N° D'ORDRE
292.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. MORIN.

1re **THÈSE.** — SUR LES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DES FONCTIONS.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS D'ASTRONOMIE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le août 1867, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
SERRET, BOUQUET } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1867

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	PONCELET.	
	LEFÉBURE DE FOURCY.	
PROFESSEURS	DUMAS	Chimie.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	HÉBERT	Géologie.
	PUISEUX	Astronomie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	PAUL GERVAIS	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
AGRÉGÉS	BERTRAND, J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER.
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A

MONSIEUR LAMÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS DES FONCTIONS.

CHAPITRE I.

RECHERCHE DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS.

I. — *Exposé de la question à résoudre.*

Dans un grand nombre de questions de Géométrie, et dans plusieurs théories de Mécanique et de Physique mathématique, on rencontre des expressions algébriques composées des dérivées partielles d'une ou de plusieurs fonctions, et qui jouissent de la propriété de conserver la même forme à quelque système d'axes rectangulaires qu'on les rapporte. Nous citerons, comme exemples, la valeur du rayon de courbure dans une courbe plane $f(x,y) = 0$; l'expression

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2,$$

si souvent rencontrée dans la théorie des surfaces et dans la Mécanique; la quantité

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui forme le premier membre de l'équation qui régit les potentiels, la condensation dans un milieu fluide, la dilatation cubique et la quantité de chaleur dans un milieu solide d'élasticité ou de conductibilité constante, etc.

Nous nous proposons ici de rechercher toutes les expressions différentielles de ce genre qui contiennent seulement les dérivées partielles d'une fonction V des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Notre analyse s'appliquerait également bien, à la vérité, au cas où on voudrait faire entrer dans la composition des expressions cherchées les dérivées de plusieurs fonctions, et nous aurons même occasion de résoudre subsidiairement un de ces problèmes, mais nous nous contenterons d'examiner ici le cas d'une seule fonction, qui demande à être traité le premier comme étant le plus simple.

II. — *Cas où la fonction* V *ne dépend que de trois variables.*

Soit V une fonction des trois variables indépendantes x_1, x_2, x_3 que nous supposons comptées sur trois axes rectangulaires. Posons, pour abréger,

$$\frac{dV}{dx_i} = p_i, \quad \frac{d^2V}{dx_i\,dx_j} = p_{i,j}, \quad \frac{d^3V}{dx_i\,dx_j\,dx_k} = p_{i,j,k}, \ldots.$$

Changeons les axes en d'autres également rectangulaires, et soient x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées du point représenté primitivement par x_1, x_2, x_3. Affectons les p d'accents pour leur faire représenter les nouvelles dérivées $\frac{dV}{dx'_i}$, etc. Les formules de transformation connues permettront d'exprimer au moyen des p' toute fonction F des p, et nous voulons déterminer F de telle sorte que les p' y entrent de la même manière que les p.

La question présente deux difficultés : la première consiste en ce que les formules habituelles de la transformation des coordonnées renferment neuf constantes, dont trois seulement sont arbitraires, et comme l'analyse dont il faut faire usage exigera probablement, quelle qu'elle soit, qu'on annule les coefficients de celles de ces constantes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui sont indépendantes, on sera amené à des éliminations compliquées. Il existe, à la vérité, des formules dues à Euler qui n'introduisent que les trois constantes indépendantes ; mais leur défaut de symétrie les rendrait peu commodes. En second lieu, ayant exprimé dans F les p en fonction des p', on n'aperçoit guère d'autre moyen, pour comparer entre elles les deux formes de cette fonction, que le développement suivant les puissances croissantes des constantes de la transformation ; et comme ces constantes sont finies, ce développement sera, non-seulement fort compliqué, mais encore sujet à certaines exceptions.

La considération de l'infiniment petit détruit ces difficultés. En effet, le second système d'axes étant pris infiniment voisin du premier, si la fonction F conserve sa forme dans le passage de l'un à l'autre, la même chose aura lieu quand on passera de ce dernier à un système infiniment voisin, et, de proche en proche, on arrivera à changer les premiers axes d'une manière quelconque. Or, le passage d'un système d'axes à un autre infiniment voisin peut s'effectuer par une rotation autour de leur axe instantané, et si c_1, c_2, c_3 désignent trois quantités proportionnelles aux cosinus de cet axe et des premiers, si ω est la rotation infiniment petite, et que ν représente le rapport $\frac{\omega}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}$, les cosinus des nouveaux axes avec les anciens sont renfermés, aux quantités près du second ordre, dans le tableau :

	x'_1	x'_2	x'_3
x_1	1	$c_3\nu$	$-c_2\nu$
x_2	$-c_3\nu$	1	$c_1\nu$
x_3	$c_2\nu$	$-c_1\nu$	1

qui, ne contenant réellement que les trois composantes

$$\omega_1 = c_1\nu, \quad \omega_2 = c_2\nu, \quad \omega_3 = c_3\nu$$

de la vitesse angulaire suivant les axes, peut être remplacé par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	x'_1	x'_2	x'_3
x_1	1	ω_3	$-\omega_2$
x_2	$-\omega_3$	1	ω_1
x_3	ω_2	$-\omega_1$	1

où il n'entre plus que trois constantes, arbitraires et infiniment petites.

III. — *Extension de la méthode au cas d'un nombre quelconque de variables.*

Les considérations géométriques qui nous ont servi à exposer la question dans le cas de trois variables, et qui nous ont guidé dans le choix des constantes, cessent d'exister dans le cas général. Appelons, avec Jacobi, substitution linéaire orthogonale toute substitution opérée au moyen des formules

$$x_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} x'_j ,$$

où les a sont assujettis aux $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} a_{i',j} = \begin{cases} 0 \ (i \leq i'), \\ 1 \ (i = i'). \end{cases}$$

Il est facile de reconnaître que les $\frac{n(n-1)}{2}$ constantes arbitraires de ces formules pourront, lorsque les x'_i devront être infiniment voisins des x_i, et qu'on se bornera aux termes du premier ordre, être des infiniment petits de cet ordre pris à volonté $\omega_{1,2}, \omega_{1,3}, \ldots, \omega_{n-1,n}$, et qu'on pourra adopter pour les cosinus des nouveaux axes avec les anciens ceux du tableau :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

	x'_1	x'_2	x'_3		x'_n
x_1	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{1,3}$		$\omega_{1,n}$
x_2	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$	$\omega_{2,3}$		$\omega_{2,n}$
x_3	$\omega_{3,1}$	$\omega_{3,2}$	$\omega_{3,3}$		$\omega_{3,n}$
x_n	$\omega_{n,1}$	$\omega_{n,2}$	$\omega_{n,3}$		$\omega_{n,n}$

auquel correspondent les formules de transformation

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_{1,1}\,x'_1 + \omega_{1,2}\,x'_2 + \ldots + \omega_{1,n}\,x'_n, \\ x_2 = \omega_{2,1}\,x'_1 + \omega_{2,2}\,x'_2 + \ldots + \omega_{2,n}\,x'_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_n = \omega_{n,1}\,x'_1 + \omega_{n,2}\,x'_2 + \ldots + \omega_{n,n}\,x'_n, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = \omega_{1,1}\,x_1 + \omega_{2,1}\,x_2 + \ldots + \omega_{n,1}\,x_n, \\ x'_2 = \omega_{1,2}\,x_1 + \omega_{2,2}\,x_2 + \ldots + \omega_{n,2}\,x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x'_n = \omega_{1,n}\,x_1 + \omega_{2,n}\,x_2 + \ldots + \omega_{n,n}\,x_n, \end{array}\right.$$

sous les conditions

$$\omega_{r,r} = 1, \quad \omega_{r,s} + \omega_{s,r} = 0.$$

En effet, les conditions d'orthogonalité se trouvent satisfaites par ces cosinus, ou du moins il ne s'en faut que d'infiniment petits du second ordre.

IV. — *Formation des anciennes dérivées en fonction des nouvelles.*

Des formules qui précèdent on déduit

$$p_{i_1} = \frac{dV}{dx_{i_1}} = \sum_{j_1=1}^{j_1=n} \frac{dV}{dx'_{j_1}}\,\omega_{i_1,j_1} = p'_{i_1} + \sum_{j_1=1}^{j_1=n} \omega_{i_1,j_1}\,p'_{j_1},$$

le dernier $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de j_1, sauf $j_1 = i_1$, parce que ce terme est mis à part. Dérivant cette première formule par rapport à x_{i_2},

$$p_{i_1,i_2} = \sum_{j_1=1}^{j_1=n} \sum_{j_2=1}^{j_2=n} \omega_{i_1,j_1}\,\omega_{i_2,j_2}\,p'_{j_1,j_2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette expression renferme trois sortes de termes : ceux pour lesquels $j_1 \gtrless i_1$ et en même temps $j_2 \gtrless i_2$; ceux-là sont à négliger comme du second ordre; ceux pour lesquels $j_1 = i_1$ ou $j_2 = i_2$; ceux-là sont du premier ordre; et enfin celui pour lequel $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2$, qui est fini. Donc

$$p_{i_1, i_2} = p'_{i_1, i_2} + \sum_{j_1=1}^{j_1=n} \omega_{i_1, j_1} p'_{i_2, j_1} + \sum_{j_2=1}^{j_2=n} \omega_{i_2, j_2} p'_{i_1, j_2},$$

les $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs des j, sauf $j_1 = i_1$ pour le premier, et $j_2 = i_2$ pour le second.

En général, on aura

$$p_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \sum_{j_1=1}^{j_1=n} \sum_{j_2=1}^{j_2=n} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_m=n} \omega_{i_1, j_1} \omega_{i_2, j_2} \ldots \omega_{i_m, j_m} p'_{j_1, j_2 \ldots j_m};$$

et, pour qu'un terme de cette somme soit à conserver, il faut que $m - 1$ des j soient respectivement égaux aux i auxquels ils sont accouplés. Il y a en outre un terme unique et fini qui correspond au cas où les j sont tous égaux aux i; ainsi

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = p'_{i_1, i_2, \ldots, i_m} &+ \sum_{j_1=1}^{j_1=n} \omega_{i_1, j_1} p'_{j_1, i_2, \ldots, i_m} + \sum_{j_2=1}^{j_2=n} \omega_{i_2, j_2} p'_{j_2, i_1, i_3, \ldots, i_m} + \ldots \\ &+ \sum_{j_m=1}^{j_m=n} \omega_{i_m, j_m} p'_{j_m, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}} \quad (j_1 \lesssim i_1, j_2 \gtrless i_2, \ldots, j_m \lesssim i_m). \end{aligned} \right.$$

Cette formule convient également au cas où certains des i seraient égaux entre eux.

V. — *Formation des équations différentielles en* F.

Il faut maintenant substituer dans la fonction F ces valeurs des p. Chaque p étant égal au p' affecté des mêmes indices, plus une partie infiniment petite que nous représenterons, pour abréger, par $\partial p'$, le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

développement de F, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre, sera

$$F(p_1, p_2, \dots p_n, p_{1,1}, \dots) = F(p'_1, p'_2, \dots, p'_n, p'_{1,1} \dots) + \sum_{m=1}^{m=q} \sum_{i_1=1}^{i_1=n} \sum_{i_2=1}^{i_2=n} \cdots \sum_{i_m=1}^{i_m=n} \frac{dF}{dp'_{i_1, i_2, \dots, i_m}} \delta p'_{i_1, i_2, \dots, i_m},$$

q désignant l'ordre des dérivées les plus élevées qui entrent dans F. Cette équation doit avoir lieu quels que soient les ω, et, par suite,

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n, p_{1,1} \dots) = F(p'_1, p'_2, \dots, p'_n, p'_{1,1}, \dots).$$

Donc la fonction cherchée doit conserver, après la transformation, non-seulement la même forme algébrique, mais aussi la même valeur numérique.

Égalons maintenant à zéro les coefficients des ω. Considérons celui de $\omega_{r,s}$ et soit r inférieur à s; à cause de la relation $\omega_{r,s} = -\omega_{s,r}$, il faudra réunir les coefficients de ces deux constantes. Il résulte d'abord de la formule (1) que si, dans $\delta p'_{i_1, i_2, \dots, i_m}$, aucun des indices i n'est égal ni à r ni à s, aucun des $\sum$ qui forment cette expression ne peut contenir ni $\omega_{r,s}$ ni $\omega_{s,r}$. Supposons donc généralement que sur les indices i, un nombre h, qui pourront être les h premiers, soient égaux à r, que les k suivants le soient à s, et que les $m - h - k$ derniers soient différents de r et de s, ce nombre $m - h - k$ pouvant être nul au besoin, mais jamais négatif. Indiquons, pour plus de netteté, par $p_{(h,k,m)}$, le p qui présente cet ensemble d'indices. Sous les h premiers $\sum$ de $\delta p'_{(h,k,m)}$, ω porte r en premier indice; si donc on prend les seconds indices $j_1, j_2, \dots, j_h$ égaux à s, il en résultera h fois le terme $\omega_{r,s} p'_{(h-1, k+1, m)}$; sous les k $\sum$ suivants, ω porte s en premier indice; prenant donc j_{h+1}, $j_{h+2}, \dots, j_{h+k}$ égaux à r, on a k fois le terme $\omega_{s,r} p'_{(h+1, k-1, m)}$. Quant aux $\sum$ restants, aucune hypothèse sur les j ne saurait y introduire

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ni $\omega_{r,s}$ ni $\omega_{s,r}$. Donc le coefficient de $\omega_{r,s}$ dans $\partial p'_{(h,k,m)}$ est

$$hp'_{(h-1,k+1,m)} - kp'_{(h+1,k-1,m)},$$

et le coefficient total de cette constante

$$(2) \qquad 0 = \sum_{m=1}^{m=q} \sum_{h,k} \left[hp'_{(h-1,k+1,m)} - kp'_{(h+1,k-1,m)} \right] \frac{dF}{dp'_{(h,k,m)}};$$

q indique l'ordre des plus hautes dérivées entrant dans F; le second $\sum$ indique qu'on doit faire varier les nombres h et k des indices i qui sont égaux à r ou à s, de manière que $h + k$ reste inférieur ou égal à m.

En faisant varier de toutes les manières possibles les deux nombres r et s, on déduit de l'équation (2) un système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux différentielles partielles que doit vérifier simultanément la fonction F. Toutefois, il faut observer que ces équations ont été réduites des seuls termes infiniment petits du premier ordre et qu'on eût obtenu de même, par la considération de ceux d'ordre supérieur, des équations différentielles du second, du troisième ordre, etc. Il peut arriver, ou que ces dernières ne soient que des conséquences des équations (2), ou qu'elles expriment des propriétés de la fonction F différentes de celles qui lui sont imposées par ces mêmes équations. Dans le premier cas, l'intégration des équations (2) fournirait la solution la plus générale du problème. Dans le second, elle conduirait à une solution trop générale que les équations d'ordre plus élevé auraient pour effet de restreindre. Quoi qu'il en soit, il faudra intégrer les équations (2); mais il sera indispensable de vérifier ensuite si les fonctions obtenues sont réellement indépendantes des substitutions orthogonales.

VI. — *Cas où* F *ne doit contenir que des dérivées du premier ordre.*

On a alors $q = 1$, $m = 1$, et les seules hypothèses possibles sur h et k sont

$$h = 1, \ k = 0; \quad h = 0, \ k = 1,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui donne, en supprimant les accents désormais inutiles,

$$p_s \frac{dF}{dp_r} - p_r \frac{dF}{dp_s} = 0.$$

On conclut de ces équations, écrites pour toutes les valeurs différentes de r et de s,

$$\frac{1}{p_1}\frac{dF}{dp_1} = \frac{1}{p_2}\frac{dF}{dp_2} = \ldots = \frac{1}{p_n}\frac{dF}{dp_n} = \varphi,$$

φ étant la valeur commune de ces rapports. Ceci donne pour différentielle totale de F

$$dF = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{dp_i}\varphi\, dp_i = \varphi(p_1\, dp_1 + p_2\, dp_2 + \ldots + p_n\, dp_n) = \frac{1}{2}\varphi\, d\varpi,$$

où ϖ représente la somme des carrés des p. Le premier membre étant différentielle exacte, et par suite aussi le second, il faut que φ ne soit fonction que de ϖ, et alors la même chose a lieu pour F. La quantité $\sqrt{\varpi}$ a reçu de M. Lamé le nom de *paramètre différentiel* du premier ordre de la fonction V; nous adoptons cette dénomination que nous étendrons à toutes les fonctions dont nous nous occupons ici, et nous dirons que :

Les seules fonctions différentielles du premier ordre qui ne changent ni de forme ni de valeur, par l'effet d'une substitution orthogonale, sont le paramètre différentiel du premier ordre et toutes ses fonctions.

VII. — *Cas où* F *ne contient que des dérivées du second ordre. — Intégration de l'une des équations* (2).

Dans ce cas, $m = 2$ et les valeurs à prendre pour h et k sont

$$h=1,\ k=0;\quad h=0,\ k=1;\quad h=2,\ k=0;\quad h=1,\ k=1;\quad h=0,\ k=2.$$

L'une quelconque des équations (2) est

$$(r,s)\ \sum_{i=1}^{i=n} p_{s,i}\frac{dF}{dp_{r,i}} - \sum_{i=1}^{i=n} p_{r,i}\frac{dF}{dp_{s,i}} + 2\,p_{r,s}\left(\frac{dF}{dp_{r,r}} - \frac{dF}{dp_{s,s}}\right) + (p_{s,s} - p_{r,r})\frac{dF}{dp_{r,s}} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

i devant prendre toutes les valeurs, sauf r et s, puisque les termes qui répondent à ces valeurs de i ont été séparés des $\sum$. Cette équation est linéaire, et il faut, pour en former l'intégrale générale, considérer le système simultané

$$(r,s)'\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dp_{r,1}}{p_{s,1}}=\dfrac{dp_{r,2}}{p_{s,2}}=\ldots=\dfrac{dp_{r,r-1}}{p_{s,r-1}}=\dfrac{dp_{r,r+1}}{p_{s,r+1}}=\ldots=\dfrac{dp_{r,s-1}}{p_{s,s-1}}=\dfrac{dp_{r,s+1}}{p_{s,s+1}}=\ldots=\dfrac{dp_{r,n}}{p_{s,n}}\\ \quad=\dfrac{dp_{s,1}}{-p_{r,1}}=\dfrac{dp_{s,2}}{-p_{r,2}}=\ldots=\dfrac{dp_{s,r-1}}{-p_{r,r-1}}=\dfrac{dp_{s,r+1}}{-p_{r,r+1}}=\ldots=\dfrac{dp_{s,s-1}}{-p_{r,s-1}}=\dfrac{dp_{s,s+1}}{-p_{r,s+1}}=\ldots=\dfrac{dp_{s,n}}{-p_{r,n}}\\ \quad=\dfrac{dp_{r,r}}{2p_{r,s}}=\dfrac{dp_{s,s}}{-2p_{r,s}}=\dfrac{dp_{r,s}}{p_{s,s}-p_{r,r}},\end{array}\right.$$

qui, étant formé de $2n-2$ équations, admet ce même nombre d'intégrales renfermant chacune une constante arbitraire. Les rapports écrits sur la même ligne verticale donnent les $n-2$ suivantes

$$p_{r,i}^2+p_{s,i}^2=c_i,$$

i n'étant ni r ni s. Des trois rapports de la dernière ligne qui sont encore é gauxà

$$\frac{p_{s,s}dp_{r,r}+p_{r,r}dp_{s,s}}{2p_{r,s}(p_{s,s}-p_{r,r})}=\frac{2p_{r,s}\,dp_{r,s}}{2p_{r,s}(p_{s,s}-p_{r,r})}=\frac{d(p_{r,r}p_{s,s}-p_{r,s}^2)}{0},$$

on conclut les deux nouvelles intégrales

$$p_{r,r}+p_{s,s}=\mathrm{C},\quad p_{r,r}p_{s,s}-p_{r,s}^2=c.$$

Considérant ensuite le dernier rapport avec l'un de ceux de la première ligne, et tenant compte de

$$p_{s,i}=\pm\sqrt{c_i-p_{r,i}^2},\quad p_{s,s}-p_{r,r}=\pm\sqrt{\mathrm{C}^2-4c-4p_{r,s}^2},$$

on a

$$\frac{dp_{r,s}}{\pm\sqrt{\mathrm{C}^2-4c-4p_{r,s}^2}}=\frac{dp_{r,i}}{\pm\sqrt{c_i-p_{r,i}^2}},$$

ce qui donne

$$\pm\arcsin\frac{2p_{r,s}}{\sqrt{\mathrm{C}^2-4c}}\mp 2\arcsin\frac{p_{r,i}}{\sqrt{c_i}}=\text{const.}$$

Prenons les cosinus des deux membres, et observons que quand on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

adopte, comme nous l'avons fait ici, $\arcsin z$ pour valeur de $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, on choisit l'arc de manière que son cosinus soit positif; ces cosinus seront donc toujours

$$\frac{\sqrt{C^2-4c-4p_{r,s}^2}}{\sqrt{C^2-4c}} = \pm\frac{p_{s,s}-p_{r,r}}{\sqrt{C^2-4c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c_i}}\sqrt{c_i-p_{r,i}^2} = \pm\frac{p_{s,i}}{\sqrt{c_i}}$$

(les signes supérieurs étant pris en même temps dans ces formules et dans la précédente), et cette dernière deviendra ainsi, dans tous les cas,

$$(p_{s,s}-p_{r,r})(p_{s,i}^2-p_{r,i}^2)+4p_{r,s}p_{r,i}p_{s,i} = \text{const.},$$

qu'on transforme aisément, en tenant compte des formules C et C_i, en

$$p_{r,r}p_{s,i}^2+p_{s,s}p_{r,i}^2-2p_{r,s}p_{r,i}p_{s,i} = C_i.$$

Ces $n-2$ intégrales, jointes aux n précédentes, forment un système complet de $2n-2$ solutions des équations simultanées, et sont toutes résolues par rapport aux constantes.

D'où il résulte que l'équation (r,s) exprime que F peut être fonction arbitraire de toutes les variables p qui ne portent ni r ni s en indices, mais ne peut contenir les autres que dans les fonctions c, C, c_i, C_i, où i n'est ni r ni s.

VIII. — *Nombre des fonctions distinctes qui sont intégrales communes des équations* (2).

Dans le cas qui nous occupe, le nombre des équations (2) qui doivent être satisfaites simultanément est le même que celui des variables $p_{r,s}$, où r est différent de s. On pourra donc tirer de ces équations les valeurs des dérivées par rapport à ces variables, en fonction des dérivées de F prises par rapport aux variables restantes $p_{i,i}$. Différentiant ces valeurs, on introduira aux seconds membres des dérivées telles que $\frac{d^2F}{dp_{i,i}\,dp_{j,k}}$ qui reviennent à $\frac{d}{dp_{i,i}}\left(\frac{dF}{dp_{j,k}}\right)$, et se peuvent ramener par la substitution de $\frac{dF}{dp_{j,k}}$ à ne contenir que les $\frac{d^2F}{dp_{i,i}\,dp_{j,j}}$. De même pour

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les dérivées d'ordre plus élevé. Cela étant, supposons qu'on se donne la fonction des $p_{i,i}$ à laquelle F doit se réduire, quand on y suppose nuls tous les $p_{i,j}$, où j n'est pas égal à i, on en pourra conclure toutes les dérivées de F par rapport aux $p_{i,i}$, et par suite toutes les dérivées sans exception dans la même hypothèse; si donc on développe F suivant les puissances ascendantes des $p_{i,j}$, tous les coefficients de cette série seront déterminés, d'où l'on voit que la fonction la plus générale qui satisfasse aux équations (2) doit se réduire à une fonction arbitraire des $p_{i,i}$ quand on y annule les $p_{i,j}$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, n fonctions des p qui satisfassent à la fois aux équations (2), et qui soient telles en outre que, quand, après y avoir annulé les $p_{i,j}$, on égalera à des constantes arbitraires les résultats obtenus, on puisse tirer des équations ainsi formées les valeurs des $p_{i,i}$ sans impossibilité ni indétermination; je dis qu'une fonction arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sera la solution générale des équations (2). En effet, ces équations étant toutes linéaires et sans dernier terme, la fonction considérée leur est intégrale commune. Et c'est l'intégrale générale; car, soient $f(p_{1,1}, p_{2,2}, \ldots, p_{n,n})$ une fonction donnée à volonté, et

$$\begin{aligned}
\varphi'_1 &= \psi_1(p_{1,1}, p_{2,2}, \ldots, p_{n,n}),\\
\varphi'_2 &= \psi_2(p_{1,1}, p_{2,2}, \ldots, p_{n,n}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\varphi'_n &= \psi_n(p_{1,1}, p_{2,2}, \ldots, p_{n,n}),
\end{aligned}$$

les n fonctions auxquelles se réduisent les φ pour $p_{i,j} = 0$, on pourra, par hypothèse, déterminer les $p_{i,i}$ en fonction des φ'_i sans indétermination et réduire ainsi f à une fonction connue de φ'_i. Si donc on prend pour F la fonction qui contient les φ, comme celle-ci contient les φ', F se réduira à $f(p_{1,1}, p_{2,2}, \ldots, p_{n,n})$ quand on annulera les $p_{i,j}$.

La question se trouve donc ramenée à chercher n fonctions des p qui satisfassent simultanément aux équations (r, s) et qui, quand on y annule les $p_{i,j}$ et qu'on égale les résultats à des constantes, forment un système de n équations propres à faire connaître les $p_{i,i}$ sans indétermination ni incompatibilité.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IX. — *Indication de la solution.*

Puisque nous avons trouvé, au § VII, la forme finie à laquelle l'équation (r, s) assujettit les fonctions cherchées, il ne reste plus qu'à composer, à l'aide de toutes celles de ces formes qui répondent aux diverses valeurs de r et de s, n expressions symétriques par rapport aux indices r et s, c'est-à-dire telles, qu'on puisse y permuter deux indices quelconques sans les altérer; car cette permutation, faite dans le système des équations (r, s), ne fait qu'en changer l'ordre.

Écrivons la fonction c_i sous la forme

$$p_{r,i}(p_{s,s}p_{r,i}-p_{r,s}p_{s,i})-p_{s,i}(p_{r,s}p_{r,i}-p_{r,r}p_{s,i})=p_{r,i}\begin{vmatrix} p_{r,i} & p_{r,s} \\ p_{s,i} & p_{s,s} \end{vmatrix}-p_{s,i}\begin{vmatrix} p_{r,i} & p_{r,r} \\ p_{s,i} & p_{s,r} \end{vmatrix},$$

et ajoutons la fonction $-p_{i,i}(p_{r,r}p_{s,s}-p_{r,s}^2)=-p_{i,i}\begin{vmatrix} p_{r,r} & p_{r,s} \\ p_{s,r} & p_{s,s} \end{vmatrix}$, qui, à un facteur près qu'on doit regarder comme constant, rentre dans la forme c. Nous aurons formé le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_{i,i} & p_{r,i} & p_{s,i} \\ p_{i,r} & p_{r,r} & p_{s,r} \\ p_{i,s} & p_{r,s} & p_{s,s} \end{vmatrix},$$

qui est intégrale de (r, s). Les autres équations admettent comme solutions des déterminants ternaires analogues; et comme toutes ces fonctions sont des déterminants partiels du déterminant symétrique

$$D=\begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\cdots & p_{2,n} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\cdots & p_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3}\cdots & p_{n,n} \end{vmatrix},$$

on est naturellement conduit à chercher si ce dernier ne serait pas l'une des solutions.

D'autre part, en considérant les fonctions symétriques

$$(p_{1,1}+p_{2,2})+(p_{3,3}+p_{4,4}+\ldots+p_{n,n}),$$

$$(p_{1,1}p_{2,2}-p_{1,2}^2)+(p_{1,1}p_{3,3}-p_{1,3}^2)+\ldots+(p_{1,1}p_{n,n}-p_{1,n}^2)$$
$$+(p_{2,2}p_{3,3}-p_{2,3}^2)+\ldots+(p_{n-1,n-1}p_{n,n}-p_{n-1,n}^2),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on y reconnaît deux solutions communes aux équations (r, s). Cela est évident pour la première, et le devient pour la seconde quand on l'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}(p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}^2) + (p_{1,1} + p_{2,2})(p_{3,3} + p_{4,4} + \ldots + p_{n,n}) \\ - (p_{1,3}^2 + p_{2,3}^2) - (p_{1,4}^2 + p_{2,4}^2) - \ldots - (p_{1,n}^2 + p_{2,n}^2) \\ + (p_{3,3}p_{4,4} - p_{3,4}^2 + p_{3,3}p_{5,5} - p_{3,5}^2 + \ldots + p_{n-1,n-1}p_{n,n} - p_{n-1,n}^2),\end{aligned}$$

où il n'entre que les fonctions c, C, c_i, prises pour $r = 1$, $s = 2$, et des constantes.

Or la première de ces deux fonctions est la somme des déterminants principaux de D; la seconde est la somme des déterminants principaux du second ordre. L'analogie porte donc à penser que les n solutions cherchées doivent être les sommes de tous les déterminants mineurs principaux d'un même ordre qu'on peut former avec le déterminant D.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que ces n sommes peuvent réellement entrer dans la composition de l'intégrale générale; car, si on y réduit les $p_{r,s}$ à zéro, elles deviennent les sommes des produits de tous les $p_{i,i}$ combinés un à un, deux à deux, trois à trois, etc., et par suite les $p_{i,i}$, étant les racines de l'équation

$$0 = \mathrm{P}_1^n - \varphi'_1 \mathrm{P}^{n-1} + \varphi'_2 \mathrm{P}^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \varphi'_{n-1} \mathrm{P} + (-1)^n \varphi'_n,$$

ont des valeurs déterminées.

X. — *Vérification de la solution.*

Par suite de la symétrie des formes à vérifier, il suffira de s'assurer qu'elles satisfont à une seule des équations (r, s), par exemple à l'équation $(1, 2)$. Dès lors tout p qui ne portera en indice ni 1 ni 2 sera regardé comme constant.

Observons d'abord que les intégrales du § VII en entraînent d'autres, parmi lesquelles les deux suivantes nous seront utiles :

$$a_{i,j} = p_{r,i}p_{s,j} - p_{r,j}p_{s,i},$$
$$b_{i,j} = p_{r,r}p_{s,i}p_{s,j} + p_{s,s}p_{r,i}p_{r,j} - p_{r,s}(p_{r,i}p_{s,j} + p_{r,j}p_{s,i});$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on les vérifie aisément au moyen des rapports $(r, s)'$. Toutefois il est bon de remarquer, sur la fonction $a_{i,j}$, qu'elle ne saurait entrer elle-même dans l'intégrale générale, ou du moins que celle-ci n'en saurait être une fonction tout à fait arbitraire, mais qu'elle doit être paire par rapport aux expressions de cette sorte, parce qu'elles changent de signe par la permutation des indices.

Ceci posé, considérons la somme des déterminants principaux du $m^{ième}$ ordre de D. Ces déterminants sont de trois sortes : 1° s'ils ne contiennent ni les lignes ni les colonnes dont les éléments portent 1 ou 2 en indice, ils sont constants; 2° si l'un d'eux ne contient que la ligne et la colonne qui répondent à l'indice 1, on peut toujours le grouper avec un autre qui n'en diffère que par le changement de l'indice 1 dans l'indice 2; 3° enfin les autres contiennent à la fois les lignes et colonnes relatives aux deux indices.

Considérons d'abord le second cas. Soient D_1 et D_2 les deux déterminants que nous devons grouper ensemble. En leur enlevant à chacun la première ligne et la première colonne, il reste un même déterminant constant que nous appellerons δ, et quand nous supprimerons dans celui-là la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne, nous indiquerons le résultat par $\delta_{r,s}$; alors

$$D_1 = p_{1,1}\,\delta - \sum_r p_{1,r}^2\,\delta_{r,r} + 2\sum_{r,s}(-1)^{r+s-1}\,p_{1,r}\,p_{1,s}\,\delta_{r,s}.$$

Comme le déterminant D_2 se déduit de celui-ci par le changement de l'indice 1 en 2, leur somme est

$$(p_{1,1}+p_{2,2})\,\delta - \sum_r (p_{1,r}^2 + p_{2,r}^2)\,\delta_{r,r} + 2\sum_{r,s}(-1)^{r+s-1}(p_{1,r}\,p_{1,s}+p_{2,r}\,p_{2,s})\,\delta_{r,s},$$

qui satisfait évidemment à l'équation (1, 2), puisque, hors des $\sum$, on a la fonction C, sous le premier $\sum$ la fonction c_i, et sous le $\sum$ double une quantité qui ne diffère que par une constante de $a_{r,s}^2$, car

$$a_{r,s}^2 = \begin{vmatrix} p_{1,r} & p_{1,s} \\ p_{2,r} & p_{2,s} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} p_{1,r}^2 + p_{2,r}^2 & p_{1,r}\,p_{1,s} + p_{2,r}\,p_{2,s} \\ p_{1,r}\,p_{1,s} + p_{2,r}\,p_{2,s} & p_{1,s}^2 + p_{2,s}^2 \end{vmatrix}$$
$$= c_r\,c_s - (p_{1,r}\,p_{1,s} + p_{2,r}\,p_{2,s})^2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit maintenant D′ un des déterminants du troisième cas. Appelons encore δ le déterminant qui résulte de la suppression des lignes et colonnes relatives aux indices 1 et 2 dans D′, $\delta_{r,s}$ celui qu'on trouve en ôtant dans δ la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne, $\delta^{(2)}_{\rho,\sigma}$ celui qu'on obtient en supprimant dans δ les lignes des rangs r et r' et les colonnes s, s' (les nombres ρ et σ indiquant ici les numéros d'ordre des combinaisons rr', ss' dans l'ensemble des combinaisons deux à deux des $m-2$ premiers nombres), nous aurons

$$\begin{aligned} D' = \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{vmatrix} \delta &+ \sum_r \left\{ (-1)^r \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{r,1} & p_{r,2} \end{vmatrix} \sum p_{2,s}\, \delta_{r,s} (-1)^{s-1} \right\} \\ &+ \sum_r \left\{ (-1)^r \begin{vmatrix} p_{r,1} & p_{r,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{vmatrix} \sum (-1)^{s-1} p_{1,s}\, \delta_{r,s} \right\} \\ &+ \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{r+r'+s+s'} \delta^{(2)}_{\rho,\sigma} \begin{vmatrix} p_{r,1} & p_{r,2} \\ p_{r',1} & p_{r',2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{1,s} & p_{1,s'} \\ p_{2,s} & p_{2,s'} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le premier terme est le produit de c par la constante δ. Sous le premier $\sum$, les termes où les δ ont deux indices égaux donnent

$$(-1)^{2r-1} \delta_{r,r} \left\{ p_{2,r} \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{r,1} & p_{r,2} \end{vmatrix} - p_{1,r} \begin{vmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} \\ p_{r,1} & p_{r,2} \end{vmatrix} \right\},$$

ce qui ne diffère de C_r que par une constante. Les autres, dépendant de $\delta_{r,s}$, peuvent provenir de ce que le premier indice du δ est r ou s, le second étant s ou r; en les groupant quatre par quatre, on a

$$(-1)^{r+s-1} \delta_{r,s} \left\{ p_{2,s} \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{r,1} & p_{r,2} \end{vmatrix} + p_{2,r} \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{s,1} & p_{s,2} \end{vmatrix} - p_{1,s} \begin{vmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} \\ p_{r,1} & p_{r,2} \end{vmatrix} - p_{1,r} \begin{vmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} \\ p_{s,1} & p_{s,2} \end{vmatrix} \right\},$$

ce qui, développé, reproduit $b_{r,s}$. Prenant enfin les termes du dernier $\sum$, on reconnaît qu'à des facteurs constants près ils sont des formes $a^2_{r,r'}$, $a_{s,s'}\, a_{r,r'}$. Donc D′ satisfait à l'équation (1, 2), et par suite aussi la somme entière de tous les déterminants considérés. Ainsi nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les seules fonctions uniquement dépendantes des dérivées partielles secondes d'une fonction V, *qui conservent leur forme et leur valeur après une substitution orthogonale quelconque sont, le déterminant*

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^2V}{dx_1^2} & \frac{d^2V}{dx_1\,dx_2} & \frac{d^2V}{dx_1\,dx_3} \cdots & \frac{d^2V}{dx_1\,dx_n} \\ \frac{d^2V}{dx_2\,dx_1} & \frac{d^2V}{dx_2^2} & \frac{d^2V}{dx_2\,dx_3} \cdots & \frac{d^2V}{dx_2\,dx_n} \\ \frac{d^2V}{dx_3\,dx_1} & \frac{d^2V}{dx_3\,dx_2} & \frac{d^2V}{dx_3^2} \cdots & \frac{d^2V}{dx_3\,dx_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d^2V}{dx_n\,dx_1} & \frac{d^2V}{dx_n\,dx_2} & \frac{d^2V}{dx_n\,dx_3} \cdots & \frac{d^2V}{dx_n^2} \end{vmatrix},$$

toutes les sommes qu'on peut composer avec ses déterminants mineurs principaux d'un même ordre, et n'importe quelle fonction de ces n quantités.

Remarque. — Il resterait à la vérité, comme nous l'avons dit au § V, à vérifier directement que ces fonctions jouissent de la propriété énoncée. Nous remettons à plus tard cette vérification, qui ferait double emploi avec une autre recherche.

XI. — *Cas où la fonction* F *doit dépendre des dérivées des deux premiers ordres.*

Il faut ici ajouter à l'équation (r, s) les deux termes $p_s \frac{dF}{dp_r} - p_r \frac{dF}{dp_s}$, et au système des équations simultanées $(r, s)'$ les deux rapports $\frac{dp_r}{p_s} = \frac{dp_s}{-p_r}$. Il devient ainsi

$$(r,s)'' \quad \frac{dp_r}{p_s} = \frac{dp_s}{-p_r} = \frac{dp_{r,i}}{p_{s,i}} = \frac{dp_{s,i}}{-p_{r,i}} = \frac{dp_{r,r}}{2p_{r,s}} = \frac{dp_{s,s}}{-2p_{r,s}} = \frac{dp_{r,s}}{p_{s,s} - p_{r,r}},$$

et comme il est formé de $2n$ équations, il a $2n$ intégrales contenant chacune une constante arbitraire. Les $2n - 2$ fonctions c_i, C_i, c, C du § VII sont évidemment solutions. Pour les deux restantes, les deux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

premiers rapports donnent immédiatement

$$\gamma = p_r^2 + p_s^2 ;$$

et si l'on observe que cette fonction ne diffère de c_i que par la suppression du second indice i des p, que, d'autre part, la dernière fonction à trouver est l'intégrale de l'équation formée en égalant l'un des deux premiers rapports $(r, s)''$ à l'un des suivants, le premier au dernier par exemple, on verra que cette fonction doit s'obtenir en supprimant l'indice i dans l'équation C_i du § VII;

$$\Gamma = p_{r,r}\, p_s^2 + p_{s,s}\, p_r^2 - 2 p_{r,s}\, p_r\, p_s$$

est donc la $n^{ième}$ des fonctions cherchées.

Puisque, dans le cas actuel, les équations (r, s) contiennent n variables de plus que précédemment, le raisonnement du § VIII prouvera que la solution générale renferme $2n$ fonctions, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, qui doivent elles-mêmes être solutions communes, et se réduire, lorsqu'on y annulera tous les $p_{r,s}$, à de telles fonctions des p_r et des $p_{r,r}$ qu'en les égalant à des constantes on en puisse conclure les valeurs de ces variables sans incompatibilité ni indétermination. Sur ces $2n$ fonctions, n sont déjà connues : ce sont les solutions du cas précédent, car elles satisfont aux équations du problème actuel, privées des termes en p_r, et leur substitution dans ces termes donne zéro, puisqu'elles sont indépendantes des p_r.

Il n'en reste donc que n à chercher : nous y emploierons, comme ci-dessus, la méthode d'induction. Il est d'abord évident que l'une d'elles est

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 .$$

En outre Γ s'écrit, comme on l'a vu pour C_i,

$$\begin{vmatrix} 0 & p_r & p_s \\ p_r & p_{r,r} & p_{r,s} \\ p_s & p_{s,r} & p_{s,s} \end{vmatrix},$$

ce qui est un déterminant principal binaire de D, où l'on aurait inter-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

calé la ligne et la colonne o p_r p_s, se coupant suivant l'élément principal zéro. Il est facile de reconnaître que la somme de tous les déterminants semblables est une solution; car, outre le précédent, elle en contient de deux sortes : 1° ceux où ne se trouve aucun des indices r, s sont constants; 2° ceux où se trouve un seul de ces indices, et ils se groupent par deux, qui ne diffèrent que par le changement réciproque de r en s, et qui, dans la somme, fournissent

$$(p_{r,r} + p_{s,s})\,p_{s'}^2 + (p_r^2 + p_s^2)\,p_{s',s'} - 2p_{s'}(p_r p_{r',s'} + p_s p_{s,s'});$$

or la dernière parenthèse est une constante, car elle résulte de la suppression de l'indice i dans la fonction $p_{r,i}p_{r,j} + p_{s,i}p_{s,j}$ du cas précédent. Si l'on fait attention, en outre, que les divers termes de la solution $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2$ s'écrivent

$$\begin{vmatrix} o & p_r \\ p_r & p_{r,r} \end{vmatrix},$$

et proviennent ainsi d'un élément principal de D, dont on aurait fait un déterminant binaire en y intercalant la ligne et la colonne o p_r, il deviendra naturel de penser que les n fonctions cherchées sont les diverses solutions du cas précédent, dans chacun des termes desquelles on aurait introduit une ligne et une colonne identiques se croisant suivant l'élément principal zéro, et composées des p affectés d'un seul indice égal à celui de la ligne ou de la colonne au rang de laquelle il se trouve.

XII. — *Vérification de cette nouvelle solution.*

Les déterminants dont il s'agit ici sont ceux qu'on déduit de

$$\Theta = \begin{vmatrix} o & p_1 & p_2 & p_3 \cdots & p_n \\ p_1 & p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \cdots & p_{1,n} \\ p_2 & p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \cdots & p_{2,n} \\ p_3 & p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \cdots & p_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} \cdots & p_{n,n} \end{vmatrix},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en y supprimant m lignes et les m colonnes identiques, sans jamais y comprendre celles où les p n'ont qu'un indice.

Observons que l'équation (1, 2) admet pour intégrales, outre $e_{r,s} = p_{1,r}p_{1,s} + p_{2,r}p_{2,s}$,

$$\varepsilon_r = p_1 p_{1,r} + p_2 p_{2,r}, \qquad \alpha_r^2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{1,r} & p_{2,r} \end{vmatrix}^2, \qquad \alpha_r \alpha_s = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{1,r} & p_{2,r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_{1,s} & p_{2,s} \end{vmatrix},$$

$$\beta_r = p_{1,1}p_{2,r}p_2 + p_{2,2}p_{1,r}p_1 - p_{1,2}(p_{2,r}p_1 + p_{1,r}p_2),$$

qui se déduisent du § X par la suppression d'un indice.

Ceci posé, considérons la somme des déterminants de l'ordre $m+1$. Comme ci-dessus, ceux où les lignes et colonnes relatives aux indices 1 et 2 ont été supprimées sont constants. Appelons $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ ceux qui ne contiennent qu'une seule de ces lignes et colonnes et ne diffèrent l'un de l'autre que par son indice, qui sera 1 pour $\mathfrak{D}_1$, 2 pour $\mathfrak{D}_2$. Soit enfin $\mathfrak{D}'$ un déterminant dépendant à la fois des deux indices. Prenons d'abord la somme $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$; conservons la notation δ pour le déterminant $\mathfrak{D}_1$ privé de ses deux premières lignes et de ses deux premières colonnes, δ_r pour le déterminant δ, où l'on supprime la $r^{ième}$ ligne et où l'on ajoute en première ligne les $m-2$ p, à indice unique, qui conviennent aux diverses colonnes, nous avons

$$\mathfrak{D}_1 = -p_1^2\delta + \sum_r \left[(-1)^{r-1} p_1 p_r \sum_s (-1)^s p_{1,s}\delta_{r,s}\right] + \sum_r (-1)^{r-1} \begin{vmatrix} p_r & p_r \\ p_{1,1} & p_{1,r} \end{vmatrix} \delta_r$$

$$+ \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{r+r'+s+s'} \begin{vmatrix} p_r & p_s \\ p_{r,1} & p_{s,1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{r'} & p_{s'} \\ p_{r',1} & p_{s',1} \end{vmatrix} \delta^{(2)}_{\rho,\sigma};$$

par suite, $\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$ donne : des termes $\delta(p_1^2 + p_2^2)$ rentrant dans γ, des termes $p_r\delta_{r,s}(p_1p_{1,s} + p_2p_{2,s})$ rentrant dans ε_s, des termes $\delta_r[(p_1p_{1,r} + p_2p_{2,r}) - p_r(p_{1,1} + p_{2,2})]$ résultant de la combinaison de C et de ε_r, enfin des termes en $\delta^{(2)}_{\rho,\sigma}$ qui valent ensemble

$$p_r p_{r'}(p_{1,s}p_{1,s'} + p_{2,s}p_{2,s'}) + p_r p_{s'}(p_{1,s}p_{1,r'} + p_{2,s}p_{2,r'})$$
$$- p_s p_{s'}(p_{1,r}p_{1,r'} + p_{2,r}p_{2,r'}) - p_s p_{r'}(p_{1,r}p_{1,s'} + p_{2,r}p_{2,s'}),$$

et ne sont fonctions que des quantités $e_{r,s}$.

Examinons maintenant le déterminant $\mathfrak{D}'$. Soit D' celui qu'on obtient

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en y supprimant la première ligne et la première colonne, et δ le résultat de la suppression des deux premières lignes et des deux premières colonnes de D′. Il vient

$$\mathfrak{D}' = -p_1^2 D'_{1,1} - p_2^2 D'_{2,2} - \sum_r p_r^2 D'_{r,r} + 2p_1 p_2 D'_{1,2} + 2\sum_r (-1)^r p_1 p_r D'_{1,r} - 2\sum_r (-1)^r p_2 p_r D'_{2,r} + 2\sum_{r,s} (-1)^{r+s-1} p_r p_s D'_{r,s},$$

et, en développant les déterminants $D'_{r,s}$,

$$D'_{1,1} = p_{2,2}\delta - \sum_{r'} p_{2,r'}^2 \delta_{r',r'} + 2\sum_{r',s'} (-1)^{r'+s'-1} p_{2,r'} p_{2,s'} \delta_{r',s'},$$

$$D'_{2,2} = p_{1,1}\delta - \sum_{r'} p_{1,r'}^2 \delta_{r',r'} + 2\sum_{r',s'} (-1)^{r'+s'-1} p_{1,r'} p_{1,s'} \delta_{r',s'},$$

$$D'_{1,2} = p_{1,2}\delta - \sum_{r'} p_{1,r'} p_{2,r'} \delta_{r',r'} + \sum_{r',s'} (-1)^{r'+s'-1} (p_{1,r'} p_{2,s'} + p_{2,r'} p_{1,s'}) \delta_{r',s'},$$

$$D'_{1,r} = \sum_s (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} \\ p_{s,1} & p_{s,2} \end{vmatrix} \delta_{r,s} + \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{r'+s+s'} p_{2,r'} \begin{vmatrix} p_{s,1} & p_{s,2} \\ p_{s',1} & p_{s',2} \end{vmatrix} \delta^{(2)}_{\rho,\sigma},$$

$$D'_{2,r} = \sum_s (-1)^{s-1} \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{s,1} & p_{s,2} \end{vmatrix} \delta_{r,s} + \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{r'+s+s'} p_{1,r'} \begin{vmatrix} p_{s,1} & p_{s,2} \\ p_{s',1} & p_{s',2} \end{vmatrix} \delta^{(2)}_{\rho,\sigma},$$

$$D'_{r,s} = \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{vmatrix} \delta + \sum_{r',s'} (-1)^{r'+s'-1} p_{2,s'} \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{1,r'} & p_{2,r'} \end{vmatrix} \delta^{(2)}_{\rho,\sigma} + \sum_{r',s'} (-1)^{r'+s'-1} p_{1,s'} \begin{vmatrix} p_{r',1} & p_{r',2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{vmatrix} \delta^{(1)}_{\rho,\sigma} + \sum_{\rho,\sigma} (-1)^{r'+r''+s'+s''} \begin{vmatrix} p_{r',1} & p_{r',2} \\ p_{r'',1} & p_{r'',2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{s',1} & p_{s',2} \\ p_{s'',1} & p_{s'',2} \end{vmatrix} \delta^{(3)}_{\rho,\sigma}.$$

Substituant ces valeurs, on trouve : dans $-p_1^2 D'_{1,1} - p_2^2 D'_{2,2} + 2p_1 p_2 D'_{1,2}$, des termes en δ qui rentrent dans Γ, des termes en $\delta_{r',r'}$ qui sont de la forme $\alpha_{r'}^2$, et d'autres termes en $\delta_{r',s'}$ qui sont de la forme $\alpha_{r'}\alpha_{s'}$. La partie de $\mathfrak{D}'$ qui contient les $\sum$ simples donne ensuite : des termes $D'_{r,r}$ qui, comme on l'a vu au § X, sont des intégrales, puisque r n'y est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ni 1 ni 2; des termes en $\delta_{r,s}$ qui sont de la forme β_r, et des termes en $\delta^{(2)}_{\rho,\sigma}$ qui reviennent à $\alpha_{r'}\, a_{s,s'}$ et conviennent comme intégrales, puisqu'ils sont fonctions paires de $\alpha_{r'}$, $a_{s,s'}$. Considérant enfin le $\sum$ double de $\mathfrak{D}'$, on y trouve c en coefficient de δ; $b_{r',s'}$ en coefficient de $\delta^{(2)}_{\rho,\sigma}$, et $a_{r',r''}\, a_{s',s''}$ en coefficient de $\delta^{(3)}_{\rho,\sigma}$. La vérification est donc complète.

Toutefois, il reste encore à s'assurer que les n fonctions satisfont aux conditions du § VIII. Or si, dans les déterminants principaux du $(m+1)^{ième}$ ordre de $\mathfrak{D}$, on annule les $p_{r,s}$, on trouve que celui qui dépend, par exemple, des m premiers indices devient

$$p_1^2\, p_{2,2}\, p_{3,3} \cdots p_{m,m} + p_2^2\, p_{1,1}\, p_{3,3} \cdots p_{m,m} + p_3^2\, p_{1,1}\, p_{2,2}\, p_{4,4} \cdots p_{m,m} + \cdots + p_m^2\, p_{1,1}\, p_{2,2} \cdots p_{m-1,m-1}.$$

Les équations formées en égalant les sommes de ces résultats à des constantes se ramènent facilement au système bien connu

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i^2 = \varpi_1, \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_{i,i}\, p_i^2 = \varpi_2, \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_{i,i}^2\, p_i^2 = \varpi_3, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_{i,i}^{n-1}\, p_i^2 = \varpi_n,$$

qui est toujours compatible et détermine les inconnues, tant que son déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & p_{1,1} & p_{1,1}^2 \cdots & p_{1,1}^{n-1} \\ 1 & p_{2,2} & p_{2,2}^2 \cdots & p_{2,2}^{n-1} \\ 1 & p_{3,3} & p_{3,3}^2 \cdots & p_{3,3}^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & p_{n,n} & p_{n,n}^2 \cdots & p_{n,n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j,i} (p_{i,i} - p_{j,j}) \quad (i > j)$$

n'est pas nul, c'est-à-dire tant que les indéterminées $p_{i,i}$ sont différentes.

Le résultat de notre recherche s'énonce donc :

Parmi toutes les fonctions différentielles formées des dérivées des deux premiers ordres d'une fonction V, *les seules qu'une substitution orthogonale ne fait changer ni de forme ni de valeur sont :* 1° *les sommes de tous les déterminants principaux d'un même ordre qu'on forme au moyen*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du déterminant ⓐ

$$\textcircled{a} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{dV}{dx_1} & \frac{dV}{dx_2} \cdots & \frac{dV}{dx_n} \\ \frac{dV}{dx_1} & \frac{d^2V}{dx_1^2} & \frac{d^2V}{dx_1 dx_2} \cdots & \frac{d^2V}{dx_1 dx_n} \\ \frac{dV}{dx_2} & \frac{d^2V}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2V}{dx_2^2} \cdots & \frac{d^2x}{dx_2 dx_n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{dV}{dx_n} & \frac{d^2V}{dx_n dx_1} & \frac{d^2V}{dx_n dx_2} \cdots & \frac{d^2V}{dx_n^2} \end{vmatrix},$$

soit en y conservant toujours la première ligne et la première colonne, soit en les supprimant toujours; 2° ou une fonction arbitraire de ces 2n expressions.

Remarque. — Il est clair que, parmi ces $2n$ fonctions, se trouve le carré du paramètre différentiel du premier ordre déjà trouvé au § VI.

XIII. — *Moyen plus rapide d'opérer les vérifications précédentes.*

Les vérifications des §§ X et XII ont été faites en n'employant que les propriétés les plus connues des déterminants. Ainsi présentées, elles sont longues et minutieuses. Le désir de les simplifier nous a conduit au théorème suivant, dont nous omettrons la démonstration, très-facile du reste.

Soit A un déterminant de n^2 éléments $a_{r,s}$, et Θ une suite de n^2 quantités $\theta_{r,s}$ disposées en n lignes et n colonnes; formons les éléments du produit des déterminants A et Θ

$$b_{r,s} = \sum_{s'=1}^{s'=n} a_{r,s'}\,\theta_{s,s'};$$

substituons, aux éléments de la première ligne de A, les b qui portent les mêmes indices, et soit A_1 le déterminant obtenu; faisons ainsi pour toutes les lignes successivement, nous aurons

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = (\theta_{1,1} + \theta_{2,2} + \ldots + \theta_{n,n})\,A.$$

Reprenons les quantités D′, $D_1 + D_2$ du § X; il s'agit de prouver

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

que leurs différentielles, quand on ne fait varier que les éléments dont les indices sont 1 ou 2, se trouvent nulles. Si on appelle λ la valeur commune des rapports $(r, s)'$, on a

$$\frac{1}{\lambda}\,d\mathrm{D}' = \begin{vmatrix} 2p_{1,2} & p_{2,2}-p_{1,1} & p_{2,r_1} & p_{2,r_2}\cdots & p_{2,r_{m-2}} \\ -p_{1,1}+p_{2,2} & -2p_{1,2} & -p_{1,r_1} & -p_{1,r_2}\cdots & -p_{1,r_{m-2}} \\ p_{r_1,2} & -p_{r_1,1} & 0 & 0\ldots & 0 \\ p_{r_2,2} & -p_{r_2,1} & 0 & 0\ldots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ p_{r_{m-2},2} & -p_{r_{m-2},1} & 0 & 0\ldots & 0 \end{vmatrix},$$

où nous entendons que la première ligne doit être substituée à la première de D′, ce qui fournit le déterminant D'_1, la seconde à la seconde de D′, ce qui donne $\mathrm{D}'_2, \ldots$, puis qu'on doit ajouter tous ces résultats. Or, dans D'_1, on peut réduire les éléments de la première ligne à $p_{1,2}, -p_{1,1}$, 0, 0, ..., 0; il suffit pour cela d'y ajouter la seconde ligne changée de signe; dans D'_2, la seconde ligne peut être réduite à $p_{2,2}, -p_{2,1}$, 0, 0, ..., 0; il suffit de lui ajouter la première. Ainsi réduite, la somme $\mathrm{D}'_1 + \mathrm{D}'_2 + \ldots + \mathrm{D}'_n$ rentre dans le théorème précédent, où l'on supposerait tous les θ nuls, sauf $\theta_{1,2} = 1$, $\theta_{2,1} = -1$. Dans tous les cas, les $\theta_{r,r}$ étant nuls, cette somme est nulle,

$$d\mathrm{D}' = 0.$$

Soit maintenant $\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2$; $d\mathrm{D}_1$ ne diffère de $d\mathrm{D}'$ qu'en ce que la seconde ligne et la seconde colonne cessent de faire partie du tableau précédent, et en ce que l'indice m doit être augmenté d'une unité. Le premier des déterminants entrant dans $d\mathrm{D}$ se décompose en deux : 1° l'un dont la première ligne est $p_{1,2}, p_{2,r_1}, p_{2,r_2}, \ldots, p_{2,r_{m-1}}$, et qui résulterait de la suppression de la première ligne et de la seconde colonne dans le déterminant D'_1 pour lequel m serait plus fort d'une unité; nous l'appellerons Δ; 2° l'autre, étant joint aux autres parties de $d\mathrm{D}_1$, forme une somme rentrant dans le théorème précédent pour $\theta_{r,r} = 0$, et par conséquent nulle. Ainsi $d\mathrm{D}_1$ se réduit à $\lambda\Delta$. On voit de même que $d\mathrm{D}_2$ se réduit à $-\lambda\Delta$, à cause des signes — qu'introduisent les différentielles des éléments de la première ligne de D_2. Ainsi $d(\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2) = 0$, ce qui vérifie complétement la solution du § IX.

Ces raisonnements s'appliquent visiblement aux expressions Θ' et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\Theta_1 + \Theta_2$ du § X; car elles ne diffèrent des précédentes que par l'intercalation d'une ligne et d'une colonne présentant seulement deux nouveaux éléments variables, s'il s'agit de Θ'; un seul, s'il s'agit de Θ_1 ou de Θ_2. Après la différentiation, ces lignes deviennent $0, p_2, -p_1, 0, \ldots$, ou $0, p_2, 0, \ldots$, ou $0, -p_1, 0, \ldots$, qui laissent subsister l'application du théorème précédent; et en même temps les colonnes se trouvent augmentées des éléments $p_2 - p_1, 0, \ldots, 0$, ou $p_2, 0, \ldots, 0$, ou $-p_1, 0, \ldots, 0$ formant dans les tableaux analogues à $d\mathrm{D}'$ une colonne supplémentaire. Or, quand on exécute les transformations qu'on vient d'indiquer pour les deux premiers déterminants de $d\Theta'$, pour le premier de $d\Theta_1$ ou de $d\Theta_2$, tous ces éléments se remplacent par zéro, ce qui vérifie la solution du § XI.

XIV. — *Cas où les dérivées s'élèvent jusqu'au troisième ordre.*

Il faut alors, dans l'équation générale (2), supposer $q = 3$, puis successivement

$m = 1 : h = 1 \ k = 0, \ h = 0 \ k = 1;$
$m = 2 : h = 2 \ k = 0, \ h = 1 \ k = 1, \ h = 0 \ k = 2, \ h = 1 \ k = 0, \ h = 0 \ k = 1;$
$m = 3 : h = 3 \ k = 0, \ h = 2 \ k = 1, \ h = 1 \ k = 2, \ h = 0 \ k = 3, \ h = 2 \ k = 0,$
$h = 1 \ k = 1, \ h = 0 \ k = 2, \ h = 1 \ k = 0, \ h = 0 \ k = 1,$

et l'on obtient ainsi un système d'équations dont nous n'écrivons que celle qui répond à l'hypothèse $r = 1$, $s = 2$, savoir :

$$
[1,2]\left\{
\begin{aligned}
&p_2 \frac{d\mathrm{F}}{dp_1} - p_1 \frac{d\mathrm{F}}{dp_2} + \sum_{i=3}^{i=n} \left(p_{2,i} \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,i}} - p_{1,i} \frac{d\mathrm{F}}{dp_{2,i}} \right) + 2\, p_{1,2} \left(\frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,1}} - \frac{d\mathrm{F}}{dp_{2,2}} \right) \\
&\quad + (p_{2,2} - p_{1,1}) \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,2}} + \sum_{i=3}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(p_{2,i,j} \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,i,j}} - p_{1,i,j} \frac{d\mathrm{F}}{dp_{2,i,j}} \right) \\
&\quad + \sum_{i=3}^{i=n} \left[2\, p_{1,2,i} \left(\frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,1,i}} - \frac{d\mathrm{F}}{dp_{2,2,i}} \right) + (p_{2,2,i} - p_{1,1,i}) \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,2,i}} \right] \\
&\quad + 3 p_{1,1,2} \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,1,1}} - 3\, p_{1,2,2} \frac{d\mathrm{F}}{dp_{2,2,2}} \\
&\qquad + (2\, p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,1,2}} - (2\, p_{1,1,2} - p_{2,2,2}) \frac{d\mathrm{F}}{dp_{1,2,2}} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui conduit à considérer le système simultané formé par la suite des rapports

$$\frac{dp_1}{p_2} = \frac{dp_2}{-p_1} = \frac{dp_{1,i}}{p_{2,i}} = \frac{dp_{2,i}}{-p_{1,i}} = \frac{dp_{1,1}}{2p_{1,2}} = \frac{dp_{2,2}}{-2p_{1,2}} = \frac{dp_{12}}{p_{2,2}-p_{1,1}}$$
$$= \frac{dp_{1,i,j}}{p_{2i,j}} = \frac{dp_{2,i,j}}{-p_{1,i,j}} = \frac{dp_{1,1,i}}{2p_{1,2,i}} = \frac{dp_{2,2,i}}{-2p_{1,2,i}} = \frac{dp_{1,2,i}}{p_{2,2,i}-p_{1,1,i}}$$
$$= \frac{dp_{1,1,1}}{3p_{1,1,2}} = \frac{dp_{2,2,2}}{-3p_{1,2,2}} = \frac{dp_{1,1,2}}{2p_{1,2,2}-p_{1,1,1}} = \frac{dp_{1,2,2}}{-2p_{1,1,2}+p_{2,2,2}}.$$

Ceux de la première ligne fournissent les mêmes intégrales c, C, c_i, C_i, γ, Γ que les questions précédentes. Les rapports suivants, jusqu'à celui qui contient $dp_{1,1,1}$, ne diffèrent de ceux qui les précèdent qu'en ce que les p portent un indice de plus. Ils donnent donc

$$p_{1,i,j}^2 + p_{2,i,j}^2 = c_{i,j}, \quad p_{1,1,i}\,p_{2,i,j}^2 + p_{2,2,i}\,p_{1,i,j}^2 - 2p_{1,2,i}\,p_{1,i,j}\,p_{2,i,j} = C_{i,j},$$
$$p_{1,i,i} + p_{2,2,i} = C_i', \quad p_{1,1,i}\,p_{2,2,i} - p_{1,2,i}^2 = c_i'.$$

Pour lier ces deux suites de rapports l'une à l'autre, considérons l'équation

$$\frac{dp_{1,2,i}}{p_{2,2,i}-p_{1,1,i}} = \frac{dp_{1,2}}{p_{2,2}-p_{1,1}},$$

nous en tirerons, comme dans un cas semblable,

$$\pm \arcsin \frac{2p_{1,2,i}}{\sqrt{C_i'^2 - 4c_i'}} \mp \arcsin \frac{2p_{1,2}}{\sqrt{C^2-4c}} = \text{const.};$$

ou, en prenant les cosinus

$$(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})(p_{2,2} - p_{1,1}) + 4p_{1,2}\,p_{1,2,i} = \text{const.},$$

qu'on écrit aussi

$$p_{1,1}\,p_{2,2,i} + p_{2,2}\,p_{1,1,i} - 2p_{1,2}\,p_{1,2,i} = c_i''.$$

Venons aux quatre derniers rapports, et, pour la simplicité de l'écriture, représentons $p_{1,1,1}$ par x, $p_{2,2,2}$ par x', $p_{1,1,2}$ par y, $p_{1,2,2}$ par y',

$$\frac{dx}{3y} = \frac{dx'}{-3y'} = \frac{dy}{2y'-x} = \frac{dy'}{-2y+x'} = \lambda.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On en tire d'abord facilement

$$\lambda = \frac{d(x+y')}{y+x'} = \frac{d(x'+y)}{-(y'+x)}, \quad (p_{1,1,1}+p_{1,2,2})^2+(p_{1,1,2}+p_{2,2,2})^2 = c',$$

$$\lambda = \frac{x\,dy'+y'\,dx-2y\,dy}{-2xy+xx'+3yy'-4yy'+2xy} = \frac{d(xy'-y^2)}{xx'-yy'} = \frac{d(x'y-y'^2)}{-xx'+yy'},$$

$$p_{1,1,1}\,p_{1,2,2}-p_{1,1,2}^2+p_{1,1,2}\,p_{2,2,2}-p_{1,2,2}^2 = c''.$$

On pourrait obtenir la troisième des intégrales cherchées d'une manière fort simple, en apparence, en considérant les rapports

$$\frac{y'\,dy-y\,dy'}{2(y^2+y'^2)-(xy'+x'y)} = \frac{\sqrt{dy^2+dy'^2}}{\sqrt{4(y^2+y'^2)+(x^2+x'^2)-4(xy'+x'y)}},$$

d'où on peut éliminer, au moyen de c', c'', les quantités $x^2+x'^2$, $xy'+x'y$. Il reste alors en effet l'équation à deux variables

$$\frac{y'\,dy-y\,dy'}{y^2+y'^2+c''} = \frac{\sqrt{dy^2+dy'^2}}{\sqrt{c'+4c''-3(y^2+y'^2)}},$$

qu'on ramène aux quadratures en passant des coordonnées rectangles y, y' aux coordonnées polaires r, θ,

$$d\theta = \frac{(r^2+c'')\,dr}{r\sqrt{-c''^2+(c'+2c'')r^2-4r^4}},$$

et on obtient ainsi l'intégrale

$$4\theta + \arcsin\frac{8r^2-(c'+2c'')}{\sqrt{(c'+2c'')^2-16c''^2}} - 2\arcsin\frac{2c''^2-(c'+2c'')r^2}{r^2\sqrt{(c'+2c'')^2-16c''^2}} = \text{const.}$$

Mais, quand on repasse de ces arcs aux cosinus, et qu'on remplace les constantes c', c'' par leurs valeurs, on tombe sur un résultat tellement compliqué, qu'il deviendrait impossible d'en faire, pour la suite, aucun usage.

La considération attentive des rapports λ fournit cette troisième in-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tégrale sous une forme bien plus simple. On en tire, en effet,

$$\lambda = \frac{d(xy' - y^2)}{xx' - yy'} = \frac{d(x'y - y'^2)}{-xx' + yy'} = \frac{x\,dx' + x'\,dx}{3(yx' - y'x)}$$
$$= \frac{y\,dy' + y'\,dy}{2(y'^2 - y^2) + x'y - xy'} = \frac{d(xx' - yy')}{2(yx' - y'x) + 2(y^2 - y'^2)}$$
$$= \frac{(x'y - y'^2)\,d(xy' - y^2) + (xy' - y^2)\,d(x'y - y'^2)}{(xx' - yy')(-xy' + y^2 + x'y - y'^2)}$$
$$= \frac{(xx' - yy')\,d(xx' - yy')}{2(xx' - yy')(-xy' + y^2 + x'y - y'^2)},$$

d'où résulte

$$4(xy' - y^2)(x'y - y'^2) - (xx' - yy')^2 = \text{const.},$$
$$4(p_{1,1,1}p_{1,2,2} - p_{1,1,2}^2)(p_{2,2,2}p_{1,1,2} - p_{1,2,2}^2) - (p_{1,1,1}p_{2,2,2} - p_{1,1,2}p_{1,2,2})^2 = C'.$$

Enfin, il nous faut encore lier entre eux les quatre derniers rapports et les précédents. C'est ce qu'on peut faire par l'équation

$$\frac{dp_{1,2,i}}{\pm\sqrt{C_i'^2 - 4c_i' - 4p_{1,2,i}^2}} = \frac{d(x + y')}{x' + y} = \frac{d(x' + y)}{-(x + y')} = \frac{d[(x' + y)(x + y')]}{(x' + y)^2 - (x + y')^2}.$$

En y posant $(x' + y)(x + y') = u$, et transformant le dénominateur de du en $\pm\sqrt{c'^2 - 4u^2}$, puis intégrant,

$$\pm \arcsin \frac{2p_{1,2,i}}{\sqrt{C_i'^2 - 4c_i'}} \mp \arcsin \frac{2u}{c'} = \text{const.},$$

ce qui revient à

$$[(p_{1,1,1} + p_{1,2,2})^2 - (p_{2,2,2} + p_{1,1,2})^2](p_{1,1,i} - p_{2,2,i})$$
$$+ 4(p_{1,1,1} + p_{1,2,2})(p_{2,2,2} + p_{1,1,2})p_{1,2,i} = \text{const.},$$

ou bien à

$$(p_{1,1,1} + p_{1,2,2})^2 p_{2,2,i} + (p_{2,2,2} + p_{1,1,2})^2 p_{1,1,i}$$
$$- 2(p_{1,1,1} + p_{1,2,2})(p_{2,2,2} + p_{1,1,2})p_{1,2,i} = C_i''.$$

La forme finie à laquelle l'équation [1, 2] assujettit la fonction F est donc celle d'une fonction arbitraire des p qui n'entrent pas dans cette équation, et des quantités c_i, C_i; c, C; $c_{i,j}$, $C_{i,j}$; c_i', C_i'; c_i'', C_i''; c', c'', C'.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

XV. — *Premier théorème pour la formation des intégrales communes.*

Avant de chercher à utiliser les fonctions que nous venons d'obtenir pour la formation des intégrales communes du système $[r, s]$, nous démontrerons deux théorèmes qui sont de nature à faciliter le reste en permettant, une solution particulière étant supposée connue, d'en déduire un grand nombre d'autres.

Soit $a_{r,s}$ une fonction des $p_i\ p_{i,j}\ p_{i,j,k}$ satisfaisant aux équations

$$\lambda = \frac{da_r}{a_s} = \frac{da_s}{-a_r} = \frac{da_{r,i}}{a_{s,i}} = \frac{da_{s,i}}{-a_{r,i}} = \frac{da_{r,r}}{+2a_{r,s}} = \frac{da_{s,s}}{-2a_{r,s}} = \frac{da_{r,s}}{a_{s,s}-a_{r,r}},$$

$$da_i = da_{i,j} = 0\ (i, j \gtrless r, s),$$

et supposons les a_i tels, que le changement de r en s ne produise que le changement de a_r en a_s; les $a_{i,j}$ tels, que le déterminant A qui en serait formé soit symétrique par rapport aux indices; formons tous les déterminants tels que

$$A_{i,j} = A_{j,i} = \begin{vmatrix} 0 & p_{i,j,1} & p_{i,j,2}\dots & p_{i,j,n} \\ a_1 & a_{1,1} & a_{1,2}\dots & a_{1,n} \\ a_2 & a_{2,1} & a_{2,2}\dots & a_{2,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_n & a_{n,1} & a_{n,2}\dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

prenons-les pour éléments d'un nouveau déterminant $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,2}\dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2}\dots & A_{2,n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ A_{n,1} & A_{n,2}\dots & A_{n,n} \end{vmatrix},$$

ce dernier et toutes les sommes de ses déterminants principaux seront intégrales communes du système $[r, s]$.

Plus généralement, faisons la somme de tous ceux des déterminants principaux du $(m+1)^{ième}$ ordre qu'on peut former dans $A_{i,j}$, en y prenant toujours la première ligne et la première colonne; cette somme, que nous représenterons par $A_{i,j}^{(m)}$, prend, quand i et j varient, $\frac{n(n+1)}{2}$ va-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

leurs; et, si on l'adopte comme élément d'un déterminant,

$$\mathfrak{A}^{(m)} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}^{(m)}_{1,1} & \mathrm{A}^{(m)}_{1,2} \cdots & \mathrm{A}^{(m)}_{1,n} \\ \mathrm{A}^{(m)}_{2,1} & \mathrm{A}^{(m)}_{2,2} \cdots & \mathrm{A}^{(m)}_{2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \mathrm{A}^{(m)}_{n,1} & \mathrm{A}^{(m)}_{n,2} \cdots & \mathrm{A}^{(m)}_{n,n} \end{vmatrix},$$

ce déterminant et toutes les sommes de ses déterminants principaux d'un même ordre sont intégrales communes.

Pour démontrer la première partie, remarquons que toutes les fonctions dont il s'agit ici étant symétriques par rapport aux indices, il soffit de les différentier en regardant comme constant tout ce qui ne dépend d'aucun des indices 1 et 2, et de faire voir que ces différentielles sont nulles. Cela exige qu'on forme $d\mathrm{A}_{i,j}$. Or, en suivant la notation du § XIII, et en appliquant le théorème de ce paragraphe, on a

$$\frac{1}{\lambda}\, d\mathrm{A}_{1,1} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 3p_{1,1,2} & 2p_{1,2,2} - p_{1,1,1} & 2p_{1,2,3} \cdots & 2p_{1,2,n} \\ a_2 & 2a_{1,2} & a_{2,2} - a_{1,1} & a_{2,3} \cdots & a_{2,n} \\ -a_1 & a_{2,2} - a_{1,1} & -2a_{1,2} & -a_{1,3} \cdots & -a_{1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & a_{2,n} & -a_{n,1} & 0 \cdots & 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2p_{1,1,2} & 2p_{1,2,2} & 2p_{1,2,3} & 2p_{1,2,n} \\ a_2 & a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,n} \\ -a_1 & -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & -a_{1,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} = 2\mathrm{A}_{1,2};$$

car, sur les trois déterminants que ce tableau conduit à former, les deux derniers sont nuls. Cette circonstance ayant lieu pour tous, nous n'écrirons plus que la première ligne des tableaux analogues au précédent, et nous y ferons de suite la réduction facile qu'indique le § XIII. Nous aurons ainsi

$$\frac{1}{\lambda}\, d\mathrm{A}_{2,2} = \left\{ 0 \quad -2p_{1,1,2} \quad -2p_{1,2,2} \cdots \quad -2p_{1,2,n} \right\} = -2\mathrm{A}_{12},$$

$$\frac{1}{\lambda}\, d\mathrm{A}_{1,2} = \left\{ 0 \quad p_{1,2,2} - p_{1,1,1}, \quad p_{2,2,2} - p_{1,1,2} \cdots \quad p_{2,2n} - p_{1,1,n} \right\} = \mathrm{A}_{2,2} - \mathrm{A}_{1,1},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_{1,k} = \{ 0 \quad p_{1,2,k} \quad p_{2,2,k} \dots \quad p_{2,n,k} \} = \mathrm{A}_{2,k},$$

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_{2,k} = \{ 0 \quad -p_{1,1,k} \quad -p_{1,2,k} \dots \quad -p_{1,n,k} \} = -\mathrm{A}_{1,k},$$

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_{j,k} = 0;$$

Ainsi, les éléments du déterminant $\mathfrak{A}$ satisfont à $\frac{n(n+1)}{2}$ systèmes d'équations, telles que

$$\lambda = \frac{d\mathrm{A}_{1,i}}{\mathrm{A}_{2,i}} = \frac{d\mathrm{A}_{2,i}}{-\mathrm{A}_{1,i}} = \frac{d\mathrm{A}_{1,1}}{2\mathrm{A}_{1,2}} = \frac{d\mathrm{A}_{2,2}}{-2\mathrm{A}_{1,2}} = \frac{d\mathrm{A}_{1,2}}{\mathrm{A}_{2,2} - \mathrm{A}_{1,1}}, \quad d\mathrm{A}_{i,j} = 0 \, (i,j \gtrless 1,2).$$

Donc, comme on l'a vu au § X, les différentielles de ce déterminant et de ses sommes de déterminants principaux sont nulles.

Pour établir la seconde partie, il faut montrer que les équations différentielles précédentes ont lieu entre les $\mathrm{A}_{i,j}^{(m)}$ comme entre les $\mathrm{A}_{i,j}$. Or, $\mathrm{A}_{i,j}^{(m)}$ est composé de quatre sortes de termes : ceux où les indices r et s de l'élément $a_{r,s}$ ont $m+1$ valeurs, toutes différentes de 1 et de 2 ; ceux où ils ont m de ces valeurs avec la valeur 1 ; ceux où ils ont ces mêmes valeurs et la valeur 2 ; enfin ceux où r et s ont les valeurs 1, 2 et $m-1$ autres. Mais quelle que soit l'espèce de ces termes, on vérifiera aisément que $\mathrm{T}_{1,1}$, $\mathrm{T}_{1,2}$, $\mathrm{T}_{2,2}$ étant les trois termes qu'une même combinaison des a_r fournit dans $\mathrm{A}_{1,1}^{(m)}$, $\mathrm{A}_{1,2}^{(m)}$, $\mathrm{A}_{2,2}^{(m)}$, $\mathrm{T}_{1,i}$, $\mathrm{T}_{2,i}$ ceux qu'une même combinaison des a_r donne dans $\mathrm{A}_{1,i}^{(m)}$, $\mathrm{A}_{2,i}^{(m)}$, enfin $\mathrm{T}_{i,j}$ étant l'un quelconque des termes de $\mathrm{A}_{i,j}^{(m)}$, on a toujours

$$d\mathrm{T}_{1,1} = 2\lambda \mathrm{T}_{1,2}, \quad d\mathrm{T}_{2,2} = -2\lambda \mathrm{T}_{1,2}, \quad d\mathrm{T}_{1,2} = \lambda(\mathrm{T}_{2,2} - \mathrm{T}_{1,1}),$$
$$d\mathrm{T}_{1,i} = \lambda \mathrm{T}_{2,i}, \quad d\mathrm{T}_{2,i} = -\lambda \mathrm{T}_{1,i}, \quad d\mathrm{T}_{i,j} = 0.$$

La démonstration est, pour les termes de la quatrième sorte, identique à la précédente, et, pour les autres, les modifications à introduire sont trop légères pour qu'il soit nécessaire de les détailler. Nous avons donc bien

$$\lambda = \frac{d\mathrm{A}_{1,i}^{(m)}}{\mathrm{A}_{2,i}^{(m)}} = \frac{d\mathrm{A}_{2,i}^{(m)}}{-\mathrm{A}_{1,i}^{(m)}} = \frac{d\mathrm{A}_{1,1}^{(m)}}{2\mathrm{A}_{1,2}^{(m)}} = \frac{d\mathrm{A}_{2,2}^{(m)}}{-2\mathrm{A}_{1,2}^{(m)}} = \frac{d\mathrm{A}_{1,2}^{(m)}}{\mathrm{A}_{2,2}^{(m)} - \mathrm{A}_{1,1}^{(m)}}, \quad d\mathrm{A}_{i,j}^{(m)} = 0 \, (i,j \gtrless r,s).$$

Le nombre des solutions qu'on peut ainsi déduire du déterminant A s'élève à n^2.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

XVI. — *Second théorème pour le même objet.*

Soient A, B deux déterminants satisfaisant aux conditions du paragraphe précédent; si dans A on remplace un groupe ρ de k lignes par les lignes qui occupent les mêmes rangs dans B, et que, faisant varier ρ de toutes les manières possibles, on ajoute tous les résultats, on obtient une solution.

En outre, étant représentées par $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ les sommes des déterminants mineurs principaux du $m^{ième}$ ordre qu'on peut déduire de A et B, si, dans chaque terme de $A^{(m)}$, on substitue au groupe ρ de k lignes celles qui occupent mêmes rangs dans les termes correspondants de $B^{(m)}$, la somme de toutes ces expressions prises pour toutes les valeurs de ρ est encore une solution.

Démontrons d'abord la première partie, et supposons que k se réduise à 1. Soit A_i le résultat de la substitution de la $i^{ième}$ ligne de B à la $i^{ième}$ ligne de A. Différentions en ne regardant comme variables que ceux des a et des b qui dépendent des indices 1 et 2; d'après l'hypothèse

$$\lambda = \frac{da_{1,i}}{a_{2,i}} = \frac{da_{2,i}}{-a_{1,i}} = \frac{da_{1,1}}{2a_{1,2}} = \frac{da_{2,2}}{-2a_{1,2}} = \frac{da_{1,2}}{a_{2,2}-a_{1,1}}, \qquad da_{i,j} = 0,$$

$$\lambda = \frac{db_{1,i}}{b_{2,i}} = \frac{db_{2,i}}{-b_{1,i}} = \frac{db_{1,1}}{2b_{1,2}} = \frac{db_{2,2}}{-2b_{1,2}} = \frac{db_{2,2}}{b_{2,2}-b_{1,1}}, \qquad db_{i,j} = 0.$$

dA_1, dA_2, dA_i seront fournis par les tableaux

$$\frac{1}{\lambda} dA_1 = \left\{ \begin{array}{cccc} 2b_{1,2} & b_{2,2}-b_{1,1} & b_{2,3}\ldots & b_{2,n} \\ a_{2,2}-a_{1,1} & -2a_{1,2} & -a_{1,3}\ldots & -a_{1,n} \\ a_{3,2} & -a_{3,1} & 0\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,2} & -a_{n,1} & 0\ldots & 0 \end{array} \right\},$$

$$\frac{1}{\lambda} dA_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} 2a_{1,2} & a_{2,2}-a_{1,1} & a_{2,3}\ldots & a_{2,n} \\ b_{2,2}-b_{1,1} & -2b_{1,2} & -b_{1,3}\ldots & -b_{1,n} \\ a_{3,2} & -a_{3,1} & 0\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,2} & -a_{n,1} & 0\ldots & 0 \end{array} \right\}, \ldots,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_i = \begin{Vmatrix} 2a_{1,2} & a_{2,2} - a_{1,1} & a_{2,3} \ldots & a_{2,n} \\ a_{2,2} - a_{1,1} & -2a_{1,2} & -a_{1,3} \ldots & -a_{1,n} \\ a_{3,2} & -a_{3,1} & 0 \ldots & 0 \\ b_{i,2} & -b_{i,1} & 0 \ldots & 0 \\ a_{n,2} & -a_{n,1} & 0 \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

qui, par l'application du § XIII, et en ne conservant que les lignes qui ne donnent pas naissance à des déterminants nuls, deviennent

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_1 = \begin{Vmatrix} b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \ldots & b_{2,n} \\ -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \ldots & -a_{1,n} \end{Vmatrix},$$

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_2 = \begin{Vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \ldots & a_{2,n} \\ -b_{1,1} & -b_{1,2} & -b_{1,3} \ldots & -b_{1,n} \end{Vmatrix},$$

$$\frac{1}{\lambda} d\mathrm{A}_i = 0.$$

Ainsi $d\mathrm{A}_1 + d\mathrm{A}_2$ est composé de quatre déterminants se détruisant deux à deux; $d\mathrm{A}_i$ est nul quand i n'est 1 ni 2. Donc

$$d \sum_{i=1}^{i=n} \mathrm{A}_i = 0.$$

On vérifiera, exactement de la même manière, que, si $\mathrm{A}_{i,j}$ est le résultat de la substitution des lignes i et j de B aux lignes i et j de A, on a $d\mathrm{A}_{1,2} = 0$, $d\mathrm{A}_{1,i} + d\mathrm{A}_{2,i} = 0$, $d\mathrm{A}_{i,j} = 0$; d'où $d\sum\sum \mathrm{A}_{i,j} = 0$, et ainsi de suite.

Soit maintenant la somme des déterminants principaux du $m^{ième}$ ordre de A, et supposons d'abord qu'on y substitue une seule ligne. Il suit de ce que nous venons de voir que les termes qui dépendent à la fois des indices 1 et 2 donnent lieu à des sommes dont la différentielle est nulle. Il en est évidemment de même pour ceux qui ne dépendent que d'un seul de ces indices, puisque leurs éléments sont tous constants. Il ne reste donc à considérer que les groupes de deux déterminants dépendant de $m - 1$ indices communs, et d'un seul des indices 1 et 2.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a pour eux :

$$\left\{\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,i_2} & b_{1,i_3} & \dots & b_{1,i_m} \\ a_{i_2,1} & a_{i_2,i_2} & a_{i_2,i_3} & \dots & a_{i_2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m,1} & a_{i_m,i_2} & a_{i_m,i_3} & \dots & a_{i_m,i_m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,i_2} & a_{1,i_3} & \dots & a_{1,i_m} \\ b_{i_2,1} & b_{i_2,i_2} & b_{i_2,i_3} & \dots & b_{i_2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m,1} & a_{i_m,i_2} & a_{i_m,i_3} & \dots & a_{i_m,i_m} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,i_2} & a_{1,i_3} & \dots & a_{1,i_m} \\ a_{i_2,1} & a_{i_2,i_2} & a_{i_2,i_3} & \dots & a_{i_2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_m,1} & b_{i_m,i_2} & b_{i_m,i_3} & \dots & b_{i_m,i_m} \end{vmatrix}\right\}$$

$$+\left\{\begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,i_2} & b_{2,i_3} & \dots & b_{2,i_m} \\ a_{i_2,2} & a_{i_2,i_2} & a_{i_2,i_3} & \dots & a_{i_2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m,2} & a_{i_m,i_2} & a_{i_m,i_3} & \dots & a_{i_m,i_m} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,i_2} & a_{2,i_3} & \dots & a_{2,i_m} \\ b_{i_2,2} & b_{i_2,i_2} & b_{i_2,i_3} & \dots & b_{i_2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_m,2} & a_{i_m,i_2} & a_{i_m,i_3} & \dots & a_{i_m,i_m} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,i_2} & a_{2,i_3} & \dots & a_{2,i_m} \\ a_{i_2,2} & a_{i_2,i_2} & a_{i_2,i_3} & \dots & a_{i_2,i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_m,2} & b_{i_m,i_2} & b_{i_m,i_3} & \dots & b_{i_m,i_m} \end{vmatrix}\right\}$$

et, en groupant les déterminants qui occupent mêmes rangs dans les deux parties de cette somme, on reconnaît qu'elle ne dépend que des fonctions

$$a_{1,1} + a_{2,2}, \quad b_{1,1} + b_{2,2}, \quad a_{1,i}^2 + a_{2,i}^2, \quad a_{1,i}\,a_{1,j} + a_{2,i}\,a_{2,j}, \quad a_{1,i}\,b_{1,j} + a_{2,i}\,b_{2,j},$$

dont les différentielles sont nulles. La même démonstration s'applique visiblement au cas où l'on substitue plusieurs lignes.

Par l'emploi de ce théorème, on peut déduire des déterminants A et B un nombre de solutions égal à

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Parmi ces solutions se trouvent A et B eux-mêmes, et les sommes de leurs mineurs.

XVII. — *Premier système de solutions.*

Des fonctions c' et c'' on déduit

$$c' - 2c'' = x^2 + x'^2 + 3(y^2 + y'^2) = p^2_{1,1,1} + p^2_{2,2,2} + 3(p^2_{1,1,2} + p^2_{1,2,2}),$$

ce qui est la somme des carrés de toutes les dérivées du troisième ordre qui subsistent quand n se réduit à 2, à la condition que chacune de ces dérivées soit prise autant de fois que la permutation de ses indices la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fournit. Cela conduit à essayer en général la fonction

$$\sum_{i,j,k} p_{i,j,k}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_{i,i,i}^2 + 3\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} p_{i,i,j}^2 + 6\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}\sum_{k=1}^{k=n} p_{i,j,k}^2,$$

les indices étant supposés différents dans les $\sum$ du second membre. On vérifie sans difficulté que cette fonction est en effet solution, et comme on peut l'écrire sous la forme

$$\sum_{i,j} p_{1,i,j}^2 + \sum_{i,j} p_{2,i,j}^2 + \ldots + \sum_{i,j} p_{n,i,j}^2,$$

qui renferme les fonctions $c_{i,j}$, que d'ailleurs, par analogie avec ce qu'on a vu au § X relativement à l'intégrale $e_{i,j}$, on est porté à supposer que la fonction $p_{1,i,j}p_{1,i,j'} + p_{2,i,j}p_{2,i,j'}$ satisfait à [1, 2], ce qu'on vérifie facilement, on se trouve amené à considérer, en même temps que les sommes des carrés des dérivées, leurs sommes de produits. Ces quantités $\sum p_{k,j,i}^2, \sum p_{k,i,j}p_{k',i,j}$ sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$, et on peut en former un déterminant symétrique, dont la solution précédente dérive comme somme de ses éléments principaux. Soit donc

$$\mathfrak{d} = \begin{vmatrix} \sum p_{1,k,k'}^2 & \sum p_{1,k,k'}p_{2,k,k'} & \cdots & \sum p_{1,k,k'}p_{n,k,k'} \\ \sum p_{2,k,k'}p_{1k,k'} & \sum p_{2,k,k'}^2 & \cdots & \sum p_{2,k,k'}p_{n,k,k'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum p_{n,k,k'}p_{1,k,k'} & \sum p_{n,k,k'}p_{2,k,k'} & \cdots & \sum p_{n,k,k'}^2 \end{vmatrix};$$

et posons

$$\sum p_{i,k,k'}p_{j,k,k'} = \alpha_{i,j} = \alpha_{j,i},$$

nous aurons, en entendant dans la suite que les indices i et j sont essentiellement différents,

$$\alpha_{1,1} = p_{1,1,1}^2 + 2p_{1,1,2}^2 p_{1,2,2}^2 + 2\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,1,i}^2 + 2\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,2,i}^2 + \sum_{i=3}^{i=n} p_{1,i,i}^2 + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n} p_{1,i,j}^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\frac{1}{\lambda}\,d\alpha_{1,1} = 6p_{1,1,1}\,p_{1,1,2} + 4p_{1,1,2}(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) + 2\,p_{1,2,2}(-2p_{1,1,2} + p_{2,2,2})$$
$$+ 4\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,2,i}(p_{2,2,i} - p_{1,1,i}) + 8\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,1,i}\,p_{1,2,i}$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,1,i}\,p_{2,i,i} + 4\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n} p_{1,i,j}\,p_{2,i,j}$$
$$= 2\Big(p_{1,1,1}\,p_{1,1,2} + p_{1,2,2}\,p_{2,2,2} + 2p_{1,1,2}\,p_{1,2,2}$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,1,i}\,p_{1,2,i} + 2\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,2,i}\,p_{2,2,i} + \sum_{i=3}^{i=n} p_{1,i,i}\,p_{2,i,i} + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n} p_{1,i,j}\,p_{2,i,j}\Big) = 2\alpha_{1,2}.$$

Comme $\alpha_{2,2}$ se déduit de $\alpha_{1,1}$ en changeant l'un des indices 1 des p en l'indice 2, et que cela produit le même changement dans les différentielles et les affecte en outre du signe —, on a

$$d\alpha_{2,2} = -2\lambda\alpha_{1,2}.$$

Ensuite

$$\alpha_{1,2} = p_{1,1,1}\,p_{2,1,1} + p_{1,2,2}\,p_{2,2,2} + 2\,p_{1,1,2}\,p_{2,1,2}$$
$$- 2\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,2,i}(p_{1,1,i} + p_{2,2,i}) + \sum_{i=3}^{i=n} p_{1,i,i}\,p_{2,i,i} + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n} p_{1,i,j}\,p_{2,i,j};$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\alpha_{1,2} = 3p_{1,1,2}^2 + p_{1,1,1}(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) + p_{2,2,2}(-2p_{1,1,2} + p_{2,2,2}) - 3p_{1,2,2}^2$$
$$+ 2p_{1,2,2}(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) - 2p_{1,1,2}(2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,2,i}\,p_{1,1,i}) - p_{1,1,i} + 4\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,2,i}^2 + 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})\,p_{2,2,i}$$
$$- 4\sum_{i=3}^{i=n} p_{1,2,i}^2 + \sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,i,i}^2 - p_{1,i,i}^2) + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n}(p_{2,i,j}^2 - p_{1,i,j}^2)$$
$$- p_{1,1,1}^2 - p_{1,1,2}^2 + p_{2,2,2}^2 - p_{1,2,2}^2 + \sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,i,i}^2 - p_{1,i,i}^2)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,2,i}^2 - p_{1,1,i}^2) + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n}(p_{2,i,j}^2 - p_{1,i,j}^2) = \alpha_{2,2} - \alpha_{1,1};$$

$$\alpha_{1,k} = p_{1,1,1}p_{k,1,1} + 2p_{1,1,2}p_{k,1,2} + p_{1,2,2}p_{k,2,2}$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{1,1,i}p_{k,1,i} + p_{1,2,i}p_{k,2,i}) + \sum_{i=3}^{i=n}p_{1,i,i}p_{k,i,i} + 2\sum_{i=3}^{i=n}p_{1,i,j}p_{k,i,j};$$

$$\frac{1}{\lambda}d\alpha_{1,k} = 3p_{1,1,2}p_{1,1,k} + 2p_{1,1,1}p_{1,2,k} + 2(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1})p_{1,2,k}$$
$$+ 2(p_{2,2,k} - p_{1,1,k})p_{1,1,2} - (2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})p_{2,2,k} - 2p_{1,2,2}p_{1,2,k}$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})p_{2,k,i} - 2\sum_{i=3}^{i=n}p_{1,2,i}p_{1,k,i} + 4\sum_{i=3}^{i=n}p_{1,2,i}p_{1,k,i}$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n}p_{1,1,i}p_{2,k,i} + \sum_{i=3}^{i=n}p_{2,i,i}p_{k,i,i} + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n}p_{2,i,j}p_{k,i,j}$$
$$= p_{2,1,1}p_{k,1,1} + 2p_{2,1,2}p_{k,1,2} + p_{2,2,2}p_{k,2,2} + 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,1,i}p_{k,1,i} + p_{2,2,i} + p_{k,2,2})$$
$$+ \sum_{i=3}^{i=n}p_{2,i,i}p_{k,i,i} + 2\sum_{i=3}^{i=n}\sum_{j=3}^{j=n}p_{2,i,j}p_{k,i,j} = \alpha_{2,k}.$$

De même

$$d\alpha_{2,k} = -\lambda\alpha_{1,k},$$

$$\frac{1}{\lambda}d\alpha_{k,k'} = 2p_{1,2,k}p_{1,1,k'} + 2p_{1,1,k}p_{1,2,k'} + 2(p_{2,2,k} - p_{1,1,k})p_{1,2,k'}$$
$$+ 2(p_{2,2,k'} - p_{1,1,k'})p_{1,2,k} - 2p_{1,2,k}p_{2,2,k'} - 2p_{1,2,k'}p_{2,2,k}$$
$$+ 2\sum_{i=3}^{i=n}(p_{2,k,i}p_{1,k',i} + p_{1,k,i}p_{2,k',i} - p_{1,k,i}p_{2,k',i} - p_{2,k,i}p_{1,k',i}) = 0.$$

Ces calculs établissent donc que les $\alpha_{i,j}$ sont liés par les mêmes équations différentielles que $a_{i,j}$ $b_{i,j}$ du paragraphe précédent. Ainsi :

Le déterminant $\mathfrak{A}$ et les sommes de tous ses mineurs principaux du même ordre sont des solutions de la question.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

XVIII. — *Second système.*

Le produit $c'c''$ est

$$(x+y')^2(xy'-y^2)+(x'+y)^2(x'y-y'^2)$$
$$+(x+y')^2(x'y-y'^2)+(x'+y)^2(xy'-y^2).$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned}c''^2-C' &= [(xy'-y^2)-(x'y-y'^2)]^2+(xx'-yy')^2\\ &= [(x+y')y'-(x'+y)y]^2+[(x+y')x'-(x'+y)y']^2\\ &= (x+y')^2y'^2+(x'+y)^2y^2-2yy'(x+y')(x'+y)\\ &\quad +(x+y')^2x'^2+(x'+y)^2y'^2-2x'y'(x'+y)(x+y').\end{aligned}$$

En ajoutant ces deux quantités, on obtient

$$\begin{aligned}c'c''+c''^2-C' &= (x+y')^2(xy'-y^2)+(x'+y)^2(x'y-y'^2)+(x+y')^2(x'y+x'^2)\\ &\quad +(x'+y)^2(xy'+y'^2)-2(x+y')(x'+y)(x'y'+yy').\end{aligned}$$

Les trois derniers termes valent

$$\begin{aligned}&(x+y')(x'+y)(xx'+x'y'+x'y'+yy'-2x'y'-2yy')\\ &\quad =(x+y')(x'+y)(xx'-yy');\end{aligned}$$

donc

$$\text{const.}=(x+y')^2(xy'-y^2)+(x'+y)^2(x'y-y'^2)+(x+y')(x'+y)(xx'-yy'),$$

ce qui équivaut au déterminant binaire

$$\text{const.}=\begin{vmatrix} p_{1,1,1}(p_{1,1,1}+p_{1,2,2})+p_{2,1,1}(p_{2,1,1}+p_{2,2,2}) & p_{1,1,2}(p_{1,1,1}+p_{1,2,2})+p_{1,2,2}(p_{2,1,1}+p_{2,2,2}) \\ p_{1,1,2}(p_{1,1,1}+p_{1,2,2})+p_{1,2,2}(p_{2,1,1}+p_{2,2,2}) & p_{1,2,2}(p_{1,1,1}+p_{1,2,2})+p_{2,2,2}(p_{2,1,1}+p_{2,2,2}) \end{vmatrix}.$$

Ainsi, lorsque n se réduit à 2, ce déterminant fournit par lui-même une des solutions, et, par la somme de ses éléments principaux, une seconde qui n'est autre que c'. Cette circonstance nous conduit à le généraliser. Soient donc

$$\beta_k=\sum_{i=1}^{i=n}p_{k,i,i},\qquad \beta_{i,j}=\beta_{j,i}=\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_k p_{i,j,k},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nous aurons

$$\beta_1 = p_{1,1,1} + p_{1,2,2}\,p_{1,3,3} + \ldots; \qquad d\beta_1 = \lambda(p_{2,1,1} + p_{2,2,2} + p_{2,3,3} + \ldots) = \lambda\beta_2.$$

$$\beta_2 = p_{2,1,1} + p_{2,2,2} + p_{2,3,3} + \ldots; \qquad d\beta_2 = \lambda(-p_{1,1,1} - p_{1,2,2} - p_{1,3,3} - \ldots) = -\lambda\beta_1.$$

$$\beta_i = p_{i,1,1} + p_{i,2,2} + p_{i,3,3} + \ldots; \qquad d\beta_i = \lambda(p_{1,2,i} - p_{1,2,i}) \ldots = 0.$$

$$\beta_{1,1} = \beta_1 p_{1,1,1} + \beta_2 p_{1,1,2} + \sum_{k=3}^{k=n} \beta_k \beta_{1,1,k},$$

$$\beta_{1,2} = \beta_1 p_{1,2,1} + \beta_2 p_{1,2,2} + \sum_{k=3}^{k=n} \beta_k p_{1,2,k},$$

$$\beta_{1,i} = \beta_1 p_{1,1,i} + \beta_2 p_{1,2,i} + \sum_{k=3}^{k=n} \beta_k p_{1,k,i},$$

$$\beta_{i,j} = \beta_1 p_{i,j,1} + \beta_2 p_{i,j,2} + \sum_{k=3}^{k=n} \beta_k p_{i,j,k};$$

$$d\beta_{1,1} = \lambda\left[3\beta_1 p_{1,1,2} + \beta_2(2\,p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) + \beta_2 p_{1,1,1} - \beta_1 p_{1,1,2} + 2\sum_{k=3}^{k=n} \beta_k p_{1,2,k}\right]$$

$$= 2\lambda \sum_{k=1}^{k=n} \beta_k p_{1,2,k} = 2\lambda\beta_{1,2},$$

$$d\beta_{1,2} = \lambda\Big[\beta_1(2\,p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) - \beta_2(2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})$$

$$- \beta_1 p_{1,2,2} + \beta_2 p_{1,1,2} + \sum_{k=3}^{k=n} \beta_k(p_{2,2,k} - p_{1,1,k})\Big] = \lambda(\beta_{2,2} - \beta_{1,1}),$$

$$d\beta_{1,i} = \lambda\left[2\beta_1 p_{1,2,i} + \beta_2(p_{2,2,i} - p_{1,1,i}) + \beta_2 p_{1,1,i} - \beta_1 p_{1,2,i} + \sum_{k=3}^{k=n} \beta_k p_{2,i,k}\right] = \lambda\beta_{2,i},$$

$$d\beta_{i,j} = \lambda[\beta_1 p_{2,i,j} - \beta_2 p_{1,i,j} + \beta_2 p_{1,i,j} - \beta_1 p_{2,i,j}] = 0,$$

$$d\beta_{2,2} = -2\lambda\beta_{1,2}, \quad d\beta_{2,1} = \lambda(\beta_{2,2} - \beta_{1,1}).$$

Les β sont donc liés par les mêmes équations que les (a) (§ XV) ou

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les p (§ XI). Donc le déterminant

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n} \\ \beta_2 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & \beta_{n,1} & \beta_{n,2} & \dots & \beta_{n,n} \end{vmatrix},$$

traité comme le déterminant $\mathfrak{D}$ du § XII fournit $2n$ solutions.

Remarque. — Il est clair que si, au déterminant $\mathfrak{A}$ du paragraphe précédent, on adjoignait la ligne et la colonne $0\ \beta_1\ \beta_2 \dots\ \beta_n$, il en résulterait $n-1$ nouvelles solutions.

XIX. — *Troisième système.*

Les fonctions c'' et c'_i ajoutées donnent

$$\begin{aligned} & c'' + c'_3 + \dots + c'_n \\ & \quad = (p^2_{1,2,1} - p_{1,1,1}p_{2,2,1}) + (p^2_{1,2,2} - p_{1,1,2}p_{2,2,2}) + (p^2_{1,2,3} - p_{1,1,3}p_{2,2,3}) + \dots \\ & \quad = \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} p_{1,1,i} & p_{1,2,i} \\ p_{1,2,i} & p_{2,2,i} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Cette somme et ses analogues jouent encore un rôle important dans la formation des intégrales. Posons :

$$\gamma^{(j)}_{i,k} = \sum_{r=1}^{r=n} \begin{vmatrix} p_{i,j,r} & p_{j,j,r} \\ p_{i,k,r} & p_{j,k,r} \end{vmatrix},$$

et remarquons dès l'abord que

$$\gamma^{(j)}_{i,j} = 0, \quad \gamma^{(i)}_{i,j} = 0, \quad \gamma^{(j)}_{i,i} = \gamma^{(i)}_{j,j}, \quad \gamma^{(j)}_{i,k} = \gamma^{(j)}_{k,i}.$$

Différentions ces quantités comme aux paragraphes précédents; il viendra

$$d\gamma^{(1)}_{1,1} = 0, \quad d\gamma^{(1)}_{1,k} = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ensuite,

$$d\gamma^{(2)}_{1,1} = 0, \quad \text{parce que} \quad \gamma^{(2)}_{1,1} \quad \text{est intégrale de } [1,2], \quad d\gamma^{(2)}_{1,2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
d\gamma^{(2)}_{1,3} &= d\sum (p_{1,2,i}\,p_{2,3,i} - p_{2,2,i}\,p_{1,3,i}) \\
&= d\Big[p_{1,2,1}\,p_{2,3,1} - p_{2,2,1}\,p_{1,3,1} + p_{1,2,2}\,p_{2,3,2} - p_{2,2,2}\,p_{1,3,2} \\
&\qquad + \sum (p_{1,2,i}\,p_{2,3,i} - p_{2,2,i}\,p_{1,3,i})\Big] \\
&= \lambda\big[(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1})\,p_{2,3,1} - p_{1,2,1}\,(p_{2,2,3} - p_{1,1,3}) \\
&\qquad + (2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})\,p_{1,1,3} - 2p_{1,2,2}\,p_{1,1,3} - (2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})\,p_{2,2,3} \\
&\qquad - 2p_{1,2,2}\,p_{1,2,3} + 3p_{1,2,2}\,p_{1,2,3} - p_{2,2,2}\,(p_{2,2,3} - p_{1,1,3})\big] \\
&\quad + \lambda\Big[\sum\big\{(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})\,p_{2,3,i} - p_{1,2,i}\,p_{1,3,i} + 2p_{1,2,i}\,p_{1,3,i} - p_{2,2,i}\,p_{2,3,i}\big\}\Big] \\
&= \lambda \sum \begin{vmatrix} p_{1,2,i} & p_{1,1,i} \\ p_{2,3,i} & p_{1,3,i} \end{vmatrix} = \lambda\,\gamma^{(1)}_{2,3},
\end{aligned}$$

$$d\gamma^{(2)}_{1,k} = \lambda\,\gamma^{(1)}_{2,k},$$

$$\begin{aligned}
d\gamma^{(3)}_{1,1} &= d\sum (p^2_{1,3,i} - p_{1,1,i}\,p_{3,3,i}) \\
&= d\Big[(p^2_{1,3,1} - p_{1,1,1}\,p_{3,3,1}) + (p^2_{1,3,2} - p_{1,1,2}\,p_{3,3,2}) + \sum (p^2_{1,3,i} - p_{1,1,i}\,p_{3,3,i})\Big], \\
&= \lambda\Big[4\,p_{1,1,3}\,p_{1,2,3} - 3\,p_{1,1,2}\,p_{1,3,3} - p_{1,1,1}\,p_{2,3,3} + 2\,p_{1,2,3}\,(p_{2,2,3} - p_{1,1,3}) \\
&\qquad - p_{2,3,3}\,(2\,p_{1,2,2} - p_{1,1,1}) + p_{1,1,2}\,p_{1,3,3} + \sum (2\,p_{1,3,i}\,p_{2,3,i} - 2\,p_{1,2,i}\,p_{3,3,i})\Big] \\
&= 2\lambda \sum \begin{vmatrix} p_{2,3,i}\,p_{3,3,i} \\ p_{2,1,i}\,p_{1,3,i} \end{vmatrix} = 2\lambda\gamma^{(3)}_{2,1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\gamma^{(3)}_{1,2} &= d\sum (p_{1,3,i}\,p_{2,3,i} - p_{3,3,i}\,p_{1,2,i}) \\
&= \lambda\Big[2p^2_{1,2,3} + p_{1,1,3}\,(p_{2,2,3} - p_{1,1,3}) - p_{2,3,3}\,p_{1,1,2} - (2\,p_{1,2,2} - p_{1,1,1})\,p_{1,3,3} \\
&\qquad + p_{2,2,3}\,(p_{2,2,3} - p_{1,1,3}) - 2\,p^2_{1,2,3} + p_{1,2,2}\,p_{1,3,3} + p_{2,3,3}\,(2\,p_{1,1,2} - p_{2,2,2})\Big] \\
&\quad + \lambda \sum \Big[p^2_{2,3,i} - p^2_{1,3,i} - p_{3,3,i}\,(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})\Big] \\
&= \lambda\Big[\sum (p^2_{2,3,i} - p_{3,3,i}\,p_{2,2,i}) - \sum (p^2_{1,3,i} - p_{3,3,i}\,p_{1,1,i})\Big] = \lambda\,(\gamma^{(3)}_{2,2} - \gamma^{(3)}_{1,1}),
\end{aligned}$$

$$d\gamma^{(3)}_{1,3} = 0,$$

6.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$d\gamma^{(3)}_{1,k} = \lambda\Big[2p_{1,2,3}p_{1,3,k} + p_{1,1,3}p_{2,3,k} - p_{2,3,3}p_{1,1,k} - 2p_{1,3,3}p_{1,2,k}$$
$$+ (p_{2,2,3} - p_{1,1,3})p_{2,3,k} - p_{1,2,3}p_{1,3,k} + p_{1,3,3}p_{1,2,k} - p_{2,3,3}(p_{2,2,k} - p_{1,1,k})\Big]$$
$$+ \lambda\sum(p_{2,3,i}\,p_{3,k,i} - p_{3,3,i}\,p_{2,k,i}) = \lambda\gamma^{(3)}_{2,k};$$

De même,

$$d\gamma^{(4)}_{1,1} = 2\lambda\gamma^{(4)}_{2,1}, \quad d\gamma^{(4)}_{1,2} = \lambda\left[\gamma^{(4)}_{2,2} - \gamma^{(4)}_{1,1}\right], \quad d\gamma^{(4)}_{1,3} = \lambda\gamma^{(4)}_{2,3},$$
$$d\gamma^{(4)}_{1,4} = 0, \quad d\gamma^{(4)}_{1,5} = \lambda\gamma^{(4)}_{2,5}, \ldots,$$

ensuite,

$$d\gamma^{(1)}_{2,1} = 0, \quad d\gamma^{(1)}_{2,2} = 0,$$

$$d\gamma^{(1)}_{2,k} = \lambda\Big[(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1})p_{1,1,k} + 2p_{1,1,2}p_{1,2,k} - 3p_{1,1,2}p_{1,2,k}$$
$$- p_{1,1,1}(p_{2,2,k} - p_{1,1,k}) - (2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})p_{1,2,k}$$
$$+ (p_{2,2,k} - p_{1,1,k})p_{1,2,2} - (2p_{1,2,2} - p_{1,1,1})p_{2,2,k} + 2p_{1,1,2}p_{1,2,k}\Big]$$
$$+ \lambda\sum\Big[(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})p_{1,k,i} + p_{1,2,i}p_{2,k,i} - 2p_{1,2,i}p_{2,k,i} + p_{1,1,i}p_{1,k,i}\Big]$$
$$= -\lambda\sum\begin{vmatrix} p_{1,2,i}p_{2,2,i} \\ p_{1,k,i}p_{2,k,i} \end{vmatrix} = -\lambda\gamma^{(2)}_{1,k},$$

$$d\gamma^{(3)}_{2,k} = 0,$$

$$d\gamma^{(3)}_{2,1} = \lambda\Big[(p_{2,2,3} - p_{1,1,3})p_{1,1,3} + 2p^{(2)}_{1,2,3} - p_{2,3,3}\,p_{1,1,2} - p_{1,3,3}\,(2p_{1,2,2} - p_{1,1,1})$$
$$- 2p^{(2)}_{1,2,3} + p_{2,2,3}(p_{2,2,3} - p_{1,1,3}) - p_{1,3,3}\,p_{1,2,2} + p_{2,3,3}\,(2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})\Big]$$
$$+ \lambda\sum\Big[-p^{(2)}_{1,3,i} + p^{(2)}_{2,3,i} - p_{3,3,i}\,(p_{2,2,i} - p_{1,1,i})\Big]$$
$$= \lambda\Big[\sum(p^2_{2,3,i} - p_{2,2,i}\,p_{3,3,i}) - \sum(p^2_{1,3,i} - p_{1,1,i}\,p_{3,3,i})\Big]$$
$$= \lambda(\gamma^{(3)}_{2,2} - \gamma^{(3)}_{1,1}),$$

$$d\gamma^{(3)}_{2,2} = \lambda\Big[2p_{1,2,3}\,(p_{2,2,3} - p_{1,1,3}) + p_{1,2,3}\,(2p_{1,1,2} - p_{2,2,2}) - p_{1,2,2}\,p_{2,3,3} - 4\,p_{2,2,3}\,p_{1,2,3}$$
$$+ 3p_{1,2,2}\,p_{2,3,3} + p_{2,2,2}\,p_{1,3,3} - 2\sum(p_{1,3,i}\,p_{2,3,i} - p_{1,2,i}\,p_{3,3,i})\Big]$$
$$= -2\lambda\gamma^{(3)}_{1,2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$d\gamma^{(3)}_{2,k} = \lambda\Big[(p_{2,2,3}-p_{1,1,3})p_{1,3,k}+p_{1,2,3}\,p_{2,3,k}-p_{2,3,3}\,p_{2,1,k}+2p_{2,3,3}\,p_{1,2,k}$$
$$-2p_{1,2,3}\,p_{2,3,k}-p_{2,2,3}p_{1,3,k}+p_{1,3,3}\,p_{2,2,k}-p_{1,3,3}(p_{2,2,k}-p_{1,1,k})$$
$$+\lambda\sum(p_{3,3,i}\,p_{1,k,i}-p_{1,3,i}\,p_{3,k,i})\Big]$$
$$= -\lambda\gamma^{(3)}_{1,k},$$

De même

$$d\gamma^{(4)}_{2,1} = \lambda\left(\gamma^{(4)}_{2,2}-\gamma^{(4)}_{1,1}\right), \quad d\gamma^{(4)}_{2,2} = -2\lambda\gamma^{(4)}_{1,2}, \quad d\gamma^{(4)}_{2,3} = -\lambda\gamma^{(4)}_{1,3},$$

$$d\gamma^{(4)}_{2,4} = 0, \quad d\gamma^{(4)}_{2,5} = -\lambda\gamma^{(4)}_{1,5}, \cdots;$$

puis

$$d\gamma^{(1)}_{3,1} = 0,$$

$$d\gamma^{(1)}_{3,2} = \lambda\Big[2p_{1,2,3}\,p_{1,1,2}+(2p_{1,1,2}-p_{1,1,1})p_{1,1,3}-3p_{1,1,2}\,p_{1,2,3}-p_{1,1,1}(p_{2,2,3}-p_{1,1,3})$$
$$+p_{2,2,2}(p_{2,2,3}-p_{1,1,3})-p_{1,2,3}(2p_{1,1,2}-p_{2,2,2})-p_{1,2,3}(2p_{1,2,2}-p_{1,1,1})$$
$$+2p_{1,1,2}\,p_{1,2,3}\Big]$$
$$+\lambda\sum\Big[p_{2,3,i}\,p_{1,3,i}+p_{1,3,i}(p_{2,2,i}-p_{1,1,i})-2p_{1,2,i}p_{2,3,i}+p_{1,1,i}\,p_{1,3,i}\Big]$$
$$= -\lambda\gamma^{(2)}_{3,1},$$

$$d\gamma^{(1)}_{3,3} = d\gamma^{(3)}_{1,1} = 2\lambda\gamma^{(3)}_{2,1},$$

$$d\gamma^{(1)}_{3,k} = \lambda\Big[2p_{1,2,3}\,p_{1,1,k}+2p_{1,1,3}\,p_{1,2,k}-3p_{1,1,2}\,p_{1,3,k}-p_{1,1,1}\,p_{2,3,k}$$
$$+(p_{2,2,3}-p_{1,1,3})p_{1,2,k}+(p_{2,2,k}-p_{1,1,k})p_{1,2,3}-(2p_{1,2,2}-p_{1,1,1})p_{2,3,k}$$
$$+p_{1,1,2}\,p_{1,3,k}+\sum(p_{2,3,i}\,p_{1,k,i}+p_{1,3,i}\,p_{2,k,i}-2p_{1,2,i}\,p_{3,k,i})\Big],$$

$$d\gamma^{(2)}_{3,1} = \lambda\Big[(p_{2,2,3}-p_{1,1,3})\,p_{1,1,2}+p_{1,2,3}(2p_{1,2,2}-p_{1,1,1})+p_{1,1,3}(2p_{1,1,2}-p_{2,2,2})$$
$$-2p_{1,2,3}\,p_{1,2,2}-2p_{1,2,3}\,p_{1,2,2}-p_{2,2,3}(2p_{1,1,2}-p_{2,2,2})+3p_{1,2,2}\,p_{1,2,3}$$
$$-p_{2,2,2}(p_{2,2,3}-p_{1,1,3})\Big]$$
$$+\lambda\sum\Big[(p_{2,2,i}-p_{1,1,i})\,p_{2,3,i}-p_{1,3,i}\,p_{1,2,i}+2p_{1,2,i}\,p_{1,3,i}-p_{2,2,i}\,p_{2,3,i}\Big]$$
$$= \lambda\gamma^{(1)}_{3,2},$$

$$d\gamma^{(2)}_{3,2} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$d\gamma^{(2)}_{3,3} = d\gamma^{(3)}_{2,2} = -2\lambda\gamma^{(3)}_{1,2},$$

$$d\gamma^{(2)}_{3,k} = \lambda\Big[(p_{2,2,3} - p_{1,1,3})p_{1,2,k} + p_{1,2,3}(p_{2,2,k} - p_{1,1,k}) + (2p_{1,1,2} - p_{2,2,2})p_{1,3,k} - p_{1,2,2}p_{2,3,k} - 2p_{1,2,3}p_{2,2,k} - 2p_{2,2,3}p_{1,2,k} + 3p_{1,2,2}p_{2,3,k} + p_{2,2,2}p_{1,3,k}\Big] + \lambda\sum\Big[-(p_{1,3,i}p_{2,k,i} + p_{1,k,i}p_{2,3,i}) + 2p_{1,2,i}p_{3,k,i}\Big] = -d\gamma^{(1)}_{3,k},$$

$$d\gamma^{(3)}_{3,k} = 0,$$

$$d\gamma^{(4)}_{3,1} = \lambda\Big[p_{2,3,4}p_{1,1,4} + 2p_{1,3,4}p_{1,2,4} - 2p_{1,2,3}p_{1,4,4} - p_{1,1,3}p_{2,4,4} - p_{1,3,4}p_{1,2,4} + p_{2,3,4}(p_{2,2,4} - p_{1,1,4}) - (p_{2,2,3} - p_{1,1,3})p_{2,4,4} + p_{1,2,3}p_{1,4,4}\Big] + \lambda\sum(p_{3,4,i}p_{2,4,i} - p_{2,3,i}p_{4,4,i}) = \lambda\gamma^{(4)}_{3,2},$$

$$d\gamma^{(4)}_{3,2} = -\lambda\gamma^{(4)}_{3,1},$$

$$d\gamma^{(4)}_{3,k} = \lambda\Big(p_{2,3,4}p_{1,4,k} + p_{1,3,4}p_{2,4,k} - p_{2,3,k}p_{1,4,4} - p_{1,3,k}p_{2,4,4} - p_{1,3,4}p_{2,4,k} - p_{2,3,4}p_{1,4,k} + p_{1,3,k}p_{2,4,4} + p_{2,3,k}p_{1,4,4}\Big) = 0.$$

Ceci posé, soit

$$\gamma_{k,k'} = \gamma_{k',k} = \gamma^{(1)}_{k,k'} + \gamma^{(2)}_{k,k'} + \ldots + \gamma^{(n)}_{k,k'} = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n}\begin{vmatrix} p_{k,j,i} & p_{j,j,i} \\ p_{k,k',i} & p_{j,k',i}\end{vmatrix},$$

nous aurons

$$\frac{1}{\lambda}d\gamma_{1,1} = 2\gamma^{(3)}_{2,1} + 2\gamma^{(4)}_{2,1} + \ldots = 2\sum_{i=3}^{i=n}\gamma^{(i)}_{2,1} + 2\gamma^{(1)}_{2,1} + 2\gamma^{(2)}_{2,1} = 2\gamma_{2,1} = 2\gamma_{1,2},$$

$$\frac{1}{\lambda}d\gamma_{2,2} = -2\gamma^{(3)}_{1,2} - 2\gamma^{(4)}_{1,2} - \ldots = -2\sum_{i=3}^{i=n}\gamma^{(i)}_{1,2} - 2\gamma^{(1)}_{1,2} - 2\gamma^{(2)}_{1,2} = -2\gamma_{2,1} = -2\gamma_{1,2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\frac{1}{\lambda}\,d\gamma_{1,2} = \gamma^{(3)}_{2,2} - \gamma^{(3)}_{1,1} + \gamma^{(4)}_{2,2} - \gamma^{(4)}_{1,1} + \dots$$

$$= \sum_{i=3}^{i=n} \left[\gamma^{(i)}_{2,2} - \gamma^{(i)}_{1,1}\right] + \gamma^{(1)}_{2,2} - \gamma^{(1)}_{1,1} + \gamma^{(2)}_{2,2} - \gamma^{(2)}_{1,1} = \gamma_{2,2} - \gamma_{1,1} = \frac{1}{\lambda}\,d\gamma_{2,1},$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\gamma_{1,k} = \gamma^{(1)}_{2,k} + \gamma^{(3)}_{2,k} + \gamma^{(4)}_{2,k} + \dots = \gamma_{2,k},$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\gamma_{2,k} = -\gamma^{(2)}_{1,k} - \gamma^{(3)}_{1,k} - \gamma^{(4)}_{1,k} - \dots = -\gamma_{1,k},$$

$$d\gamma_{3,k} = \left[d\gamma^{(1)}_{3,k} + d\gamma^{(2)}_{3,k}\right] = 0,$$

$$d\gamma_{k,k'} = 0.$$

Les quantités $\gamma_{i,j}$ satisfont donc aux équations des §§ VII et XVI, et par suite le déterminant

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \dots & \gamma_{1,n} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \dots & \gamma_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \dots & \gamma_{n,n} \end{vmatrix}$$

et les sommes de ses mineurs principaux sont des intégrales communes.

XX. — *Divers autres systèmes. — Conclusion.*

La fonction

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n} p_k p_{i,j,k},$$

traitée comme les précédentes, donne lieu aux calculs suivants :

$$\frac{1}{\lambda}\,d\delta_{1,1} = \frac{1}{\lambda}\,d\left[p_1 p_{1,1,1} + p_2 p_{1,1,2} + \sum_{k=3}^{k=n} p_k p_{1,1,k}\right]$$

$$= p_2 p_{1,1,1} + 3p_1 p_{1,1,2} - p_1 p_{1,1,2} + 2p_2 p_{1,2,2} - p_2 p_{1,1,1} + 2\sum p_k p_{1,2,k}$$

$$= 2\delta_{1,2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\frac{1}{\lambda}\,d\delta_{2,2} = \frac{1}{\lambda}\,d\left[p_1 p_{2,2,1} + p_2 p_{2,2,2} + \sum_{k=3}^{k=n} p_k p_{2,2,k}\right]$$

$$= p_2 p_{2,2,1} - 2p_1 p_{1,1,2} + p_1 p_{2,2,2} - p_1 p_{2,2,2} - 3p_2 p_{1,2,2} - 2\sum p_k p_{1,2,k}$$

$$= -2\delta_{1,2},$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\delta_{1,2} = \frac{1}{\lambda}\,d\left[p_1 p_{1,2,1} + p_2 p_{1,2,2} + \sum_{k=3}^{k=n} p_k p_{1,2,k}\right]$$

$$= p_2 p_{1,1,2} + 2p_1 p_{1,2,2} - p_1 p_{1,1,1} - p_1 p_{1,2,2} - 2p_2 p_{1,1,2} + p_2 p_{2,2,2}$$
$$+ \sum p_k (p_{2,2,k} - p_{1,1,k})$$

$$= \delta_{2,2} - \delta_{1,1},$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\delta_{1,i} = \frac{1}{\lambda}\,d\left[p_1 p_{1,i,1} + p_2 p_{1,i,2} + \sum_{k=3}^{k=n} p_k p_{1,i,k}\right]$$

$$= p_2 p_{1,i,1} - p_1 p_{1,i,2} + 2p_1 p_{1,i,2} + p_2(p_{2,i,2} - p_{1,i,1}) + \sum p_k p_{2,i,k}$$

$$= \delta_{2,i},$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\delta_{2,i} = \frac{1}{\lambda}\,d\left[p_1 p_{2,i,1} + p_2 p_{2,i,2} + \sum_{k=3}^{k=n} p_k p_{2,i,k}\right]$$

$$= p_1 p_{2,i,1} + p_1(p_{2,2,i} - p_{1,1,i}) - p_1 p_{2,2,i} - 2p_2 p_{1,2,i} - \sum p_k p_{1,i,k}$$

$$= -\delta_{1,i},$$

$$\frac{1}{\lambda}\,d\delta_{i,j} = \frac{1}{\lambda}\,d\left[p_1 p_{i,j,1} + p_2 p_{i,j,2} + \sum_{k=3}^{k=n} p_k p_{i,j,k}\right]$$

$$= p_2 p_{i,j,1} - p_1 p_{i,j,2} + p_1 p_{i,j,2} - p_2 p_{i,j,1}$$

$$= 0.$$

On peut donc dire la même chose du déterminant Δ des $\delta_{i,j}$ que de ceux des §§ XVII et XVIX.

Enfin, prenons encore la fonction

$$\varepsilon_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n} \varepsilon_k p_{i,j,k} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_k = \sum_{i=1}^{i=n} p_i p_{k,i},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui ne diffère de $\beta_{i,j}$ que par le changement de β_i en ε_i. Comme on a, entre les ε_i,

$$\varepsilon_1 = p_1 p_{1,1} + p_2 p_{1,2} + \sum_{i=3}^{i=n} p_i p_{1,i},$$

$$\varepsilon_2 = p_1 p_{2,1} + p_2 p_{2,2} + \sum_{i=3}^{i=n} p_i p_{2,i},$$

$$\varepsilon_k = p_1 p_{k,i} + p_{2,k,2} + \sum_{i=3}^{i=n} p_i p_{k,i};$$

$$\frac{1}{\lambda} d\varepsilon_1 = p_2 p_{1,1} - p_1 p_{1,2} + 2p_1 p_{1,2} + p_2 (p_{2,2} - p_{1,1}) + \sum p_i p_{2,i} = \varepsilon_2,$$

$$\frac{1}{\lambda} d\varepsilon_2 = p_2 p_{2,1} - p_1 p_{2,2} + p_1 (p_{2,2} - p_{1,1}) - 2p_2 p_{1,2} - \sum p_i p_{1,i} = -\varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{\lambda} d\varepsilon_k = p_2 p_{k,1} - p_1 p_{k,2} + p_1 p_{k,2} - p_2 p_{k,1} = 0,$$

c'est-à-dire les mêmes relations qu'entre les β_i, on aura de nouvelles solutions en formant un déterminant $\mathfrak{C}$, avec les éléments ε_i, $\varepsilon_{i,j}$, comme $\mathfrak{B}$ a été formé au § XVIII avec les β_i, $\beta_{i,j}$.

La solution complète de la question proposée consiste en une fonction arbitraire de toutes les intégrales distinctes du système $[r, s]$. Ces intégrales doivent être en nombre égal à celui des variables p diminué de $\frac{n(n-1)}{2}$, nombre des équations $[r, s]$, c'est-à-dire au nombre de

$$n + \left[n + \frac{n(n-1)}{2}\right] + \left[n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right]$$
$$= 2n + n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Il est clair que les $2n$ solutions du § XII en font partie. Le déterminant $\mathfrak{D}$, auquel on appliquera le théorème du § XV, fournira n^2 solutions composées des p_i, $p_{i,j}$, $p_{i,j,k}$ mêlés. Si on applique ce même théorème au déterminant $\mathfrak{B}$ du § XVIII, on en conclura, entre autres solutions, n déterminants, et si à chacun d'eux on joint le déterminant $\mathfrak{A}$ pour le traiter comme l'indique le théorème XVI, on en déduira un nombre de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ solutions, parmi lesquelles, à la vérité,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A et les sommes de ses mineurs se trouvent répétées n fois, de sorte que ce nombre s'abaissera à $\frac{n^2(n+1)}{2} - n(n-1) = \frac{n^2(n-1)}{2} + n$. Ce nombre est de beaucoup supérieur à celui des solutions qui restent à trouver $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. D'ailleurs, on peut faire des déterminants Γ, Δ, $\mathcal{E}$ un usage analogue à celui que nous venons d'indiquer, et en conclure un grand nombre d'autres solutions.

Pour ne rien laisser à désirer, il faudrait, après avoir effectué ce que nous ne venons que d'indiquer, se livrer à une discussion approfondie des formes obtenues, afin de reconnaître celles qui peuvent former un système distinct et celles, nécessairement en grand nombre, qui rentrent dans les autres. Ce n'est qu'alors qu'on pourrait être assuré d'avoir obtenu l'intégrale générale du problème. Mais cette discussion, dans le cas de n variables, serait sans aucun doute longue et difficile. Comme d'ailleurs la complication de nos résultats ne paraît pas destiner le paramètre différentiel le plus général du troisième ordre à de nombreuses applications, nous n'insisterons pas sur ce sujet. Il est vrai que la discussion dont nous parlons pourrait conduire à des théorèmes intéressants peut-être sur le calcul et les propriétés des déterminants ; mais ce n'est pas à ce point de vue que nous voulons nous placer.

Le reste de notre travail portera spécialement sur les paramètres différentiels du second ordre.

CHAPITRE II.

TRANSFORMATION DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS.

I. — *Effets d'une substitution linéaire quelconque.*

Nous désignerons dorénavant par $D_1, D_2, \ldots, D_n$ les n paramètres différentiels du second ordre que fournit le déterminant D (§ VIII), par $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n$ ceux qui résultent du déterminant $\mathfrak{D}$ du § X. Le chapitre actuel a pour but de déterminer les formes que prennent ces

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fonctions, lorsqu'on les rapporte à des variables quelconques. M. Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*) a résolu ce problème pour les fonctions Θ_1, D_1 dans le cas de trois variables orthogonales. M. Brioschi (*Traité des déterminants*) a donné la transformation la plus générale de ces mêmes fonctions, et en outre de la fonction Θ_n (pages 112 et 115-118 de la traduction française). La marche à suivre est donc tout indiquée par les résultats acquis. Elle consiste du reste à exécuter ce que prescrit la théorie du changement des variables. Quoiqu'une partie notable de la question soit déjà résolue, le désir de présenter une théorie complète des paramètres différentiels nous la fera reprendre en entier; et nous allons considérer d'abord le cas d'une susbtitution linéaire quelconque.

Soient x'_1, x'_2,..., x'_n n nouvelles variables liées linéairement aux anciennes par les formules

$$(a) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} x'_j \begin{cases} x_1 = a_{1,1} x'_1 + a_{1,2} x'_2 + \ldots + a_{1,n} x'_n, \\ x_2 = a_{2,1} x'_1 + a_{2,2} x'_2 + \ldots + a_{2,n} x'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n,1} x'_1 + a_{n,2} x'_2 + \ldots + a_{n,n} x'_n. \end{cases}$$

Si on représente par A le déterminant

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

et qu'on désigne par $\mathrm{A}_{i,j}$ le coefficient de $a_{i,j}$ dans A, puis par $\alpha_{i,j}$ le quotient $\alpha_{i,j} = \frac{\mathrm{A}_{i,j}}{\mathrm{A}}$, on a

$$(a') \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{j,i} x_i \begin{cases} x'_1 = \alpha_{1,1} x_1 + \alpha_{2,1} x_2 + \ldots + \alpha_{n,1} x_n, \\ x'_2 = \alpha_{1,2} x_1 + \alpha_{2,2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,2} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = \alpha_{1,n} x_1 + \alpha_{2,n} x_2 + \ldots + \alpha_{n,n} x_n, \end{cases}$$

et il en résulte

$$p_i = \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{i,j} p'_j \begin{cases} p_1 = p'_1 \alpha_{1,1} + p'_2 \alpha_{1,2} + \ldots + p'_n \alpha_{1,n}, \\ p_2 = p'_1 \alpha_{2,1} + p'_2 \alpha_{2,2} + \ldots + p'_n \alpha_{2,n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = p'_1 \alpha_{n,1} + p'_2 \alpha_{n,2} + \ldots + p'_n \alpha_{n,n}. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les carrés et produits symboliques de ces expressions fournissent les dérivées secondes qu'on écrit aussi :

$$\frac{dp_1}{dx_1} = p_{1,1} = \alpha_{1,1}\frac{dp_1}{dx'_1} + \alpha_{1,2}\frac{dp_1}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{1,n}\frac{dp_1}{dx'_n},$$
$$\frac{dp_2}{dx_1} = \alpha_{1,1}\frac{dp_2}{dx'_1} + \alpha_{1,2}\frac{dp_2}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{1,n}\frac{dp_2}{dx'_n}, \ldots,$$
$$\frac{dp_n}{dx_1} = \alpha_{1,1}\frac{dp_n}{dx'_1} + \alpha_{1,2}\frac{dp_n}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{1,n}\frac{dp_n}{dx'_n},$$

$$\frac{dp_1}{dx_2} = p_{1,2} = \alpha_{2,1}\frac{dp_1}{dx'_1} + \alpha_{2,2}\frac{dp_1}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{2,n}\frac{dp_1}{dx'_n},$$
$$\frac{dp_2}{dx_2} = \alpha_{2,1}\frac{dp_2}{dx'_1} + \alpha_{2,2}\frac{dp_2}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{2,n}\frac{dp_2}{dx'_n}, \ldots,$$
$$\frac{dp_n}{dx_2} = \alpha_{2,1}\frac{dp_n}{dx'_1} + \alpha_{2,2}\frac{dp_n}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{2,n}\frac{dp_n}{dx'_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dp_1}{dx_n} = p_{1,n} = \alpha_{n,1}\frac{dp_1}{dx'_1} + \alpha_{n,2}\frac{dp_1}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{n,n}\frac{dp_1}{dx'_n},$$
$$\frac{dp_2}{dx_n} = \alpha_{n,1}\frac{dp_2}{dx'_1} + \alpha_{n,2}\frac{dp_2}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{n,n}\frac{dp_2}{dx'_n}, \ldots,$$
$$\frac{dp_n}{dx_n} = \alpha_{n,1}\frac{dp_n}{dx'_1} + \alpha_{n,2}\frac{dp_n}{dx'_2} + \ldots + \alpha_{n,n}\frac{dp_n}{dx'_n}.$$

Formons d'abord le déterminant D_n. Il suit de ces formules qu'il est égal au produit du déterminant des α par

$$\begin{vmatrix} \frac{dp_1}{dx'_1} & \frac{dp_1}{dx'_2} \ldots & \frac{dp_1}{dx'_n} \\ \frac{dp_2}{dx'_1} & \frac{dp_2}{dx'_2} \ldots & \frac{dp_2}{dx'_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \frac{dp_n}{dx'_1} & \frac{dp_n}{dx'_2} \ldots & \frac{dp_n}{dx'_n} \end{vmatrix}.$$

Or, si on différentie les valeurs ci-dessus des p_i par rapport aux x'_j, ce qui introduit les $p'_{i,j}$ dans les valeurs des $\frac{dp_i}{dx'_j}$, on reconnaît que ce déterminant est encore le produit du déterminant des α par celui des $p'_{i,j}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'ailleurs le déterminant des α est le quotient par A^n du déterminant *dérivé* de A, lequel est, comme on le sait, égal à A^{n-1}; ce quotient est donc $\frac{1}{A}$; d'où résulte, en appelant K le carré de A,

$$D'_n V = A^2 D_n V = K D_n V, \tag{1}$$

résultat déjà donné par M. Hesse (*Journal de Crelle*, t. XXVIII, p. 89).

Le déterminant A^2 qui s'introduit ici présente cette circonstance remarquable que ses éléments sont de la forme

$$k_{i,j} = a_{1,i}a_{1,j} + a_{2,i}a_{2,j} + \ldots + a_{n,i}a_{n,j},$$

qui est celle des premiers membres des conditions propres à exprimer l'orthogonalité d'une substitution; si la substitution est réellement orthogonale : $k_{i,i} = 1$, $k_{i,j} = 0$ et $A^2 = 1$, ce qui vérifie que la fonction D_n est bien indépendante des substitutions de ce genre.

Transformons de la même manière Θ_n. On trouve d'abord, par la substitution des p_i, $\frac{dp_i}{dx_j}$, que Θ_n est le produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & p'_1 & p'_2 & \ldots & p'_n \\ p_1 & \frac{dp_1}{dx'_1} & \frac{dp_1}{dx'_2} & \ldots & \frac{dp_1}{dx'_n} \\ p_2 & \frac{dp_2}{dx'_1} & \frac{dp_2}{dx'_2} & \ldots & \frac{dp_2}{dx'_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n & \frac{dp_n}{dx'_1} & \frac{dp_n}{dx'_2} & \ldots & \frac{dp_n}{dx'_n} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \ldots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix},$$

dont le dernier n'est autre que $\frac{1}{A}$. Remplaçant ensuite, dans le premier, les p_i par leurs valeurs, et les $\frac{dp_i}{dx'_j}$ par les dérivées de ces valeurs prises par rapport aux x', on reconnaît encore qu'il est le produit de Θ'_n par le même déterminant $\frac{1}{A}$. Donc

$$\Theta'_n V = K \Theta_n V, \tag{2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et cette formule vérifie en outre que $\Theta_n V$ est réellement indépendant des substitutions orthogonales.

Occupons-nous maintenant de D_k. En procédant de la même manière et appliquant un théorème connu du calcul des déterminants, on a

$$\begin{vmatrix} p_{r_1,r_1} & p_{r_1,r_2}\cdots & p_{r_1,r_k} \\ p_{r_2,r_1} & p_{r_2,r_2}\cdots & p_{r_2,r_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r_k,r_1} & p_{r_k,r_2}\cdots & p_{r_k,r_k} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \begin{vmatrix} \frac{dp_{r_1}}{dx'_{s_1}} & \frac{dp_{r_1}}{dx'_{s_2}}\cdots & \frac{dp_{r_1}}{dx'_{s_k}} \\ \frac{dp_{r_2}}{dx'_{s_1}} & \frac{dp_{r_2}}{dx'_{s_2}}\cdots & \frac{dp_{r_2}}{dx'_{s_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dp_{r_k}}{dx'_{s_1}} & \frac{dp_{r_k}}{dx'_{s_2}}\cdots & \frac{dx_{r_k}}{dx'_{s_k}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,s_1} & \alpha_{r_1,s_2}\cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,s_1} & \alpha_{r_2,s_2}\cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r_k,s_1} & \alpha_{r_k,s_2}\cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix},$$

σ étant le numéro d'ordre de la combinaison $s_1\ s_2 \ldots\ s_k$ parmi toutes celles qu'on peut former avec les n premiers nombres pris k à k. Si on remplace par leurs valeurs les éléments du second déterminant, on obtient pour valeur du second membre

$$\sum_{\sigma}\sum_{\sigma'} \begin{vmatrix} p'_{s_1,s'_1} & p'_{s_1,s'_2}\cdots & p'_{s_1,s'_k} \\ p'_{s_2,s'_1} & p'_{s_2,s'_2}\cdots & p'_{s_2,s'_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{s_k,s'_1} & p'_{s_k,s'_2}\cdots & p'_{s_k,s'_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,s'_1} & \alpha_{r_1,s'_2}\cdots & \alpha_{r_1,s'_k} \\ \alpha_{r_2,s'_1} & \alpha_{r_2,s'_2}\cdots & \alpha_{r_2,s'_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r_k,s'_1} & \alpha_{r_k,s'_2}\cdots & \alpha_{r_k,s'_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,s_1} & \alpha_{r_1,s_2}\cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,s_1} & \alpha_{r_2,s_2}\cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{r_k,s_1} & \alpha_{r_k,s_2}\cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix},$$

et il faut sommer cette expression par rapport aux r pour obtenir D_n. Or le facteur en p' est indépendant des r; la sommation par rapport à ces indices ne portera donc que sur les deux autres ; d'après une relation connue sur la liaison des déterminants mineurs d'un produit et de ses facteurs, cette somme se transforme fort simplement. En faisant sortir, en effet, des éléments α le facteur $\frac{1}{A}$, elle devient

$$\frac{1}{A^{2k}} \sum_{\rho} \begin{vmatrix} A_{r_1,s_1} & A_{r_1,s_2}\cdots & A_{r_1,s_k} \\ A_{r_2,s_1} & A_{r_2,s_2}\cdots & A_{r_2,s_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r_k,s_1} & A_{r_k,s_2}\cdots & A_{r_k,s_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{r_1,s'_1} & A_{r_1,s'_2}\cdots & A_{r_1,s'_k} \\ A_{r_2,s'_1} & A_{r_2,s'_2}\cdots & A_{r_2,s'_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r_k,s'_1} & A_{r_k,s'_2}\cdots & A_{r_k,s'_k} \end{vmatrix}.$$

Or, on sait que si, dans le déterminant dérivé d'un primitif, on forme

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un déterminant mineur d'ordre k, il est égal à la $(k-1)^{ième}$ puissance du déterminant primitif, multipliée par le mineur de ce dernier qui ne contient aucune des lignes et colonnes dont était formé le proposé. Remplaçant donc ainsi ces deux déterminants et indiquant généralement par $A_{\rho,\sigma}$ ce qu'on obtient en supprimant, dans le déterminant A, le groupe de lignes ρ et le groupe de colonnes σ, on obtient

$$\frac{A^{2k-2}}{A^{2k}} \sum A_{\rho,\sigma} A_{\rho,\sigma'} = \frac{1}{A^2} K_{\sigma,\sigma'},$$

par suite du théorème ci-dessus rappelé. Ainsi

$$(3) \qquad D_k V = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \frac{K_{\sigma,\sigma'}}{K} \begin{vmatrix} p'_{s_1,s'_1} & p'_{s_1,s'_2} & \cdots & p'_{s_1,s'_k} \\ p'_{s_2,s'_1} & p'_{s_2,s'_2} & \cdots & p'_{s_2,s'_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p'_{s_k,s'_1} & p'_{s_k,s'_2} & \cdots & p'_{s_k,s'_k} \end{vmatrix}.$$

Si, en particulier, la substitution est orthogonale, $K_{\sigma,\sigma} = 1$, $K_{\sigma,\sigma'} = 0$, et le second membre se réduit à la somme des déterminants mineurs principaux de D'_n, ce qui vérifie bien que $D_k V$ est indépendant de la substitution orthogonale. Dans le cas général, on voit que cette somme de mineurs principaux du $k^{ième}$ ordre se convertit en une somme de tous les mineurs, multipliés chacun par celui des mineurs du déterminant K qui est indépendant de ses indices.

Il est visible que tout ce que nous venons de dire sur D_k s'applique à Θ_k. Les modifications que la démonstration doit subir sont les mêmes qu'on a déjà faites pour passer de D_n à Θ_n.

Remarquons, en particulier, les formules

$$(5) \qquad \Theta_1 V = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{K_{i,i}}{K} p'^2_i + 2 \sum_{i,j} \frac{K_{i,j}}{K} p'_i p'_j, \qquad D_1 V = \sum_i \frac{K_{i,i}}{K} p'_{i,i} + 2 \sum_{i,j} \frac{K_{i,j}}{K} p'_{i,j}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

II. — *Paramètres différentiels du premier ordre d'un système de n fonctions.*

Soient maintenant

$$(6)\quad \rho_1 = f_1(x_1 x_2 \dots x_n),\quad \rho_2 = f_2(x_1 x_2 \dots x_n), \dots,\quad \rho_n = f_n(x_1 x_2 \dots x_n),$$

n nouvelles variables auxquelles nous voulons rapporter les paramètres différentiels. Puisque ces paramètres différentiels n'éprouvent aucun changement lorsqu'on y remplace les x_i par d'autres variables x'_i formant un système orthogonal et liées linéairement aux x_i, les formules qui expriment ces paramètres en ρ_i ne doivent point dépendre des dérivées de ces ρ_i d'une manière arbitraire. Ces dérivées n'y peuvent entrer que par l'intermédiaire de certaines fonctions telles, que la substitution des x'_i aux x_i ne leur fasse éprouver aucun changement. Il convient donc de chercher avant tout ces dernières fonctions qu'on peut appeler paramètres différentiels du système des ρ. En désignant par $p_i^{(j)}$ la dérivée $\frac{dp_j}{dx_i}$, par $p_i'^{(j)}$ la dérivée $\frac{d\rho_j}{dx'_i}$, on aura $p_i^{(j)}$ en fonction de $p_i'^{(j)}$ comme au § IV, chapitre I, et on en conclura sans peine l'équation

$$p_s^{(1)} \frac{dF}{dp_r^{(1)}} - p_r^{(1)} \frac{dF}{dp_s^{(1)}} + p_s^{(2)} \frac{dF}{dp_r^{(2)}} - p_r^{(2)} \frac{dF}{dp_s^{(2)}} + \dots + p_s^{(n)} \frac{dF}{dp_r^{(n)}} - p_r^{(n)} \frac{dF}{dp_s^{(n)}} = 0,$$

qui résulte du coefficient de $\omega_{r,s}$ dans le développement de

$$F\left(p_1'^{(1)}, p_2'^{(1)}, \dots,\quad p_1'^{(2)}, p_2'^{(2)}, \dots,\quad p_1'^{(n)}, p_2'^{(n)}, \dots\right).$$

Les paramètres différentiels du premier ordre doivent satisfaire aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations qu'on tire de celle-ci, en y donnant à r et s toutes les valeurs différentes possibles; et comme le nombre des variables p est n^2, le nombre des paramètres distincts doit être

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'équation précédente conduit à considérer le système des $2n-1$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équations simultanées

$$\frac{dp_r^{(1)}}{p_s^{(1)}} = \frac{dp_s^{(1)}}{-p_r^{(1)}} = \frac{dp_r^{(2)}}{p_s^{(2)}} = \frac{dp_s^{(2)}}{-p_r^{(2)}} = \ldots = \frac{dp_r^{(n)}}{p_s^{(n)}} = \frac{dp_s^{(n)}}{-p_s^{(n)}},$$

qui admet d'abord les n intégrales

$$\left[p_r^{(1)}\right]^2 + \left[p_s^{(1)}\right]^2 = \text{const.},$$

$$\left[p_r^{(2)}\right]^2 + \left[p_s^{(2)}\right]^2 = \text{const.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left[p_r^{(n)}\right]^2 + \left[p_s^{(n)}\right]^2 = \text{const.},$$

et donne ensuite

$$\frac{p_r^{(1)}\,dp_r^{(i)} + p_r^{(i)}\,dp_r^{(1)}}{p_r^{(1)}\,p_s^{(i)} + p_r^{(i)}\,p_s^{(1)}} = \frac{p_s^{(1)}\,dp_s^{(i)} + p_s^{(i)}\,dp_s^{(1)}}{-p_s^{(1)}\,p_r^{(i)} - p_s^{(i)}\,p_r^{(1)}} = \frac{d\left[p_r^{(1)}\,p_r^{(i)} + p_s^{(1)}\,p_s^{(i)}\right]}{0};$$

c'est-à-dire que les $n-1$ dernières intégrales sont :

$$p_r^{(1)}\,p_r^{(2)} + p_s^{(1)}\,p_s^{(2)} = \text{const.},$$

$$p_r^{(1)}\,p_r^{(3)} + p_s^{(1)}\,p_s^{(3)} = \text{const.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_r^{(1)}\,p_r^{(n)} + p_s^{(1)}\,p_s^{(n)} = \text{const.};$$

et il est facile d'en conclure que le paramètre le plus général du système des ρ est une fonction arbitraire : 1° des n paramètres du premier ordre de chacune de ces fonctions prises isolément :

$$\mathfrak{D}_1\rho_1 = \left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_1}{dx_n}\right)^2,$$

$$\mathfrak{D}_1\rho_2 = \left(\frac{d\rho_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_2}{dx_n}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{D}_1\rho_n = \left(\frac{d\rho_n}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_n}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_n}{dx_n}\right)^2;$$

2° des $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions qu'on obtient en mettant pour r et s toutes les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

combinaisons deux à deux des n premiers nombres dans

$$\sum_i \frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{d\rho_s}{dx_i} = \frac{d\rho_r}{dx_1}\frac{d\rho_s}{dx_1} + \frac{d\rho_r}{dx_2}\frac{d\rho_s}{dx_2} + \ldots + \frac{d\rho_r}{dx_n}\frac{d\rho_s}{dx_n}.$$

En effet, si on suppose nuls tous les $\frac{d\rho_r}{dx_i}$ où r est inférieur à i, et dont le nombre s'élève à $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, on a, pour déterminer les dérivées restantes, les équations

$$c_1 = \left(\frac{d\rho_1}{dx_1}\right)^2,$$

$$c_2 = \left(\frac{d\rho_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dx_2}\right)^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n-1} = \left(\frac{d\rho_{n-1}}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_{n-1}}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_{n-1}}{dx_{n-1}}\right)^2,$$

$$c_n = \left(\frac{d\rho_n}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_n}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d\rho_n}{dx_n}\right)^2,$$

$$c_{1,2} = \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_2}, \quad c_{1,3} = \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_3}{dx_1}, \ldots, \quad c_{1,n} = \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_n}{dx_1}.$$

$$c_{2,3} = \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_3}{dx_1} + \frac{d\rho_2}{dx_2}\frac{d\rho_3}{dx_2},$$

$$c_{2,4} = \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_4}{dx_1} + \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_4}{dx_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{2,n} = \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_n}{dx_1} + \frac{d\rho_2}{dx_2}\frac{d\rho_n}{dx_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n-1,n} = \frac{d\rho_{n-1}}{dx_1}\frac{d\rho_n}{dx_1} + \frac{d\rho_{n-1}}{dx_2}\frac{d\rho_n}{dx_2} + \ldots + \frac{d\rho_{n-1}}{dx_{n-1}}\frac{d\rho_n}{dx_{n-1}},$$

et on voit que la première c_1 donne $\frac{d\rho_1}{dx_1}$; $c_{1,2}$, $\frac{d\rho_2}{dx_2}$; c_2, $\frac{d\rho_2}{dx_1}$; $c_{1,3}$, $\frac{d\rho_3}{dx_1}$; $c_{2,3}$, $\frac{d\rho_3}{dx_2}$; c_3, $\frac{d\rho_3}{dx_3}$, et ainsi de suite; de sorte que ces inconnues sont toujours déterminées.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les quantités

$$h_{r,s}^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{d\rho_s}{dx_i},$$

qui conservent leurs formes et leurs valeurs quand on opère dans les ρ une substitution orthogonale quelconque, sont donc les éléments qui déterminent la nature du système de variables formé par ces fonctions, et ce sont ou ces quantités mêmes ou leurs fonctions que nous devons introduire dans nos formules.

Ces formules deviennent particulièrement simples lorsque le système des nouvelles variables est tel que $h_{r,s}$ soit nul toutes les fois que r et s sont différents. Comme cette circonstance a lieu pour toute substitution linéaire orthogonale, nous dirons alors, avec M. Lamé, que les variables ρ sont orthogonales.

Quoique les formules relatives aux variables orthogonales soient renfermées dans les formules générales, nous croyons devoir les traiter à part, à cause de leur beaucoup plus grande simplicité.

III. — *Formules pour les dérivées des deux premiers ordres quand les variables sont orthogonales.*

Si, des équations (6), on tire les x en fonction des ρ, et qu'on remette ces valeurs dans ces mêmes équations, puis qu'on différentie par rapport aux ρ, on a :

$$(a) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{dx_i}{d\rho_r}, \quad \text{et pour } s \gtrless r \quad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_s}{dx_i}\frac{dx_i}{d\rho_r}.$$

Désignons par ϖ le déterminant

$$\varpi = \begin{vmatrix} \frac{d\rho_1}{dx_1}\frac{d\rho_1}{dx_2}\cdots\frac{d\rho_1}{dx_n} \\ \frac{d\rho_2}{dx_1}\frac{d\rho_2}{dx_2}\cdots\frac{d\rho_2}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\rho_n}{dx_1}\frac{d\rho_n}{dx_2}\cdots\frac{d\rho_n}{dx_n} \end{vmatrix},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nous aurons

$$\frac{dx_i}{d\rho_j} = \frac{\varpi_{j,i}}{\varpi}.$$

Or, d'après les équations

$$(7) \qquad h_{r,r} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\rho_r}{dx_i}\right)^2, \quad 0 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{d\rho_s}{dx_i},$$

on reconnaît aisément que le carré de ϖ a tous ses éléments nuls, sauf les éléments principaux qui sont égaux à $h_{1,1}$, $h_{2,2}, \ldots$, $h_{n,n}$. Si donc on représente, pour plus de simplicité, la quantité $h_{r,r}$ par h_r^2, on a

$$(8) \qquad \varpi = h_1 h_2 \ldots h_n;$$

d'autre part, le déterminant ϖ donne lieu aux identités

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_r}{dx_i}\varpi_{s,i} = \begin{cases} \varpi\,(s=r) \\ 0\,(s \gtrless r) \end{cases},$$

qui, rapprochées des (7), montrent que

$$(9) \qquad \frac{1}{h_r}\frac{d\rho_r}{dx_i} = \frac{h_r}{\varpi}\varpi_{r,i}.$$

Donc

$$(10) \qquad \frac{dx_i}{d\rho_j} = \frac{1}{h_j^2}\frac{d\rho_j}{dx_i}, \quad \frac{d\rho_j}{dx_i} = h_j^2\frac{dx_i}{d\rho_j}.$$

Cette formule fort simple permet de transformer les dérivées des ρ par rapport aux x en dérivées des x par rapport aux ρ, ou inversement. On aurait pu l'établir plus rapidement par la comparaison des équations (7) et (*a*).

D'après cette formule, les équations (7) et (8) deviennent

$$(7\ bis) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dx_i}{d\rho_r}\frac{dx_i}{d\rho_s} = \begin{cases} \frac{1}{h_r^2}\,(r=s), \\ 0\,(r \gtrless s), \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{dx_1}{d\rho_1} & \frac{dx_2}{d\rho_1}\cdots & \frac{dx_n}{d\rho_1} \\ \frac{dx_1}{d\rho_2} & \frac{dx_2}{d\rho_2}\cdots & \frac{dx_n}{d\rho_2} \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{dx_1}{d\rho_n} & \frac{dx_2}{d\rho_n}\cdots & \frac{dx_n}{d\rho_n} \end{array}\right| = \omega = \frac{\varpi}{h_1^2 h_2^2 \ldots h_n^2} = \frac{1}{\varpi}.$$

Les premières montrent que la nature du système orthogonal peut être déterminée par les fonctions $\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{dx_i}{d\rho_r}\right)^2$, tout aussi bien que par les fonctions $\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\rho_r}{dx_i}\right)^2$; de telle sorte que si les h étaient donnés en fonction des ρ, l'intégration des équations (7 *bis*) donnerait les x en ρ, et par suite les ρ en x, c'est-à-dire ferait entièrement connaître la liaison du système ρ des nouvelles variables au système x des anciennes.

On peut donner des formes un peu différentes aux relations d'orthogonalité en effectuant les déterminants ϖ et ω par colonnes. On a ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\rho_i}{dx_r}\varpi_{i,s} = \begin{cases} \varpi\,(r=s), \\ 0\,(r\gtrless s), \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{dx_r}{d\rho_i}\omega_{i,s} = \begin{cases} \omega\,(s=r), \\ 0\,(s\gtrless r), \end{cases}$$

ou, en remplaçant $\varpi_{i,s}$, $\omega_{i,s}$ par leurs valeurs,

$$(7\ ter)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{h_i^2}\frac{d\rho_i}{dx_r}\frac{d\rho_i}{dx_s} = \begin{cases} 1\,(r=s), \\ 0\,(r\gtrless s), \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} h_i^2\frac{dx_r}{d\rho_i}\frac{dx_s}{d\rho_i} = \begin{cases} 1\,(r=s), \\ 0\,(r\gtrless s), \end{cases}$$

Les équations (7) suffisent pour faire connaître immédiatement la forme du paramètre différentiel de premier ordre d'une fonction quelconque V. Car

$$-\Theta_1 V = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\sum_{j=1}^{j=n}\frac{dV}{d\rho_j}\frac{d\rho_j}{dx_i}\right)^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{dV}{d\rho_j} \frac{dV}{d\rho_k} \frac{d\rho_j}{dx_i} \frac{d\rho_k}{dx_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{dV}{d\rho_j}\right)^2 \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\rho_j}{dx_i}\right)^2 + 2 \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dV}{d\rho_j} \frac{dV}{d\rho_k} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_j}{dx_i} \frac{d\rho_k}{dx_i},$$

les j étant différents des k sous les $\sum$ du dernier terme. Donc,

$$(11) \qquad -\Theta_1 V = \sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \left(\frac{dV}{d\rho_1}\right)^2 = h_1^2 \left(\frac{dV}{d\rho_1}\right)^2 + \ldots + h_n^2 \left(\frac{dV}{d\rho_n}\right)^2.$$

Passons aux dérivées secondes. Pour une fonction quelconque V, on aura

$$\frac{dV}{dx_r} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{d\rho_i} \frac{d\rho_i}{dx_r},$$

$$\frac{d^2V}{dx_r dx_s} = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \frac{d^2F}{d\rho_i d\rho_j} \frac{d\rho_i}{dx_r} \frac{d\rho_j}{dx_s} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{d\rho_i} \frac{d}{dx_s} \left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} h_i^2 h_j^2 \frac{d^2F}{d\rho_i d\rho_j} \frac{dx_r}{d\rho_i} \frac{dx_s}{d\rho_j} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dF}{d\rho_i} \frac{d}{dx_s} \left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right).$$

Ainsi, pour avoir ramené les dérivées à être prises par rapport aux ρ, il suffit d'y ramener la quantité $\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right)$. Or nous avons, en supposant les $\frac{d\rho_i}{dx_j}$ exprimés en fonction des x, et ceux-ci en fonction des ρ,

$$(12) \qquad \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right) = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d^2\rho_i}{dx_r dx_j} \frac{dx_r}{d\rho_i}$$

$$= \frac{1}{h_i^2} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d^2\rho_i}{dx_r dx_j} \frac{d\rho_i}{dx_r} = \frac{1}{2h_i^2} \frac{d(h_i^2)}{dx_j} = \frac{1}{h_i} \frac{dh_i}{dx_j},$$

et cette dérivée du premier ordre s'exprimera facilement par (10) en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dérivées prises par rapport à ρ. Nous avons ensuite

$$\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d^2\rho_i}{dx_r\,dx_j}\frac{dx_r}{d\rho_k}=\frac{1}{h_k^2}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d^2\rho_i}{dx_r\,dx_j}\frac{d\rho_k}{dx_r};$$

or, l'équation (7), écrite pour $r=i$, $s=k$, et dérivée par rapport à x_j, donne

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d^2\rho_i}{dx_r\,dx_j}\frac{d\rho_k}{dx_r}+\frac{d^2\rho_k}{dx_r\,dx_j}\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)=0.$$

Donc,

$$\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right)=-\frac{1}{h_k^2}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d^2\rho_k}{dx_r\,dx_j}\frac{d\rho_i}{dx_r}=-\frac{h_i^2}{h_k^2}\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_k}{dx_j}\right).$$

Cette équation s'écrit successivement, en tenant compte de (7),

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
h_k^2\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right)&=-h_i^2\frac{d}{d\rho_i}\left(h_k^2\frac{dx_j}{d\rho_k}\right)=-h_i^2h_k^2\frac{d^2x_j}{d\rho_i d\rho_k}-2h_i^2h_k\frac{dh_k}{d\rho_i}\frac{dx_j}{d\rho_k}\\
&=-2\frac{h_i^2}{h_k}\frac{dh_k}{d\rho_i}\frac{d\rho_k}{dx_j}-h_i^2h_k^2\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{1}{h_i^2}\frac{d\rho_i}{dx_j}\right),\\
&=-2\frac{h_i^2}{h_k}\frac{dh_k}{d\rho_i}\frac{d\rho_k}{dx_j}+2\frac{h_k^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_k}\frac{d\rho_i}{dx_j}-h_k^2\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right),\\
\frac{1}{h_i^2}\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_j}\right)&=\frac{1}{h_i^3}\frac{dh_i}{d\rho_k}\frac{d\rho_i}{dx_j}-\frac{1}{h_k^3}\frac{dh_k}{d\rho_i}\frac{d\rho_k}{dx_j}.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les deux formules fondamentales pour la transformation des dérivées secondes. Appliquons-les à la formation de D_1V. Nous avons

$$\frac{d^2V}{dx_i^2}=\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d^2V}{d\rho_r^2}\left(\frac{d\rho_r}{dx_i}\right)^2+2\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{d^2V}{d\rho_r\,d\rho_s}\frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{d\rho_s}{dx_i}+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{dV}{d\rho_r}\frac{d^2\rho_r}{dx_i^2},$$

et, en tenant compte des (7),

$$D_1V=\sum_{r=1}^{r=n}h_r^2\frac{d^2V}{d\rho_r^2}+\sum_{r=1}^{r=n}\frac{dV}{d\rho_r}D_1\rho_r.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or, on tire des formules (12) et (13) :

$$\frac{d^2\rho_r}{dx_i^2} = \frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{d\rho_r}{dx_i}\right)\frac{d\rho_r}{dx_i} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{d\rho_r}{dx_i}\right)\frac{d\rho_j}{dx_i}$$

$$= \frac{1}{h_r}\frac{dh_r}{dx_i}\frac{d\rho_r}{dx_i} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{h_r}\frac{dh_r}{d\rho_j}\frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{d\rho_j}{dx_i} - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{h_r^2}{h_j^3}\frac{dh_j}{d\rho_r}\left(\frac{d\rho_j}{dx_i}\right)^2,$$

les j étant différents de r. Remarquant qu'on peut introduire, sous les $2\sum$, les termes relatifs à $j = r$, parce qu'ils se détruisent, ces $\sum$ s'étendront à toutes les valeurs de j, et on aura

$$\frac{d^2\rho_r}{dx_i^2} = 2\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{h_r}\frac{dh_r}{d\rho_j}\frac{d\rho_r}{dx_i}\frac{d\rho_j}{dx_i} - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{h_r^2}{h_j^3}\frac{dh_j}{d\rho_r}\left(\frac{d\rho_j}{dx_i}\right)^2.$$

Ajoutant toutes les expressions semblables qui répondent aux diverses valeurs de i,

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{D}_1\rho_r = 2h_r\dfrac{dh_r}{d\rho_j} - h_r^2\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{h_j}\frac{dh_j}{d\rho_r} \\ \qquad = h_r^2\left[\dfrac{d\log(h_r^2)}{d\rho_r} - \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n}\frac{d\log h_j}{d\rho_r}\right] = h_r^2\frac{d}{d\rho_r}[\log h_r^2 - \log(h_1 h_2 \ldots h_n)]. \\ \mathrm{D}_1\rho_r = h_r^2\dfrac{d}{d\rho_r}\log\dfrac{h_r^2}{\varpi} = \varpi\dfrac{d\left(\dfrac{h_r^2}{\varpi}\right)}{d\rho_r}. \end{cases}$$

Par là, $\mathrm{D}_1\mathrm{V}$ devient

$$(15)\quad \mathrm{D}_1\mathrm{V} = \sum_{r=1}^{r=n} \varpi\left\{\frac{h_r^2}{\varpi}\frac{d^2\mathrm{V}}{d\rho_r^2} + \frac{d\mathrm{V}}{d\rho_r}\frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{h_r^2}{\varpi}\right)\right\} = \varpi\sum_{r=1}^{r=n}\frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{h_r^2}{\varpi}\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_r}\right).$$

Avant de passer à la transformation des paramètres différentiels en général, nous ferons remarquer les équations suivantes obtenues en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

différentiant (10) :

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d_2 x_i}{d\rho_j d\rho_k} = -\dfrac{2}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{d\rho_k}\dfrac{d\rho_j}{dx_i} + \dfrac{1}{h_j^2}\dfrac{d}{d\rho_k}\left(\dfrac{d\rho_j}{dx_i}\right) \\ \qquad = -\dfrac{2}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\rho_k}\dfrac{dx_i}{d\rho_j} + \dfrac{1}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\rho_k}\dfrac{dx_i}{d\rho_j} - \dfrac{1}{h_k}\dfrac{dh_k}{d\rho_j}\dfrac{dx_i}{d\rho_k}, \\ \dfrac{d^2 x_i}{d\rho_j d\rho_k} + \dfrac{1}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\rho_k}\dfrac{dx_i}{d\rho_j} + \dfrac{1}{h_k}\dfrac{dh_k}{d\rho_j}\dfrac{dx_i}{d\rho_k} = 0, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{d\rho_j^2} = -\dfrac{2}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{d\rho_j}\dfrac{d\rho_j}{dx_i} + \dfrac{1}{h_j^2}\dfrac{d}{d\rho_j}\left(\dfrac{d\rho_j}{dx_i}\right) \\ \qquad = -\dfrac{2}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\rho_j}\dfrac{dx_i}{d\rho_j} + \dfrac{1}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{dx_i} = -\dfrac{2}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\rho_j}\dfrac{dx_i}{d\rho_j} + \dfrac{1}{h_j^3}\sum_{r=1}^{r=n}\dfrac{dh_j}{d\rho_r}h_r^2\dfrac{dx_i}{d\rho_r}, \\ \dfrac{d^2 x_i}{d\rho_j^2} + \dfrac{2}{h_j}\dfrac{dh_j}{d\rho_j}\dfrac{dx_i}{d\rho_j} = \sum_{r=1}^{r=n}\dfrac{h_r^2}{h_j^3}\dfrac{dh_j}{d\rho_r}\dfrac{dx_i}{d\rho_r}. \end{cases}$$

Ce sont là les équations du deuxième ordre qui détermineraient les x en fonction des ρ, si les h étaient connus.

Toutes les formules du numéro actuel sont dues à M. Lamé, qui les a données pour le cas de $n = 3$. Nous nous sommes borné à les généraliser, en suivant la marche de l'auteur.

IV. — *Transformation de* $D_n V$, $\Theta_n V$.

De l'équation

$$\frac{d^2 V}{dx_i dx_j} = \frac{d}{dx_j}\left(\frac{dV}{dx_i}\right) = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{dV}{dx_i}\right)\frac{d\rho_r}{dx_j},$$

on conclut

$$D_n V = \begin{vmatrix} \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_1}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_1} & \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_1}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_2}\cdots & \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_1}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_n} \\ \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_2}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_1} & \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_2}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_2}\cdots & \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_2}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_n}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_1} & \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_n}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_2}\cdots & \sum \dfrac{d}{d\rho_r}\left(\dfrac{dV}{dx_n}\right)\dfrac{d\rho_r}{dx_n} \end{vmatrix};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, dans ce déterminant, il est facile de reconnaître le produit, effectué par lignes, des deux suivants :

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{dx_1}\right) & \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{dx_1}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_n}\left(\frac{dV}{dx_1}\right) \\ \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{dx_2}\right) & \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{dx_2}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_n}\left(\frac{dV}{dx_2}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) & \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{dx_n}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_n}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{d\rho_1}{dx_1} & \frac{d\rho_2}{dx_1}\cdots & \frac{d\rho_n}{dx_1} \\ \frac{d\rho_1}{dx_2} & \frac{d\rho_2}{dx_2}\cdots & \frac{d\rho_n}{dx_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d\rho_1}{dx_n} & \frac{d\rho_2}{dx_n}\cdots & \frac{d\rho_n}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

Effectuons ce même produit par colonnes; nous obtiendrons un déterminant dont l'élément $q_{i,j}$ sera

$$q_{i,j} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{dV}{dx_r}\right)\cdot\frac{d\rho_j}{dx_r},$$

ou bien

$$q_{i,j} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_j}{dx_r} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{dV}{d\rho_s}\frac{d\rho_s}{dx_r}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n} \frac{dV}{d\rho_s} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_j}{dx_r}\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_s}{dx_r}\right) + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{d^2V}{d\rho_i\, d\rho_s} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_s}{dx_r}\frac{d\rho_j}{dx_r}.$$

Sous le $\sum_s$ du dernier terme, tout se détruit, sauf le terme pour lequel $s = j$, qui vaut $h_j^2 \frac{d^2V}{d\rho_i\, d\rho_j}$. Il ne reste donc à calculer que les expressions $\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_j}{dx_r}\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_s}{dx_r}\right)$. C'est ce qu'on fait aisément par les formules (12) et (13) :

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_j}{dx_r}\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_k}\frac{d\rho_i}{dx_r}\frac{d\rho_j}{dx_r} - \sum_{r=1}^{r=n} \frac{h_i^2}{h_k^3}\frac{dh_k}{d\rho_i}\frac{d\rho_j}{dx_r}\frac{d\rho_k}{dx_r} = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_j}{dx_r}\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \frac{1}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_j} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_i}{dx_r}\frac{d\rho_j}{dx_r} - \frac{h_i^2}{h_j^3}\frac{dh_j}{d\rho_i} \sum_{r=1}^{r=n} \left(\frac{d\rho_j}{dx_r}\right)^2 = -\frac{h_i^2}{h_j}\frac{dh_j}{d\rho_i},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_j}{dx_r}\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \frac{1}{h_i}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{dh_i}{dx_r}\frac{d\rho_j}{dx_r} = \frac{h_j^2}{h_i}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{dh_i}{dx_r}\frac{dx_r}{d\rho_j} = \frac{h_j^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_j},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_i}{dx_r}\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = h_i\frac{dh_i}{d\rho_j},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_i}{dx_r}\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = h_i\frac{dh_i}{d\rho_i},$$

et alors on a

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} q_{i,j} &= h_j^2\frac{d^2V}{d\rho_i d\rho_j} + \frac{dV}{d\rho_i}\frac{h_j^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_j} + \frac{dV}{d\rho_j}h_j\frac{dh_j}{d\rho_i} \\ &= h_j^2\left(\frac{d^2V}{d\rho_i d\rho_j} + \frac{dV}{d\rho_i}\frac{d\log h_i}{d\rho_j} + \frac{dV}{d\rho_j}\frac{d\log h_j}{d\rho_i}\right) \\ &= \frac{d}{d\rho_i}\left(h_j^2\frac{dV}{d\rho_j}\right) + \left(h_i^2\frac{dV}{d\rho_i}\right)\frac{h_j^2}{h_i^2}\frac{d\log h_i}{d\rho_j} - h_j^2\frac{dV}{d\rho_i}\frac{d\log h_j}{d\rho_i}, \\ q_{i,i} &= h_i^2\frac{d^2V}{d\rho_i^2} + h_i\frac{dh_i}{d\rho_i}\frac{dV}{d\rho_i} - \frac{1}{h_i}\sum_{r=1}^{r=n} h_r^2\frac{dh_i}{d\rho_r}\frac{dV}{d\rho_r} \\ &= \frac{d}{d\rho_i}\left(h_i^2\frac{dV}{d\rho_i}\right) - \sum_{r=1}^{r=n}\left(h_r^2\frac{dV}{d\rho_r}\right)\frac{d\log h_i}{d\rho_r}, \end{aligned}\right.$$

l'indice r ne pouvant pas prendre sous le premier $\sum$ la valeur $r = i$, tandis qu'il les prend toutes sous le second. La valeur de D_nV est donc

$$(18)\quad D_nV = \begin{vmatrix} q_{1,1} & q_{1,2}\cdots & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2}\cdots & q_{2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ q_{n,1} & q_{n,2}\cdots & q_{n,n} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que D_nV est composé en $q_{i,j}$ comme en $\frac{d^2V}{dx_i\,dx_j}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Remarquons en particulier la formule suivante, qui fournit $D_n \rho_i$:

$$(19)\quad \left\{ D_n \rho_i = \begin{vmatrix} -\frac{h_i^2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_i} & 0 & 0\ldots & h_i\frac{dh_i}{d\rho_1}\cdots & 0 \\ 0 & -\frac{h_i^2}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_i} & 0\ldots & h_i\frac{dh_i}{d\rho_2}\cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h_i^2}{h_3}\frac{dh_3}{d\rho_i}\cdots & h_i\frac{dh_i}{d\rho_3}\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{h_1^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_1} & \frac{h_2^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_2} & \frac{h_3^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_3}\cdots & h_i\frac{dh_i}{d\rho_i}\cdots & \frac{h_n^2}{h_i}\frac{dh_i}{d\rho_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots & h_i\frac{dh_i}{d\rho_n}\cdots & -\frac{h_i^2}{h_n}\frac{dh_n}{d\rho_i} \end{vmatrix} \right.$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{d\log h_1}{d\rho_i}\frac{d\log h_2}{d\rho_i}\cdots\frac{d\log h_n}{d\rho_i}\,h_i^{2n-3}\sum_{j=1}^{j=n} h_j^3\frac{\left(\frac{dh_i}{d\rho_j}\right)^2}{\frac{dh_i}{d\rho_i}\frac{dh_j}{d\rho_i}}.$$

Occupons-nous maintenant de $\Theta_n V$. Si on remplace, dans ce déterminant, les éléments de la première ligne, tels que $\frac{dV}{dx_i}$, par leurs valeurs

$$\frac{dV}{dx_i} = \sum_{r=1}^{r=n}\frac{dV}{d\rho_r}\frac{d\rho_r}{dx_i},$$

on y reconnaît, comme ci-dessus, le produit effectué par lignes des déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{dV}{d\rho_1} & \frac{dV}{d\rho_2} & \frac{dV}{d\rho_n} \\ \frac{dV}{dx_1}\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{dx_1}\right) & \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{dx_1}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_n}\left(\frac{dV}{dx_1}\right) \\ \frac{dV}{dx_2}\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{dx_2}\right) & \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{dx_2}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_n}\left(\frac{dV}{dx_2}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dV}{dx_n}\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) & \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{dx_n}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_n}\left(\frac{dV}{dx_n}\right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \frac{d\rho_1}{dx_1} & \frac{d\rho_2}{dx_1}\cdots & \frac{d\rho_n}{dx_1} \\ 0 & \frac{d\rho_1}{dx_2} & \frac{d\rho_2}{dx_2}\cdots & \frac{d\rho_n}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{d\rho_1}{dx_n} & \frac{d\rho_2}{dx_n}\cdots & \frac{d\rho_n}{dx_n} \end{vmatrix}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En effectuant ce même produit par colonnes, on obtient pour éléments de la première ligne les $\frac{dV}{d\rho_i}$; pour ceux de la première colonne, des sommes telles que

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{dV}{dx_r}\frac{d\rho_i}{dx_r} = h_i^3 \sum_{r=1}^{r=n} \frac{dV}{dx_r}\frac{dx_r}{d\rho_i} = h_i^2 \frac{dV}{d\rho_i},$$

et pour les autres éléments, les $q_{i,j}$. Ainsi

$$(20) \qquad \mathfrak{D}_n V = \begin{vmatrix} 0 & h_1^2\frac{dV}{d\rho_1} & h_2^2\frac{dV}{d\rho_2}\cdots & h_n^2\frac{dV}{d\rho_n} \\ \frac{dV}{d\rho_1} & q_{1,1} & q_{1,2}\cdots & q_{1,n} \\ \frac{dV}{d\rho_2} & q_{2,1} & q_{2,2}\cdots & q_{2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{dV}{d\rho_n} & q_{n,1} & q_{2,n}\cdots & q_{n,n} \end{vmatrix}$$

$\mathfrak{D}_n V$ est donc le produit de ϖ^2 par un déterminant composé en $\frac{dV}{d\rho_i}$ et $\frac{1}{h_j^2} q_{i,j}$ comme en $\frac{dV}{dx_i}$ et $\frac{d^2V}{dx_i dx_j}$. En particulier, on trouve

$$(21) \qquad \mathfrak{D}_n \rho_i = (-1)^n \frac{h_i^{2n-1}}{\left(\frac{dh_i}{d\rho_i}\right)} \frac{d\log h_1}{d\rho_i}\frac{d\log h_2}{d\rho_i}\cdots\frac{d\log h_n}{d\rho_i}.$$

V. — *Formules pour* $D_k V$, $\mathfrak{D}_k V$.

Considérons l'un quelconque des déterminants qui composent $D_k V$, et substituons aux éléments $\frac{d^2V}{dx_i\,dx_j}$ les mêmes valeurs qu'au numéro précédent. Il suit d'un théorème déjà employé (§ I) que ce déterminant se transforme de la manière suivante :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_{s_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) & \frac{d}{dx_{s_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right)\cdots & \frac{d}{dx_{s_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) \\ \frac{d}{dx_{s_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) & \frac{d}{dx_{s_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right)\cdots & \frac{d}{dx_{s_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{dx_{s_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) & \frac{d}{dx_{s_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right)\cdots & \frac{d}{dx_{s_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\rho} \begin{vmatrix} \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) \\ \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_1}} & \frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_1}}\cdots & \frac{d\rho_{r_k}}{dx_{s_1}} \\ \frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_2}} & \frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_2}}\cdots & \frac{d\rho_{r_k}}{dx_{s_2}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_k}} & \frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_k}}\cdots & \frac{d\rho_{r_k}}{dx_{s_k}} \end{vmatrix}.$$

Formons maintenant le déterminant

$$\begin{vmatrix} q_{r_1,r_1} & q_{r_1,r_2}\cdots & q_{r_1,r_k} \\ q_{r_2,r_1} & q_{r_2,r_2}\cdots & q_{r_2,r_k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ q_{r_k,r_1} & q_{r_k,r_2}\cdots & q_{r_k,r_k} \end{vmatrix},$$

et remplaçons-en les éléments $q_{i,j}$ par leurs valeurs $\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{dV}{dx_r}\right)\frac{d\rho_j}{dx_r}$, le même théorème donnera

$$\begin{vmatrix} q_{r_1,r_1} & q_{r_1,r_2}\cdots & q_{r_1,r_k} \\ q_{r_2,r_1} & q_{r_2,r_2}\cdots & q_{r_2,r_k} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ q_{r_k,r_1} & q_{r_k,r_2}\cdots & q_{r_k,r_k} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma} \begin{vmatrix} \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) \\ \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_1}} & \frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_2}}\cdots & \frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_k}} \\ \frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_1}} & \frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_2}}\cdots & \frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_k}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d\rho_{r_k}}{dx_{s_1}} & \frac{d\rho_{r_k}}{dx_{s_2}}\cdots & \frac{d\rho_{r_k}}{dx_{s_k}} \end{vmatrix}.$$

Or, pour former $D_k V$, il faut sommer tous les déterminants de la première forme par rapport aux s, et on trouve absolument le même ré-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sultat en sommant ceux de la seconde forme par rapport aux r. D'où résulte

$$(22)\qquad D_k V = \sum_{\rho} \begin{vmatrix} q_{r_1,r_1} & q_{r_1,r_2} \cdots & q_{r_1,r_k} \\ q_{r_2,r_1} & q_{r_2,r_2} \cdots & q_{r_2,r_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ q_{r_k,r_1} & q_{r_k,r_2} \cdots & q_{r_k,r_k} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que $D_k V$ est composé de la même manière, soit en $\frac{d^2 V}{dx_i dx_j}$, soit en $q_{i,j}$.

On montrera absolument de même que

$$(23)\qquad \mathfrak{D}_k V = \sum_{\rho} \begin{vmatrix} 0 & h_{r_1}^2 \frac{dV}{d\rho_{r_1}} & h_{r_2}^2 \frac{dV}{d\rho_{r_2}} \cdots & h_{r_k}^2 \frac{dV}{d\rho_{r_k}} \\ \frac{dV}{d\rho_{r_1}} & q_{r_1,r_1} & q_{r_1,r_2} \cdots & q_{r_1,r_k} \\ \frac{dV}{d\rho_{r_2}} & q_{r_2,r_1} & q_{r_2,r_2} \cdots & q_{r_2,r_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ \frac{dV}{d\rho_{r_k}} & q_{r_k,r_1} & q_{r_k,r_2} \cdots & q_{r_k,r_k} \end{vmatrix}.$$

On peut encore énoncer toutes ces transformations en disant que, si on désigne par $q'_{i,i}$, $q'_{i,j}$ les expressions

$$(17\ bis)\qquad \begin{cases} q'_{ii} = \dfrac{d^2 V}{d\rho_i^2} + 2\dfrac{d\log h_i}{d\rho_i}\dfrac{dV}{d\rho_i} - \displaystyle\sum_{r=n}^{r=1} \frac{h_r^2}{h_i^2}\frac{dV}{d\rho_r}\frac{d\log h_i}{d\rho_r}, \\ q'_{ij} = \dfrac{d^2 V}{d\rho_i d\rho_j} + \dfrac{dV}{d\rho_i}\dfrac{d\log h_i}{d\rho_j} + \dfrac{dV}{d\rho_j}\dfrac{d\log h_j}{d\rho_i}, \end{cases}$$

chacun des déterminants entrant dans un des paramètres différentiels se trouve remplacé par un déterminant composé exactement de même, en $\frac{dV}{d\rho_i}$ au lieu de $\frac{dV}{dx_i}$, et $q'_{i,j}$ au lieu de $\frac{d^2 V}{dx_i dx_j}$. En outre, ce déterminant se trouve multiplié par celui des mineurs de ϖ^2 qui dépend des mêmes indices.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

VI. — *Équations différentielles entre les h et les* ρ.

Les n fonctions h qui déterminent la nature du système des variables ρ satisfont à deux groupes d'équations aux différentielles partielles, que M. Lamé a fait connaître, dans le cas de $n = 3$, et dont il a fait d'importantes applications. Nous suivrons encore ici les calculs de ce savant géomètre.

En différentiant par rapport à ρ_k la valeur de $\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$ donnée par (13), et par rapport à ρ_j celle de $\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$, on obtient deux expressions nécessairement égales, quel que soit du reste le système des variables orthogonales x au moyen desquelles on exprime les ρ. Posons, pour simplifier, $\frac{1}{h_i} = \mathrm{H}_i$, la formule (13) donne

$$\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \frac{\mathrm{H}_j}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_j}{d\rho_i}\frac{d\rho_j}{dx_r} - \frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_j}\frac{d\rho_i}{dx_r}, \quad \frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right) = \frac{\mathrm{H}_k}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_k}{d\rho_i}\frac{d\rho_k}{dx_r} - \frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_k}\frac{d\rho_i}{dx_r};$$

d'où, en remettant, pour les $\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$ qu'introduit la différentiation, leurs valeurs tirées de ces formules :

$$\begin{aligned}\frac{d^2\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)}{d\rho_k\,d\rho_j} = &\left(\frac{1}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_j}{d\rho_k}\frac{d\mathrm{H}_j}{d\rho_i} - 2\frac{\mathrm{H}_j}{\mathrm{H}_i^3}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_k}\frac{d\mathrm{H}_j}{d\rho_i} + \frac{\mathrm{H}_j}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d^2\mathrm{H}_j}{d\rho_i\,d\rho_k}\right)\frac{d\rho_j}{dx_r}\\ &+\left(\frac{1}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_k}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_j} - \frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{d^2\mathrm{H}_i}{d\rho_j\,d\rho_k}\right)\frac{d\rho_i}{dx_r} + \frac{\mathrm{H}_j}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_j}{d\rho_i}\left(\frac{\mathrm{H}_k}{\mathrm{H}_j^2}\frac{d\mathrm{H}_k}{d\rho_j}\frac{d\rho_k}{dx_r} - \frac{1}{\mathrm{H}_j}\frac{d\mathrm{H}_j}{d\rho_k}\frac{d\rho_j}{dx_r}\right)\\ &-\frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_j}\left(\frac{\mathrm{H}_k}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_k}{d\rho_i}\frac{d\rho_k}{dx_r} - \frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_k}\frac{d\rho_i}{dx_r}\right).\end{aligned}$$

La seconde valeur de cette expression se déduira de celle-ci par la permutation des indices j et k. Elle est donc

$$\left(\frac{1}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d\mathrm{H}_k}{d\rho_j}\frac{d\mathrm{H}_k}{d\rho_i} - 2\frac{\mathrm{H}_k}{\mathrm{H}_i^3}\frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_j}\frac{d\mathrm{H}_k}{d\rho_i} + \frac{\mathrm{H}_k}{\mathrm{H}_i^2}\frac{d^2\mathrm{H}_k}{d\rho_i\,d\rho_j}\right)\frac{d\rho_k}{dx_r}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$+\left(\frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_i}{d\rho_k}-\frac{1}{H_i}\frac{d^2H_i}{d\rho_k d\rho_j}\right)\frac{d\rho_i}{dx_r}$$
$$+\frac{H_k}{H_i^2}\frac{dH_k}{d\rho_i}\left(\frac{H_j}{H_k^2}\frac{dH_j}{d\rho_k}\frac{d\rho_j}{dx_r}-\frac{1}{H_k}\frac{dH_k}{d\rho_j}\frac{d\rho_k}{dx_r}\right)$$
$$-\frac{1}{H_i}\frac{dH_i}{d\rho_k}\left(\frac{H_j}{H_i^2}\frac{dH_j}{d\rho_i}\frac{d\rho_j}{dx_r}-\frac{1}{H_i}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{d\rho_i}{dx_r}\right).$$

L'égalité de ces deux expressions doit avoir lieu quel que soit le système des x. Or nous avons vu que cette indétermination laisse arbitraires $\frac{n(n-1)}{2}$ des dérivées $\frac{d\rho_i}{dx_r}$, qui peuvent être celles que l'on veut choisir. Donc les trois dérivées $\frac{d\rho_i}{dx_r}$, $\frac{d\rho_j}{dx_r}$, $\frac{d\rho_k}{dx_r}$, qui entrent dans les expressions précédentes, sont tout à fait à volonté, et les coefficients qu'elles possèdent, quand on en exprime l'égalité, doivent être identiquement nuls. Parmi ces coefficients, celui de $\frac{d\rho_i}{dx_r}$ se détruit, celui de $\frac{d\rho_k}{dx_r}$ donne

$$\frac{d^2H_k}{d\rho_i d\rho_j}=\frac{1}{H_i}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_k}{d\rho_i}+\frac{1}{H_j}\frac{dH_j}{d\rho_i}\frac{dH_k}{d\rho_j}, \tag{24}$$

celui de $\frac{d\rho_j}{dx_r}$ donne une équation toute semblable. La forme (24) renferme $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ équations.

Différentions maintenant $\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$ par rapport à ρ_j, et $\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$ par rapport à ρ_i :

$$\frac{d^2}{d\rho_j d\rho_i}\left(\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)=-\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{1}{H_i}\frac{dH_i}{dx_r}\right).$$
$$=\frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{dH_i}{d\rho_s}\frac{d\rho_s}{dx_r}-\frac{1}{H_i}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{d^2H_i}{d\rho_j d\rho_s}\frac{d\rho_s}{dx_r}$$
$$-\frac{1}{H_i}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{dH_i}{d\rho_s}\left(\frac{H_j}{H_s^2}\frac{dH_j}{d\rho_s}\frac{d\rho_j}{dx_r}-\frac{1}{H_s}\frac{dH_s}{d\rho_j}\frac{d\rho_s}{dx_r}\right)$$
$$+\frac{1}{H_iH_j}\frac{dH_i}{d\rho_j}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{dH_j}{d\rho_s}\frac{d\rho_s}{dx_r}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$$= \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{H_j}{H_i^2}\frac{dH_j}{d\rho_i}\frac{d\rho_j}{dx_r} - \frac{1}{H_i}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{d\rho_i}{dx_r}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{H_i^2}\left(\frac{dH_j}{d\rho_i}\right)^2 - \frac{2H_j}{H_i^3}\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_j}{d\rho_i} + \frac{H_j}{H_i^2}\frac{d^2H_j}{d\rho_i^2}\right]\frac{d\rho_j}{dx_r}$$

$$+ \left(\frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_i}{d\rho_j} - \frac{1}{H_i}\frac{d^2H_i}{d\rho_i d\rho_j}\right]\frac{d\rho_i}{dx_r}$$

$$+ \frac{H_j}{H_i^2}\frac{dH_j}{d\rho_i}\left(\frac{H_i}{H_j^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{d\rho_i}{dx_r} - \frac{1}{H_j}\frac{dH_j}{d\rho_i}\frac{d\rho_j}{dx_r}\right)$$

$$+ \frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\sum_{s=1}^{s=n}\frac{dH_i}{d\rho_s}\frac{d\rho_s}{dx_r}.$$

En égalant à zéro les coefficients des n dérivées arbitraires qui existent dans cette égalité, on obtiendra les équations du second groupe. Le coefficient de $\frac{d\rho_s}{dx_r}$, pour s différent de i et de j, est le premier membre de l'une des équations (24) et ne donne rien de nouveau; celui de $\frac{d\rho_i}{dx_r}$ est nul de lui-même; celui de $\frac{d\rho_j}{dx_r}$ est

$$-\frac{H_j}{H_i}\left(\frac{1}{H_j}\frac{d^2H_i}{d\rho_j^2} + \frac{1}{H_i}\frac{d^2H_j}{d\rho_i^2} + \sum_{r=1}^{r=n}\frac{dH_j}{d\rho_r}\frac{dH_i}{d\rho_r}\frac{1}{H_r^2} - \frac{2}{H_j^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_j}{d\rho_j} - \frac{2}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_j}{d\rho_i}\right),$$

ce qui donne les $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de la forme

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{d\rho_j}\left(\dfrac{1}{H_j}\dfrac{dH_i}{d\rho_j}\right) + \dfrac{d}{d\rho_i}\left(\dfrac{1}{H_i}\dfrac{dH_j}{d\rho_i}\right) + \displaystyle\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{H_r^2}\frac{dH_i}{d\rho_r}\frac{dH_j}{d\rho_r} \\ \qquad = \dfrac{1}{H_i^2}\dfrac{dH_i}{d\rho_i}\dfrac{dH_j}{d\rho_i} + \dfrac{1}{H_j^2}\dfrac{dH_j}{d\rho_j}\dfrac{dH_i}{d\rho_j}. \end{array}\right.$$

Ces équations permettront de déterminer les H en fonction des ρ, lorsqu'on aura sur le système de ces dernières variables quelques données suffisant pour le déterminer. Les H une fois connus, on a vu ci-dessus comment les équations 7 *bis*, 7 *ter*, ou 16, achevaient de faire connaître les ρ en fonction des x.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

VII. — *Formules pour les dérivées des deux premiers ordres, les variables étant quelconques.*

Supposons toujours, entre les ρ et les x, les équations (6); mais n'assujettissons plus les ρ à former un système orthogonal. Désignons par $h_{i,j}^2$ les fonctions différentielles qui déterminent la nature du système des ρ

$$h_{i,j}^2 = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_i}{dx_r} \frac{d\rho_j}{dx_r}. \tag{26}$$

Si, des équations (6), on tire la valeur des x en ρ, et qu'on substitue dans ces mêmes équations, puis qu'on différentie par rapport aux ρ, on aura, comme au § III,

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_i}{dx_r} \frac{dx_r}{d\rho_j} = \begin{cases} 1 (j = i), \\ 0 (j \gtrless i). \end{cases} \tag{a}$$

Si, de même, dans les valeurs des x en ρ, on remet les valeurs des ρ fournies par les équations (6), puis qu'on dérive par rapport à x, on aura

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{dx_i}{d\rho_r} \frac{d\rho_r}{dx_j} = \begin{cases} 1 (i = j), \\ 0 (j \gtrless i). \end{cases} \tag{b}$$

Continuons à représenter par ϖ et ω les mêmes déterminants qu'au § III, les équations (a) et (b) donneront

$$\frac{d\rho_i}{dx_j} = \frac{\omega_{i,j}}{\omega}, \quad \frac{dx_j}{d\rho_i} = \frac{\varpi_{i,j}}{\varpi}. \tag{27}$$

La première de ces formules permet de transformer les dérivées par rapport aux x en dérivées par rapport aux ρ. En particulier, on en conclut

$$\omega^2 h_{i,j}^2 = \sum_{r=1}^{r=n} \omega_{i,r} \omega_{j,r}, \tag{28}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui est une équation différentielle partielle du premier ordre permettant d'obtenir les x en fonction des ρ quand les h sont connus. Si, de même, on pose

$$k_{i,j}^2 = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{dx_r}{d\rho_i} \frac{dx_r}{d\rho_j}, \tag{29}$$

et qu'on suppose ces quantités connues, on aura pour déterminer les ρ en fonction des x

$$\varpi^2 k_{i,j}^2 = \sum_{r=1}^{r=n} \varpi_{i,r}\, \varpi_{j,r}. \tag{30}$$

Les quantités k, en même nombre que les quantités h, forment comme elles un système de fonctions propres à déterminer la nature de la substitution ρ. Ces quantités sont en effet fonctions les unes des autres. Remarquons d'abord que les carrés ϖ^2 et ω^2 des deux déterminants ϖ et ω sont

$$\varpi^2 = \Pi = \begin{vmatrix} h_{1,1}^2 & h_{1,2}^2 \cdots & h_{1,n}^2 \\ h_{2,1}^2 & h_{2,2}^2 \cdots & h_{2,n}^2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ h_{n,1}^2 & h_{n,2}^2 \cdots & h_{n,n}^2 \end{vmatrix}, \quad \omega^2 = \Omega = \begin{vmatrix} k_{1,1}^2 & k_{1,2}^2 \cdots & k_{1,n}^2 \\ k_{2,1}^2 & k_{2,2}^2 \cdots & k_{2,n}^2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ k_{n,1}^2 & k_{n,2}^2 \cdots & k_{n,n}^2 \end{vmatrix},$$

et que les seconds membres des équations (28 et (30) sont les sommes des produits des déterminants mineurs d'ordre $n-1$ soit de ω, soit de ϖ, pris pour des groupes de lignes fixes et pour tous les groupes possibles de $n-1$ colonnes. D'après un théorème connu, ces équations se transforment donc en

$$h_{i,j}^2 = \frac{\Omega_{i,j}}{\Omega}, \quad k_{i,j}^2 = \frac{\Pi_{i,j}}{\Pi}, \tag{31}$$

et ces formules montrent bien que les h déterminent les k, ou inversement.

Les relations (27) et (31) entre les deux sortes de dérivées en entraînent de plus générales qui nous seront utiles dans la suite. Considérons celui des déterminants mineurs de ω qui ne dépend ni du groupe de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lignes ρ, ni du groupe de colonnes σ, et notons le $\omega^{(p)}_{\rho,\sigma}$, en supposant que son ordre soit p. D'après (27), ce déterminant est égal à $\frac{1}{\varpi^p}$ multiplié par celui des déterminants mineurs du dérivé de ϖ qui dépend des mêmes indices. Or, ce dernier est égal à ϖ^{p-1} multiplié par le déterminant mineur de ϖ qui ne dépend point de ces indices; notant donc ce dernier $\varpi^{(n-p)}_{-\rho,-\sigma}$ pour indiquer qu'il est composé des $n-p$ lignes ρ et des $n-p$ colonnes σ, on a

$$\omega^{(p)}_{\rho,\sigma} = \frac{1}{\varpi}\,\varpi^{(n-p)}_{-\rho,-\sigma}, \tag{32}$$

et, de même,

$$\Omega^{(p)}_{\rho,\sigma} = \frac{1}{\Pi}\,\Pi^{(n-p)}_{-\rho,-\sigma}. \tag{33}$$

Occupons-nous maintenant des dérivées secondes $\frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_j}$. Différentions par rapport à ρ_s la valeur (29) de $k^2_{i,j}$. Nous aurons

$$\frac{d\,(k^2_{i,j})}{d\rho_s} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{dx_r}{d\rho_j}\,\frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_s} + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{dx_r}{d\rho_i}\,\frac{d^2x_r}{d\rho_j\,d\rho_s}.$$

Toutes les équations semblables, au nombre de $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, forment un système linéaire par rapport aux $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ dérivées secondes cherchées, et on en pourrait déduire ces quantités, qui seraient alors exprimées par des déterminants d'ordre égal au nombre de ces équations. M. Brioschi ramène ces déterminants au $n^{ième}$ ordre de la manière suivante. Dérivons $k^2_{s,j}$ et $k^2_{s,i}$, l'un par rapport à ρ_i, l'autre par rapport à ρ_j, il viendra

$$\frac{d\,(k^2_{s,j})}{d\rho_i} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_s}\,\frac{dx_r}{d\rho_j} + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_j}\,\frac{dx_r}{d\rho_s},$$

$$\frac{d\,(k^2_{s,i})}{d\rho_j} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d^2x_r}{d\rho_j\,d\rho_s}\,\frac{dx_r}{d\rho_i} + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_j}\,\frac{dx_r}{d\rho_s};$$

et comme ces deux équations et la précédente ne renferment que trois

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\sum$ différents, on peut déterminer chacun d'eux. On a donc

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{dx_r}{d\rho_s}\frac{d^2x_r}{d\rho_i\, d\rho_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{d(k^2_{s,j})}{d\rho_i} = \frac{d(k^2_{s,i})}{d\rho_j} - \frac{d(k^2_{i,j})}{d\rho_s}\right].$$

Nous désignerons par $\lambda^{(s)}_{i,j}$ la combinaison des trois dérivées en ρ qui forme le second membre, et alors

$$(34)\quad \lambda^{(s)}_{j,i} = \lambda^{(s)}_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\frac{d(k^2_{s,j})}{d\rho_i} + \frac{d(k^2_{s,i})}{d\rho_j} - \frac{d(k^2_{i,j})}{d\rho_s}\right],\quad \sum_{r=1}^{r=n} \frac{dx_r}{d\rho_s}\frac{d^2x_r}{d\rho_i\, d\rho_j} = \lambda^{(s)}_{i,j}.$$

Résolvant le système des n équations linéaires qui proviennent des n valeurs de s, on a

$$(35)\qquad \omega\frac{d^2x_r}{d\rho_i\, d\rho_j} = \sum_{s=1}^{s=n} \lambda^{(s)}_{i,j}\,\omega_{s,r},$$

ce qui est l'équation différentielle du second ordre qui correspond dans le cas général aux équations (16) du § III. Il est clair qu'en vertu de (27) on peut écrire aussi

$$\frac{d^2x_r}{d\rho_i\, d\rho_j} = \sum_{s=1}^{s=n} \lambda^{(s)}_{i,j}\frac{d\rho_s}{dx_r}.$$

VIII. — *Transformation générale des* $\mathrm{D}_n\mathrm{V}$, $\mathfrak{D}_n\mathrm{V}$.

On trouvera d'abord, comme au § IV, que $\mathrm{D}_n\mathrm{V}$ se décompose en un produit des deux mêmes déterminants. Multipliant alors les colonnes du premier de ces déterminants par les lignes du second, représentant par Q le produit, par $q_{i,j}$ son élément,

$$q_{i,j} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx_r}\right)\frac{dx_r}{d\rho_j},$$

on a

$$\omega\mathrm{D}_n\mathrm{V} = \mathrm{Q}\varpi,$$

ou bien

$$(36)\qquad \mathrm{D}_n\mathrm{V} = \mathrm{II}.\mathrm{Q}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il ne reste donc qu'à former les $q_{i,j}$. Or, de

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_j} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\mathrm{V}}{dx_r}\frac{dx_r}{d\rho_j},$$

on tire

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{d\rho_i\,d\rho_j} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx_r}\right)\frac{dx_r}{d\rho_j} + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\mathrm{V}}{dx_r}\frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_j} = q_{i,j} + \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\mathrm{V}}{dx_r}\frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_j}.$$

D'ailleurs,

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\mathrm{V}}{dx_r}\frac{d^2x_r}{d\rho_i\,d\rho_j} = \sum_{s'=1}^{s'=n} \frac{d\mathrm{V}}{d\rho_{s'}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_{s'}}{dx_r} \sum_{s=1}^{s=n} \frac{d\rho_s}{dx_r}\lambda_{i,j}^{(s)}$$

$$= \sum_{s'=1}^{s'=n} \frac{d\mathrm{V}}{d\rho_{s'}} \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{i,j}^{(s)} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_s}{dx_r}\frac{d\rho_{s'}}{dx_r} = \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{i,j}^{(s)} \sum_{s'=1}^{s'=n} h_{s,s'}^2 \frac{d\mathrm{V}}{d\rho_{s'}};$$

donc (37)

$$q_{i,j} = \frac{d^2\mathrm{V}}{d\rho_i\,d\rho_j} - \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{i,j}^{(s)} \sum_{r=1}^{r=n} h_{r,s}^2 \frac{d\mathrm{V}}{d\rho_r},$$

et en particulier, si $\mathrm{V} = \rho_k$,

(37) $$q_{i,j} = -\sum_{s=1}^{s=n} h_{k,s}^2 \lambda_{i,j}^{(s)}.$$

Le calcul relatif à $\mathfrak{D}_n\mathrm{V}$ est tout à fait analogue. Cette expression se décompose d'abord en les deux mêmes déterminants qu'au § IV. Multipliant les colonnes du second par les lignes du déterminant ω, auquel on aura joint la ligne et la colonne 1, 0, 0,..., 0, et appelant $\mathfrak{Q}$ le déterminant obtenu, $\mathfrak{Q}$ ne sera autre chose que Q, auquel on joindrait la ligne et la colonne 0 $\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_1}\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_2}\cdots\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_n}$, et on aura

(38) $$\mathfrak{D}_n\mathrm{V} = \Pi.\mathfrak{Q}.$$

Ainsi $\mathrm{D}_n\mathrm{V}$ et $\mathfrak{D}_n\mathrm{V}$ sont les produits de Π par des déterminants formés en $\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_i}$, comme D_n et $\mathfrak{D}_n$ le sont en $\frac{d\mathrm{V}}{dx_i}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx_i\,dx_j}$.

Les formules de ce paragraphe sont celles de M. Brioschi.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IX. — *Formules générales pour* $D_k V$, $\Theta_k V$.

Reprenons le déterminant du § V. La décomposition indiquée par la première égalité de ce paragraphe continue d'avoir lieu. Considérons maintenant le produit $Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}\,\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau}$, où $Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}$ indique le résultat obtenu en effaçant dans le déterminant Q toutes les lignes, sauf celles dont les indices $r_1, r_2, \ldots, r_k$ forment la combinaison ρ, et toutes les colonnes, sauf celles dont les indices $t_1, t_2, \ldots, t_k$ forment la combinaison τ. Remplaçons, dans ce produit, $\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau}$ par la valeur

$$\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau} = \sum_{\sigma} \omega^{(n-k)}_{\rho,\sigma}\,\omega^{(n-k)}_{\tau,\sigma} = \sum_{\sigma} \omega^{(n-k)}_{\rho,\sigma}\,\frac{\varpi^{(k)}_{-\tau,-\sigma}}{\varpi},$$

il devient

$$\frac{1}{\varpi}\sum_{\sigma} Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}\,\varpi^{(k)}_{-\tau,-\sigma}\,\omega^{(n-k)}_{\rho,\sigma}.$$

Sommons cette expression par rapport à ρ et τ, nous aurons

$$\sum_{\rho}\sum_{\tau} Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}\,\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau} = \frac{1}{\varpi}\sum_{\rho}\sum_{\sigma}\omega^{(n-k)}_{\rho,\sigma}\sum_{\tau} Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}\,\varpi^{(k)}_{-\tau,-\sigma}.$$

Le dernier de ces $\sum$ est le déterminant mineur contenant les lignes ρ et les colonnes σ dans le déterminant produit de Q par ϖ, produit dont l'élément est

$$\sum_{i=1}^{i=n} q_{r,i}\,\frac{d\rho_i}{dx_s} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\rho_i}{dx_s}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{dV}{dx_j}\right)\frac{dx_j}{d\rho_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{j=n}\frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{dV}{dx_j}\right)\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\rho_i}{dx_s}\,\frac{dx_j}{d\rho_i} = \frac{d}{d\rho_r}\left(\frac{dV}{dx_s}\right);$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le second membre de l'équation précédente est donc

$$\sum_{\rho}\sum_{\tau} Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}\,\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau}$$

$$= \frac{1}{\omega}\sum_{\sigma}\sum_{\rho}\begin{vmatrix} \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_1}}\right) \\ \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_2}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) \\ \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_2}}\right) & \frac{d}{d\rho_{r_1}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right)\cdots & \frac{d}{d\rho_{r_k}}\left(\frac{dV}{dx_{s_k}}\right) \end{vmatrix}\omega^{(n-k)}_{\rho,\sigma},$$

et si on remplace $\omega^{(n-k)}_{\rho,\tau}$ par $\frac{1}{\omega}\varpi^{(n-k)}_{-\rho,-\sigma}$, puis $\varpi^2=\frac{1}{\omega^2}$ par $\frac{1}{\Omega}$, on reconnaît que la quantité

$$\sum_{\rho}\sum_{\tau} Q^{(k)}_{-\rho,-\tau}\frac{\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau}}{\Omega}$$

est la somme de tous les déterminants tels que celui qui est traité au commencement du § V, où les s forment toutes les combinaisons possibles des n premiers nombres k à k. Or, cette somme est précisément $D_k V$. D'ailleurs, dans l'expression que nous venons d'obtenir, on peut remplacer $\frac{\Omega^{(n-k)}_{\rho,\tau}}{\Omega}$ par $\Pi^{(k)}_{-\rho,-\tau}$. On a donc

$$D_k V = \sum_{\rho}\sum_{\sigma} Q^{(k)}_{-\rho,-\sigma}\,\Pi^{(k)}_{-\rho,-\sigma}. \tag{39}$$

On démontrera, exactement de la même manière, que

$$\mathfrak{D}_k V = \sum_{\rho}\sum_{\sigma} \mathfrak{Q}^{(k)}_{-\rho,-\sigma}\,\Pi^{(k)}_{-\rho,-\sigma}, \tag{40}$$

$\mathfrak{Q}^{(k)}_{\rho,\sigma}$ étant un déterminant mineur du $(k+1)^{e}$ ordre de $\mathfrak{Q}$, qui s'en déduit comme $Q^{(k)}_{-\rho,-\sigma}$ de Q, mais en conservant toujours la première ligne et la première colonne.

On voit donc que toutes ces transformations peuvent être énoncées sous forme d'un théorème unique.

Soit formé le déterminant Π, qui a pour éléments les paramètres

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

différentiels du premier ordre $h^2_{i,j}$ du système des nouvelles variables, et un autre déterminant $\mathfrak{Q}$ composé en $\frac{dV}{d\rho_i}$ et $q_{i,j}$, comme $\Omega_n V$ l'est en $\frac{dV}{dx_i}\ \frac{d^2V}{dx_i dx_j}$, l'un quelconque des paramètres différentiels du second ordre de V est égal à la somme des produits de chacun des déterminants mineurs de $\mathfrak{Q}$ par celui de Π qui dépend des mêmes indices, ces déterminants mineurs devant être tous du même ordre que ceux qui forment le paramètre différentiel qu'on transforme et devant tous contenir la première ligne et la première colonne de $\mathfrak{Q}$, ou ne les contenir jamais, suivant que le paramètre considéré provient de déterminants contenant ou ne contenant pas la première ligne et la première colonne de Ω_n.

Et bien plus simplement encore : *Si on conçoit les déterminants* $\mathfrak{Q}$ *et* Π, *qu'on joigne à ce dernier la ligne et la colonne* 1, 0, ..., 0 *et qu'on effectue le produit, les paramètres différentiels sont toutes les sommes de ses déterminants principaux du même ordre prises, soit en supprimant toujours la première ligne et la première colonne, soit en les conservant toujours.*

X. — *Formule particulière pour* $D_1 V$.

Considérons, en particulier, la fonction $D_1 V$, que sa forme linéaire rend la plus importante de toutes. On peut en donner une transformation plus simple que celle qui précède. D'après le dernier énoncé,

$$D_1 V = \sum_{r,s} h^2_{r,s}\, q_{r,s} = \sum_{r,s} h^2_{r,s} \frac{d^2 V}{d\rho_r\, d\rho_s} - \frac{1}{2} \sum_{r,s} h^2_{r,s} \sum_{i,j} h^2_{i,j} \frac{dV}{d\rho_i} \left[\frac{d(h^2_{j,s})}{d\rho_r} + \frac{d(h^2_{j,r})}{d\rho_s} - \frac{d(h^2_{r,s})}{d\rho_j} \right].$$

D'autre part, les équations

$$\sum_r h^2_{j,r}\, \Omega_{i,r} = \begin{cases} \Omega & (j = i) \\ 0 & (j \gtrless i) \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

entraînent

$$\sum_r h_{j,r}^2 h_{i,r}^2 = \begin{cases} 1 (j = i) \\ 0 (j \gtrless i) \end{cases}.$$

Ceci posé, les termes en $\frac{d(k_{i,r}^2)}{d\rho_r}$ et $\frac{d(k_{i,r}^2)}{d\rho_s}$ se transforment, à l'aide de ces équations, en d'autres qui renferment les dérivées des h. Ceux en $\frac{d(h_{j,s}^2)}{d\rho_r}$ donnent

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_j \sum_i \frac{dV}{d\rho_i} h_{i,j}^2 \sum_s h_{r,s}^2 \frac{d(h_{j,s}^2)}{d\rho_r} &= -\sum_r \sum_j \sum_i \frac{dV}{d\rho_i} h_{i,j}^2 \sum_s h_{j,s}^2 \frac{d(h_{r,s}^2)}{d\rho_r} \\ &= -\sum_r \sum_s \frac{d(h_{r,s}^2)}{d\rho_r} \sum_i \sum_j \frac{dV}{d\rho_i} h_{i,j}^2 h_{j,s}^2 \\ &= -\sum_r \sum_s \frac{dV}{d\rho_s} \frac{d(h_{r,s}^2)}{d\rho_r}, \end{aligned}$$

parce que sous le Σ relatif à i, cet indice ne peut prendre que la valeur s. Les termes en $\frac{d(h_{j,r}^2)}{d\rho_s}$ valent de même $-\sum_r \sum_s \frac{dV}{d\rho_r} \frac{d(h_{r,s}^2)}{d\rho_s}$, ils sont donc identiques aux précédents et mettent $D_1 V$ sous la forme

$$D_1 V = \sum_{r,s} \left[h_{r,s}^2 \frac{d^2 V}{d\rho_r d\rho_s} + \frac{d(h_{r,s}^2)}{d\rho_s} \frac{dV}{d\rho_r} \right] + \frac{1}{2} \sum_{r,s} h_{r,s}^2 \sum_{i,j} h_{i,j}^2 \frac{d(k_{r,s}^2)}{d\rho_j} \frac{dV}{d\rho_i}.$$

Remplaçant au dernier terme $h_{r,s}^2$ par $\frac{\Omega_{r,s}}{\Omega}$, on l'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Omega} \sum_{i,j} h_{i,j}^2 \frac{dV}{d\rho_i} \sum_{r,s} \Omega_{r,s} \frac{d(k_{r,s}^2)}{d\rho_j} &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{i,j} h_{i,j}^2 \frac{dV}{d\rho_i} \frac{d\Omega}{d\rho_j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_j \frac{d(\sqrt{\Omega})}{d\rho_j} \sum_i h_{i,j}^2 \frac{dV}{d\rho_i}. \end{aligned}$$

Le premier équivaut à

$$\sum_{r,s} \frac{d}{d\rho_s} \left(h_{r,s}^2 \frac{dV}{d\rho_r} \right) = \sum_s \frac{d}{d\rho_s} \left(\sum_r h_{r,s}^2 \frac{dV}{d\rho_r} \right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Donc

$$\Delta_1 V = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_s \left[\sqrt{\Omega} \frac{d}{d\rho_s} \left(\sum_r h_{r,s}^2 \frac{dV}{d\rho_r} \right) + \frac{d\sqrt{\Omega}}{d\rho_s} \left(\sum_r h_{r,s}^2 \frac{dV}{d\rho_r} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_s \frac{d}{d\rho_s} \left(\sqrt{\Omega} \sum_r h_{r,s}^2 \frac{dV}{d\rho_r} \right),$$

$$\Delta_1 V = \sqrt{\Pi} \sum_s \frac{d}{d\rho_s} \left(\frac{\sum_r h_{r,s}^2 \frac{dV}{d\rho_r}}{\sqrt{\Pi}} \right), \tag{41}$$

formule démontrée d'une autre manière par M. Brioschi.

XI. — *Équations différentielles partielles entre les $k_{i,j}^2$ et les ρ_i.*

Ici, comme dans le cas de variables orthogonales, on obtiendra des relations entre les $k_{i,j}$ et les ρ_i en égalant entre elles les dérivées $\frac{d}{d\rho_k}\left(\frac{d^2x_r}{d\rho_i\, d\rho_j}\right)$, $\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d^2x_r}{d\rho_k\, d\rho_j}\right)$, quel que soit du reste le système des x.

Puisque

$$\frac{d^2x_r}{d\rho_i\, d\rho_j} = \sum_s \lambda_{i,j}^{(s)} \frac{d\rho_s}{dx_r} = \frac{1}{\omega} \sum_s \lambda_{i,j}^{(s)} \omega_{s,r};$$

$$\frac{d^3x_r}{d\rho_i\, d\rho_j\, d\rho_k} = \sum_s \frac{d\rho_s}{dx_r} \frac{d\lambda_{i,j}^{(s)}}{d\rho_k} - \frac{1}{\omega^2} \sum_s \omega_{s,r} \lambda_{i,j}^{(s)} \sum_u \sum_v \frac{d^2x_u}{d\rho_v\, d\rho_k} \omega_{v,u}$$

$$+ \frac{1}{\omega} \sum_s \lambda_{i,j}^{(s)} \sum_u \sum_v \frac{d^2x_u}{d\rho_v\, d\rho_k} \frac{d\omega_{s,r}}{d\left(\frac{dx_u}{d\rho_v}\right)},$$

où nous entendons par $\frac{d\omega_{s,r}}{d\left(\frac{dx_u}{d\rho_v}\right)}$ la dérivée partielle de $\omega_{s,r}$ par rapport à l'élément $\frac{dx_u}{d\rho_v}$. Cette dérivée n'est autre chose que le déterminant obtenu en supprimant, dans $\omega_{s,r}$, la ligne v et la colonne u; puis multipliant par $+1$ ou -1, suivant que les nombres s,v et r,u sont ou ne sont pas rangés dans le même ordre de grandeur. Dans le premier

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cas, il résulte de (32) que cette dérivée est

$$\frac{1}{\varpi}\begin{vmatrix} \dfrac{d\rho_s}{dx_r} & \dfrac{d\rho_s}{dx_u} \\ \dfrac{d\rho_r}{dx_r} & \dfrac{d\rho_v}{dx_u} \end{vmatrix},$$

dans le second, elle sera donc de signe contraire, et comme ce déterminant binaire change de signe, quand on y intervertit soit s et v, soit r et u, il s'ensuit qu'il représente toujours la dérivée proposée, pourvu que s,v et r,u soient pris dans l'ordre $s,v\ r,u$ suivi dans la dérivation. Remplaçons donc, dans l'équation précédente, cette dérivée, ainsi que $\omega_{s,r}$, $\omega_{v,u}$, par leurs valeurs, et remarquons que $\omega\varpi = 1$, nous aurons

$$\frac{d^3x_r}{d\rho_i\, d\rho_j\, d\rho_k} = \sum_s \frac{d\lambda_{i,j}^{(s)}}{d\rho_k}\frac{d\rho_s}{dx_r} - \sum_s\sum_u\sum_v \lambda_{i,j}^{(s)}\frac{d\rho_s}{dx_r}\frac{d\rho_v}{dx_u}\sum_t \lambda_{k,v}^{(t)}\frac{d\rho_t}{dx_u}$$
$$+ \sum_s\sum_u\sum_v\sum_t \lambda_{i,j}^{(s)}\lambda_{k,v}^{(t)}\frac{d\rho_t}{dx_u}\left(\frac{d\rho_s}{dx_r}\frac{d\rho_v}{dx_v} - \frac{d\rho_s}{dx_u}\frac{d\rho_v}{dx_r}\right),$$

et, en effectuant les sommations par rapport à u,

$$\frac{d^3x_r}{d\rho_i\, d\rho_j\, d\rho_k} = \sum_s \frac{d\lambda_{i,j}^{(s)}}{d\rho_k}\frac{d\rho_s}{dx_r} - \sum_s\sum_v\sum_t \lambda_{i,j}^{(s)}\lambda_{k,v}^{(t)}\frac{d\rho_s}{dx_r}h_{v,t}^2$$
$$+ \sum_s\sum_v\sum_t \lambda_{i,j}^{(s)}\lambda_{k,v}^{(t)}\left(\frac{d\rho_s}{dx_r}h_{v,t}^2 - \frac{d\rho_v}{dx_r}h_{s,t}^2\right)$$
$$= \sum_s\left[\frac{d\lambda_{i,j}^{(s)}}{d\rho_k}\frac{d\rho_s}{dx_r} - \sum_v\sum_t h_{v,t}^2\lambda_{i,j}^{(v)}\lambda_{k,s}^{(t)}\frac{d\rho_s}{dx_r}\right].$$

Changeons, dans ce résultat, i en k et inversement pour en déduire $\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d^2x_r}{dx_k\, d\rho_j}\right)$, et égalons,

$$\sum_s\left[\frac{d\lambda_{i,j}^{(s)}}{d\rho_k} - \sum_v\sum_t h_{v,t}^2\lambda_{i,j}^{(v)}\lambda_{k,s}^{(t)}\right]\frac{d\rho_s}{dx_r} = \sum_s\left[\frac{d\lambda_{k,j}^{(s)}}{d\rho_i} - \sum_v\sum_t h_{v,t}^2\lambda_{k,j}^{(v)}\lambda_{i,s}^{(t)}\right]\frac{d\rho_s}{dx_r};$$

et comme les n dérivées $\frac{d\rho_s}{dx_r}$ qui entrent dans les deux membres sont

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

arbitraires, leurs coefficients doivent être séparément égaux; ce qui donne, entre les $k_{i,j}^2$ et les ρ, les équations

$$\frac{d\lambda_{i,j}^{(s)}}{d\rho_k} - \frac{d\lambda_{k,j}^{(s)}}{d\rho_i} = \sum_v \sum_t h_{v,t}^2 \left[\lambda_{i,j}^{(v)} \lambda_{k,s}^{(t)} - \lambda_{k,j}^{(v)} \lambda_{i,s}^{(t)} \right].$$

En y remplaçant $h_{v,t}^2$ par $\frac{\Omega_{v,t}}{\Omega}$, il n'entre, dans cette équation, que des k. Elle est ainsi

$$\Omega \left[\frac{d\lambda_{i,k}^{(s)}}{d\rho_j} - \frac{d\lambda_{j,k}^{(s)}}{d\rho_i} \right] = \sum_u \sum_v \Omega_{u,v} \left[\lambda_{i,k}^{(u)} \lambda_{j,s}^{(v)} - \lambda_{j,k}^{(u)} \lambda_{i,s}^{(v)} \right]. \tag{42}$$

Ces équations permettront, quand le système des variables ρ ne sera pas connu, mais seulement défini par des conditions capables de le déterminer, de trouver les expressions des k en fonction des ρ. Les équations (33) donneront ensuite les h, et on en tirera les x en fonction des ρ, soit des équations du premier ordre (28), soit de celles du second ordre (35).

Remarque. — Les équations (24) et (25) en H ne peuvent être que des cas particuliers de la précédente. Toutefois, comme cette dernière ne paraît avoir avec elles aucun rapport de forme, il ne sera peut-être pas inutile de montrer comment on les en déduit. Lorsque les variables ρ sont orthogonales, on a, d'après (29) et (7 *bis*)

$$k_{i,j}^2 = \begin{cases} \mathrm{H}_i^2 \ (i = j), \\ 0 \ (i \gtrless j). \end{cases}$$

Il en résulte

$$\lambda_{i,j}^{(i)} = \mathrm{H}_i \frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_j}, \quad \lambda_{i,j}^{(s)} = 0 \ (s \gtrless i, \ s \gtrless j), \quad \lambda_{i,i}^{(s)} = -\mathrm{H}_i \frac{d\mathrm{H}_i}{d\rho_s}, \quad \Omega_{u,v} = \begin{cases} 0 \ (u \gtrless v), \\ \dfrac{\Omega}{\mathrm{H}_u^2} \ (u = v), \end{cases}$$

Par conséquent, le second membre de (42) ne donne de termes existants que si $u = v$. Alors

$$\frac{d\lambda_{i,k}^{(s)}}{d\rho_j} - \frac{d\lambda_{j,k}^{(s)}}{d\rho_i} = \sum_r \frac{1}{\mathrm{H}_r^2} \left[\lambda_{i,k}^{(r)} \lambda_{j,s}^{(r)} - \lambda_{j,k}^{(r)} \lambda_{i,s}^{(r)} \right].$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Supposons $i \gtrless k \gtrless j$; il faut, pour que les deux membres ne soient pas nuls en même temps, que s ait l'une des valeurs i, j. Soit $s = j$,

$$0 = \frac{d\lambda_{j,k}^{(j)}}{d\rho_i} + \sum_r \frac{1}{H_r^2}\left[\lambda_{i,k}^{(r)}\lambda_{j,j}^{(r)} - \lambda_{j,k}^{(r)}\lambda_{i,j}^{(r)}\right].$$

Sous le $\sum$, r ne peut recevoir d'autres valeurs que i, j ou k. On a donc

$$0 = \frac{d}{d\rho_i}\left(H_j\frac{dH_j}{d\rho_k}\right) + \frac{1}{H_i^2}\left(H_i\frac{dH_i}{d\rho_k}\right)\left(-H_j\frac{dH_j}{d\rho_i}\right)$$
$$+ \frac{1}{H_k^2}\left(-H_j\frac{dH_j}{d\rho_k}\right)\left(H_k\frac{dH_k}{d\rho_i}\right) - \frac{1}{H_j^2}\left(H_j\frac{dH_j}{d\rho_i}\right)\left(H_j\frac{dH_j}{d\rho_k}\right),$$

ou bien

$$\frac{d^2H_j}{d\rho_i d\rho_k} = \frac{1}{H_i}\frac{dH_i}{d\rho_k}\frac{dH_j}{d\rho_i} + \frac{1}{H_k}\frac{dH_k}{d\rho_i}\frac{dH_j}{d\rho_k},$$

ce qui est (24).

Soit maintenant $i = k$, on ne peut supposer que $i \gtrless j$. Quant à s, il ne saurait avoir ni la valeur i, pour laquelle les deux membres s'annulent, ni des valeurs différentes de i et de j. Il faut donc supposer $s = j$,

$$\frac{d\lambda_{i,j}^{(j)}}{d\rho_j} - \frac{d\lambda_{j,i}^{(j)}}{d\rho_i} + \sum_r \frac{1}{H_r^2}\left[\lambda_{i,i}^{(r)}\lambda_{j,j}^{(r)} - \left(\lambda_{i,j}^{(r)}\right)^2\right],$$

ou bien, en séparant les termes provenant de $r = i$, $r = j$, de sorte que r ne prenne plus ces valeurs dans le $\sum$,

$$0 = \frac{d}{d\rho_j}\left(H_i\frac{dH_i}{d\rho_j}\right) + \frac{d}{d\rho_i}\left(H_j\frac{dH_j}{d\rho_i}\right) + \sum_r \frac{H_iH_j}{H_r^2}\frac{dH_i}{d\rho_r}\frac{dH_j}{d\rho_r}$$
$$- \frac{1}{H_i^2}\left[H_iH_j\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_j}{d\rho_i} + H_i^2\left(\frac{dH_i}{d\rho_j}\right)^2\right] - \frac{1}{H_j^2}\left[H_iH_j\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_j}{d\rho_j} + H_j^2\left(\frac{dH_j}{d\rho_i}\right)^2\right],$$

ce qui revient, en étendant maintenant le $\sum$ à toutes les valeurs de r, à

$$0 = \frac{1}{H_j}\frac{d^2H_i}{d\rho_j^2} + \frac{1}{H_i}\frac{d^2H_j}{d\rho_i^2} + \sum_r \frac{1}{H_r^2}\frac{dH_i}{d\rho_r}\frac{dH_j}{d\rho_r}$$
$$- \frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_j}{d\rho_j} - \frac{1}{H_j^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_j}{d\rho_j} - \frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_i}{d\rho_i} - \frac{1}{H_j^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_j}{d\rho_j},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou bien à

$$\frac{d}{d\rho_j}\left(\frac{1}{H_j}\frac{dH_i}{d\rho_j}\right)+\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{dH_j}{d\rho_i}\right)+\sum_r\frac{1}{H_r^2}\frac{dH_i}{d\rho_r}\frac{dH_j}{d\rho_r}$$
$$=\frac{1}{H_i^2}\frac{dH_i}{d\rho_i}\frac{dH_i}{d\rho_j}+\frac{1}{H_j^2}\frac{dH_i}{d\rho_j}\frac{dH_j}{d\rho_j},$$

c'est-à-dire à l'équation (25).

CHAPITRE III.

DE LA DISCUSSION DES FONCTIONS ET DES ÉQUATIONS.

De même que, pour connaître une ligne courbe, une surface, un mouvement, il ne suffit pas d'en avoir obtenu les équations, et qu'il reste encore à les discuter, de même, lorsqu'on possède la liaison analytique qui existe entre une fonction et les variables dont on la fait dépendre, il reste encore à discuter l'équation qui la représente, de manière à connaître pour tout accroissement infiniment petit donné aux variables l'accroissement correspondant de cette fonction. Nous allons nous occuper de ces discussions, parce que les paramètres différentiels y jouent un rôle important.

I. — *Sur le mode de discussion.*

Une même fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut donner lieu à deux genres de discussions distincts. Ou bien on veut suivre les variations de la quantité même qu'elle représente et que nous indiquerons par V.

$$V = F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

ou bien on égale cette fonction F à une constante, zéro par exemple, et on veut connaître la nature de la liaison que cette équation établit entre les quantités variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A la vérité, cette dernière considération rentre dans la première, puisque x_n est alors une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, dont il suffirait de connaître la variation; mais

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il peut arriver que toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient des quantités de même nature, et que, rien n'indiquant laquelle d'entre elles doit être subordonnée aux autres, il soit désavantageux de rompre la symétrie naturelle qu'elles présentent, en ramenant l'équation à la forme $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Ceci posé, à part les cas où, la fonction F étant fort simple, on peut à l'aide du calcul arithmétique et des tables de transcendantes déterminer ses valeurs ou celles du système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont à l'équation $F = 0$, la discussion ne pourra se faire que d'une manière approchée. On se contentera donc de connaître les accroissements cherchés aux infiniment petits près d'un ordre donné, et nous nous bornerons ici à employer dans les valeurs de ces accroissements les infiniment petits du second ordre, les paramètres différentiels dont nous voulons faire usage ne permettant pas une approximation supérieure. Dans tous les cas, quel que soit l'ordre d'approximation qu'on désire, la méthode de discussion consiste à déterminer, pour chaque système de valeurs des variables indépendantes, des fonctions simples et bien connues qui possèdent les mêmes accroissements que F, de sorte qu'en substituant ces fonctions à F, on obtienne avec une approximation déterminée les accroissements cherchés. C'est ainsi que procèdent, par exemple, la Mécanique et la Géométrie, quand il s'agit d'étudier les modifications d'un mouvement, ou les inflexions d'une courbe, d'une surface, etc.

II. — *Conventions et remarques.*

Comme nous nous proposons de faire varier dans la fonction V, non pas chaque variable isolément, mais le système entier de ces variables, nous donnerons à ce système, comme en Géométrie, le nom de *point*. La suite des points qui satisferont à $n - 1$ équations linéaires formera ce que nous appellerons une *droite*. Une seule de ces équations sera ce que nous appellerons un *plan*.

Un point étant défini par les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ces variables pourront être dites les *coordonnées du point*, et en égalant à zéro $n - 1$ d'entre elles, on aura n droites convenant chacune à une suite de points qui ne différeront que par une coordonnée. Ces n droites seront dites

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

axes du système des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Elles seront à volonté. Si, entre les n coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et n autres variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, on établit n relations, et qu'on remplace tous les systèmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables primitives par les systèmes correspondants $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, on dira qu'on transforme les coordonnées, et les systèmes qui se correspondront ainsi seront dits *représenter le même point*. Nous adopterons, en un mot, toutes les expressions de la Géométrie en vue de simplifier le langage, et en n'y attachant que le sens analytique qui leur reste quand on fait abstraction de toute représentation au moyen de l'espace.

On vérifiera facilement que la plupart des propositions fondamentales sur les droites et les plans continuent de subsister. Par exemple : deux points déterminent une droite, $n - 1$ plans concourent suivant une droite; $n - 1$ droites concourantes déterminent un plan, etc.; d'autres, au contraire, n'ont plus lieu; ainsi, deux droites d'un même plan ne sont généralement pas concourantes.

Deux points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ étant donnés, on peut former au moyen de leurs coordonnées une fonction et une seule qui conserve sa forme et sa valeur, quelque substitution orthogonale qu'on opère. C'est la fonction $\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}$. Car si on applique à cette question la méthode suivie dans le premier chapitre, en ayant soin toutefois d'ajouter aux formules de transformation du § III les termes constants $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, on obtiendra entre les x et la fonction F absolument les mêmes équations qu'au chapitre II, § II, entre F, les p et les p'; ce qui donnerait pour solution les trois fonctions

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \quad x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_n'^2, \quad x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n;$$

mais les coefficients des termes constants donneront en outre un second système de n équations aux différences partielles, d'après lesquelles la fonction F ne peut dépendre que des différences $x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \ldots x'_n - x_n$, et ne saurait être autre, par conséquent, que

$$\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}.$$

Nous représenterons cette fonction par L, et nous l'appellerons la distance des deux points proposés.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Étant donnés trois points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$, leurs coordonnées donneront lieu à six fonctions conservant la même valeur, quelle que soit la substitution orthogonale qu'on emploie. Parmi ces fonctions se trouvent les trois distances et les fonctions

$$(x'_1 - x_1)(x''_1 - x_1) + (x'_2 - x_2)(x''_2 - x_2) + \ldots + (x'_n - x_n)(x''_n - x_n).$$

Cette dernière, divisée par le produit des distances du premier point aux deux autres, sera ce que nous appellerons le *cosinus de l'angle des directions qui joignent ces deux points au premier*. Les équations d'une droite qui passe en un point A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant mises sous la forme

$$\frac{x_1 - a_1}{\lambda_1} = \frac{x_2 - a_2}{\lambda_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{\lambda_n},$$

les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, divisées par la racine carrée de la somme de leurs carrés, seront les cosinus des angles que forme, avec les axes coordonnés, la direction qui va du point A au point M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Deux droites seront rectangulaires ou orthogonales, quand leur cosinus sera nul; parallèles, quand elles formeront avec les axes des cosinus égaux. Deux directions parallèles à deux autres formeront le même angle qu'elles. D'un même point A $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, si on mène des perpendiculaires à une direction donnée faisant avec les axes les angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, toutes ces perpendiculaires formeront un plan

$$0 = (x_1 - a_1)\cos\alpha_1 + (x_2 - a_2)\cos\alpha_2 + \ldots + (x_n - a_n)\cos\alpha_n,$$

qui sera dit perpendiculaire à la droite. Réciproquement, si une droite est perpendiculaire à $n - 1$ droites contenues dans un plan, elle l'est à toute autre droite du même plan. On appelle plans parallèles ceux qui ont des perpendiculaires parallèles entre elles. L'angle de deux plans est celui de leurs perpendiculaires, etc., etc. Deux plans sont orthogonaux quand leurs perpendiculaires le sont elles-mêmes. Tout plan qui contient la perpendiculaire à un autre plan est orthogonal avec ce même plan.

Considérons les formules (a) ou (a') d'une substitution orthogonale

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quelconque (chap. II, § I), les coefficients $a_{i,j}$ en seront liés par les relations

$$(b) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} a_{i,r}\, a_{j,r} = \begin{cases} 0 & (i \gtrless j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Les x'_i formeront un système de coordonnées orthogonales dont les axes seront les n droites obtenues en annulant successivement, de toutes les manières possibles, $n-1$ des premiers membres des formules (a'). Si donc on remarque que, par suite des conditions d'orthogonalité, le déterminant A a pour carré l'unité, d'où suit que lui-même et son déterminant dérivé sont égaux à 1, et qu'ainsi un déterminant mineur quelconque de ce dérivé est égal à celui de A qui ne contient aucun des indices dont dépend le premier, on verra que les axes en question ont des équations telles que

$$\frac{x_1}{a_{1,1}} = \frac{x_2}{a_{2,1}} = \ldots = \frac{x_n}{a_{n,1}},$$

lorsqu'on les rapporte au système des axes primitifs. D'où résulte que les coefficients $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1}$ des premières formules (a) ne sont autre chose que les cosinus des angles formés par les anciens axes avec le nouvel axe des x', et par conséquent les conditions d'orthogonalité de la substitution ne sont autre chose que celles de l'orthogonalité des nouveaux axes.

Nous remarquerons encore que, si deux systèmes de n axes orthogonaux ont un axe commun, les $n-1$ restants forment deux systèmes d'axes également orthogonaux tout à fait arbitraires. En effet, en appelant, comme ci-dessus, $a_{i,j}$ le cosinus de l'angle que forment entre eux les axes des x_i et des x'_j, tous ces cosinus sont liés par les $\frac{n(n+1)}{2}$ conditions (b) et $\frac{n(n-1)}{2}$ d'entre eux restent arbitraires. La condition que les axes des x_n et des x'_n coïncident revient à

$$a_{n,n} = 1, \quad a_{1,n} = 0, \quad a_{2,n} = 0, \ldots, a_{n-1,n} = 0, \quad a_{n,1} = 0, \quad a_{n,2} = 0, \ldots, a_{n,n-1} = 0,$$

attendu que l'axe des x'_n doit être perpendiculaire aux anciens axes x_1,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$x_2, \ldots, x_{n-1}$, et inversement l'ancien axe des x_n doit l'être aux nouveaux axes des $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$. Or, en introduisant ces valeurs dans les équations (b), on les réduit à $\frac{n(n-1)}{2}$ qui sont

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} a_{i,r} a_{j,r} = \begin{cases} 0 & (i \gtrless j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

et qui expriment l'orthogonalité du système des $n-1$ droites x'_1, $x'_2, \ldots, x'_{n-1}$, ce système restant d'ailleurs tout à fait arbitraire. En général, si on donne, dans un système de n axes orthogonaux, k des droites qui le forment, les $n-k$ restantes forment un système orthogonal arbitraire. Car la détermination d'une droite revient à imposer à ses $n-1$ cosinus arbitraires $n-1$ valeurs désignées. Une seconde droite qui doit lui être orthogonale exige $n-2$ données, etc.; les k droites en exigent donc

$$(n-1) + (n-2) + \ldots + (n-k) = kn - \frac{k(k+1)}{2},$$

nombre qui, enlevé de celui des arbitraires primitives $\frac{n(n-1)}{2}$, en laisse encore

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{kn}{2} - \frac{kn}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2},$$

c'est-à-dire précisément autant qu'il en faut pour que les $n-k$ droites restantes forment un système orthogonal arbitraire.

III. — *Plan tangent et normale à une surface.*

Conformément au paragraphe précédent, nous appellerons du nom de *surface* la suite ou l'ensemble des points satisfaisant à l'équation

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Toute surface peut, dans le voisinage d'un de ses points, être remplacée par un plan, tant qu'on ne tient pas compte des infiniment petits du second ordre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Car, si, pour plus de simplicité, on rapporte la surface à des axes qui se coupent au point considéré M, la formule de Taylor donnera

$$0 = \left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0 x_2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0 x_n + \omega,$$

ω étant un infiniment petit du second ordre. D'où il suit que le plan

$$x_1\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0 + \ldots + x_n\left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0 = 0, \tag{1}$$

qui passe en M, est satisfait, dans le voisinage de ce point, par les mêmes points que la surface elle-même, du moins lorsqu'on regarde comme égales les coordonnées qui ne diffèrent que d'infiniment petits du second ordre. Le plan (1) recevra le nom de *plan tangent* à la surface. La droite qui, menée par le point M, est perpendiculaire au plan donné, s'appellera *normale* à la surface, et ses équations seront

$$\frac{x_1}{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0} = \frac{x_2}{\left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0} = \ldots = \frac{x_n}{\left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0}.$$

En donnant le nom de *tangente* au lieu commun de plusieurs surfaces, à la limite des droites qui joignent deux points infiniment voisins de ce lieu, on reconnaîtra aisément que tout lieu continu, pris à volonté sur la surface F et renfermant le point M, a sa tangente en ce point dans le plan tangent à la surface. Car l'équation fournie par la série de Taylor s'écrit

$$\frac{x_1\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0 + \ldots + x_n\left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0^2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0^2}} = -\frac{\omega}{R\sqrt{-\mathfrak{D}_1 F}},$$

et comme le premier membre est le cosinus de l'angle que forme la normale à la surface avec la droite qui joint le point M au point infiniment voisin, ce cosinus a une limite nulle. D'où il suit que la tangente à quelque lieu que ce soit appartenant à la surface F et renfermant le point M est orthogonale avec la normale à la surface en ce point, et est ainsi dans le plan tangent.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IV. — *Des dérivées premières d'une fonction de n variables.*

Soit $V = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction au point M. Si on suppose à V une valeur constante, cette équation représentera une surface qu'on peut appeler *surface isodèle*, pour rappeler qu'elle indique, en chacun des points qu'elle contient, une même valeur de la fonction. Connaître une fonction, ce sera connaître la manière dont se succèdent ses surfaces isodèles et la suite de ses variations quand elle passe des unes aux autres.

Ce qui précède nous montre que, dans le voisinage d'un de ses points, et tant qu'on ne tient compte que des infiniment petits du second ordre, une surface isodèle peut être remplacée par son plan tangent, de sorte que V peut être regardé comme constant sur ce plan; mais ce n'est pas tout. Supposons, comme ci-dessus, que le point M soit l'origine des coordonnées. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point M′ infiniment voisin, R la distance MM′, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les angles de R avec les axes, nous avons

$$V = F(R\cos\alpha_1, R\cos\alpha_2, \ldots, R\cos\alpha_n),$$

d'où

$$\left(\frac{dV}{dR}\right)_0 = \left(\frac{dV}{dx_1}\right)_0 \cos\alpha_1 + \left(\frac{dV}{dx_2}\right)_0 \cos\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{dV}{dx_n}\right)_0 \cos\alpha_n$$

$$= + \frac{1}{R}\sqrt{-\Theta_1 F}\,\frac{x_1\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0 + \ldots + x_n\left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)_0^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)_0^2 + \ldots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)_0^2}}.$$

Le second membre est $\frac{\sqrt{-\Theta_1 V}}{R}$, multiplié par la distance du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ou M′ au plan tangent en M; donc l'accroissement infiniment petit de V, quand on passe de M en M′, c'est-à-dire $R\left(\frac{dV}{dR}\right)_0$, est proportionnel à la distance du point M′ au plan tangent à la surface isodèle en M. Ainsi :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le voisinage d'un point donné, les surfaces isodèles sont des plans parallèles, et les accroissements de la fonction, quand on passe du point M *à ces plans, sont proportionnels à leurs distances à ce point. Le coefficient de proportionnalité est la racine carrée de la somme des carrés des n dérivées partielles de la fonction par rapport à n coordonnées rectangles.*

On peut dire encore que la fonction V admet une dérivée pour chaque direction autour du point M et que *celle de ces dérivées qui se rapporte à la direction normale à la surface isodèle en ce point est la plus grande de toutes; qu'elle est égale au paramètre différentiel de la fonction en ce point; que la dérivée relative à toute autre direction est le produit de ce paramètre par le cosinus de l'angle de cette direction avec la normale, ou en d'autres termes la projection de ce paramètre sur cette direction; qu'enfin le plan tangent est le lieu où cette dérivée est nulle.*

Et ce dernier énoncé montre que toutes les dérivées du premier ordre dépendent d'une seule quantité qui est le paramètre différentiel.

V. — *Dérivées secondes.*

Désignons par V_1 la fonction qu'on construirait en regardant comme rigoureux ce qui est dit au paragraphe précédent, la différence entre V et sa première approximation V_1 sera, d'après la formule de Taylor,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} V - V_1 = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{d^2F}{dx_1^2}\right)_0 x_1^2 + \left(\frac{d^2F}{dx_2^2}\right)_0 x_2^2 + \ldots + \left(\frac{d^2F}{dx_n^2}\right)_0 x_n^2 \\ &+ 2\left(\frac{d^2F}{dx_1\,dx_2}\right)_0 x_1 x_2 + \ldots + 2\left(\frac{d^2F}{dx_{n-1}\,dx_n}\right)_0 x_{n-1} x_n\Bigg] + \omega', \end{aligned}\right.$$

ω' étant un infiniment petit du troisième ordre. Considérons seulement la partie infiniment petite du second, comme nous l'avons dit; elle pourra s'exprimer par une seule dérivée du second ordre prise en faisant varier le point M′ sur une même direction à partir de M. On a, en effet,

$$\left(\frac{d^2V}{dR^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0 \cos^2\alpha_1 + \left(\frac{d^2V}{dx_2^2}\right)_0 \cos^2\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{d^2V}{dx_n^2}\right)_0 \cos^2\alpha_n$$
$$+ 2\left(\frac{d^2V}{dx_1\,dx_2}\right)_0 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \ldots + 2\left(\frac{d^2V}{dx_{n-1}\,dx_n}\right)_0 \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_n,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui, multiplié par R^2, reproduit la parenthèse; par conséquent,

$$(3) \qquad V = R\left(\frac{dV}{dR}\right)_0 + \frac{R^2}{2}\left(\frac{d^2V}{dR^2}\right)_0,$$

d'où l'on voit que l'étude de la partie infiniment petite du second ordre de l'accroissement de la fonction est en même temps celle de la dérivée seconde $\left(\frac{d^2V}{dR^2}\right)_0$.

Or, on sait qu'il existe toujours un système de n axes orthogonaux Mx'_1, Mx'_2,..., Mx'_n, tels, que, si on adopte pour variables les coordonnées correspondantes, la fonction quadratique renfermée dans les parenthèses deviendra

$$R^2\left(\frac{d^2V}{dR^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2V}{dx'^2_1}\right)_0 x'^2_1 + \left(\frac{d^2V}{dx'_2}\right)^2_0 x'^2_2 + \ldots + \left(\frac{d^2V}{dx'_n}\right)^2_0 x'^2_n;$$

les $\left(\frac{d^2V}{dx'^2_i}\right)_0$ étant les n racines de l'équation en z,

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2V}{dx_1^2} - z & \frac{d^2V}{dx_1 dx_2} \cdots & \frac{d^2V}{dx_1 dx_n} \\ \frac{d^2V}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2V}{dx_2^2} - z \cdots & \frac{d^2V}{dx_2 dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \frac{d^2V}{dx_n dx_1} & \frac{d^2V}{dx_n dx_2} \cdots & \frac{d^2V}{dx_n^2} - z \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad z^n - z^{n-1} D_1 V + z^{n-2} D_2 V - \ldots + (-1)^{n-1} z D_{n-1} V + (-1)^n D_n V = 0,$$

et on sait, en outre, que cette équation a ses racines toujours réelles. Les cosinus de ce nouveau système d'axes avec les anciens sont proportionnels aux déterminants mineurs qu'on peut former au moyen de $n-1$ lignes quelconques du déterminant précédent, et en y substituant à z successivement les n racines de l'équation. Les n systèmes de cosinus qui en résultent sont entièrement déterminés si toutes ces racines sont différentes. Si deux d'entre elles, $\frac{dV}{dx'_1}$ $\frac{dV}{dx'_2}$, par exemple, sont égales, le système des deux axes Mx'_1, Mx'_2 est arbitraire et assujetti seulement à être formé de droites perpendiculaires entre elles et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au système des $n-2$ autres axes qui sont déterminés: s'il y a trois racines égales, $n-3$ axes seulement sont déterminés, les trois autres doivent leur être perpendiculaires et former un système orthogonal; mais ce système est du reste arbitraire, et ainsi de suite. On voit donc que :

Les dérivées secondes de la fonction N *ou* V *dépendent de n d'entre elles seulement; que ces n dérivées, qu'on peut appeler* dérivées principales, *sont relatives à un système de n directions déterminées et ont pour sommes de leurs produits une à une, deux à deux, etc., n à n, les paramètres différentiels* D_1V, D_2V,..., D_nV; *que la dérivée seconde, relative à une direction quelconque faisant avec les directions des dérivées principales les angles* α_1, α_2,..., α_n, *est liée à celles-ci par la relation*

$$(5)\qquad \left(\frac{d^2V}{dR^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0 \cos^2\alpha_1 + \left(\frac{d^2V}{dx_2'}\right)_0 \cos^2\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{d^2V}{dx_n'}\right)_0 \cos^2\alpha_n;$$

qu'enfin, si plusieurs des dérivées principales sont égales entre elles, les directions relatives à celles qui sont différentes sont seules déterminées, et que les dérivées relatives à tout système de n droites orthogonales renfermant celles-ci sont des dérivées principales.

Ce résultat nous indique nettement quel est le sens des expressions D_kV, que nous avons appelées *paramètres différentiels de la fonction*. On voit que ces n paramètres, joints à celui du second ordre, sont les $n+1$ quantités qu'il est nécessaire et suffisant de connaître pour pouvoir calculer les accroissements de la fonction et déterminer toutes les circonstances de sa variation, tant qu'on néglige les infiniment petits du troisième ordre.

VI. — *Propriétés des dérivées secondes principales. — Indicatrice quadratique.*

Sur chaque direction issue du point M, portons une distance égale à l'inverse de la racine carrée de la dérivée seconde relative à cette direction; soient ξ_1, ξ_2,..., ξ_n les coordonnées de l'extrémité

$$\xi_1^2\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_0 = \cos^2\alpha_1, \quad \xi_2^2\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_0 = \cos^2\alpha_2, \ldots, \quad \xi_n^2\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_0 = \cos^2\alpha_n.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La valeur de $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_0$ deviendra

$$\xi_1^2\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0+\xi_2^2\left(\frac{d^2V}{dx_2^2}\right)_0+\ldots+\xi_n^2\left(\frac{d^2V}{dx_n^2}\right)_0=1, \tag{6}$$

équation d'une surface du second degré que nous nommerons l'*indicatrice quadratique*, parce qu'elle indique par l'inverse des carrés de ses rayons les dérivées secondes de la fonction.

Il existe donc en chaque point une surface du second degré telle, que l'inverse du carré du rayon qu'on y mène dans une direction quelconque est la dérivée seconde de V *relative à cette direction.*

Les propriétés des dérivées secondes ne sont autres que celles de ces rayons. Et d'abord, nous avons déjà vu au chapitre II que, si on prend les dérivées secondes pour n directions orthogonales quelconques, leur somme est constante et égale à celle des dérivées principales. Il est inutile de revenir sur ce point.

Considérons maintenant un système de n directions orthogonales dont les $n-2$ directions principales x_3', x_4',..., x_n' fassent partie, et substituons aux deux autres les directions rectangulaires Mx_1, Mx_2 dont la première fasse, avec Mx_1', l'angle α; nous aurons

$$\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0=\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0\cos^2\alpha+\left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0^2\sin^2\alpha+\left(\frac{d^2V}{dx_3'^2}\right)_0\cos^2x_1x_3'+\ldots$$
$$+\left(\frac{d^2V}{dx_n'^2}\right)_0\cos x_1x_n',$$

ou, parce que les $n-2$ derniers cosinus sont nuls,

$$\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0=\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0\cos^2\alpha+\left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0\sin^2\alpha.$$

Lorsque α varie, si $\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0$ et $\left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0$ sont de même signe, positives par exemple, la même chose a toujours lieu pour $\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0$, et cette quantité passe par un maximum pour $\alpha=0$ ou $\alpha=\frac{\pi}{2}$, puis par un minimum pour $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ou $\alpha=0$, suivant que $\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0$ surpasse $\frac{d^2V}{dx_2'^2}\Big)_0$, ou

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en est surpassé. Si $\left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0$ est nul, le minimum est zéro. Si les deux dérivées principales sont : la première, par exemple, positive, et la seconde négative, ce sont encore deux valeurs maximum et minimum de $\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0$, et, en outre, cette quantité passe entre ce maximum et ce minimum, puis entre le minimum et le maximum, par deux valeurs nulles qui ont lieu quand $\operatorname{tang}\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0} : \sqrt{-\left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0}$. Ainsi :

Parmi toutes les directions qui sont orthogonales à $n-2$ des directions principales, il y en a une qui rend la dérivée seconde correspondante maximum, une autre qui la rend minimum. Ce sont les deux directions principales restantes.

Généralement, si on prend $n-k$ directions principales, et k droites qui leur soient orthogonales et qui le soient entre elles, on aura, suivant l'une d'elles, dont les angles avec les k directions principales non employées sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$,

$$\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0 \cos^2\alpha_1 + \left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0 \cos^2\alpha_2 + \ldots + \left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0 \cos^2\alpha_k.$$

Supposons que $\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0$ soit la plus grande des dérivées du second membre, $\left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0$ la moindre, et tenons compte de

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_k = 1,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0 &= \left[\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0\right]\cos^2\alpha_1 + \ldots \\ &\quad + \left[\left(\frac{d^2V}{dx_{k-1}'^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0\right]\cos^2\alpha_{k-1} + \left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0, \\ &= \left[\left(\frac{d^2V}{dx_2'^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0\right]\cos^2\alpha_2 + \ldots \\ &\quad + \left[\left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0\right]\cos^2\alpha_k + \left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0,\end{aligned}$$

et comme toutes les différences de la première ligne sont positives, toutes celles de la seconde négatives, on voit que $\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)_0$ est toujours

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

compris entre $\left(\frac{d^2V}{dx_1'^2}\right)_0$ et $\left(\frac{d^2V}{dx_k'^2}\right)_0$, qui sont ainsi ses valeurs maximum et minimum.

Donc, *si on considère toutes les directions orthogonales à certaines des directions principales, la valeur maximum de la dérivée correspondante est la plus grande des dérivées principales parmi celles qui restent, et la plus petite de ces dérivées est la valeur minimum.*

On peut observer encore qu'une direction également inclinée sur les directions principales $Mx_1', \ldots, Mx_k'$, c'est-à-dire faisant avec elles un même angle dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{k}}$, donne lieu à une valeur de la dérivée seconde qui est moyenne entre elles de ces k dérivées principales.

En résumé, on voit qu'à part la plus grande et la plus petite des dérivées secondes principales, qui sont toujours l'une une valeur maximum, l'autre une valeur minimum de la dérivée seconde relative à une direction variable, les autres ne présentent de propriétés de maximum et de minimum qu'autant qu'on les compare à une dérivée dont on limite la variation, de telle sorte que l'une d'entre elles peut être un minimum relativement à un certain mode de variation, un maximum dans un autre, et une constante dans un autre mode convenablement choisi. Le caractère commun à toutes ces dérivées consiste en ce que, si on les compare à celles qui sont relatives à des directions faisant avec les leurs un angle infiniment petit du premier ordre, la différence est infiniment petite d'ordre supérieur, ce qui ne suffit pas pour l'existence du maximum et du minimum.

Les directions principales peuvent être déterminées par d'autres caractères qui leur sont communs. Cherchons, par exemple, dans quelles directions il faut suivre un chemin infiniment petit R, pour que les dérivées partielles $\frac{dV}{dx_1}, \frac{dV}{dx_2}, \ldots, \frac{dV}{dx_n}$, prises relativement à n directions orthogonales, varient proportionnellement aux projections de R sur ces dernières directions. Nous devrons avoir

$$(7) \qquad \frac{d\frac{dV}{dx_1}}{dx_1} = \frac{d\frac{dV}{dx_2}}{dx_2} = \ldots = \frac{d\frac{dV}{dx_n}}{dx_n} = \lambda'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or

$$d\frac{dV}{dx_i} = \frac{d^2V}{dx_1\,dx_i}\,dx_1 + \frac{d^2V}{dx_2\,dx_i}\,dx_2 + \ldots + \frac{d^2V}{dx_n\,dx_i}\,dx_n;$$

d'où, en remplaçant les $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ par leurs valeurs $R\cos\alpha_1$, $R\cos\alpha_2, \ldots, R\cos\alpha_n$,

$$(7\,bis)\quad \begin{cases} 0 = \left(\dfrac{d^2V}{dx_1^2} - \lambda'\right)\cos\alpha_1 + \dfrac{d^2V}{dx_1\,dx_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \dfrac{d^2V}{dx_1\,dx_n}\cos\alpha_n, \\ 0 = \dfrac{d^2V}{dx_2\,dx_1}\cos\alpha_1 + \left(\dfrac{d^2V}{dx_2^2} - \lambda'\right)\cos\alpha_2 + \ldots + \dfrac{d^2V}{dx_2\,dx_n}\cos\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = \dfrac{d^2V}{dx_n\,dx_1}\cos\alpha_1 + \dfrac{d^2V}{dx_n\,dx_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \left(\dfrac{d^2V}{dx_n^2} - \lambda'\right)\cos\alpha_n. \end{cases}$$

Or ces équations sont identiques à celles qui déterminent les directions principales. Les quantités λ' sont les dérivées principales elles-mêmes; cette nouvelle manière d'envisager ces dérivées leur donne, en outre, la signification suivante : en multipliant les deux termes de chacune des précédentes fractions par $\frac{dV}{dx_1}, \frac{dV}{dx_2}, \ldots$, on a

$$\lambda' = \frac{\dfrac{dV}{dx_1}\,d\dfrac{dV}{dx_1} + \dfrac{dV}{dx_2}\,d\dfrac{dV}{dx_2} + \ldots + \dfrac{dV}{dx_n}\,d\dfrac{dV}{dx_n}}{\dfrac{dV}{dx_1}\,dx_1 + \dfrac{dV}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \dfrac{dV}{dx_n}\,dx_n};$$

or le numérateur est égal au paramètre différentiel du premier ordre multiplié par son accroissement quand on passe de M en M', le dénominateur est ce même paramètre multiplié par R et par le cosinus de l'angle θ que forme MM' avec la normale à la surface isodèle en M. Donc

$$(8)\qquad \lambda'\cos\theta = \frac{d\sqrt{\left(\dfrac{dV}{dx_1}\right)^2 + \left(\dfrac{dV}{dx_2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{dV}{dx_n}\right)^2}}{R},$$

c'est-à-dire que *la dérivée du paramètre différentiel du premier ordre prise suivant l'une des directions principales est égale à la projection de la dérivée principale correspondant sur la normale à la surface isodèle.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

VII. — *Des dérivées conjuguées.*

Une surface du second ordre étant donnée,

$$(a) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 = 1,$$

substituons aux x un système de variables x' tel, que

$$x_i = \sum_{r=1}^{r=n} x'_r \cos(x_i x'_r)$$

avec les conditions

$$(a') \qquad \sum_{r=1}^{r=n} \cos^2(x_r x'_i) = 1, \quad \sum_{r=1}^{r=n} \cos(x_r x'_i)\cos(x_r x'_j) = \theta_{i,j} = \theta_{j,i};$$

il restera $\frac{n(n-1)}{2}$ cosinus arbitraires, qu'on pourra généralement déterminer de telle sorte qu'après la substitution les $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients des rectangles des nouvelles variables soient nuls, et que l'équation prenne la forme

$$a'_1 x'^2_1 + a'_2 x'^2_2 + \ldots + a'_n x'^2_n = 1.$$

Les équations qu'on trouve ainsi entre les cosinus, les a et les a', sont

$$(b) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} a_r \cos(x_r x'_i)\cos(x_r x'_j) = \begin{cases} 0\,(i \gtrless j), \\ a'_i\,(i = j), \end{cases}$$

et, des n groupes qu'elles fournissent quand, adoptant pour i successivement tous les nombres, on donne à j toutes les valeurs possibles, on déduit aisément

$$(c) \qquad \alpha_{i,j} = \cos(x_i x'_j) = \frac{a'_i}{a_i}\,\frac{A_{i,j}}{A},$$

A représentant le déterminant des α, et $A_{i,j}$ le coefficient de $\alpha_{i,j}$ dans ce déterminant. En substituant cette valeur de $\cos(x_i x'_j)$ dans les conditions (a') auxquelles devait satisfaire le système, indépendamment de la disparition des rectangles, et résolvant les n groupes d'équations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

obtenues, puis appliquant un théorème déjà employé précédemment sur les déterminants mineurs d'un dérivé, on trouve n groupes d'équations, tels que

$$\alpha_{1,1}\left(\frac{1}{a'_1}-\frac{1}{a_1}\right)+\alpha_{1,2}\frac{\theta_{1,2}}{a'_2}+\ldots+\alpha_{1,n}\frac{\theta_{1,n}}{a'_n}=0,$$

$$\alpha_{1,1}\frac{\theta_{2,1}}{a'_1}+\alpha_{1,2}\left(\frac{1}{a'_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\ldots+\alpha_{1,n}\frac{\theta_{2,n}}{a'_n}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{1,1}\frac{\theta_{n,1}}{a'_1}+\alpha_{1,2}\frac{\theta_{n,2}}{a'_2}+\ldots+\alpha_{1,n}\left(\frac{1}{a'_n}-\frac{1}{a_1}\right)=0,$$

et pour que ces équations soient compatibles, il faut que a_1 soit racine de

$$\begin{vmatrix} 1-\dfrac{a'_1}{a_1} & \theta_{1,2}\ldots & \theta_{1,n} \\ \theta_{2,1} & 1-\dfrac{a'_2}{a_1} & \theta_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \\ \theta_{n,1} & \theta_{n,2} & 1-\dfrac{a'_n}{a_1} \end{vmatrix}=0.$$

En d'autres termes, les a sont les racines, toujours réelles, de l'équation

$$0=\Theta-\frac{1}{a_1}\sum a'_1\,\Theta_{2,3,\ldots,n-1}+\frac{1}{a_1^2}\sum a'_1\,a'_2\,\Theta_{3,4,\ldots,n}-\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{a_1^{n-1}}\sum a'_1\,a'_2\ldots a'_{n-1}\Theta_n+(-1)^n\frac{1}{a_1^n}a'_1\,a'_2\ldots a'_n,$$

où Θ désigne le déterminant

$$\Theta=\begin{vmatrix} 1 & \theta_{1,2} & \theta_{1,3}\ldots & \theta_{1,n} \\ \theta_{2,1} & 1 & \theta_{2,3}\ldots & \theta_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \theta_{n,1} & \theta_{n,2} & \theta_{n,3}\ldots & 1 \end{vmatrix},$$

et $\Theta_{i,j,k,\ldots}$ celui de ses déterminants mineurs principaux qui contient les lignes et les colonnes $i, j, k, \ldots$. Si donc on désigne par $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les sommes de produits des $\frac{1}{a}$ pris 1 à 1, 2 à 2, ..., n à n, on a

$$(4)\qquad S_1=\sum\frac{\Theta_1}{a'_1},\quad S_2=\sum\frac{\Theta_{1,2}}{a'_1\,a'_2},\quad S_3=\sum\frac{\Theta_{1,2,3}}{a'_1\,a'_2\,a'_3},\ldots,\quad S_n=\frac{\Theta}{a'_1\,a'_2\ldots a'_n}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Considérons l'une des droites de la substitution non orthogonale que nous venons d'employer, Mx'_1 par exemple, les $n-1$ autres sont assujetties à vérifier par leurs cosinus la condition (b) où l'on fait $i=1$. Si on imagine toutes les droites qui satisfont à cette même condition, elles forment un plan

$$(e) \qquad \sum a_r x'_r \cos(x_r x'_1) = 0,$$

dont la position ne dépend que de celle de Mx'_1. Les $n-1$ directions $Mx'_2, \ldots, Mx'_n$ sont donc dans ce plan. Le système formé par ce plan et la droite Mx'_1 est donc tel, que si, avec cette droite et $n-1$ directions quelconques du plan, on forme n axes coordonnés, et qu'on rapporte la surface du second degré à ces axes, la coordonnée x'_1 n'entrera dans son équation qu'au second degré, d'où il suit que ce plan partage en deux parties égales toute corde de la surface qui est parallèle à Mx'_1. Nous appellerons ce plan *plan diamétral conjugué à la direction* Mx'_1 ; cette droite Mx'_1 s'appellera aussi le *diamètre conjugué au plan*. Et alors les n droites formant le système considéré ci-dessus sont telles, que chacune d'elles est diamètre conjugué du plan qui contient les autres. Nous dirons qu'elles forment un système de n diamètres conjugués. Ainsi les formules (d) expriment que :

Si l'on prend les dérivées secondes $\frac{d^2V}{dR^2}$ *suivant les n directions qui forment un système de diamètres conjugués dont les* $\theta_{i,j}$ *soient les cosinus des inclinaisons mutuelles, les inverses de ces dérivées et des dérivées principales sont liés par les relations*

$$9) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\frac{d^2V}{dR_i^2}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\frac{d^2V}{dx_i^2}}, \\ \sum_{i,j} \frac{\Theta_{i,j}}{\frac{d^2V}{dR_i^2}\frac{d^2V}{dR_j^2}} = \sum_{i,j} \frac{1}{\frac{d^2V}{dx_i^2}\frac{d^2V}{dx_j^2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\Theta}{\frac{d^2V}{dR_1^2}\frac{d^2V}{dR_2^2}\cdots\frac{d^2V}{dR_n^2}} = \frac{1}{\frac{d^2V}{dx_1^2}\frac{d^2V}{dx_2^2}\cdots\frac{d^2V}{dx_n^2}}. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

VIII. — *Des dérivées* $\frac{d^2V}{dR\,dR'}$.

Soit, à partir du point M, une direction MR, et $\frac{dV}{dR}$ la dérivée première correspondante. Prenons un point M′ infiniment voisin, et soit $\left(\frac{dV}{dR}\right)'$ la valeur que prend $\frac{dV}{dR}$ calculée pour le point M′ suivant une direction parallèle à MR; l'excès de cette valeur sur la première, divisé par $MM' = R'$, aura pour limite $\frac{d^2V}{dR\,dR'}$. Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les angles de MR avec les directions principales, $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ ceux de MM′, nous aurons

$$\frac{dV}{dR} = \frac{dV}{dx_1}\cos\alpha_1 + \frac{dV}{dx_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{dV}{dx_n}\cos\alpha_n,$$

$$\frac{d^2V}{dR\,dR'} = \frac{d^2V}{dx_1^2}\cos\alpha_1\cos\alpha'_1 + \frac{d^2V}{dx_2^2}\cos\alpha_2\cos\alpha'_2 + \ldots + \frac{d^2V}{dx_n^2}\cos\alpha_n\cos\alpha'_n.$$

D'où l'on voit : 1° que, quand le point M′ appartiendra au plan diamétral conjugué à la direction MR, cette dérivée sera constamment nulle; 2° que si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont les coordonnées du point R où la direction MR rencontre l'indicatrice quadratique, D le rayon de ce point, $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ celles de M, on a

$$DR'\frac{d^2V}{dR\,dR'} = \frac{\frac{d^2V}{dx_1^2}\xi_1 x'_1 + \frac{d^2V}{dx_2^2}\xi_2 x'_2 + \ldots + \frac{d^2V}{dx_n^2}\xi_n x'_n}{\sqrt{\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)^2\xi_1^2 + \left(\frac{d^2V}{dx_2^2}\right)^2\xi_2^2 + \ldots + \left(\frac{d^2V}{dx_n^2}\right)^2\xi_n^2}} \times \sqrt{\left(\frac{d^2V}{dx_1^2}\right)^2\xi_1^2 + \left(\frac{d^2V}{dx_2^2}\right)^2\xi_2^2 + \ldots + \left(\frac{d^2V}{dx_n^2}\right)^2\xi_n^2}.$$

Le premier facteur du second membre est la distance de M′ au plan diamétral conjugué à MR, le second est l'inverse de la distance du point R à ce même plan; soient donc ω, ω' les angles que forment les directions R, R′ avec le diamétral conjugué à R, $\frac{d^2V}{dR\,dR'}$ s'exprimera par

$$\frac{d^2V}{dR\,dR'} = \sin\omega\sin\omega'. \tag{10}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est inutile de faire observer que la forme donnée au chapitre II, pour les paramètres différentiels $D_k V$, conduit à n relations auxquelles satisfont les dérivées $\frac{d^2 V}{d R_i^2}$, $\frac{d^2 V}{d R_i d R_j}$ prises pour n directions quelconques, et les angles d'assemblage de ces directions.

Nous connaissons maintenant tout ce qui peut nous intéresser sur la variation de la fonction V, puisque nous sommes à même d'en déterminer toutes les dérivées des deux premiers ordres, en supposant que nous connaissions le plan tangent et l'indicatrice quadratique. Ce qui précède montre que la variation de la fonction est entièrement déterminée quand on connaît son paramètre différentiel du premier ordre, et tous ceux du second ordre $D_k V$. Ces paramètres sont donc les seuls éléments caractéristiques de la fonction, comme nous l'avions pensé. Il nous reste cependant, pour connaître entièrement la fonction V, à voir comment se succèdent ses surfaces isodèles. Occupons-nous auparavant d'étudier la surface $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

IX. — *Surface du second degré osculatrice à une surface donnée.*

D'après ce qui a été dit au § III, il existe, au point M de la surface, une direction remarquable, celle de la normale, qu'il devient tout naturel d'adopter comme l'un des axes, celui des x_n par exemple. Si donc nous prenons un système de n axes rectangulaires dont la normale fasse partie, ce qui oblige les $n - 1$ autres à appartenir au plan tangent, et si nous considérons le point de ce plan tangent dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0$, et celui de la surface qui a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, il résultera du § III que x_n ne différera de zéro que d'un infiniment petit du second ordre, et que par suite, quelle que soit une direction MR passant en M et appartenant au plan tangent, $\frac{dx_n}{dR}$ sera nulle pour le point M.

x_n étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ dont la valeur, approchée aux infiniment petits près du second ordre, est nulle, il suit du § V qu'en choisissant convenablement les $n - 1$ axes orthogonaux du plan tangent et désignant par $p_{1,1}\, p_{2,2}, \ldots, p_{n-1,n-1}$ les dérivées secondes de x_n par rapport aux nouvelles coordonnés $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, prises en M,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

x_n se développera, aux infiniment petits près du troisième ordre, en

$$2x_n = p_{1,1}x_1^2 + p_{2,2}x_2^2 + \ldots + p_{n-1,n-1}x_{n-1}^2. \tag{11}$$

Donc, *en chaque point* M *d'une surface, il existe une surface du second degré telle que, si, sur ces deux surfaces, on prend deux points situés sur une même parallèle à la normale commune, les distances de ces points au plan tangent commun ne différeront entre elles que d'infiniment petits du troisième ordre.*

Et il en résulte, en particulier, que ces deux distances sont des fonctions dont les $n - 1$ directions principales, ainsi que les dérivées principales correspondantes, sont identiques. Nous appellerons ces directions et dérivées principales les directions et dérivées principales de la surface. La surface du second degré (11) qui, dans le voisinage du point M, pourrait remplacer la proposée, lui sera dite osculatrice. On pourrait introduire, du reste, une infinité d'autres surfaces du second degré propres à remplacer la surface proposée. Elles sont renfermées dans l'équation

$$p_{1,1}x_1^2 + p_{2,2}x_2^2 + \ldots + p_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + \frac{1}{c}(x_n - c)^2 = c,$$

car on n'a fait qu'introduire, dans (11), un terme $\frac{x_n^2}{c}$ du quatrième ordre. Cette surface, en transportant les axes au point arbitraire situé à la distance c de M sur la normale, prend la forme

$$p_{1,1}x_1^2 + p_{2,2}x_2^2 + \ldots + p_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + c'x_n'^2 = \frac{1}{c'}, \tag{12}$$

et alors c'est dans le voisinage de celui de ces points qui a pour coordonnées $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n' = \frac{1}{c'}$ qu'elle est identique à la proposée.

Si l'on considère les dérivées de x_n par rapport à une des directions comprises dans le plan tangent, on aura visiblement des propriétés analogues à celles des derniers paragraphes. Nous n'insisterons pas sur ce sujet.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

X. — *Propriétés des directions principales.*

Prenons pour axes le système formé de la normale et des $n-1$ directions principales de la surface, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, o les coordonnées d'un point M′ situé à la distance infiniment petite R de M. La normale en M aura des cosinus égaux à $-\lambda\frac{dx_n}{dx_1}, -\lambda\frac{dx_n}{dx_2}, \ldots, -\lambda\frac{dx_n}{dx_{n-1}}, \lambda$, λ désignant la quantité

$$\lambda = +\sqrt{\left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dx_n}{dx_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)^2+1},$$

du moins quand on considère, comme nous le supposerons, celle des deux directions de la normale en M′ dont l'angle avec la normale en M a un cosinus positif. Les dérivées $\frac{dx_n}{dx_1}, \ldots$, développées par la formule de Taylor, ont pour valeurs, aux infiniment petits près par rapport à elles,

$$p_{1,1}\,x_1,\ p_{2,2}\,x_2, \ldots,\ p_{n-1,n-1}\,x_{n-1},$$

d'où suit que λ peut être remplacé par 1 et que $-p_{1,1}x_1, -p_{2,2}x_2, \ldots, -p_{n-1,n-1}x_{n-1}, +1$ sont les cosinus de la normale en M′. Cette droite a donc pour équations

$$X_1 - x_1 + X_n\,p_{1,1}\,x_1 = 0, \quad X_2 - x_2 + X_n\,p_{2,2}\,x_2 = 0, \ldots,$$
$$X_{n-1} - x_{n-1} + X_n\,p_{n-1,n-1}\,x_{n-1} = 0.$$

Cherchons à quelles conditions elle rencontrera la normale en M. Il faut pour cela $X_1 = X_2 = \ldots = X_{n-1} = 0$, d'où

$$x_1(p_{1,1}X_n - 1) = 0, \quad x_2(p_{2,2}X_n - 1) = 0, \ldots, \quad x_{n-1}(p_{n-1,n-1}X_n - 1) = 0,$$

et ces équations ne peuvent être satisfaites simultanément que par $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, ce qui est une solution insignifiante, ou par $X_n = \frac{1}{p_{i,i}}$ avec $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_{n-1} = 0$. D'où il suit que le point M′ est sur l'une quelconque des $n-1$ directions principales, et que l'inverse de la dérivée principale relative à cette direction est la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

distance du point M à celui N_i, où se rencontrent les normales infiniment voisines. Ainsi :

En chaque point d'une surface, il existe $n-1$ directions orthogonales jouissant, à l'exclusion de toutes les autres, de cette propriété, que les normales en leurs points infiniment voisins concourent en un point. Ces directions se confondent avec celles du paragraphe précédent. Les longueurs de normales interceptées jusqu'à la rencontre sont les inverses des dérivées principales.

Par analogie avec les expressions de la Géométrie, on pourrait appeler le point de concours des deux normales centre de courbure, la dérivée principale courbure principale, et son inverse rayon de courbure principal.

Reprenons maintenant le point M', que nous supposerons placé hors d'une direction principale : la direction de sa normale se rattache fort simplement aux directions principales. Considérons en effet le plan qui contient la normale en M, $n-3$ directions principales quelconques, puis la direction MM'. Soit α l'angle de MM' avec l'une des deux directions principales restantes; imaginons une direction perpendiculaire au plan considéré et faisant avec MM' l'angle $+\frac{\pi}{2}$, et, par suite, l'angle $\frac{\pi}{2}+\alpha$ avec la direction principale sur laquelle MM' est inclinée de α, et prenons l'angle que forment la normale en M' et cette perpendiculaire au plan. Leurs cosinus étant

$$-p_{1,1}x_1, -p_{2,2}x_2, \ldots, -p_{n-1,n-1}x_{n-1}, +1 \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \cos\alpha, 0, 0, \ldots, 0,$$

celui de cet angle sera

$$+p_{1,1}x_1\sin\alpha - p_{2,2}x_2\cos\alpha = R(p_{1,1}-p_{2,2})\sin\alpha\cos\alpha,$$

ou bien, en appelant μ l'angle de la normale en M' avec le plan,

$$\mu = R\frac{p_{1,1}-p_{2,2}}{2}\sin 2\alpha. \tag{13}$$

Si, sur une direction dont l'angle avec la direction principale Mx_1 *est* α, *on prend un point* M' *à une distance infiniment petite* R *de* M, *l'angle de la normale en* M' *avec le plan qui contient la direction* MM', *la normale*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en M *et les* $n-3$ *directions principales* $Mx_3, \ldots, Mx_{n-1}$, *sera proportionnel à* R. *Il le sera également à* $\sin 2\alpha$, *et par suite ne s'annulera que sur les directions principales.*

On pourrait discuter cette formule en détail, et on en tirerait des résultats semblables à ceux que M. Bertrand a fait connaître pour les surfaces en Géométrie.

XI. — *Rayons de courbure.*

Soit encore le point M′ déjà considéré, dont les coordonnées par rapport aux axes formés par les n directions principales et la normale en M sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Désignons par m' le point du plan tangent dont les $n-1$ premières coordonnées sont celles de M′. La dernière x_n sera la distance de M′ à m ou au plan tangent. Considérons maintenant l'angle infiniment petit du premier ordre que forment MM′ et Mm'; sa valeur $d\varphi$ sera $\frac{x_n}{\mathrm{MM'}}$, de sorte que l'expression $\frac{\mathrm{R}}{d\varphi} = \frac{\overline{\mathrm{MM'}}^2}{x_n}$ sera finie. Cette expression est analogue au rapport $\frac{ds}{d\varphi}$, par lequel s'exprime, dans la théorie des surfaces, le rayon de courbure d'une section normale quelconque. Nous appellerons son double le *rayon de courbure relatif à la direction* MM′. Ainsi, à chaque direction prise à partir d'un point sur une surface répondra une certaine quantité intimement liée à la nature de cette surface, et que nous désignerons sous le nom de *rayon de courbure*. Cette quantité n'est autre que l'inverse de la dérivée seconde de x_n par rapport à R. Car si, dans son expression, on remplace $2x_n$ par sa valeur, on a $\frac{1}{p_{1,1}x_1^2 + p_{2,2}x_2^2 + \ldots + p_{n-1,n-1}x_{n-1}^2}$, ce qui est bien l'inverse de $\frac{d^2 x_n}{d\mathrm{R}^2}$.

En appelant $\mathfrak{R}$ ce rayon de courbure, $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_{n-1}$ les rayons de courbure principaux, il suit du § XIII que $\mathfrak{R}$ dépend uniquement de ces derniers rayons et qu'il leur est lié par la formule

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\cos^2\alpha_1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{\mathfrak{R}_2} + \ldots + \frac{\cos^2\alpha_{n-1}}{\mathfrak{R}_{n-1}}, \tag{14}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant les angles que la direction R forme avec les directions principales

Les rayons de courbure $\mathfrak{R}$ définissent complétement la variation de la fonction x_n dans le voisinage du point M, et suffisent par conséquent pour faire connaître la surface autour de ce point. Or ils dépendent uniquement, comme nous l'allons voir, des paramètres différentiels du second ordre. En effet, $F = o$ étant l'équation de la surface, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées orthogonales du point M, MI l'une des directions principales, $\mathfrak{R}_i$ le rayon de courbure correspondant, ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ les coordonnées de son centre de courbure, ce dernier point doit, d'après le § X, être sur la normale en M, ce qui donne

$$\frac{x_1 - \xi_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{x_2 - \xi_2}{\frac{dF}{dx_2}} = \ldots = \frac{x_n - \xi_n}{\frac{dF}{dx_n}} = \frac{\mathfrak{R}_i}{\sqrt{-\Theta_1 F}}.$$

Il doit être de même sur la normale infiniment voisine, de sorte qu'on peut différentier ces équations en n'y faisant varier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais ni $\mathfrak{R}_i$ ni les ξ. Mettant auparavant l'une d'elles sous la forme

$$l.(x_r - \xi_r) - l.\frac{dF}{dx_r} - l.\mathfrak{R}_i + l.\sqrt{-\Theta_1 F} = o,$$

on aura

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} o &= \frac{dx_r}{x_r - \xi_r} - \frac{d\frac{dF}{dx_r}}{\frac{dF}{dx_r}} + \frac{d\sqrt{-\Theta_1 F}}{\sqrt{-\Theta_1 F}} \\ &= \frac{1}{\frac{dF}{dx_r}}\left(\frac{\sqrt{-\Theta_1 F}}{\mathfrak{R}_i}\,dx_r - d\frac{dF}{dx_r} + \frac{d\sqrt{-\Theta_1 F}}{\sqrt{-\Theta_1 F}}\,\frac{dF}{dx_r}\right), \end{aligned} \right.$$

ou bien, en développant,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx_r}\,\frac{d\sqrt{-\Theta_1 F}}{\sqrt{-\Theta_1 F}} = {} & \frac{d^2F}{dx_r\,dx_1}\,dx_1 + \frac{d^2F}{dx_r\,dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{d^2F}{dx_r\,dx_{r-1}}\,dx_{r-1} \\ & + \left(\frac{d^2F}{dx_r^2} - \frac{\sqrt{-\Theta_1 F}}{\mathfrak{R}_i}\right)dx_r \\ & + \frac{d^2F}{dx_r\,dx_{r+1}}\,dx_{r+1} + \ldots + \frac{d^2F}{dx_r\,dx_n}\,dx_n. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces n équations, auxquelles il faut joindre

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx_1}dx_1+\frac{d\mathrm{F}}{dx_2}dx_2+\ldots+\frac{d\mathrm{F}}{dx_n}dx_n=0,$$

pour exprimer que les deux points infiniment voisins M et M′ sont sur la surface, forment $n+1$ équations entre les quantités $dx_1,\ldots,dx_n$, $\frac{d\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}}{\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}}$, et, pour qu'elles soient compatibles, il faut que

$$\left|\begin{array}{cccc}
0 & \dfrac{d\mathrm{F}}{dx_1} & \dfrac{d\mathrm{F}}{dx_2}\cdots & \dfrac{d\mathrm{F}}{dx_n} \\
\dfrac{d\mathrm{F}}{dx_1} & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_1^2}-\dfrac{\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}}{\mathrm{R}_i} & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_1\,dx_2}\cdots & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_1\,dx_n} \\
\dfrac{d\mathrm{F}}{dx_2} & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_2\,dx_1} & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_2^2}-\dfrac{\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}}{\mathrm{R}_i}\cdots & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_2\,dx_n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{d\mathrm{F}}{dx_n} & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_n\,dx_1} & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_n\,dx_2}\cdots & \dfrac{d^2\mathrm{F}}{dx_n^2}-\dfrac{\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}}{\mathrm{R}_i}
\end{array}\right|=0.$$

Les rayons de courbure principaux sont donc les racines de l'équation

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{D}_n\mathrm{F}-\mathrm{D}_{n-1}\mathrm{F}\cdot\dfrac{\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}}{\mathrm{R}} \\
\qquad+\mathrm{D}_{n-2}\mathrm{F}\dfrac{\left(\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}\right)^2}{\mathrm{R}^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\mathrm{D}_1\mathrm{F}\dfrac{\left(\sqrt{-\mathrm{D}_1\mathrm{F}}\right)^{n-1}}{\mathrm{R}^{n-1}}=0,
\end{array}\right.$$

et par suite ils ne dépendent que des paramètres $\mathrm{D}_k\mathrm{F}$.

Les directions principales pourraient s'obtenir au moyen des déterminants mineurs du précédent; mais il y a un moyen préférable sur lequel nous reviendrons.

La considération des rayons de courbure permet de réduire la connaissance de la surface à celle d'une surface du second ordre la plus simple possible. Cette surface, que nous désignerons sous le nom de *sphère*, est celle qui contient tous les points placés à une même distance d'un point fixe. Parmi toutes les sphères qui passent en M et sont tangentes en ce point à la surface, il y en a une et une seule passant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au point infiniment voisin M'. Elle a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = 2\rho x_n,$$

où x_n est le même que sur la surface. Il s'ensuit que son rayon ρ est l'inverse de $\frac{2x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2} = \frac{2x_n}{R^2}$, et qu'il est par suite identique au rayon de courbure relatif à la direction MM'. Ainsi, connaître ce rayon de courbure, c'est connaître la sphère qui, dans une direction quelconque passant en l'un de ses points, établit entre les coordonnées les mêmes variations que la surface proposée dans la direction MM'.

XII. — *Lignes de courbure.*

Les lignes formées en cheminant, à partir de chaque point, sur la direction principale qui s'y rapporte, s'appelleront lignes de courbure. Quand on connaît les rayons principaux en un point, on connaît, comme nous venons de le voir, une étendue infiniment petite de la surface autour de ce point, de sorte que, si tous les systèmes de ces rayons étaient connus, on pourrait se former une idée de chaque élément de la surface considéré isolément. Pour embrasser l'ensemble, il faut encore savoir comment se succèdent les directions auxquelles se rapportent ces rayons dans les éléments voisins. Les lignes de courbure sont donc le meilleur moyen de se représenter la surface entière. Leurs équations différentielles se déduiront des équations (15) entre lesquelles on éliminera $\frac{d\sqrt{-\Theta_1 F}}{\sqrt{-\Theta_1 F}}$ et $\frac{\sqrt{-\Theta_1 F}}{R_i}$, ce qui donnera $n-2$ résultats tels que

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} dx_r & \frac{dF}{dx_r} & d\frac{dF}{dx_r} \\ dx_s & \frac{dF}{dx_s} & d\frac{dF}{dx_s} \\ dx_t & \frac{dF}{dx_t} & d\frac{dF}{dx_t} \end{vmatrix} = 0,$$

et on devra joindre à ces équations

$$\frac{dF}{dx_1}dx_1 + \frac{dF}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}dx_n = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les $n-1$ lignes de courbure s'obtiendront par l'intégration de ces $n-1$ équations simultanées.

Nous ne chercherons pas à entrer dans de plus grands détails au sujet de l'équation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. On vérifierait sans peine que tous les théorèmes relatifs à la théorie des surfaces, par exemple ceux de M. Dupin sur les tangentes conjuguées, sur les intersections des surfaces orthogonales; ceux de M. Lamé sur le même objet, etc., auraient ici leurs correspondants. Nous avons atteint notre but principal en prouvant que la nature de la liaison établie entre les variables par l'équation $F = 0$ ne dépend que des paramètres différentiels $\Theta_k F$.

XIII. — *Des surfaces isodèles.*

Il résulte de l'étude que nous venons de faire sur les surfaces que la nature de la surface isodèle de la fonction $V = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dépend uniquement des paramètres $\Theta_k V$. Ainsi, nous savons maintenant que les paramètres $D_k V$ sont, pour ainsi dire, les éléments dont dépendent les variations de la fonction V autour d'un même point, et que les paramètres $\Theta_k V$ sont ceux qui déterminent la nature de la liaison que l'équation $V = \text{const.}$ impose aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou en d'autres termes la nature de la surface isodèle.

Il reste à voir encore comment ces surfaces se succèdent les unes aux autres. Soit donc M un point de l'une d'elles $F = V$,

$$M'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n)$$

un point infiniment voisin de M et pris sur la surface $F = V + dV$, et supposons que les axes adoptés soient les directions principales de la fonction V en M. Les cosinus des normales en M et en M' étant proportionnels aux dérivées $\frac{dV}{dx_1}, \ldots, \frac{dV}{dx_n}, \frac{dV}{dx_1} + d\frac{dV}{dx_1}, \ldots, \frac{dV}{dx_n} + d.\frac{dV}{dx_n}$, si on veut que ces normales soient parallèles, il faut que

$$\frac{1}{\frac{dV}{dx_1}} d.\frac{dV}{dx_1} = \frac{1}{\frac{dV}{dx_2}} d.\frac{dV}{dx_2} = \ldots = \frac{1}{\frac{dV}{dx_n}} d.\frac{dV}{dx_n},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x_1}{\dfrac{\left(\dfrac{dV}{dx_1}\right)}{\left(\dfrac{d^2V}{dx_1^2}\right)}} = \frac{x_2}{\dfrac{\left(\dfrac{dV}{dx_2}\right)}{\left(\dfrac{d^2V}{dx_2^2}\right)}} = \ldots = \frac{x_n}{\dfrac{\left(\dfrac{dV}{dx_n}\right)}{\left(\dfrac{d^2V}{dx_n^2}\right)}}.$$

Les numérateurs sont proportionnels aux cosinus de MM′, les dénominateurs le sont à ceux du diamètre conjugué du plan tangent par rapport à l'indicatrice quadratique. MM′ est donc dirigé suivant ce diamètre. D'autre part, les courbures des deux surfaces en M et en M′, ainsi que les directions principales, ne présentent que des variations infiniment petites. Donc on peut dire que :

Si on considère l'élément infiniment petit d'une surface isodèle qui s'étend autour d'un point et qu'on le transporte dans une direction parallèle au diamètre conjugué de son plan tangent par rapport à l'indicatrice quadratique de la fonction, il se placera sur l'élément de la surface isodèle infiniment voisine.

Cette proposition permettrait de comparer entre eux deux plans tangents aux surfaces V, V + dV en deux points infiniment voisins M, M″ pris sur chacune d'elles. Nous remarquerons seulement à ce sujet la propriété suivante. Si le point M″ est pris sur l'une des directions principales de la fonction V, les plans tangents en M à la surface V, en M″ à la surface V + dV se coupent en un lieu orthogonal à la direction MM″.

Enfin ajoutons, en terminant, que, pour connaître complétement la fonction V, il ne suffit pas d'en connaître les dérivées principales en chaque point, qu'il faut encore lier tous ces résultats par le réseau que forment les n systèmes de courbes orthognales qu'on obtient en marchant toujours suivant des directions principales de la fonction. Les équations différentielles de ces courbes ne sont autre chose que (7), § VI.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IV.

APPLICATION DES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS A QUELQUES QUESTIONS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET DE MÉCANIQUE.

I. — *Sur un mode de déformation des corps usité dans la théorie de la chaleur.*

Les géomètres ont introduit, depuis quelques années, dans la théorie de la chaleur, un procédé de déformation des figures qui leur a permis d'accroître considérablement, et sans nul effort, le nombre des cas qu'ils avaient su traiter jusque-là. Cette méthode, depuis longtemps employée dans la Géométrie pure, consiste à faire correspondre un point à un point sous les conditions : que l'un et l'autre sont sur un même rayon vecteur issu d'une origine fixe, et que le produit de leurs distances à cette origine est égal au carré d'une ligne constante et donnée.

Si l'on se borne à considérer les questions de températures stationnaires, le résultat fourni par la méthode s'énonce ainsi : *Un corps étant donné dont on connaît l'état thermique, on peut obtenir, sans aucune intégration nouvelle, celui du corps qu'on trouverait en appliquant au premier la transformation par rayons vecteurs réciproques*, proposition qu'il suffit d'indiquer pour en faire sentir aussitôt toute l'importance. Ce théorème est uniquement fondé sur le suivant : *Le paramètre linéaire du second ordre* D_1 *d'une fonction du point transformé ne diffère de celui d'une certaine autre fonction du point primitif que par un facteur, fonction de l'un ou de l'autre de ces points, mais indépendant de la nature des fonctions transformées l'une dans l'autre.*

Nous allons nous proposer de rechercher tous les modes de déformation qui donnent lieu à ce théorème, et par conséquent aussi à la transformation des températures qui en est la conséquence.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

II. — *Transformation du paramètre du second ordre* $D_1 V$.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un point M, x', y', z' celles du point transformé M' et

$$(1) \qquad x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \varphi_1(x, y, z), \quad z' = \varphi_2(x, y, z),$$

les formules de transformation. Soit encore

$$(2) \qquad \rho = f(x, y, z), \quad \rho_1 = f_1(x, y, z), \quad \rho_2 = f_2(x, y, z),$$

un système de trois surfaces orthogonales se coupant en M; si, entre ces équations et les précédentes, on élimine x, y, z, on aura trois nouvelles surfaces

$$(3) \qquad \rho = \psi(x', y', z'), \quad \rho_1 = \psi_1(x', y', z'), \quad \rho_2 = \psi_2(x', y', z'),$$

qui se couperont en M' et ne seront plus généralement orthogonales. Nous appellerons le système des surfaces (2) système primitif, et celui des surfaces (3) système transformé.

Soit maintenant V une fonction quelconque du point primitif M. En adoptant pour variables les coordonnées ρ, son paramètre différentiel du second ordre $D_1 V$ sera de la forme

$$(4) \qquad D_1 V = \varpi \left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h^2}{\varpi}\frac{dV}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1^2}{\varpi}\frac{dV}{d\rho_1}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2^2}{\varpi}\frac{dV}{d\rho_2}\right)\right],$$

les h étant les paramètres différentiels $\sqrt{\left(\frac{d\rho_i}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_i}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_i}{dz}\right)^2}$ des ρ, et ϖ étant, comme au chapitre II,

$$(5) \qquad \varpi = \begin{vmatrix} \frac{d\rho}{dx} & \frac{d\rho}{dy} & \frac{d\rho}{dz} \\ \frac{d\rho_1}{dx} & \frac{d\rho_1}{dy} & \frac{d\rho_1}{dz} \\ \frac{d\rho_2}{dx} & \frac{d\rho_2}{dy} & \frac{d\rho_2}{dz} \end{vmatrix} = hh_1h_2.$$

Exprimons d'abord ces paramètres en fonction des coordonnées du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

point transformé. La quantité

$$\frac{d\rho_i}{dx}\frac{d\rho_j}{dx}+\frac{d\rho_i}{dy}\frac{d\rho_j}{dy}+\frac{d\rho_i}{dz}\frac{d\rho_j}{dz}$$

est nulle ou égale à h^2, h_1^2, h_2^2, suivant que i et j sont différents ou qu'ils ont les valeurs communes 0, 1 ou 2. Cela résulte de ce que les surfaces (2) sont orthogonales. Or, au moyen de l'identité

$$(a)\qquad \frac{d\rho_i}{dx}=\frac{d\rho_i}{dx'}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\rho_i}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\rho_i}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dx}$$

et de ses analogues, cette expression se transforme en

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\rho_i}{dx'}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\rho_i}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\rho_i}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dx}\right)\left(\frac{d\rho_j}{dx'}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\rho_j}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\rho_j}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dx}\right)\\+&\left(\frac{d\rho_i}{dx'}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\rho_i}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dy}+\frac{d\rho_i}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dy}\right)\left(\frac{d\rho_j}{dx'}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\rho_j}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dy}+\frac{d\rho_j}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dy}\right)\\+&\left(\frac{d\rho_i}{dx'}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d\rho_i}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dz}+\frac{d\rho_i}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dz}\right)\left(\frac{d\rho_j}{dx'}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d\rho_j}{dy'}\frac{d\varphi_1}{dz}+\frac{d\rho_j}{dz'}\frac{d\varphi_2}{dz}\right),\end{aligned}$$

ou mieux, en

$$(b)\qquad \begin{cases}\dfrac{d\rho_i}{dx'}\dfrac{d\rho_j}{dx'}\Phi_{0,0}+\dfrac{d\rho_i}{dy'}\dfrac{d\rho_j}{dy'}\Phi_{1,1}+\dfrac{d\rho_i}{dz'}\dfrac{d\rho_j}{dz'}\Phi_{2,2}+\left(\dfrac{d\rho_i}{dx'}\dfrac{d\rho_j}{dy'}+\dfrac{d\rho_j}{dx'}\dfrac{d\rho_i}{dy'}\right)\Phi_{0,1}\\ \quad+\left(\dfrac{d\rho_i}{dx'}\dfrac{d\rho_j}{dz'}+\dfrac{d\rho_j}{dx'}\dfrac{d\rho_i}{dz'}\right)\Phi_{0,2}+\left(\dfrac{d\rho_i}{dy'}\dfrac{d\rho_j}{dz'}+\dfrac{d\rho_j}{dy'}\dfrac{d\rho_i}{dz'}\right)\Phi_{1,2},\end{cases}$$

où l'on représente par $\Phi_{i,j}$ les six paramètres différentiels du premier ordre du système des fonctions (1), qui sont, comme on le sait, les seules fonctions différentielles du premier ordre qu'on puisse choisir arbitrairement; ainsi l'expression (h) est nulle si $i\gtrless j$ et égale à h_i^2 pour $i=j$. L'identité (a) montre aussi que le déterminant ϖ est le produit des deux suivants :

$$\varpi'=\begin{vmatrix}\dfrac{d\rho}{dx'}&\dfrac{d\rho}{dy'}&\dfrac{d\rho}{dz'}\\ \dfrac{d\rho_1}{dx'}&\dfrac{d\rho_1}{dy'}&\dfrac{d\rho_1}{dz'}\\ \dfrac{d\rho_2}{dx'}&\dfrac{d\rho_2}{dy'}&\dfrac{d\rho_2}{dz'}\end{vmatrix},\qquad \mathrm{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{d\varphi}{dx}&\dfrac{d\varphi}{dy}&\dfrac{d\varphi}{dz}\\ \dfrac{d\varphi_1}{dx}&\dfrac{d\varphi_1}{dy}&\dfrac{d\varphi_1}{dz}\\ \dfrac{d\varphi_2}{dx}&\dfrac{d\varphi_2}{dy}&\dfrac{d\varphi_2}{dz}\end{vmatrix},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dont le dernier n'est fonction que des paramètres $\Phi_{i,j}$, comme on s'en assure en effectuant son carré par lignes :

$$(6)\qquad F^2 = \begin{vmatrix} \Phi_{0,0} & \Phi_{0,1} & \Phi_{0,2} \\ \Phi_{0,1} & \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} \\ \Phi_{0,2} & \Phi_{1,2} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix},$$

en vertu de

$$(7)\qquad \Phi_{i,j} = \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + \frac{d\varphi_i}{dy}\frac{d\varphi_j}{dy} + \frac{d\varphi_i}{dz}\frac{d\varphi_j}{dz}.$$

Ceci posé, remplaçons ϖ et les h par ces valeurs, nous aurons

$$\frac{D_1 V}{F} = \varpi'\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\frac{dV}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1'^2}{\varpi'}\frac{dV}{d\rho_1}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2'^2}{\varpi'}\frac{dV}{d\rho_2}\right)\right],$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{D_1 V}{F} = h'^2\dfrac{d^2V}{d\rho^2} + h_1'^2\dfrac{d^2V}{d\rho_1^2} + h_2'^2\dfrac{d^2V}{d\rho_2^2} \\ \qquad + \varpi'\dfrac{dV}{d\rho}\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{h'^2}{\varpi'}\right) + \varpi'\dfrac{dV}{d\rho_1}\dfrac{d}{d\rho_1}\left(\dfrac{h_1'^2}{\varpi'}\right) + \varpi'\dfrac{dV}{d\rho_2}\dfrac{d}{d\rho_2}\left(\dfrac{h_2'^2}{\varpi'}\right), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$h_i'^2 = \frac{h_i^2}{F}.$$

Actuellement, nous voulons introduire à la place de V une fonction U du point $x'y'z'$ qui ne dépende en rien des coordonnées x, x' ou ρ, auxquelles on rapporte les points M, M'; la relation entre V et U ne saurait donc renfermer que des fonctions différentielles des φ, incapables de changer quand on change les coordonnées. Donc cette relation ne peut être que de la forme

$$V = \mathcal{F}(\Phi_{0,0}, \Phi_{1,1}, \Phi_{2,2}, \Phi_{0,1}, \Phi_{0,2}, \Phi_{1,2}, U).$$

Il s'ensuit

$$(9)\qquad \frac{dV}{d\rho_i} = \frac{d\mathcal{F}}{dU}\frac{dU}{d\rho_i} + \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right),$$

$$(10)\qquad \frac{d^2V}{d\rho_i^2} = \frac{d\mathcal{F}}{dU}\frac{d^2U}{d\rho_i^2} + \frac{d^2\mathcal{F}}{dU^2}\left(\frac{dU}{d\rho_i}\right)^2 + \left\{\frac{d}{dU}\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right) + \left[\frac{d}{d\rho_i}\left(\frac{d\mathcal{F}}{dU}\right)\right]\right\}\frac{dU}{d\rho_i} + \left(\frac{d^2\mathcal{F}}{d\rho_i^2}\right),$$

où, pour abréger l'écriture, on a seulement entouré d'un crochet l'indication d'une dérivée de $\mathcal{F}$ quand on fait tout varier, excepté U, dans cette fonction. Telles sont les expressions à substituer dans $D_2 V$, pour remplacer O par U dans cette quantité.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

III. — *Équations différentielles du problème.*

Nous voulons que, cette substitution une fois faite, $D_1 V$ devienne le produit du paramètre différentiel de la fonction U du point M′, par une quantité qui ne dépende ni de U ni de V; comme d'ailleurs $D_1 V$ et $D'_1 U$, et par conséquent aussi leur rapport, ne dépendent en rien des coordonnées x, x' ou ρ, ce rapport ne saurait encore ici être fonction que des $\Phi_{i,j}$; il faut donc que

$$(11) \qquad D_1 V = \Psi(\Phi_{0,0}, \Phi_{1,1}, \Phi_{2,2}, \Phi_{0,1}, \Phi_{0,2}, \Phi_{1,2}) D'_1 U.$$

Nous accentuons le symbole D'_1 pour rappeler que U est exprimé au moyen des coordonnées du point M′. Or, en adoptant le système des ρ des surfaces (3) pour coordonnées de ce point, on a vu, chap. II, § X, que si l'on pose

$$(12) \qquad \begin{cases} h'^2_{i,j} = h'^2_{j,i} = \dfrac{d\rho_i}{dx'}\dfrac{d\rho_j}{dx'} + \dfrac{d\rho_i}{dy'}\dfrac{d\rho_j}{dy'} + \dfrac{d\rho_i}{dz'}\dfrac{d\rho_j}{dz'}, \\ U_i = h'^2_{i,0}\dfrac{dU}{d\rho} + h'^2_{i,1}\dfrac{dU}{d\rho_1} + h'^2_{i,2}\dfrac{dU}{d\rho_2}, \end{cases}$$

on a

$$D'_1 U = \varpi' \left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{U_0}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{U_1}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{U_1}{\varpi'}\right)\right],$$

ou bien, en développant,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & h'^2_{0,0}\frac{d^2U}{d\rho^2} + h'^2_{1,1}\frac{d^2U}{d\rho_1^2} + h'^2_{2,2}\frac{d^2U}{d\rho_2^2} + 2h'^2_{0,1}\frac{d^2U}{d\rho_1 d\rho} + 2h'^2_{0,2}\frac{d^2U}{d\rho d\rho_2} + 2h'^2_{1,2}\frac{d^2U}{d\rho_1 d\rho_2} \\ & + \varpi' \left\{ \frac{dU}{d\rho}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2_{0,0}}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h'^2_{1,0}}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h'^2_{2,0}}{\varpi'}\right)\right] \right. \\ & \quad + \frac{dU}{d\rho_1}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2_{0,1}}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h'^2_{1,1}}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h'^2_{2,1}}{\varpi'}\right)\right] \\ & \quad \left. + \frac{dU}{d\rho_2}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2_{0,2}}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h'^2_{1,2}}{\varpi'}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h'^2_{2,2}}{\varpi'}\right)\right]\right\} = D'_1 U. \end{aligned} \right.$$

Remplaçant donc, dans (11), les deux paramètres différentiels $D_1 V$, $D'_1 U$ par leurs valeurs, on aura une équation qui devra être satisfaite quelles que soient les dérivées partielles de la fonction arbitraire U,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

savoir :

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \mathrm{F}h'^2\left[\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho^2}+\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}^2}\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\rho}\right)^2+\left\{\frac{d}{d\mathrm{U}}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho}\right)+\left(\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\right)\right)\right\}\frac{d\mathrm{U}}{d\rho}+\left(\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho^2}\right)\right]\\
& +\mathrm{F}h_1'^2\left[\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_1^2}+\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}^2}\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}\right)^2+\left\{\frac{d}{d\mathrm{U}}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_1}\right)+\left(\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\right)\right)\right\}\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}+\left(\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_1^2}\right)\right]\\
& +\mathrm{F}h_2'^2\left[\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_2^2}+\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}^2}\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_2}\right)^2+\left\{\frac{d}{d\mathrm{U}}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_2}\right)+\left(\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\right)\right)\right\}\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_2}+\left(\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_2^2}\right)\right]\\
& +\mathrm{F}\varpi'\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\left[\frac{d\mathrm{U}}{d\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_2}\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2'^2}{\varpi'}\right)\right]\\
& +\mathrm{F}\varpi'\left[\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho}\right)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right)+\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_1}\right)\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1'^2}{\varpi'}\right)+\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_2}\right)\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2'^2}{\varpi'}\right)\right]\\
& -\Psi\left[h_{0,0}'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho^2}+h_{1,1}'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_1^2}+h_{2,2}'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_2^2}+2h_{0,1}'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho\,d\rho_1}+2h_{0,2}'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho\,d\rho_2}+2h_{1,2}'^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_1\,d\rho_2}\right]\\
& -\Psi\varpi'\left\{\frac{d\mathrm{U}}{d\rho}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_{0,0}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_{1,0}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_{2,0}'^2}{\varpi'}\right)\right]+\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_{0,1}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_{1,1}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_{2,1}'^2}{\varpi'}\right)\right]\right.\\
& \qquad\left.+\frac{d\mathrm{U}}{d\rho_2}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_{0,2}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_{1,2}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_{2,2}'^2}{\varpi'}\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Égalant donc à zéro les coefficients des mêmes dérivées, on obtiendra les équations

$$(14)\qquad h_{0,1}'^2=0,\quad h_{0,2}'^2=0,\quad h_{1,2}'^2=0,$$

$$(15)\qquad \mathrm{F}h'^2\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}=h_{0,0}'^2\Psi,\quad \mathrm{F}h_1'^2\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}=h_{1,1}'^2\Psi,\quad \mathrm{F}h_2'^2\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}=h_{2,2}'^2\Psi,$$

$$(16)\qquad \frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}^2}=0,$$

$$
(17)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\varpi'\mathrm{F}\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right)+\mathrm{F}h'^2\left\{\frac{d}{d\mathrm{U}}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho}\right)+\left(\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\right)\right)\right\}=\Psi\varpi'\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_{0,0}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_{1,0}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_{2,0}'^2}{\varpi'}\right)\right],\\
&\varpi'\mathrm{F}\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_1'^2}{\varpi'}\right)+\mathrm{F}h_1'^2\left\{\frac{d}{d\mathrm{U}}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_1}\right)+\left(\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\right)\right)\right\}=\Psi\varpi'\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_{0,1}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_{1,1}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_{2,1}'^2}{\varpi'}\right)\right],\\
&\varpi'\mathrm{F}\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_2'^2}{\varpi'}\right)+\mathrm{F}h_2'^2\left\{\frac{d}{d\mathrm{U}}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_2}\right)+\left(\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\mathrm{U}}\right)\right)\right\}=\Psi\varpi'\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h_{0,2}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_{1,2}'^2}{\varpi'}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_{2,2}'^2}{\varpi'}\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(18)\quad\left\{
\begin{aligned}
&h'^2\left(\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho^2}\right)+h_1'^2\left(\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_1^2}\right)+h_2'^2\left(\frac{d^2\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_2^2}\right)\\
&\quad-\varpi'\left\{\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho}\right)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right)+\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_1}\right)\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1'^2}{\varpi'}\right)+\left(\frac{d\vec{\mathfrak{F}}}{d\rho_2}\right)\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2'^2}{\varpi'}\right)\right\}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

qui sont les équations différentielles du problème.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IV. — *Première intégration.*

L'équation (16) fait voir immédiatement que $\mathcal{F}$ ne saurait être qu'une fonction linéaire de U; et, par suite, en indiquant par Ω et Π deux fonctions des seules quantités $\Phi_{i,j}$, on a

$$\mathcal{F} = \Omega U + \Pi, \quad \frac{d\mathcal{F}}{dU} = \Omega. \tag{19}$$

Les équations (14) équivalent, d'après les valeurs (12), à

$$\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dx'} + \frac{d\rho}{dy'}\frac{d\rho_1}{dy'} + \frac{d\rho}{dz'}\frac{d\rho_1}{dz'} = 0,$$

et analogues, lesquelles expriment que le système des surfaces (3) est orthogonal. Ainsi la transformation doit être telle, qu'un système de trois surfaces orthogonales a pour transformé un système pareillement orthogonal.

La troisième des équations (15) développée donne

$$\left(\frac{d\rho}{dx'}\right)^2\Phi_{0,0} + \left(\frac{d\rho}{dy'}\right)^2\Phi_{1,1} + \left(\frac{d\rho}{dz'}\right)^2\Phi_{2,2} + 2\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dy'}\Phi_{0,1} + 2\frac{d\rho}{dx'}\frac{d\rho_1}{dz'}\Phi_{0,2} + 2\frac{d\rho}{dy'}\frac{d\rho}{dz'}\Phi_{1,2} = \frac{\Psi}{\Omega}\left[\left(\frac{d\rho}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz'}\right)^2\right]^2;$$

et celle-ci devant avoir lieu quel que soit le système des surfaces ρ, soit primitives, soit transformées, il faut que les coefficients des mêmes dérivées soient égaux dans les deux membres. Donc

$$\Phi_{0,0} = \Phi_{1,1} = \Phi_{2,2} = \frac{\Psi}{\Omega}, \quad \Phi_{0,1} = \Phi_{0,2} = \Phi_{1,2} = 0, \tag{20}$$

c'est-à-dire que les équations (1), où x', y', z' seraient traités comme des constantes, doivent représenter un système de surfaces orthogonales, et que ces équations, où x', y', z' seraient regardés comme des fonctions de x, y, z, doivent les déterminer de telle sorte que ces fonctions aient des paramètres différentiels du premier ordre égaux. Les autres équations (15) sont identiques quand ces conditions sont satisfaites. Quant à la valeur commune des paramètres Φ de x', y', z', on la déduira de l'é-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quation (6) qui, d'après (20), devient

$$\left(\frac{\Psi}{\Omega}\right)^3 = F^2, \quad \text{d'où} \quad \Phi_{0,0} = \Phi_{1,1} = \Phi_{2,2} = F^{\frac{2}{3}}.$$

Passons aux équations (17) et remarquons d'abord que Ω et Π ne sont plus maintenant des fonctions de six variables, mais d'une seule qui est F, d'où résulte que :

$$\frac{d}{dU}\left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\rho}\right) = \left(\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dF}{dU}\right)\right) = \frac{d}{dU}\left[U\,\frac{d\Omega}{dF}\,\frac{dF}{d\rho}\right] = \frac{d\Omega}{dF}\,\frac{dF}{d\rho}.$$

Remplaçant donc ces dérivées par leurs valeurs dans la première (17), les $h'^2_{i,j}$ par zéro, si i est différent de j, les $h'^2_{i,i}$ par

$$h'^2_{i,i} = F\,\frac{\Omega}{\Psi}\,h'^2_i = F^{\frac{1}{3}}\,h'^2_i.$$

elle prend la forme

$$F\Omega\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right) + 2\,\frac{h'^2}{\varpi'}\,F\,\frac{d\Omega}{dF}\,\frac{dF}{d\rho} = \Psi F^{\frac{1}{3}}\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right) + \frac{1}{3}\,\Psi\,\frac{h'^2}{\varpi'}\,F^{-\frac{2}{3}}\,\frac{dF}{d\rho},$$

ou, en divisant par Ω et remplaçant $\frac{\Psi}{\Omega}$ par sa valeur, observant que les termes en $\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right)$ se détruisent, supprimant le facteur $\frac{h'^2}{\varpi'}$,

$$\frac{dF}{d\rho}\left(2\,\frac{F}{\Omega}\,\frac{d\Omega}{dF} - \frac{1}{3}\right) = 0. \tag{21}$$

Les trois équations (17) ne peuvent donc être satisfaites que par les solutions de l'équation

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{1}{6}\,\frac{dF}{F}, \tag{22}$$

ou par celles du système simultané

$$\frac{dF}{d\rho} = 0, \quad \frac{dF}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dF}{d\rho_2} = 0.$$

Dans le premier cas (22),

$$\Omega = C\sqrt[6]{F}, \quad \Psi = C\sqrt[6]{F^5}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le second, F est indépendant de ρ, ρ_1, ρ_2, c'est-à-dire constant; par suite, les paramètres $\Phi_{i,i}$ sont des constantes égales; nous verrons plus loin que le mode de transformation qui répond à cette hypothèse est insignifiant, en ce qu'il n'ajouterait aucun corps nouveau à ceux qu'on sait traiter directement.

Voyons enfin ce que donne l'équation (18). Comme

$$\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho}\right) = \mathrm{U}\frac{d\Omega}{d\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho} + \frac{d\Pi}{d\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho},$$

$$\left(\frac{d^2\mathcal{F}}{d\rho^2}\right) = \mathrm{U}\left[\frac{d\Omega}{d\mathrm{F}}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\rho^2} + \frac{d^2\Omega}{d\mathrm{F}^2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}\right)^2\right] + \frac{d\Pi}{d\mathrm{F}}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\rho^2} + \frac{d^2\Pi}{d\mathrm{F}^2}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}\right)^2,$$

le coefficient de U sera d'abord

$$\frac{h'^2}{\varpi'}\frac{d^2\Omega}{d\rho^2} + \frac{h_1'^2}{\varpi'}\frac{d^2\Omega}{d\rho_1^2} + \frac{h_2'^2}{\varpi'}\frac{d^2\Omega}{d\rho_2^2} + \frac{d\Omega}{d\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h'^2}{\varpi'}\right) + \frac{d\Omega}{d\rho_1}\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1'^2}{\varpi'}\right) + \frac{d\Omega}{d\rho_2}\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2'^2}{\varpi'}\right),$$

ou, en y remplaçant $\frac{h'^2}{\varpi'}$ par $\frac{h^2}{\varpi}$ qui lui est égal,

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{h^2}{\varpi}\frac{d\Omega}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{h_1^2}{\varpi}\frac{d\Omega}{d\rho_1}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{h_2^2}{\varpi}\frac{d\Omega}{d\rho_2}\right) = \frac{1}{\varpi}\mathrm{D}_1\Omega.$$

Puisque U est arbitraire, ce coefficient doit être nul. Donc

$$\mathrm{D}_1\Omega = \mathrm{D}_1\left(\sqrt[6]{\mathrm{F}}\right) = 0. \tag{23}$$

Quant au terme indépendant de U, et qui doit être également nul, il est composé en Π, comme le précédent en Ω. Donc

$$\mathrm{D}_1\Pi = 0.$$

D'autre part Π, comme nous l'avons vu, dépend, ainsi que Ω, de la seule fonction F, de sorte que Ω et Π sont fonctions l'une de l'autre. On a donc

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d\Pi}{d\Omega}\frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{d\Pi}{d\Omega}\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Pi}{d\Omega^2}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)^2,$$

$$\mathrm{D}_1\Pi = \frac{d\Pi}{d\Omega}\mathrm{D}_1\Omega - \frac{d^2\Pi}{d\Omega^2}\mathfrak{D}_1\Pi;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et puisque $D_1\Pi$ et $D_1\Omega$ sont nuls, que $\Theta_1\Pi$ ne saurait l'être, on a

$$\frac{d^2\Pi}{d\Omega^2} = 0, \quad \Pi = A\Omega + B.$$

Ceci donne à V la forme

$$V = (U + A)\Omega + B,$$

ou, en annulant les constantes, qu'on peut supposer renfermées dans U et V,

$$V = U\sqrt[6]{F}. \tag{24}$$

Ainsi les résultats de cette première intégration sont les suivants :

Les formules de transformation doivent être telles que, si l'on y regarde les nouvelles variables comme des paramètres, les surfaces représentées par ces formules sont orthogonales. Si on les regarde, au contraire, comme des fonctions des anciennes, leurs paramètres différentiels du premier ordre doivent être égaux et avoir pour valeur commune une fonction dont la racine sixième soit fonction isotherme, c'est-à-dire satisfasse à l'équation $D_1 = 0$.

Les deux fonctions V *et* U, *qui se transforment l'une dans l'autre, ont alors pour rapport cette fonction isotherme, et leurs paramètres différentiels du second ordre ont un rapport égal à la cinquième puissance de cette même fonction.*

Enfin, la transformation présente cette propriété, qu'un système quelconque de trois surfaces orthogonales se change en un système pareillement orthogonal.

Remarquons, en outre, qu'il existe une seconde solution dans laquelle la fonction F est une constante, mais cette solution est renfermée dans la précédente. Car F satisfait alors à l'équation $D_1(\sqrt[6]{F}) = 0$.

V — *Équations aux différences partielles du premier ordre.*

Nous avons obtenu, par ce qui précède, les équations aux différences partielles du premier ordre de la question. Elles sont au nombre de six,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

savoir :

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dx}\dfrac{dy'}{dx}+\dfrac{dx'}{dy}\dfrac{dy'}{dy}+\dfrac{dx'}{dz}\dfrac{dy'}{dz}=0, \\ \dfrac{dx'}{dx}\dfrac{dz'}{dx}+\dfrac{dx'}{dy}\dfrac{dz'}{dy}+\dfrac{dx'}{dz}\dfrac{dz'}{dz}=0, \\ \dfrac{dy'}{dx}\dfrac{dz'}{dx}+\dfrac{dy'}{dy}\dfrac{dz'}{dy}+\dfrac{dy'}{dz}\dfrac{dz'}{dz}=0, \\ \left(\dfrac{dx'}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dx'}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dx'}{dz}\right)^2=\left(\dfrac{dy'}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dy'}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dy'}{dz}\right)^2 \\ \qquad\qquad =\left(\dfrac{dz'}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz'}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dz'}{dz}\right)^2=f^2. \end{cases}$$

en désignant pour plus de simplicité $\sqrt[3]{F}$ par f. f doit en outre satisfaire à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2(\sqrt{f})}{dx^2}+\frac{d^2(\sqrt{f})}{dy^2}+\frac{d^2(\sqrt{f})}{dz^2}=0.$$

Mais, ainsi que nous le reconnaîtrons plus tard, cette équation n'est qu'une conséquence des premières, et n'apporte aucune condition restrictive.

L'intégration du système (25) présenterait probablement d'assez grandes difficultés; mais les équations (24), (25), chap. II, § VII, puis (16), chap. II, § III, expriment les mêmes conditions que ce système, et comme, quoique plus nombreuses et d'un ordre plus élevé, elles sont d'une nature plus facile à traiter, ce sont elles que nous emploierons dans la suite. Il faut, auparavant, y remplacer ρ, ρ_1, ρ_2 par x', y', z', puis h, h_1, h_2 par f, et leurs inverses par $\Phi=\frac{1}{f}$. Celles qu'on obtient ainsi sont des quatre formes :

$$(26)\quad \frac{d^2\Phi}{dx'\,dy'}=\frac{2}{\Phi}\frac{d\Phi}{dx'}\frac{d\Phi}{dy'},$$

$$(27)\quad \frac{d}{dx'}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{dx'}\right)+\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\Phi}\frac{d\Phi}{dy'}\right)+\frac{1}{\Phi^2}\left(\frac{d\Phi}{dz'}\right)^2=0,$$

$$(28)\quad \frac{d^2x}{dx'\,dy'}+\frac{1}{f}\left(\frac{df}{dy'}\frac{dx}{dx'}+\frac{df}{dx'}\frac{dx}{dy'}\right)=0,$$

$$(29)\quad \frac{d^2x}{dx'^2}+\frac{1}{f}\frac{df}{dx'}\frac{dx}{dx'}=\frac{1}{f}\left(\frac{df}{dy'}\frac{dx}{dy'}+\frac{df}{dz'}\frac{dx}{dz'}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les six premières donneront Φ ou f, qu'on substituera dans les six dernières, et celles-ci feront alors connaître x, y, z en fonction de x', y', z' et inversement, ce qui est le but à atteindre.

VI. — *Intégration de ce nouveau système.*

Deux des équations (26) s'écrivent :

$$\frac{\frac{d}{dx'}\left(\frac{d\Phi}{dy'}\right)}{\left(\frac{d\Phi}{dy'}\right)} = \frac{2}{\Phi}\frac{d\Phi}{dx'}, \quad \frac{\frac{d}{dz'}\left(\frac{d\Phi}{dy'}\right)}{\frac{d\Phi}{dy'}} = \frac{2}{\Phi}\frac{d\Phi}{dz'}.$$

Elles montrent que la fonction $\log\left(\frac{d\Phi}{dy'}\right) - \log(\Phi^2)$ est indépendante à la fois de x' et de z'. Donc

$$-\frac{1}{\Phi^2}\frac{d\Phi}{dy'} = \frac{df}{dy'} = \varphi(y'),$$

d'où résulte

$$\frac{df}{dx'} = f(x'), \quad \frac{df}{dy'} = \varphi(y'), \quad \frac{df}{dz'} = \psi(z'),$$

$f(x')$, $\varphi(y')$, $\psi(z')$ étant trois arbitraires que les équations (27) vont déterminer. Elles donnent en effet

$$\frac{d}{dx'}[\Phi f(x')] + \frac{d}{dy'}[\Phi\varphi(y')] = \Phi^2\psi(z'),$$

ou bien

$$f'(x') + \varphi'(y') = \Phi[f(x')^2 + \varphi(y')^2 + \psi(z')^2];$$

et on en conclut

$$f'(x') + \varphi'(y') = \varphi(y') + \psi'(z') = \psi'(z') + f'(x');$$

d'où résulte que chacune de ces trois dérivées a une même valeur qui ne saurait être autre chose qu'une constante a. Il s'ensuit alors

$$f(x') = a(x' + \alpha), \quad \varphi(y') = a(y' + \beta), \quad \psi(z') = a(z' + \gamma),$$

α, β, γ étant des constantes qu'on peut annuler par le transport des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

axes. Cela fait, on aura

$$2a = a^2 \Phi (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

ou, en représentant $x'^2 + y'^2 + z'^2$ par R'^2,

$$F = \frac{a}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{a}{2} R'^2. \tag{30}$$

Occupons-nous maintenant des équations (28). La première devient, par cette valeur de f,

$$\frac{d^2 x}{dx'\, dy'} = \frac{1}{R'^2}\left(2x' \frac{dx}{dy'} + 2y' \frac{dx}{dx'}\right).$$

Prenons pour variables

$$\xi = x'^2, \quad \eta = y'^2, \quad \zeta = z'^2,$$

d'où résultent

$$\frac{dx}{dx'} = 2x' \frac{dx}{d\xi}, \quad \frac{dx}{dy'} = 2y' \frac{dx}{d\eta}, \quad \frac{d^2 x}{dx'\, dy'} = 4x'y' \frac{d^2 x}{d\xi\, d\eta},$$

nous aurons

$$(\xi + \eta + \zeta) \frac{d^2 x}{d\xi\, d\eta} + \frac{dx}{d\xi} + \frac{dx}{d\eta} = 0.$$

Cette équation et une autre semblable, écrites sous les formes

$$\frac{d}{d\eta}\left[(\xi + \eta + \zeta)\frac{dx}{d\xi} + x\right] = 0, \qquad \frac{d}{d\zeta}\left[(\xi + \eta + \zeta)\frac{dx}{d\xi} + x\right] = 0,$$

montrent que la fonction

$$(\xi + \eta + \zeta)\frac{dx}{d\xi} + x = \frac{R'^2}{2x'} \frac{dx}{dx'} + x$$

ne dépend que de x'. Donc

$$R'^2 \frac{dx}{dx'} + 2xx' = \theta(x'), \quad R'^2 \frac{dx}{dy'} + 2xy' = \varpi(y'), \quad R'^2 \frac{dx}{dz'} + 2xz' = \chi(z'),$$

θ, ϖ, χ étant de nouvelles arbitraires. Ajoutons ces trois équations, respectivement multipliées par dx', dy', dz', et posons

$$\omega = \int \theta(x')\, dx' + \int \varpi(y')\, dy' + \int \chi(z')\, dz',$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il viendra

$$R'^2 dx + x(2x'\,dx' + 2y'\,dy' + 2z'\,dz') = R'^2\,dx + x\,dR'^2 = d(R'^2 x) = d\omega,$$

et par conséquent

$$x = \frac{\omega}{R'^2}, \quad y = \frac{\omega_1}{R'^2}, \quad z = \frac{\omega_2}{R'^2}. \tag{31}$$

Les équations (29) vont enfin déterminer ω, ω_1, ω_2. A cause de

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{1}{R'^2}\frac{d\omega}{dx'} - \frac{2\omega x'}{R'^4}, \quad \frac{d^2x}{dx'^2} = \frac{1}{R'^2}\frac{d^2\omega}{dx'^2} - \frac{4x'}{R'^4}\frac{d\omega}{dx'} + 8\frac{\omega x'^2}{R'^6} - \frac{2\omega}{R'^4}.$$

elles donnent

$$\frac{d^2\omega}{dx'^2} = \frac{2}{R'^2}\left(x'\frac{d\omega}{dx'} + y'\frac{d\omega}{dy'} + z'\frac{d\omega}{dz'}\right), \tag{32}$$

et on obtiendrait visiblement la même chose pour $\frac{d^2\omega}{dy'^2}\,\frac{d^2\omega}{dz'^2}$. Donc

$$\frac{d^2\omega}{dx'^2} = \frac{d^2\omega}{dy'^2} = \frac{d^2\omega}{dz'^2},$$

et comme ces trois dérivées ne sont fonctions chacune que d'une variable différant de l'une à l'autre, elles ne peuvent être égales sans être constantes; donc

$$\frac{d\omega}{dx'} = \theta(x') = 2mx' + n, \quad \frac{d\omega}{dy'} = \varpi(y') = 2my' + n_1, \quad \frac{d\omega}{dz'} = \chi(z') = 2mz' + n_2,$$

$$\omega = mR'^2 + nx' + n_1 y' + n_2 z' + p.$$

x, y, z se réduisent donc aux formes

$$x = m + \frac{nx' + n_1 y' + n_2 z' + p}{R'^2},$$

$$y = m' + \frac{n'x' + n'_1 y' + n'_2 z' + p'}{R'^2},$$

$$z = m'' + \frac{n''x' + n''_1 y' + n''_2 z' + p''}{R'^2}.$$

Si on substitue dans le second membre de (32), qui doit être égal à m, on trouve $p = 0$. De même p' et p'' sont nuls. On peut en outre annu-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ler m, m', m'', cela ne revient qu'à transporter les axes parallèlement à eux-mêmes. Enfin, en substituant dans les équations (25), on reconnaît que les constantes n satisfont aux relations

$$\left\{\begin{array}{c} nn' + n_1 n'_1 + n_2 n'_2 = 0, \quad nn'' + n_1 n''_1 + n_2 n''_2 = 0, \quad n' n'' + n'_1 n''_1 + n'_2 n''_2 = 0, \\ n^2 + n_1^2 + n_2^2 = n'^2 + n'^2_1 + n'^2_2 = n''^2 + n''^2_1 + n''^2_2 = \frac{4}{a^2}, \end{array}\right.$$

lesquelles montrent que ces constantes multipliées par $\frac{a}{2}$ sont les cosinus des angles que trois axes rectangulaires font avec trois autres également rectangulaires. On pourra donc toujours, par la rotation des axes, réduire x, y, z aux formes

$$(33) \qquad x = \frac{c^2 x'}{R'^2}, \quad y = \frac{c^2 y'}{R'^2}, \quad z = \frac{c^2 z'}{R'^2},$$

d'où on conclut, en posant $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$(34) \qquad RR' = c^2,$$

puis

$$x' = \frac{R'^2 x}{c^2} = \frac{c^4 x}{c^2 R^2} = \frac{c^2 x}{R^2},$$

c'est-à-dire

$$(35) \qquad x' = \frac{c^2 x}{R^2}, \quad y' = \frac{c^2 y}{R^2}, \quad z' = \frac{c^2 z}{R^2}.$$

Ce sont les formules de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Elles représentent trois sphères ayant leurs centres sur les trois axes, et par conséquent orthogonales, puisqu'en chaque point commun les rayons forment un trièdre trirectangle. Les coefficients différentiels du premier ordre sont égaux; car, de

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{c^2}{R^2} - \frac{2c^2 x^2}{R^4}, \quad \frac{dx'}{dy} = -\frac{2c^2 xy}{R^4}, \quad \frac{dx'}{dz} = -\frac{2c^2 xz}{R^4},$$

résulte

$$-\mathfrak{D}_1 x' = \frac{c^4}{R^4} - \frac{4c^4 x^2}{R^6} + \frac{4c^4 x^2}{R^6} = \frac{c^4}{R^4} = f^2.$$

Enfin nous n'avons fait aucun usage jusqu'ici de l'équation du second ordre en $\sqrt{f}$; et il est facile de s'apercevoir qu'elle est identiquement

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

satisfaite, car on a

$$\sqrt{f} = \frac{c}{R} \quad \text{et} \quad D_1\left(\frac{1}{R}\right) = 0.$$

Nous avons, dans tout ceci, négligé la solution $f = \text{const.}$ Voyons maintenant ce qu'elle peut fournir. Il suit des équations (28) et (29), réduites par cette hypothèse à $\frac{d^2x}{dx'^2} = 0$, $\frac{d^2x}{dx'\,dy'} = 0$, que les x, y, z doivent être fonctions linéaires des x', y', z', et les coefficients de ces fonctions sont assujettis aux conditions trouvées ci-dessus pour les n. Ainsi cette solution consiste à réduire les dimensions du corps dans un rapport constant, ainsi que les quantités de chaleur en chaque point, puis à faire tourner les axes. Elle indique donc l'existence de la similitude calorifique, mais ne permettrait de traiter aucun corps nouveau. En résumant donc notre recherche, nous conclurons que :

La seule déformation des figures qui permette de résoudre, d'une manière générale, par les mêmes formules, les questions relatives à la distribution de la chaleur, dans les corps qu'elle fait se correspondre, est la déformation par rayons vecteurs réciproques.

VII. — *Exception relative aux corps cylindriques.*

Tout ce qui précède ne s'applique qu'aux corps qui ne présentent aucune circonstance particulière, et pourrait cesser d'être vrai dans certains cas. En d'autres termes, si la déformation par rayons réciproques est la seule possible, tant qu'on laisse au corps toute sa généralité, il en peut être autrement pour telle ou telle classe de corps, lorsqu'ils présentent une disposition calorifique convenable.

Considérons, par exemple, un cylindre entretenu à une température qui ne varie que d'une arête à l'autre : il est facile de voir que les conditions du cas précédent subsisteront; mais comme alors V et U ne dépendront que de deux variables, il en résultera de notables simplifications. Sans reprendre les calculs, il est facile de voir que ρ, ρ_1 étant deux cylindres orthogonaux, dont l'équation finie pourra toujours être prise sous la forme

$$\rho_1 + \rho_2\sqrt{-1} = f(x + y\sqrt{-1}),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une transformation renfermée dans la formule

$$x' + y'\sqrt{-1} = \varphi(x + y\sqrt{-1}),$$

les changera en deux autres cylindres orthogonaux

$$\rho + \rho_1\sqrt{-1} = \psi(x + y\sqrt{-1}).$$

Si on calcule alors D'_2V, on voit bientôt qu'il se transforme à un facteur près en D_2V, c'est-à-dire qu'une fonction V possède, à un facteur près, le même paramètre différentiel du second ordre, soit qu'on la regarde comme fonction du point M, ou du point M' qui s'en déduit par la transformation φ; et, par suite, étant connu l'état thermique d'un cylindre entretenu à sa surface à des températures constantes qui ne varient que d'une génératrice à l'autre, les mêmes formules représenteront sans aucun changement celui de tout cylindre déduit du premier par une transformation de la forme $x' + y'\sqrt{-1} = \varphi(x + y\sqrt{-1})$. La seule condition est que φ soit ce que M. Cauchy appelait une fonction monogène.

VIII. — *Digression relative à une propriété de la déformation par rayons réciproques.*

Nous avons eu occasion de reconnaître, dans la recherche précédente, que trois surfaces orthogonales étant transformées par rayons vecteurs réciproques se changent en trois autres surfaces orthogonales. C'est là une propriété spéciale à ce mode de déformation, comme nous allons le démontrer.

Conservons nos notations. Il suffira, pour exprimer l'orthogonalité des surfaces (3), § II, d'écrire trois équations, telles que

$$\frac{dx'}{d\rho}\frac{dx'}{d\rho_1} + \frac{dy'}{d\rho}\frac{dy'}{d\rho_1} + \frac{dz'}{d\rho}\frac{dz'}{d\rho_1} = 0;$$

et, si on suppose les x' exprimés en x par les équations (1), on mettra aisément cette équation sous la forme

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi'_{0,2}\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1} + \Phi'_{1,1}\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1} + \Phi'_{2,2}\frac{dz}{d\rho}\frac{dz}{d\rho_1} + \Phi'_{0,1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right)\\ &\qquad + \Phi'_{0,2}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dz}{d\rho_1} + \frac{dz}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right) + \Phi'_{1,2}\left(\frac{dy}{d\rho}\frac{dz}{d\rho_1} + \frac{dz}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

où l'on a posé

$$\Phi'_{0,0} = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)^2, \quad \Phi'_{0,1} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi_2}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy}, \ldots$$

Les surfaces (2) étant supposées orthogonales, les dérivées sont assujetties à trois équations telles que

$$\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1} + \frac{dz}{d\rho}\frac{dz}{d\rho_1} = 0,$$

au moyen desquelles nous pourrons déterminer les $\frac{dz}{d\rho}$. Nous trouverons ainsi

$$\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 = -\frac{g_1 g_2}{g}, \quad \left(\frac{dz}{d\rho_1}\right)^2 = -\frac{g_2 g}{g_1}, \quad \left(\frac{dz}{d\rho_2}\right)^2 = -\frac{g g_1}{g_2},$$

en posant

$$g = \frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}, \quad g_1 = \frac{dx}{d\rho_2}\frac{dx}{d\rho} + \frac{dy}{d\rho_2}\frac{dy}{d\rho}, \quad g_2 = \frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}.$$

Posons encore

$$\Phi'_{0,0}\frac{dy}{d\rho_i} + \Phi'_{1,1}\frac{dx}{d\rho_i} = \mathrm{P}_i,$$

et observons que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1\frac{dz}{d\rho} + \mathrm{P}\frac{dz}{d\rho_1} &= \mathrm{P}_1\sqrt{\frac{g_1 g_2}{-g}} + \mathrm{P}\sqrt{\frac{g g_2}{-g_1}} \\ &= \sqrt{g g_1 g_2}\left(-\frac{\mathrm{P}_1}{g} - \frac{\mathrm{P}}{g_1}\right) = -\frac{g_2}{\sqrt{g g_1 g_2}}(\mathrm{P}g + \mathrm{P}_1 g_1),\end{aligned}$$

l'équation (36), où l'on substituera les valeurs des dérivées partielles de z, deviendra

$$\begin{aligned}&\left(\Phi'_{0,0} - \Phi'_{2,2}\right)\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1} + \left(\Phi'_{1,1} - \Phi'_{2,2}\right)\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1} \\ &\qquad + \Phi'_{0,1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right) = \frac{g_2}{\sqrt{g g_1 g_2}}(\mathrm{P}g + \mathrm{P}_1 g_1).\end{aligned}$$

Joignons à cette équation une autre semblable

$$\begin{aligned}&\left(\Phi'_{0,0} - \Phi'_{2,2}\right)\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2} + \left(\Phi'_{1,1} - \Phi'_{2,2}\right)\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2} \\ &\qquad + \Phi'_{0,1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}\right) = \frac{g_1}{\sqrt{g g_1 g_2}}(\mathrm{P}g + \mathrm{P}_2 g_2),\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et éliminons $\Phi'_{0,1}$ entre elles, en les retranchant, après les avoir convenablement multipliées, le coefficient de $\Phi'_{0,0} - \Phi'_{2,2}$ sera

$$\frac{dx}{d\rho}\left[\frac{dx}{d\rho_1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}\right)-\frac{dx}{d\rho_2}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right)\right]$$
$$=\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}-\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right).$$

En y permutant x et y, on aura celui de $\Phi'_{1,1} - \Phi'_{2,2}$. Au second membre, le coefficient de $\frac{\mathrm{P}g}{\sqrt{gg_1g_2}}$ sera

$$g_2\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}\right)-g_1\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right)$$
$$=\frac{dx}{d\rho}\left[\frac{dy}{d\rho_2}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}\right)-\frac{dy}{d\rho_1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}\right)\right]$$
$$+\frac{dy}{d\rho}\left[\frac{dx}{d\rho_2}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}\right)-\frac{dx}{d\rho_1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}\right)\right]$$
$$=\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\right]\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}-\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right).$$

Enfin, les termes en P_1, P_2, quand on y néglige le facteur $\frac{g_1g_2}{\sqrt{gg_1g_2}}$, donnent

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}\right)-\mathrm{P}_2\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right)$$
$$=\Phi'_{1,2}\left[\frac{dy}{d\rho_1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}\right)-\frac{dy}{d\rho_2}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right)\right]$$
$$+\Phi'_{0,2}\left[\frac{dx}{d\rho_1}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}\right)-\frac{dx}{d\rho_2}\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\right)\right]$$
$$=\left(\Phi'_{1,2}\frac{dy}{d\rho}-\Phi'_{0,2}\frac{dx}{d\rho}\right)\left(\frac{dx}{d\rho_2}\frac{dy}{d\rho_1}-\frac{dy}{d\rho_2}\frac{dx}{d\rho_1}\right).$$

Ainsi $\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}-\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}$ est facteur commun, et, si on le supprime, il reste

$$(\Phi'_{0,0}-\Phi'_{2,2})\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2-(\Phi'_{1,1}-\Phi'_{2,2})\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\sqrt{gg_1g_2}}\left\{g_1g_2\left(\Phi'_{0,2}\frac{dx}{d\rho}-\Phi'_{1,2}\frac{dy}{d\rho}\right)\right.$$
$$\left.+g\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\right]\left(\Phi'_{1,2}\frac{dy}{d\rho}+\Phi'_{0,2}\frac{dx}{d\rho}\right)\right\}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La quantité entre crochets, décomposée en deux termes, l'un en $\Phi'_{0,2}$, l'autre en $\Phi'_{1,2}$, présente encore des réductions qu'il suffira de faire pour le second de ces termes, puisque rien ne change quand on permute x, y et $\Phi'_{1,2}$, $-\Phi'_{0,2}$. Le terme en $\Phi'_{1,2}$ est

$$\Phi'_{1,2}\frac{dy}{d\rho}\left\{\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2-\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\right]\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}\right)\left(\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2}\right)\right\}$$
$$=\Phi'_{1,2}\frac{dy}{d\rho}\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}-\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\left(2\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho}\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right)\right];$$

on obtient donc enfin

$$\sqrt{gg_1g_2}\left[\left(\Phi'_{0,0}-\Phi'_{2,2}\right)\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2-\left(\Phi'_{1,1}-\Phi'_{2,2}\right)\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\right]$$
$$=\Phi'_{1,2}\frac{dy}{d\rho}\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}-\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}+2\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho}\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right)\right]$$
$$+\Phi'_{0,2}\frac{dx}{d\rho}\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2\left(2\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}\right)-\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right.$$
$$\left.+\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho}\left(\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}\right)\right],$$

qui s'écrit encore, en représentant, pour abréger, par ξ et η les produits $\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2}$, $\frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2}$,

$$\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2\left\{\sqrt{gg_1g_2}\left[\left(\Phi'_{0,0}-\Phi'_{2,2}\right)-\eta\Phi'_{1,2}\right]-\Phi'_{0,2}\left[2\xi+\eta\left(\frac{\frac{dx}{d\rho}}{\frac{dy}{d\rho}}+\frac{\frac{dx}{d\rho_1}}{\frac{dy}{d\rho_1}}+\frac{\frac{dx}{d\rho_2}}{\frac{dy}{d\rho_2}}\right)\right]\right\}$$
$$=\left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2\left\{\sqrt{gg_1g_2}\left[\left(\Phi'_{1,1}-\Phi'_{2,2}\right)-\xi\Phi'_{0,2}\right]-\Phi'_{1,2}\left[2\eta+\xi\left(\frac{\frac{dy}{d\rho}}{\frac{dx}{d\rho}}+\frac{\frac{dy}{d\rho_1}}{\frac{dx}{d\rho_1}}+\frac{\frac{dy}{d\rho_2}}{\frac{dx}{d\rho_2}}\right)\right]\right\}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette équation fait connaître le rapport de $\frac{dx}{d\rho}$ à $\frac{dy}{d\rho}$ au moyen d'expressions symétriques par rapport aux dérivées partielles des variables x, y; d'où il résulte que, si on était parti de deux autres équations, on eût obtenu les mêmes valeurs pour les trois rapports. Ainsi :

$$\frac{\frac{dx}{d\rho}}{\frac{dy}{d\rho}} = \frac{\frac{dx}{d\rho_1}}{\frac{dy}{d\rho_1}} = \frac{\frac{dx}{d\rho_2}}{\frac{dy}{d\rho_2}}.$$

Or, ces égalités sont impossibles, car on sait que

$$\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_1} - \frac{dx}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho} = \frac{h_2}{hh_1}\frac{dz}{d\rho_2}.$$

Il faut donc que, dans l'équation précédente et ses semblables, les facteurs symétriques soient nuls. Les équations qui en résultent

$$\sqrt{gg_1g_2}(\Phi'_{2,2} - \Phi'_{0,0}) + \eta\,\Phi'_{1,2} + \Phi'_{0,2}\left[2\xi + \eta\left(\frac{\frac{dx}{d\rho}}{\frac{dy}{d\rho}} + \frac{\frac{dx}{d\rho_1}}{\frac{dy}{d\rho_1}} + \frac{\frac{dx}{d\rho_2}}{\frac{dy}{d\rho_2}}\right)\right] = 0$$

doivent avoir lieu, quelles que soient les surfaces orthogonales (2), c'est-à-dire quelles que soient les dérivées $\frac{dx}{d\rho}\frac{dy}{d\rho}$; et comme les trois termes dont se compose l'expression ci-dessus ne sauraient ni se réduire les uns les autres ni être nuls séparément, il faut que leurs coefficients le soient. Donc

$$\Phi'_{0,0} = \Phi'_{2,2}, \quad \Phi_{1,2} = 0, \quad \Phi'_{0,2} = 0,$$

et, en somme,

$$(37) \qquad \Phi'_{0,0} = \Phi'_{1,1} = \Phi'_{2,2}, \quad \Phi'_{0,1} = 0, \quad \Phi'_{0,2} = 0, \quad \Phi'_{1,2} = 0.$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'orthogonalité des surfaces (3). Nous les échangerons contre d'autres équivalentes, mais plus faciles à interpréter. Reprenons, pour cela, le déterminant F, § II; son carré, effectué par colonnes, a précisément pour éléments les $\Phi'_{i,j}$, il est donc égal à $\Phi'^{3}_{0,0}$. Si maintenant nous ré-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

solvons par rapport aux dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi_1}{dx}$, $\frac{d\varphi_2}{dx}$ les trois équations $\Phi'_{0,0} = K$, $\Phi'_{0,1} = 0$, $\Phi'_{0,2} = 0$, où l'on suppose les premiers membres remplacés par leurs valeurs, et où K est la valeur commune à $\Phi'_{0,0}$, $\Phi'_{1,1}$, $\Phi'_{2,2}$, on aura K^3 pour dénominateur commun et le numérateur de chaque inconnue sera égal au produit par K^2 du coefficient du terme identique à l'inconnue dans le déterminant F. Cela donne les neuf équations analogues à

$$K \frac{d\varphi}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dy} & \frac{d\varphi_2}{dy} \\ \frac{d\varphi_1}{dz} & \frac{d\varphi_2}{dz} \end{vmatrix}.$$

Que maintenant on effectue le déterminant F en l'ordonnant par rapport aux éléments d'une colonne, et en tenant compte de ces relations, on trouvera

$$\Phi_{0,0} = \Phi_{1,1} = \Phi_{2,2} = K^2 = F^{\frac{4}{3}}.$$

Qu'on effectue de même le déterminant nul formé en répétant deux fois la même colonne dans F, on aura

$$\Phi_{0,1} = \Phi_{0,2} = \Phi_{1,2} = 0.$$

Donc les formules de transformation (1), en y regardant les nouvelles variables comme des constantes, doivent représenter des surfaces orthogonales, et ces nouvelles variables considérées comme fonctions des anciennes doivent avoir des paramètres différentiels de premier ordre égaux. Or, nous avons vu ci-dessus que les seules formules satisfaisant à ces conditions sont celles de la similitude et de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Donc :

Parmi tous les modes de transformation consistant à faire correspondre un point à un point, les seuls qui puissent changer un système de trois surfaces orthogonales en un autre système de surfaces orthogonales sont les transformations par rayons réciproques, et par similitude, ou rayons proportionnels.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IX. — *Généralisation des questions précédentes.*

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre III, les fonctions $D_m V$ sont des éléments caractéristiques de la fonction V, et sont par là propres à figurer comme premiers membres d'équations dans les théories de la mécanique et de la physique mathématique; si, jusqu'ici, le seul de ces paramètres qui s'y soit introduit est $D_1 V$, cela tient à sa forme linéaire, qui doit d'autant mieux convenir à ces sciences que leurs formules, n'étant qu'une première approximation, sont elles-mêmes linéaires. Il est donc fort possible que l'étude de nouveaux phénomènes ou celle des perturbations des phénomènes déjà soumis au calcul conduise à la considération des autres paramètres.

On n'en pourrait pas dire autant des paramètres $\Theta_m V$ qui paraissent uniquement destinés à définir la nature des surfaces isodèles. En effet, si U est une fonction de V, $U = f(V)$, de sorte que

$$\frac{dU}{dx_i} = \frac{dU}{dV}\frac{dV}{dx_i}, \quad \frac{d^2U}{dx_i\,dx_j} = \frac{dU}{dV}\frac{d^2V}{dx_i\,dx_j} + \frac{d^2U}{dV^2}\frac{dV}{dx_i}\frac{dV}{dx_j};$$

quand on substituera ces valeurs dans les déterminants dont se compose $\Theta_m U$, on pourra ne tenir compte que de la première partie des dérivées secondes, qui reproduira $\Theta_m V$ multiplié par $m+1$ fois le facteur $\frac{dU}{dV}$ entrant dans tous les éléments. Car la seconde partie des dérivées secondes de U donnerait, outre ce premier résultat, des déterminants dans lesquels une ou plusieurs colonnes ne différeraient de la première que par un facteur multipliant tous leurs éléments, ce qui montre que tous ces déterminants seraient nuls. On a donc

$$\Theta_m[f(V)] = \left(\frac{df}{dV}\right)^{m+1} \Theta_m V,$$

c'est-à-dire que, si un agent physique V pouvait satisfaire à une équation telle que $\Theta_m V = 0$, la fonction qui la représenterait ne serait pas déterminée, puisque toute fonction de cette fonction conviendrait également bien, pourvu qu'elle satisfît aux conditions imposées aux limites, ce qu'on pourrait toujours obtenir.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il en est tout autrement des équations $D_m V = 0$; car si on fait dans le premier membre les substitutions que nous venons d'indiquer, puis les mêmes décompositions de déterminants, le premier est $\left(\frac{df}{dV}\right)^m D_m V$, ceux dont deux ou plusieurs colonnes sont formées des seconds termes des dérivées $\frac{d^2 U}{dx_i\, dx_j}$ sont nuls; mais ceux qui ne renferment qu'une de ces colonnes ne le sont pas, et il n'est pas difficile de les transformer dans les déterminants qui composent $\Theta_m V$. On a ainsi

$$D_m [f(V)] = \left(\frac{df}{dV}\right)^m D_m V - \left(\frac{df}{dV}\right)^{m-1} \frac{d^2 f}{dV^2} \Theta_m V,$$

et il ne suffit plus, par conséquent, que $D_m V$ soit nul pour que $D_m [f(V)]$ le soit aussi. Cette formule montre même à quels caractères doit satisfaire l'équation de la surface isodèle d'une fonction V dont le paramètre D_m est nul. En effet, λ étant la constante variable d'une famille de pareilles surfaces,

$$\lambda = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

V ne doit être fonction que de λ. Or, si l'on fait usage de la formule précédente, on aura

$$D_m V = \left(\frac{dV}{d\lambda}\right)^{m-1} \left(\frac{dV}{d\lambda} D_m \lambda - \frac{d^2 V}{d\lambda^2} \Theta_m \lambda\right) = 0.$$

Ainsi, $\frac{D_m \lambda}{\Theta_m \lambda} = \frac{\frac{d^2 V}{d\lambda^2}}{\frac{dV}{d\lambda}}$, et ne doit être par conséquent fonction que de λ. Si cela a lieu, on a

$$\frac{\frac{d^2 V}{d\lambda^2}}{\frac{dV}{d\lambda}} = F(\lambda), \quad \log \frac{dV}{d\lambda} = \int F(\lambda)\, d\lambda, \quad V = c \int e^{\int F(\lambda) d\lambda}\, d\lambda,$$

ce qui montre que V est bien déterminé sur chacune de ses surfaces isodèles. Ces formules sont la généralisation de celles dont M. Lamé a

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fait le fondement de ses beaux travaux sur la distribution de la chaleur dans les corps non cristallins.

Les détails qui précèdent donnent un certain intérêt à l'équation $D_m V = 0$, et s'il est très-possible que les équations de physique où pourra entrer ce paramètre soient réellement d'une forme beaucoup moins simple que celle-là, il n'en sera pas moins intéressant, ne fût-ce qu'au point de vue analytique, de chercher à traiter pour la fonction D_m, prise dans toute sa généralité, la question que nous venons de résoudre dans le cas de trois variables pour la fonction D_4.

X. — *Formation de l'équation entre les paramètres* D_m *des deux fonctions.*

Nous supposerons, comme précédemment, que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les variables relatives au point M', $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ celles qui sont relatives au point transformé M', les formules de transformation soient

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x'_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x'_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Nous appellerons encore $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ un système de coordonnées orthogonales du point M, liées aux x par

$$\rho_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \rho_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \rho_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ces mêmes quantités pourront être regardées comme coordonnées du point M', mais elles ne seront plus, pour ce point, variables orthogonales. Ceci posé, nous nous proposons de déterminer la transformation de telle sorte que, quelles que soient les surfaces f, à chaque fonction V des coordonnées ρ ou x du point M corresponde une fonction V du point M', satisfaisant aux conditions : 1° que la liaison de U à V dépende seulement de la nature de la transformation, 2° et que la même chose ait lieu pour le rapport des paramètres différentiels $\frac{D'_m U}{D_m V}$ de ces fonctions. Nous suivrons absolument la même marche que ci-dessus.

Les quantités différentielles du premier ordre qui déterminent la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nature de la transformation seront encore désignées par

$$\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\varphi_i}{dx_r} \frac{d\varphi_j}{dx_r}.$$

Nous avons vu (chap. II, § V) que $D_n V$ est égal au produit de ϖ^2 par un déterminant dont l'élément est

$$q_{i,i} = \frac{d^2 V}{d\rho_i^2} + 2 \frac{d \log h_i}{d\rho_i} \frac{dV}{d\rho_i} - \sum_{r=1}^{r=n} \frac{h_r^2}{h_i^2} \frac{d \log h_i}{d\rho_r} \frac{dV}{d\rho_r},$$

$$q_{i,j} = q_{j,i} = \frac{d^2 V}{d\rho_i d\rho_j} + \frac{d \log h_i}{d\rho_j} \frac{dV}{d\rho_i} + \frac{d \log h_j}{d\rho_i} \frac{dV}{d\rho_j}$$

et que $D_m V$ est la somme des produits des mineurs principaux d'ordre m de ce déterminant par les h_i^2, dont les indices sont ceux des lignes et des colonnes de ces mêmes mineurs. En transformant comme ci-dessus l'expression

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\rho_i}{dx_r} \frac{d\rho_j}{dx_r} = \begin{cases} 0 \ (i \gtrless j) \\ h_i^2 \ (i = j) \end{cases}$$

au moyen de l'identité

$$\frac{d\rho_i}{dx_r} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{d\rho_i}{dx'_s} \frac{d\varphi_s}{dx_r},$$

et tenant compte des valeurs de $\Phi_{i,j}$, on a

$$(38) \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{t=1}^{t=n} \Phi_{s,t} \frac{d\rho_i}{dx'_s} \frac{d\rho_j}{dx'_t} \begin{cases} 0 \ (i \gtrless j), \\ h_i^2 \ (i = j). \end{cases}$$

Et on voit en outre que le déterminant ϖ est le produit des suivants :

$$(39) \qquad \varpi' = \begin{vmatrix} \frac{d\rho_1}{dx'_1} & \frac{d\rho_1}{dx'_2} \cdots & \frac{d\rho_1}{dx'_n} \\ \frac{d\rho_2}{dx'_1} & \frac{d\rho_2}{dx'_2} \cdots & \frac{d\rho_2}{dx'_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\rho_n}{dx'_1} & \frac{d\rho_n}{dx'_2} \cdots & \frac{d\rho_n}{dx'_n} \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{d\varphi_1}{dx_2} \cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1} & \frac{d\varphi_2}{dx_2} \cdots & \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \frac{d\varphi_n}{dx_2} \cdots & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dont le dernier ne dépend que des $\Phi_{i,j}$. Car ces quantités sont les éléments de son carré effectué par lignes.

Ceci posé, l'équation entre V et U doit, par hypothèse, être de la forme

$$V = \mathcal{F}(U, \Phi_{1,1}, \Phi_{2,2}, \ldots, \Phi_{n,n}, \Phi_{1,2}, \ldots, \Phi_{n-1,n}), \tag{40}$$

et, en indiquant, comme ci-dessus, par un crochet, une dérivée prise par rapport à ρ_i, en supposant que U soit traité comme constant, il résulte de cette équation que

$$\frac{dV}{d\rho_i} = \frac{d\mathcal{F}}{dU}\frac{dU}{d\rho_i} + \left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right),$$

$$\frac{d^2V}{d\rho_i\,d\rho_j} = \frac{d\mathcal{F}}{dU}\frac{d^2U}{d\rho_i\,d\rho_j} + \frac{d^2\mathcal{F}}{dU^2}\frac{dU}{d\rho_i}\frac{dU}{d\rho_j} + \frac{d}{dU}\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right)\frac{dU}{d\rho_j} + \frac{d}{dU}\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho_j}\right)\frac{dU}{d\rho_i} + \left(\frac{d^2\mathcal{F}}{d\rho_i\,d\rho_j}\right),$$

ce qui substitué dans l'élément $q_{i,j}$ donne

$$\begin{cases} q_{i,i} = \dfrac{d\mathcal{F}}{dU}\dfrac{d^2U}{d\rho_i^2} + \dfrac{d^2\mathcal{F}}{dU^2}\left(\dfrac{dU}{d\rho_i}\right)^2 + 2\lambda_{i,i}\dfrac{dU}{d\rho_i} - \sum_{r=1}^{r=n}\nu_{i,r}\dfrac{dU}{d\rho_r} + \mu_{i,i}, \\ q_{i,j} = q_{j,i} = \dfrac{d\mathcal{F}}{dU}\dfrac{d^2U}{d\rho_i\,d\rho_j} + \dfrac{d^2\mathcal{F}}{dU^2}\dfrac{dU}{d\rho_i}\dfrac{dU}{d\rho_j} + \lambda_{i,j}\dfrac{dU}{d\rho_i} + \lambda_{j,i}\dfrac{dU}{d\rho_j} + \mu_{ij}, \end{cases} \tag{41}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\begin{cases} \mu_{i,i} = \left(\dfrac{d^2\mathcal{F}}{d\rho_i^2}\right) + 2\dfrac{d\log h_i}{d\rho_i}\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right) - \sum_{r=1}^{r=n}\dfrac{h_r^2}{h_i^2}\dfrac{d\log h_i}{d\rho_r}\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\rho_r}\right), \\ \mu_{i,j} = \mu_{j,i} = \left(\dfrac{d^2\mathcal{F}}{d\rho_i\,d\rho_j}\right) + \left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right)\dfrac{d\log h_i}{d\rho_i} + \left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\rho_j}\right)\dfrac{d\log h_j}{d\rho_i}, \\ \lambda_{j,i} = \dfrac{d}{dU}\left(\dfrac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right) + \dfrac{d\mathcal{F}}{dU}\dfrac{d\log h_i}{d\rho_i}, \\ \nu_{i,r} = \dfrac{d\mathcal{F}}{dU}\dfrac{h_r^2}{h_i^2}\dfrac{d\log h_t}{d\rho_r}. \end{cases} \tag{42}$$

Nous pourrons donc, par les formules (38) et (41), exprimer $D_m V$ au moyen de dérivées prises par rapport aux ρ, ceux-ci étant regardés comme fonctions des x', c'est-à-dire comme fournis par les équations

$$\rho_1 = \psi_1(x'_1 x'_2 \ldots x'_n), \quad \rho_2 = \psi_2(x'_1 x'_2 \ldots x'_n), \quad \rho_n = \psi_n(x'_1 x'_2 \ldots x'_n),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qu'on obtient en éliminant les x entre les deux systèmes primitifs, et qui représentent les surfaces non orthogonales transformées des surfaces $\rho_i = f_i$.

Maintenant, d'après les formules (34), (37), (39) des §§ VII, VIII, IX, chap. II, si l'on pose

$$\lambda_{j,i}^{(s)} = \lambda_{i,j}^{(s)} = \frac{1}{2}\left[\frac{d(k_{s,j}^2)}{d\rho_i} + \frac{d(k_{s,i}^2)}{d\rho_j} - \frac{d(k_{i,j}^2)}{d\rho_s}\right], \quad \theta_{i,j}^{(r)} = \theta_{j,i}^{(r)} = \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_{i,j}^{(s)} h_{r,s}^2,$$

on a

$$q'_{i,j} = \frac{d^2 U}{d\rho_i d\rho_j} - \sum_{r=1}^{r=n} \theta_{i,j}^{(r)} \frac{dU}{d\rho_r}, \quad D'_m U = \sum_{\rho} \sum_{\sigma} Q_{-\rho,-\sigma}^{(m)} \Pi_{-\rho,-\sigma}^{(m)},$$

et il s'agit de substituer toutes ces expressions dans la relation supposée entre les paramètres $D_m V$, $D'_m U$,

$$D_m V = D'_m U . \Psi(\Phi_{1,1}, \Phi_{2,2}, \ldots, \Phi_{n,n}, \Phi_{1,2}, \Phi_{n-1,n}),$$

et d'exprimer qu'elle doit avoir lieu pour toutes les valeurs possibles des dérivées des ρ, et quelle que soit la fonction U.

XI. — *Identification de l'équation précédente.*

Nous devons ordonner l'équation précédente par rapport aux dérivées de U, puis annuler tous les coefficients des termes qui les contiennent d'une manière différente; s'il était nécessaire de développer pour cela tous les déterminants des deux membres, les calculs seraient sans doute impraticables. Nous allons voir que, par un choix convenable des termes à considérer, on peut rendre ces calculs assez simples.

Observons que chaque déterminant composant $D_m V$ se décompose, après la substitution des $q_{i,j}$, en un premier dont l'élément serait le premier terme de $q_{i,j}$ (celui-là est du degré m par rapport aux dérivées secondes de U), puis en une somme de plusieurs autres, renfermant ces mêmes parties de $q_{i,j}$ dans certaines de leurs colonnes et les parties restantes dans les autres; de sorte que ces déterminants sont tous de degrés inférieurs à m par rapport aux dérivées secondes. $D'_m U$ au second membre peut se décomposer de la même manière. Donc les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

deux parties qui sont du degré m dans les deux membres doivent être séparément égales. En outre, cette égalité doit avoir lieu, quelles que soient les dérivées secondes $\frac{d^2U}{d\rho_i\, d\rho_j}$, et comme chaque déterminant du premier membre a un correspondant et un seul dans le second, qu'il ne peut y avoir de réductions qu'entre eux, puisque eux seuls dépendent des mêmes indices, il faut que leurs coefficients soient égaux; d'où

$$\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dU}\right)^m h^2_{r_1} h^2_{r_1} \ldots h^2_{r_m} = \Psi \Pi^{(m)}_{-\rho,-\rho}, \tag{43}$$

ρ désignant la combinaison de m indices, $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Les autres déterminants du $m^{ième}$ degré par rapport aux dérivées secondes n'existent que dans le second membre. Il faut donc que leurs coefficients soient nuls :

$$\Pi^{(m)}_{-\rho-,\sigma}. \tag{44}$$

De cette dernière équation, il est facile de conclure que tous les éléments non principaux $h^2_{r,s}$ du déterminant Π (§ VII, chap. II) sont nuls. En effet, choisissons parmi les déterminants (44) celui dans lequel la combinaison ρ et la combinaison σ ont les $m-1$ indices communs $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$; soient r_m et s les deux autres indices, ce déterminant contiendra un terme $h^2_{r_1,r_1}, h^2_{r_2,r_2}, \ldots, h^2_{r_{m-1}}, h^2_{r_m,s}$ qui sera seul de son espèce. Car tous les autres se déduisant de celui-ci par des permutations faites dans les seconds indices, ceux qui contiennent $h^2_{r_m,s}$ diffèrent par les $m-1$ premiers facteurs. D'ailleurs, les éléments principaux $h^2_{r,r}$ de Π sont des sommes de carrés, et ne sauraient être nuls, et puisque le déterminant d'ordre m considéré doit être nul, quels que soient les ρ, il faut que $h^2_{r_m,s}$ le soit. Donc

$$0 = h^2_{r,s} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\rho_r}{dx_i} \frac{d\rho_s}{dx_i} \quad (r \gtrless s);$$

et ceci montre d'abord que la transformation cherchée jouit de cette propriété qu'un système orthogonal quelconque se change en un système orthogonal.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il en résulte ensuite que les équations (43) se changent en

$$\left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathrm{U}}\right)^m h^2_{r_1} h^2_{r_2} \dots h^2_{r_m} = \Psi\, h^2_{r_1,r_1} h^2_{r_2,r_2} \dots h^2_{r_m,r_m};$$

le premier membre, quand on y met, pour les h_i^2, leurs valeurs, est

$$\left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathrm{U}}\right)^m \left(\sum_s \sum_t \Phi_{s,t} \frac{d\rho_{r_1}}{dx'_s} \frac{d\rho_{r_1}}{dx'_t}\right) \left(\sum_s \sum_t \Phi_{s,t} \frac{d\rho_{r_2}}{dx'_s} \frac{d\rho_{r_2}}{dx'_t}\right) \dots \left(\sum_s \sum_t \Phi_{s,t} \frac{d\rho_{r_m}}{dx'_s} \frac{d\rho_{r_m}}{dx'_t}\right)$$

$$= \left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathrm{U}}\right)^m \sum_{s_1,t_1} \sum_{s_2,t_2} \dots \sum_{s_m,t_m} \Phi_{s_1,t_1} \Phi_{s_2,t_2} \dots \Phi_{s_m,t_m} \frac{d\rho_{r_1}}{dx'_{s_1}} \frac{d\rho_{r_2}}{dx'_{s_2}} \dots \frac{d\rho_{r_m}}{dx'_{s_m}} \frac{d\rho_{r_1}}{dx'_{t_1}} \dots \frac{d\rho_{r_m}}{dx'_{t_m}}.$$

Il contient un terme en $\Phi^m_{s,t} \frac{d\rho_{r_1}}{dx'_s} \frac{d\rho_{r_2}}{dx'_s} \dots \frac{d\rho_{r_m}}{dx'_s} \frac{d\rho_{r_1}}{dx'_t} \frac{d\rho_{r_2}}{dx'_t} \dots \frac{d\rho_{r_m}}{dx'_t}$ qui ne se réduit avec aucun autre ni du premier, ni du second membre, quand s et i sont différents. Donc

$$\Phi_{s,t} = 0 \ (s \gtrless t);$$

et ceci exprime que *les formules de transformation, quand on regarde les nouvelles variables comme constantes, sont orthogonales.* En d'autres termes, *les nouvelles variables, regardées comme fonctions des anciennes, ont leurs surfaces isodèles orthogonales.*

L'équation (43) se réduit alors à

$$\left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathrm{U}}\right)^m \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_m} \Phi_{s_1,s_1} \Phi_{s_2,s_2} \dots \Phi_{s_m,s_m} \left(\frac{d\rho_{r_1}}{dx_{s_1}}\right)^2 \left(\frac{d\rho_{r_2}}{dx_{s_2}}\right)^2 \dots \left(\frac{d\rho_{r_m}}{dx_{s_m}}\right)^2$$

$$= \Psi\, h^2_{r_1,r_1} h^2_{r_2,r_2} \dots h^2_{r_m,r_m},$$

et, si on identifie les deux termes pour lesquels tous les s sont égaux, on a

$$\Psi = \Phi^m_{s,s} \left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathrm{U}}\right)^m.$$

Donc *tous les paramètres différentiels du premier ordre des nouvelles variables sont égaux.*

Leur valeur s'exprime au moyen du déterminant F, dont le carré

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vaut $\Phi^n_{s,s}$. On a donc

$$(45) \qquad \Phi_{1,1} = \Phi_{2,2} = \ldots = \Phi_{n,n} = \overset{2}{\mathrm{F}^n} = \frac{\overset{1}{\Psi^m}}{\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\mathrm{U}}\right)}; \quad h_i^2 = \overset{2}{\mathrm{F}^n} h_{i,i}^2.$$

Les conditions que nous venons d'obtenir suffisent pour rendre identiques les équations (44) et (45).

Considérons maintenant la seconde partie du développement. Elle contient, entre autres termes, un déterminant ayant pour éléments, dans $m-1$ colonnes, les dérivées secondes de U, et, dans une dernière, les produits de deux dérivées premières. Ces déterminants n'existent que dans le premier membre et ont en facteur un certain produit des h_i^2 multiplié par $\frac{d^2\mathcal{F}}{d\mathrm{U}^2}$. Par des raisons toutes semblables aux précédentes, on verra que

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{d\mathrm{U}^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{F} = \Theta\,\mathrm{U} + \Lambda,$$

Θ et Λ étant des fonctions des $\Phi_{i,j}$, et par conséquent de F seul. Ainsi $\mathcal{F}$ est une fonction linéaire de U.

XII. — *Suite du précédent.*

Parmi les déterminants qui subsistent encore dans le premier membre se trouvent ceux qui contiennent, dans $m-1$ colonnes, les dérivées secondes $\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_i\,d\rho_j}$, et, à la dernière, les quantités $\mu_{i,j}$ indépendantes des dérivées de U. Ordonnons ces déterminants par rapport aux $\mu_{i,j}$, et considérons seulement ceux de ces termes qui renferment un déterminant mineur principal désigné de celui qui aurait pour éléments les $\frac{n(n+1)}{2}$ dérivées secondes de U. Si ce mineur dépend, par exemple, des dérivées par rapport à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}$, il sera accompagné de $\mu_{m,m}, \mu_{m+1,m+1}, \ldots, \mu_{n,n}$, et comme il ne saurait se réduire avec d'autres, son coefficient sera nul, ce qui donne, en supprimant le facteur com-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mun $\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\mathrm{U}}\right)^{m-1} h_1^2 h_2^2 \cdots h_{m-1}^2$,

$$h_m^2 \mu_{m,m} + h_{m+1}^2 \mu_{m+1,m+1} + \ldots + h_n^2 \mu_{n,n} = 0;$$

un autre déterminant semblable donnerait

$$h_{m-1}^2 \mu_{m-1,m-1} + h_{m+1}^2 \mu_{m+1,m+1} + \ldots + h_n^2 \mu_{n,n} = 0;$$

on en conclut que toutes les expressions $h_i^2 \mu_{i,i}$ sont égales, et comme $n - m + 1$ d'entre elles ont une somme nulle, elles sont séparément nulles. En particulier, il en résulte $\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \mu_{i,i} = 0$; d'ailleurs $\mu_{i,i}$ est composé en $\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\rho_i}\right)$, $\left(\frac{d^2\mathcal{F}}{d\rho_i^2}\right)$ comme $q_{i,i}$ (chap. II, § IV) l'est en $\frac{d\mathrm{V}}{d\rho_i}$, $\frac{d^2\mathrm{V}}{d\rho_i^2}$; donc $\mathrm{D}_1(\mathcal{F}) = 0$, le crochet signifiant que U doit être traité comme une constante. Cette équation se décompose en $\mathrm{U}\,\mathrm{D}_1\Theta + \mathrm{D}_1\Lambda = 0$, et comme elle doit avoir lieu quel que soit U,

$$\mathrm{D}_1\Theta = 0, \quad \mathrm{D}_1\Lambda = 0. \tag{46}$$

On en déduit, comme précédemment,

$$\Lambda = \mathrm{A}\Theta + \mathrm{B},$$

puis

$$\mathrm{V} = \Theta\mathrm{U}. \tag{47}$$

Ainsi le rapport de V à U ne doit dépendre que de F, et satisfaire encore ici à l'équation $\mathrm{D}_1 = 0$.

Prenons maintenant les termes en $\mu_{i,j}$. Considérons les déterminants qui contiennent les $\frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho_i\,d\rho_j}$ à $m - 2$ de leurs colonnes, et les μ à deux autres. Ordonnons-les suivant les déterminants binaires qu'on peut former dans ces dernières colonnes, et prenons, parmi les termes qui en résultent, ceux qui renferment le déterminant principal d'ordre $m - 2$ dépendant des dérivées prises par rapport à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-2}$. La somme de ces termes devra être nulle, et, si on tient compte de ce que les $\mu_{i,i}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sont nuls, on trouve ainsi

$$h_{m-1}^2 h_m^2 \mu_{m-1,m}^2 + h_{m-1}^2 h_{m+1}^2 \mu_{m-1,m+1}^2 + \ldots + h_{n-1}^2 h_n^2 \mu_{n-1,n}^2 = 0.$$

Cette somme de carrés ne peut être nulle que si tous ses termes le sont; d'où $\mu_{i,j} = 0$.

XIII. — *Continuation du même sujet.*

Grâce à la nullité de $\frac{d^2\mathcal{F}}{dU^2}$ et des μ, les éléments $q_{i,i}$, $q_{i,j}$ de $D_m V$ éprouvent de grandes simplifications. On les écrit :

$$q_{i,i} = \Theta\left[\frac{d^2U}{d\rho_i^2} + 2\lambda'_{i,i}\frac{dU}{d\rho_i} - \sum_{r=1}^{r=n}\nu'_{ir}\frac{dU}{d\rho_r}\right], \quad q_{i,j} = \Theta\left[\frac{d^2U}{d\rho_i d\rho_j} + \lambda'_{i,j}\frac{dU}{d\rho_i} + \lambda'_{j,i}\frac{dU}{d\rho_j}\right],$$

avec

$$\lambda'_{i,j} = \frac{d\log(h_j\Theta)}{d\rho_i}, \quad \nu'_{ir} = \frac{h_r^2}{h_i^2}\frac{d\log h_i}{d\rho_r}.$$

En outre, les surfaces transformées étant orthogonales, les éléments $q'_{i,j}$ de $D'_m U$ deviennent, en tenant compte de (45),

$$q'_{i,i} = \frac{d^2U}{d\rho_i^2} + 2\frac{d\log\frac{h_i}{\sqrt[n]{F}}}{d\rho_i}\frac{dU}{d\rho_i} - \sum_{r=1}^{r=n}\frac{h_r^2}{h_i^2}\frac{d\log\frac{h_i}{\sqrt[n]{F}}}{d\rho_r}\frac{dU}{d\rho_r},$$

$$q'_{i,j} = \frac{d^2U}{d\rho_i d\rho_j} + \frac{d\log\frac{h_i}{\sqrt[n]{F}}}{d\rho_j}\frac{dU}{d\rho_i} + \frac{d\log\frac{h_j}{\sqrt[n]{F}}}{d\rho_i}\frac{dU}{d\rho_j}.$$

Représentons, pour abréger, par $p_{i,i}$ les termes de la parenthèse de $q_{i,i}$ qui renferment les dérivées premières de U, par $p'_{i,i}$ la partie correspondante de $q'_{i,i}$, et agissons comme nous l'avons fait au paragraphe précédent pour prouver la nullité des $\mu_{i,i}$, nous obtiendrons comme coefficients du déterminant principal dont les éléments sont $\frac{d^2U}{d\rho_i d\rho_j}$, les deux membres de l'équation

$$\Theta^m h_1^2 h_2^2 \ldots h_{m-1}^2 (h_m^2 p_{m,m} + h_{m+1}^2 p_{m+1,m+1} + \ldots + h_n^2 p_{n,n})$$
$$= \Psi h_{1,1}^2 h_{2,2}^2 \ldots h_{m-1,m-1}^2 (h_{m,m}^2 p'_{m,m} + h_{m+1,m+1}^2 p'_{m+1,m+1} + \ldots + h_{n,n}^2 p'_{n,n}),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou bien, en remplaçant les $h_{i,i}^2$ par leurs valeurs (45) et tenant compte de $\frac{\Theta^m}{\Psi} F^{\frac{2m}{n}} = 1$,

$$0 = h_m^2 (p_{m,m} - p'_{m,m}) + h_{m+1}^2 (p_{m+1,m+1} - p'_{m+1,m+1}) + \ldots + h_n^2 (p_{n,n} - p'_{n,n}),$$

ce qui entraîne, comme ci-dessus, à propos des $\mu_{i,i}$,

$$p_{i,i} = p'_{i,i}. \tag{48}$$

Nous conclurons, en particulier, de cette équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 p_{i,i} = \sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 p'_{i,i},$$

ou bien

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{2\, d\log(\Theta h_i)}{d\rho_i} \frac{dU}{d\rho_i} - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{r=1}^{r=n} h_r^2 \frac{d\log h_i}{d\rho_i} \frac{dU}{d\rho_r} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \frac{2\, d\log \frac{h_i}{\sqrt[n]{F}}}{d\rho_i} \frac{dU}{d\rho_i} - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{r=1}^{r=n} h_r^2 \frac{d\log \frac{h_i}{\sqrt[n]{F}}}{d\rho_i} \frac{dU}{d\rho_r}. \end{aligned} \right. \tag{49}$$

En prenant seulement les termes en $\frac{dU}{d\rho_i}$, on obtient

$$0 = 2 \frac{d\log\Theta}{d\rho_i} + \frac{2}{n} \frac{d\log F}{d\rho_i} - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{d\log F}{d\rho_i},$$

ou

$$\frac{d\log\Theta}{d\rho_i} = \frac{n-2}{2n} \frac{d\log F}{d\rho_i},$$

dont l'intégration conduit à

$$\Theta = C F^{\frac{n-2}{2n}}. \tag{50}$$

Ainsi, non-seulement les paramètres du premier ordre des nouvelles variables doivent être égaux, mais la puissance $\frac{n-2}{4}$ de leur com-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mune valeur doit satisfaire à l'équation $D_1 = 0$, condition qui, pour $m = 1$, $n = 3$, se réduit à celle qui a été trouvée précédemment.

Mais ici cette condition ne suffit plus. Car il faut satisfaire à chacune des équations (48) séparément, et l'une de ces équations, quand on y met pour $p_{i,i}$, $p'_{i,i}$ leurs valeurs, se décompose en plusieurs autres, parmi lesquelles celle qui provient du coefficient de $\frac{dU}{d\rho_i}$ est

$$2\frac{d\log\Theta}{d\rho_i} + \frac{1}{n}\frac{d\log F}{d\rho_i} = 0,$$

qui donne

$$\Theta = C' F^{-\frac{1}{2n}}.$$

Cette valeur, comparée à (49), exige $F = C$. Cette valeur de F identifie en effet les deux paramètres différentiels. Mais il suffit de jeter les yeux sur les équations (16) (chap. II) et de se rappeler le calcul du § VI du présent chapitre, dans le cas de f constant, pour conclure que la solution $F = \text{const.}$ correspond à la déformation par rayons proportionnels ou par similitude.

Toutefois, il faut remarquer que si m se réduit à 1, cette conclusion se modifie. Car les raisonnements faits dans ce paragraphe et dans le précédent, pour prouver la nullité de $\mu_{i,i}$ et celle de $p_{i,i} - p'_{i,i}$, ne subsistent plus, puisque ces termes ne sont multipliés par aucune dérivée seconde de U; les équations $\sum_{i=1}^{i=n} h_i^2 \mu_{i,i}$ et (49) subsistent toujours et suffisent pour rendre identique la proposée. De sorte que la condition déduite de (50) est alors la seule nécessaire. Ainsi :

La transformation par similitude satisfait à la question proposée pour tous les paramètres différentiels D_m *et y satisfait seule, à moins que m ne soit égal à* 1.

Quant à la fonction D_1, *il reste pour déterminer la transformation qui lui convient à satisfaire aux conditions* : 1° *que les nouvelles variables aient des paramètres différentiels du premier ordre égaux, et dont la* $\left(\frac{n-2}{4}\right)^{\text{ième}}$ *puissance satisfasse à* $D_1 = 0$; 2° *que leurs surfaces isodèles soient orthogonales*. En outre, on sait déjà que *cette transformation change tout système de surfaces orthogonales en un système orthogonal.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En vue d'une question dont nous nous occuperons bientôt, nous supposerons entre les paramètres $h_1, h_2, \ldots, h_n$ des x' par rapport aux x la liaison plus générale

$$(51) \qquad \frac{h_2}{h_1} = f_2(x_2), \quad \frac{h_3}{h_1} = f_2(x_3), \ldots, \quad \frac{h_n}{h} = f_n(x_n),$$

qui reproduirait la proposée si $f_2, f_3, \ldots, f_n$ étaient réduites à l'unité.

XIV. — *Détermination des h.*

Il s'agit d'abord de déterminer les h par le moyen des équations (24) et (25), chap. II. Le premier de ces deux systèmes, quand on y exprime tout en H_1 et qu'on y change les ρ en $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, donne, quels que soient les indices,

$$\frac{d^2 H_1}{dx'_i\, dx'_j} = \frac{2}{H_1} \frac{dH_1}{dx'_i} \frac{dH_1}{dx'_j} \quad (i \gtrless j),$$

d'où on conclut

$$\frac{1}{\dfrac{dH_1}{dx'_i}} \frac{d}{dx'_j}\left(\frac{dH_1}{dx'_i}\right) - \frac{2}{H_1} \frac{dH_1}{dx'_j} = \frac{d}{dx'_j} \log\left(\frac{1}{H_1^2} \frac{dH_i}{dx'_i}\right) = -\frac{d}{dx'_j} \log \frac{dh_1}{dx'_i} = 0;$$

ceci montre que $\dfrac{dh_1}{dx'_i}$ est indépendant de x'_j quand j est différent de i, et ne dépend par suite que de x'_i ; si donc on représente sa valeur par $\dfrac{1}{\varphi_i(x'_i)}$, on a

$$\frac{dh_1}{dx'_i} = \frac{1}{\varphi_i(x'_i)},$$

et de toutes les équations semblables on conclut la différentielle totale de h_1, puis h_1 lui-même :

$$(52) \quad dh_1 = \frac{dx'_1}{\varphi_1(x'_1)} + \frac{dx'_2}{\varphi_2(x'_2)} + \ldots + \frac{dx'_n}{\varphi_n(x'_n)}, \quad h_1 = \theta_1(x'_1) + \theta_2(x'_2) + \ldots + \theta_n(x'_n),$$

où l'on a posé

$$\theta_1(x'_1) = \int \frac{dx'_1}{\varphi_1(x'_1)}, \quad \theta_2(x'_2) = \int \frac{dx'_2}{\varphi_2(x'_2)}, \ldots, \quad \theta_n(x'_n) = \int \frac{dx'_n}{\varphi_n(x'_n)}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les équations du groupe (25), les mêmes substitutions une fois faites, rentrent dans deux formes distinctes, suivant que les deux indices des x' sont différents de 1, ou que l'un d'eux est 1. Ces deux formes sont

$$(53)\quad \frac{1}{f_i}\frac{d}{dx'_1}\left(\frac{d\log h_1}{dx'_1}\right)+\frac{d}{dx'_i}\left(\frac{d\log h_1}{dx'_i}f_i\right)=\sum_r \frac{f_r^2}{f_i}\left(\frac{d\log h_1}{dx'_r}\right)^2 \quad (r\gtrless 1 \text{ et } i),$$

$$(54)\quad \frac{d}{dx'_i}\left(\frac{f_i}{f_j}\frac{d\log h_1}{dx'_i}\right)+\frac{d}{dx'_j}\left(\frac{f_j}{f_i}\frac{d\log h_1}{dx'_j}\right)=\sum_r \frac{f_r^2}{f_i f_j}\left(\frac{d\log h_1}{dx'_r}\right)^2 \quad (r\gtrless i \text{ et } j).$$

Entre (53) et une autre équation qui n'en diffère que par le changement de i en j, éliminons $\frac{d\log h_1}{dx'_1}$, et pour cela retranchons-les, après les avoir multipliées respectivement par f_i et f_j, nous aurons

$$\frac{f_i}{f_j}\frac{d^2\log h_1}{dx_i'^2}+\frac{f'_i}{f_j}\frac{d\log h_1}{dx'_i}-\frac{f_j}{f_i}\frac{d^2\log h_1}{dx_j'^2}-\frac{f'_j}{f_i}\frac{d\log h_1}{dx'_j}$$
$$=\frac{f_j}{f_i}\left(\frac{d\log h_1}{dx'_j}\right)^2-\frac{f_i}{f_j}\left(\frac{d\log h_1}{dx'_i}\right)^2,$$

ou

$$\frac{f_i}{f_j}\left[\frac{1}{h_1}\frac{d^2h_1}{dx_i'^2}-\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dh_1}{dx'_i}\right)^2\right]-\frac{f_j}{f_i}\left[\frac{1}{h_1}\frac{d^2h_1}{dx_j'^2}-\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dh_1}{dx'_j}\right)^2\right]$$
$$+\frac{f'_i}{f_j}\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{dx'_i}-\frac{f'_j}{f_i}\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{dx'_j}=\frac{f_j}{f_i}\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dh_1}{dx'_j}\right)^2-\frac{f_i}{f_j}\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dh_1}{dx'_i}\right)^2,$$

ou encore

$$\frac{d}{dx'_i}\left(\frac{f_i}{f_j}\frac{dh_1}{dx'_i}\right)=\frac{d}{dx'_j}\left(\frac{f_j}{f_i}\frac{dh_1}{dx'_j}\right),$$

qui revient à

$$f_i\frac{d}{dx'_i}\left(f_i\frac{dh_1}{dx'_i}\right)=f_j\frac{d}{dx'_j}\left(f_i\frac{dh_1}{dx'_j}\right).$$

Ces deux fonctions de variables différentes ne sauraient être égales sans être constantes. Donc

$$(55)\quad \frac{f_i d\left(\frac{f_i}{\varphi_i}\right)}{dx'_i}=c, \quad \text{d'où} \quad \frac{f_i}{\varphi_i}=c\int\frac{dx'_i}{f_i(x'_i)}+k_i, \quad \frac{1}{\varphi_i}=\frac{c}{f_i}\int\frac{dx'_i}{f_i}+\frac{k_i}{f_i}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les équations (54) donnent, de leur côté,

$$\frac{d}{dx'_i}\left(\frac{f_i}{f_j}\frac{1}{\varphi_i h_1}\right)+\frac{d}{dx'_j}\left(\frac{f_j}{f_i}\frac{1}{\varphi_j h_1}\right)$$
$$=\sum\frac{f_r^2}{f_i f_j}\frac{1}{h_1^2\varphi_r^2}$$
$$=\left[\frac{f_i}{f_i f_j}\frac{d}{dx'_i}\left(\frac{f_i}{\varphi_i}\right)+\frac{f_j}{f_i f_j}\frac{d}{dx'_j}\left(\frac{f_j}{\varphi_j}\right)\right]\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{f_j}{f_i}\frac{1}{\varphi_j^2}+\frac{f_i}{f_j}\frac{1}{\varphi_i^2}\right),$$

ou bien

$$2ch_1=2c(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)=\sum_{r=1}^{r=n}\left(\frac{f_r}{\varphi_r}\right)^2,$$

en étendant le $\sum$ à toutes les valeurs de r et supposant $f_1=1$. Cette équation exige que

$$2c\theta_1=\frac{1}{\varphi_1^2}=2c\int\frac{dx'_1}{\varphi_1},$$

d'où

$$\frac{2}{\varphi_1}\frac{d\frac{1}{\varphi_1}}{dx'_1}=\frac{2c}{\varphi_1},\quad\text{et}\quad\frac{1}{\varphi_1}=cx'_1+k_1;$$

de même,

$$2c\theta=\left(\frac{f_r}{\varphi_r}\right)^2=2c\int\frac{dx'_r}{\varphi_r}=\left(c\int\frac{dx'_r}{f_r}+k_r\right)^2,$$

équation satisfaite d'elle-même.

De ce calcul résulte que, si on prend l'origine des x' de manière à annuler toutes les constantes k, et si on pose

$$\int\frac{dx'_2}{f_2(x'_2)}=\omega_2(x'_2),\quad\int\frac{dx'_3}{f_3(x'_3)}=\omega_3(x'_3),\ldots,\quad\int\frac{dx'_n}{f_n(x'_n)}=\omega_n(x'_n),$$
$$\sigma^2=x'^2_1+\omega_2^2+\omega_3^2+\ldots+\omega_n^2,$$

on a

$$h_1=\frac{c}{2}(x'^2_1+\omega_2^2+\omega_3^2+\ldots+\omega_n^2)=\frac{c}{2}\sigma^2. \tag{56}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

XV. — *Intégration des équations en x.*

Les h étant maintenant connus, les équations (16) (chap. II) vont donner les x. Les premières d'entre elles prennent, quels que soient les indices j et k, pourvu qu'ils soient différents, la forme

$$h_1 \frac{d^2 x_i}{dx'_j\, dx'_k} + \frac{dh_1}{dx'_k}\frac{dx_i}{dx'_j} + \frac{dh_1}{dx'_j}\frac{dx_i}{dx'_k} = 0,$$

qui, à cause de la forme particulière de h_1, revient à

$$\frac{d}{dx'_k}\left(h_1 \frac{dx_i}{dx'_j} + x_i \frac{dh_1}{dx'_j}\right) = 0 \quad (k \gtrless j);$$

et l'on voit ainsi que la fonction $h_1 \dfrac{dx_i}{dx'_j} + x_i \dfrac{dh_1}{dx'_j}$ ne dépend que de x'_j. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{dx_i}{dx'_1} + \frac{x_i}{\varphi_1} = \psi_1^{(i)}(x'_1),\\
&\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{dx_i}{dx'_2} + \frac{x_i}{\varphi_2} = \psi_2^{(i)}(x'_2).\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{dx_i}{dx'_n} + \frac{x_i}{\varphi_n} = \psi_n^{(i)}(x'_n).
\end{aligned}$$

On en conclut

$$\frac{1}{2}\sigma^2\, dx_i + x_i\left(x'_1\, dx'_1 + \frac{\varphi_2}{f_2}dx'_2 + \ldots + \frac{\varphi_n}{f_n}dx'_n\right) = \psi_1^{(i)}\, dx'_1 + \psi_2^{(i)}\, dx'_2 + \ldots + \psi_n^{(i)}\, dx'_n.$$

Représentons le second membre par $\dfrac{\Omega_i}{2}$, et remarquons que la parenthèse est $\frac{1}{2}d(\sigma^2)$, nous obtiendrons

$$x_1 = \frac{\Omega_1}{\sigma^2}, \quad x_2 = \frac{\Omega_2}{\sigma^2}, \ldots, \quad x_n = \frac{\Omega_n}{\sigma^2}. \tag{57}$$

Il faut maintenant employer le second groupe (16) à la détermination des Ω. En supprimant dans les deux membres de cette équation le terme $\dfrac{1}{h_j}\dfrac{dh_j}{dx'_j}\dfrac{dx_i}{dx'_j}$, auquel cas le $\sum$ ne devra plus comprendre la valeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$r = j$, puis multipliant tout par h_j, on met le premier membre sous la forme $\frac{d}{dx'_j}\left(h_j \frac{dx_i}{dx'_j}\right)$; d'ailleurs

$$\frac{dx_i}{dx'_j} = \frac{d}{dx'_j}\left(\frac{\Omega_i}{\sigma^2}\right) = \frac{2\psi_j^{(i)}}{\sigma^2} - \frac{2\Omega_i \omega_j}{\sigma^4 f_j} = \frac{2}{\sigma^2}\left(\psi_j^{(i)} - \frac{\Omega_i}{\sigma^2}\frac{\omega_j}{f_j}\right),$$

d'où

$$h_j \frac{dx_i}{dx'_j} = h_i f_j \frac{dx_i}{dx'_j} = c\left(\psi_j^{(i)} f_j - \frac{\Omega_i}{\sigma^2}\omega_j\right),$$

et

$$\frac{d}{dx'_j}\left(h_j \frac{dx_i}{dx'_j}\right) = c\left[\frac{d}{dx'_j}\left(\psi_j^{(i)} f_j\right) - \frac{2\psi_j^{(i)}}{\sigma^2}\omega_j - \frac{\Omega_i}{\sigma^2}\frac{1}{f_j} + 2\frac{\Omega_i}{\sigma^4}\frac{\omega_j^2}{f_j}\right].$$

Le second membre est

$$2c\sum_r \frac{f_r \omega_r}{\sigma^2 f_j}\left(\psi_r^{(i)} - \frac{\Omega_i}{\sigma^2}\frac{\omega_r}{f_r}\right),$$

et, si on y fait passer les termes $\frac{2\psi_j^{(i)}}{\sigma^2}\omega_j - 2\frac{\Omega_i}{\sigma^4}\frac{\omega_j^2}{f_j}$ du premier, le $\sum$ s'étendra à toutes les valeurs de r sans exception. Multipliant ensuite par f_j, on aura l'équation

$$f_j \frac{d}{dx'_j}\left(\psi_j^{(i)} f_j\right) = \frac{\Omega_i}{\sigma^2} + 2\sum_{r=1}^{r=n} \frac{f_r \omega_r}{\sigma^2}\left(\psi_r^{(i)} - \frac{\Omega_i}{\sigma^2}\frac{\omega_r}{f_r}\right), \tag{58}$$

dont le second membre ne dépend nullement de l'indice j. On trouverait donc la même valeur pour $f_k \frac{d}{dx'_k}\left(\psi_k^{(i)} f_k\right)$, et par suite

$$f_j \frac{d}{dx'_j}\left(\psi_j^{(i)} f_j\right) = f_k \frac{d}{dx'_k}\left(\psi_k^{(i)} f_k\right).$$

Comme ce sont là deux fonctions dépendant chacune d'une seule variable différente de l'une à l'autre, il faut qu'elles soient constantes. Donc

$$\psi_j^{(i)} = \frac{m_i}{f_j}\int \frac{dx'_j}{f_j} + \frac{p_j^{(i)}}{2f_j} = m_i \omega_j \frac{d\omega_j}{dx'_j} + \frac{1}{2} p_j^{(i)} \frac{d\omega_j}{dx'_j}.$$

Substituant dans $\Omega_i = 2\sum \int \psi_j^{(i)} dx'_j$, on a

$$\Omega_i = m_i\left(x'^2_j + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \ldots + \omega_n^2\right) + \sum p_j^{(i)} \omega_j + q_i,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, par suite,

$$(59) \qquad x_i = m_i + \frac{p_1^{(i)} x'_1 + p_2^{(i)} \omega_2 \ldots + p_n^{(i)} \omega_n + q_i}{\sigma^2},$$

formule où l'on peut d'abord supposer m_i nul, en transportant convenablement l'origine. Si l'on substitue alors Ω_i et $\psi_r^{(i)}$ dans le second membre de (58), qui doit être nul, on a

$$q_i + \sum p_j^{(i)} \omega_j + \sum p_r^{(i)} \omega_r - 2 \frac{\sum p_j^{(i)} \omega_j + q_i}{\sigma^2} \sigma^2 = - q_i = 0.$$

Ainsi les q_i sont nuls. Substituant enfin dans les conditions d'orthogonalité, prises sous la forme (7 *ter*, chap. II), on a d'abord, à cause de

$$h_j \frac{dx_i}{dx'_j} = c \left(\frac{1}{2} p_j^{(i)} - \omega_j x_i \right),$$

$$1 = c^2 \left[\frac{1}{4} \sum (p_j^{(i)})^2 + x_i^2 \sigma^2 - x_i \sum_{j=1}^{j=n} p_j^{(i)} \omega_j \right], \qquad \sum_{j=1}^{j=n} (p_j^{(i)})^2 = \frac{4}{c^2};$$

puis

$$0 = c^2 \sum \left(\frac{1}{2} p_j^{(i)} - \omega_j x_i \right) \left(\frac{1}{2} p_j^{(k)} - \omega_j x_k \right)$$

$$= c^2 \left(\frac{1}{4} \sum p_j^{(i)} p_j^{(k)} - \frac{1}{2} x_i \sum p_j^{(k)} \omega_j - \frac{1}{2} x_k \sum p_j^{(i)} \omega_j + 2 \frac{1}{2} x_i x_k \sigma^2 \right),$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} p_j^{(i)} p_j^{(k)} = 0.$$

Les coefficients p, multipliés par $\frac{c}{2}$, sont donc les cosinus que forment n axes orthogonaux avec n autres axes pareillement orthogonaux. On en conclut premièrement

$$\sigma^2 \left(p_i^{(1)} x_i + p_i^{(2)} x_2 + \ldots + p_i^{(n)} x_n \right) = \frac{4}{c^2} \omega_i.$$

puis, en changeant les axes,

$$\sigma^2 x_i = \frac{4}{c^2} \omega_i.$$

Les carrés de ces équations, étant ajoutés, donnent

$$\sigma^4 R^2 = \frac{16}{c^4} \sigma^2, \qquad \sigma R = \frac{4}{c^2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et on en déduit enfin les formules cherchées

$$(60) \qquad x'_1 = \frac{4}{c^2}\frac{x_1}{R^2}, \quad \int \frac{dx'_2}{f_2(x'_2)} = \frac{4}{c^2}\frac{x_2}{R^2}, \ldots, \quad \int \frac{dx'_n}{f_n(x'_n)} = \frac{4}{c^2}\frac{x_n}{R^2}.$$

Ces équations représentent encore n sphères orthogonales, ayant leurs centres sur les n axes et passant à l'origine; mais ici les nouvelles variables sont des fonctions des rayons de ces sphères et non plus ces rayons eux-mêmes. Les points correspondants M, M′ ne sont plus sur un même rayon vecteur.

Quand on suppose dans ces formules $f_2 = f_3 = \ldots = f_n = 1$, on retombe sur celles de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Ainsi :

La transformation par rayons réciproques s'étend aux paramètres D_1, *quel que soit le nombre des variables. Elle seule satisfait aux conditions proposées, et cela n'a lieu que pour ces paramètres.*

XVI. — *Question relative au travail des forces normales.*

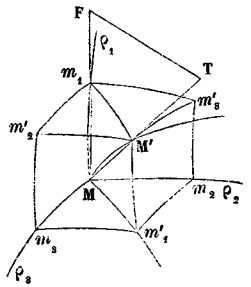
Une force produit généralement, sur un mobile, deux effets différents : l'un qui consiste à modifier la vitesse, l'autre à écarter le mobile de la ligne droite, ou à courber sa trajectoire. De là naît l'importance toute particulière que prend, dans la Dynamique, le mode de décomposition d'une force en deux, l'une tangente, l'autre normale à la trajectoire, décomposition qui, au point de vue géométrique, n'est qu'un mode particulier, au milieu d'une infinité d'autres. On démontre en effet que les variations de vitesse sont dues à la première de ces composantes, la courbure de la trajectoire à la seconde. La notion du travail n'a été appliquée jusqu'ici qu'à la composante tangentielle, et M. Lamé, voyant dans ce fait une lacune, a proposé la considération d'une sorte de travail de la composante normale. Si l'on veut en effet que ce qu'on appelle du nom de travail puisse mesurer la dépense industrielle d'un mouvement, il faut y considérer aussi bien les composantes normales que les tangentielles, puisque l'inertie du point le fait résister aussi bien à laisser courber sa trajectoire qu'à laisser accélérer sa vitesse. L'étude d'un cas particulier, celui d'une attraction dont les surfaces de niveau sont cylindriques, conduit M. Lamé à adopter pour expression du tra-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vail d'une force normale son produit par l'élément d'arc infiniment petit $d\sigma$. Il obtient alors (*Coord. curv.*, p. 175) ce résultat, que, pour un mobile soumis à cette attraction, les travaux des deux composantes sont représentés, l'un par l'accroissement du paramètre ρ des surfaces de niveau, l'autre par l'accroissement du paramètre ρ_1 de la famille cylindrique orthogonale. L'auteur ne considère pas le cas général, mais il paraît disposé (p. 170) à penser que les paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3 de trois surfaces orthogonales, dont la première est surface de niveau pour une force, pourraient représenter, l'un le travail de la composante tangentielle, les autres ceux de forces dont la résultante serait la composante normale. Telle est l'idée que nous nous proposons d'examiner.

XVII. — *Travail d'une force qui reste constamment normale à une famille de surfaces.*

Soient, à l'époque t, M la position du mobile, F la force qui le sollicite, $M\rho_1$, $M\rho_2$, $M\rho_3$ les trois arcs suivant lesquels se coupent les trois



surfaces qui passent en M et appartiennent à trois familles orthogonales, à l'une desquelles (ρ_2 ρ_3) la force F est toujours normale. Soient M' la position du mobile à l'époque $t + dt$, MM' la trajectoire, $M'm'_1$, $M'm'_2$, $M'm'_3$ les intersections des trois surfaces passant en M'. Soient enfin V la vitesse, v_1, v_2, v_3 ses projections sur les trois arcs ρ_1, ρ_2, ρ_3, R le rayon de courbure de la trajectoire. La force F étant tangente à l'arc ρ_1, le plan de cet arc et de MM' est le plan osculateur de la trajectoire, et, si on projette F en T sur MM', MT, TF sont les forces normale et tangentielle $\frac{dV}{dt}$, $\frac{V^2}{R}$. Soient encore $d\sigma$, ds_1, ds_2, ds_3 les arcs MM',

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mm_1, Mm_2, Mm_3. Les triangles semblables $MM'm_1$, MFT donnent

$$\frac{MM'}{MF} = \frac{Mm_1}{MT} = \frac{M'm_1}{TF},$$

ou bien

$$\frac{dV}{dt}\,d\sigma = F\,ds_1 = F\,\frac{d\rho_1}{h_1}, \quad \frac{V^2}{R}\,d\sigma = F.M'm_1 = F.Mm'_1.$$

La première de ces équations exprime que *le travail tangentiel est le même qu'il eût été pour un point mû par la force* F *normalement à la surface* ρ *jusqu'à la surface* $\rho + d\rho$.

La seconde, que *le travail normal est le même toutes les fois que le mobile passe de l'arc suivant lequel se coupent les surfaces* ρ_1, ρ_2 *à celui où se coupent* $\rho_1 + d\rho_1$, $\rho_2 + d\rho_2$, *sous l'influence de la force* F. *En particulier ce travail est le même que si le point fût resté sur la surface* ρ.

Ceci posé, imaginons que sur l'axe du plan osculateur d'un arc et dans le sens où un observateur devrait placer sa tête pour voir s'exécuter de gauche à droite le mouvement qui amènerait la direction de l'arc $d\sigma$ sur celle du rayon de courbure, on porte une ligne proportionnelle au travail normal, et agissons ainsi pour les mouvements des trois projections du point mobile sur la surface ρ_1 et sur les arcs ρ_2, ρ_3, on verra que le *travail de la composante normale sera la résultante des travaux des composantes normales de la force* F *dans les mouvements qu'ont les projections du mobile sur les arcs* ρ_2, ρ_3.

En d'autres termes, les quantités $\frac{F}{h_1}\,d\rho_1$, $\frac{F}{h_2}\,d\rho_2$, $\frac{F}{h_3}\,d\rho_3$ mesurent le travail tangentiel, les autres deux composantes du travail normal.

XVIII. — *Cas d'une force quelconque.*

Supposons maintenant le même système de surfaces orthogonales, et que F représente une force quelconque. Convenons de porter le travail tangentiel sur la tangente à la trajectoire, et dans le sens du mouvement si $\frac{dV}{dt}$ est positif, dans le sens contraire s'il est négatif. Comme P est la résultante de $\frac{V^2}{R}$ et $\frac{dV}{dt}$, *le travail élémentaire total*, en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

désignant sous ce nom la résultante des travaux tangentiels et normaux, sera le produit de la force appliquée par l'arc parcouru, et il s'exprimera par la racine carrée de la somme des carrés des travaux élémentaires tangentiels et normaux.

Ceci fournit l'expression générale du travail élémentaire normal. Son carré doit être en effet, en appelant R_1, R_2, R_3, les trois composantes de la force F suivant les arcs ρ :

$$(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2)(ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2) - (R_1\,ds_1 + R_2\,ds_2 + R_3\,ds_3)^2,$$

ou bien le travail lui-même,

$$\sqrt{\left(\frac{R_1}{h_2}d\rho_2 - \frac{R_2}{h_1}d\rho_1\right)^2 + \left(\frac{R_1}{h_3}d\rho_3 - \frac{R_3}{h_1}d\rho_1\right)^2 + \left(\frac{R_3}{h_2}d\rho_2 - \frac{R_2}{h_3}\right)^2},$$

c'est-à-dire que *le travail de la composante normale est la résultante de ceux qu'on obtiendrait en décomposant la force appliquée suivant les arcs ρ, et prenant les travaux normaux des mouvements que ces forces communiqueraient aux projections du mobile sur ces mêmes axes.*

XIX. — *Solution de la question.*

Nous nous sommes un peu écartés, dans ce dernier paragraphe, du sujet de notre recherche, qui ne doit porter que sur les attractions fonctions de la seule distance; or les accroissements des paramètres $d\rho_1$, $d\rho_2$, $d\rho_3$ ne mesurent pas les travaux tangentiels et normaux, comme nous l'avons vu § XVII, mais bien leurs produits par $\frac{h_1}{F}$, $\frac{h_2}{F}$, $\frac{h_3}{F}$. Dans le cas d'une attraction dont ρ_1 serait la surface de niveau $h_1 = F$, et alors $d\rho_1$ mesure le travail tangentiel; il faudrait donc que $\frac{h_2}{h_1}$, $\frac{h_3}{h_1}$ fussent fonctions le premier de ρ_2 seul, le second de ρ_3 seul, pour que les quantités $d\rho_2$, $d\rho_3$ fussent propres à mesurer les travaux normaux. Or nous avons vu que cela n'avait lieu que pour le système de surfaces tout à fait particulier

$$\rho_1 = \frac{4}{c^2}\frac{x_1}{R^2}, \quad \int \frac{d\rho_2}{f_2(\rho_2)} = \frac{4}{c^2}\frac{x_2}{R^2}, \ldots, \quad \int \frac{d\rho_n}{f_n(\rho_n)} = \frac{4}{c^2}\frac{x_n}{R^2},$$

ce qui détruit l'idée préconçue que nous voulions examiner.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

S'il y a exception pour le potentiel cylindrique de M. Lamé, cela tient à l'égalité $h_1 = h_2$, qui a lieu alors d'elle-même.

En résumé, sans rien ôter de son utilité à la conception du travail normal, qui seule permettra d'évaluer exactement la dépense d'une machine, et qui peut contribuer même à l'avancement de la Mécanique théorique, nous conclurons que ce travail doit se rattacher aux paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3 d'une manière plus compliquée qu'on ne l'avait pensé d'abord.

Vu et approuvé.

Le 21 mai 1867.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 22 mai 1867.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS D'ASTRONOMIE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1° Rappel des formules qui déterminent le mouvement de l'équateur vrai par rapport à un point fixe.

2° Effets de la précession, de la nutation et de l'aberration sur la position apparente des astres.

Vu et approuvé.

Le 21 mai 1867.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le 22 mai 1867.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris.

A. MOURIER.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ERRATA.

Page 18, formule D′, devant les deux $\sum_s$, remplacer + par −.

Page 22, formule $\mathfrak{D}_1$, après $-p_1^2\delta$, *au lieu de* $+\sum_r$, *lisez* $-\sum_r$.

Page 23, dans $D'_{r,s}$, *au lieu de* δ, $\delta^{(1)}_{\rho,\sigma}$, *lisez* $\delta_{r,s}$, $\delta^{(2)}_{\rho,\tau}$.

Page 26, depuis « 2° *l'autre*, jusqu'à *ainsi* », remplacer ce passage par le suivant : « l'autre, étant joint aux autres parties de D_1, donne pour somme un déterminant qui ne diffère de Δ que par changement des lignes en colonnes. »

Page 26, *au lieu de* $\lambda\Delta$, $-\lambda\Delta$, *lisez* $2\lambda\Delta$, $-2\lambda\Delta$.

Page 27, *au lieu de* $p_2 - p_1, 0, 0, \ldots, 0$, *lisez* $p_2, -p_1, 0, 0, \ldots, 0$.

Page 27, équation [1, 2], *au lieu de* $\sum_{j=1}^{j=n}$, *lisez* $\sum_{j=3}^{j=n}$.

Page 35, lignes 3 et 4, en remontant, *au lieu de :* qui ne dépendent que d'un seul, *lisez :* qui ne dépendent d'aucun.

Page 58, dans $c_{1,2}$, *au lieu de* $\frac{d\rho_2}{dx_2}$, *lisez* $\frac{d\rho_2}{dx_1}$.

Page 58, ligne 3, en remontant,

au lieu de $c_{1,2}\frac{d\rho_2}{dx_2}$, $c_2\frac{d\rho_2}{dx_1}$, *lisez* $c_{1,2}$, $\frac{d\rho_2}{dx_1}$, c_2, $\frac{d\rho_2}{dx_2}$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Errata (Suite).

page 77, lignes 14 et 15		$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, lisez	$\frac{n^2(n+1)}{2}$
78	7 en remont^{t}	9e second lisez	du déterminant ω
86	10	on en tirera	on tirera
95	2	au point M	du point M
98	19	du 2^{e} ordre	du 1er ordre
102	dernière	correspondant	correspondante
106	id	$\sin\omega\ \sin\omega'$	$\frac{\sin\omega'}{\omega^2\sin\omega}$
111	12	De M' à m	de M' à m'
id	17	Son Double	la moitié
id	23	on a $\frac{1}{p_1x_1^2+\dots}$	$\frac{R^2}{p_1x_1^2+\dots}$
116	3 remont^{t}	orthogonales	orthogonales
119	6 remont^{t}	l'expression (h)	l'expression (6)
120	Dernière	remplacer O	remplacer V
126	14	racine sixième	racine quatrième
129	4	F =	f =
134	12	$\Phi'_{02}\frac{dx}{df_2}+\Phi'_{12}\frac{dy}{df_2}$	$\Phi'_{02}\frac{dx}{df_2}+\Phi'_{12}\frac{dy}{df_2}$
134 à 137	partout	$\sqrt{f_0f_1f_2}$	$\sqrt{-f_0f_1f_2}$
136, 1 et 2 en remont^{t}		$\sqrt{f_0f_1f_2}\left[\left(\Phi'_{00}-\Phi'_{22}\right)-\eta\Phi'_{12}\right]$	$\sqrt{-f_0f_1f_2}\left(\Phi'_{00}-\Phi'_{22}\right)-\eta\Phi'_{12}$
141	13.	au point M'	au point M
id	6 remont^{t}	fonction V	fonction U.
143.	5 id	$\frac{d\log h_2}{df_r}$	$\frac{d\log h_2}{df_r}$
id	7 id.	$\frac{d\log h_1}{df_i}$	$\frac{d\log h_1}{df_i}$
145	équation (44)	$\Pi^{(m)}_{-p_i,-\sigma}$	$\Pi^{(m)}_{-p_i,-\sigma}=0$
id	4 en remont^{t}	$h^2_{rs}\ \Sigma\dots$	$h'^2_{rs}=\Sigma\dots$
149	formules 9'	à la seconde	q'_{ij}
152	Equations 51	$\frac{h_2}{h_1}=f_2(x_2)\ \frac{h_3}{h_1}=f_3(x_3)\dots\frac{h_m}{h_1}=f_m(x_m)$	$\frac{h_2}{h_1}=f_2(x'_2)\ \frac{h_3}{h_1}=f_3(x'_3)\dots\frac{h_n}{h_1}=f_n(x'_n)$
153	4 remont^{t}	$f_i\frac{dh_j}{dx_j}$	$f_j\frac{dh_i}{dx_j}$
158	5	des fonctions jusqu'à elle-même	des fonctions quelconques des rayons de ces sphères et non plus leurs inverses.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC