considérons le système indiqué dans la figure. Il est clair que le mouvement ne peut se produire dans le sens de la flèche P, attendu qu'il n'y a pas d'équilibre possible entre les forces P, R, R', R''





mais rien ne s'oppose au mouvement de la tige dans le sens ascendant si d'ailleurs sans changer la position inclinée du levier AB on le transportait parallèlement à lui même de bas en haut il est clair que la tige serait entraînée dans ce mouvement de translation, enfin si on faisait osciller le levier AB autour du point A en relevant la boule B, il est clair que la tige descendrait librement. Mr Saladin a appliqué ces principes à la construction d'une presse à simple effet indiqué ci contre. A et B sont des axes fixes si on presse sur le levier C la tige va nécessairement monter, mais aussitôt qu'on s'arrêtera, le levier AD, d'abord relevé par l'effet du soulèvement de la tige reprendra sa position et empêchera la tige de descendre, lorsqu'on relèvera le levier C pour donner un second coup.

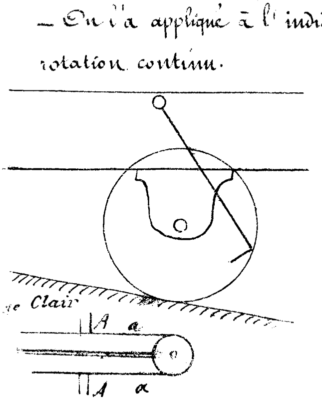


Mr Saladin a encore construit une presse à double effet basée sur les mêmes principes.

Encliquetage Dobo et Encliquetage Clair.

Soit un arbre A auquel il s'agit de communiquer un mouvement de rotation. Sur une pièce calée sur cet arbre, oscillant en O, O' O'' O''' des cames embrassées par un anneau a a f ou sur l'arbre et qu'on manœuvre à la main au moyen des leviers bb — D'ailleurs des petits ressorts c c' c'' c''' appuient ces cames contre la circonférence intérieure de l'anneau. — Cela posé si on imprime à la couronne une rotation dans le sens de la flèche d. la came O''' est soumise aux forces R, N situées de part et d'autre de l'axe O''' elles peuvent donc se faire équilibre c'est à dire que cette came peut céder à l'action de l'anneau qui frotte sur lui, et par suite l'entrainement de A ne peut avoir lieu. Si au contraire le mouvement est de sens opposé suivant la flèche d' et que je considère la came O' par exemple, elle est soumise aux forces N' R' tendant à faire tourner cette came dans le même sens autour de O'. elles ne pourront donc se faire équilibre et le glissement relatif sera dès lors impossible, il y a donc arcboutement et par suite le levier entrainera l'arbre A

Supposons que sur le même arbre A soit disposé supérieurement au 1er encliquetage que nous venons de décrire un second encliquetage identique à celui là, c'est à dire dont les cames soient disposées dans le même sens appelons a'a' la couronne entourant ces cames, et supposons que par un moyen quelconque nous puissions donner aux deux anneaux aa a'a' un mouvement de rotation de sens opposé, alternativement de droite à gauche et de gauche à droite pour chaque couronne, l'arbre sera par suite animé d'un mouvement de rotation continu dans le sens de la flèche d' — C'est en cela que consiste le principe sur lequel est basé l'encliquetage Clair : Le mouvement contraire des deux anneaux est obtenu au moyen d'une vis à doubles filets croisés agissant sur deux roues tangentes constituant les deux anneaux a, a' — Cette vis étant animée d'un mouvement circulaire alternatif ce mouvement se transforme par suite de ce mécanisme ingénieux en circulaire continu — On l'a appliqué à l'indicateur de Watt pour donner au tambour un mouvement de rotation continu.



Arcanseau-cale de Mr Blatin

Cet appareil s'applique aux roues des chariots pour soulager les chevaux dans les montées, il permet le mouvement en avant et prévient toute rétrogradation en arrière quand le cheval s'arrête pour souffler

Cet appareil consiste en un simple crochet assemblé autour d'une charnière O au châssis de la voiture et qu'on laisse retomber par son poids sur les jantes des roues de derrière

Freins. — On désigne sous le nom de freins des appareils employés pour arrêter ou ralentir brusquement une machine, ce sont des modérateurs qui mettent en jeu le frottement et produisent ainsi l'effet voulu au prix d'une certaine perte de travail

Nous étudierons successivement le frein de translation, le frein de rotation et le frein dynamométrique de Prony

Quant au frein flexible, le plus puissant de tous, il fait partie des applications utiles du frottement des cordes dont nous parlerons dans l'article 11

Frein de translation. — Frein Laignel — Ce frein a été appliqué aux chemins de fer, à cet effet, aux wagons ordinaires remorqués par la locomotive. on a joint un wagon spécial nommé wagon frein. lorsqu'il s'agit de ralentir la vitesse du train, une manœuvre du garde frein permet de soulever le wagon sur de larges patins qui viennent s'appliquer sur les rails, de manière à substituer au frottement de roulement, le frottement de glissement.

Considérons le wagon frein seulement, si $M = \frac{P}{g}$ est sa masse, v_0 sa vitesse sa puissance vive est : $\frac{Mv_0^2}{2}$, lorsque le train s'arrête, cette puissance vive s'est complètement annulée par suite du travail résistant de la résistance passive introduite ; or si x désigne l'espace parcouru depuis le moment où on applique le frein jusqu'au moment de l'arrêt complet, fPx sera le travail de la résistance tangentielle fP due au frottement en négligeant la puissance vive de rotation des roues ; on aura donc :

$$\frac{Mv_0^2}{2} = fPx$$

d'où on tire l'espace parcouru par le train avant son arrêt complet.

$$x = \frac{Mv_0^2}{2fP} = \frac{V_0^2}{2fg} = \frac{V_0^2}{2g} \cdot \frac{1}{f}.$$

Supposons qu'on demande le temps que mettra le wagon avant de s'arrêter. La force retardatrice fP communiquera au wagon une accélération retardatrice

$$J = \frac{fP}{M} = fg$$

dès lors la loi des vitesses de ce mouvement retardé sera :

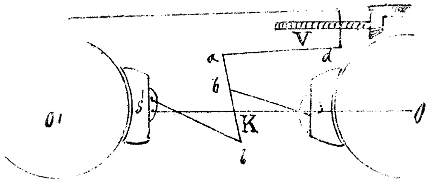
$$V = V_0 - fgt$$

en y faisant $v=0$, on déduira de cette formule.

$$t = \frac{v_0}{fg}$$

tel est le temps que mettra le train à s'arrêter, temps compté depuis la manœuvre du garde frein.

Frein de rotation. Le frein précédent n'est pas celui qui est le plus habituellement employé. On a adopté plus généralement la disposition suivante : deux sabots s et s' en frein sont articulés avec 2 leviers égaux Sb, $S'b$, articulés eux mêmes à un 3e levier bb mobile autour d'un axe K fixé au chassis de la voiture l'extrémité C du levier s'articule avec une tige Cd articulée elle-même avec une pièce mobile dd' qui sert d'écrou à une vis V mobile autour de son axe, mais non dans le sens longitudinal et que le garde frein peut faire tourner de sa place par l'intermédiaire d'un engrenage.



On comprend facilement le jeu de ce frein de rotation

La tige $c'd'$ produit un effet analogue sur les roues suivantes.

Cherchons encore dans ce cas quel est l'espace parcouru par le wagon freiné depuis le moment où on applique le frein jusqu'au moment de l'arrêt complet. Soient N et N' les pressions normales exercées sur les sabots, les frottements tangentiels correspondants seront fN et fN', et si α est l'angle décrit avant l'arrêt, M la masse du wagon v, sa vitesse, on aura en négligeant la puissance vive de rotation des roues

$$\frac{Mv^2}{2} = fNr\alpha + fN'r\alpha = fr\alpha\,(N+N')$$

Or $x = r\alpha$ donc

$$x = \frac{Mv^2}{2f(N+N')}$$

On trouvera d'ailleurs comme précédemment le temps nécessaire à l'arrêt

En effet la force retardatrice a pour expression $f(N+N')$, elle imprime une accélération retardatrice $T = \frac{f(N+N')}{M}$

D'où on déduit la loi des vitesses.

$$v = v_0 - \frac{f(N+N')}{M}t$$

faisant $v = 0$, on tirera de là $t = \frac{Mv_0}{f(N+N')}$

En France d'après les règlements administratifs, il doit y avoir une voiture à frein sur 7 voitures et au dessous, 2 voitures à frein si le nombre des voitures est compris entre 7 et 15, 3 voitures à frein dans un train de plus de 15 voitures le t n t indépendamment des freins établis sur le tender. Ce nombre doit être augmenté dans les fortes pentes. Sur le chemin de Turin à Gênes, on compte une voiture à frein sur 2 pour les trains de voyageurs sur 3 pour les trains de marchandises.

On applique aussi le frein aux voitures ordinaires, anciennement le sabot des rouliers servait à retenir une voiture sur une pente trop rapide, en substituant toujours le glissement au roulement ; ce dispositif est incommode, il est de plus dangereux dans les descentes, car il peut résulter de la rupture de la chaîne qui retient le sabot de graves accidents

On a substitué à ce sabot le frein que nous venons de décrire, on peut en effet, le faire agir d'une manière plus graduelle puisqu'on opère par l'intermédiaire d'une vis et il n'offre pas les dangers de rupture qu'offre le sabot.

Les freins ont aussi été appliqués à arrêter dans l'espace de temps le plus restreint possible les arbres tournant avec une certaine vitesse souvent très grande. Ils peuvent consister simplement comme cela a lieu dans les freins ordinaires, d'un ou plusieurs arcs en bois qu'on peut appuyer sur la circonférence de la roue au moyen d'une machoire formée de 2 arcs en fer, mobiles autour d'un point fixe O, ces deux arcs s'articulent et leurs extrémités a et b avec un levier canelé a c b, mobile autour du point c

Il se développe alors un frottement proportionnel à la pression P qu'on exerce sur cette machine.

On peut se proposer de calculer le nombre de tours que fera l'axe avant de s'arrêter. Supposons que le frein embrasse une ½ circonférence et désignons par P la pression normale exercée à l'aide de la poignée K, par n le nombre de ½ tours décrits par la roue avant son arrêt complet. — Le travail de frottement pour ces n ½ tours sera : $n f P R \pi$

On aura donc en égalant ce travail de frottement à la puissance vive $\frac{Mv^2}{2}$ qu'il annule

$\frac{Mv^2}{2} = n f P R \pi$ (M masse de la machine) d'où $n = \frac{Mv^2}{2 f P R \pi}$ (v vitesse moyenne)

Cette formule montre que pour peu que la puissance vive soit considérable, ce nombre n sera très grand parce que le coefficient f est assez petit. Il a donc fallu trouver un autre procédé pour produire facilement des efforts énergiques, le frein flexible dont nous parlerons dans l'article suivant résout le problème.

Frein Dynamométrique de Prony — ou Appareils servant à enregistrer le travail fourni par les moteurs.

Le frein de Prony ne donne pas le travail total développé par le moteur, mais seulement la quantité de travail transmise à l'arbre moteur, c'est en effet cela seulement qui intéresse l'industriel. Nous décrirons dans la Thermodynamique, l'indicateur de Watt, petit appareil donnant le travail total réel de la vapeur dans le cylindre des machines à vapeur.

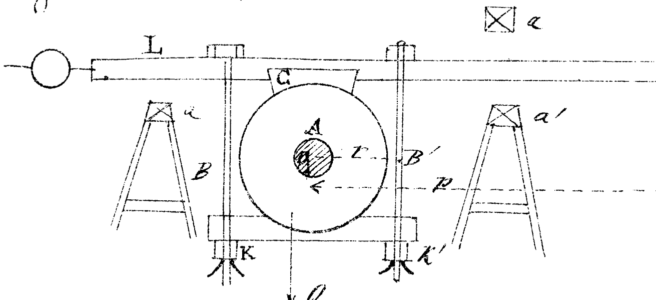
Mais on comprend que par suite des frottements qui s'exercent dans le cylindre et jusqu'à l'arbre moteur, le travail rendu réellement sur cet arbre soit inférieur aux indications de ce petit appareil enregistreur, le frein dynamométrique de Prony dont nous allons nous occuper n'a pas cet inconvénient et donne immédiatement le travail rendu sur l'axe moteur, quelque soit d'ailleurs la source motrice (Vent, Eau ou vapeur)

Principe du frein de Prony. — Le principe de cet appareil est simple. Il consiste à supprimer les résistances ordinaires pour les remplacer par une résistance passive dont le travail est facile à évaluer.

La résistance utilisée est le frottement et son travail qu'enregistre précisément l'appareil en question représente le travail moteur cherché.

Description - Le frein tel qu'il a été décrit et employé pour la première fois par M. de Prony à Paris, à l'occasion d'une expertise sur la machine à vapeur du Gros Caillou se compose d'un levier LL' garni d'un coussinet C qui repose sur l'arbre tournant A. Au levier LL' est réunie une pièce de bois KK' par l'intermédiaire de deux boulons B, B' au moyen desquels on peut serrer à volonté, l'arbre entre les pièces LL' et KK' qui portent le nom de machoires du frein...

Il résulte évidemment de cette façon d'opérer, le développement sur la circonférence de l'arbre d'un frottement considérable, qui, pendant le mouvement tend à entrainer le levier LL' et à le faire participer à la rotation de l'arbre, on établit alors 2 arrêts solides ou traverses a, a' contre lesquelles le levier vient buter à la hauteur des plus grandes oscillations qu'on veut lui permettre. En serrant peu à peu les écrous on ralentit la vitesse de rotation qui s'est accélérée par le fait même de la suppression des résistances ordinaires, et on la ramène à la vitesse de régime. La machine se trouvant alors dans sa situation ordinaire, tout se réduit à mesurer le travail de la résistance de frottement introduite qui représente nécessairement d'une manière exacte le travail que transmettait l'arbre.



Pour cela on supprime les cales qui retenaient le levier et l'on charge le plateau d'un poids P, qu'on nomme la tare du frein tel que l'appareil se maintienne de lui même en équilibre

Cela étant d'une part, il y a équilibre entre les résistances de frottement que les machoires du frein exercent sur l'arbre moteur ou sur la poulie de frein calée sur l'arbre moteur et l'effort moteur Q supposé appliqué tangentiellement à la circonférence de rayon q. On a donc pour l'équilibre

$$Qq = r \sum f N$$

D'autre part il y a équilibre entre les résistances de frottement que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

que l'arbre ou la poulie de frein exerce sur les mâchoires du frein et l'effort P agissant à l'extrémité du levier p. — On a donc pour l'équilibre en négligeant le poids du levier lui même ou en supposant que ce levier soit équilibré de façon que son centre de gravité soit sur la verticale du centre de l'arbre :

$$Qq = r\Sigma f N$$

De ces deux relations on conclut :

$$Pp = Qq$$

Si la machine fait n tours par minute, le travail par seconde est :

$$T_m = TQ = \frac{Qq \cdot 2\pi n}{60} \text{ kilogrammètres.}$$

Ceci représente bien le travail rendu sur la poulie abstraction faite du travail absorbé par les organes intermédiaires.

Quand le travail moteur transmis est considérable, si le frein entourait immédiatement l'arbre moteur, il faudrait serrer les écrous énormément pour développer un frottement suffisamment énergique pour faire équilibre à l'effet moteur. — De là grippement et échauffement de l'arbre. Pour éviter ces inconvénients, on cale alors sur l'axe moteur une poulie dite poulie de frein et c'est sur cette poulie qu'on applique le frein.

La disposition décrite est celle employée par Prony, mais elle présente cet inconvénient que l'appareil est toujours en équilibre instable. En effet dans cette disposition, le levier étant à la partie supérieure, si le travail moteur faiblit un instant, le levier s'abaisse par suite le moment de P augmente, il tend donc à s'abaisser de plus en plus, de même si le travail moteur augmente le levier s'élève et tend de plus en plus à s'élever parce que le moment de P diminue, aussi avec cette disposition les arrêts a et a' sont-ils de toute nécessité. Aujourd'hui pour éviter ces inconvénients on dispose le frein en sens inverse de manière à ce que le levier occupe la position inférieure, il en résulte que si le travail moteur diminue, le bras de levier de P diminue aussi, que quand ce travail augmente ce bras de levier augmente également, qu'en définitive l'équilibre est stable et s'établit de lui même, ce qui permet de laisser marcher longtemps l'appareil presque sans surveillance.

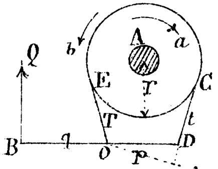
Article II
Applications utiles du frottement des cordes.

Nous avons vu que le glissement des cordes sur un rouleau développait une résistance considérable, croissant très rapidement avec l'angle d'enroulement. On met à profit cette propriété pour arrêter ou ralentir dans certains cas les corps en mouvement. — Exemples :

On cale sur l'arbre moteur d'une machine une poulie d'un grand diamètre dite poulie de frein sur laquelle on dispose ce qu'on nomme le frein flexible (qui consiste en une lame flexible en fer ou en une bande d'acier qui épouse la poulie de frein sur environ les $3/4$ de sa circonférence.) L'une des extrémités de cette lame est attachée à un point fixe o, l'autre s'attache à l'extrémité D d'un levier BD oscillant au point o.

En exerçant au point B de ce levier un effort Q, cet effort se transmet amplifié au point D et il presse la lame contre l'arbre tournant. Il se développe alors entre la poulie et la bande d'acier, un frottement de glissement énorme qui va détruire peu à peu la vitesse de la machine.

On peut se proposer comme dans les cas précédents de calculer le nombre x de tours que fera l'arbre jusqu'à son arrêt.



Supposons que la machine ait une puissance vive $\frac{1}{2}\omega^2 I$, il suffit pour résoudre la question d'écrire que le travail de la résistance du frottement jusqu'à l'arrêt est égale à cette puissance vive $\frac{1}{2}\omega^2 I$. Calculons ce travail. Pour cela remarquons qu'au point de vue du frottement, il est évident (la poulie A tournant dans le sens de la flèche a) que les choses se passent de la même façon que si la poulie étant fixe, la bande flexible tournait dans le sens de la flèche b. Le brin OE est alors le brin conducteur, soit T sa tension c'est la tension motrice, le brin CD sera le brin conduit soit t sa tension, c'est la tension résistante, nous aurons donc entre T et t la relation : $T = te^{fx}$ (1).

Cela étant, la force résistante qui s'oppose au mouvement de la machine est évidemment $T - t$; elle exécute jusqu'à l'arrêt un travail résistant

$$(T-t)\, r.\, 2\pi x \qquad (x, \text{ le nombre de tours jusqu'à l'arrêt})$$

On a donc l'égalité :

$$\frac{1}{2}\omega^2 I = (T-t)\, r.\, 2\pi x \qquad (\alpha) \qquad (r \text{ rayon de la poulie})$$

Évaluons $T - t$ et pour cela considérons la relation (1) et la relation :

$Qq = pt$ (2) fournie par l'équilibre du levier ; la relation (2) nous détermine t :

$$t = \frac{Qq}{p}$$

D'ailleurs la relation (1) donne :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 24 WR 50 3

$$T - t = t(e^{f\alpha}-1). \quad \text{d'où} : T - t = \frac{Qq}{\rho}(e^{f\alpha}-1)$$

Substituant dans (α), il vient :

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 I = \frac{Qq}{\rho}(e^{f\alpha}-1) r . 2\pi x$$

d'où $$x = \frac{\omega_0^2 I \rho}{2 . Qq (e^{f\alpha}-1) . 2\pi r}$$ ou bien

$$\underset{\text{(angle décrit jusqu'à l'arrêt)}}{2\pi . x} = \frac{\omega_0^2 I \rho}{2 Qq r (e^{f\alpha}-1)} \quad (\beta)$$

Si $f = 0{,}2$ (fer sur fonte sans enduit) $e^{f\alpha} = 2{,}56$; $e^{f\alpha}-1 = 1{,}56$

Si l'arbre tournait en sens inverse, il faudrait permuter T et t, ce serait la plus petite tension qui passerait au point fixe, on aurait :

$$T = \frac{Qq}{\rho} = t . e^{f\alpha}$$

$$T - t = \frac{e^{f\alpha}-1}{e^{f\alpha}} . \frac{Qq}{\rho}$$

le coefficient numérique $e^{f\alpha}-1 = 1{,}56$ de $(T-t)$

serait remplacé par $\frac{e^{f\alpha}-1}{e^{f\alpha}} = 0{,}61$

ce qui augmenterait x, donc la 1ère disposition est préférable comme le plus souvent les freins doivent servir à arrêter le mouvement communiqué à un arbre tantôt dans un sens, tantôt dans un autre le plus avantageux est d'employer un frein dont les 2 extrémités soient fixées, à l'extrémité de 2 leviers égaux.

Reprenons le 1er cas où la poulie A tourne dans le sens de la flèche a, et supposons que nous voulions chercher le temps que mettra la machine pour s'arrêter. Pour cela observons que l'équation différentielle du mouvement uniformément retardé qui s'établit est :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_0 \text{ forces extérieures}}{I} = \frac{(T-t) r}{I}$$

ou en remplaçant $T-t$ par sa valeur $\frac{Qq}{\rho}(e^{f\alpha}-1)$ on aura :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Qqr}{\rho}\frac{(e^{f\alpha}-1)}{I}$$

D'où on tire en intégrant et ajoutant la constante ω_0 vitesse initiale

$$\omega = \omega_0 - \frac{Qqr}{\rho}\frac{(e^{f\alpha}-1)}{I} t$$

Il y a arrêt pour $\omega = 0$ répondant à

$$t = \frac{\omega_0 . \rho . I}{Qqr(e^{f\alpha}-1)}$$

Relation que l'on aurait pu d'ailleurs obtenir directement au moyen de la formule (β). En effet le mouvement étant uniformément retardé, on sait que le chemin angulaire $2\pi x$ décrit jusqu'à l'arrêt d'un mouvement uniformément retardé est le même que celui qui serait décrit d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à la moyenne

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 56 VIR 76-3

des vitesses extrêmes égale ici à $\frac{\omega_0}{2}$. On a donc pour déterminer t, la relation :

$$2\pi\alpha = \frac{\omega_0}{2}t \qquad \text{D'où } t = \frac{2.2\pi\alpha}{\omega_0} = \frac{\omega_0 \rho I}{Qqr(e^{f\alpha}-1)}$$

en remplaçant $2\pi\alpha$ par sa valeur (β)

Si la poulie A au lieu de tourner dans le sens de la flèche a tournait en sens contraire — On obtiendrait pour la durée jusqu'à l'arrêt, en remplacant le coefficient $e^{f\alpha}-1$ par le coefficient $\frac{e^{f\alpha}-1}{e^{f\alpha}}$:

$$t_1 = \frac{\omega_0 \rho I}{Qqr\frac{(e^{f\alpha}-1)}{e^{f\alpha}}}$$

$$\text{D'où } \frac{t}{t_1} = \frac{1}{e^{f\alpha}} = \frac{1}{2,56}$$

Ainsi dans le second cas il faut $2f\frac{1}{2}$ plus de temps pour arrêter la machine que dans le 1er cas. — C'est donc, comme nous l'avons déjà dit, la 1ère disposition qui a le plus d'efficacité et que l'on doit toujours employer.

Arrêt des Bateaux. — Pour arrêter en peu de temps un bateau animé d'une vitesse assez faible mais dont la masse et par suite la puissance vive, est considérable, on emploie une corde attachée par l'une de ses extrémités au bateau, on fait faire à l'autre bout 1 ou 2 tours sur un cylindre de fonte fixé à cet effet sur le quai et l'on tient l'autre extrémité à la main. Un petit effort suffira pour faire équilibre à une grande tension exercée par le bateau. Soit en effet T, cet effort de traction exercé par le bateau, et t l'effort suffisant pour lui faire équilibre, on aura $\qquad T = te^{f\alpha} \quad (1)$

Si donc l'on connaissait T, on pourrait calculer l'effort t nécessaire.

Or, on connait la masse du bateau m, sa vitesse v, et par suite sa puissance vive $\frac{1}{2}mv^2$. Or à l'instant où la tension T se développe, le mouvement se ralentit le bateau s'arrête lorsque toute la puissance vive a été entièrement détruite par le travail résistant Tl de T (l désignant la distance que parcourra le bateau avant de s'arrêter sous l'influence de la tension T) on aura donc pour déterminer T la relation

$$\frac{mv^2}{2} = Tl \qquad (3)$$

$$\text{ou} \qquad T = \frac{mv^2}{2l}$$

Substituant dans (1) il viendra

$$t = \frac{mv^2}{2l \times e^{f\alpha}} \qquad (2)$$

tel est l'effort à exercer pour faire équilibre à la tension T exercée par le bateau. (2)

Réciproquement, connaissant l'effort t qu'on exerce, la relation :

$$l = \frac{mv^2}{2\times e^{f\alpha} t}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 763

fera connaître quelle distance parcourra le bateau avant de s'arrêter sous l'influence de la tension T.

On pourrait également se demander quelle tension t, il est nécessaire d'exercer pour que le bateau ne parcoure avant son arrêt définitif qu'un espace déterminé l, la relation (2) résout la question et on voit que cet effort est d'autant plus grand que l est plus petit ; t deviendrait infini pour $l = 0$, c'est à dire dans le cas où on se proposerait d'arrêter instantanément le bateau, mais t devenant infini, la relation (1) nous montre que T devient également infini c'est à dire que la corde cassera infailliblement.

C'est qu'en effet, la puissance vive ne peut être détruite que par du travail développé ce qui exige nécessairement un certain espace parcouru (relation (3)) plus ou moins grand suivant la puissance vive acquise et la grandeur de la résistance, espace qui ne pourra jamais être réduit au dessous d'une certaine limite quelque soit l'appareil employé

Supposons que pour arrêter rapidement le bateau on enroule immédiatement la corde d'un grand nombre de tours sur le cylindre de fonte et que l'on exerce sur le brin libre une tension t considérable. Il résultera de cette manière d'opérer (relation (1)), à l'autre extrémité de la corde une tension T également considérable et par conséquent capable de casser la corde

On opère au contraire de la façon suivante : on enroule je suppose seulement d'un tour la corde sur le cylindre, l'effort que l'on peut exercer n'est pas alors suffisant pour arrêter le bateau, celui ci continue sa marche, mais celle ci est continuellement ralentie par le glissement de la corde sur le cylindre de fonte, travail négatif qui diminue peu à peu la puissance vive $\frac{mv^2}{2}$ du bateau, il résulte de là que la tension

$$T = \frac{mv^2}{2l}.$$

a diminué ; c'est alors seulement qu'on enroule la corde d'un plus grand nombre de tours, l'homme a ainsi calculé instinctivement la tension t qu'il doit exercer à l'extrémité de la corde, de manière que la tension qui en résulte à l'autre extrémité ne soit pas assez forte pour la casser

Sauvetage en cas d'incendie — Un homme peut descendre sans danger d'une assez grande hauteur, par exemple, en cas d'incendie, en se suspendant à une corde qu'il fait passer sur un cylindre de bois fixe et dont il tient à la main l'autre bout. Il est alors très facile de modérer la descente et de s'arrêter en un point quelconque.

Supposons en effet, le mouvement sur le point de naître dans le sens descendant ; soient T et t les tensions des 2 brins de la corde

Puisque la corde fait un ½ tour du cylindre, on a :

$$T = te^{f\pi} \text{ ou } \frac{T}{t} = e^{f\pi} \quad (1)$$

De plus $\quad T + t = P \quad (2)$

de (2) on tire $\quad T = P - t$

Substituant dans (1) $\quad P - t = te^{f\pi}$

$$\text{d'où} \quad t = \frac{1}{1+e^{f\pi}} . P$$

Ainsi t est toujours très inférieur à P et π devenant très grand c'est à dire en supposant que le nombre de tours d'enroulement de la corde sur le cylindre soit très grand, t devient inappréciable. un très faible effort permettra à l'homme de se maintenir en un point situé à une hauteur quelconque.

Application. Le coefficient de frottement des cordes sur le bois étant 0.5 on a.

$$f\pi = 0.5 \times 3.14 = 1.57$$

$$\text{d'où} \quad \frac{T}{t} = e^{f\pi} = 4.80$$

de plus $T + t = P$, on a donc $t . 4,8 + t = P$ ou $t(4.8+1) = P$

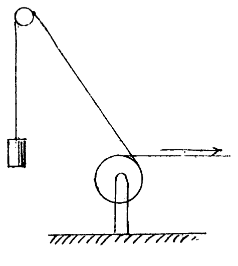
ou $t(5.8) = P \quad t = \frac{1}{5.8} P \qquad t = 0,17 P \qquad T = 0,83 P$

P étant environ 75^K, l'effort t suffisant pour arrêter la descente est donc environ 12^K seulement. Pour s'élever par le même procédé l'effort devrait être 0,83 P.

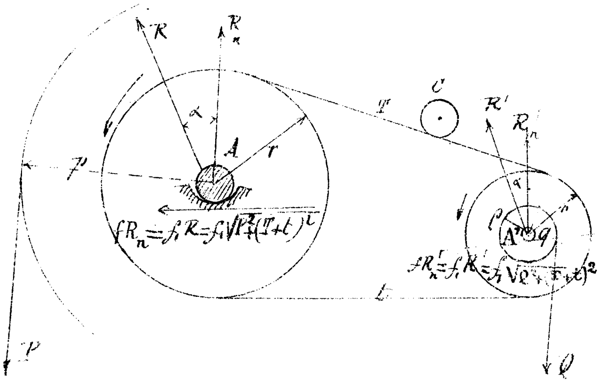
En quadruplant l'arc embrassé, ce qui donne 4 π au lieu de π, c'est à dire en faisant faire 2 tours à la corde, le rapport $\frac{T}{t}$ serait élevé à la 4e puissance soit à peu près $\quad T = 530 t . \quad (1)$

Treuil et Cabestan. On utilise encore cette résistance de glissement pour élever des fardeaux au moyen du treuil ou du cabestan, au lieu d'arrêter la corde sur le cylindre du treuil, on obtient plus de sécurité en faisant simplement faire 2 tours à cette corde. l'extrémité libre aboutit dans la main d'un enfant et l'on voit qu'un effort de 2^{kg} suffit pour soutenir un poids de 1000^K et plus car en faisant $t = 2$ dans la formule (1) on trouve

$$T = 530 . 2 = 1060^K$$

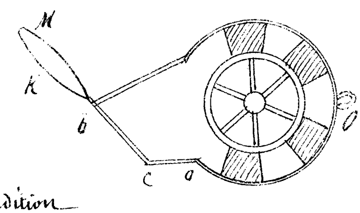


les courroies leur tension pour qu'il y ait entraînement et non glissement au départ.



On demande 1° Une relation entre P et Q en égard au frottement des tourillons AA de rayon ρρ'; on fait abstraction de la raideur de la courroie et l'on suppose que la tension développée uniformément dans toute la courroie pendant le repos est telle que la conduite puisse avoir lieu au départ.

2° On demande la valeur de cette tension uniforme minimum T_0 nécessaire pour que la conduite puisse avoir lieu au départ.



a Équilibre de la poulie A

(1) $Pp - (T-t)r - f_1\rho\sqrt{P^2+(T+t)^2} = 0$

b Équilibre de la poulie A'

(2) $(T-t)r' - Qq - f_1\rho'\sqrt{Q^2+(T+t)^2} = 0$

En joignant à ces deux relations la condition

(3) $T+t = 2T_0$

qui exprime que la tension T_0 de la courroie au repos (supposée suffisante pour l'entraînement) est égale à la moyenne des tensions des deux brins pendant le mouvement ce qui est évident du moment que l'on regarde la courroie comme inextensible. Il suffira d'éliminer t et T entre (1) (2) (3) pour avoir la relation cherchée entre P et Q.

Mais avant toute chose, il faut déterminer cette tension T_0 de la courroie au repos nécessaire pour déterminer l'entraînement au départ.

Or pour qu'il y ait entraînement, il faut que la courroie ne puisse glisser sur aucune des deux poulies, il faudra donc qu'on ait en vertu des études précédentes les deux conditions

(4) $T \leqq t.e^{f\frac{s}{r}}$ ou $\frac{T}{t} \leqq e^{f\frac{s}{r}}$

(5) $T \leqq t.e^{f\frac{s'}{r'}}$ ou $\frac{T}{t} \leqq e^{f\frac{s'}{r'}}$

s et s' arcs embrassés sur les deux poulies r et r'. Dans l'hypothèse de la figure où les brins ne sont plus croisés

$$\frac{S}{p} = \frac{S'}{p'} = \pi$$

mais le coefficient f peut n'être pas le même pour les deux poulies.

Soit donc m le plus petit des seconds membres des inégalités précédentes dont l'expression générale est $e^{f\alpha}$, on devra poser: $\frac{T}{t} < m$ ou $T = Kmt = Kte^{f\alpha}$ (6).

K étant < 1 et d'autant plus faible que l'appareil sera plus exposé à des secousses.

Il est facile de conclure de là, la tension originelle T_0 nécessaire pour que l'entraînement ait lieu, en effet (3) et (6) donnent

$$T_0 = \frac{T+t}{2} = \frac{1}{2}t\,(1+Ke^{f\alpha}) \quad (7)$$

De (1) on tire d'ailleurs:

$P = \frac{r}{p}(T-t) + f_1\frac{\rho}{p}\sqrt{P^2+(T+t)^2}$ et remplaçant $T-t$, $T+t$ en fonction de t il vient.

$$P = \frac{r}{p}t\,(Ke^{f\alpha}-1) + f_1\frac{\rho}{p}\sqrt{P^2+t^2(Ke^{f\alpha}+1)^2} \quad (8)$$

D'où en négligeant le terme dû au frottement des tourillons.

$$\frac{(7)}{(8)} \quad \frac{T_0}{P} = \frac{p}{2r}\cdot\frac{1+Ke^{f\alpha}}{Ke^{f\alpha}-1}$$

d'où enfin

$$T_0 = \frac{Pp}{2r}\cdot\frac{Ke^{f\alpha}+1}{Ke^{f\alpha}-1}$$

Le second facteur de T_0 est constamment plus grand que 1, il devient $=1$ pour $\alpha = \infty$. Donc T_0 sera minimum quand on fera α le plus grand possible. De là l'avantage au point de vue de l'entraînement de l'emploi des courroies à brins croisés.

Connaissant T_0, il est alors facile de trouver la relation cherchée entre P et Q. En effet (1) et (2) peuvent s'écrire:

$$Pp - (T-t)r - K = 0 \quad \text{en posant } K = f_1\rho\sqrt{P^2+4T_0^2}$$

$$Qq - (T-t)r' - K' = 0 \qquad K' = f_1\rho'\sqrt{Q^2+4T_0^2}$$

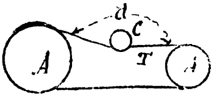
et en éliminant $T-t$ on aura enfin à la relation cherchée:

$$Ppr' - Qqr - Kr' - K'r = 0$$

Remarques – 1. Nous avons supposé dans cette étude que la courroie était inextensible, mais en réalité il n'en est pas ainsi, il faut donc se réserver un moyen automatique pour maintenir constante la tension minimum nécessaire pour l'entraînement T_0.

Pour cela on fait usage d'un rouleau de tension C dont la pression p sur la courroie est déterminée par la formule $p = 2T_0\cos\frac{\alpha}{2}$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 54 VIR 70-3



— toujours très obtus se mesure sur la Courroie mise en place.

2° Ainsi que nous l'avons expliqué en cinématique, afin que les courroies ne quittent pas les poulies sur lesquelles elles passent, il convient que les pourtours de ces poulies aient une convexité égale au $1/10^e$ de leur largeur.

III Largeur des courroies. — Dans la pratique, la largeur des courroies enveloppant la 1/2 de la Circonférence des poulies, se détermine ordinairement au moyen de la formule empirique

$$l = K \frac{C}{V}$$

$K \begin{cases} 0{,}15 \text{ pour les arbres de couche} \\ 0{,}20 \text{ pour les arbres verticaux} \end{cases}$ C — Puissance transmise exprimée en chevaux. V — Vitesse de la Courroie exprimée en mètres.

Cette formule signifie que la largeur de la Courroie doit être proportionnelle à la puissance à transmettre, et en raison inverse de la vitesse.

Au lieu de se servir du Coefficient K qui est assez vague, il vaut mieux partir de l'observation. Soit l' la largeur d'une courroie transmettant C' avec une vitesse V' (toutes quantités données par l'expérience) on demande la largeur l d'une courroie devant transmettre C avec une vitesse V. On a alors pour déterminer l l'égalité:

$$\frac{l}{l'} = \frac{C}{V} \cdot \frac{V'}{C'} \quad \text{D'où } l = \frac{l'V'}{C'} \cdot \frac{C}{V}$$

Art III — Applications utiles du frottement de roulement

Le frottement de roulement étant beaucoup plus doux que le frottement de glissement, on peut dire que toutes les fois que dans les machines on le substitue à ce dernier, c'est une application utile au moins relativement puisqu'on diminue le travail perdu.

Exemples. — Essieux de wagons roulant sur galets — Couronne de galets dans les grues à deux points fixes inférieurs (Statique appliquée) — Transport sur rouleaux sur galets, sur roues, suspension de la grosse cloche de Metz etc. etc. etc...

Art IV. — Applications utiles de la résistance des milieux.

La résistance des milieux en permettant de prendre sur eux un point quelconque d'appui donne la possibilité de s'y diriger et de s'y mouvoir. — Sur l'eau par exemple, la propulsion s'opère soit par rames, roues à aubes ou hélices.

En Combinant d'ailleurs l'action du gouvernail du navire avec la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70 3

direction du vent, on peut en marchant au plus près s'avancer presque en sens contraire de cette direction (Hydraulique) { Moteurs thermodynamiques / Propulseurs hydrauliques }

De même la direction et la propulsion dans l'air est possible théoriquement pour les mêmes motifs, seulement la résistance de ce milieu étant très faible, vu son peu de densité, il faudrait pour résoudre le problème pratiquement c'est-à-dire pour trouver un point d'appui suffisant animer l'organe propulseur (Hélice) d'une vitesse considérable, mais alors le poids de la machine croissant avec les transmissions nécessaires pour cet objet, donneraient naissance à une résistance d'inertie considérable qu'aucune disposition n'a pu surmonter jusqu'à présent. La résistance de l'air permet encore en cas d'ascension aérostatique de parer aux accidents par l'emploi du parachute. — La résistance de l'air donne aussi le moyen de régulariser le mouvement dans certains petits mécanismes, tels que les tournebroches, les horloges à poids, l'appareil à indications continues du général Morin, par l'emploi d'un volant à ailettes dont le mouvement est lié à celui de la machine, etc, etc.

Art. V. — Applications utiles de la résistance due au choc et aux vibrations

Nous avons rappelé (Ch VI) que tout choc était nécessairement accompagné d'une perte de puissance vive due 1° soit à une déformation ou à une désagrégation moléculaire permanente constituant un travail réel effectué, 2° soit à des vibrations sensibles à l'œil nu, tendant à la désorganisation de la machine, 3° soit à des vibrations insensibles à l'œil, mais selon leur rapidité et leur amplitude sensibles à l'oreille (Vibrations sonores) ou au toucher (Vibrations calorifiques).

Mais si ces effets concomitants du choc sont précisément ceux que l'on se propose d'obtenir, si l'on veut par exemple au moyen du choc des pilons ou des marteaux, déformer ou désagréger les corps, au moyen du choc des battants de cloche contre leurs parois intérieures ou au moyen du choc de l'air, contre un biseau dans les instruments à vent produire du son, si l'on veut obtenir une empreinte au moyen du choc des balanciers (presse monétaire) &a &a — Tous ces effets cessent d'être nuisibles et deviennent utiles et la perte de puissance vive dont on vient de parler ne constitue plus une perte puisqu'elle se transforme en travail utile.

Pour bien faire comprendre cette idée, reprenons l'étude du choc dans les pilons et les marteaux. Dans ces appareils le choc des cames de la roue à cames contre les

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIII 70 3

mentonnet du bocard ou sur la queue du marteau constitue bien réellement un travail nuisible parce qu'on ne se propose pas de déformer ou de désagréger ces organes, ni de produire du son ou de la chaleur. — Mais si nous considérons le choc du pilon ou du marteau proprement dit sur la matière placée sur l'enclume et qu'il s'agit soit de déformer, soit de désagréger ce choc n'est plus nuisible puisqu'ici il produit précisément l'effet utile que l'on se proposait; en d'autres termes le travail moléculaire résistant utile de la matière déformée ou désagrégée représente exactement toute la puissance vive possédée par le pilon ou le marteau à l'instant où il arrive au contact de cette matière, si toutefois on a su éviter la production des phénomènes concomitants de vibration et de chaleur en assurant la parfaite invariabilité des assemblages liant l'enclume au sol

---

Fin de la 2^e^ Partie de la Dynamique appliquée.

Table des matières. 3ème Section Dynamique appliquée.

Page

1ère Partie. Introduction à la Dynamique des machines

2e Partie. Étude des résistances de toute nature s'oppost au mvt des machines

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 84 VIR 70-3

Pour la 3me Partie. **Etude des puissances motrices.** Voir le 4e volume

1e Série — (Voir Tableau A. 4e Volume)
Pneumatique et Hydraulique

2e Série (Voir Tableau B. 5e Volume)

BIBLIOTHÈQUE Mathématiques Recherche INTERUNIVERSITAIRE JUSSIEU