I
LIP

LEÇONS D'ACOUSTIQUE

ET

D'OPTIQUE

Professées à l'Université de Paris

PAR

G. LIPPMANN

MEMBRE DE L'INSTITUT

Recueillies et Rédigées

PAR

A. CADOT

Agrégé de l'Université

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
physique recherche
JUSSIEU

COLLÈGE ROLLIN
BIBLIOTHÈQUE

DEUXIÈME TIRAGE

PR 8557

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

8, rue de la Sorbonne, 8

1899

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Leçons d'Acoustique et d'Optique

professées à la Faculté des Sciences de Paris

par

M. Lippmann

Membre de l'Institut.

Acoustique.

Objet de l'acoustique ; ses relations avec les autres sciences. Division du sujet.

I. — L'Acoustique est la partie de la physique qui s'occupe de l'étude du son et de ses propriétés.

Elle diffère des autres branches des sciences physiques par un caractère essentiel : dans l'optique, la chaleur et l'électricité, on ne connaît pas la nature intime des phénomènes étudiés ; dans l'acoustique, on sait au contraire que le son est le résultat d'un mouvement de vibration.

Il en résulte que les problèmes d'acoustique sont en partie des problèmes d'élasticité. Au point de vue de l'origine et de la propagation du son, l'acoustique n'est en effet qu'un cas particulier de l'étude de l'élasticité. C'est un cas particulier seulement, parce qu'on n'a pas à étudier toutes les déformations des corps élastiques, mais uniquement les vibrations qui sont assez rapides pour produire un son ; et qu'en outre, on peut se contenter en général, de considérer dans un système élastique

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les divers points qui vibrent comme autant de sources sonores qu'on peut étudier séparément.

La théorie de l'élasticité est utile dans l'étude mathématique de certains phénomènes d'acoustique. Mais, en général, ce sera l'inverse qui sera vrai ; l'acoustique nous fournira en effet des méthodes pour déterminer des quantités qui interviennent dans l'élasticité, en particulier les coefficients d'élasticité : le coefficient de frottement intérieur des corps.

Le son étant d'autre part une sensation, l'acoustique doit être considérée au point de vue de ses relations avec la physiologie et la psychologie. L'étude complète de l'acoustique touche en effet à la physiologie, puisqu'il est nécessaire de connaître les conditions de l'impression nerveuse qui précède la sensation. Elle touche à la psychologie, puisque l'appréciation des qualités du son est un phénomène psychologique : l'acoustique nous présente même cette particularité remarquable de phénomènes psychologiques reliés à des lois numériques.

2. — Pour étudier l'acoustique au point de vue simplement physique, on peut adopter le plan général suivant :

I. Etude du son à son origine.

1° Nature du son ; le son est le résultat des vibrations d'un corps

2° Qualités du son. — Les différents sons se distinguent les uns des autres par trois qualités essentielles :

Hauteur
Intensité
Timbre

II. Propagation du son dans les divers milieux élastiques.

1° Propagation d'un son unique. —

A — dans les fluides (gaz ou liquides), les vibrations se propagent longitudinalement.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

B - dans les solides, les vibrations y sont longitudinales ou transversales

2°. - Propagation de deux sons simultanés. -

Il y a alors production d'interférences ; nous retrouverons ce phénomène en optique et nous verrons qu'il permet d'expliquer la plupart des phénomènes de la haute optique.

III. Influence des ondes sonores sur les corps qu'elles rencontrent.

Les ondes sonores peuvent frapper un corps élastique quelconque : c'est le cas des résonnateurs ou corps qui vibrent à l'unisson du son qui les frappe, des flammes sensibles, de l'oreille.

Remarque. - Ce plan n'est qu'un exemple de l'ordre que l'on peut adopter dans l'étude de l'acoustique ; il peut être modifié. Dans toute science, la division du sujet présente quelque chose d'arbitraire. Ici, par exemple, on pourrait objecter au plan proposé que le son est étudié non à l'endroit même où il se produit, mais à quelque distance ; il en résulte qu'il faudrait commencer l'acoustique par l'étude de la propagation. Comme il est impossible d'étudier tous les phénomènes en même temps, il faut adopter un ordre une fois pour toutes.

Nous ne développerons d'ailleurs qu'une petite partie de ce programme, en insistant principalement sur les questions de méthode qui ont une portée générale et sur les problèmes qui sont communs à l'acoustique et à l'optique.

Etude de la nature du son.

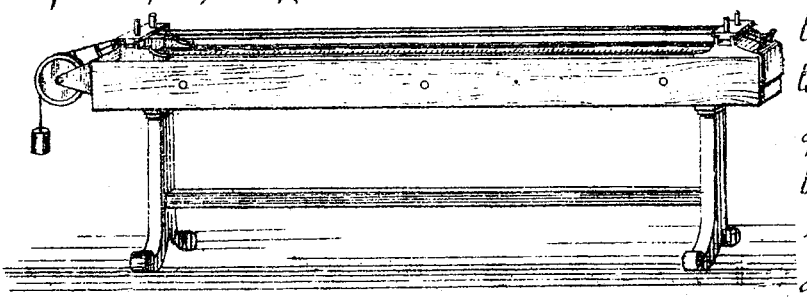
Le son est le résultat des vibrations de la source sonore.

3. - Les philosophes anciens avaient déjà remarqué ce fait. Il y a vingt-quatre siècles, Pythagore trouva même les premières relations numériques entre les sons. Il se servait à cet effet d'un monocorde, instrument analogue à celui qui est connu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

aujourd'hui sous le nom de sonomètre, se compose d'une corde tendue entre deux chevilles fixées à une boîte creuse, servant à renforcer le son produit.

Pythagore faisait rendre un son à la corde; puis supprimant la moitié de la longueur, il obtenait l'octave du son primitif; supprimant ensuite le tiers, il obtenait la quinte; le quart, il obtenait la quarte; le cinquième, il obtenait la tierce. (L'expérience est répétée au cours avec un sonomètre; on diminue la longueur de la corde vibrante en plaçant sous cette corde un chevalet mobile.)



L'expérience de Pythagore est sans doute la première où l'on ait fait intervenir les nombres dans l'étude d'un phénomène physique. Frappé de cette intervention des nombres, Pythagore a eu le pressentiment de leur puissance dans la science; il a deviné à vrai dire qu'on fonderait plus tard une science, basée sur l'expérience, mais où tous les phénomènes seraient reliés par des lois précises, traductibles par des formules mathématiques.

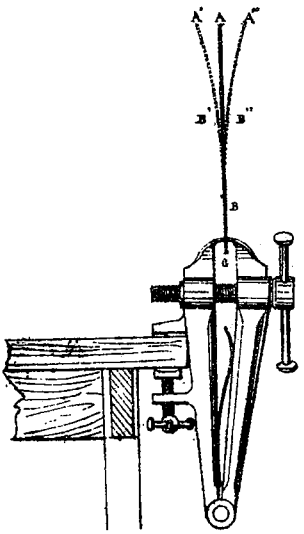
Il faut laisser s'écouler deux mille ans pour constater un progrès dans l'étude de l'acoustique. Au dix-septième siècle, le Père Mersenne, ami de Descartes, passant des longueurs des cordes aux nombres de vibrations, montre que les nombres de vibrations d'une corde varient en raison inverse de sa longueur; il détermine le rapport entre les nombres de vibrations des différentes notes de la gamme.

Ce n'est que cent ans plus tard, vers la fin du dix-huitième siècle qu'apparaissent les premières méthodes destinées à mesurer les nombres de vibrations en valeur absolue. Cette mesure présente en effet de grandes difficultés. Il suffit pour s'en rendre compte de remarquer que les vibrations d'un corps sonore sont

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

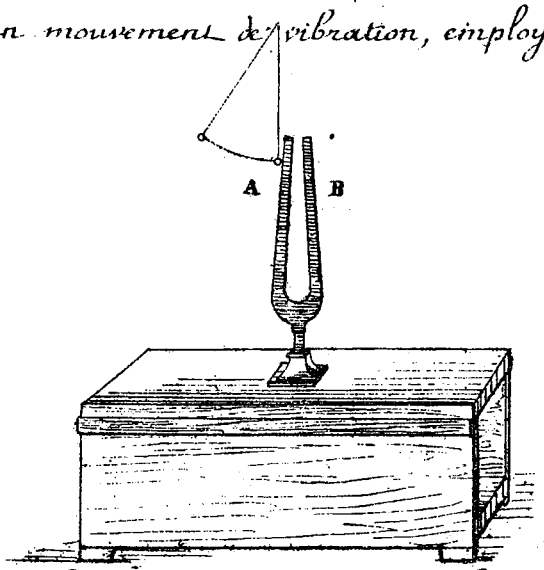
beaucoup trop rapides pour pouvoir être observées à l'œil.

4. — Prenons par exemple une verge métallique AB encastrée dans un étau par une de ses extrémités. Si la verge est écartée de sa position d'équilibre, elle y revient par une série d'oscillations d'amplitudes décroissantes. Lorsque la longueur de la verge est grande, les vibrations sont lentes et on peut même les suivre à l'œil; mais elles ne sont accompagnées d'aucun son.



Si on raccourcit de plus en plus la longueur de la partie vibrante, les vibrations sont de plus en plus rapides; mais elles ne deviennent perceptibles à l'oreille que lorsqu'elles échappent à l'œil en raison de leur rapidité.

Il faut donc, pour constater que le son est dû à un mouvement de vibration, employer divers artifices.



5. — Soit par exemple un gros diapason AB; au voisinage de l'extrémité A de l'une des branches est suspendue par un fil à un support vertical une petite bille. On fait vibrer le diapason en le frottant avec un archet, on observe que la bille est vivement repoussée.

6. — Un timbre métallique hémisphérique est mis en vibration par un archet.

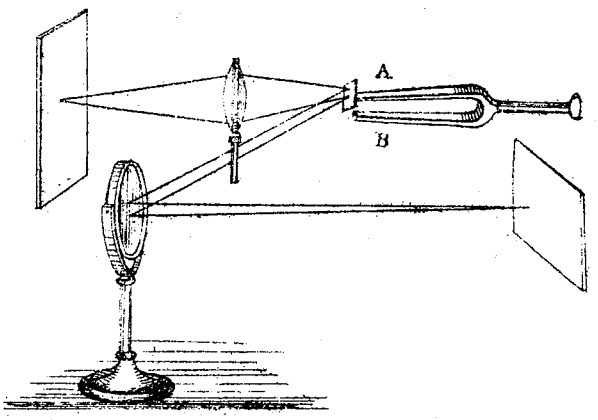
Dans la concavité du timbre se trouve une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

petite bille qui aussitôt que le timbre rend un son commence à sautiller.

7 — Les meilleurs procédés pour mettre en évidence les mouvements de vibration qui accompagnent la production des sons sont les procédés optiques.

Un gros diapason AB porte à l'extrémité A d'une de ses branches un miroir sur lequel tombe un rayon de lumière. Ce rayon, après réflexion, va former une tache lumineuse sur un écran. – Si le diapason ne vibre pas, la tache lumineuse est fixe.



Si le diapason vibre, la tache lumineuse se déplace; mais, à cause de la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, on voit sur l'écran une longue bande lumineuse terminée par deux portions circulaires plus brillantes.

On peut néanmoins apercevoir la tache lumineuse dans ses différentes positions en déplaçant l'œil par rapport à l'écran; il suffit pour cela de faire mouvoir l'œil de gauche à droite et inversement si le diapason vibre verticalement, ou de haut en bas et inversement s'il vibre horizontalement. Les impressions lumineuses se forment alors en différents points de la rétine et on aperçoit une ligne sinusoïdale

On arrive au même résultat en recevant sur un miroir pour le projeter ensuite sur l'écran le rayon lumineux réfléchi par le miroir du diapason. – En déplaçant le miroir à la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

main, on aperçoit sur l'écran la même ligne sinusoïdale.

8. — On peut encore se proposer d'observer directement le mouvement du diapason. Si on l'éclaire d'une façon continue et qu'on le fasse vibrer, son ombre se projette sur un écran en formant une image dont les contours ne sont pas nets. Supposons qu'on vienne au contraire à l'éclairer d'une façon intermittente. A chaque éclair de très courte durée correspond une ombre à contours nets dont la position varie avec celle du corps vibrant au moment où l'éclair s'est produit.

Si l'intervalle qui sépare deux éclairs consécutifs est choisi de façon que le diapason se trouve toujours dans la même position au moment de l'éclairement, l'ombre conserve aussi la même position et paraît immobile. Comme le mouvement vibratoire d'un diapason est périodique, il suffit pour arriver à ce resultat de produire des éclairs périodiques, la periode des éclairements étant égale à la période de vibration du diapason.

Supposons au contraire que l'intervalle qui sépare deux éclairs consécutifs ne soit pas exactement égal à la période de vibration du diapason ; un premier éclair saisit le diapason dans une certaine position ; l'éclair suivant le saisira à un instant où il occupera une position voisine de celle qu'il occupait dans le premier cas ; l'ombre paraîtra donc s'être légèrement déplacée. Comme le même fait se reproduit à chaque éclairement, on observe un mouvement lent de l'ombre. Ce mouvement a la même amplitude que le mouvement réel, mais il peut être rendu aussi lent qu'on le désire.

Pour mettre en œuvre la méthode dont nous venons d'exposer le principe, on produit les interruptions de la lumiere à l'aide d'un diapason vibrant ; celui-ci porte aux extrémités de ses branches deux petits écrans munis chacun d'une fente rectiligne F ; ces fentes coïncident quand le diapason est en équilibre chaque fois que le diapason repasse par sa position d'équilibre, la même coïncidence se reproduit.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

A chaque coincidence correspond un éclair qui saisit le diapason étudié dans une phase de son mouvement.

Il existe une relation entre les périodes de vibration du diapason étudié D et du diapason interrupteur I.

L'intervalle qui sépare deux éclairs consécutifs est le temps nécessaire pour que le diapason interrupteur repasse par sa position d'équilibre ; ce temps est égal à la durée d'une vibration simple du diapason interrupteur. Pour que le rayon lumineux saisisse D toujours dans la même phase de son mouvement, il faut que cet intervalle soit égal à celui d'une vibration double de D. Il en résulte que la période de vibration de l'interrupteur doit avoir une durée double de la période de vibration du diapason étudié. Si D donne ut_2, l'interrupteur doit donner ut_1.

Lorsqu'on réalise exactement cette condition que les périodes soient doubles l'une de l'autre, l'ombre de D paraît immobile. Il suffit alors d'un léger déréglage, obtenu en déplaçant une petite masse sur une branche de l'interrupteur, pour produire un mouvement plus ou moins rapide de l'ombre.

Méthode stroboscopique.

9. — La méthode que nous venons d'exposer n'est qu'une application particulière d'une méthode générale connue sous le nom de méthode stroboscopique.

Cette méthode est applicable à l'étude d'un phénomène périodique quelconque. Un phénomène quelconque est caractérisé par une grandeur, que nous pourrions appeler son intensité. Cette grandeur est une fonction du temps. Nous pourrons convenir de représenter les diverses phases du phénomène par une courbe. Pour fixer les idées, supposons que nous voulions étudier le mouvement vibratoire d'un diapason. Nous représenterons ce mouvement en prenant comme abscisses les temps, et comme ordonnées les élongations (1) qui caractérisent l'état du

(1) Si on considère un point vibrant, on appelle élongation, à l'instant t, la distance de la position du point en cet instant à sa position d'équilibre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

diapason aux différents instants

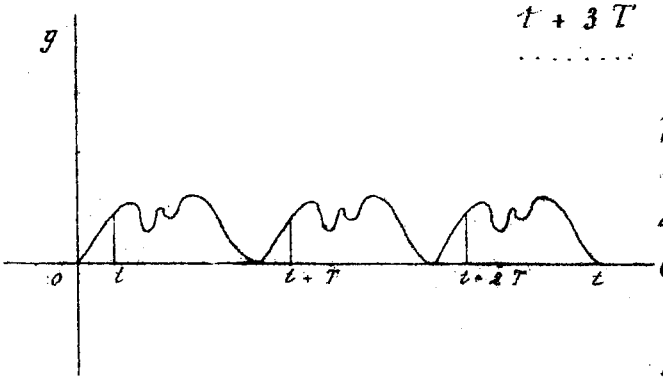
Le phénomène est alors représenté par une courbe périodique.

L'étude du mouvement se réduit à trouver les valeurs des différentes ordonnées pour les temps correspondants. Pour cela, on saisit le phénomène à un instant t où il a une valeur y_t; on le saisit de même au temps $t + T$ où il reprend la même valeur y_t (T étant la durée de la période),

puis au temps $t + 2T$

$t + 3T$

.....



Dans chacune des périodes de la courbe, on a un point qui a même ordonnée. On n'observe le phénomène qu'au moment où il a l'intensité représentée par cette ordonnée, donc le phénomène paraît constant.

Si maintenant on observe d'abord au temps t, puis au temps $t + T + \varepsilon$, ε étant très petit, le phénomène est représenté par l'ordonnée $y + \Delta y$; au temps $t + 2T + 2\varepsilon$ par $y + \Delta y + \Delta' y$ et ainsi de suite

On obtient ainsi une série d'ordonnées qui sont les différentes ordonnées de la courbe correspondant chaque fois à un accroissement du temps ε. Ce sont les ordonnées représentant le phénomène aux instants:

$$t,\ t + \varepsilon,\ t + 2\varepsilon, \ldots$$

et ainsi de suite.

On conçoit facilement que cette méthode est générale et applicable à un phénomène périodique quelconque; nous allons en donner quelques exemples.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Etude de la constitution de la veine liquide. Expériences de Savart.

10. — La veine liquide qui s'écoule par un orifice percé en mince paroi, présente au-dessous de la section contractée une première partie limpide et au delà une partie trouble. Savart a montré que dans cette partie trouble, la veine était constituée par des gouttelettes séparées se succédant rapidement et périodiquement.

Il suffit pour mettre ce fait en évidence d'appliquer la méthode stroboscopique. Considérons une des gouttes qui constituent la veine; supposons que nous éclairions par intermittences l'endroit où elle se trouve à un certain instant; si l'intervalle entre deux éclairements est convenablement choisi, au second éclair une seconde goutte sera venue remplacer la première; puis au même endroit se trouveront successivement une troisième, une quatrième goutte etc. Comme les gouttes qui se succèdent sont identiques entre elles, la goutte éclairée paraît immobile. Si au contraire l'intervalle qui sépare deux éclairs est trop petit, la seconde goutte ne sera pas encore arrivée à l'endroit où se trouvait la première lorsqu'elle recevra le rayon lumineux; donc la seconde goutte paraîtra plus haut que la première, la troisième plus haut que la seconde et ainsi de suite. Les gouttes observées paraîtront donc remonter lentement. Si au contraire l'intervalle qui sépare deux éclairs est trop grand, la seconde goutte sera éclairée lorsqu'elle aura dépassé l'endroit où se trouvait la première goutte au moment où celle-ci avait été éclairée. Un raisonnement analogue au précédent montre que les gouttes paraîtront descendre lentement.

On réalise facilement l'éclairement intermittent de la goutte en faisant tourner devant la veine liquide un disque percé d'une série de fentes dirigées suivant les rayons.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

lorsqu'une fente passe par la position verticale, la veine est éclairée. En faisant varier la vitesse de rotation du disque, on pourra réaliser les trois cas d'expérience cités précédemment.

11. — La méthode stroboscopique a été employée dans toutes les branches de la physique. Foucault s'en est servi pour mesurer la vitesse de la lumière, Helmholtz pour étudier les oscillations électriques qui accompagnent la décharge d'une bouteille de Leyde. On l'a employée aussi à l'étude des variations de la pression dans les cylindres de machines à vapeur.

Dans ces dernières années, M. Joubert en a fait une application ingénieuse à l'étude des machines magnéto-électriques

12. Dans les expériences de M. Joubert, il s'agissait de connaître les variations de l'intensité des courants fournis par les machines magnéto-électriques pendant la rotation de ces machines. Il était impossible d'employer à cet effet les instruments ordinaires de mesure ; les machines à courants alternatifs étudiées produisaient au moins six inversions du courant à chaque révolution ; elles tournaient avec une vitesse supérieure à 10 tours par seconde. On avait donc au moins 60 inversions par seconde. Même si l'instrument de mesure avait pu suivre les oscillations du courant, il aurait été impossible à l'œil de suivre le mouvement de l'instrument. M. Joubert a résolu la question à l'aide de l'artifice suivant :

L'instrument de mesure, un électromètre à quadrants, est placé dans un circuit qui n'est fermé que pendant un temps très court, lorsque la machine se trouve dans une même phase déterminée de son mouvement. Il est évident qu'alors la déviation de l'aiguille de l'électromètre sera permanente et caractéristique de l'intensité du courant de la machine, au moment où se produit le contact.

L'appareil se compose de deux petites roues en cuivre fixées sur un même manchon, parfaitement isolées et portant chacune près de leur circonférence un petit couteau de forme triangulaire qui vient à chaque révolution, butter contre un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

couteau semblable placé à l'extrémité d'un ressort également isolé. On peut régler les deux ressorts de manière que les deux contacts s'opèrent rigoureusement au même instant ; quant au système des deux roues, on peut le caler sur l'arbre de manière que le contact s'opère à une phase quelconque de la rotation.

13. — Dans tout ce qui précède nous n'avons parlé que des sons provenant des vibrations de corps solides. — Les sons peuvent être produits aussi par les vibrations des liquides ou des gaz.

Il est très difficile de mettre en évidence la production des sons par les vibrations des liquides. — Nous ne rappellerons à ce sujet que les expériences dans lesquelles Savart étudia la production des sons par une sirène à eau.

14. — La production des sons par les vibrations des gaz donne lieu à des expériences plus connues, que nous aurons occasion de retrouver quand nous étudierons la sirène de Cagniard Latour, les tuyaux sonores etc.

15. — Nous pouvons produire un son dû aux vibrations de l'air en introduisant dans un tube une toile métallique chauffée. Ce son dure autant que la toile métallique est chaude. On peut l'entretenir d'une façon durable, en plaçant sur la toile métallique un petit morceau de braise incandescente.

Le son est produit ici par les vibrations de l'air qui traverse la toile métallique de bas en haut. Si on couche le tube le son cesse immédiatement.

On peut répéter l'expérience avec un tube de verre ou un tube de cuivre, le résultat est le même.

Cette expérience est analogue à celle de l'harmonica chimique ; elle est plus simple ; il ne s'y produit pas comme dans l'harmonica de petites explosions auxquelles pourraient être attribués les sons perçus.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Qualités du son.

16. — L'expérience nous apprend que les différents sons se distinguent les uns des autres par trois qualités. 1° Leur hauteur, 2° Leur intensité, 3° Leur timbre.

Hauteur.

La hauteur d'un son est la qualité qui nous permet de distinguer divers sons de la gamme. Nous avons la notion d'un son plus aigu ou plus grave qu'un autre. Nous établirons que la hauteur d'un son dépend du nombre des vibrations de ce son par seconde.

Intensité. Si on fait vibrer un diapason, on constate que la hauteur du son restant la même, la sensation produite par ce son s'affaiblit si on s'éloigne ou si on n'entretient pas le mouvement vibratoire. Cet affaiblissement est attribué à une diminution de l'intensité du son. L'intensité est une seconde qualité des sons; elle dépend de l'amplitude du mouvement vibratoire.

Timbre. Lorsque des instruments différents, un piano, un violo, un diapason et un tuyau d'orgue donnent des sons de même hauteur pour l'oreille; la sensation produite par ces différents instruments n'est pas la même; nous pouvons distinguer l'instrument qui a produit le son, grâce à une qualité spéciale qu'on appelle le timbre. Nous verrons que le timbre qui caractérise un son est dû à la superposition de plusieurs mouvements vibratoires.

Hauteur des sons.

17. — La hauteur d'un son ne dépend que du nombre des vibrations qui produisent le son.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Pour démontrer cette proposition par l'expérience, nous pouvons employer deux méthodes inverses.

Dans la première, nous montrerons que si deux sons ont la même hauteur, c'est-à-dire s'ils sont à l'unisson pour l'oreille, ils ont le même nombre de vibrations. Pour cela il suffira de mesurer le nombre n de vibrations par seconde pour chacun des sons.

Dans la seconde, nous produirons deux sons qui aient le même nombre de vibrations, et nous constaterons qu'ils sont à l'unisson pour l'oreille et par suite qu'ils ont la même hauteur.

La première méthode exige la mesure du nombre des vibrations ; nous y reviendrons plus loin.

La seconde méthode peut être appliquée simplement de plusieurs façons.

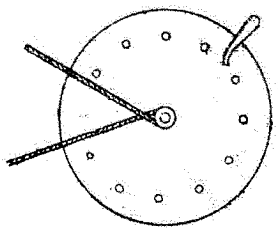
18. — 1° Sirène. La sirène de Cagniard-Latour permet de produire de deux façons différentes deux sons qui aient le même nombre de vibrations.

Si des trous du plateau supérieur mobile, on approche une carte, cette carte frappée par le courant d'air issu des trous entrera en vibration ; les vibrations de la carte coïncideront avec les vibrations de l'air qui produisent le son donné par la sirène. Ces deux sons ont le même nombre de vibrations. Or on constate qu'ils ont la même hauteur.

19. — 2° Diapason transformé en sirène. On peut encore, pour faire cette vérification, se servir d'un diapason qui par une modification simple, est transformé en une sorte de sirène. Une des branches d'un diapason est placée au-dessus d'une fente par laquelle sort un jet d'air continu fourni par un soufflet. A chaque vibration du diapason, le jet est interrompu ; on entend alors un son qui a la même hauteur que le son du diapason ; on le constate par le renforcement obtenu lorsqu'on rétablit le jet d'air.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

20. — 3° Sirène de Seebeck. On peut encore faire l'expérience en employant toute la série des sons fournis par la Sirène de Seebeck. C'est un disque de carton ou de cuivre mobile autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan, ce disque porte plusieurs séries de trous disposés sur des circonférences concentriques; les trous correspondant à une même circonférence sont équidistants les uns des autres; ceux qui correspondent aux différentes circonférences sont disposés suivant les rayons.



Des tubes porte-vent permettent de diriger le courant d'air d'une soufflerie sur une des séries de trous. Cette sirène est analogue à celle de Cagniard-Latour, mais le mouvement est fourni par un moteur extérieur. On opérera avec elle comme on le fait pour la sirène ordinaire, en approchant une carte du disque tournant.

Détermination du nombre de vibrations d'un son.

21. — Pour appliquer l'autre méthode, il faut déterminer le nombre de vibrations par seconde correspondant à un son donné.

On a proposé à cet effet plusieurs procédés que nous allons passer en revue.

Sirène de Cagniard-Latour.

22. — La Sirène de Cagniard-Latour dont nous avons déjà parlé fournit une première solution de la question.

Dans cet instrument, si on fait croître progressivement la vitesse de rotation du disque supérieur, on constate que le son produit par les vibrations de l'air ne devient perceptible que lorsque la vitesse de rotation dépasse une certaine limite. Il y a donc une limite inférieure du nombre des vibrations d'un son, au-dessous de laquelle il est impossible à l'oreille de percevoir une sensation sonore. Pour des vitesses de rotation assez

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

grandes, on obtiendra un son, d'autant plus haut que la vitesse de rotation sera plus considérable.

Si l'on veut mesurer le nombre de vibrations correspondant à un son donné, il suffira d'imprimer au plateau supérieur une vitesse de rotation telle que le son produit par la sirène soit à l'unisson du son donné. Si n est le nombre de trous du plateau inférieur de la sirène, K le nombre de tours faits en p secondes, le son correspondra à $\frac{Kn}{p}$ vibrations par seconde.

L'instrument devra comprendre: 1° un système permettant de donner au plateau mobile une vitesse de rotation déterminée et constante; 2° un compteur de tours.

Le mouvement de rotation est automatique. Il est produit par la pression que l'air du porte-vent exerce sur le plateau supérieur. – A cet effet les trous de ce plateau sont cylindriques; mais pour chacun d'eux l'axe du cylindre est dans un plan vertical perpendiculaire au rayon du disque. Les axes des trous dans les deux plateaux ne coïncident pas; ils sont inclinés de 45° en sens inverse sur le plan des plateaux; au moment où les trous coïncident, ces axes sont à angle droit l'un sur l'autre. L'air du porte-vent qui s'échappe par l'orifice du disque inférieur vient frapper normalement la paroi du disque supérieur; la pression de l'air entretient le mouvement de rotation.

Pour que le son conserve une hauteur constante, il faut que la vitesse de rotation soit elle-même constante, et par suite que la pression de l'air dans le porte-vent ne soit sujette à aucune variation. – On emploie à cet effet les soufflerie à régulateurs de Cavaillé-Coll.

La sirène de Cagniard-Latour est un instrument très ingénieux, mais dont l'usage est délicat.

Pour diminuer les erreurs relatives des mesures, il faut que le son se maintienne constant pendant un temps assez long, il faut donc que la soufflerie produise un courant d'air

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

dont la pression soit rigoureusement constante. Or, malgré la perfection des soufflerie employées, on ne peut jamais obtenir la constance du son que pendant un temps très court. Il est facile de produire un son dont la hauteur moyenne est à peu près constante pendant une ou deux minutes; mais il est difficile d'éviter, même pendant ce faible intervalle de temps, de légères variations dans la hauteur.

23. — Méthode graphique. La méthode la plus employée actuellement est la méthode graphique; elle consiste à faire inscrire par le corps vibrant lui-même les vibrations qu'il exécute.

On emploie pour cela un diapason que l'on ajuste de manière qu'il vibre à l'unisson du son étudié.

On arme l'une des branches du diapason d'une pointe fine; on le fait vibrer et on fait passer devant la pointe dans une direction perpendiculaire à la direction des vibrations une plaque de verre enduite de noir de fumée.

La pointe trace sur la plaque une ligne sinusoïdale. Chaque période de la courbe correspond à une vibration complète. En comptant le nombre des périodes de la courbe qui correspondent à un temps donné, on peut en déduire le nombre de vibrations par seconde.

24. — On peut mettre en évidence pour un nombreux auditoire cette inscription des vibrations à l'aide de l'appareil suivant qui a été construit par M. Duboscq.

On éclaire vivement à l'aide d'une lampe électrique une plaque de verre AB enduite de noir de fumée et disposée horizontalement sur un support. -

Un diapason dont une des branches est munie d'un style se déplace d'un mouvement de translation horizontal au-dessus de cette plaque. La courbe sinusoïdale décrite par le style est projetée sur un écran à l'aide d'un prisme à réflexion totale.

25. — Dans la méthode graphique, la mesure du nombre de vibrations par seconde revient à l'évaluation de la vitesse du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

déplacement de la plaque ou du diapason pendant une seconde.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour arriver à ce but.

1° Un premier procédé emploie les lois de la chute des corps à la détermination du temps.

On laisse tomber la lame de verre en chute libre. Du chemin parcouru on peut déduire le temps employé à le parcourir, en appliquant les formules de la pesanteur.

Si e est l'espace correspondant à n vibrations (n périodes de la courbe comptées à partir de l'origine du mouvement), le temps correspondant à ces n vibrations sera donné par la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2$$

d'où $$t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$$

Le nombre de vibrations par seconde est $\frac{n}{t} = n\sqrt{\frac{g}{2e}}$.

Le chemin parcouru est évalué à l'aide d'une graduation en millimètres tracée d'avance sur la lame de verre.

On diminue l'influence de la résistance de l'air en fixant la lame de verre sur une masse de plomb ou de fer qui glisse à frottements doux entre deux montants verticaux. La force vive de la masse est amortie à la partie inférieure par un bloc de caoutchouc.

La courbe décrite par l'extrémité du style est une courbe sinusoïdale dont il est facile de trouver l'équation.

On verra plus loin que si y désigne la distance au temps t d'un point vibrant à sa position d'équilibre, on a entre y et t la relation $$y = a \sin(\alpha t + \beta)$$
a, α, β, étant des constantes indépendantes du temps.

Prenons pour abscisses x les espaces parcourus par la plaque. Nous aurons

$$x = \frac{1}{2} g t^2$$

L'équation de la courbe est obtenue en éliminant t entre ces deux équations, d'où

$$y = A \sin\left(\alpha \sqrt{\frac{2x}{g}} + \beta\right)$$

La méthode de la chute libre présente cet avantage qu'elle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

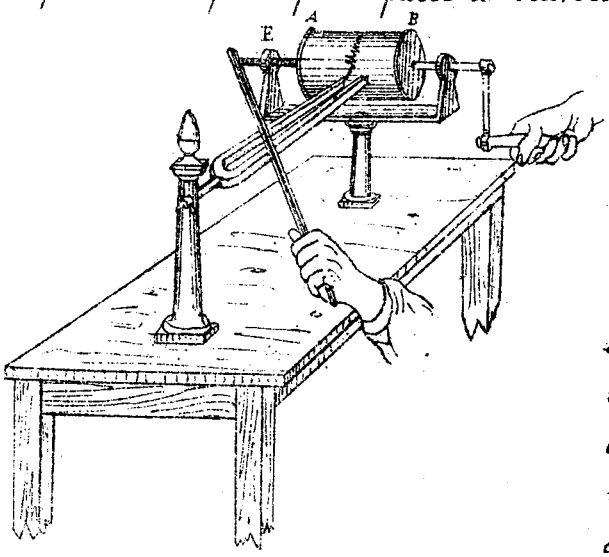
ne nécessite pas d'instrument particulier pour la mesure des temps; elle détermine ces temps avec une très grande approximation. Elle peut être utilisée avec succès dans les laboratoires de recherches où les appareils de précision font défaut.

Malheureusement, dans le cas qui nous occupe, les expériences ne peuvent être faites que dans des conditions où les espaces parcourus pendant la chute sont limités; alors la précision qu'on obtient pour la mesure des espaces et pour celle des temps est également limitée.

26. — Toutes choses étant égales d'ailleurs, il est évident que l'erreur relative sur la mesure des temps est d'autant plus faible que l'expérience dure plus longtemps.

La meilleure disposition est encore celle du cylindre enregistreur de Duhamel, inventeur de la méthode graphique. Cette méthode successivement perfectionnée par divers physiciens est aujourd'hui susceptible d'une haute précision.

Un cylindre A B enduit de noir de fumée peut tourner autour de son axe. Cet axe est fileté à une de ses extrémités et le filet de vis qu'il porte passe à travers un écrou fixe E.



Dans l'appareil primitif de Duhamel, ce cylindre était mu à la main à l'aide d'une manivelle. En même temps il se déplaçait parallèlement à son axe. Un diapason dont une des branches était munie d'un style inscrivait ses vibrations sur la surface du cylindre.

Dans les appareils plus perfectionnés, un mouvement d'horlogerie produit la rotation uniforme du cylindre qui en même temps se déplace parallèlement à son axe d'un mouvement uniforme.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Sur la surface du cylindre s'appuient les pointes de deux styles.

1° Le premier S est fixé à une des branches du diapason étudié. Si le diapason ne vibre pas, ce style tracera sur le cylindre une hélice; si le diapason vibre, la courbe décrite sera une ligne sinusoïdale qui aura pour axe cette hélice.

2° L'autre style S' est commandé par un électro-aimant actionné par un courant électrique qui est fermé ou rompu à des intervalles réguliers par un pendule à secondes.

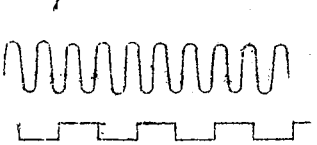
Avec cette disposition on inscrit à la fois
le temps
le nombre des vibrations

Pour donner la plus grande précision à l'expérience, il faut qu'elle soit prolongée pendant une longue durée. Cette condition exige que l'on entretienne les vibrations du diapason qui tendent à s'éteindre rapidement. On ne peut songer à exciter le diapason de temps en temps avec un archet; on introduirait ainsi des perturbations qui rompraient la continuité de la courbe. On se sert de diapasons entretenus électriquement.

Quelquefois l'appareil présente une disposition différente; c'est celle qui est employée dans le chronographe enregistreur que la Sorbonne possède.

Le cylindre tourne d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe, mais sans se déplacer longitudinalement. Le diapason et le style du pendule sont portés par un chariot qui se déplace parallèlement à l'axe du cylindre avec un mouvement de translation uniforme. Avec cette disposition, on arrive évidemment aux mêmes résultats qu'avec celle qui a été précédemment décrite.

27. — On obtient sur le cylindre deux courbes héliçoïdales; l'une sinusoïdale est la courbe des vibrations du diapason, l'autre composée de parties rectilignes est la courbe décrite

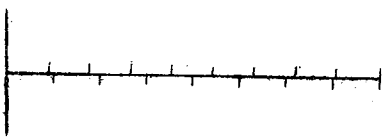


Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

par le style du pendule.

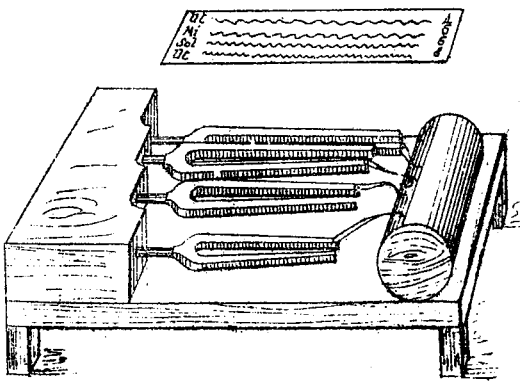
On fait durer l'expérience pendant un temps très considérable; on compte ensuite le nombre des vibrations comprises entre deux génératrices du cylindre passant l'une et l'autre par des traits verticaux du style du pendule; ces traits doivent correspondre tous deux à une rupture ou tous deux à une fermeture du circuit. Il faut bien se garder de compter le nombre de vibrations compris entre deux instants correspondant l'un à une rupture, l'autre à une fermeture du circuit. Le résultat obtenu dans ce cas serait variable, car il dépendrait essentiellement de la manière dont le contact a été établi.

28. — Analogies de la méthode graphique. La méthode graphique n'est que la traduction graphique de la méthode des coïncidences, imaginée par Borda pour la comparaison des périodes d'oscillation de deux pendules. Supposons que les deux pendules à comparer inscrivent côte à côte sur le cylindre de l'appareil précédent les instants de leur passage à la position verticale. S'ils partent ensemble de leur position d'équilibre, on aura la figure suivante.



Comme on le voit cette figure n'est autre que celle du vernier

La méthode des coïncidences est donc la méthode du vernier appliquée à la mesure des temps.



Comparaison des périodes de deux diapasons.

29. — La méthode graphique permet de comparer facilement les durées de vibration de plusieurs diapasons. Il suffit d'inscrire leurs vibrations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

respectives les unes à côté des autres sur le même cylindre. Les vibrations effectuées pendant le même temps sont mesurées par le nombre de sinuosités de la courbe comprises entre deux génératrices du cylindre.

30. — L'analyse des expériences précédentes montre que la période de vibration d'un diapason est constante et indépendante de l'amplitude de la vibration. Le pendule est aussi un appareil dont la durée d'oscillation est indépendante de l'amplitude quand celle-ci est faible. C'est grâce à cette propriété de l'isochronisme des petites oscillations que le pendule a pu être employé à la mesure du temps.

Le diapason peut aussi servir à cette mesure, mais avec une précision beaucoup plus grande, puisqu'avec un diapason qui ferait 100 vibrations par seconde on pourrait évaluer le temps à $\frac{1}{100}$ de seconde près.

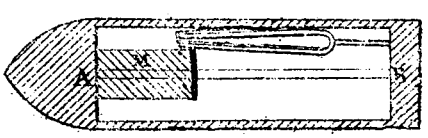
Emploi du diapason pour la mesure du temps.

31. — Nous allons donner quelques exemples de l'emploi du diapason pour la mesure du temps.

Supposons que l'on veuille vérifier que la vitesse de rotation d'un cylindre est constante. On inscrira sur la surface de ce cylindre les vibrations d'un diapason et on vérifiera qu'entre des génératrices équidistantes, il y a toujours le même nombre de vibrations.

32. — Il y a même certains cas où le diapason peut servir commodément à la mesure du temps, alors qu'aucun autre appareil ne pourrait être employé.

Nous donnerons comme exemple de cette application les expériences de M. le Colonel Sebert relatives à la loi du mouvement d'un obus dans l'âme de la pièce.



Un obus creux contient une longue chambre cylindrique intérieure traversée suivant son axe par une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

tringle métallique AB. Le long de cette tringle peut se déplacer a frottement doux une masse de bronze M. Cette masse est au début dans la partie antérieure du projectile.

Supposons l'obus placé dans la pièce; lorsqu'il est chassé par la dilatation subite des gaz de la poudre, la masse M en raison de son inertie reste immobile, l'obus se déplace par rapport à cette masse; celle-ci paraît glisser le long de la tringle AB. Si l'on fait abstraction du faible frottement qui s'exerce entre la masse M et la tringle sur laquelle elle est mobile, le mouvement apparent de la masse M par rapport à l'obus sera en fonction du temps représenté par la même loi que le mouvement de l'obus dans la pièce.

Pour trouver cette loi, on fixe à l'obus un diapason inscripteur; le style décrit la courbe sinusoïdale des vibrations sur une plaque de métal enfumé fixée sur la masse de bronze.

Si le diapason ne vibrait pas, le style dont sa branche est munie décrirait une droite ab; les espaces parcourus par ce style dans un temps donné mesurent les espaces parcourus réellement par l'obus. Le temps correspondant est évalué à l'aide de la courbe des vibrations du diapason.

M. le colonel Sébert a appliqué la même méthode à divers autres problèmes relatifs à la balistique; il l'a employée à déterminer la pression développée par les gaz de la poudre, ainsi que l'influence de la résistance de l'air sur le mouvement des projectiles.

Horloge à diapason.

33. — On doit à Niaudet une disposition ingénieuse qui permet de compter, en les totalisant, le nombre des vibrations effectuées par un diapason pendant des heures entières. — On peut ainsi opérer sur des nombres de vibrations plus considérables, ce qui permet d'obtenir une plus grande précision dans les mesures.

La roue d'échappement d'une horloge est retenue par deux petits taquets fixés aux branches d'un diapason. A chaque vibration du diapason, le taquet se déclanche et la roue tourne d'une dent. On obtient ainsi une horloge qui, à cause de la faible

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

période des vibrations marche d'un mouvement en apparence continu.

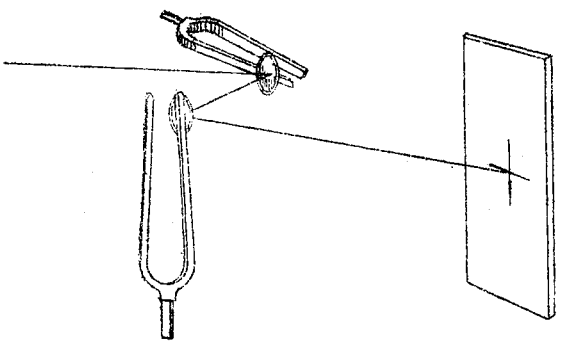
34. — L'horloge de Niaudet n'est pas une simple curiosité mécanique. Dans ces dernières années, M. Kœnig a utilisé le principe sur lequel elle est fondée dans des expériences de la plus haute précision, entreprises en vue de la construction du diapason normal.

Si on compare la marche d'une horloge à diapason à celle d'un bon chronomètre, les indications de l'horloge donneront le nombre des vibrations effectuées par le diapason pendant un temps considérable, une journée par exemple, sans qu'il soit nécessaire de les compter. Les erreurs relatives sont alors excessivement faibles.

M. Kœnig a étudié par cette méthode les variations produites par diverses causes sur la période de vibration des diapasons. Il a trouvé ainsi qu'une variation de température de 1° produisait sur le nombre n de vibrations par seconde une diminution de $\frac{1}{7000}$ environ de sa valeur; la période varie encore si le diapason est placé au contact d'une boîte de résonnance, ou s'il se trouve dans le voisinage d'un résonnateur.

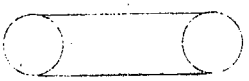
Les méthodes précédentes, employées pour mesurer les périodes de vibrations, ne sont que des modifications de la méthode des coincidences; il n'en est pas de même de la méthode optique imaginée par Lissajous; cette méthode nous permettra de comparer les périodes de deux diapasons.

35. — Méthode optique de Lissajous. Supposons d'abord que sur l'une des branches d'un diapason, on fixe perpendiculairement à son plan de vibration un miroir équilibré par un contre-poids placé sur l'autre branche. Sur ce miroir on fait tomber un faisceau lumineux fourni par une lampe électrique. Lorsque le diapason est au



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

repos, le faisceau lumineux réfléchi donne sur un écran un tache fixe. Si le diapason supposé horizontal entre en vibration, l'image lumineuse se déplace horizontalement ; à cause de la persistance des impressions rétiniennes, on aperçoit une bande lumineuse terminée par deux parties circulaires plus vivement éclairées. – Un diapason à branches verticales produirait une bande lumineuse verticale.



Si un faisceau lumineux tombant sur le miroir d'un diapason horizontal est renvoyé après sa réflexion sur le miroir d'un diapason vertical, le mouvement observé résultera des mouvements propres de chaque diapason ; la courbe décrite par la tache lumineuse aura une forme plus ou moins compliquée.

Dans le cas simple où les deux diapasons sont à l'unisson, la courbe décrite sera en général une ellipse, qui dans certains cas particuliers se réduit à un cercle ou à une droite.

Supposons qu'on observe une ellipse ; arrêtons le diapason, puis faisons le vibrer de nouveau afin d'obtenir successivement toutes les figures produites par la composition des deux mouvements. Si on maintient constantes les amplitudes des deux mouvements vibratoires, par exemple en se servant de diapasons entretenus électriquement, ces ellipses seront toujours inscrites dans un même rectangle dont les côtés sont parallèles aux directions des vibrations produites par chacun des diapasons supposé seul.

Nous allons indiquer la théorie de cette expérience ; cette théorie s'applique en optique aux phénomènes de la polarisation elliptique ; auparavant, il faut établir l'équation du mouvement d'un diapason.

Équation différentielle du mouvement vibratoire.

36. — Le problème qui consisterait à trouver la loi du mouvement d'un diapason est un problème très complexe. Nous le simplifierons en n'étudiant que le mouvement de l'extrémité de la branche qui porte le miroir ; et nous assimilerons cette extrémité à un point matériel vibrant qui serait sollicité à chaque

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

instant à revenir vers sa position d'équilibre par une force élastique proportionnelle à son élongation, c'est-à-dire à la distance qui le sépare de la position qu'il occupait à l'état d'équilibre.

C'est là une hypothèse

Nous devrons vérifier que les conséquences qu'on déduit de cette hypothèse sont d'accord avec les résultats de l'expérience.

Soit y l'élongation du point vibrant au temps t, m sa masse. La force a pour expression $m \frac{d^2y}{dt^2}$; d'autre part puisqu'elle est proportionnelle à l'élongation, sa valeur absolue est Ky ; comme elle tend à diminuer y, c'est une force retardatrice ; de sorte que l'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - Ky \qquad (1).$$

L'intégrale de cette équation différentielle est

$$y = A \sin (\alpha t + \beta). \qquad (2)$$

A, α, β, étant des constantes réelles indépendantes du temps. Il est facile de voir quelles valeurs il faudra donner à ces constantes pour que l'équation (1) soit vérifiée. Pour cela, formons $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$

$$\frac{dy}{dt} = A\alpha \cos (\alpha t + \beta).$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - A\alpha^2 \sin (\alpha t + \beta)$$

ou en substituant dans (1)

$$- m A \alpha^2 \sin (\alpha t + \beta) = - K A \sin (\alpha t + \beta)$$

ce qui exige que $K = m\alpha^2$

ou $\alpha = \sqrt{\frac{K}{m}}$

On voit que si on donne à α cette valeur, l'équation différentielle (1) sera toujours satisfaite, quelles que soient d'ailleurs les constantes A et β.

37. — L'équation (2) représente la loi du mouvement du point matériel vibrant ; nous la retrouverons dans l'étude de la haute optique ; on y considère en effet la lumière comme produite par le mouvement vibratoire des molécules d'éther sollicitées à chaque instant par une force proportionnelle à leur élongation. Les vibrations qui obéissent à l'équation (2) ont reçu le nom

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

général de vibrations simples, sinusoïdes ou pendulaires.

38. — L'équation (2) représente en effet la loi des oscillations d'un pendule lorsque ces oscillations sont infiniment petites, car alors la force qui tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre peut être considérée comme proportionnelle à son élongation.

39. — L'équation $y = A \sin(\alpha t + \beta)$ est même applicable dans le cas d'un système matériel quelconque pourvu que ce système soit à liaison complète avec un seul degré de liberté; et que les forces élastiques soient proportionnelles aux élongations; alors la forme du système est déterminée à chaque instant par une seule variable y. On démontre encore (voir lord Rayleigh tome I. p. 59) que pour les déformations infiniment petites d'un tel système, y satisfait à l'équation (2)

40. — Les constantes de cette équation ont reçu des noms particuliers.

A est l'amplitude de la vibration. L'amplitude est donc l'élongation maxima; la valeur de y en effet est maxima quand $\sin(\alpha t + \beta) = 1$.

$(\alpha t + \beta)$ est la phase de la vibration. La phase est donc fonction linéaire du temps.

Nous avons dit que l'équation (2) était l'équation du mouvement d'un pendule. Une des propriétés les plus importantes du pendule est l'isochronisme des oscillations.

Les oscillations sont isochrones, c'est-à-dire que leur durée est constante et indépendante de l'amplitude. Cette durée d'oscillation est appelée la période.

La période T d'oscillation est définie par cette condition que si on ajoute T au temps t le point vibrant repasse par la même position avec la même vitesse. Il faut donc que

$$\sin(\alpha t + \beta) = \sin[\alpha(t + T) + \beta]$$

De plus, pour que la vitesse soit de même sens, il faut que $\frac{dy}{dt}$ ait repris la même valeur.

Donc $\cos(\alpha t + \beta) = \cos[\alpha(t + T) + \beta]$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Pour que deux arcs inégaux aient à la fois même sinus et même cosinus, il faut qu'ils diffèrent d'un multiple pair de π, au moins de 2π. Donc la période sera déterminée par l'équation

$$\alpha(t+T)+\beta-(\alpha t+\beta)=2\pi$$

ou $\alpha T = 2\pi$

d'où $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

Comme d'ailleurs $\alpha = \sqrt{\frac{K}{m}}$

la durée T de la période est donnée par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

On voit que cette durée est indépendante de l'amplitude A de l'oscillation.

Au point de vue de l'acoustique, nous déduirons de là une conséquence importante. Nous avons démontré que la hauteur d'un son ne dépendait que du nombre de vibrations de ce son par seconde ; par suite la hauteur du son ne dépend que de la période ; la période étant indépendante de l'amplitude, la hauteur d'un son est indépendante de l'amplitude de la vibration qui le produit. Il faut remarquer que s'il en était autrement, il n'y aurait pas de musique possible.

Représentation géométrique du mouvement pendulaire.

41. — Le mouvement pendulaire représenté par l'équation (2) est susceptible d'une représentation géométrique simple. Si on prend les valeurs de y comme ordonnées, et les valeurs de t comme abscisses, la courbe

$$y = A \sin(\alpha t+\beta)$$

est une sinusoïde comprise entre les droites $y=+A$ et $y=-A$ parallèles à l'axe des t.

Choisissons l'origine des temps de façon que $\beta=0$. En remarquant que $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, l'équation de la courbe devient

$$y = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Le premier maximum correspond au cas où

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$2\pi \frac{t}{T} = \frac{\pi}{2}$$

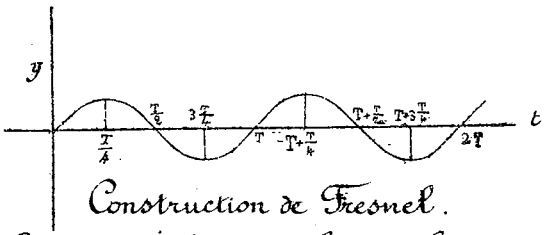
ou $t = \frac{T}{4}$. Alors $y = A$

Le tableau suivant représente les variations de y quand la phase varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ ou le temps t de 0 à T

t	0	croît	$\frac{T}{4}$	croît	$\frac{T}{2}$	croît	$\frac{3T}{4}$	croît	T
y	0	croît	Maximum A	décroît $+$	0	décroît $-$	Minimum $-A$	croît	0

et ainsi de suite.

Ces variations sont représentées par la courbe suivante.

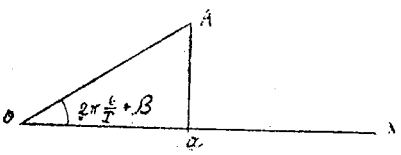


Construction de Fresnel.

42. — On représente également l'état vibratoire à chaque instant par une construction due à Fresnel.

Soit $y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right)$ l'équation du mouvement.

Par l'origine O des coordonnées, menons une droite $OA = A$ qui fasse avec l'axe OX un angle égal à la phase; abaissons de A la perpendiculaire Aa sur OX. On aura



$$Aa = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) = y$$

Si t varie, A restant constant, l'angle $2\pi \frac{t}{T} + \beta$ varie; la droite OA tourne autour du point O d'un mouvement uniforme, comme le ferait le bras d'une manivelle. Si on considère OA comme le bras d'une manivelle, on voit que Aa pourra être considéré comme la projection de cette manivelle sur un plan vertical perpendiculaire à OX. Pour faire l'expérience, on projette sur un écran vertical l'ombre d'une manivelle; on voit cette projection monter et descendre suivant la loi sinusoïdale.

Diminution graduelle de l'amplitude

43. — Parmi les conséquences que nous avons tirées de l'équation (2), nous rappellerons l'une d'entre elles : l'amplitude maxima A est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

constante ; elle est obtenue toutes les fois que la phase prend une valeur représentée par l'expression $2n\pi + \frac{\pi}{2}$, n étant un nombre entier. Or, quand un diapason vibre, on observe sans peine que l'amplitude de ses oscillations décroît rapidement et finit même par s'annuler. Donc l'équation (2) n'est pas rigoureusement celle qui représente le mouvement vibratoire du diapason. Les écarts tiennent à la résistance du milieu environnant et au frottement intérieur. L'influence du milieu ambiant est facile à démontrer par l'expérience. Il suffit de faire vibrer un diapason dans l'air, puis quand ses vibrations sont éteintes de l'exciter de nouveau en le plaçant sur une table ; on observe que dans le second cas les vibrations s'éteignent beaucoup plus rapidement que dans le premier. Quant au frottement intérieur, on désigne sous ce nom la cause inconnue à laquelle on attribue la diminution de force vive.

On peut considérer l'effet des causes de diminution de l'amplitude comme une fonction de la vitesse. Si la vitesse est faible, cette fonction peut être représentée par les premiers termes d'une série. Pour les élongations très petites, on peut négliger les termes de degré supérieur. On a alors l'équation différentielle

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - ay - b \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\text{ou} \quad m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t} + ay = 0$$

Cette équation est la même que celle du pendule quand on tient compte des résistances passives.

L'intégrale de cette équation est

$$y = A e^{-\lambda t} \sin(\alpha t + \beta)$$

On obtient encore une fonction qui a une période, car y redevient nul quand $\alpha t + \beta$ est un multiple de 2π.

$$\alpha t + \beta = 2n\pi$$

$$\text{d'où} \qquad t = \frac{2n\pi - \beta}{\alpha}$$

Lorsque n augmente de 1, la fraction augmente de $\frac{2\pi}{\alpha} = T$; si t augmente de T, y repasse par 0 ; donc T est la période. Comme dans le cas précédent, la période est indépendante de l'amplitude.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

car α est indépendant de λ . . .

On voit d'autre part que les amplitudes décroissent en progression géométrique lorsque les temps croissent en progression arithmétique.

En résumé, si on veut avoir des vibrations sonores d'amplitude constante, il faudra se servir de diapasons entretenus électriquement. Dans tout ce qui suivra, lorsque nous emploierons l'équation

$$y = A \sin (\alpha t + \beta)$$

c'est que nous supposerons que le mouvement vibratoire est entretenu.

Théorie des expériences de Lissajous.

44. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier complètement les expériences de Lissajous que nous avons vues précédemment.

Composition des vibrations rectangulaires.

Nous avons à composer deux mouvements rectangulaires, l'un dirigé horizontalement parallèlement à une droite que nous prendrons pour axe des x, l'autre verticalement parallèlement à une droite que nous prendrons pour axe des y.

Supposons d'abord que les mouvements soient de même période (les diapasons sont à l'unisson).

Soient
$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (3)$$
$$y = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \qquad (4)$$

les équations qui les représentent. Nous nous plaçons ainsi dans le cas général où les amplitudes et les phases sont différentes; β est la phase du second diapason, quand le premier passe par sa position d'équilibre.

Pour avoir l'équation de la courbe décrite par le point vibrant, il suffit d'éliminer t entre les deux équations (3) et (4).

Elles nous donnent

$$\frac{x}{A} = \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\frac{y}{B} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos\beta + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin\beta$$

ou $\cos 2\pi \frac{t}{T} = \frac{1}{\sin\beta}\left(\frac{y}{B} - \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos\beta\right) = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\beta\right]$

En écrivant que $\sin^2 2\pi \frac{t}{T} + \cos^2 2\pi \frac{t}{T} = 1$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

il vient

$$1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{1}{\sin^2\beta}\left[\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\beta\right]^2$$

ou

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\beta = \sin^2\beta.$$

Cette équation est celle d'une ellipse. – A priori on pouvait le prévoir ; c'est une courbe du second degré dont tous les points sont toujours à distance finie, car x est compris entre $-A$ et $+A$, et y entre $-B$ et $+B$, quelle que soit la variable t. Il n'y a parmi les courbes du second degré que l'ellipse qui satisfasse à cette condition. Cette ellipse est inscrite dans un rectangle limité par les droites $x = \pm A$, $y = \pm B$ qui lui sont tangentes. Il est facile d'avoir les coordonnées des points de contact. – Faisons par exemple $x = A$ il viendra

$$\sin^2\beta = 1 + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2y}{B}\cos\beta$$

ou $\left(\frac{y}{B} - \cos\beta\right)^2 = 0$

d'où $y = B\cos\beta$

De même les coordonnées du point de contact avec $x = -A$ sont

$$x = -A;\quad y = -B\cos\beta$$

avec $y = \pm B$, elles sont $y = \pm B$; $x = \pm A\cos\beta$.

La position des points de contact, et celle des axes de l'ellipse dépendent de la différence de phase β.

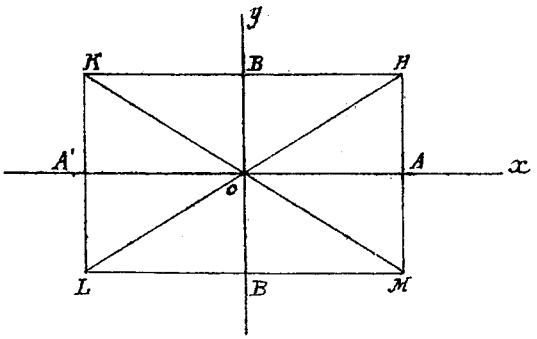
Soit d'abord $\beta = 0$ ou $\beta = 2n\pi$.

L'équation de l'ellipse se réduit à

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0$$

ou

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$



L'ellipse se réduit à une droite double $\frac{x}{A} = +\frac{y}{B}$ qui est la diagonale HL du rectangle.

Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ ou en général $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

l'équation devient

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

L'ellipse a pour axes AA' et BB'.

Entre $\beta = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$, on obtient des ellipses de moins en moins aplaties qui sont tangentes à la droite KH en des points compris entre H et B.

Pour $\beta = \pi$ ou en général $(2n+1)\pi$, l'équation se met sous la forme $\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$.

elle représente la seconde diagonale KM du rectangle.

Pour les valeurs de β intermédiaires entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on a des ellipses de plus en plus aplaties tangentes à KH entre B et K.

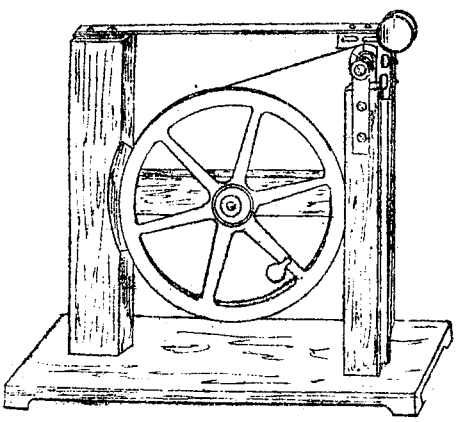
En continuant ainsi la discussion, on obtiendrait pour $\beta = \frac{3\pi}{2}$ l'ellipse rapportée à ses axes.

Un cas particulier remarquable est celui où $A = B$ avec $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$. Alors l'ellipse rapportée à ses axes se réduit à un cercle.

On retrouvera cette discussion en optique dans l'étude de la polarisation elliptique.

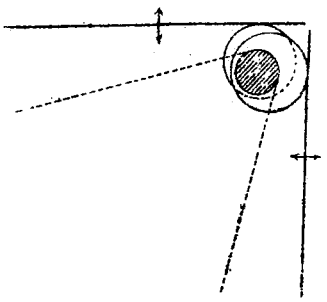
2° Vérifications expérimentales.

45. — Pour montrer la composition des mouvements vibratoires de même période, Lissajous a imaginé un appareil très simple. Il se compose de deux lentilles presque contiguës, parallèles entre elles et qui peuvent accomplir de petites oscillations rectilignes l'une L horizontalement, l'autre L' verticalement. On fait tomber sur le système des deux lentilles un faisceau lumineux qui donne son image au foyer conjugué de la source lumineuse. Si on vient à faire mouvoir rapidement la lentille L seule, l'image décrit une droite horizontale sur l'écran où elle se projette. Si L' se déplace seule, la trace lumineuse est verticale. Si L et L' se déplacent en même temps, on peut obtenir les diverses courbes



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

que la théorie nous a indiquées ; il suffit pour cela de faire varier la différence de phase des mouvements des deux lentilles.



Ces lentilles sont placées aux extrémités de ressorts C et C' qui sont périodiquement soulevés par des excentriques Z et Z' portés par l'arbre I. La différence de phase peut être modifiée en faisant varier la position d'un des excentriques ; ils ne sont en effet fixés sur l'arbre qu'à l'aide de vis de pression. L'arbre reçoit son mouvement d'une roue commandée par une manivelle, à l'aide d'une corde sans fin.

Composition des vibrations parallèles.

46. — Au lieu de faire vibrer les diapasons de Lissajous dans des plans rectangulaires, disposons les dans des plans parallèles, l'élongation résultante sera la somme des élongations des deux diapasons :

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$y = B \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right)$$

On en tire

$$x + y = A \sin 2\pi \frac{t}{T} + B \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right)$$

ou

$$x + y = \sin 2\pi \frac{t}{T}\left[A + B \cos \beta\right] + B \sin \beta \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

Posons

$$A + B \cos \beta = C \cos \gamma$$

$$B \sin \beta = C \sin \gamma$$

il vient

$$x + y = C \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \gamma\right)$$

La vibration résultante est de même nature que si elle était produite par un diapason unique d'amplitude C, de même période T, et dont la phase serait $\left(2\pi \frac{t}{T} + \gamma\right)$.

Si les deux diapasons sont entretenus électriquement, A et B sont des constantes ; si de plus les périodes sont rigoureusement égales, la différence de phase β est constante. Donc C et γ sont des constantes. La vibration résultante est exactement celle d'un diapason unique, on observe sur l'écran une bande lumineuse rectiligne.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

47. — En général, les deux diapasons n'ont pas rigoureusement la même période.

Les équations des deux vibrations sont alors

$$x = A \sin \alpha t \quad , \qquad y = B \sin \left[(\alpha + \varepsilon) t + \beta \right]$$

Cette dernière expression peut encore être écrite

$$y = B \sin \left[\alpha t + (\beta + \varepsilon t) \right]$$

On voit que si les périodes diffèrent, au terme β il faudra substituer dans les équations qui déterminent C et γ le terme $(\beta + \varepsilon t)$. Par conséquent l'amplitude du mouvement résultant C sera une fonction du temps. On aura en effet

$$C^2 = \left[A + B \cos (\beta + \varepsilon t) \right]^2 + B^2 \sin^2 (\beta + \varepsilon t)$$

$$\text{ou } C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos (\beta + \varepsilon t)$$

L'amplitude C présente une série de maxima, correspondant aux cas où $\beta + \varepsilon t = 2n\pi$, et une série de minima correspondant aux cas où $\beta + \varepsilon t = (2n+1)\pi$.

La bande lumineuse projetée a donc une longueur variable avec le temps. L'intervalle de temps qui sépare l'époque d'un minimum de l'amplitude de celle du maximum suivant est un temps τ tel que

$$\beta + \varepsilon (t + \tau) - (\beta + \varepsilon t) = (2n+1)\pi - 2n\pi = \pi$$

$$\text{ou} \qquad \varepsilon \tau = \pi$$

$$\text{d'où} \qquad \tau = \frac{\pi}{\varepsilon}$$

Or soient T et T' les périodes de vibration des deux diapasons. On a

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \qquad \alpha + \varepsilon = \frac{2\pi}{T'}$$

$$\text{d'où} \qquad \varepsilon = 2\pi \left[\frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \right]$$

Donc

$$\tau = \frac{1}{2\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)} = \frac{TT'}{2(T - T')}$$

Le mouvement est d'autant plus rapide que τ est plus petit, c'est à dire que $T - T'$ est plus grand. Si les périodes des diapasons sont très différentes, la bande lumineuse passe rapidement de sa longueur minima à sa longueur maxima. Si au contraire $T - T'$ est très petit, c'est-à dire si les diapasons vibrent à l'unisson, le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

mouvement des extrémités de la bande est très lent ; il s'annule si $T = T'$

Battements.

48. — Ces résultats coïncident avec les phénomènes perçus par l'oreille. On entend en effet une série de renforcements du son correspondant aux maxima de l'amplitude ; et entre deux renforcements, le son subit un affaiblissement correspondant à un minimum de l'amplitude. On a donné le nom de battements à ces renforcements successifs. Pour que l'oreille puisse les percevoir nettement, il faut qu'il y ait peu de battements par seconde et par suite que les sons soient presque à l'unisson.

49. — Le phénomène des battements a été utilisé pour mesurer la différence entre les périodes de vibration de deux diapasons. Nous venons de voir en effet que l'intervalle entre un renforcement et un affaiblissement était τ ; l'intervalle de deux renforcements consécutifs sera

$$2\tau = \frac{1}{\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}}$$

Soit N le nombre de vibrations par seconde du premier son.

N' le nombre de vibrations par seconde du second son.

On a $NT = 1$ ou $N = \frac{1}{T}$ et $N' = \frac{1}{T'}$.

d'où $2\tau = \frac{1}{N' - N}$.

Si deux battements sont séparés par un temps 2τ, il y a par seconde $\frac{1}{2\tau} = N' - N$ battements ; donc le nombre de battements par seconde mesure la différence entre les nombres de vibrations des deux sons.

50. — Le phénomène des battements peut encore être employé pour accorder ensemble deux diapasons. Il suffit pour cela de les régler de manière à rendre leurs battements de plus en plus lents, jusqu'à ce que ceux-ci ne soient plus perceptibles. Pratiquement cette méthode n'est pas la meilleure.

Pour accorder deux diapasons par les battements, on prend un troisième diapason qui donne avec le diapason type un nombre déterminé de battements par seconde. Soit I le diapason type, II le diapason à établir. On construit un diapason III qui fasse avec

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

I 4 battements par seconde. Puis on règle II de façon qu'il fasse avec III ce même nombre de 4 battements par seconde.

Composition des vibrations rectangulaires de périodes inégales.

51. — Les phénomènes observés lorsque les diapasons de Lissajous sont disposés à angle droit et ont des périodes inégales ne sont pas moins remarquables.

Soient T et T' les périodes des deux vibrations.

Les élongations seront données par les équations

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$y = B \sin\left(2\pi \frac{t}{T'} + \beta\right)$$

Si T est différent de T', en général l'élimination de t donne une équation transcendante $y = B \sin\left[\text{arc sin} \frac{x}{A} + \beta\right]$.

Pour que la courbe soit fermée, il faut qu'au bout d'un certain temps θ, x reprenant sa valeur initiale, il en soit de même pour y. Or chaque fois que x reprend sa valeur initiale, c'est que sa phase a augmenté de la durée d'une période. Il en est de même pour y. Soient p le nombre de périodes de x, q le nombre de périodes de y qui se sont écoulées avant que la coïncidence se reproduise. On a $\theta = pT = qT'$

$$\text{d'où} \quad pT = qT'$$

$$\text{ou} \quad \frac{T}{T'} = \frac{q}{p}$$

Donc pour que la courbe soit fermée, il faut que le rapport des périodes soit un nombre commensurable.

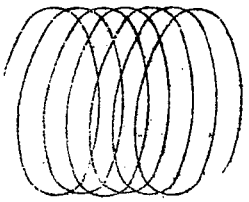
Cas où l'ellipse de Lissajous paraît se déformer d'une manière continue.

52. — Avant d'étudier quelques cas particuliers où cette condition est satisfaite, il convient d'expliquer un fait qui paraît en contradiction avec les résultats que nous venons d'obtenir.

Considérons le cas où T étant différent de T', la différence $T - T'$ est très petite. En général, le rapport de T à T' ne pourra pas être considéré comme un nombre commensurable. On voit cependant une ellipse fermée qui se déforme

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

et se déplace d'un mouvement continu. Il n'y a là qu'une apparence ; la courbe en réalité n'est pas fermée ; c'est une courbe bouclée dont les boucles sont de forme elliptique. — Si elle paraît fermée, ce n'est qu'une illusion d'optique facile à expliquer par la persistance des impressions lumineuses sur la rétine. La courbe est déterminée en fonction du temps par deux équations de la forme.



$$x = A \sin \alpha t \qquad (1)$$

$$y = B \sin \left[(\alpha + \varepsilon) t + \beta \right] \qquad (2)$$

Pour qu'une boucle entière de la courbe nous apparaisse, il faut un temps Δt très court. Pendant ce temps εt varie de $\varepsilon \Delta t$; mais ε est très petit ; le terme $\varepsilon \Delta t$, infiniment petit du second ordre est négligeable vis à vis de εt. Donc dans le temps nécessaire à la perception d'une boucle de la courbe, tout se passe comme si $\varepsilon \Delta t = 0$; ce qu'on voit, c'est l'ellipse représentée par les équations (1) et (2) ; εt allant en croissant, tout se passe comme si la différence de phase, constante pendant la durée d'une vibration, allait en croissant avec le temps.

53. — Examinons maintenant différents cas où $\frac{T}{T'}$ est un nombre commensurable. — La discussion des principaux phénomènes observés se fait facilement, sans qu'il soit besoin d'éliminer t, sur les équations qui donnent x et y en fonction de t.

Soient donc $x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$

$$y = B \sin \left(2\pi \frac{t}{T'} + \beta \right)$$

les cordonnées d'un point de la courbe en fonction de t.

La courbe est fermée, et toujours inscrite dans un rectangle dont les côtés sont $x = \pm A$ et $y = \pm B$. Si $\frac{T'}{T} = \frac{p}{q}$, la courbe a p points de contact avec $x = A$ et q points de contact avec $y = B$. (on suppose la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux.)

En effet les maxima et minima de x sont $+A$ et $-A$; ceux de y sont $+B$ et $-B$. La courbe est donc tangente aux quatre droites

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$x = \pm A$, $y = \pm B$.

De plus, chaque fois que le premier diapason a accompli une période T, x reprend la valeur A.

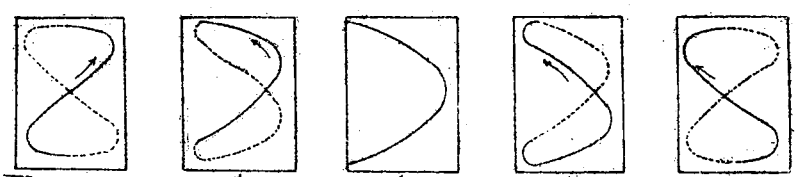
Comme ce fait se reproduit p fois jusqu'à ce que la courbe se ferme, elle aura p points de contact avec $x = A$; de même elle aura q points de contact avec $y = B$.

Applications. — 1°. Diapasons à l'octave l'un de l'autre. Dans ce cas, $T' = 2T$.

Alors $p = 2$, $q = 1$

La courbe a un point de contact avec les côtés horizontaux et deux points de contact avec les côtés verticaux. La forme de la courbe dépend de la différence de phase initiale. — Comme le réglage n'est jamais parfait, la différence de phase varie avec le temps et on obtient successivement toutes les formes correspondant aux diverses valeurs de la différence de phase.

Octave 1:2



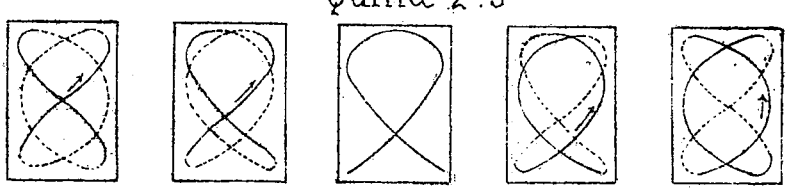
Phase : 0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$

2°. Diapasons à la quinte

$3\,T = 2\,T'$

Alors $p = 3$ $q = 2$. Trois contacts avec les côtés verticaux, deux avec les côtés horizontaux.

Quinte 2:3



Phase 0 $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{16}$ $\frac{1}{4}$

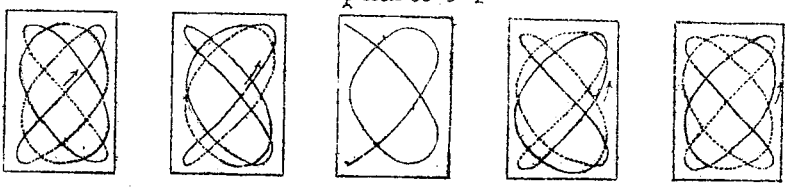
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

3° Diapasons à la quarte

$$4T = 3T'$$

$p = 4$ $q = 3$; quatre contacts avec les côtés verticaux, trois avec les côtés horizontaux.

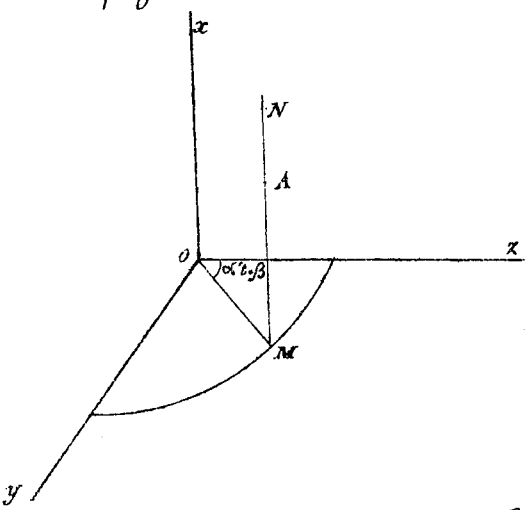
Quarte 3:4'



Phase : 0 $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$

54. — Si on observe attentivement les déformations d'une de ces courbes, on remarque qu'elle paraît tourner comme si elle était la projection d'une courbe tracé sur un cylindre qui lui même tournerait d'un mouvement lent avec une vitesse angulaire égale à la vitesse de variation de la différence de phase. Il est facile de rendre compte de cette apparence.

Je dis d'abord que β étant invariable, la courbe de Lissajous est la projection d'une courbe tracée sur un cylindre. Soit un cylindre vertical fixe ayant pour axe l'axe des x. Considérons sur ce cylindre une génératrice MN et sur cette génératrice un point A mobile dont la distance au plan des yz soit donnée à chaque instant par



$$x = A \sin \alpha t.$$

Imaginons maintenant que la génératrice MN tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe Ox avec une vitesse angulaire α'. Si on projette le point A sur le plan des xy, l'ordonnée y de cette projection est

$$y = B \sin (\alpha' t + \beta)$$

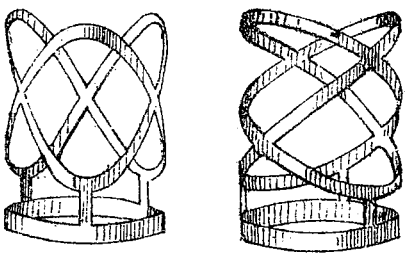
Donc x et y définissent la projection sur le plan des xy de la courbe lieu des points A sur la surface du cylindre maintenu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

immobile.

Supposons ensuite que β au lieu d'être constant soit lentement variable. β n'est autre chose que l'angle de l'axe oz avec la droite OM qui passe par la position du point A au temps $t = 0$ dans le plan des zy. Lorsque β varie, ce point, origine de la courbe cylindrique, se déplace lentement; et il en est de même de tous les autres points de cette courbe. En d'autres termes, le cylindre peut être considéré comme tournant lentement autour de son axe, avec une vitesse angulaire égale à celle du déplacement du point origine, c'est-à-dire avec la vitesse de variation de β.

55. — Grâce à cette propriété, on peut construire des carcasses métalliques cylindriques telles qu'en les éclairant par de la lumière parallèle et en projetant leur ombre sur un écran, on obtienne par la rotation lente du cylindre toutes les variétés d'une courbe de Lissajous.



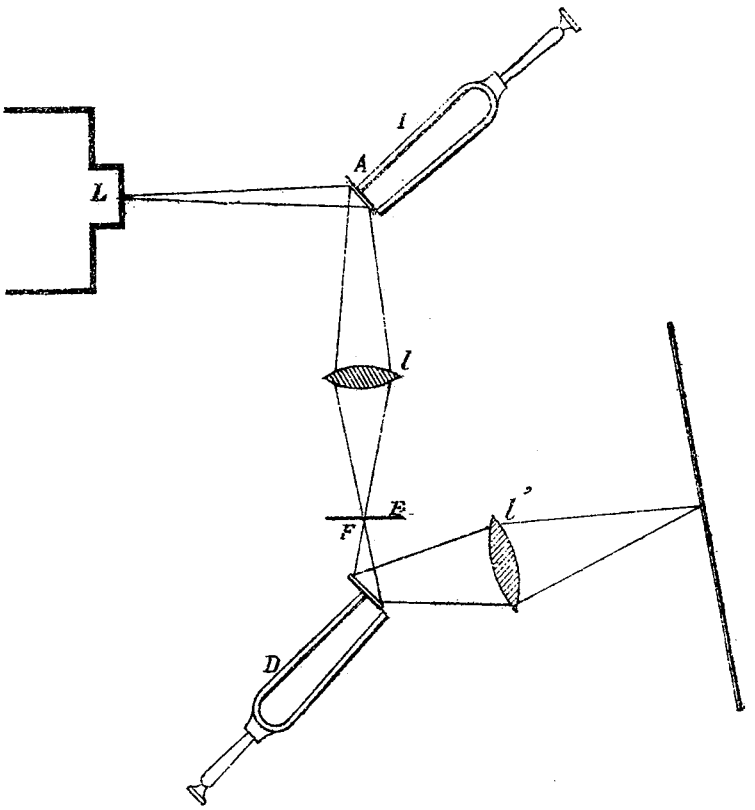
56. — Il est possible de transformer la méthode de Lissajous en une méthode d'inscription. Il suffit pour cela de munir la branche d'un des diapasons d'une plaque de verre couverte de noir de fumée; l'autre diapason porte un style qui trace sur cette plaque une courbe représentant la trajectoire d'un point mobile soumis au mouvement résultant de ceux des deux diapasons réunis.

Expériences de stroboscopie sur deux diapasons à miroir.

57. — Aux méthodes précédentes qui permettent de comparer les durées de vibration de deux diapasons, nous en ajouterons une autre; c'est une application nouvelle de la méthode stroboscopique. La lumière émanée d'une fente lumineuse L est réfléchie par un miroir placé sur la branche A du diapason I.

Le faisceau réfléchi traverse une lentille l et vient former

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



une image nette de L sur un écran E percé d'une fente F parallèle à L. L'image se forme sur F quand le diapason I est dans sa position d'équilibre.

La lumière émanée de F vient tomber sur un miroir porté par une des branches B du diapason D. Après sa reflexion, le faisceau va projeter sur un écran convenablement placé l'image rectiligne de la fente F fournie par une seconde lentille l'.

Si le diapason D vibre seul, il est constamment éclairé par le faisceau lumineux ; on observe sur l'écran un rectangle lumineux dû à la persistance des impressions rétiniennes.

Si le diapason I entre en vibration, la fente F n'est plus éclairée qu'à l'instant où I passe par sa position d'équilibre.

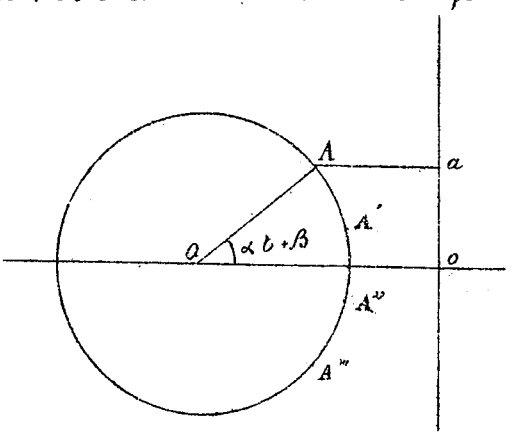
Si pendant la durée d'une vibration complète de D ce passage se produit p fois, le miroir B fournit sur l'écran p images différentes de la fente, par conséquent p lignes lumineuses. Si les diapasons sont réglés de façon que p soit un nombre entier, le diapason se

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

trouve toujours dans les mêmes phases de son mouvement aux mo. ments où se produisent les éclairements, et les lignes lumineuses sont fixes. Si l'un des diapasons avance sur l'autre, c'est à dire si p est un nombre entier plus ou moins une petite fraction, on voit encore p lignes lumineuses nettes, mais ces lignes paraissent se déplacer lentement comme le feraient les projections sur un plan de p génératrices équidistantes tracées sur un cylindre tournant d'un mouvement lent autour de son axe.

58. — Il est facile de se rendre compte de ce fait par des considérations très simples.

Représentons graphiquement le mouvement du diapason D, comme on l'a fait § 42 La phase de D est l'angle formé par OA avec la droite fixe Oo ; l'élongation de D à l'instant correspondant est ao. Si D est éclairé toutes les fois que l'élongation reprend la même valeur ao, on aperçoit sur l'écran une bande dont la trace sur le plan de la figure est a



Si le diapason interrupteur a une période quelconque, les éclairs saisissent le diapason D à des intervalles de temps quelconques mais égaux ; la position du diapason D à chaque éclairement est représentée par les points

$$A, A', A'', A''', \text{etc}$$

tels que

$$\text{arc } AA' = \text{arc } A'A'' = \text{arc } A''A''' = \ldots$$

Donc les points A, A', A''... sont les sommets d'une ligne brisée régulière inscrite dans la circonférence.

Pour qu'une telle ligne se forme, c'est-à dire pour que les points A, A', A''... soient les sommets d'un polygone régulier (convexe ou étoilé) il faut et il suffit qu'il y ait un rapport commensurable entre les arcs AA' et la circonférence ; il faut donc ici qu'il y ait

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

un rapport commensurable entre la période des interruptions de I et la période de vibration du diapason D.

Si l'intervalle de temps qui sépare deux éclairs est un sous-multiple exact de la période de D, le polygone AA'A"... est un polygone régulier convexe ; les sommets de ce polygone sont fixes, et les images lumineuses correspondantes dont les traces sont en a, a', a"... le sont aussi.

Si le rapport entre le nombre des interruptions et le nombre des vibrations doubles du diapason D dans un temps donné est commensurable et égal à $\frac{p}{q}$, le polygone AA'A"... est un polygone régulier étoilé de p côtés. On arrive aux mêmes conclusions relativement aux images lumineuses obtenues.

Si le rapport n'est pas commensurable, la ligne brisée régulière ne se ferme pas ; les sommets empiètent les uns sur les autres ; les images lumineuses présentent la même apparence que si le polygone AA'A"... tournait lentement.

59. — Si nous étudions ainsi les différents intervalles musicaux les plus remarquables, nous arriverons aux résultats inscrits dans le tableau suivant :

	Interrupteur I	Diapason D	Nombre de lignes lumineuses
1°	ut_1	ut_2	1
2°	ut_1	ut_1	2
3°	sol_1	ut_1	3
4°	ut_2	ut_1	4

En désignant en effet par T la période d'une vibration double de D, par T' la période d'une vibration simple de I, on a dans les cas qui précèdent

$$T = T'$$
$$T = 2T'$$
$$T = 3T'$$
$$T = 4T'$$

D'autre part p vibrations simples de I durent le même

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

temps que q vibrations doubles de D ; donc

$$p\,T' = q\,T$$

d'où

$$\frac{p}{q} = \frac{T}{T'}$$

Dans les cas que nous venons d'examiner, $q = 1$; et p est successivement 1, 2, 3 et 4.

60. — Cette méthode présente un intérêt particulier, car elle peut être appliquée à la comparaison des périodes d'oscillation de deux pendules.

Il suffit pour cela de munir la tige de chacun d'eux d'un miroir disposé de manière à être continuellement perpendiculaire au plan d'oscillation du pendule correspondant. — Si les périodes d'oscillation sont les mêmes pour les deux pendules, le rapport $\frac{T}{T'}$ sera égal à 2 ; il y a deux éclairements pendant une oscillation du pendule D, puisque le pendule I repasse deux fois par sa position d'équilibre pendant cette oscillation, donc on apercevra deux images de la fente ; ces deux images seront symétriques l'une de l'autre par rapport à l'image obtenue quand les deux pendules sont à leur position d'équilibre. — Si les périodes d'oscillation ne sont pas rigoureusement égales, les bandes paraissent se déplacer lentement.

Elles se superposent exactement au moment des coïncidences au zéro de l'échelle. En mesurant la distance de l'une d'elles à ce zéro, on obtient l'élongation du pendule D au moment où I passe par la verticale.

Pour effectuer cette mesure avec précision, au lieu de projeter l'image de F sur un écran blanc, on la recevra dans le plan focal d'un oculaire muni d'un micromètre divisé.

Cette méthode est beaucoup plus précise que la méthode des coïncidences de Borda. Dans la méthode de Borda, le rapport des nombres d'oscillation est donné par le rapport de deux nombres entiers qui ne sont connus qu'à une ou plusieurs unités près. Dans la méthode précédente, le rapport cherché est celui de deux nombres fractionnaires qui sont connus à une petite fraction près de leur valeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Propagation du son.

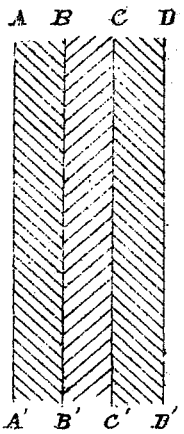
61. — Le son peut se propager dans un milieu élastique quelconque, solide, liquide ou gazeux.

Lorsque le son se propage dans un milieu fluide (liquide ou gaz) les vibrations sont toujours longitudinales.

Dans les milieux solides, les vibrations peuvent être longitudinales ou transversales.

Propagation des vibrations longitudinales.

62. — Pour nous faire une idée de la propagation des vibrations longitudinales ; divisons le milieu à travers lequel se fait cette propagation en tranches infiniment rapprochées par des plans perpendiculaires à la direction de propagation.



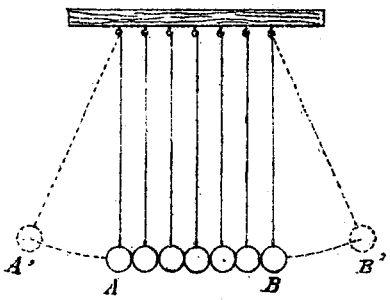
Supposons qu'on vienne à produire une compression de la tranche AA'BB'; cette tranche, en se détendant, comprime la tranche suivante BB'CC' qui, à son tour, transmet sa compression à la tranche CC'DD', et ainsi de suite. Chaque tranche, après avoir reçu une compression de la tranche voisine, la transmet à la tranche suivante en revenant elle même à son état d'équilibre.

L'effet aurait été analogue si sur la première tranche on avait produit une dilatation au lieu d'une compression.

Les expériences suivantes permettent de se rendre compte du mode de propagation des sons

63. — 1° Plusieurs boules d'ivoire sont suspendues à une traverse en bois par des fils de même longueur et se touchent entre elles Si avec un marteau de bois on frappe sur l'une des boules extrêmes A, on voit immédiatement l'autre boule extrême B s'écarter de sa position d'équilibre, dans que le

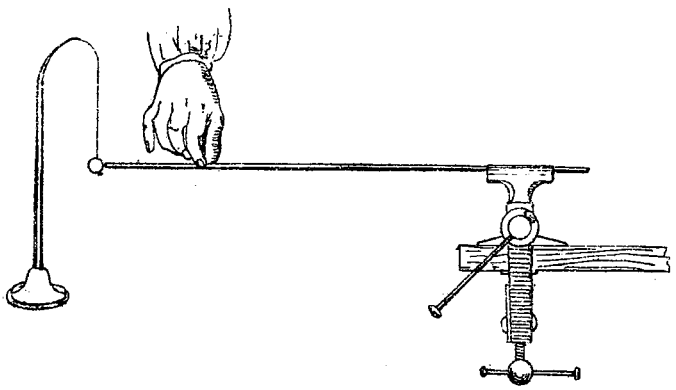
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



repos des boules intermédiaires au parut troublé.

La première bille A comprimée par le choc du marteau a comprimé à son tour la seconde bille, tout en revenant à son volume primitif. Cette compression s'est transmise de proche en proche jusqu'à la dernière bille qui, n'éprouvant aucun obstacle, s'est mise en mouvement sous l'influence de cette compression.

64. — 2° Une verge métallique est fixée dans un étau; sur l'une de ses extrémités vient s'appuyer une petite bille suspendue à un support. On frappe l'autre extrémité de la barre avec un marteau on voit immédiatement la bille s'écarter de sa position d'équilibre verticale. On arrive au même résultat en frottant la verge avec la main enduite de résine ou de colophane.



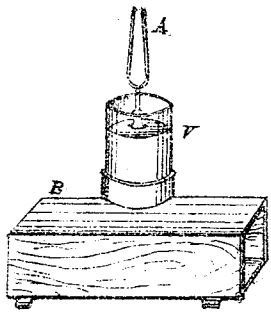
65. — La propagation du son à travers les solides peut encore être mise en évidence d'une autre manière. Une longue tige de bois d'une dizaine de mètres de longueur fait communiquer entre eux deux appartements A et B séparés par des murs, des cloisons etc. On joue du violon en A, en appuyant la table de résonnance sur l'extrémité de la tige; en B un second violon s'appuie sur l'autre extrémité de la tige. On entend très distinctement le son du violon sans altération de la hauteur ni du timbre.

Cette transmission du son par les solides est connue depuis longtemps; c'est sur cette propriété que sont fondés les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

téléphones à ficelle.

66. — La propagation du son par les liquides est aussi très facile à mettre en évidence. Un vase V plein de mercure est

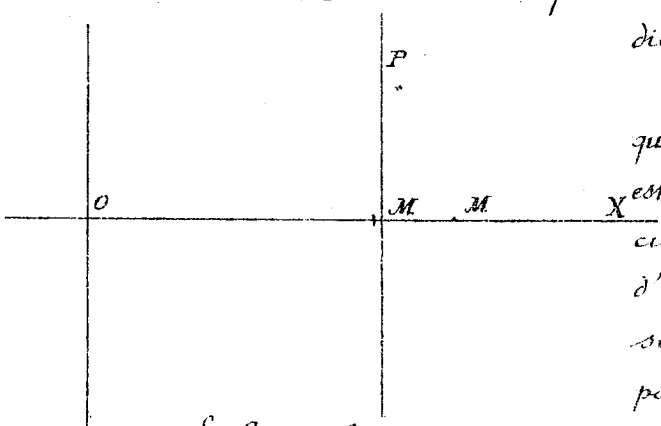


placé sur une caisse sonore B qui peut renforcer le son d'un diapason A. On fait vibrer le diapason, et on lui fait toucher la surface du mercure. Aussitôt, la caisse sonore renforce le son du diapason.

67. — Il n'est pas besoin d'expérience spéciale pour mettre en évidence le fait de la transmission des vibrations sonores par les gaz. Cela résulte de ce que les sons nous sont transmis par l'air.

Théorie de la propagation du son dans les milieux élastiques.

68. — Soit OX la direction de la propagation. Supposons que l'état vibratoire du milieu dans lequel se fait la propagation est le même en tous les points d'un même plan perpendiculaire à OX.



Soit en M une molécule quelconque; lorsque le milieu est au repos, cette molécule occupe une position d'équilibre définie par sa distance x au point O.

Si le milieu est un mouvement, au bout du temps t, la molécule M est venue en M' à une distance de M égale à y; la distance y de la position de la molécule au temps t à sa position d'équilibre s'appelle l'élongation de la molécule au temps t.

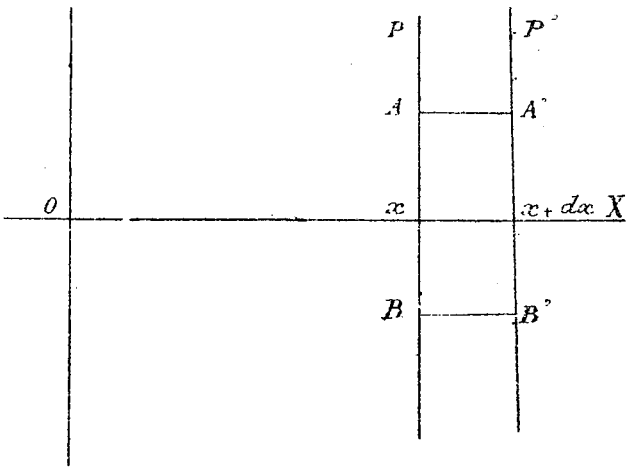
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Le problème de la propagation consiste à trouver l'élongation y du point M en fonction de l'abscisse x et du temps t.

Considérons deux plans parallèles P et P' perpendiculaires à OX, et dont les abscisses soient x et $x + dx$. Prenons OX comme axe d'un cylindre droit dont la section serait égale à l'unité de surface et dont les bases seraient dans les plans P et P'. Appliquons à à la tranche du milieu élastique comprise entre ces deux plans le théorème de mécanique qui permet de trouver l'équation différentielle du mouvement : « Le produit de la masse par l'accélération est égal à la force qui produit cette accélération.

La masse est égale au volume $dx \times 1 = dx$ multiplié par la densité absolue ρ du milieu.

L'élongation au temps t est y; la vitesse $\frac{\partial y}{\partial t}$, et l'accélération $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Le produit de la masse par l'accélération est donc $\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.



Évaluons de même la force. Le petit cylindre $AA'BB'$ est soumis à deux forces antagonistes :

d'une part la pression sur la base du cylindre située dans le plan P ;

d'autre part la pression sur la base du cylindre située dans le plan P'.

Soit p la pression par unité de surface dans le plan P. Cette pression est fonction du temps t et de l'abscisse x du plan P, donc

$$p = \varphi(t, x)$$

Si on passe de P à P' afin d'évaluer la pression par unité de surface dans le plan P' au même instant, il faudra changer x en $x + dx$ en laissant t constant. Donc la pression au temps t par unité de surface du plan P est

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La force motrice est la différence

$$p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) = \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Par suite l'équation différentielle du mouvement est

$$\rho\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx$$

ou

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

69. — Il faut encore exprimer p en fonction de y, x et t.

Or p est la pression par unité de surface au temps t dans un plan d'abscisse x.

Lorsque tout le milieu était en équilibre, il régnait en tous ses points une pression uniforme p_0. Si on produit en un point du milieu une certaine compression γ, la pression prend une valeur différente. A la pression initiale p_0 vient se joindre un terme qui est fonction de γ.

$$p = p_0 + f(\gamma).$$

Mais l'expression de $f(\gamma)$ n'est pas connue d'une manière générale. Pour la déterminer il faut faire une hypothèse sur la forme de cette fonction.

Nous supposerons que les compressions γ sont très petites; ainsi notre théorie ne sera applicable que si pendant le mouvement chaque unité de volume ne varie que d'une fraction très petite de sa valeur. — La fonction $f(\gamma)$ peut alors, en général, être développée en série par la formule de Maclaurin.

$$f(\gamma) = f(0) + \gamma f'(0) + \frac{\gamma^2}{1.2} f''(0) + \dots$$

Or pour $\gamma = 0$, $p = p_0$, donc $f(\gamma) = 0$.

Pour γ très petit, les puissances supérieures de γ sont négligeables et on peut poser

$$f(\gamma) = E\gamma.$$

Il faut remarquer que cette détermination peut n'être qu'approchée si le corps élastique est quelconque, mais elle peut devenir rigoureuse pour certains milieux.

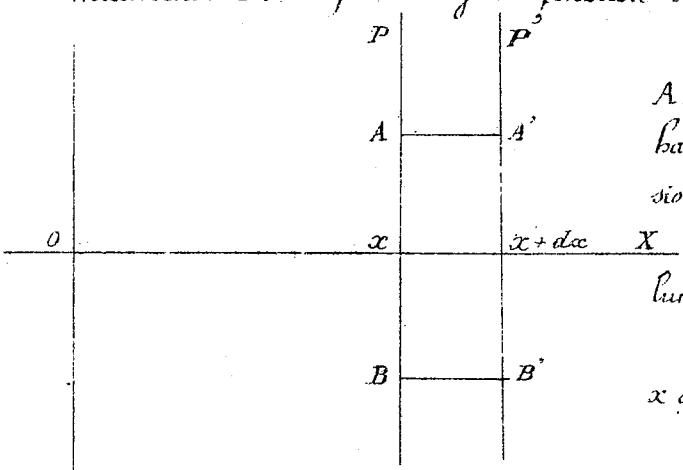
Alors

$$p = p_0 + E\gamma$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

d'où $$-\frac{\partial p}{\partial x} = -E\frac{\partial y'}{\partial x}$$

70. — Le problème de l'élimination de p n'est pas encore résolu ; nous avons simplement remplacé p par y'. Cherchons maintenant à exprimer y' en fonction de y et de x.



Considérons le cylindre $AA'BB'$ de section 1 et de hauteur dx. Avant la compression il avait un volume dx. Cherchons la variation de volume qu'il a subie au temps t.

Le plan P dont l'abscisse était x a au temps t une abscisse $x+y$ le plan P' dont l'abscisse était $x+dx$ a une abscisse $x+dx+y+\Delta y$; Δy représentant l'accroissement que subit y lorsqu'on change x en $x+dx$ au temps t. Δy ne dépend donc que de x, non de t ; de sorte que l'on peut poser

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\,dx$$

La hauteur du cylindre au temps t est donc

$$x+dx+y+\frac{\partial y}{\partial x}\,dx - (x+y) = dx + \frac{\partial y}{\partial x}\,dx$$

La hauteur a donc varié de $\frac{\partial y}{\partial x}\,dx$ il en est de même du volume.

On peut arriver plus rapidement au même résultat. Si les deux bases du cylindre avaient éprouvé le même déplacement y, la hauteur du cylindre n'aurait pas changé ; la variation de la hauteur ne peut donc provenir que la différence des déplacements ; alors la variation est égale à celle que subit y lorsque, t restant constant, x varie de dx ; par suite c'est $\frac{\partial y}{\partial x}\,dx$.

La compression est par définition la variation de volume rapportée à l'unité de volume. Le volume dx ayant varié de $\frac{\partial y}{\partial x}\,dx$, la compression est

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\,dx}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La compression représente la variation du volume correspondant à une diminution de volume

On a donc ici $\gamma = -\frac{\partial y}{\partial x}$

Or

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -E\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -E\left(-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

ou $$-\frac{\partial p}{\partial x} = E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

E est une constante à la condition que y soit infiniment petit.

Cette équation est une équation linéaire aux différentielles partielles du second ordre. Avant de nous occuper de son intégration, nous allons en déduire une conséquence importante.

Principe de la superposition des petits mouvements.

71. — Si deux états vibratoires quelconques satisfont séparément à la même équation (1), les deux états vibratoires peuvent coincider sans se gêner.

Ce théorème est très important ; il est applicable en acoustique, en optique, en électricité. Deux sons, deux ondes lumineuses peuvent se croiser sans s'influencer réciproquement.

La démonstration analytique de ce théorème est simple. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation (1) de sorte que l'on ait

$$\rho\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

et $$\rho\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

Je dis que $y_1 + y_2$ est également solution de l'équation (1).

En effet, en ajoutant membre à membre les deux relations précédentes, il vient

$$\rho\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right) = E\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\right)$$

ou $$\rho\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial x^2}$$

Remarque. La démonstration de ce corollaire est fondée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

uniquement sur ce que l'équation (1) est une équation linéaire à coefficients constants ; elle ne serait plus applicable si E n'était pas une constante.

Or on n'a $E = C^{te}$ que si y est petit ; c'est pourquoi ce théorème a reçu le nom de principe de la superposition des petits mouvements.

72. — Revenons à l'intégration de l'équation (1)

Posons

$$y = \varphi(x - Vt)$$

φ étant une fonction quelconque et V une constante positive ou négative.

Quelle que soit la forme de la fonction φ, cette valeur de y satisfait à l'équation (1) pour une valeur convenablement choisie de la constante V.

Relativement à la fonction φ, nous supposerons simplement qu'on puisse prendre sa dérivée par rapport à la quantité entre parenthèses.

Alors en désignant par φ' sa dérivée première par rapport au binôme $x - Vt$, et par φ'' sa dérivée seconde par rapport à la même quantité on a

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varphi'(x - Vt)(-V) = -V\varphi'(x - Vt).$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2\varphi''(x - Vt)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi'(x - Vt)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \varphi''(x - Vt)$$

d'où, en substituant dans (1)

$$\rho V^2 \varphi'' = E\varphi''$$

équation qui sera satisfaite si on prend

$$\rho V^2 = E$$

Donc, quelle que soit la fonction φ,

$$y = \varphi(x - Vt)$$

est une solution de l'équation différentielle à condition de prendre

$$(3) \qquad V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

L'équation (3) est appelée la formule de Newton. Dans cette équation, comme nous le verrons, V désigne la vitesse de propagation du son.

73. — La forme de la fonction φ étant quelconque, le problème admet une infinité de solutions. Dans chaque cas particulier on déterminera la fonction φ. Nous pouvons pour cela employer plusieurs moyens.

1° On peut se donner l'état vibratoire du milieu à un instant donné.

Supposons qu'on représente cet état vibratoire par une courbe, où les ordonnées soient les élongations à l'instant considéré des points dont l'abscisse est x. Si en particulier, on prend $t = 0$, l'équation (2) devient

$$y = \varphi(x)$$

Donc la fonction φ est déterminée par la condition que cette équation représente la courbe que l'on s'est donnée.

2° On peut se donner la loi du mouvement vibratoire d'un point déterminé en fonction du temps.

Supposons par exemple que ce point soit pris pour origine. Alors pour $x = 0$, on a $y = \varphi(-Vt)$. Comme on se donne la loi de y en fonction de t, la fonction φ est déterminée.

74. — Signification physique de l'équation (2).

L'équation (2) représente un état vibratoire qui se propage sans altération dans l'espace avec une vitesse V.

Si à un certain moment, $t = 0$ par exemple, un point x a un certain mouvement vibratoire, au bout du temps t le point qui aura même mouvement vibratoire aura une abscisse $x + Vt$.

Au temps $t = 0$, l'élongation du point x est représentée par

$$y = \varphi(x)$$

on en posant $l = Vt$

$$y = \varphi(x) = \varphi(x + l - Vt) = \varphi\left[(x + l) - Vt\right]$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

L'élongation du point $x + l$ au temps t est donc la même que l'élongation du point x au temps 0. Si on représente l'état vibratoire par une courbe, la courbe se sera déplacée parallèlement à elle-même avec une vitesse V

De plus cette courbe se déplace sans se déformer ; V est donc une vitesse de propagation.

Remarque :- Les conséquences que nous venons de tirer de l'étude de l'équation (1) sont applicables à tout mouvement qui obéit à cette équation, non seulement en acoustique, mais aussi en optique et en électricité

75.— Cas où le mouvement d'un point quelconque, est périodique.

Etudions le cas où le mouvement d'un point du milieu, du point origine, par exemple, serait périodique. Alors pour ce point on a

$$y = \varphi(-Vt)$$

φ étant une fonction périodique du temps.

Soit T la durée de la période. Toutes les fois que t augmentera de T, y reprendra la même valeur. Donc

$$y = \varphi(-Vt) = \varphi[-V(t+T)]$$

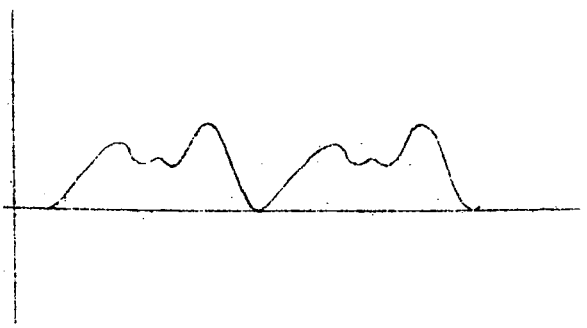
Pour un point x quelconque, on a

$$y = \varphi(x - Vt - VT) = \varphi(x - Vt)$$

On peut considérer VT comme une variation du terme x et écrire

$$\varphi(x - Vt) = \varphi[(x - VT) - Vt]$$

Donc l'état vibratoire est le même au temps t aux deux points dont les abscisses sont respectivement x et $x - Vt$



Si on représente l'état vibratoire au temps t par une courbe, cette courbe sera périodique ; la différence des abscisses de deux points qui ont même ordonnée dans deux périodes consécutives de la courbe sera VT

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Donc lorsque l'état vibratoire en un point est périodique par rapport au temps, il est aussi périodique par rapport à l'espace

VT est l'espace parcouru par le mouvement vibratoire pendant le temps T d'une période.

76. — On pose généralement $VT = \lambda$. La quantité λ a été appelée la longueur d'onde. Donc deux points distants d'une longueur d'onde ont toujours au même moment la même élongation.

77. — Un des cas les plus intéressants à considérer est celui où le mouvement du point origine est une vibration pendulaire représentée par l'équation

$$y = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Cherchons quel sera au temps t l'état vibratoire en un point M situé à une distance x de l'origine dans le sens de la propagation. L'état vibratoire en M est le même que celui qui était à l'origine un temps θ auparavant. Or le mouvement vibratoire parcourant V pendant l'unité de temps a parcouru pendant le temps θ l'espace $V\theta$. Donc $x = V\theta$, d'où $\theta = \frac{x}{V}$. L'état vibratoire à l'origine au temps $t = \theta$ était représenté par

$$y = A \sin 2\pi \frac{t-\theta}{T}$$

ou

$$y = A \sin 2\pi \frac{t - \frac{x}{V}}{T}.$$

ou encore

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{VT} \right)$$

En posant $VT = \lambda$, l'état vibratoire au point M d'abscisse x sera représenté par

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Il serait facile de vérifier que la valeur de y satisfait bien à l'équation différentielle du mouvement. La discussion de cette valeur n'est qu'un cas particulier de celle que nous avons déjà faite sur φ.

Conséquences de la formule de Newton.

78. — La théorie nous a appris que la vitesse de propagation

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

du mouvement vibratoire était représentée par l'équation générale

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (1)$$

E dans cette formule représente le rapport de la variation de la pression à la compression ; c'est par définition le coefficient d'élasticité du milieu, dans les conditions de l'expérience ; ρ représente la densité absolue, c'est à dire la masse de l'unité de volume du milieu où se fait la propagation. Nous rappelons de plus que la relation de Newton n'a été établie que dans le cas de compressions infiniment petites.

79. — Appliquons la formule (1) à la propagation du son. Nous pourrons nous en servir de deux façons.

1°. Soit pour contrôler notre théorie, en déterminant expérimentalement les différentes grandeurs V, E, ρ qui entrent dans la formule et comparant les valeurs observées aux valeurs calculées pour une de ces quantités lorsqu'on connaît les deux autres.

2°. Soit pour déterminer une des trois quantités V, E ou ρ connaissant les deux autres par l'expérience. En général ρ est mesuré très exactement par des méthodes directes. Il n'en est pas de même de V et E. Pour certains milieux, le coefficient d'élasticité E est connu avec une très grande approximation : la formule sert alors à évaluer V ; pour d'autres, il est plus facile de mesurer V et la formule sert à évaluer E.

Nous commencerons par étudier le cas particulier de la propagation dans les gaz.

Vitesse de propagation du son dans les gaz.

1°. Vitesse de propagation du son dans l'air.

89. — Calculons pour l'air les différentes constantes de la formule de Newton.

ρ est la masse de l'unité de volume. Prenons, pour unité de longueur le mètre ; l'unité de volume est le mètre cube.

Le poids d'un mètre cube d'air dans les conditions normales

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

de température et de pression (0° et 760 mm de mercure) est 1 Kg, 293 à la latitude de 45° et au niveau de la mer. Soit g l'accélération due à la pesanteur au lieu où la pesée a été faite ; la masse de l'unité de volume du gaz est

$$\frac{1,293}{g}$$

Supposons maintenant que la température du gaz soit t', sa pression p ; en désignant par p sa force élastique initiale, correspondant à une colonne de mercure de 760 mm de hauteur, on a pour le poids du gaz qui occupe l'unité de volume

$$1,293 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

La masse de ce gaz sera

$$\rho = \frac{1,293}{g} \times \frac{p}{p_0} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

D'ailleurs p_0 est la pression en kilogrammes par mètre carré correspondant à une hauteur de 760 mm de mercure au niveau de la mer et à la latitude de 45°.

Donc $p_0 = 0^m 760 \times 13\,596^{Kg} = 10330^{Kg}$.

La quantité p est la pression actuelle mesurée avec les mêmes unités

L'expression générale de la valeur de ρ est donc

$$\rho = \frac{1,293}{g} \times \frac{p}{10330} \times \frac{1}{1+\alpha t}$$

Pour le calcul de t, nous pouvons faire plusieurs hypothèses sur la manière dont la compression se propage.

81 — La première de ces hypothèses par ordre de date consiste à admettre que les compressions se font à température constante. Alors le gaz suit simplement la loi de Mariotte. Son volume v et sa force élastique p sont reliés par l'équation $pv = C^{te}$

On en déduit en prenant les logarithmes

$$\log. p + \log. v = C^{te}.$$

d'où en différentiant

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = 0$$

et par suite $dp = p\left(-\frac{dv}{v}\right)$

Or $-\frac{dv}{v}$ représente la compression, car c'est la variation

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

de volume rapportée à l'unité de volume. Donc p est le coefficient par lequel il faut multiplier la compression pour obtenir la variation de la pression. C'est aussi la définition du coefficient d'élasticité E.

Donc, si l'on suppose que les compressions se font à température constante, on a $E = p$.

En portant ces valeurs de ρ et de E dans la formule $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, il vient :

$$V = \sqrt{\frac{p}{\frac{1,293}{g} \times \frac{p}{10.330} \times \frac{1}{1+\alpha t}}}$$

ou

$$V = \sqrt{\frac{g \times 10330 \times (1+\alpha t)}{1,293}}$$

Remarque. — La valeur de p disparaît de la formule.

Donc la vitesse de propagation du son est indépendante de la pression du gaz, elle varie proportionnellement à la racine carrée du binôme de dilatation de ce gaz.

Calculons V dans le cas particulier où $t = 0$

Alors $V = \sqrt{\frac{g \times 10330}{1,293}} = \sqrt{\frac{9,8 \times 10330}{1,293}}$

On trouve ainsi $V = 280^{m}$ environ.

Or, sans qu'il soit nécessaire de faire des mesures très exactes, l'expérience prouve que la vitesse de propagation du son dans l'air est voisine de 330 mètres.

Il ne faudrait pas conclure de là que la formule de Newton n'est pas applicable ; ce qui n'est pas exact, c'est l'hypothèse d'après laquelle la propagation des compressions se ferait à température constante. A priori, il est difficile de se rendre compte comment une telle propagation pourrait s'effectuer. Par suite de la compression, chaque tranche d'air s'échauffe ; pour que la température de la tranche restât constante, il faudrait que la chaleur ainsi créée fût cédée intégralement à l'air extérieur ; mais les compressions sont si rapides, qu'il est difficile d'admettre un échange aussi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

rapide de chaleur.

82. — Il est plus naturel de supposer que la chaleur créée par la compression reste dans le gaz lui-même, autrement dit que la transformation de ce gaz est adiabatique, c'est-à-dire se fait à chaleur constante.

Les transformations adiabatiques des gaz obéissent à la formule de Laplace

$$p v^{\frac{C}{c}} = C^{te}$$

$\frac{C}{c}$ désignant le rapport des chaleurs spécifiques du gaz à pression constante et à volume constant.

On en tire

$$\log. p + \frac{C}{c} \log. v = C^{te}$$

d'où en différentiant

$$\frac{dp}{p} + \frac{C}{c} \frac{dv}{v} = 0$$

ou

$$dp = p \frac{C}{c} \left(- \frac{dv}{v}\right)$$

$p \frac{C}{c}$ est donc le coefficient par lequel il faut multiplier la compression pour avoir la variation de pression. — Donc dans l'hypothèse de la compression à chaleur constante on a

$$p \frac{C}{c} = E$$

Quant à la valeur de ρ, elle est la même que précédemment.

On déduira donc la valeur de V dans le cas qui nous occupe de celle qui a été trouvée précédemment en remplaçant simplement p par $p \frac{C}{c}$ au numérateur de cette valeur.

On obtient ainsi

$$V = \sqrt{\frac{10330 \times g}{1,293} \times (1+\alpha t) \times \frac{C}{c}}$$

Si dans cette formule on remplace $\frac{C}{c}$ par la valeur 1,4 déduite des expériences de Clément et Desormes on obtient :

$V = 330$ mètres environ.

2° Vitesse du son dans un gaz quelconque.

83. — La formule précédente peut encore être généralisée, de façon à pouvoir être appliquée à un gaz quelconque dont le poids spécifique par rapport à l'air est d ; on a alors

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$p = 1,293 \times \frac{1}{g} \times \frac{p}{10330} \times \frac{1}{1+\alpha t} d$$

de sorte que l'on déduit $V = \sqrt{\frac{10330 \times g}{1,293 \times d} \times \frac{C}{c} \times (1+\alpha t)}$.

On voit que cette formule peut servir à déterminer la valeur de $\frac{C}{c}$ relative à un gaz quand on a mesuré préalablement la vitesse V de propagation du son dans ce gaz.

$$\frac{C}{c} = V^2 \times \frac{1,293 \times d}{10330 \times g \times (1+\alpha t)}$$

On en tire immédiatement la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur J. On a en effet $J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C-c}$

$$\text{ou } J = \frac{p_0 v_0 \alpha}{C\left(1-\frac{1}{\frac{C}{c}}\right)}$$

C est déterminé par les expériences de Regnault ; $\frac{C}{c}$ par la mesure de la vitesse du son.

Détermination expérimentale de la vitesse du son dans les gaz.

84. — Il nous reste à exposer les méthodes qui ont été employées pour déterminer expérimentalement la vitesse du son dans les gaz. Ces méthodes sont de deux sortes, les unes directes, les autres indirectes. Nous ne nous occuperons pour le moment que des méthodes directes.

La vitesse du son est le quotient de l'espace que parcourt l'onde sonore par le temps employé à parcourir cet espace. La détermination de V comprendra donc deux parties : 1° détermination de l'espace 2° détermination du temps. Les méthodes directes sont celles où on a déterminé ces deux quantités par des mesures directes.

Remarquons qu'au point de vue de la concordance avec la formule déduite de la formule de Newton, nous aurons à distinguer deux cas.

1° La propagation se fait à l'air libre ; alors on ne se trouve plus rigoureusement dans le cas supposé par la théorie : les ondes au lieu d'être planes sont sphériques. On établit que la vitesse de propagation des ondes sphériques dans les gaz est la même que celle des ondes planes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

2° La propagation se fait dans un tuyau. L'onde sonore est plane; les conditions supposées réalisées dans la théorie exposée plus haut sont satisfaites.

Les premières mesures directes de la vitesse du son dans l'air furent entreprises en 1738 par une commission de l'Académie des Sciences; elles furent reprises en 1822 au nom du Bureau des Longitudes par Prony, Arago, de Humboldt, Mathieu, Gay-Lussac et Bouvard. Deux stations avaient été installées à Villejuif et à Montlhéry, à une distance de 20 Kilomètres environ. On tirait des coups de canon à l'une des stations; des observateurs munis de chronomètres notaient à l'autre station l'instant où ils voyaient la lueur et celui où ils percevaient la sensation sonore.

Ces premières expériences ne sont pas à l'abri de toute critique: on avait cherché à tenir compte, autant que possible, de l'état hygrométrique et de la température de l'air entre les deux stations. Mais la correction faite en prenant des valeurs moyennes pour ces deux grandeurs est encore incertaine.

La vitesse fut trouvée égale à 332 mètres environ à 0°.

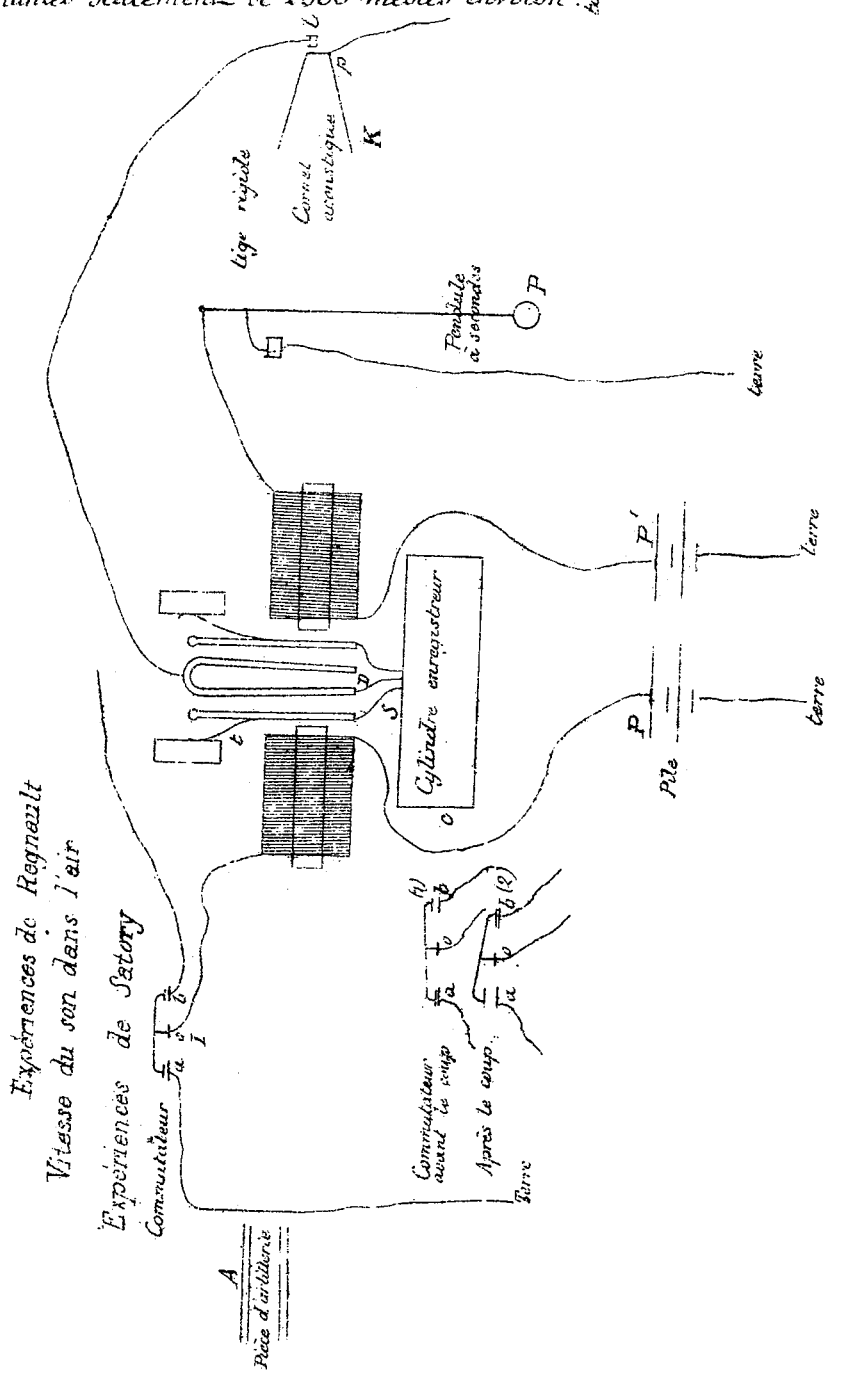
Ce résultat est supérieur à la vitesse donnée par la formule de Newton. Ce fait ne doit pas nous surprendre; car nous ne sommes pas dans le cas prévu par la théorie. — On y suppose en effet que les amplitudes sont infiniment petites; or par suite du coup de canon le déplacement de chaque molécule d'air n'est pas infiniment petit.

Cependant malgré cette cause d'erreur le nombre trouvé 332 est assez voisin du nombre exact. C'est qu'on opère à l'air libre. L'intensité du son diminue rapidement, et, à une distance de la source sonore qui n'est qu'une petite fraction de la distance totale, elle est devenue assez faible pour qu'on se trouve dans les conditions théoriques. — La distance des deux stations étant très grande, ces conditions étaient donc réalisées sur la plus grande partie du parcours.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Expériences de Regnault.

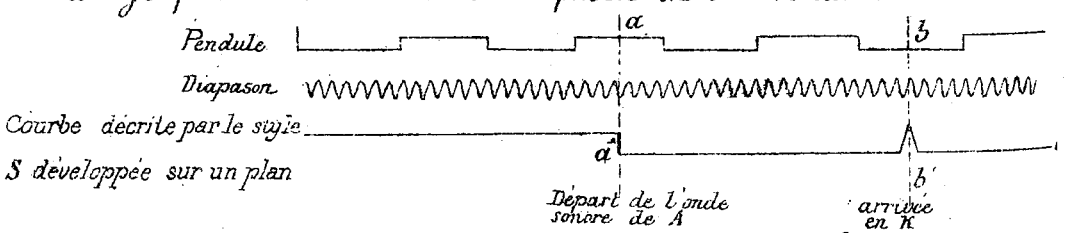
Regnault a repris l'étude de la vitesse du son dans le but de contrôler les résultats qu'il avait obtenus pour la valeur de $\frac{C}{c}$.
Ses expériences furent faites au camp de Satory, près de Versailles, entre deux stations distantes seulement de 2800 mètres environ.



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Voici le principe de la méthode qu'il a employée. La source sonore est toujours une pièce d'artillerie. Devant la bouche de la pièce est tendue un fil métallique communiquant d'un côté à la terre et de l'autre à un électro-aimant à style inscripteur ; avant la sortie du projectile, le style est attiré par l'électro-aimant et décrit une hélice sur le chronographe enregistreur C. Lorsque le projectile sort de la pièce, il rompt le fil et interrompt le courant qui actionne l'électro-aimant ; le style revient à sa position d'équilibre sous l'influence du ressort antagoniste r. — A ce moment on place le commutateur I dans la position (2). Il communique alors avec un petit contact l très voisin du disque de platine p ; celui-ci est fixé sur une membrane sensible tendue au fond du cornet acoustique K ; il est relié au la terre. Lorsque l'onde arrive en K, le circuit de la pile P est fermé, le style est attiré par l'électro-aimant, et produit dans la courbe une encoche.

En même temps on fait inscrire sur le cylindre du chronographe les vibrations du diapason et les oscillations du



pendule P. — La courbe du pendule permet d'évaluer les secondes, et celle du diapason les fractions de seconde. — Le temps employé par l'onde sonore pour parcourir l'espace AK est mesuré par les indications de ces deux courbes entre les droites aa' et bb'.

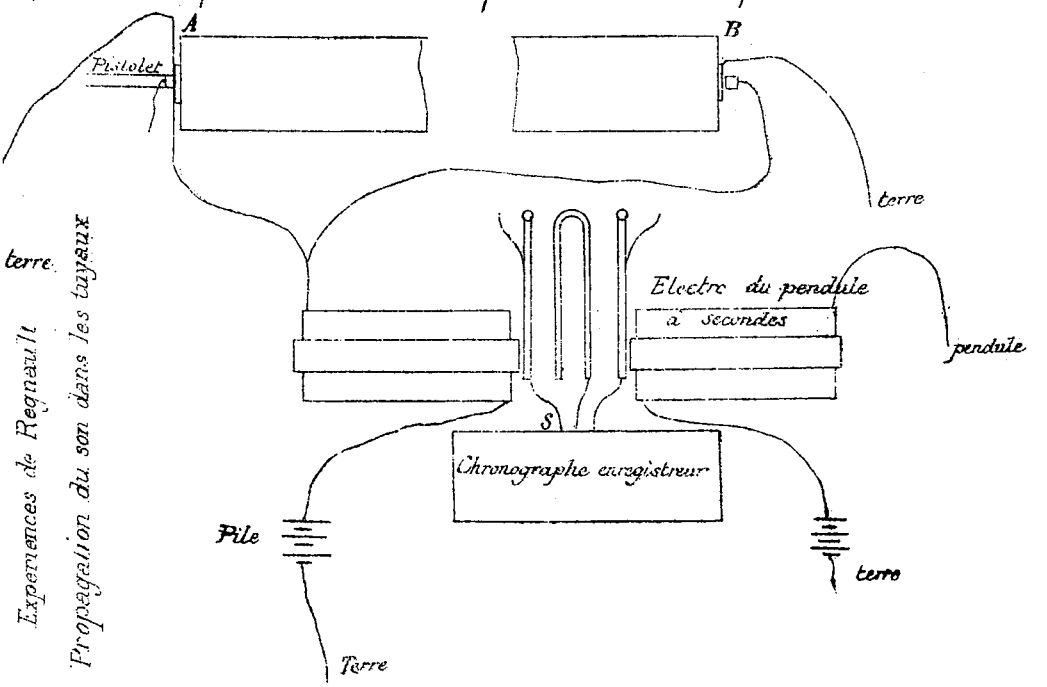
Regnault corrigea les résultats de l'expérience de diverses causes d'erreur. L'influence du vent fut presque annulée en prenant les moyennes de deux expériences croisées faites simultanément. La correction due à la température et à l'humidité de l'air était beaucoup plus difficile. Regnault prit des moyennes pour les évaluer. Les résultats peuvent toutefois être entachés d'une erreur de 50 centimètres d'après Regnault lui-même.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Les nombres obtenus pour V dans l'air sec à 0° et 760 m/m varient entre 330,08 et 331,74; la moyenne de cinq cents expériences a fourni le nombre 330,70.

86. — Comme on le voit, il y avait jusqu'alors de grandes différences entre les résultats obtenus. Regnault reconnut la nécessité d'autres expériences; il chercha à déterminer la vitesse du son dans les tuyaux; il profita pour cela de l'établissement des conduites d'eau le long du boulevard Saint-Michel et de la route militaire d'Ivry.

La méthode qu'il employa est encore une méthode d'inscription électrique. L'onde sonore est produite à l'une des extrémités A du tuyau par la décharge d'un pistolet, elle rencontre à l'autre extrémité B une membrane sensible constituée par une feuille mince de caoutchouc au centre de laquelle est collé un petit disque de platine qui communique à la terre par un fil métallique très flexible. En face de ce disque se trouve une pointe émoussée qui termine un fil



télégraphique bien isolé de la terre et suivant la ligne des tuyaux. Ce fil est constamment en communication avec l'un des pôles d'une pile disposée à la station A; sur le trajet se trouve un électro-aimant à style enregistreur S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

L'orifice du tuyau en A est fermé hermétiquement par une plaque de tôle percée d'une ouverture circulaire par laquelle on fait passer le canon du pistolet. Devant la bouche du canon est tendu un fil d'acier communiquant par l'un de ses bouts avec l'électro-aimant inscripteur, par l'autre bout avec la terre.

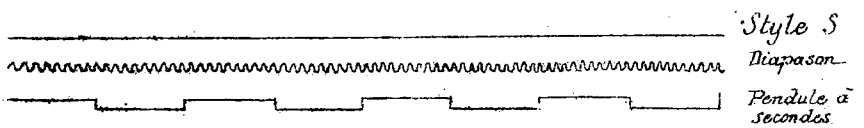
A la station de départ A on dispose un chronographe sur lequel sont enregistrées simultanément.

1° Les oscillations d'un pendule à secondes.

2° Les vibrations d'un diapason entretenu électriquement qui serviront à mesurer les fractions de seconde.

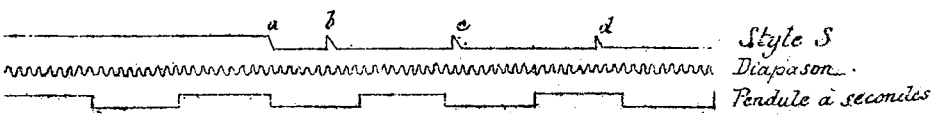
3° Les indications du style S.

Voici comment on opère. On met le chronographe en marche. Le style S décrit une hélice, le style du pendule une ligne brisée



hélicoïdale, et le style du diapason une ligne sinusoïdale dont l'axe est une hélice.

On tire le coup de pistolet; le courant qui actionne l'électro-aimant est rompu; le style S sous l'influence du ressort antagoniste revient à sa position d'équilibre; il décrit de nouveau une hélice, jusqu'à ce que l'onde étant parvenue en B le courant soit rétabli pendant un instant dans l'électro-aimant, ce qui se traduit par une encoche dans l'hélice. On obtient ainsi un tracé dont l'apparence générale est la suivante



a correspond au départ de l'onde sonore de A; b, c, d correspondent aux arrivées de l'onde à la membrane en B.

Par cette méthode, Regnault obtint des résultats très variables; les valeurs trouvées sont comprises entre 334 mètres et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

326 mètres ; la moyenne des observations donne pour la vitesse du son dans l'air sec à 0° le nombre 330m,6.

Les différences entre ces résultats sont faciles à expliquer.

Les nombres les plus grands, ceux qui sont voisins de 334 correspondent à la vitesse du son mesurée pendant les premiers instants après le coup de pistolet. — La vitesse mesurée ne peut être la vitesse théorique, car les impulsions ne sont pas infiniment petites.

Il est à remarquer toutefois que la vitesse trouvée dans ce cas est plus grande que celle qu'avaient donnée les expériences de Salory faites à l'air libre. C'est que dans l'air libre, les amplitudes décroissent rapidement, de sorte qu'à une distance assez faible de la pièce on se rapproche des conditions théoriques, tandis que dans un tube l'intensité ne diminue que très lentement.

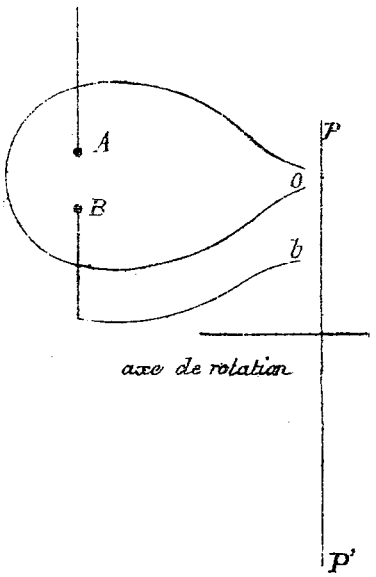
Les nombres trop petits, ceux qui sont voisins de 326 ont été obtenus en opérant sur des conduites de petit diamètre. Dans ce cas, une des conditions de la théorie n'est pas satisfaite. On a supposé en effet que la compression de chaque tranche d'air se faisait à chaleur constante ; or dans un tube étroit, cette condition n'est pas réalisée, car il y a une déperdition de chaleur par les parois.

87. — Kirchhoff a étudié par le calcul la vitesse de propagation d'une onde sonore dans un gaz qui serait soumis à un refroidissement latéral ; il a même tenu compte du frottement du gaz contre les parois du tube. — Il a obtenu une formule d'où l'on peut déduire que les conditions dans lesquelles on doit se placer pour obtenir les meilleurs résultats sont réalisées quand on opère sur des tubes larges avec des sons de très faible amplitude.

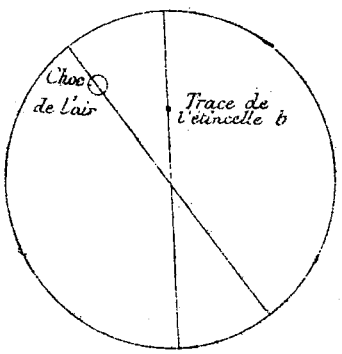
88. — Dans les expériences précédentes, on a toujours mesuré la vitesse du son sur de grandes distances ; on a vu entre autres résultats que la vitesse de propagation était d'autant plus voisine de la vitesse théorique que l'on se trouvait plus loin de la source

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

sonore. Jusqu'à ces derniers temps, on n'avait pas pu mesurer la vitesse du son sur de faibles espaces. D'après des expériences récentes de Mach, à quelques centimètres de distance de la source sonore, on trouve des vitesses de propagation de plus de 700 mètres. — Mach prend comme source sonore l'étincelle électrique jaillissant entre deux pôles de platine A et B. — Ces pôles sont situés à l'intérieur d'un vase de forme oblongue percé d'un orifice étroit O. Chaque étincelle produit une onde sonore qui se propageant dans le vase détermine des compressions et dilatations des tranches de gaz voisines de l'orifice. — Le choc de l'air qui résulte de l'arrivée de l'onde sonore en O, diminue l'épaisseur de la couche de noir de fumée recouvrant un plateau P qui tourne avec rapidité devant l'ouverture O. L'instant du départ de l'onde est enregistré par l'étincelle qui se produit entre le conducteur b et le plateau. Connaissant la vitesse angulaire de rotation du plateau et les distances angulaires des taches produites en b et en O, on en déduit facilement la vitesse de l'onde qui s'est propagée de AB à O.



89. — On peut aujourd'hui mesurer la vitesse du son par la méthode de Regnault en opérant sur des longueurs de tuyau assez faibles.



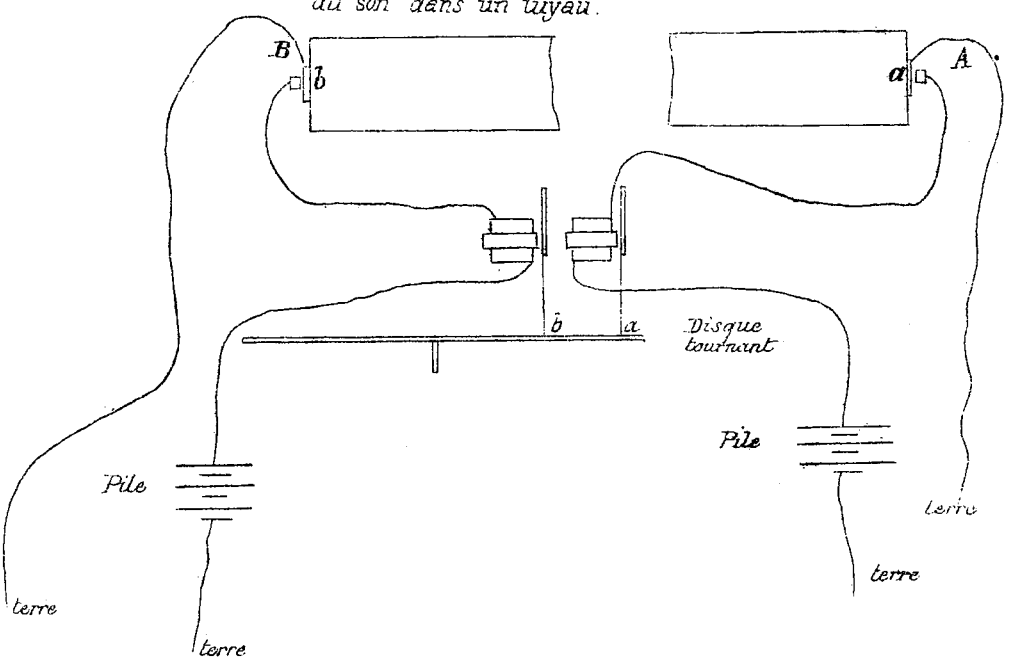
Au temps où furent entreprises les expériences de Regnault, les appareils d'inscription électrique laissaient à désirer; aujourd'hui on a des signaux qui indiquent la rupture d'un circuit à $\frac{1}{20000}$ de seconde près; tels sont les électro-aimants de Marcel Deprez. Grâce à ces

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

appareils nous pouvons répéter ici les expériences sur la propagation du son dans les tuyaux avec un tube de trois mètres de longueur environ.

Les deux extrémités du tube sont munies de membranes de caoutchouc très flexibles portant en leur centre de petits disques de platine a et b. Chaque disque communique, par l'intermédiaire d'un électro-aimant à style inscripteur, avec un des pôles d'une pile dont l'autre pôle est à terre. En face de chacun des disques est une pointe mousse communiquant à la terre. Les styles s'appuient sur un plateau circulaire enduit de noir de fumée qui

Expérience de Cours, montrant la propagation du son dans un tuyau.

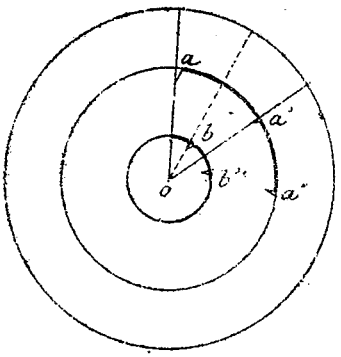


tourne devant leur pointe ; ils y tracent deux circonférences concentriques. Chaque fois que le courant vient à passer dans un des électro-aimants, le style est dévié et la courbe correspondante présente une encoche.

On frappe sur une peau de tambour approchée d'une des membranes A ; l'onde se transmet à l'autre membrane B, est réfléchie par B, revient à A, est réfléchie par A, retourne à B et ainsi de suite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

On observe sur le disque des courbes qui présentent l'apparence ci-contre : a est l'encoche correspondant au départ de l'onde de A, b celle qui correspond à l'arrivée de l'onde en B.



En outre les courbes présentent toujours des sinuosités accessoires dues soit au mouvement propre de chacune des membranes qui continuent à vibrer après l'ébranlement causé par l'onde sonore, soit aux impulsions de l'onde plusieurs fois réfléchie.

Pour mesurer la vitesse du son, il suffit de connaître la longueur du tuyau, et le temps employé par le son pour parcourir cette longueur. — Ce temps se déduit aisément de l'angle a o b quand on connait la vitesse de rotation du disque.

L'angle a o b est mesuré par la méthode de réflexion de Gauss. — On fixe sur l'axe un miroir sur lequel on fait tomber un rayon lumineux. On amène successivement chacune des marques inscrites sous le style qui l'a produite ; pour cela il faut tourner le plateau de l'angle a o b à mesurer. Cet angle de rotation du disque est déduit du déplacement du rayon lumineux réfléchi.

2°. Vitesse de propagation du son dans un gaz quelconque.

90. — Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de la vitesse de propagation du son dans l'air.

Regnault en opérant dans des tuyaux a pu étudier les vitesses du son dans l'acide carbonique et dans l'hydrogène. Les résultats qu'il a obtenus sont d'accord avec ceux qu'on déduit de la formule de Newton. — En particulier la vitesse varie proportionnellement à la racine carrée du binome de dilatation. On a même fondé sur cette propriété un pyromètre destiné à donner les températures des fours à porcelaine.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Vitesse de propagation dans les corps élastiques quelconques.

91. — La formule de Newton $V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ est applicable aux corps élastiques quelconques.

Dans le cas des corps solides, V est très grand, E est très petit. Généralement on détermine E par l'expérience et on en conclut la valeur de V.

Nous donnerons comme exemple de ce calcul la détermination de la vitesse de propagation du son dans l'acier. — Cette vitesse est de 4000 mètres ou davantage par seconde ; d'où il résulte que sa détermination directe est très difficile ; il est donc préférable de mesurer E directement, et de tirer V de la formule.

Les coefficients d'élasticité E sont rapportés à des fils dont la section est 1 millimètre carré, lorsque les pressions ou les tensions sont évaluées en kilogrammes.

Un fil d'acier de 1 millimètre carré de section s'allonge de $\frac{1}{19000}$ de sa longueur quand on le charge de 1 kilogramme. Or le coefficient d'élasticité est le quotient de la variation de pression (ici 1 kilog) par la compression (ici $\frac{1}{19000}$). Donc

$$E = \frac{1}{\frac{1}{19000}} = 19000.$$

les unités étant le kilogramme et le millimètre carré.

Le coefficient d'élasticité, si l'unité de surface était le mètre carré, serait 10^6 fois plus grand ; de sorte qu'en kilogrammes et mètres carrés, on a

$$E = 19000 \times 10^6$$

Donc $$V = \sqrt{\frac{19000 \times 10^6}{7600 \times \frac{1}{g}}}$$

$7600^{kg.}$ étant le poids du mètre cube d'acier

$$V = \sqrt{\frac{19000 \times 10^6 \times g}{7600}}$$

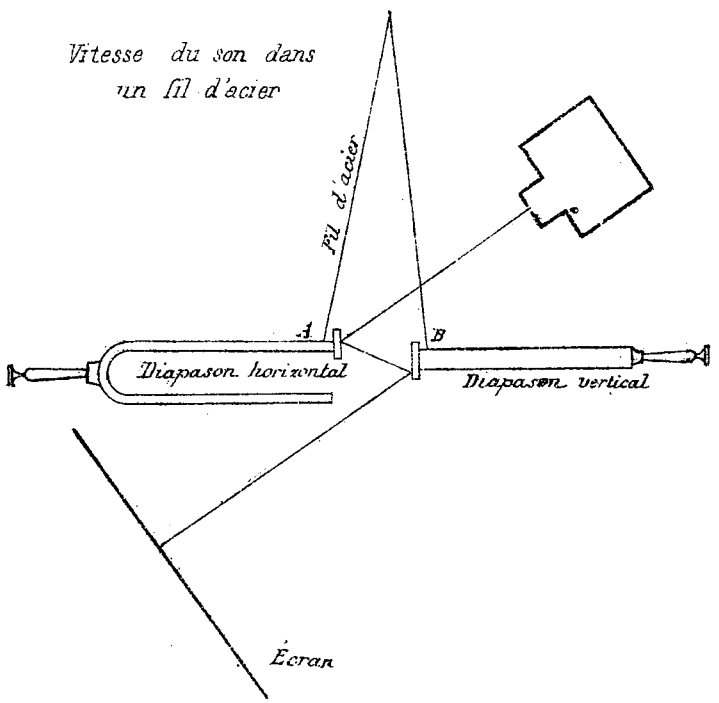
ou $V = 4800^{\text{mètres}}$ environ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Mesure de la valeur de V dans l'acier.

92. — Bien que la détermination directe d'une aussi grande vitesse soit difficile, elle n'est pas impossible, si l'on emploie une méthode convenable, telle que celle que nous allons appliquer.

Deux diapasons à l'unisson sont réunis par un fil d'acier rectiligne. On fait vibrer l'un des diapasons A; l'autre B entre aussitôt en vibration. — Mais comme la vitesse de propagation de l'onde sonore dans le fil est finie, les vibrations de B sont en retard sur celles de A. — On peut constater cette différence de phase par la méthode de Lissajous.



Si la longueur du fil est quelconque la différence de phase est quelconque, et l'on obtient une ellipse. Ici on a fait varier la longueur du fil par tâtonnement jusqu'à ce que l'ellipse se transforme en une ligne droite. Il s'ensuit que B est en retard sur A d'une vibration simple, ou de $\frac{T}{2}$ secondes, T étant la durée d'une vibration. La longueur l du fil est donc égale à $V \times \frac{T}{2}$. Comme il est facile de mesurer cette longueur l et de déterminer T, on tire de la formule la valeur de V.

Vitesse de propagation du son dans les liquides.

93. — Les recherches relatives à la mesure directe de la vitesse de propagation du son dans les liquides sont peu nombreuses. Nous

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

citerons seulement les expériences que Colladon et Sturm entreprirent en 1827 dans le lac de Genève pour mesurer la vitesse du son dans l'eau.

94. — Lorsqu'on connaît la vitesse de propagation du son dans un liquide, on peut en déduire le coefficient de compressibilité de ce liquide par la seule application de la formule de Newton.

Rappelons la relation simple qui existe entre le coefficient de compressibilité d'un liquide et son coefficient d'élasticité. Le coefficient d'élasticité est le quotient de la variation de pression par la variation de volume rapportée à l'unité de volume. Le coefficient de compressibilité est le quotient de la variation de volume rapportée à l'unité de volume par la variation de la pression. Le coefficient μ de compressibilité est donc l'inverse du coefficient E d'élasticité. — Si dans la formule de Newton, on remplace E par $\frac{1}{\mu}$, on a la relation

$$V = \sqrt{\frac{1}{\mu\rho}}$$

qui permet de déterminer μ quand on connaît V et ρ.

95. — Appliquons cette méthode à l'eau; si on prend pour V les nombres qui résultent des expériences de Colladon et Sturm, on trouve pour μ des nombres très voisins de ceux qui ont été indiqués par Grassi.

Cette vérification est précieuse; on sait en effet que la détermination directe des coefficients de compressibilité réelle des liquides est très difficile; dans les méthodes piézométriques qui ont été employées pour la mesure de ces coefficients, il faut toujours tenir compte de la dilatation qu'éprouve, sous l'influence de la pression, le vase dans lequel est contenu le liquide. Or la compressibilité des liquides étant presque aussi faible que celle des solides, la correction est de même ordre de grandeur que la quantité à déterminer.

Si au contraire nous supposons le coefficient de compressibilité de l'eau connu par les expériences faites sur la vitesse du son, nous pourrons nous servir de ce résultat

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

dans la mesure des coefficients de compressibilité réelle de tous les autres liquides. Nous observerons la compressibilité apparente de l'eau dans un piézomètre donné ; comme nous connaissons la compressibilité absolue de l'eau, nous pouvons calculer la correction relative à la dilatation du vase, lorsqu'il est soumis à une pression p. Remplaçons ensuite dans le piézomètre l'eau par le liquide que nous voulons étudier. Il suffit d'observer sa compressibilité apparente pour en déduire sa compressibilité absolue.

Remarque générale sur les expériences destinées à mesurer la vitesse de propagation du son.

96. — Lorsque nous avons étudié la vitesse de propagation du son dans l'air, nous avons cité deux séries d'expériences, les unes faites à l'air libre les autres faites dans les tuyaux. Nous avons trouvé la même valeur pour la vitesse mesurée dans les deux cas. — La théorie nous a appris en effet que la vitesse du son ne dépendait que de la compression des tranches successives du milieu dans lequel se faisait la propagation. — Or quand on comprime un gaz, il est évident qu'on arrive au même résultat quelle que soit la façon dont la compression est opérée. La force élastique développée par la compression ne dépend que de la variation de volume du gaz et non de la manière dont on produit cette variation. Étant donnée une masse gazeuse, on peut supposer qu'elle occupe le volume d'un cylindre et faire varier la pression sur les bases du cylindre seulement, ou encore produire les variations de pression dans tous les sens autour de la masse gazeuse ; la force élastique du gaz est la même pourvu que la compression reste la même. La vitesse du son ne dépendant que de la compression conserve aussi la même valeur.

97. — Il n'en est plus de même dans le cas où l'on opère sur des solides ; il n'est pas indifférent de comprimer un cylindre solide longitudinalement seulement ou à la fois longitudinalement et latéralement. Il en résulte que la vitesse de propagation du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

son dans une masse solide indéfinie n'est pas la même que la vitesse de propagation le long d'une tige cylindrique.

98. — Pour les liquides on conçoit à priori deux cas possibles. Si la variation de pression n'est pas brusque, elle se transmet à toute la masse du liquide comme dans le cas des gaz. Si au contraire la variation de pression est brusque, l'inertie de la masse liquide peut intervenir et le liquide se comporte alors comme un solide. On a expliqué ainsi le résultat de certaines expériences d'après lesquelles la vitesse du son dans une colonne d'eau contenue dans un tube serait inférieure à celle que l'on observe dans une masse d'eau indéfinie. Ce désaccord peut tenir, non à une variation de la compressibilité du liquide, mais à la déformation des parois du tube, déformation due aux fortes compressions qui se produisent dans les liquides.

Phénomènes observés lorsqu'une onde sonore rencontre un obstacle solide.

99. — Lorsqu'une onde sonore rencontre un obstacle solide, elle se réfléchit. La meilleure démonstration expérimentale qu'on puisse donner de cette réflexion du son est celle qui résulte de l'existence de l'écho. L'écho peut être observé lorsque le son se réfléchit sur un obstacle de grandes dimensions situé à une distance relativement considérable de la source sonore.

100. — Quant aux lois de la réflexion du son, elles sont identiques à celles de la réflexion de la lumière.

1. La normale à l'onde incidente, la normale à la surface réfléchissante, et la normale à l'onde réfléchie sont dans un même plan (plan d'incidence).

La normale à la surface réfléchissante forme avec la normale à l'onde incidente l'angle d'incidence, avec la normale à l'onde réfléchie l'angle de réflexion.

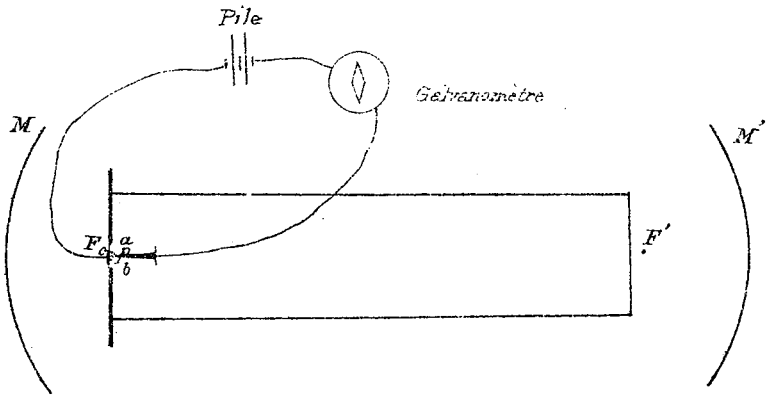
2. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Les normales aux ondes jouent ici le rôle que jouent les rayons lumineux dans l'optique élémentaire. Toutes les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

conséquences qu'on déduit en optique des lois de la réflexion sont applicables dans le cas présent ; en particulier les miroirs sphériques jouissent par rapport au son des mêmes propriétés que par rapport à la lumière. Nous en profiterons pour répéter une expérience relative à la réflexion du son.

101. — Deux miroirs sphériques concaves M et M' sont disposés l'un en face de l'autre de façon que leurs axes soient dirigés suivant la même droite.



Leurs foyers sont en F et F'. Entre F et F' on place un tube cylindrique terminé en F par une membrane de baudruche ab portant un contact métallique en relation avec l'un des pôles d'une pile. En face du contact C est fixée à une petite distance, une pointe métallique p en communication avec l'autre pôle de la pile par l'intermédiaire d'un galvanomètre. Cette pointe est assez près de la membrane pour que le circuit de la pile se ferme dès que la membrane entre en vibrations ; on est averti de la fermeture du circuit par l'impulsion que reçoit le galvanomètre.

On frappe sur une peau de tambour en F' ; on observe immédiatement l'impulsion du galvanomètre, la membrane est donc entrée en vibrations ; il reste à démontrer que l'onde sonore qui l'a impressionnée s'est bien réfléchie sur le miroir. Il

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

suffit pour cela de supprimer les miroirs, de produire de nouveau en F' le même bruit ; l'aiguille du galvanomètre reste immobile

102. — On peut répéter cette expérience d'une autre façon, mais qui n'est pas perceptible par un auditoire nombreux.

On place au foyer F' une montre ; un observateur dont l'oreille est en F' entend nettement le tic-tac de la montre ; la perception cesse si on vient à supprimer un des miroirs.

Réflexion avec changement de signe.

103. — Supposons une onde se propageant dans un milieu élastique et rencontrant un mur normal à la direction de sa propagation ; il se produit à la surface de ce mur une réflexion du son avec changement de signe.

Pour expliquer ce qu'on entend par cette expression, considérons dans le milieu élastique A un point M infiniment voisin de la paroi. L'effet du mur B est de supprimer le mouvement vibratoire de ce point, c'est-à-dire de faire que son élongation soit constamment nulle.

On obtiendrait le même effet en supprimant le mur et en remplaçant son action par une série d'ondes sonores venant d'un point situé dans le milieu B. Ces ondes sonores sont telles que l'élongation qu'elles produiraient au point M soit toujours égale à $-y$, en désignant par $+y$ l'élongation incidente en M du mouvement qui se propage à travers le milieu A. Cette série d'ondes sonores n'a au-delà de la surface de séparation de A et de B qu'une marche fictive ; mais à partir de cette surface et en deçà dans le milieu A, les ondes existent réellement et constituent la série des ondes réfléchies.

Les ondes réfléchies étant caractérisées par le changement de signe de l'élongation sur le mur B, on dit que la réflexion se fait avec changement de signe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Réflexion sans changement de signe.

104. — Soit maintenant une onde se propageant dans un tuyau cylindrique ouvert ; à l'extrémité ouverte de ce tuyau, elle se réfléchit sans changement de signe. Dans toute la longueur du tuyau, la propagation se fait suivant l'axe du cylindre ; les compressions et dilatations successives sont celles de tranches cylindriques ; les parois du tuyau empêchent toute expansion latérale du milieu élastique. Au contraire dans la couche de gaz qui suit immédiatement le plan de l'orifice, l'air comprimé par l'arrivée de l'onde sonore peut se dilater non seulement suivant la normale, mais encore latéralement. Il en résulte que, à l'élongation y que prendrait un point M s'il se trouvait à l'intérieur du cylindre, doit s'ajouter une élongation supplémentaire z de même signe que y.

L'élongation Y du point M aura pour valeur

$$Y = y + z$$

Tout se passera donc comme si, le tuyau étant continué indéfiniment, on plaçait dans la tranche M voisine de l'orifice une source sonore capable de fournir à chaque instant à cette tranche une élongation supplémentaire z de même signe que y. La source M engendrerait alors un système d'ondes qui se superposeraient aux ondes directes dans l'intérieur même du tube. Ces ondes sont les ondes réfléchies ; comme l'élongation qu'elles produisent à leur origine M est de même signe que l'élongation fournie en M par les ondes directes, on dit qu'il y a en M réflexion sans changement de signe.

Phénomènes produits par la superposition des ondes sonores provenant de deux sources différentes.

Considérons ce qui arrive lorsque deux systèmes d'ondes provenant de deux sources différentes arrivent en un même point. Pour cela nous admettrons que les ondes sonores sont toujours des vibrations de faible amplitude, de sorte que nous pourrons

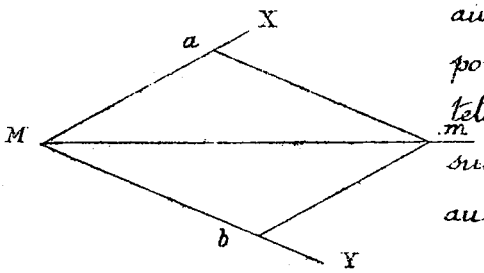
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

appliquer le théorème de la superposition des petits mouvements

1. Les vibrations composantes sont dirigées suivant des droites différentes.

105. — Etudions d'abord le cas où un point reçoit des vibrations dirigées suivant deux droites différentes.

Soit M le point considéré. — Le point M reçoit une série d'ondes provenant de la source A ; l'élongation du point est dirigée suivant MX et a une valeur Ma au temps t. — De la source B le point M reçoit une série d'ondes telle que l'élongation est dirigée suivant MY et a une valeur Mb au même instant t.



Le point M prend un mouvement résultant qu'on détermine par la règle connue du parallélogramme des vitesses ; l'élongation de M au temps t est la diagonale Mm du parallélogramme construit sur Ma et Mb. — En général, si les sources A et B ont des mouvements vibratoires quelconques, la trajectoire du point M a une forme très compliquée.

Etudions quelques cas particuliers.

1° Les mouvements des deux sources sonores sont des mouvements pendulaires.

Soient a et b leurs amplitudes, T et T' leurs périodes, β leur différence de phase.

Les équations des deux mouvements seront

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$y = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T'} + \beta\right)$$

En général si T et T' sont différents l'un de l'autre, l'équation de la courbe lieu du point m obtenue en éliminant t est une équation transcendante. On a en effet

$$2\pi \frac{t}{T} = \text{arc sin } \frac{x}{a}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

d'où $t = \frac{T}{2\pi} \text{ arc sin } \frac{x}{a}$

Par conséquent

$$y = b \sin \left(\frac{T}{T'} \text{ arc sin } \frac{x}{a} + \beta \right)$$

Au lieu de discuter cette équation directement, il est plus simple de considérer la courbe lieu des points (x, y) comme une courbe unicursale définie en fonction de t par les équations (1)

Nous avons déjà étudié un autre cas, celui où $T = T'$. On a vu (§. 44) que l'élimination de t conduisait alors à l'équation d'une ellipse rapportée aux axes de coordonnées MX et MY; la forme de cette ellipse dépend de la valeur de β.

2° Les vibrations composantes sont dirigées suivant la même droite.

106. — Le cas le plus intéressant est celui où les deux vibrations pendulaires qui se superposent sont de mêmes directions et de mêmes périodes.

Soient y_1 l'élongation d'un point M au temps t dans le premier mouvement vibratoire,

y_2 l'élongation du même point au même instant dans le second mouvement.

On a
$$y_1 = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right)$$
$$y_2 = b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \qquad (2)$$

La vibration résultante est caractérisée par l'élongation $y_1 + y_2$. Nous allons démontrer que cette élongation est celle d'un point soumis à un mouvement pendulaire, c'est-à-dire que l'on peut poser

$$y_1 + y_2 = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \gamma\right)$$

En effet on a

$$y_1 + y_2 = a \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right) + b \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right)$$
$$= (a \cos \alpha + b \cos \beta) \sin 2\pi \frac{t}{T} + (a \sin \alpha + b \sin \beta) \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

Posons
$$a \cos \alpha + b \cos \beta = A \cos \gamma$$
$$a \sin \alpha + b \sin \beta = A \sin \gamma$$

il viendra $y_1 + y_2 = A \left(\cos \gamma \sin 2\pi \frac{t}{T} + \sin \gamma \cos 2\pi \frac{t}{T}\right) = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \gamma\right)$.

En élevant au carré et ajoutant, on aura pour l'amplitude

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

résultante A.

$$A^2 = (a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2$$

ou $$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta) \qquad (4)$$

Le minimum de $\cos(\alpha - \beta)$ est -1; le minimum de A^2 est donc $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$, quantité toujours positive; donc la valeur de A est toujours réelle.

Quant à la quantité y qui entre dans la phase, on l'obtient en divisant membre à membre les équations (3)

On a ainsi

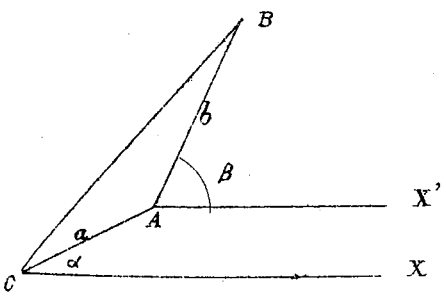
$$\operatorname{tg} y = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta}$$

La phase y étant donnée par une tg, il est évident que sa valeur est toujours réelle.

Représentation graphique de l'amplitude et de la phase du mouvement résultant.

107. — La construction de Fresnel (§ 42) va nous permettre de donner une représentation graphique des résultats précédents.

Soient OX une direction fixe.



Menons par le point O une droite OA faisant avec OX un angle α et prenons sur cette droite $OA = a$.

Par le point A menons AX' parallèle à OX et de même sens que OX.

Construisons une droite AB faisant avec AX' un angle β, au dessus de AX' si β est de même signe que α, en dessous si β est de signe contraire à α. — Prenons sur cette droite $AB = b$.

La longueur OB représente l'amplitude résultante A.

En effet $$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB\cos(\widehat{OA.\,OB})$$

Or l'angle de OA avec OB est $\pi - (\beta - \alpha)$. Donc

$$\overline{OB}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)$$

Ce qui montre que $OB = A$.

Il faut remarquer que l'amplitude résultante A pour

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

deux mouvements donnés est indépendante du temps ; elle ne dépend que de la différence de phase $\alpha - \beta$ des deux mouvements.

La quantité γ est représentée par l'angle BOX.

En effet dans la première des équations (3), le premier membre

$$a \cos \alpha + b \cos \beta$$

représente la somme des projections sur l'axe OX des droites OA et AB. D'après le théorème des projections, cette somme est égale à la projection de la résultante géométrique OB des deux droites. Or cette projection est $A \cos(BOX)$. Donc

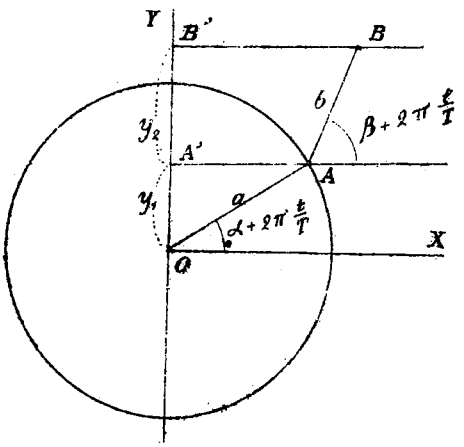
$$A \cos(BOX) = A \cos \gamma .$$

De même en projetant sur un axe OY perpendiculaire à OX on aurait $A \sin(BOX) = A \sin \gamma$

d'où $\gamma = BOX$

On peut encore discuter géométriquement cette question.

108. — Étant donné un mouvement pendulaire, nous avons démontré que le mouvement d'un point pouvait être assimilé au mouvement de la projection sur un plan vertical d'un bras de manivelle qui tournerait uniformément autour de son axe.



Soit $OA = a$ la longueur du bras de manivelle, y_1 sa projection sur l'axe OY.

Menons par le point A la droite AB comme nous l'avons fait plus haut. — La longueur $A'B'$ de la projection de AB sur OY est y_2.

L'élongation résultante du point vibrant est représentée par OB'.

Lorsque le temps varie, le point B' se déplace ; OA et AB tournent chacune d'un mouvement uniforme, mais ces droites font toujours entre elles un angle constant $\alpha - \beta$. Le mouvement du point B est le même que si OAB était une ligne brisée rigide.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

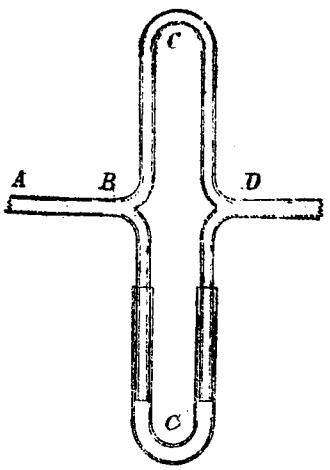
109. — Cette conséquence permet de montrer expérimentalement comment l'amplitude résultante varie avec la différence de phase $\alpha - \beta$.

Pour cela on prend une manivelle dont le bras est composé de deux parties OA et AB dont on peut faire varier les positions respectives l'une par rapport à l'autre. On projette l'ombre de cette manivelle sur un tableau.

Si $\alpha - \beta = 0$, les droites OA et AB sont dans le prolongement l'une de l'autre ; A^2 est maximum.

Si $\alpha - \beta = \pi$, $A = a - b$ Si, en particulier, $a = b$, l'élongation résultante y est constamment nulle, l'ombre du point B reste fixe.

La superposition des mouvements vibratoires de même période peut donc dans certains cas produire le repos complet ; en général le mouvement résultant est un mouvement périodique dont l'amplitude est déterminée par la différence de phase des deux mouvements composants. Les phénomènes qui obéissent à ces lois sont connus sous le nom de phénomènes d'interférence. Nous les retrouverons en optique ; pour le moment, nous allons démontrer par l'expérience les interférences produites par les vibrations sonores.



Expériences relatives aux interférences du son.

110. — Pour réaliser expérimentalement les interférences du son il faut opérer sur des mouvements vibratoires de même période, en prenant par exemple comme sources sonores deux diapasons à l'unisson.

Il est plus simple de produire la superposition de deux mouvements vibratoires émanant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

d'une même source sonore, après leur avoir fait parcourir deux chemins différents.

On se sert à cet effet de l'appareil de König. Un tuyau sonore AB se bifurque en B en deux branches BCD, BC'D que l'on peut rendre inégales en tirant plus ou moins la coulisse C'; les deux branches se réunissent en D.

Si on approche de l'orifice A une source sonore quelconque, un diapason par exemple, il envoie dans les deux branches BCD, BC'D des ondes sonores de même période ; à l'orifice O, les mouvements vibratoires se superposent. La phase de chacun d'eux à son arrivée en O dépend du chemin parcouru. Si les chemins sont égaux, les phases sont égales; si les chemins sont inégaux, les phases sont inégales.

Soit un point dont la position d'équilibre est à une distance x de l'origine du mouvement vibratoire, l'élongation y_1 de ce point au temps t a pour expression :

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

en posant $\lambda = VT$.

Dans l'autre tube, le même point est à une distance x_2 de l'origine du mouvement vibratoire, son élongation est

$$y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

La différence de phase des deux mouvements est donc

$$2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$

Si $x_2 - x_1 = 0$, ou en général

$$2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2K\pi$$

ou encore

$$x_2 - x_1 = \frac{2K\lambda}{2}$$

(K étant un nombre entier quelconque), l'amplitude résultante est maxima.

Si $$2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = (2K+1)\pi$$

ou encore $$x_2 - x_1 = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

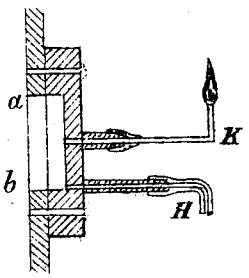
l'amplitude résultante est nulle.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La quantité $x_2 - x_1$ qui entre dans ces formules est la différence des chemins parcourus par les deux séries d'ondes; on l'appelle la différence de marche.

Donc suivant que la différence de marche est égale à un multiple pair ou à un multiple impair de la demi-longueur d'onde, l'amplitude résultante est maxima ou nulle.

111. — On observe l'état vibratoire du milieu à l'aide des capsules manométriques de König. Ce sont des capsules en bois dont la cavité de forme cylindrique est fermée par une membrane ab.



Dans l'intérieur de la capsule circule un courant de gaz d'éclairage arrivant en H et qu'on allume en K.

Lorsque la capsule est placée au contact d'une tranche d'air en mouvement, la membrane vibre et la sortie du gaz n'est plus uniforme; la flamme baisse et monte alternativement. La période des oscillations de la flamme est la même que celle du mouvement vibratoire; ces oscillations sont trop rapides pour pouvoir être perçues directement. On les observe en regardant la flamme dans un miroir tournant avec rapidité.

Dans le cas présent, on a disposé trois capsules manométriques, l'une sur le tube BCD, l'autre sur BC'D et la troisième à l'orifice O. Si on produit un son à l'orifice A, les flammes correspondant avec les tubes BCD, BC'D entrent en vibration, quelle que soit la longueur de ces tubes. Quant à la flamme qui communique avec O, son aspect dépend de la différence des chemins BCD, BC'D. Si ces chemins sont égaux, on aperçoit sur le miroir trois bandes dentelées; si, les chemins étant inégaux, la différence de marche est $\frac{\lambda}{2}$, la flamme de la capsule reste immobile.

Supposons qu'on tire la coulisse BCD de 9 centimètres pour produire ce second effet. Alors

$$x_2 - x_1 = 18^{\text{cm}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Donc $\frac{VT}{2} = 18$

ou $VT = 36^{cm}$

De cette équation, on peut déduire la valeur de V ou celle de T.

Si, à l'aide du thermomètre, on mesure la température de l'air, on aura V en appliquant la formule de Newton, on pourra calculer T.

Soit par exemple $V = 340^{m}$

Alors $340\ T = 0.36$

d'où $\frac{1}{T} = \frac{34000}{36}$

Or $\frac{1}{T}$ est le nombre N des vibrations du son par seconde.

Donc $N = 944$ vibrations

On peut au contraire supposer T connu et déterminer V; T étant fourni par la méthode graphique, l'équation

$$x_2 - x_1 = \frac{VT}{2}$$

fournirait V.

En portant cette valeur de V dans l'équation de Newton appliquée aux gaz (§. 83), on peut en tirer la densité du gaz.

$$V = \sqrt{\frac{10330 \times g}{1,293 \times d} \times \frac{C}{c} \times (1 + \alpha t)}$$

d'où $$d = \frac{1}{V^2} \frac{10330\ g}{1,293} \times \frac{C}{c} \times (1 + \alpha t)$$

Pour transformer cette expérience en expérience de précision, il serait avantageux de remplacer la capsule manométrique O par un tube de caoutchouc dont on approcherait l'extrémité de l'oreille.

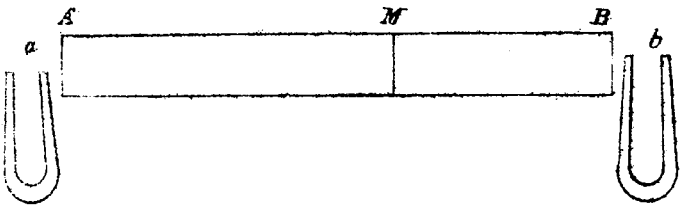
112. — Dans l'appareil que nous avons employé pour montrer les interférences du son, les deux séries d'ondes sonores qui interfèrent sont séparées tout le long de leur trajet; il n'y a interférence qu'au point où elles se réunissent.

On peut imaginer d'autres dispositions telles que les ondes qui interfèrent soient superposées tout le long de leur trajet.

Prenons par exemple un tuyau cylindrique AB ouvert par ses deux extrémités. Approchons de chaque orifice un diapason. Chacun d'eux donne naissance à un système d'ondes; les deux systèmes d'ondes se propagent en sens inverse dans le tuyau; en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

un point quelconque M du tuyau, elles se superposent.



Cherchons les points du tuyau où l'amplitude de la vibration résultante est maxima et ceux où elle est minima.

Supposons que les mouvements vibratoires des deux diapasons a et b aient même amplitude : nous prendrons cette amplitude pour unité.

Soit $y = \sin 2\pi \frac{t}{T}$

l'élongation au temps t du diapason a. Le mouvement vibratoire se propage dans le tube avec une vitesse V ; le mouvement qui se trouve au temps t dans la tranche M qui est à une distance x de l'origine est le même que celui qui était en a au temps $t - \frac{x}{V}$. Donc si le diapason a vibrait seul, l'élongation de la tranche M au temps t serait

$$y_1 = \sin 2\pi \frac{t - \frac{x}{V}}{T}$$

ou

$$y_1 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

avec $\lambda = VT$

Soit d'autre part

$$y_2 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma\right)$$

l'équation du mouvement vibratoire du diapason b. Ici γ représente une constante indépendante du temps. Ce mouvement vibratoire se propage dans le tuyau et arrive jusqu'à la tranche M, où il produirait une élongation

$$y_2 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma - \frac{l - x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

s'il existait seul ; car, si on désigne par l la longueur du tuyau, la distance de la tranche M à l'orifice B est $l - x$

On a donc en M les deux élongations

$$y_1 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma - \frac{l - x}{\lambda}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

qui se superposent ; leur résultante est égale à $(y_1 + y_2)$ *.

L'amplitude résultante ne dépend que de la différence de phase des deux mouvements qui interfèrent.

Les phases sont

$$\alpha = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (3)$$

$$\beta = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \gamma - \frac{l-x}{\lambda}\right) \qquad (4)$$

Donc la différence de phase a pour valeur

$$\alpha - \beta = 2\pi\left(\frac{l-2x}{\lambda} - \gamma\right) \qquad (5)$$

Le minimum qui ici est nul (les amplitudes sont supposées égales) est obtenu lorsque la différence des phases est égale à $(2n+1)\pi$.

Il y a donc un minimum nul en tous les points dont l'abscisse x satisfait à l'équation

$$2\pi\left(\frac{l-2x}{\lambda} - \gamma\right) = (2n+1)\pi$$

Les points du tuyau où l'amplitude vibratoire est nulle sont appelés des nœuds.

113. — Cherchons la distance de deux nœuds consécutifs.

Soient x' et x'' les valeurs de x qui caractérisent les positions de ces deux nœuds. — On a

pour le premier nœud $2\pi\left(\frac{l-2x'}{\lambda} - \gamma\right) = (2n+1)\pi$

ou

$$\frac{l-2x'}{\lambda} - \gamma = \frac{2n+1}{2} \qquad (6)$$

pour le second nœud

$$\frac{l-2x''}{\lambda} - \gamma = \frac{2(n+1)+1}{2} = \frac{2n+1}{2} + 1$$

d'où en retranchant membre à membre

$$\frac{2(x''-x')}{\lambda} = 1$$

ou $x'' - x' = \frac{\lambda}{2}$.

(*) On peut toujours prendre pour valeur de la résultante $y_1 + y_2$, y_2 étant affecté du signe +. En effet la constante γ est indéterminée. Si l'on remplaçait γ par une constante déterminée K, il pourrait se faire que dans certains cas on fût obligé de changer le signe de l'élongation y_2 ; cela reviendrait à changer K en $K + \frac{1}{2}$. Ici le terme γ étant indéterminé représente indifféremment soit K, soit $K + \frac{1}{2}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La distance entre deux nœuds consécutifs est égale à la moitié de la longueur d'onde.

114. — Les points du tuyau où l'amplitude est maxima sont appelés des ventres.

La distance de deux ventres consécutifs se trouve par le même calcul que la distance de deux nœuds. Elle est aussi égale à $\frac{\lambda}{2}$.

115. — Les ventres et les nœuds sont disposés alternativement dans le tuyau.

x_1 étant la valeur de x qui correspond au ventre pour lequel $\alpha - \beta = 2n\pi$, on a

$$\frac{l - 2x_1}{\lambda} - \gamma = \frac{2n}{2}$$

Retranchons membre à membre cette équation de l'équation (6); il viendra

$$2\,\frac{x_1 - x'}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

ou

$$x_1 - x' = \frac{\lambda}{4}$$

Donc un ventre est équidistant des deux nœuds qui le comprennent; la distance d'un ventre à chacun des nœuds voisins est égale au quart de la longueur d'onde.

Nous allons maintenant appliquer ces résultats généraux à un certain nombre de cas particuliers qui s'y rattachent grâce à l'indétermination du terme γ.

1° Interférences dans les tuyaux fermés à une de leurs extrémités.

116. — Supposons qu'on ferme le tuyau en B par une paroi solide. Sur cette paroi, il y a réflexion avec changement de signe; en M les ondes directes et réfléchies se superposent; nous pouvons appliquer les résultats généraux établis précédemment.

L'extrémité B du tuyau est un nœud, car les molécules d'air les plus voisines de l'obstacle B sont immobiles. Il en résulte que la position des nœuds et des ventres dans le tuyau est entièrement déterminée. Les nœuds sont à des distances $\frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 4\frac{\lambda}{2} \ldots n\frac{\lambda}{2}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

de l'extrémité B. Les ventres sont à des distances $\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}, 2\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4} \ldots, n\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$ de cette extrémité.

2° Interférences dans les tuyaux ouverts à leurs deux extrémités.

117. — Considérons maintenant un tuyau ouvert en B. L'onde réfléchie a même sens que l'onde directe ; en B il y a réflexion sans changement de signe.

Si l'on admet que la réflexion se produit en B sans différence de phase, les deux vibrations qui se superposent en B, l'une due à l'onde incidente, l'autre origine des ondes réfléchies ont une différence de phase nulle. Alors B peut être considéré comme un ventre.

La position des nœuds et des ventres dans le tuyau est donc complètement déterminée ; les ventres sont à des distances, $\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, \ldots n\frac{\lambda}{2}$ de l'extrémité B ; les nœuds sont à des distances

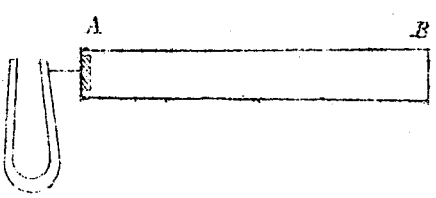
$$\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}, 2\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4} \ldots n\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$$

de cette même extrémité.

Nous avons admis que la réflexion se produisait sans différence de phase en B. On ne peut affirmer que B soit rigoureusement un ventre ; mais les autres résultats établis n'en subsistent pas moins, si on remplace l'extrémité B par le ventre le plus voisin.

Démonstration expérimentale de l'existence des nœuds et des ventres.

118. — On peut mettre en évidence l'existence des nœuds et des ventres dans un tuyau par l'expérience suivante.



Un tuyau AB dans lequel on a semé de la sciure de bois est fermé à une de ses extrémités B. L'extrémité A est munie d'un piston vibrant en liège, fixé à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

un diapason entretenu électriquement et rendu étanche par une membrane de caoutchouc.

Il se produit dans le tuyau des nœuds et des ventres. A chaque ventre l'air vibre, on observe un mouvement des parcelles de sciure ; à chaque nœud au contraire, l'air ne vibre pas, les parcelles de sciure restent immobiles.

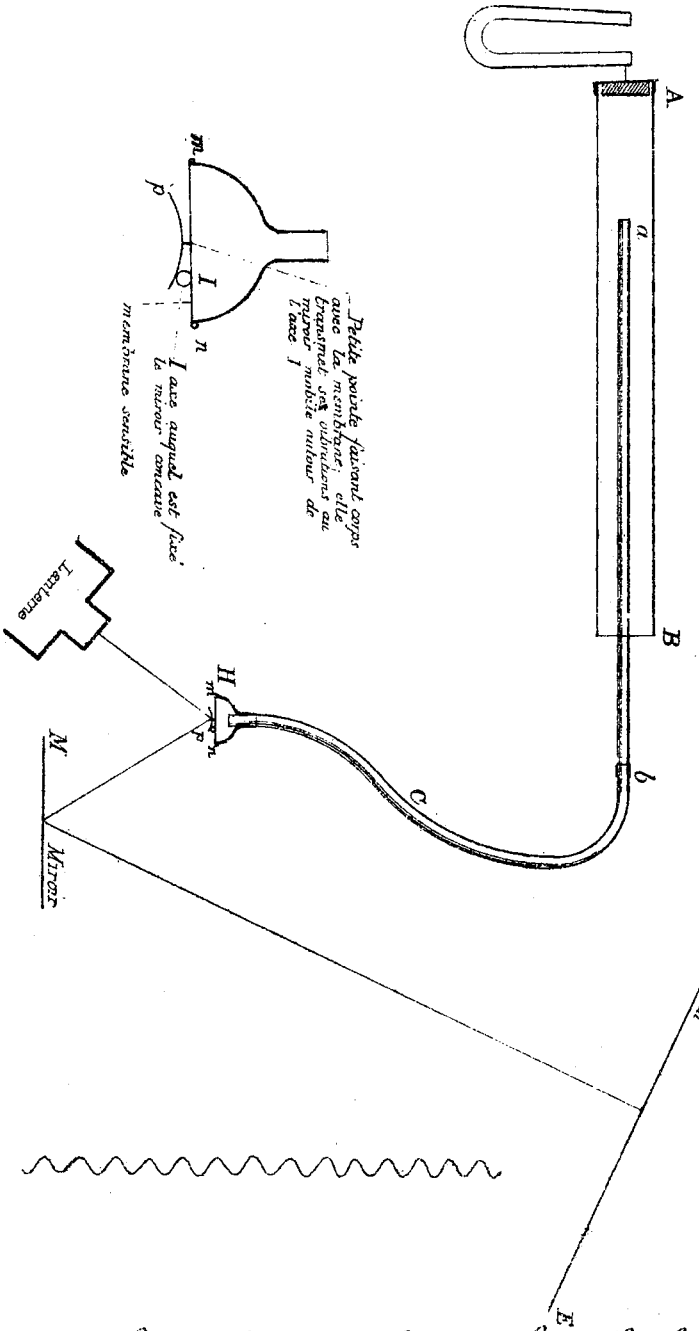
119. — Les variations de la force élastique de l'air sont maxima dans les nœuds. En effet, la tranche d'air qui se trouve à un nœud est immobile, puisque l'amplitude de sa vibration est constamment nulle. Les élongations sont constamment égales et de signes contraires pour les deux tranches infiniment voisines ; l'air du nœud subit donc une compression maxima lorsque les tranches voisines se sont rapprochées ; il subit une dilatation maxima, dans le cas contraire.

Aux ventres les variations de la pression de l'air sont nulles. Soit en effet V la tranche d'air correspondante ; les tranches qui sont de part et d'autre de V à une distance infiniment petite ont toujours des élongations égales et de même signe. Donc la tranche V ne subit aucune compression ; la pression de l'air y est constante.

120. — Cette propriété des nœuds et des ventres peut être vérifiée expérimentalement.

Dans l'intérieur du tuyau AB décrit plus haut, on peut enfoncer plus ou moins un long tube de verre ab communiquant par le tube de caoutchouc C avec la capsule H. Cette capsule se compose d'une petite boîte creuse en bois fermée par une membrane sensible m n, sur laquelle on a collé un petit miroir p. La lumière émise par la lanterne L se réfléchit sur le miroir p, puis sur le miroir M et va projeter un point lumineux sur l'écran E. Si on enfonce le tube de façon que a coïncide avec un nœud, la pression de l'air éprouve ses variations maxima ; la membrane m n vibre, le point lumineux vibre lui même et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



se transforme en un trait lumineux.

On peut mettre les vibrations du point lumineux en évidence en le projetant sur l'écran par l'intermédiaire d'un miroir tournant M. On obtient alors une ligne sinusoïdale.

Si au contraire l'extrémité a coïncide avec un ventre la pression de l'air restant constante, dans toute l'étendue du tube de caoutchouc, la membrane ne vibre pas, la tache lumineuse reste fixe; si on déplace le miroir M la ligne décrite sur l'écran est une droite. La position des ventres est ainsi très exactement déterminée.

Cette expérience peut servir à évaluer la longueur d'onde; il suffit pour cela de mesurer la distance d de deux ventres consécutifs. On a alors

$$d = \frac{\lambda}{2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

d'où $\lambda = 2d$

ou $VT = 2d$

relation qui permettra de calculer V, si on connaît T, ou T si on connaît V.

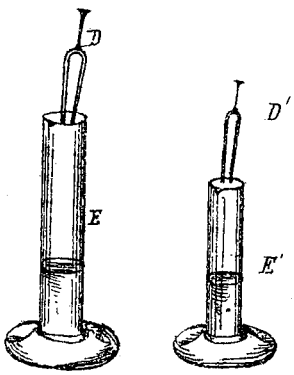
Renforcement du son produit par des tuyaux. — Résonnateurs cylindriques.

121. — Nous n'avons jusqu'ici considéré que les phénomènes présentés par les tuyaux fermés ou ouverts à l'extrémité B où se produit la réflexion (§ 112)

Étudions maintenant ce qui arrive lorsque l'autre extrémité A du tuyau est un ventre.

Une première expérience nous montre que les tuyaux présentent des phénomènes différents avec les divers sons.

Prenons par exemple deux éprouvettes à pied, l'une grande E, l'autre petite E'; devant leurs orifices, faisons vibrer deux diapasons l'un D grave, l'autre D' aigu. — Si la longueur des éprouvettes est convenablement choisie, le son du diapason D est renforcé par le tuyau E et ne l'est pas par le tuyau E'; inversement le son de D' est renforcé par E' et ne l'est pas par E. Donc les tuyaux ne renforcent pas tous les sons.



On donne le nom de résonnateur à un appareil qui renforce un son.

122. — La théorie des phénomènes de renforcement n'est pas faite. Il est toutefois facile de voir qu'un tuyau AB renforcera un son produit à l'extrémité A si la longueur d'onde du son est telle qu'il y ait un ventre à l'extrémité A. En effet s'il y a un ventre en A, les vibrations propres du tube ont leur amplitude maxima. L'élongation qui résulte de la vibration du tube s'ajoute à celle du diapason qui produit le son, car ces deux vibrations ayant même phase sont constamment concordantes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La position des nœuds et des ventres dans un tuyau est indépendante de la longueur du tuyau en A. Si le tuyau est fermé, les ventres sont à des distances de l'extrémité B exprimées par

$$\frac{\lambda}{4},\ \frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4},\ 2\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4},\ \ldots\ n\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}$$

S'il y a renforcement, il y a un ventre en A. Donc la longueur l du tuyau satisfait à la relation.

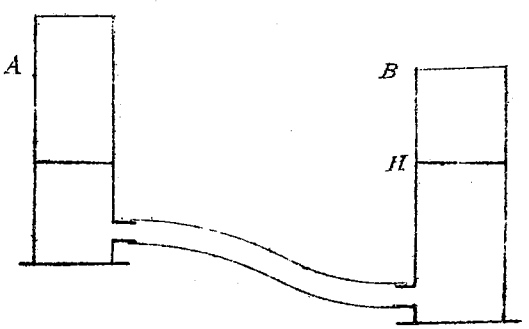
$$l = n\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Le son d'un diapason présenté à l'orifice d'un tuyau fermé ne sera renforcé que si sa longueur d'onde correspond à la formation d'un ventre à l'orifice du tuyau. Alors la longueur l du tuyau satisfait à la relation

$$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

équation d'où on pourra tirer λ.

123. — On réalise cette mesure de λ en prenant deux longues éprouvettes à pied A et B reliées entre elles par un tube de caoutchouc comme le sont les flacons servant à la préparation continue de l'hydrogène. Si on soulève plus ou moins l'éprouvette A le niveau de l'eau varie dans B; on obtient ainsi un tuyau fermé de longueur variable.



Si on présente un diapason à l'orifice du tuyau B, le son ne sera renforcé que si $BH = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$. Dans le cas où on prend pour H le niveau le plus élevé où le renforcement se produit, on a

$$BH = \frac{\lambda}{4}$$

d'où l'on déduira λ

On peut encore s'appuyer sur ce que la distance des positions de deux ventres est $\frac{\lambda}{2}$. On mesure alors la différence des niveaux du liquide entre deux renforcements consécutifs. Si l'on désigne par d cette distance, on a

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$d = \frac{\lambda}{2}$$

d'où $\lambda = 2d$.

Si l'on opérait avec un tuyau ouvert à ses deux extrémités, on trouverait les mêmes résultats : le tuyau renforce certains sons pour lesquels un ventre existe à l'ouverture à laquelle on présente la source sonore.

Un tuyau ouvert ou fermé qui renforce certains sons constitue pour ces sons ce que nous appellerons un résonnateur cylindrique.

Tuyaux sonores.

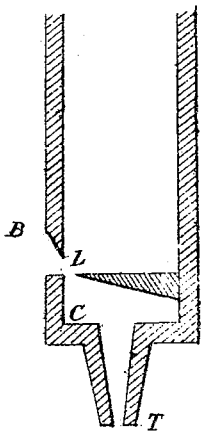
124. — Les tuyaux sonores sont des instruments de musique dont on peut faire la théorie en les assimilant à des résonnateurs cylindriques. Le son qu'ils émettent quand on les fait parler n'est autre que le son que ces tuyaux, considérés comme résonnateurs cylindriques, sont propres à renforcer.

Nous allons vérifier par l'expérience qu'il en est ainsi, nous montrerons ensuite que toutes les propriétés des tuyaux sonores peuvent se déduire des propriétés des résonnateurs.

L'air contenu dans le tuyau peut être mis en vibration par un procédé quelconque ; le son renforcé est toujours le même. Prenons un tuyau d'orgue capable de renforcer le son d'un diapason qu'on approche de son orifice ; le son fourni par le tuyau lorsqu'on le fait parler à l'aide d'une soufflerie a même hauteur que le son du diapason ; il n'en diffère que par le timbre.

125. — Les tuyaux sont des résonnateurs excités, non par des diapasons, mais par un courant d'air qui a traversé un appareil placé à l'une des extrémités du tuyau et désigné sous le nom d'embouchure. Une des formes les plus communes d'embouchure est l'embouchure de flûte. Elle se compose d'une chambre C dans laquelle arrive l'air de la soufflerie par l'intermédiaire de l'ouverture T ou porte-vent. Le compartiment C

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



communique avec le tuyau par une fente L appelée la lumière. L'air chassé à travers la lumière vient rencontrer un biseau B taillé dans la paroi du tuyau. Il en résulte une espèce de sifflement produit par la superposition d'un grand nombre de sons; parmi ces sons se trouve celui que peut renforcer le tuyau. Alors l'air intérieur entre en vibration.

126. — On a vu que la hauteur du son renforcé par un résonnateur cylindrique dépendait uniquement de la longueur du résonnateur et de la vitesse du son dans le gaz qu'il contient; elle est indépendante de sa section et de la nature de ses parois. Il doit donc en être de même des tuyaux sonores.

Influence de la section.

127. — La hauteur du son renforcé par un tuyau sonore est indépendante de la section du tuyau.

On le vérifie en faisant parler à l'aide de la même soufflerie des tuyaux d'orgue de même longueur, à section carrée circulaire, triangulaire etc. La hauteur du son est toujours la même.

Influence de la nature des parois.

128. — La hauteur du son renforcé par un tuyau sonore est indépendante de la nature des parois.

Pour le démontrer, on place sur une même soufflerie deux tuyaux de même longueur, l'un de bois, l'autre de carton. Le son renforcé a la même hauteur dans les deux cas.

Il faut en conclure que ce ne sont pas les parois du tuyau qui vibrent, mais bien le gaz qu'il contient. Ceci posé, la loi suivante est évidente à priori.

Influence de la nature du gaz.

129. — La hauteur du son renforcé par un tuyau sonore

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

dépend de la nature du gaz que contient le tuyau.

Il suffit pour le prouver de faire parler un petit tuyau d'abord avec de l'air, puis avec du gaz d'éclairage ; les sons produits sont de hauteurs différentes.

Relation entre la longueur d'un tuyau et la hauteur du son qu'il renforce.

I. Tuyaux ouverts.

130. — Soit un tuyau ouvert AB de longueur l. A l'extrémité A où se trouve la source sonore, les vibrations de l'air coïncident avec les vibrations de la source ; en A il y a un ventre.

Le tuyau étant ouvert en B, nous avons admis qu'en B il y avait aussi un ventre.

Or entre deux ventres se trouve toujours un nœud, équidistant de chacun des ventres. Donc il y a un nœud au milieu du tuyau.

Si on représente par λ_1 la longueur d'onde du son renforcé par le tuyau, la longueur du tuyau correspondant à la distance de deux ventres sera $\frac{\lambda_1}{2}$. Donc

$$l = \frac{\lambda_1}{2}$$

ou comme $\lambda_1 = VT_1$

$$l = \frac{VT_1}{2}$$

T_1 étant la période de vibration du son considéré.

Si N_1 est le nombre de vibrations doubles de ce son pendant une seconde,

$$N_1 T_1 = 1$$

d'où $$N_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{V}{2l}$$

La hauteur du son dépend du nombre de ses vibrations ; ce nombre est proportionnel à V. Si V vient à varier, la hauteur du son varie. Diverses causes, des changements de température, par exemple, peuvent faire varier V.

Les orgues se composant de tuyaux ouverts ne sont donc pas des instruments à sons fixes ; la hauteur du son d'un quelconque des tuyaux varie avec la température. V et par suite N_1 sont proportionnels à la racine carrée du binôme de dilatation

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$1+\alpha t = 1+\frac{t}{273}$$

Aux quantités près de l'ordre de $\frac{1}{273^2}$, on a

$$\sqrt{1+\alpha t} = 1+\frac{t}{2\times 273}$$

Le son renforcé par le tuyau à la température t a donc un nombre de vibrations N_1' donné par l'équation

$$N_1' = N_1\left(1+\frac{t}{546}\right)$$

Une variation de 10° produirait une variation de $\frac{1}{50}$ environ sur le nombre de vibrations

Cette influence de la température peut être mise en évidence par des méthodes physiques, mais elle est insensible à l'oreille, car elle équivaut à peu près à une élévation de $\frac{1}{4}$ de ton ; de plus, elle porte à la fois sur tous les tuyaux, de sorte que les intervalles musicaux ne sont pas changés.

Dans ce qui suivra, nous admettrons que la température reste constante ; la valeur de V est alors bien déterminée.

Harmoniques des tuyaux ouverts.

131. — Nous avons supposé que dans l'intervalle des deux ventres extrêmes, il n'y avait qu'un seul nœud. Le son correspondant caractérisé par le nombre $N_1 = \frac{V}{2l}$ de ses vibrations est appelé le son fondamental du tuyau sonore.

Il peut y avoir un nombre quelconque de nœuds dans l'intervalle des deux ventres extrêmes A et B. Soit n le nombre de ces nœuds, et λ la longueur d'onde correspondant au son émis.

La distance du ventre A au premier nœud est $\frac{\lambda}{4}$

Celle du 1er nœud au second est $\frac{\lambda}{2}$

. . . . . .

Celle du $(n-1)^e$ nœud au n^e est $\frac{\lambda}{2}$

Celle du n^e au ventre B est $\frac{\lambda}{4}$

La longueur l du tuyau est égale à la somme de ces distances.

Donc $l = \frac{\lambda}{4} + (n-1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = n\frac{\lambda}{2}$

Or $\lambda = VT$; d'où $l = \frac{nVT}{2}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Soit N le nombre de vibrations du son correspondant.

$$NT = 1 \; ; \quad N = \frac{1}{T}$$

Donc $N = \frac{nV}{2l}$

Dans cette formule n désigne un nombre entier quelconque, 1, 2, 3...

Les sons que pourra renforcer le tuyau auront des nombres de vibrations

$$N = \frac{V}{2l} = N_1 \; , \quad N_2 = 2\frac{V}{2l} = 2\,N_1 \; , \; N_3 = 3\,N_1 \; ,$$

et ainsi de suite.

Les nombres de vibrations de ces sons sont des multiples entiers quelconques du nombre de vibrations du son fondamental.

Les sons ainsi obtenus sont appelés les harmoniques du son fondamental.

Si le son fondamental est ut_1, les harmoniques seront

ut_1	ut_2	sol_2	ut_3	mi_3	sol_3
correspondant à $n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$

L'expérience permet de vérifier tous les résultats auxquels nous venons d'arriver par la théorie.

I. — Un tuyau ouvert peut donner le son fondamental et toute la série de ses harmoniques.

132. — On place sur la soufflerie un tuyau ouvert dont le porte-vent est muni d'un robinet. En ouvrant plus ou moins le robinet, la pression de l'air lancé dans le tuyau est plus ou moins considérable. Pour de faibles pressions, on obtient le son fondamental (généralement son intensité est très faible) et ses harmoniques les plus graves. Si on fait croître la pression, on obtient des harmoniques de plus en plus élevés.

L'expérience réussit d'autant plus facilement que le tuyau est plus étroit par rapport à sa longueur. Avec un tube large, il faudrait souffler très fort. Mais en général on obtiendra alors simultanément plusieurs harmoniques. Cela ne doit pas nous étonner, puisque d'après le principe de la superposition des petits mouvements, plusieurs états vibratoires peuvent coexister

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

dans le tuyau sans s'altérer réciproquement. — La production simultanée de plusieurs harmonique est un fait constant dans les tuyaux d'orgue. Nous verrons bientôt que cette superposition constitue le timbre.

2° Position des ventres et des nœuds dans un tuyau ouvert.

133. — Pour étudier la position des ventres et des nœuds dans le tuyau, nous pouvons employer la méthode d'exploration déjà indiquée (§. 120). — On introduit dans le tuyau sonore un tube de verre communiquant par l'intermédiaire d'un tube de caoutchouc avec une membrane sensible.

Lorsque l'extrémité du tube est à un endroit correspondant à un ventre, la membrane demeure immobile, car la pression reste constante dans tout le tube de caoutchouc. Si l'extrémité du tube correspond à un nœud, la membrane entre en vibration, car la pression à l'extrémité du tube et dans toute la masse d'air qui est en contact avec la membrane est constamment variable.

Une autre expérience repose encore sur ce fait que la pression est constante dans les tranches où se trouvent les ventres. Si on met ces tranches en communication avec l'air extérieur, l'état vibratoire du tuyau n'est pas troublé. Au contraire, la hauteur du son change si une ouverture est pratiquée en un autre point. On fait l'expérience avec un tuyau muni à différentes hauteurs de petits opercules qui bouchent des trous établissant la communication de l'air extérieur avec l'air intérieur. Si on ouvre un opercule correspondant à un ventre, le son reste le même; si on ouvre un opercule correspondant à un nœud, la hauteur du son change.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

II. Tuyaux fermés.

134. — Soit un tuyau AB fermé en B. A l'extrémité B se trouvera toujours un nœud ; l'extrémité ouverte peut être considérée comme un ventre.

S'il n'y a pas d'autre ventre dans toute la longueur du tuyau, le son émis a une longueur d'onde λ_1 fournie par l'équation

$$l = \frac{\lambda_1}{4}$$

Soit T_1 la période du son correspondant ; N_1 le nombre de vibrations de ce son par seconde. Alors

$$\lambda_1 = V T_1 \quad \text{et} \quad N_1 T_1 = 1$$

$$\text{d'où} \quad N_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{V}{\lambda_1} = \frac{V}{4l}$$

Ce nombre de vibrations caractérise le son fondamental du tuyau fermé.

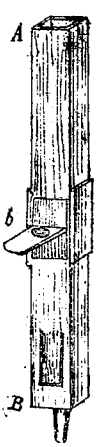
135. — Si le tuyau était ouvert en B, le son fondamental qu'il donnerait aurait un nombre de vibrations $N'_1 = \frac{V}{2l}$.

Donc $\qquad N'_1 = 2N_1$

Le son fondamental rendu par un tuyau fermé est à octave grave du son fondamental rendu par un tuyau ouvert même longueur.

Supposons qu'un tuyau ouvert ait une longueur $l' = 2l$. Le fondamental de ce tuyau est

$$N'_1 = \frac{V}{2l'} = \frac{V}{4l}$$



Donc $N'_1 = N_1$

Le son fondamental d'un tuyau fermé est le même que le son fondamental d'un tuyau ouvert de longueur double.

Cette conséquence peut être vérifiée par l'expérience. Un tuyau ouvert AB porte en son milieu une coulisse dont une moitié est pleine et l'autre évidée. Suivant la position de cette coulisse, le tuyau est fermé avec une longueur l ou ouvert avec une longueur $2l$. Le son fondamental correspondant aux deux cas est le même.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

136 — Supposons maintenant que dans la longueur du tuyau il y ait n ventres y compris A, ou ce qui revient au même n nœuds y compris B.

A chaque internœud correspond une distance $\frac{\lambda}{2}$.

La distance du dernier nœud au ventre A est $\frac{\lambda}{4}$. Donc

$$l = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

ou $$l = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Soient T la période, N le nombre de vibrations du son correspondant. On a

$$\lambda = VT \quad \text{et} \quad NT = 1$$

ou $$N = \frac{1}{T} = \frac{V}{\lambda} = (2n+1)\frac{V}{4l} = (2n+1)N_1 .$$

Les sons que l'on obtient en remplaçant n par un nombre entier quelconque sont les harmoniques du son fondamental.

Donc un tuyau fermé ne donne que les harmoniques impairs du son fondamental.

137. — Vérifications expérimentales.

I. Un tuyau fermé peut donner, outre le son fondamental, toute la série de ses harmoniques impairs.

La vérification se fait comme dans le cas des tuyaux ouverts.

II. Lorsqu'un tuyau fermé rend un harmonique quelconque, il y a toujours un nœud à l'une de ses extrémités B, un ventre à l'autre A. Supposons qu'il y ait n nœuds y compris B. On a

$$\lambda = \frac{4l}{(2n+1)}$$

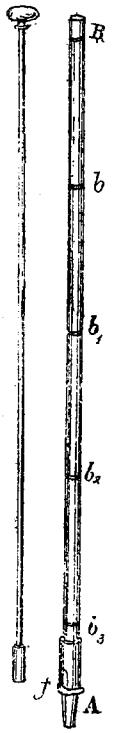
Diminuons la longueur du tuyau d'une quantité $\frac{\lambda}{2}$ en poussant un piston plein depuis le nœud B jusqu'au nœud voisin b nous obtenons le même son, mais il n'y a plus que $(n-1)$ nœuds y compris b.

On a en effet

$$\lambda = \frac{2\lambda}{2} = \frac{4l}{2n+1} = \frac{4l-2\lambda}{2n-1} = \frac{4(l-\frac{\lambda}{2})}{2(n-1)+1}$$

Si on pose $n' = n-1$ et $l' = l - \frac{\lambda}{2}$ on aura $\lambda = \frac{4l'}{2n'+1}$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



Donc λ est la longueur d'onde de l'harmonique du tuyau fermé de longueur l lorsqu'il y a $n' = n - 1$ nœuds y compris le nœud extrême. Donc en poussant le piston de $\frac{\lambda}{2}$, on ne changera pas la hauteur du son ; on devra s'arrêter lorsqu'on sera arrivé au dernier nœud voisin du ventre A.

Lorsqu'on fait l'expérience, il est bon de commencer par donner au tuyau sa longueur minima en poussant le piston jusqu'au dernier nœud b_n. Une fois que le tuyau a commencé à rendre le son correspondant, il continue lorsqu'on tire le piston de la longueur d'un internœud.

Embouchures.

138. — Nous avons déjà donné une idée du mécanisme de la production des sons dans les tuyaux munis d'une embouchure de flûte.

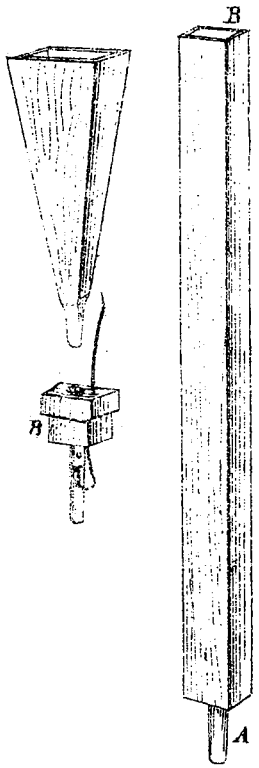
On emploie aussi des tuyaux sonores munis d'une embouchure à anche.

Les tuyaux à anche reçoivent le vent d'une soufflerie par une de leurs extrémités A ; à l'autre extrémité B se trouve fixée l'anche ; son organe essentiel est une petite lame solide, la languette susceptible de vibrer grace à son élasticité. Un tuyau à anche est à proprement parler une boîte où l'air de la soufflerie se comprime ; lorsque sa pression est suffisante, il soulève la languette qui en vertu de son élasticité revient à sa position d'équilibre. — L'anche entre alors en vibration et par suite elle peut rendre un son.

Si le son propre de l'anche est un des sons que peut renforcer le tuyau, on conçoit que l'anche se comporte comme un diapason que l'on approche de l'orifice du tuyau.

Si, au contraire, le son propre de l'anche n'est pas un de ceux que peut renforcer le tuyau, on entend néanmoins un son ; le tuyau force l'anche à vibrer ; le son produit résulte

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



des vibrations du système élastique complexe formé par l'air du tuyau et par l'anche elle-même. Le son n'est pas celui qu'aurait donné l'anche vibrant, ni celui qu'aurait renforcé le tuyau vibrant seul. La théorie des tuyaux à anche dans ce cas n'est plus la même que celle des tuyaux à embouchure de flûte.

Le son produit par un tuyau à anche dépend de l'élasticité de l'anche. On peut faire varier la longueur de la partie vibrante en déplaçant une petite pièce mobile nommée la rasette qui fixe une des extrémités de la languette.

La languette ferme un canal nommé rigole par où s'échappe l'air. Lorsque la languette est plus large que la rigole et bat sur ses bords, on dit que l'anche est battante. Si la languette est plus petite que la rigole et bat dans son intérieur, l'anche est dite libre.

Vibrations longitudinales des verges.

139. — La théorie des tuyaux à embouchure de flûte est générale ; elle est applicable à toutes les substances élastiques capables de vibrer longitudinalement.

La colonne d'air vibrante peut en effet être supposée remplacée par un cylindre d'une matière quelconque solide ou liquide seule, la valeur de V varie avec la nature de la substance. — Nous étudierons en particulier les verges solides.

Il est facile de mettre en évidence la production des sons par les vibrations longitudinales des verges. — Une tige solide de verre ou de métal AB est tenue à la main ou encastrée dans un étau par son milieu. On la frotte dans le sens de la longueur avec

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les doigts imprégnés de colophane si elle est métallique ou avec un morceau de drap mouillé d'eau acidulée si elle est en verre. La tige rend un son très pur. Les vibrations longitudinales qui prennent naissance se propagent tout le long de la verge et se réfléchissent à ses extrémités. Si la verge est fixée par son milieu M, il y a un nœud en M ; si les extrémités sont libres, chacune d'elles est un ventre. La tige de longueur l vibre comme le ferait un tuyau d'orgue fermé de longueur $\frac{l}{2}$.

Nous pourrons vérifier dans le cas des verges toutes les propriétés générales que nous avons découvertes dans les tuyaux.

Le son produit est indépendant de la section de la tige. On le vérifie en faisant vibrer des tiges pleines ou creuses de même longueur et de même substance, mais de diamètres différents.

Le son produit varie avec la nature de la substance. Il suffit pour le constater de faire vibrer des tiges d'acier et de laiton de même longueur.

Le son produit varie avec la longueur de la tige. — En prenant des tiges de même substance et de longueurs différentes, on peut obtenir toute une série de sons musicaux, par exemple les notes d'un accord parfait.

Nous retrouverons de même dans l'étude des verges les autres résultats démontrés dans la théorie des tuyaux sonores. Une verge donne un son fondamental et des harmoniques ; si la verge est encastrée par son milieu et libre par ses deux bouts (tuyaux ouverts) les nombres de vibrations des harmoniques sont des multiples entiers quelconques du nombre correspondant au son fondamental ; si la verge est encastrée par une de ses extrémités, les harmoniques correspondent aux multiples impairs du son fondamental.

140. — Soit par exemple une verge AB de longueur l encastrée par son milieu M. Le point M est un nœud, A est un ventre.

On a donc $\frac{l}{2} = \frac{\lambda}{4} = \frac{VT}{4}$

d'où $T = \frac{2l}{V}$

et $N = \frac{1}{T} = \frac{V}{2l}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Le nombre N peut être déterminé avec précision par la méthode graphique ; mesurons l. — La formule permet alors de calculer V, vitesse de propagation du son dans la tige employée.

Si on porte ensuite cette valeur de V dans l'équation de Newton

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

on pourra en déduire $E = \rho V^2$.

On a ainsi un nouveau procédé de mesure du coefficient d'élasticité longitudinal E, grandeur difficile à obtenir par les méthodes directes.

141. — On peut facilement mettre en évidence la production des nœuds et des ventres dans une tige solide à l'aide d'un artifice optique. Nous verrons plus tard dans l'étude de la double réfraction que si on fait tomber un faisceau lumineux sur un système de deux nicols dont les sections principales sont perpendiculaires, le faisceau ne traverse pas le système ; on dit alors que le système est à l'extinction. — Si, entre deux nicols à l'extinction, nous introduisons une lame de verre, l'extinction subsiste. Si on vient à comprimer cette lame de verre, la lumière réapparait autour des points où se produit la compression. — Un tel système pourra donc nous indiquer les points d'une lame de verre vibrante où les compressions sont maxima et ceux où les compressions sont nulles. Si on place un nœud entre les deux nicols, la lumière réapparait tant que dure la vibration ; si on y place un ventre, l'extinction subsiste.

Propagation des vibrations transversales.

142. — Les vibrations longitudinales sont les seules qui puissent se propager à travers les fluides (gaz ou liquides). Les solides peuvent aussi transmettre des vibrations qui ne sont pas longitudinales : on a donné à ces vibrations le nom de vibrations transversales.

Lorsqu'une vibration est longitudinale, la direction de l'élongation est la même que celle de la propagation ; si au

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

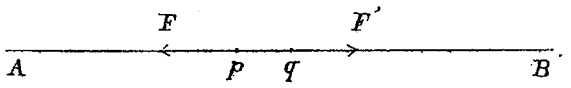
contraire la direction de l'élongation est quelconque par rapport à celle de la propagation, la vibration est transversale.

L'étude des vibrations transversales a une grande importance non seulement au point de vue de l'acoustique, mais aussi pour l'explication des phénomènes de la haute optique. Nous verrons en effet que la lumière est considérée comme résultant des vibrations d'un milieu impondérable, l'éther lumineux. Ces vibrations sont transversales.

Il est facile de donner une idée de la propagation des vibrations transversales par une expérience très simple. On prend une longue corde de caoutchouc fixée à ses deux extrémités. En frappant avec une tige de bois un des points de la corde, on l'écarte de sa position d'équilibre; elle y revient en vertu de son élasticité; mais, en même temps, la déformation à laquelle elle avait été soumise se transmet dans toute la longueur de la corde, puis se réfléchit aux deux extrémités fixes.

Théorie de la propagation des vibrations transversales.

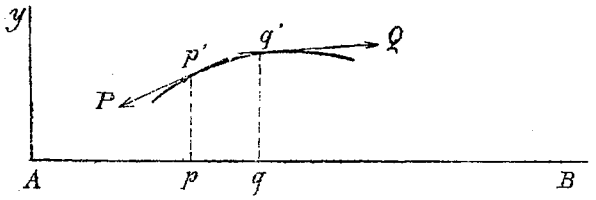
143. — Considérons d'abord le cas d'une corde tendue AB, de longueur indéfinie. Si nous supposons la corde sans pesanteur, la figure d'équilibre de cette corde est rectiligne.



Un élément quelconque pq de la corde est en équilibre. Pour exprimer ce fait, on peut imaginer qu'on remplace l'action de la partie Ap de la corde par une force F et celle de la portion Bq par une force égale et directement opposée F'. Ces forces sont les tensions aux deux points p et q.

Imprimons à cette corde une déformation infiniment petite; l'élément pq est alors écarté de sa position d'équilibre; mais en vertu des tensions qui agissent, il tend à y revenir; nous allons chercher l'équation de son mouvement. Soit $p'q'$ la position de l'élément pq au temps t; ds la longueur de l'élément, y la distance de l'élément à sa position d'équilibre

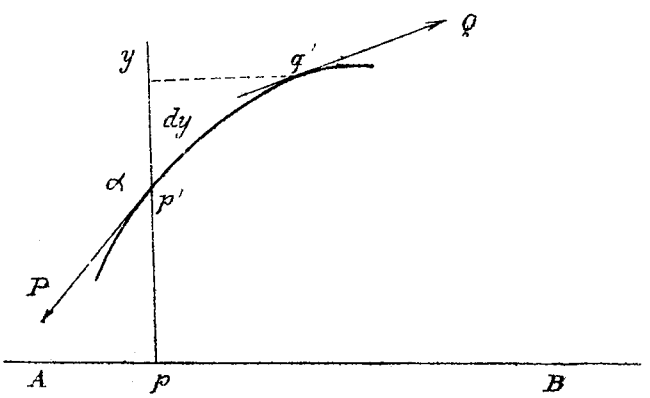
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



(son élongation); cette élongation est supposée infiniment petite.

Écrivons que le produit de la masse de $p'q'$ par son accélération est égal à la force accélératrice. Désignons par μ la masse de la corde par unité de longueur. La masse de l'élément ds est $\mu\, ds$. L'élongation étant y, l'accélération sera $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Le produit $\mu\, ds\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ doit être égal à la force accélératrice.

L'élément $p'q'$ est soumis aux deux tensions P et Q égales en grandeur, et dirigées suivant les tangentes à la corde en p' et en q'. La force qui tend à écarter l'élément de sa position d'équilibre (force accélératrice) est dirigée normalement à AB; elle ne dépend donc que des composantes des forces P normales à AB.



La projection sur py de la force $p'P$ est $p'P \cos\alpha$. Or si on projette $p'q'$ sur py on a $dy = ds \cos(\pi - \alpha)$ ou $-\cos\alpha = \frac{\partial y}{\partial s}$. Donc proj. $p'P = P\frac{\partial y}{\partial s}$.

Désignons par Y cette composante. On a

$$Y = -P\frac{\partial y}{\partial s}$$

Y est une fonction de y, de s et t; or y étant fonction de s et t, Y est fonction de s et t.

Si laissant le temps constant, on fait croître s de ds,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Y prend une nouvelle valeur Y'

$$Y' = Y + \frac{\partial Y}{\partial s} ds$$

Y' est la composante parallèlement à py d'une force égale et directement opposée à Q ; la composante dont dépend le mouvement de $p'q'$ est donc $-Y'$.

L'élément $p'q'$ est soumis à la résultante des deux forces $-Y'$ et Y, de même direction ; cette résultante est égale à la somme algébrique $Y - Y'$ des composantes

$$\text{Or } Y - Y' = -\frac{\partial Y}{\partial s} ds$$

ou

$$+\frac{\partial\left(P\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s} ds$$

Comme nous supposons P constant, la force accélératrice a pour valeur

$$\frac{\partial\left(P\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial s} ds = P\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} ds$$

L'équation du mouvement est donc

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

144. — Cette équation est la même que celle que nous avons obtenue pour la propagation des vibrations longitudinales. Si nous posons

$$V = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

une solution de l'équation différentielle est

$$y = \varphi(x \pm Vt)$$

φ représentant une fonction quelconque (§ 72)

Une autre conséquence importante résulte de la forme même de l'équation : c'est que le principe de la superposition des petits mouvements est applicable aux vibrations transversales.

Si deux mouvements composés de vibrations transversales sont possibles séparément, la superposition de ces deux mouvements représente un mouvement vibratoire également possible.

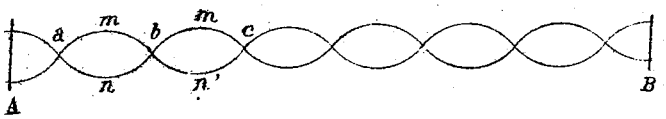
145. — Les vibrations transversales peuvent produire les mêmes phénomènes d'interférence que les vibrations longitudinales. On peut notamment produire des nœuds et des ventres par la superposition d'ondes directes et réfléchies.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

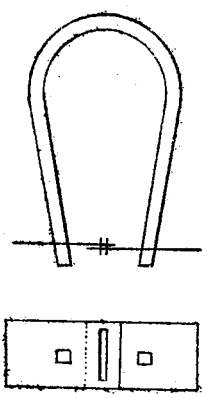
Ainsi quand une corde est tendue, si on la fait vibrer en l'écartant de sa position d'équilibre, sa longueur se divise en un certain nombre de concamérations séparées par des nœuds (points où l'amplitude de la vibration est constamment nulle) et des ventres (points où l'amplitude de la vibration est maxima).

Expérience de Melde.

146. — Il est facile de mettre en évidence pour un nombreux auditoire la production de ces nœuds et des ventres à l'aide d'une disposition due à Melde. Une corde métallique tendue est fixée par ses extrémités à une branche de chacun des diapasons A et B capables de vibrer à l'unisson. Le diapason A est entretenu électriquement : le mouvement de ce diapason détermine une déformation de la corde ; cette vibration transversale se transmet au diapason B qui entre en vibration. Aux deux extrémités, les vibrations de la corde concordent avec celles des diapasons ; les deux extrémités sont donc des ventres. — Dans l'intervalle on trouve un certain nombre de nœuds. Si on projette le phénomène sur un écran, on observe une série de fuseaux a m b n, b m' c n', etc.



Les parties renflées correspondent aux ventres de vibration ; les parties rétrécies aux nœuds.



On peut même par un artifice stroboscopique projeter le mouvement de la corde elle-même. Il suffit d'éclairer la corde par intermittence, de façon que chacun des éclairs saisisse la corde dans la même phase de son mouvement. On y arrive en plaçant dans le faisceau lumineux qui éclaire la corde un diapason interrupteur (§. 8) dont la période de vibration soit double de la période

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

des diapasons A et B

L'ombre de la corde a alors l'apparence suivante.

On voit ainsi que deux concamérations voisines ont toujours des élongations de signes contraires

Vibrations des cordes sonores.

147. — La théorie générale que nous venons d'établir est applicable en particulier aux vibrations de ces instruments de musique que l'on appelle des cordes sonores.

Considérons une corde tendue fixée à ses deux extrémités A et B. Puisque ces points sont fixes, ils sont des nœuds sur la corde vibrante. Dans l'intervalle, il peut y avoir un nombre quelconque de ventres. Supposons qu'il n'y en ait qu'un. Le son correspondant a une longueur d'onde λ_1 telle que

$$\frac{\lambda_1}{2} = l$$

l étant la longueur de la corde

$$\text{Or } \lambda_1 = VT_1 = \frac{V}{N_1}$$

d'où

$$N_1 = \frac{V}{2l}$$

Le son correspondant est le son fondamental; c'est le son le plus grave que puisse rendre la corde.

S'il y a n ventres intermédiaires, la corde rend un son de longueur d'onde λ telle que

$$n\frac{\lambda}{2} = l$$

d'où

$$\lambda = \frac{2l}{n} = \frac{V}{N}$$

$$\text{ou } N = n\frac{V}{2l} = nN_1$$

Les sons correspondants sont les harmoniques du son fondamental.

Une corde fixée à ses deux extrémités donne outre le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

son fondamental toute la série de ses harmoniques.

On peut le vérifier expérimentalement à l'aide d'une corde tendue sur un sonomètre (S. 3). On excite la corde avec un archet : elle rend le son fondamental. On détermine ensuite la production de nœuds en différents points de la corde en approchant le doigt pendant qu'on frotte avec l'archet. Si on produit un nœud au milieu, $N = 2N_1$; on obtient l'octave aigu du son fondamental ; et ainsi de suite.

148. — Le nombre de vibrations de la corde N dépend de $V = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$, où P désigne le poids tenseur, μ la masse de matière correspondant à l'unité de longueur.

On a ainsi

$$N = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

Or μ est liée à la densité absolue ρ de la substance par une relation simple.

Soit s la section de la corde ; le volume du cylindre qui a pour hauteur l'unité de longueur est s, sa masse est ρs. Donc

$$\mu = \rho s.$$

d'où

$$N = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{P}{\rho s}}$$

Si on considère en particulier le son fondamental, on a

$$n = 1$$

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{\rho s}}$$

Le nombre de vibrations du son fondamental d'une corde varie en raison inverse de sa longueur, proportionnellement à la racine carrée du poids tenseur, et en raison inverse de la racine carrée de la densité de la substance et de la section de la corde.

149. — Ces diverses propriétés des cordes peuvent être établies expérimentalement. La production des notes dans les instruments à corde (violon, violoncelle etc.) est une conséquence de la première partie de la loi. —

Si on opère avec une corde placée sur un sonomètre, en suspendant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

successivement les poids 1 et 4 à la corde, on obtient deux sons à l'octave l'un de l'autre. L'influence de la densité ou pour mieux dire du poids de l'unité de longueur de la substance est utilisée dans les cordes du violon ou du violoncelle qui doivent donner les sons graves : on les fait en boyau, mais on les recouvre de fil d'argent de manière à augmenter le poids de l'unité de longueur.

Timbre.

150. — Jusqu'ici, en étudiant les vibrations des tuyaux ou des cordes, nous avons supposé que le son fondamental et ses harmoniques se produisaient successivement. Il n'en est généralement pas ainsi dans la réalité. Un tuyau qui parle, une corde qui vibre donnent simultanément le son fondamental et ses harmoniques. Il est évident que ce phénomène est possible, d'après le principe de la superposition des petits mouvements.

Tous les instruments de musique sont capables de rendre simultanément plusieurs sons simples ; c'est à cette superposition qu'il faut attribuer le timbre particulier de chacun d'eux.

Le timbre d'un son est une qualité qui permet de le distinguer d'un autre son de même hauteur et de même intensité. Il suffit de faire parler un tuyau d'orgue en étain et de faire vibrer un diapason à l'unisson pour constater la différence de leurs timbres.

151. — Le timbre d'un son est dû à la superposition de plusieurs harmoniques. Pour faire cette démonstration, nous emploierons deux méthodes inverses.

1° La première consiste à former par synthèse un son qui ait même timbre qu'un son donné.

2° La seconde méthode est une méthode d'analyse. Un timbre, quelqu'il soit, peut être considéré comme la superposition de plusieurs sons différents qu'il est possible d'isoler

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Synthèse des sons.

152. — Reprenons l'expérience du diapason et du tuyau d'étain (§150). Nous avons constaté que les timbres étaient différents. Le tuyau donne en même temps que le son fondamental tous ses harmoniques. Si on fait vibrer simultanément tous les diapasons capables de donner ces harmoniques, on constate que le son résultant a même timbre que le son du tuyau.

Cette méthode de synthèse est générale. Lorsque dans un son complexe, on se doute de la présence de plusieurs harmoniques, on prend les diapasons correspondants et on les excite avec plus ou moins de force jusqu'à reproduire le même son.

Synthèse des voyelles.

153. — Helmholtz a appliqué cette méthode à la synthèse des sons produits par la voix humaine et désignés sous le nom de voyelles. Son appareil se compose d'une série de diapasons entretenus électriquement et placés devant des caisses de résonnance. On obtient pour chacun des sons des intensités différentes en faisant varier plus ou moins l'ouverture des caisses renforçantes à l'aide d'un opercule dont leur orifice est muni. Les expérimentateurs qui ont employé cette méthode ont obtenu pour la composition d'une voyelle donnée des résultats satisfaisants pour chacun d'entre eux, mais qui ne concordent pas. Cette divergence tient sans doute à ce que leurs voix ne sont pas identiques : elles présentent des différences de timbre qui sont en partie personnelles, en partie dues à la différence des accents.

Analyse des sons.

154. — Faire l'analyse d'un son, c'est constater la présence d'un son simple dans un son complexe formé par la superposition de plusieurs harmoniques. Helmholtz a résolu ce problème en se fondant sur le phénomène de la résonnance.

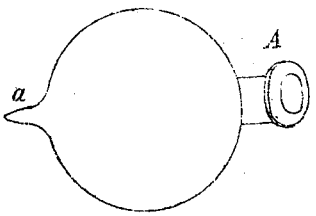
Un résonnateur est un appareil accordé pour renforcer un son de hauteur déterminée. Nous avons déjà montré que les tuyaux sonores étaient des résonnateurs. Un diapason est lui-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

même un résonnateur. Pour le montrer, prenons deux diapasons à l'unisson A et B montés sur leurs caisses de résonnance *

Faisons vibrer A ; le diapason B placé dans le voisinage entre en vibration et le son de A est renforcé. Pour constater que B vibre, arrêtons A en le touchant ; l'intensité du son est notablement diminuée ; touchons ensuite B : le silence est rétabli. Ainsi le diapason B a joué le rôle de résonnateur par rapport à A.

155. — Chaque résonnateur ne renforçant qu'un son déterminé, pour découvrir les sons simples contenus dans un son complexe, il faut avoir une série d'appareils tels que chacun d'eux soit capable de renforcer un son simple. L'emploi des tuyaux ou des diapasons pour cet usage serait incommode. Helmholtz a construit les résonnateurs en forme de sphères creuses munies d'un pavillon A chargé de recueillir les sons ; à l'extrémité du diamètre passant par le centre de A se trouve une sorte de petit entonnoir pointu a que l'on place à l'oreille. Le son renforcé dépend des dimensions de la sphère : plus la sphère est petite, plus le son renforcé est aigu.

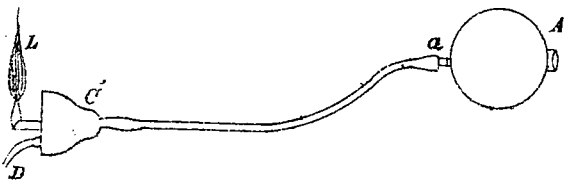


Si on veut faire avec ces appareils l'analyse d'un son composé, on essaie successivement les différents résonnateurs ; ceux des résonnateurs qui vibrent à l'unisson des sons simples que contient le son complexe se mettent à parler ; les autres demeurent silencieux.

Au lieu d'approcher la sphère de l'oreille, on peut mettre en communication la tubulure a avec une capsule manométrique de Kœnig par l'intermédiaire d'un tube de caoutchouc. Lorsque le résonnateur vibre, la flamme entre elle-même

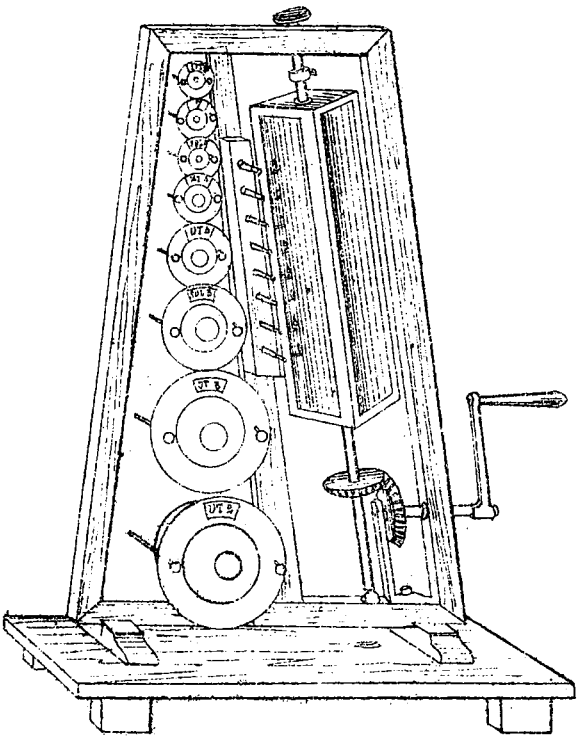
* Les caisses de résonnance sont des tuyaux ouverts ou fermés généralement en bois sur lesquels sont fixés les diapasons ; ces tuyaux sont de longueur telle qu'ils parlent à l'unisson du diapason.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



en vibration. On observe son déplacement par la méthode déjà exposée (§ III).

On trouve dans les cabinets de physique un appareil construit par Kœnig et qui se compose d'une série de huit résonnateurs. On peut ainsi découvrir dans un son complexe un des huit sons simples correspondant à ceux que renforcent les résonnateurs.



156. — Cet appareil ne peut servir à faire l'analyse complète d'un son. Il faudrait pour cela que le nombre des résonnateurs fut infini. Il est évident que plus le nombre en est considérable, plus l'analyse est précise. Les résonnateurs peuvent d'ailleurs avoir une forme quelconque. Si par exemple on produit un son devant la table d'harmonie d'un piano dont on a soulevé les étouffoirs, chacun des harmoniques dont est composé le son communique sa vibration à la corde correspondante. L'ensemble des cordes continue à vibrer, même si le son primitif a cessé ; de plus, le son

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

résultant des vibrations simultanées de toutes les cordes a le même timbre.

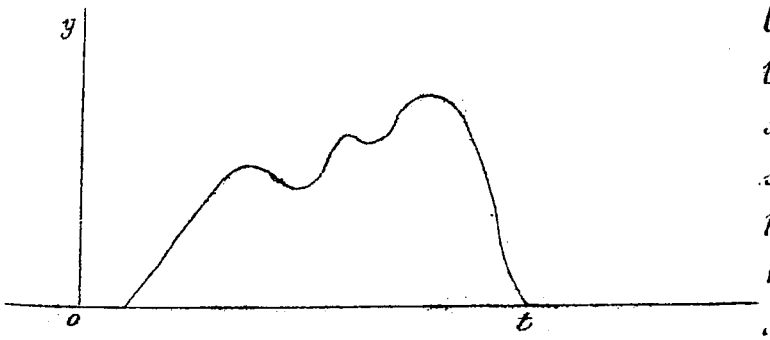
Comme on le voit, un résonnateur est pour ainsi dire un réactif qui permet dans un son complexe de decouvrir la présence d'un son simple.

Théorie du timbre et série de Fourier.

157. — Un son quelconque est caractérisé quand on se donne l'élongation d'une molécule du milieu vibrant en fonction du temps. Il en résulte que l'histoire complète d'une série de sons qui arrivent à l'oreille est définie par une équation

$$y = f(t)$$

Si on prend pour abscisses les valeurs de t, et pour ordonnées celles de y, l'équation $y = f(t)$ représente la courbe des élongations de la molécule considérée.



Ecrivons que l'élongation au temps t est la somme d'une série d'élongations dues aux harmoniques d'un même son fondamental.

Soit T la période du mouvement fondamental; les périodes des harmoniques sont $\frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$ On a donc

$$f(t) = A + B \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) + C \sin\left(2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}T} + \gamma\right) + D \sin\left(2\pi \frac{t}{\frac{1}{3}T} + \delta\right) + \ldots + N \sin\left(2\pi \frac{t}{\frac{1}{n}T} + \xi\right)$$

Et cette équation est toujours vérifiée pour des valeurs réelles des constantes $A, B, \ldots N, \beta, \gamma, \ldots \xi$, et quelle que soit la fonction $f(t)$ pourvu que cette fonction soit continue.* Ce théorème est dû à Fourier;

* Nous n'avons pas à considérer ici ce que devient le théorème de Fourier quand $f(t)$ présente des discontinuités : l'élongation d'un point matériel est essentiellement une fonction continue du temps.

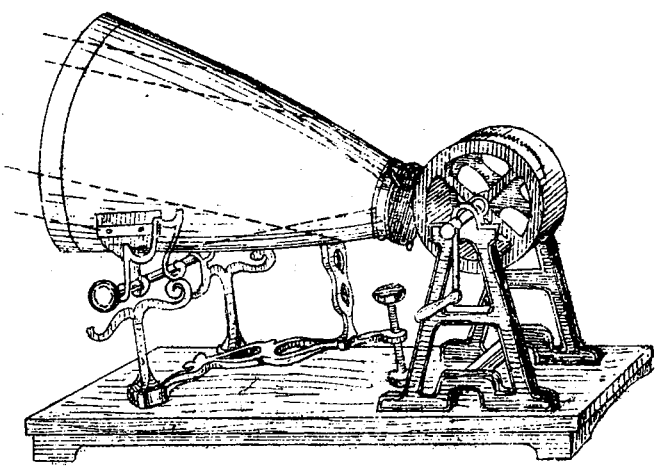
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

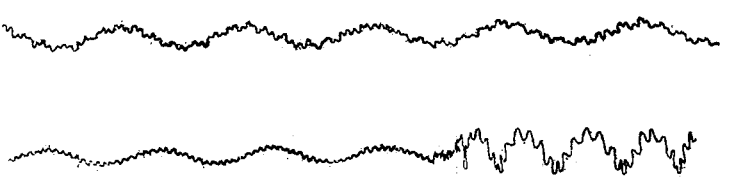
on le démontre d'une manière rigoureuse et générale.

La décomposition d'une vibration quelconque en une somme de sons simples, harmoniques d'un même son fondamental, se trouve ainsi démontrée rigoureusement et à priori.

Détermination de la forme des vibrations.

158. — Proposons-nous d'étudier la courbe $y = f(t)$. Il faudra pour cela inscrire les mouvements de la molécule vibrante. Le premier appareil qui ait été imaginé pour enregistrer ces





inscriptions est le phonautographe de Scott. Il se compose d'un paraboloïde de révolution en métal mince dans le plan focal duquel on a tendu une membrane sensible. Au centre de la membrane est fixé avec un peu de cire un style dont l'extrémité s'appuie sur un cylindre enduit de noir de fumée. Le

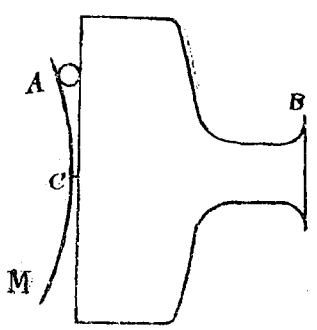
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

cylindre se déplace parallèlement à son axe au moyen d'une manivelle. Si le style se meut, le noir de fumée est enlevé aux points touchés. En produisant un son devant le phonautographe, la membrane participe aux vibrations de l'air ambiant et inscrit ces vibrations sur le cylindre ; on obtient ainsi des courbes plus ou moins compliquées.

Malheureusement le phonautographe remplit sa mission d'une façon imparfaite. Cela tient à ce que le système mû par les ondes aériennes n'obéit pas fidèlement aux vibrations de l'air : il a une élasticité propre et une inertie appréciable ; de là d'abord un défaut de sensibilité.

De plus le système mobile a des vibrations propres qui se superposent aux vibrations de l'air. La membrane mobile fonctionne comme un résonnateur ; à l'égard des sons composants qui sont à l'unisson de ceux qu'elle même peut rendre.

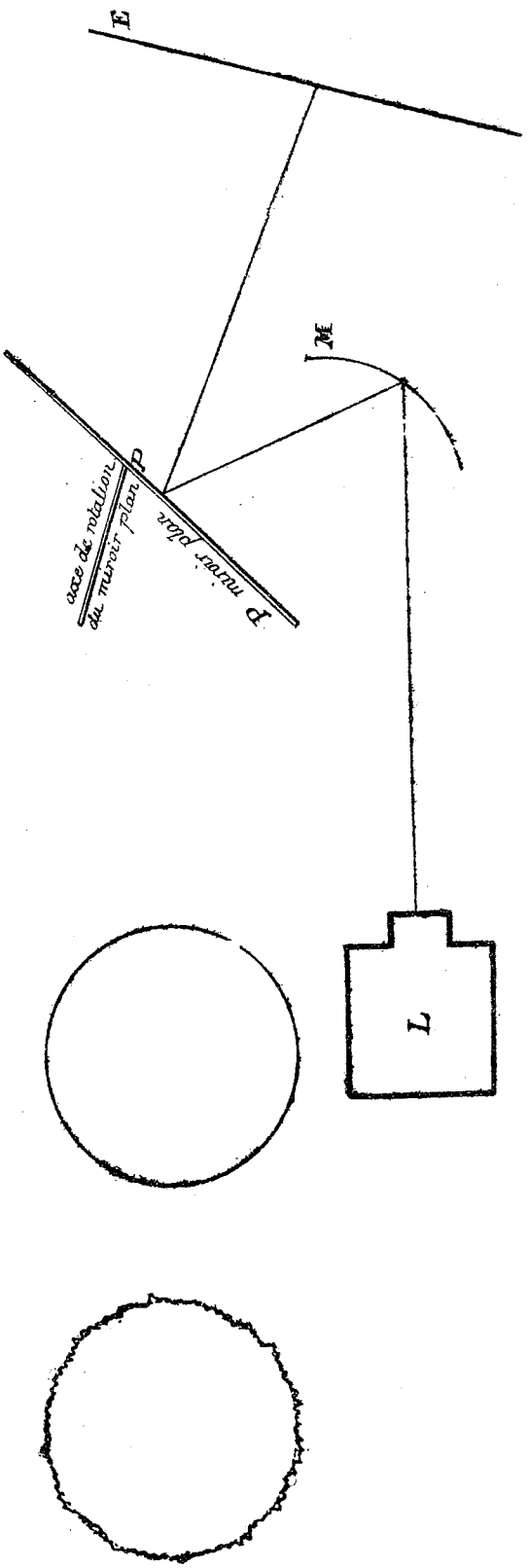
159. — On peut encore employer un procédé plus sensible qui n'est qu'une modification d'un appareil déjà employé.



Une petite capsule de bois est fermée par une membrane de caoutchouc ; elle se termine de l'autre côté par un pavillon B devant lequel on produit les sons à étudier. Un miroir concave M très léger est collé par son sommet C au milieu de la membrane. Le bord du miroir est d'autre part fixé à une tige immobile A ; le miroir peut ainsi tourner autour de A comme autour d'une charnière fixe.

Chaque déplacement de la membrane se traduit par un mouvement de rotation du miroir autour de l'axe A.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



Un faisceau lumineux issu de la lampe L tombe sur le miroir M, est réfléchi, sur un miroir plan P qui le renvoie sur l'écran E.

Lorsque le miroir M se déplace, autour de son axe horizontal la tache lumineuse I vue sur l'écran E décrit une droite verticale. Si on fait mouvoir le miroir P autour d'un axe vertical, l'image I se déplace et décrit une ligne dentelée.

Pour observer le phénomène d'une façon continue on rend le miroir P mobile autour d'un axe oblique à son plan. Lorsque P tourne autour de cet axe, M restant fixe, la tache lumineuse décrit une circonférence ; si la membrane vibre cette circonférence est dentelée. — Il est facile avec cet appareil d'inscrire les vibrations de la voix humaine, et de les fixer par la photographie.

Influence de la différence de phase des sons

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

composants sur le timbre des sons résultants.

160. — L'expérience nous apprend que le timbre d'un son reste le même quelle que soit la distance à laquelle on se trouve de la source sonore. — Il faut en conclure que la phase de vibration des divers sons simples qui constituent un son complexe n'a aucune influence sur le timbre. Lors même que la différence de phase entre les vibrations des divers sons simples viendrait à changer, la sensation resterait la même. Donc au point de vue de la sensation auditive, tout son peut être représenté par une série de Fourier dans laquelle les termes $\beta, \beta', \ldots \zeta$ resteraient indéterminés.

Table des matières de l'Acoustique.

Numéros des Paragraphes		Pages
1	**Introduction.**	
	Objet de l'acoustique; ses relations avec les autres sciences (élasticité, physiologie, psychologie)	1
2	Division du sujet. — Plan général de l'acoustique	2
	Nature du son.	
3	Le son résulte d'un mouvement vibratoire	3
4-6	Son produit par les vibrations d'une verge. — Mouvement vibratoire d'un diapason. — Expérience du timbre vibrant	5
7-8	Procédés optiques pour observer le mouvement d'un diapason	6
9	Méthode stroboscopique	10
10	Applications. — Étude de la constitution de la veine liquide. Expériences de Savart	10
11	Applications diverses	11

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
12	Étude des machines magnéto électriques. — Expériences de M. Soubert	11
13	Vibrations des liquides	12
14_15	Vibrations des gaz	12
	Expérience montrant la production du son par les vibrations des gaz.	
	Qualités du son.	
16	Qualités qui distinguent les divers sons	13
	Hauteur du son	
17	La hauteur d'un son ne dépend que du nombre de ses vibrations	13
18_20	Sirène de Cagniard Latour	14
	Diapason transformé en Sirène	15
	Sirène de Seebeck	
21	Détermination du nombre des vibrations d'un son	15
22	Emploi de la sirène de Cagniard Latour	15
23_24	Méthode graphique	17
25	Mesure du temps par la chute d'un corps pesant	18
26	Cylindre enregistreur de Duhamel	19
27	Résultats	20
28	Analogie de la méthode graphique avec la méthode des coincidences	21
	Applications de la méthode graphique.	
29	1° Comparaison des périodes de deux diapasons	21
30_31	2° Mesure du temps	22
32	Expériences du Colonel Sebert	22
33_34	Horloge à diapason. Ses applications	23
35	Méthode optique de Lissajous. — Comparaison des périodes de vibration	25
36	Équation différentielle du mouvement vibratoire	25

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
37-38	Vibrations simples, sinusoïdes ou pendulaires	26
40	Amplitude, phase, période des vibrations	27
41	Représentation géométrique du mouvement pendulaire	28
42	Construction de Fresnel	29
43	Diminution graduelle de l'amplitude	29
44	Théorie des expériences de Lissajous	31
	Composition des vibrations rectangulaires de même période	
45	Vérifications expérimentales	33
46	Composition des vibrations parallèles de même période	34
47	Composition des vibrations parallèles de périodes inégales	35
48	Battements	
	Applications du phénomène des battements :	
49	1. Comparaison de deux diapasons	36
50	2°. Construction de diapasons à l'unisson	36
51-52	Composition des vibrations rectangulaires de périodes inégales	37
53-56	Courbes de Lissajous	38
	Apparences présentées par les courbes de Lissajous	40
	Leur projection et leur inscription	41
57	Expériences de stroboscopie sur deux diapasons à miroir	41
58	Théorie du phénomène	43
60	Application. — Comparaison des périodes de vibration de deux pendules	45

Propagation du son.

61	Vibrations longitudinales et vibrations transversales	46
62	Propagation des vibrations longitudinales	46
63-67	Expérience des boules d'ivoire. — Expérience de la verge. Propagation à travers une longue tige de bois. — Propagation à travers les liquides. — Propagation par les gaz	46

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
68	Théorie de la propagation des vibrations longitudinales dans les milieux élastiques	48
71	Principe de la superposition des petits mouvements	52
72	Formule de Newton. — Détermination des constantes	53
74	Signification physique de la quantité V	55
75-76-77	Propagation des mouvements périodiques. Longueur d'onde	56
78-79	Conséquence de la formule de Newton	57
	Vitesse de propagation du son dans les gaz	
	I. Vitesse de propagation du son dans l'air	57
80-81	Application de la formule de Newton.	
82-83	II. Vitesse du son dans un gaz quelconque	60
	Détermination expérimentale de la vitesse du son dans l'air.	
84	Expériences à l'air libre. — Anciennes expériences	61
85	Expériences de Regnault	63
86	Propagation dans les tuyaux. — Expériences de Regnault. — Discussion des résultats	65
88	Vitesse du son à une faible distance de la source sonore. — Expériences de Mach	67
89	Expérience de cours pour montrer la propagation du son dans les tuyaux	69
90	Détermination expérimentale de la vitesse du son dans les gaz quelconques	70
	Vitesse de propagation dans les corps élastiques quelconques.	
91	Application de la formule de Newton aux solides	71
92	Mesure de la valeur de V dans l'acier	72
93	Application aux liquides. — Mesure de leurs coefficients de compressibilité	73
96	Remarque générale sur les expériences destinées	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	à mesurer la vitesse de propagation du son	74
	Réflexion du son.	
99	Phénomènes observés lorsqu'une onde sonore rencontre un obstacle solide	75
100	Lois de la réflexion	75
101	Vérifications expérimentales	76
103	Réflexion avec changement de signe	77
104	Réflexion sans changement de signe	78
	Interférences du son.	
105	Phénomènes produits par la superposition des ondes sonores provenant de deux sources différentes — cas général	79
106	Vibrations de même période	80
107	Amplitude et phase du mouvement résultant	81
108-109	Variation de l'amplitude résultante quand la différence de phase varie	83
110	Vérifications expérimentales — Appareil de Königs	83
111	Capsules manométriques	85
112	Interférences dans les tuyaux	86
113	Nœuds	88
114	Ventres	89
115	Positions respectives des ventres et des nœuds	89
116	Interférences dans les tuyaux fermés à une extrémité	89
117	Interférences dans les tuyaux ouverts	90
118	Démonstration expérimentale de l'existence des nœuds et des ventres	
119-120	Variations de la force élastique aux ventres et aux nœuds — Vérification expérimentale	91
121	Renforcement du son produit par des tuyaux Résonnateurs cylindriques	93

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	Tuyaux sonores.	
124	Tuyaux sonores. — Production des sons. Embouchure de flûte	95
126-129	Vérifications expérimentales	96
	Relation entre la longueur d'un tuyau et la hauteur du son qu'il renforce.	
130	**Tuyaux ouverts.**	
131	Harmoniques des tuyaux ouverts	
132-133	Vérifications expérimentales	
134-137	Tuyaux fermés. — Harmoniques. — Vérifications expérimentales	101
138	Embouchures	101
139-140	Vibrations longitudinales des verges	104
	Propagation des vibrations transversales.	
142-145	Théorie de la propagation des vibrations transversales	106
146	Expérience de Melde	110
147-148	Vibrations des cordes sonores	111
	Timbre	
150-151	Origine du timbre	113
152-153	Synthèse des sons. Synthèse des voyelles	114
154-156	Analyse des sons. — Résonnateurs. — Appareil de König	114
157	Théorie du timbre et série de Fourier	117
158	Détermination de la forme des vibrations Phonautographe de Scott	118
159	Méthode optique pour l'observation de la forme des vibrations	119
160	Influence de la différence de phase des sons composants sur le timbre des sons résultants	121

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Optique Physique

161. — Dans l'optique géométrique que nous supposerons connue, on ne fait qu'établir et appliquer les lois de la réflexion et de la réfraction. Dans l'optique physique, dont nous abordons l'étude, on rencontre de nouveaux phénomènes qui font connaître jusqu'à un certain point la nature de la lumière.

En premier lieu, l'expérience va nous montrer qu'on peut produire avec la lumière des phénomènes d'interférence analogues à ceux que l'on obtient avec le son. Il s'en suit que la lumière peut être considérée comme un phénomène qui se propage avec une vitesse finie et qui est périodique.

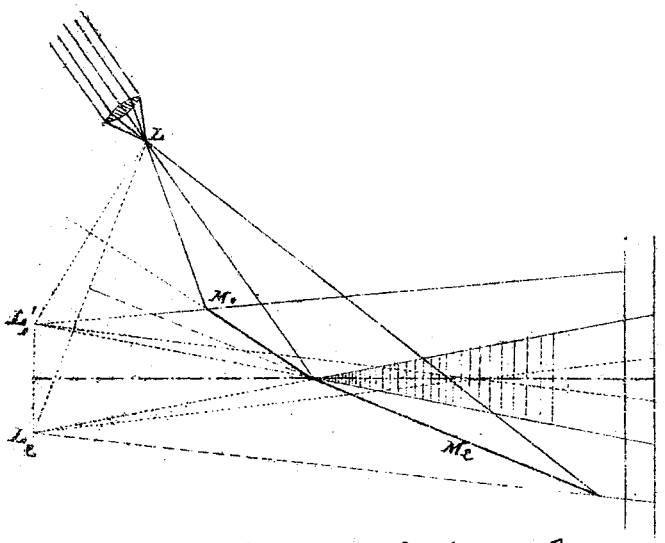
Nous savions déjà que la lumière se propage en effet avec une vitesse finie, voisine de 300000 kilomètres par seconde dans le vide. L'expérience journalière montre en outre que deux rayons de lumière se croisent dans l'espace sans s'altérer mutuellement, ainsi que cela a lieu pour le son, conformément au principe de la superposition des petits mouvements. Il ne reste donc plus, pour expliquer le fait des interférences, qu'à admettre le caractère périodique des phénomènes lumineux.

Les maxima et minima sonores fournis par l'interférence qu'on appelle ventres et nœuds, sont remplacés en optique par des maxima et des minima lumineux auxquels on donne le nom de franges : franges brillantes et franges obscures.

Miroirs de Fresnel.

162. — Une des dispositions les plus simples qui aient été imaginées dans le but de mettre en évidence les interférences lumineuses est celle des miroirs de Fresnel. Un faisceau lumineux issu d'une source L se réfléchit sur deux miroirs M, et M, faisant entre eux un angle voisin de 180°. Chaque rayon

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



du faisceau réfléchi par le miroir M_1 a même direction que s'il venait du point L'_1 symétrique du point L par rapport au miroir M_1. Chaque rayon du faisceau réfléchi par le miroir M_2 a même direction que s'il venait du point L'_2 symétrique du point L par rapport au miroir M_2.

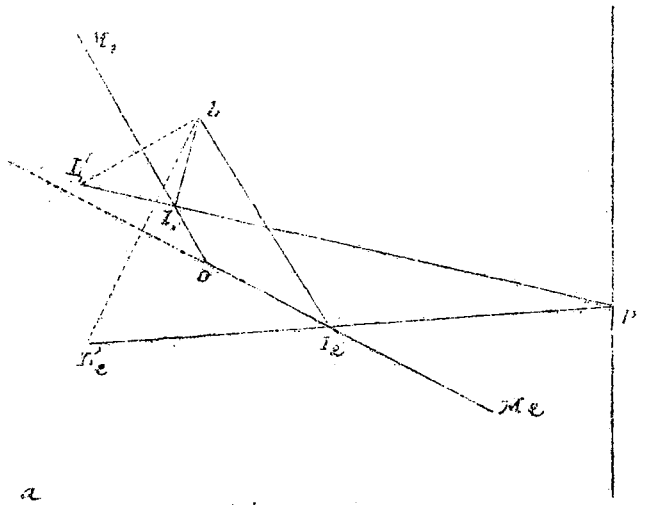
Si on interpose un écran sur le trajet des faisceaux réfléchis, dans la partie commune aux deux faisceaux, on observe des franges; si la source lumineuse est formée de lumière blanche, la frange centrale est blanche; de part et d'autre se trouvent quelques franges irisées; la première de ces franges présente le violet en dedans (du côté de la frange brillante) et le rouge en dehors. — Le phénomène est plus simple si l'on opère avec une lumière homogène en plaçant un verre rouge sur le trajet des rayons lumineux qui tombent sur le miroir. On n'observe plus alors que des franges alternativement brillantes et obscures sans irisation.

Cette expérience est tout à fait analogue à celle du trombone à coulisses de Kœnig (§. 110).

163. — Dans la partie commune aux deux faisceaux réfléchis, nous avons des rayons qui, à partir de la source, ont parcouru des chemins inégaux et qui par suite présentent l'un sur l'autre une certaine différence de marche.

Soit LI_1P un rayon lumineux issu du point L et réfléchi sur le miroir M_1, LI_2P le rayon lumineux issu du point

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



L qui après sa réflexion sur le miroir M_2 va tomber au même point P de l'écran.

En vertu des propriétés des miroirs plans, on a

$$L I_1 = L'_1 I_1$$

et $L I_2 = L'_2 I_2$

Donc les rayons partant de L et réfléchis sur les miroirs ont la même différence de marche que s'ils partaient de L'_1 et L'_2. On pourra donc considérer ces deux points virtuels comme deux sources lumineuses qui donneraient les faisceaux interférents.

164. — Il faut remarquer que pour l'expérience on a pris non pas un point lumineux, mais une fente lumineuse rectangulaire dont un des côtés est parallèle à l'intersection des miroirs. Les faisceaux réfléchis pourront alors être considérés comme émanant de droites lumineuses qui sont les images virtuelles de la fente dans les deux miroirs. Dans ce cas, nous imaginerons un plan normal à la fente que nous prendrons comme plan du tableau et nous retomberons sur les mêmes discussions.

165. — Afin de connaître la position des franges calculons la différence de phase des vibrations qui arrivent en P.

Supposons que les vibrations de L'_1 et L'_2 soient des vibrations sinusoïdales.

L'élongation au point L' est le produit de l'amplitude par $\sin 2\pi \frac{t}{T}$. Mais l'amplitude est inconnue et ne peut être déterminée. Cette détermination est déjà difficile en acoustique ; en optique elle est complètement impossible. D'ailleurs le rapport de l'amplitude composante à l'amplitude résultante intervient seul dans le calcul. Nous pouvons

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

donc supposer l'amplitude de la source égale à l'unité. Le mouvement de L_1' est alors

$$y = \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait en acoustique (§ 77) donne les élongations au point P.

L'élongation provenant de L_1' situé à une distance d_1 est

$$y_1 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right)$$

L'élongation provenant de L_2' situé à la distance d_2 est

$$y_2 = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right)$$

L'amplitude résultante est obtenue en appliquant la construction de Fresnel (§ 42 et § 107). Sa valeur n'dépend que du cosinus de la différence des phases des deux vibrations composantes. — La différence des phases est

$$2\pi \left(\frac{d_2 - d_1}{\lambda}\right) = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

en appelant δ la différence $d_2 - d_1$ des chemins parcourus, c'est-à-dire la différence de marche.

Pour que l'intensité lumineuse soit nulle, il faut que $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ soit minimum ; alors

$$2\pi \frac{\delta}{\lambda} = (2n+1)\pi$$

ou

$$\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Les franges obscures correspondent aux points P pour lesquels la différence de marche des rayons provenant de la source est égale à un multiple impair de la demi longueur d'onde.

L'intensité lumineuse est au contraire maximum aux points pour lesquels $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1$, ou

$$2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2n\pi$$

$$\delta = 2n \frac{\lambda}{2}$$

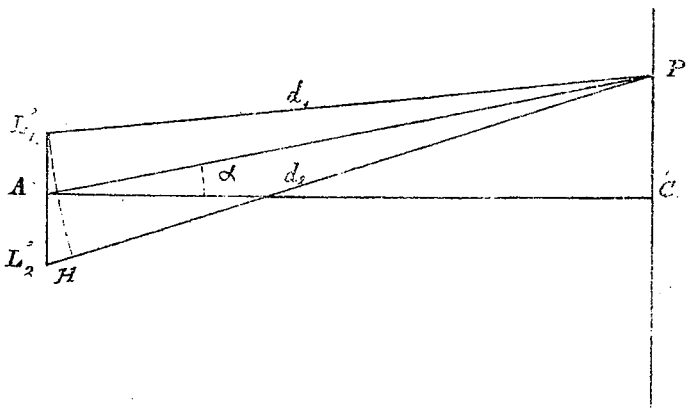
Les franges brillantes correspondent aux points P pour lesquels la différence de marche des rayons provenant de la source est égale à un multiple pair de la demi longueur d'onde.

166. — Considérons en particulier le point C de l'écran également distant de L_1' et L_2' ; c'est l'intersection de la perpendiculaire

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

élevée au milieu de $L'_1 L'_2$ avec l'écran. En ce point $\delta = 0$, donc $\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1$; il s'y trouve une frange brillante. En réalité toute la droite d'intersection du plan de l'écran avec un plan perpendiculaire au milieu de la droite $L'_1 L'_2$ est une droite lumineuse. Cette droite a reçu le nom de frange centrale.

La position des diverses autres franges est définie par la distance de chacune d'elles à la frange centrale.



Du point P comme centre décrivons l'arc de cercle $L'_1 H$ avec le rayon PL'_1.

On a

$L'_2 H = PL'_2 - PH$

$= PL'_2 - PL'_1$.

ou $L'_2 H = d_2 - d_1 = \delta$

Soit A le milieu de $L'_1 L'_2$; désignons par α l'angle PAC; posons $L'_1 L'_2 = a$, $AC = D$ et $PC = z$.

Les triangles rectangles $L'_1 L'_2 H$ et PCA donnent

$$L'_2 H = L'_1 L'_2 \sin L'_2 L'_1 H$$

ou $\delta = a \sin \alpha$

et $PC = AC \operatorname{tg} \alpha$

ou $z = D \operatorname{tg} \alpha$

L'angle α est petit, car les franges ne peuvent être observées qu'au voisinage de la frange centrale. Alors on peut confondre α avec son sinus ou sa tangente.

$$\alpha = \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

En divisant membre à membre les relations précédentes, il vient

$$\frac{\delta}{z} = \frac{a}{D}$$

ou

$$z = \delta \frac{D}{a}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

167. — Les franges obscures correspondent à

$$\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

Donc la distance d'une frange obscure à la frange centrale est

$$z = (2n+1)\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$$

On a ainsi

pour la première frange obscure $(n=0)$ $\quad z_1 = \frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$

pour la seconde $\quad n=1 \quad z_2 = 3\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$

pour la troisième $\quad n=2 \quad z_3 = 5\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$

et ainsi de suite.

Calculons la distance de deux franges obscures

$$z_{n+1} = (2n+1)\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$$

$$z_n = (2n-1)\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$$

d'où

$$z_{n+1} - z_n = \lambda\frac{D}{a}$$

La distance de deux franges obscures est proportionnelle à la valeur de λ et en raison inverse de la distance des deux sources virtuelles L'_1 et L'_2.

Cherchons de même la position des franges lumineuses. Pour une de ces franges, $\delta = n\lambda$

$$\text{ou} \quad z = n\lambda\frac{D}{a}.$$

On a ainsi

pour la première frange brillante $\quad n=0 \quad z_0 = 0$

pour la seconde $\quad n=1 \quad z_1 = \lambda\frac{D}{a}$

et ainsi de suite.

Pour la n^e frange, on a ainsi $z_n = (n-1)\lambda\frac{D}{a}$

La distance de deux franges lumineuses est

$$z_{n+1} - z_n = [n-(n-1)]\lambda\frac{D}{a} = \lambda\frac{D}{a}.$$

Elle est aussi proportionnelle à la valeur de λ et en raison inverse de la distance des deux sources L'_1 et L'_2.

168. — La distance entre deux franges consécutives l'une obscure, l'autre lumineuse est constante. La n^e frange lumineuse est définie par

$$z_n = (n-1)\lambda\frac{D}{a} = 2(n-1)\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$$

La n^e frange obscure est définie par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$z'_n = (2n-1)\frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$$

La distance de ces deux franges est

$$z'_n - z_n = \frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}\left[2n-1-2(n-1)\right] = \frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$$

Les quantités λ, D et a étant constantes, $z'_n - z_n$ est constant.

169. — En acoustique, nous avons pu déterminer les valeurs de λ à l'aide de la formule $\lambda = VT$; nous déterminions V et T; les expériences relatives à la position des nœuds et des ventres dans les tuyaux permettaient de mesurer λ; on pouvait ainsi vérifier les conséquences déduites de la théorie.

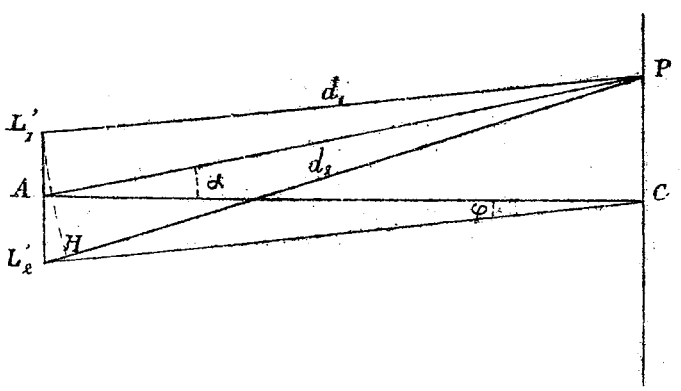
Ici il est impossible de mesurer T; des dispositions convenables permettent au contraire de mesurer λ.

Désignons par Δz la distance de deux franges, soit brillantes, soit obscures. Nous avons démontré qu'on avait toujours

$$\Delta z = \lambda \frac{D}{a}$$

ou

$$\Delta z = \frac{\lambda}{\left(\frac{a}{D}\right)}$$



Or le triangle L'_2CA donne

$L'_2A = AC\,\mathrm{tg}\,ACL'_2$

en désignant par $\frac{\varphi}{2}$ l'angle ACL'_2, on a:

$$\frac{a}{2} = D\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$$

d'où

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2D}$$

L'angle φ est comme l'angle α excessivement petit.

Donc on peut écrire $\varphi = \frac{a}{D}$

Par suite $\Delta z = \frac{\lambda}{\varphi}$

ou $\lambda = \varphi\,\Delta z$

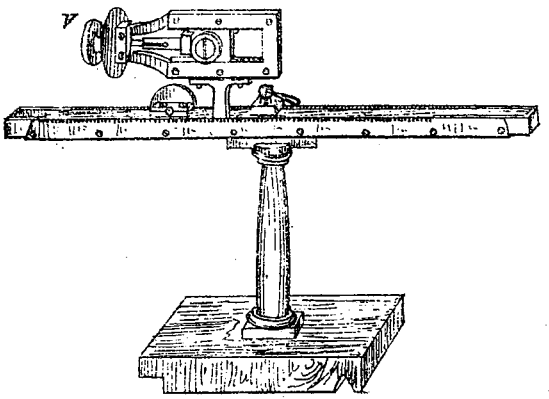
Cette formule détermine la valeur de λ quand on connaît φ.

Fresnel n'a pas indiqué comment il mesurait le rapport $\left(\frac{a}{D}\right)$. Il est probable qu'il évaluait l'angle φ avec un goniomètre placé en C.

170. — Quant à la distance Δz de deux franges, elle est mesurée à l'aide d'un dispositif connu sous le nom de Loupe de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Fresnel. C'est une loupe composée, achromatique, munie d'un réticule et montée sur un chariot. Celui-ci peut se déplacer perpendiculairement à l'axe optique de la loupe au moyen d'une vis micrométrique V dont la tête porte un tambour divisé. Un tirage permet d'amener le réticule à la distance de la vision distincte de l'observateur; le fil vertical du réticule est disposé parallèlement aux franges. On ramène ce fil à coincider avec une frange; puis en faisant tourner la vis, on déplace la loupe; on compte p franges; la lecture des positions initiale et finale de la vis donne la largeur e correspondant à ces p franges.



La largeur moyenne d'une frange est $\frac{e}{p}$. On a donc

$$\frac{e}{p} = \Delta z = \frac{\lambda}{\varphi}$$

d'où $\lambda = \varphi \frac{e}{p}$.

171. — Cette mesure est impossible si on opère avec de la lumière blanche; pour des motifs que nous allons bientôt exposer, le phénomène observé dans ce cas présente une grande complexité. Il devient au contraire très simple, si on opère avec une lumière homogène, c'est-à-dire une lumière de réfrangibilité déterminée. Si par exemple on détermine les valeurs de λ correspondant aux franges produites à l'aide des rayons violets, verts, jaunes ou rouges du spectre, on trouve des résultats différents. — Donc la longueur d'onde d'une lumière dépend de la réfrangibilité de cette lumière.

On obtient ainsi en nombre ronds :

pour le λ caractéristique du rouge	$0^{mm},0006$
jaune	$0^{mm},0005$
violet	$0^{mm},0004$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

172. — Ces nombres vont nous permettre de nous faire une idée de la période des vibrations lumineuses.

Prenons par exemple la lumière rouge. On a

$$\lambda = VT$$

Or $\lambda = \frac{1^{mm}}{2000}$ environ,

$V = 300000$ kilomètres $= 3 \times 10^{11}$ millimètres

donc

$$T = \frac{1}{2 \times 10^3 \times 3 \times 10^{11}} = \frac{1}{6 \times 10^{14}}$$

Le nombre de vibrations par seconde serait

$$N = \frac{1}{T} = 6 \times 10^{14}$$

ou 600000 vibrations pendant un milliardième de seconde

Pour le jaune on aurait $N = 5 \times 10^{14}$

Pour le violet $N = 4 \times 10^{14}$

On vient de voir que λ varie avec la réfrangibilité de la lumière employée. Il en est de même de la distance de deux franges voisines.

En effet cette distance Δz est donnée par la relation

$$\Delta z = \lambda \frac{D}{a}$$

Donc la distance de deux franges lumineuses est proportionnelle à la longueur d'onde de la lumière employée. Ainsi les franges seront plus espacées, si on éclaire les miroirs avec la lumière rouge d'un spectre; elles seront plus serrées si on éclaire les miroirs avec de la lumière violette.

173. — De plus pour une même lumière de réfrangibilité donnée, la distance de deux franges voisines varie en raison inverse de a. Donc les franges sont d'autant plus larges que les sources L'_1 et L'_2 sont plus rapprochées. On réalise cette condition en disposant les miroirs de manière qu'ils fassent entre eux un angle voisin de 180°

174. — On arrive à donner aux miroirs une inclinaison voisine de 180° à l'aide du dispositif suivant. Les deux miroirs sont placés sur une plate forme commune AB verticale.

L'un OM_1 peut se déplacer perpendiculairement à la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

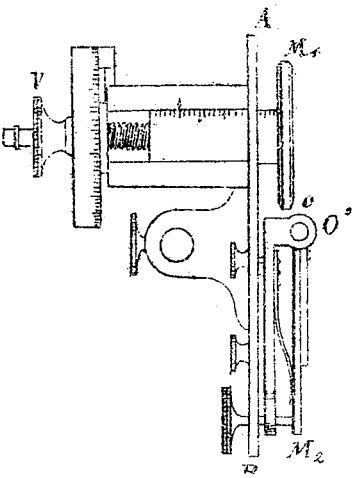


plate forme à l'aide de la vis micrométrique V; l'autre $O'M_2$ est fixé à une plaque spéciale mobile autour d'une charnière O' et reliée à la plate forme par trois vis calantes.

Pour régler l'appareil, on commence par rendre l'intersection des plans des deux miroirs parallèle à la fente. Il suffit pour cela que les images de la fente données par les deux miroirs soient parallèles entre elles. Il faut ensuite amener les deux miroirs à être presque dans le prolongement l'un de l'autre. On y réussit en observant dans les miroirs un objet linéaire très éloigné. Lorsque les deux images sont en coïncidence pour l'œil, l'angle des miroirs est très peu différent de 180° (on ne peut jamais arriver à la coïncidence parfaite); l'appareil est alors capable de fournir des franges.

Il est facile de montrer que les franges ne peuvent être attribuées qu'à l'interférence des radiations réfléchies sur le miroir M, avec celles qui ont été réfléchies par le miroir M_2. Si en effet on supprime un des miroirs, par exemple en couvrant sa surface avec une carte de visite, les franges disparaissent.

Procédés divers pour produire les franges d'interférence.

175. — Les miroirs de Fresnel ne sont pas les seuls appareils capables de fournir des franges d'interférence. Toutes les fois qu'un appareil d'optique donne d'une même fente lumineuse deux images égales, réelles ou virtuelles, suffisamment voisines, ces deux images peuvent être substituées aux deux sources L_1 et L_2. La théorie des phénomènes observés reste la

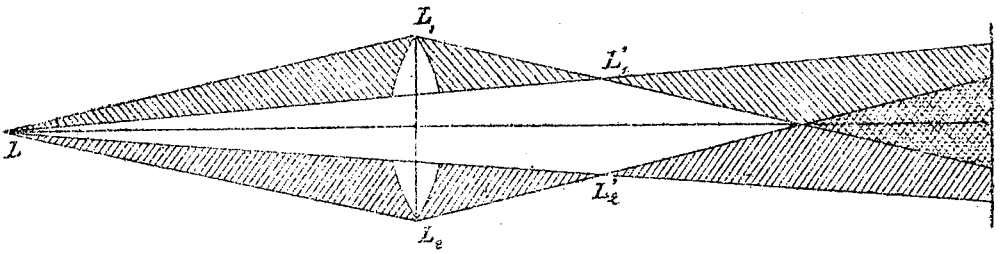
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

même ; la disposition des appareils seule diffère.

Bilentilles de Billet.

176. — Une lentille biconvexe donne d'une source lumineuse L placée au-delà de son foyer F une image réelle L'.

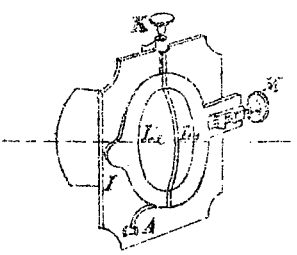
Par un trait de scie on coupe cette lentille en deux suivant un plan passant par son axe. Chacune des demi-



lentilles fonctionne alors comme une lentille complète. Le système optique obtenu en écartant les deux moitiés de la lentille donne deux images réelles L'_1 et L'_2 de la source L ; au-delà de L'_1 et L'_2, les faisceaux lumineux se recouvrent en partie. Si dans le faisceau commun, on place un écran, on observe des franges sur cet écran.

La théorie de l'expérience est la même que celle qui a été exposée plus haut ; il suffit de remarquer que les deux images réelles L'_1 et L'_2 jouent le rôle de sources lumineuses synchrones, très voisines.

Les demi-lentilles sont montées dans une garniture métallique une vis micrométrique M qui fait corps avec



l'une des parties L_1 permet d'écarter ou de rapprocher à volonté les deux moitiés L_1 et L_2 de la lentille. On rend les bords des deux demi-lentilles parallèles en faisant tourner l'autre partie L_2 autour d'un axe T parallèle à l'axe optique des lentilles à l'aide d'une vis K. Un ressort antagoniste A maintient cette partie fixe

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Les deux images L'_1 et L'_2 origine des faisceaux interférents sont d'autant plus voisines que les demi lentilles sont plus rapprochées; les franges sont donc d'autant plus larges que la distance des deux parties de la lentille est plus faible.

177. — L'expérience peut être disposée de façon à permettre la mesure des longueurs d'onde.

Nous avons démontré que la distance de deux franges soit obscures, soit lumineuses était fournie par la relation

$$\Delta z = \lambda \frac{D}{2a}$$

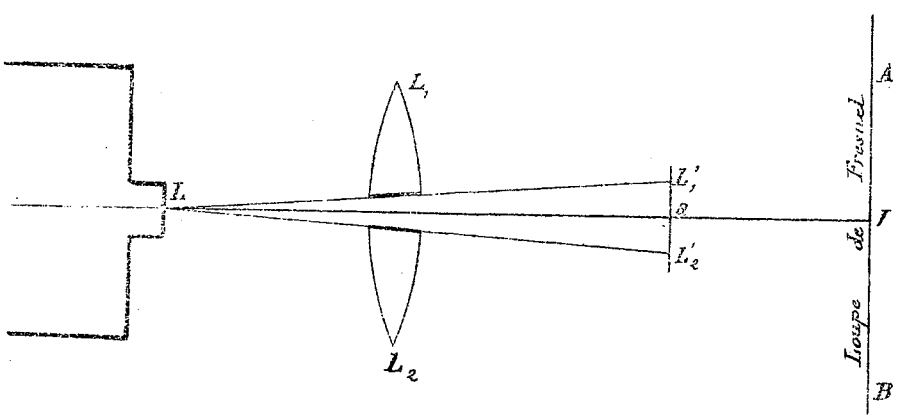
ou

$$\lambda = \frac{2a}{D} \Delta z$$

Si on opère en lumière monochromatique, on peut mesurer à l'aide de la loupe de Fresnel l'espace occupé par n franges. Le quotient de cet espace par n donne Δz.

Il reste à mesurer D et a.

D est la distance de l'image observée avec la loupe aux sources lumineuses L'_1 et L'_2. Pour la mesurer les demi lentilles



et la loupe de Fresnel AB sont montées sur une règle divisée LI. Après avoir observé les franges lorsque la loupe est en AB et avoir noté sur la règle LI la division p qu'elle occupe, on déplace son support le long de la règle LI de manière à l'amener à la position où les images L'_1 et L'_2 se voient le plus

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

nettement possible. On note alors la nouvelle division p' de la règle. La différence des lectures $p - p'$ est égale à la distance D.

On amène ensuite le fil du réticule de la loupe en contact avec l'image L'_1 de la fente L; on note la position q_1 de la vis micrométrique qui commande la loupe de Fresnel; on déplace cette loupe de manière à amener le fil du réticule au contact de l'image L'_2; on note la nouvelle position q_2 de la vis. Alors

$$a = q_1 - q_2$$

178. — L'appareil des demi lentilles permet encore de vérifier facilement les diverses conséquences de la théorie.

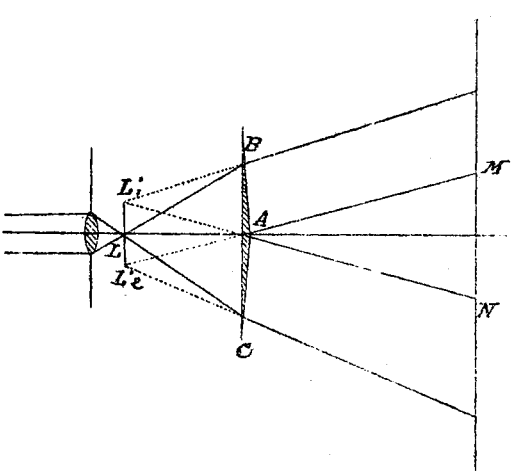
Ainsi en déplaçant la loupe de Fresnel le long de la règle LI, on peut reconnaître que pour des rayons de même nature la largeur d'une frange est proportionnelle à la distance de la loupe au point lumineux. Il suffira pour cela de vérifier que

$$\frac{\Delta z}{D} = \text{constante}$$

Biprisme de Fresnel.

179. — Fresnel a donné pour produire les phénomènes d'interférence une autre disposition quelquefois attribuée à Pouillet; c'est celle du biprisme.

Un prisme isocèle BAC a son angle au sommet A voisin de 180°; il donne d'une fente L parallèle à ses arêtes et située dans le plan bissecteur de l'angle A deux images virtuelles L'_1 et L'_2 symétriques par rapport à ce plan bissecteur



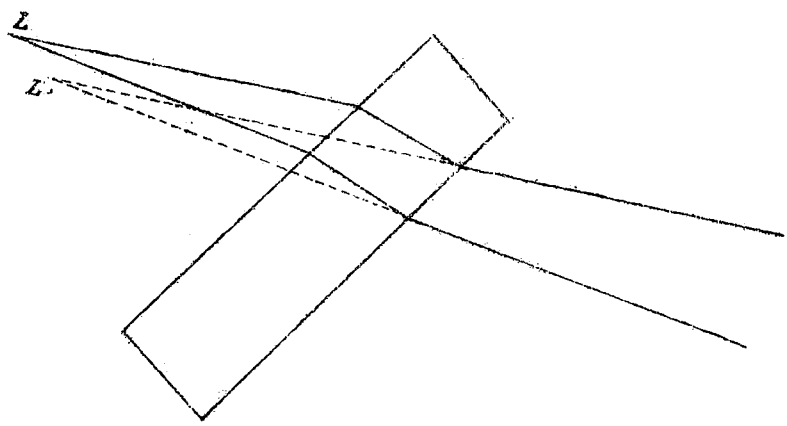
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

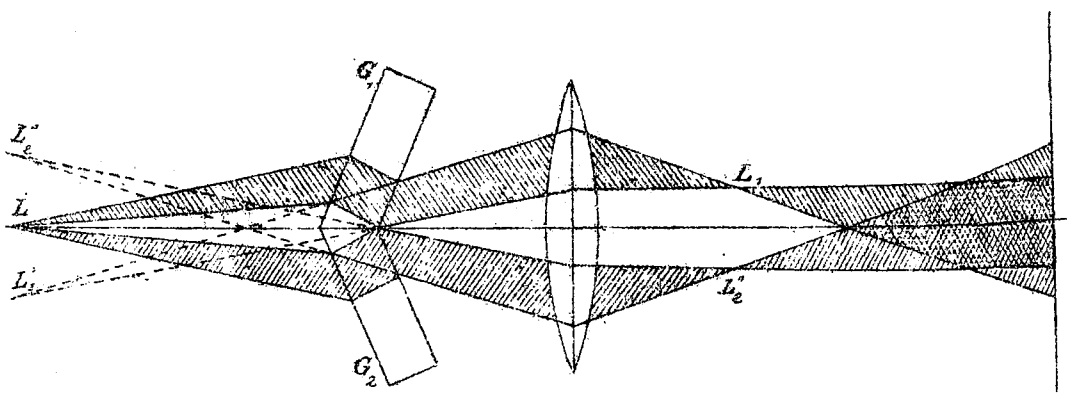
Les faisceaux lumineux qui ont traversé les deux faces AB et AC du prisme sont réfractés comme s'ils venaient de ces points L'_1 et L'_2. Ces deux faisceaux sont susceptibles d'interférer dans leur partie commune MAN.

La même théorie est toujours applicable ; les franges sont d'autant plus larges que l'angle du prisme est plus voisin de 180°.

Bilames.

180. — Une glace à faces parallèles donne d'un point lumineux L une image virtuelle L'. Coupons cette glace par un trait de scie. Si nous venons à déplacer une des parties par rapport à l'autre, chaque partie fournit une image virtuelle de la source lumineuse L.





Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les deux images virtuelles L'_1 et L'_2 ainsi obtenues sont d'autant plus rapprochées que les lames forment un angle plus voisin de 180°. Mais en général les deux faisceaux lumineux ainsi obtenus n'ont pas de partie commune : donc ils ne peuvent interférer.

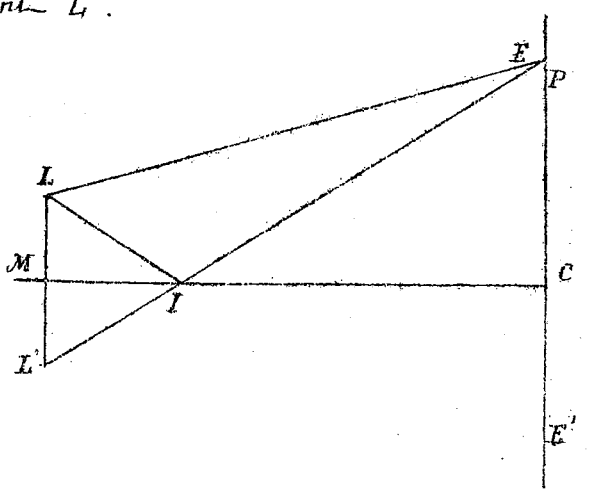
Si on reçoit ces faisceaux sur une lentille convergente, ils donnent de la fente L deux images réelles L''_1 et L''_2 qui pourront être considérées comme points de départ de faisceaux capables d'interférer.

Production des franges d'interférence avec un seul miroir.

181. — Jusqu'ici nous avons produit les interférences entre des faisceaux qui, émanés d'une même source, avaient été tous deux réfléchis, ou tous deux réfractés par un système optique convenable, miroir, lentille ou prisme.

Il est possible de produire des interférences entre les rayons qui viennent directement de la source et les rayons qui, émanant de cette source, ont été réfléchis par un miroir.

Soit L une source lumineuse, M un miroir plan de verre, L' l'image virtuelle du point L dans ce miroir. Les faisceaux lumineux réfléchis peuvent être considérés comme venant du point L'.



Prenons comme plan du tableau un plan normal au miroir et passant par le point L ; si la source lumineuse est une fente, le plan du tableau sera pris perpendiculaire à cette fente.

Soit E E' la trace sur le plan du tableau d'un écran perpendiculaire au plan du miroir.

A priori il est évident qu'en C, intersection du plan du miroir avec l'écran, les chemins parcourus par les rayons lumineux venus de L et L' ont la même valeur. La frange dont

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

la trace est C est dite la frange centrale.

Dans le cas où les franges étaient produites par les interférences sur deux miroirs, la frange centrale était brillante; ici on remarque que la frange centrale est obscure. On rend compte de ce phénomène en imaginant que pour le faisceau réfléchi toutes les élongations aient changé de signe par suite de la réflexion sur le verre.

Nous verrons d'ailleurs qu'il ne faut tenir compte de ce changement de signe des élongations réfléchies que lorsque la réflexion se fait d'un milieu moins réfringent sur un milieu plus réfringent, par exemple de l'air sur le verre, ou du vide sur le verre.

Tout se passe donc, aux points où se fait cette réflexion avec changement de signe, comme si on retranchait π à la phase de la vibration incidente ou si on ajoutait $\frac{\lambda}{2}$ à la différence de marche. Soit en effet

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda}\right)$$

la phase de la vibration incidente.

Si on ajoute π à cette quantité, la phase devient

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d+\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)$$

182. — Les phénomènes d'interférence ne peuvent se produire qu'avec des faisceaux issus d'une même source lumineuse.

Dans toutes les expériences précédentes, les interférences se produisent entre deux faisceaux émanant d'une même source, auxquels on imprime une différence de marche.

Il est en général impossible de produire les interférences avec des faisceaux émanant de deux sources distinctes.

Soient en effet L_1 et L_2 deux sources lumineuses. Supposons qu'à un moment quelconque, la vibration de la source L_1 soit représentée par $y_1 = \sin 2\pi \frac{t}{T}$

L'élongation au même instant pour la source L_2 est

$$y_2 = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$2\pi\alpha$ représente la différence de phase des deux sources L_1 et L_2 ; c'est une quantité qui varie constamment et arbitrairement avec le temps, dans le cas où les deux sources sont indépendantes l'une de l'autre.

Les deux sources envoient en un point P des élongations dont l'intensité dépend 1° de la différence de marche $\delta = L_2P - L_1P$. 2° de la quantité arbitraire α variable avec le temps.

Donc au point P l'intensité lumineuse est arbitrairement variable avec le temps ; elle passe rapidement de sa valeur maxima à sa valeur minima ; en un même point P de l'écran, on a des franges obscures et brillantes qui se succèdent suivant un ordre absolument quelconque, trop rapidement pour que l'œil puisse les distinguer.

Influence de la nature de la lumière sur les phénomènes d'interférence.

183. — Les différentes couleurs du spectre sont caractérisées par des valeurs différentes de la longueur d'onde. — Si on opère avec une lumière de réfrangibilité déterminée, λ a une valeur bien déterminée. La théorie apprend que lorsqu'on s'éloigne de la frange centrale la différence de marche δ varie : les points de l'écran pour lesquels $\delta = m\lambda$ sont éclairés ; ceux pour lesquels $\delta = (m + \frac{1}{2})\lambda$ sont obscurs. La distance de deux franges est $\lambda \frac{D}{a}$, quantité qui est constante puisque λ est fixe. On voit en effet toute la portion de l'écran où les faisceaux interfèrent régulièrement couverte de franges brillantes et obscures.

Si on produit successivement les interférences avec des lumières de réfrangibilités diverses, par exemple en plaçant sur le trajet du faisceau lumineux des verres de différentes couleurs, on constate que la largeur des franges varie : si on opère en lumière rouge, elles paraissent s'élargir ; en lumière violette, elles paraissent se resserrer. En se reportant à la formule

$$\Delta z = \lambda \frac{D}{a}$$

on peut en conclure que le λ rouge est plus grand que le λ violet.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Phénomènes observés quand on produit les interférences avec la lumière blanche.

184. — Lorsque dans les expériences d'interférence, on opère avec de la lumière homogène, on obtient des franges alternativement brillantes et obscures et le nombre de ces franges est illimité : si la lumière n'est pas rigoureusement homogène, le nombre des franges est d'autant plus considérable que la lumière est plus homogène.

Avec la lumière blanche, le phénomène est plus complexe. La frange centrale brillante est toujours blanche ; mais les franges brillantes suivantes sont irisées : elles sont bordées de bleu du côté de la frange centrale et de rouge de l'autre côté. L'irisation va en croissant au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la frange centrale : elle envahit les parties de l'écran qui devraient être noires. Enfin à quelque distance du centre, les franges s'effacent complètement et l'œil ne perçoit plus que de la lumière blanche en apparence uniforme. En réalité les franges subsistent dans toute l'étendue du champ : mais l'œil ne suffit plus à les apercevoir. La lumière blanche qu'il perçoit est dite blanche "d'ordre supérieur" ; elle n'a pas la même composition spectrale que la lumière de la source employée.

Les apparences présentées dans le cas de la lumière blanche s'expliquent en remarquant que cette lumière se compose d'un grand nombre de radiations simples qui ont des longueurs d'onde différentes : le phénomène observé résulte simplement de la superposition des franges dues à chacune des lumières élémentaires qui composent la lumière incidente.

185. — Considérons en particulier la lumière violette et la lumière rouge.

Cherchons à quelle distance de la frange centrale se produit la première frange brillante violette. Cette distance est

$$z_v = \lambda_v \frac{D}{a}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Au point correspondant de l'écran, l'intensité de la lumière rouge n'est pas maxima ; les diverses radiations du spectre sont d'autant plus affaiblies qu'elles s'écartent plus du violet : la frange sera donc violette. Le même raisonnement explique la succession des teintes, violette, jaune, rouge observée dans les franges ; le violet se trouve toujours du côté de la frange centrale, le rouge de l'autre côté.

186. — Aux points de l'écran qui sont éloignés de la frange centrale, les franges même irisées disparaissent complètement. On explique cet effet en remarquant que plusieurs radiations simples peuvent donner leurs maximums au même point. Les longueurs d'onde du rouge, du jaune et du violet sont sensiblement $0^{\mu},6$, $0^{\mu},5$ et $0^{\mu},4$, μ désignant le micron ou millième de millimètre.

La dixième frange lumineuse rouge se forme à une distance z de la frange centrale

$$z = 10 \times 0^{\mu},6 \times \frac{D}{a} = 6 \times \frac{D}{a}$$

La douzième frange brillante jaune se forme aussi en ce point, car

$$12 \times 0,5 \times \frac{D}{a} = \frac{6 \times D}{a}$$

En ce point se forme encore la quinzième frange brillante violette, car

$$15 \times 0,4 \times \frac{D}{a} = 6 \times \frac{D}{a}$$

L'effet observé en ce point est donc l'effet résultant de la superposition de lumières rouge, jaune et violette. On a alors une teinte sensiblement blanche.

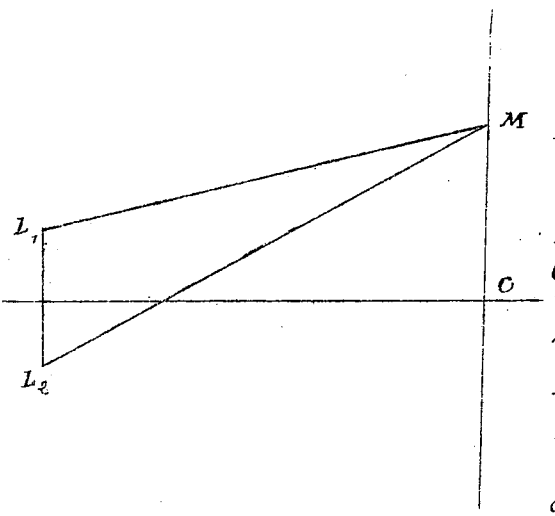
Lumière blanche d'ordre supérieur. — Emploi du spectroscope. Spectres cannelés.

187. — La lumière blanche que l'on obtient en un point M de l'écran éloigné de la frange centrale contient donc toutes les lumières simples dont les λ satisfont à l'équation $\delta = n\lambda$; mais elle ne contient pas les lumières dont les λ satisfont à l'équation $\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$, ces valeurs de λ sont

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

intermédiaires entre les premières. Supposons qu'au lieu de regarder l'écran au point M, on reçoive la lumière qui arrive en ce point sur la fente d'un spectroscope. On aperçoit dans la lunette de l'appareil un spectre cannelé : toutes les radiations qui donnaient en M une frange brillante y sont représentées par une ligne lumineuse ; toutes les radiations qui correspondaient à des franges obscures sont éteintes. Cette expérience a été réalisée pour la première fois par Fizeau et Foucault.

188. — Le nombre des raies brillantes observées dans le spectre cannelé est d'autant plus grand que l'on s'écarte plus de la frange centrale.



Soit un point M de l'écran, assez loin de la frange centrale C. La différence de marche δ des rayons qui arrivent en M est toujours $L_2M - L_1M$, quelle que soit la nature de la radiation. Pour que l'intensité d'une radiation soit maxima en M, il suffit que cette radiation soit caractérisée par une longueur d'onde λ telle que

$$\frac{\delta}{\lambda} = n \qquad (1)$$

n étant un nombre entier quelconque.

Plus δ est grand, c'est-à-dire plus le point M s'éloigne du point C, plus il y a de radiations dont les λ satisfont à cette condition.

Soient en effet λ_0 la plus grande longueur d'onde des radiations visibles pour laquelle le rapport $\frac{\delta}{\lambda}$ est un nombre entier. On a ainsi

$$\frac{\delta}{\lambda_0} = n_0 .$$

Il y a dans le spectre des radiations de longueurs d'onde

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 \ldots \lambda_p$ telles que l'on ait

$$\frac{\delta}{\lambda_1} = n_0 + 1$$
$$\frac{\delta}{\lambda_2} = n_0 + 2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\delta}{\lambda_p} = n_0 + p \ .$$

Supposons que λ_p soit la plus petite longueur d'onde des radiations visibles satisfaisant à la condition (1).

Le nombre des radiations du spectre qui correspondent à un maximum de lumière au point considéré de l'écran est alors $p+1$. Il est évident que ce nombre va en croissant quand δ croît. En effet

$$p = \frac{\delta}{\lambda_p} - n_0 = \frac{\delta}{\lambda_p} - \frac{\delta}{\lambda_0} = \delta\left(\frac{\lambda_0 - \lambda_p}{\lambda_0\,\lambda_p}\right).$$

On conçoit que la lumière qui produit un spectre cannelé paraisse blanche quand on la regarde sans spectroscope. Les radiations qui produisent l'éclairement d'un point M de l'écran sont prises dans toute l'étendue du spectre; l'effet observé résulte de la superposition d'une moitié du rouge, d'une moitié du jaune, d'une moitié du violet du spectre. L'impression sur l'œil est celle de la lumière blanche.

Emploi des cannelures du spectre pour la mesure des longueurs d'onde.

189. — Fizeau et Foucault ont indiqué une méthode pour repérer les radiations des diverses réfrangibilités à l'aide des cannelures du spectre

Nous avons trouvé

$$\delta = n\lambda_0 \qquad (2)$$
$$\delta = (n+p)\lambda_p$$

λ_0 et λ_p étant les longueurs d'onde des radiations extrêmes qui ne sont pas éteintes en M.

Le nombre des lignes brillantes dans le spectre est $p+1$, le nombre des lignes obscures intermédiaires est p; on peut les compter.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Les équations (2) donnent d'ailleurs

$$n\lambda_0 = (n+p)\lambda_p$$

ou $$n(\lambda_0 - \lambda_p) = p\lambda_p$$

d'où

$$n = \frac{p\lambda_p}{\lambda_0 - \lambda_p}$$

Soit maintenant la frange d'ordre K à partir de la première. On a pour cette frange

$$\delta = (n+K)\lambda_K = n\lambda_0$$

ou $$\lambda_K = \frac{n}{n+K}\lambda_0 = \frac{p\lambda_0\lambda_p}{p\lambda_p + K(\lambda_0 - \lambda_p)}$$

Il en résulte que si on numérote les lignes brillantes, à une radiation de longueur d'onde donnée correspond toujours une cannelure de même ordre, quelle que soit d'ailleurs la nature du prisme. L'emploi des spectres cannelés est précieux pour repérer les radiations simples qui composent un spectre. On sait en effet que dans les spectres de dispersion, la position d'une lumière de nature déterminée varie avec la substance du prisme: nous venons de voir qu'il n'en est pas de même pour l'ordre de la cannelure qui se trouve dans cette lumière.

Lieu géométrique des franges d'interférence dans l'espace.

190. — L'étude des phénomènes d'interférence présente encore une autre particularité remarquable. — Nous avons vu que pour produire des faisceaux interférents, on formait deux images réelles ou virtuelles d'une même source; les franges obtenues étaient projetées sur un écran. Cet écran peut être éloigné ou rapproché sans qu'on cesse d'observer des franges. En un mot l'écran est toujours au point.

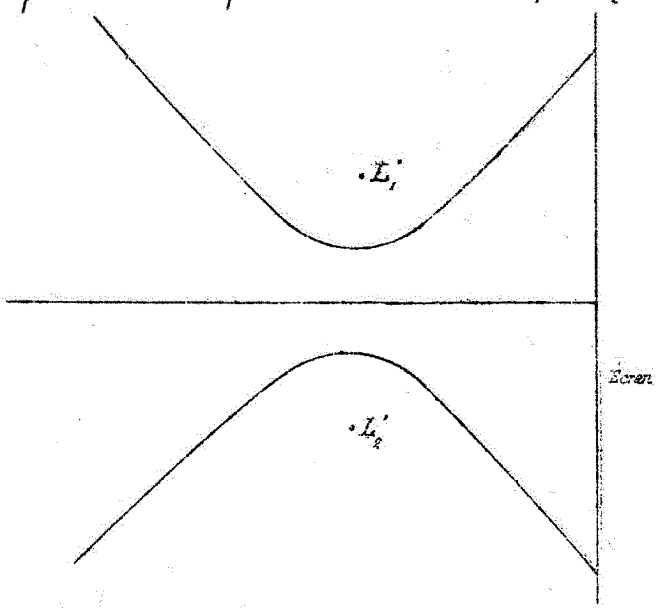
Soit L la source lumineuse, une fente par exemple. Elle donne deux images réelles ou virtuelles L_1 et L_2 qui sont les origines des faisceaux interférents. La frange centrale est par définition le lieu des points de l'écran également distants de L_1 et L_2.

Le lieu géométrique de la frange centrale quand on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

déplace l'écran est donc le plan équidistant de L'_1 et L'_2.

Considérons d'autre part une frange brillante. Elle est définie par la condition que la différence de marche des rayons provenant de L'_1 et L'_2 est égale à $n\lambda$ en tous ses points. Dans l'espace une frange brillante est donc le lieu des points tels que la différence de leurs distances à deux droites fixes L'_1 et L'_2 soit constante. Ce lieu est un cylindre hyperbolique qui a pour droites focales les droites L'_1 et L'_2. — Les franges observées sur l'écran sont les intersections des divers cylindres hyperboliques avec le plan de l'écran. L'écran étant disposé parallèlement aux droites focales et par suite aux génératrices du cylindre, les franges sont des génératrices; donc elles sont rectilignes.



Ces franges ne sont pas rigoureusement équidistantes : le calcul que nous avons fait pour établir que leur distance est constante (§ 168) suppose que l'on peut confondre φ, $\sin\varphi$ et $\operatorname{tg}\varphi$; ceci revient à confondre les hyperboles avec leurs asymptotes.

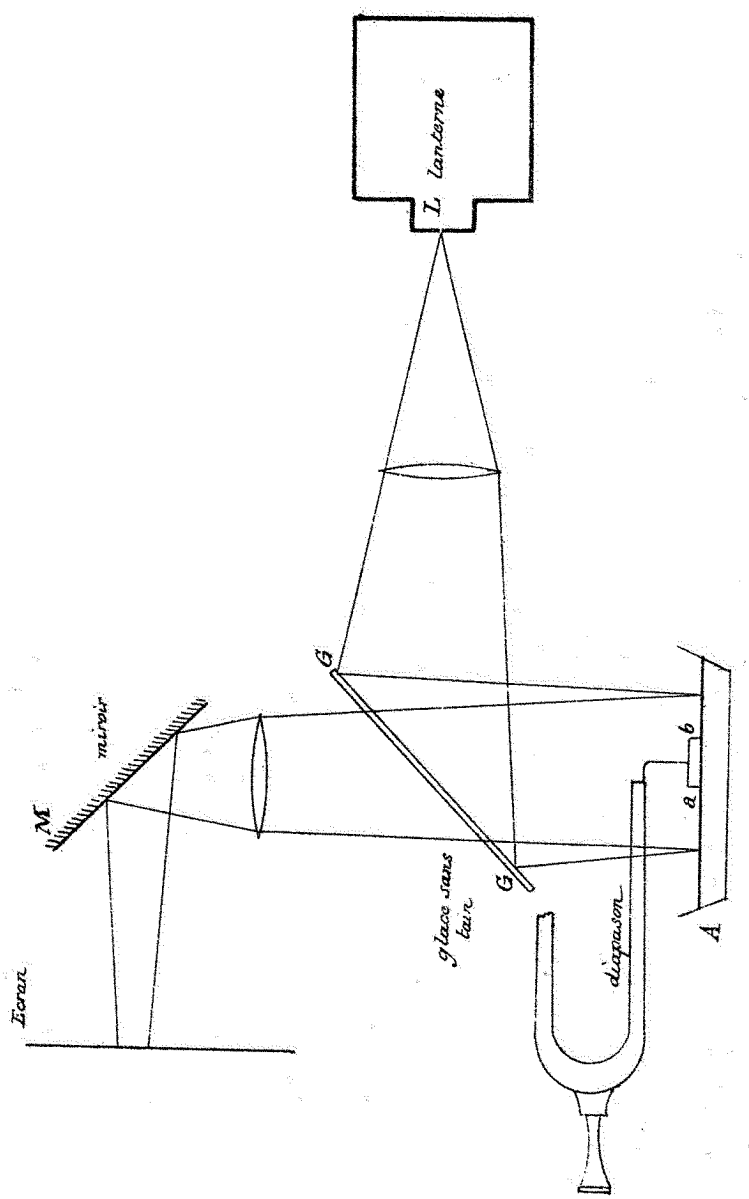
191. — Lorsque les sources lumineuses se réduisent à deux points, le lieu des franges lumineuses ou obscures est le lieu des points de l'espace dont la différence des distances aux deux points donnés est constante. Ce lieu est un hyperboloïde de révolution à deux nappes dont les foyers sont L'_1 et L'_2. Si on intercepte les faisceaux interférents par un écran, on obtient sur l'écran des franges de forme hyperbolique; lorsqu'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

ne considère qu'une petite portion de ces franges, elles paraissent rectilignes.

192. — Il est impossible de montrer la forme des franges lumineuses autrement que par leurs intensités observées sur un écran ; nous pouvons du moins montrer les franges produites à la surface d'un bain de mercure par la superposition de deux vibrations synchrones.

Une des branches d'un diapason est munie à son extrémité d'une tige terminée par deux pointes a et b qui affleurent la surface d'un bain de mercure. Par suite des vibrations du diapason, les pointes touchent le liquide et sont les sources de deux séries d'ondes qui se propagent simultanément à la surface du bain. Ces ondes interfèrent ; en tous les points du liquide pour lesquels la différence des distances aux deux pointes est constante, la



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

différence de marche est la même : ces points qui appartiennent à une hyperbole se trouvent tous dans le même état.

On peut facilement projeter le phénomène. La lumière issue d'une lampe électrique L est reçue sur une glace sans tain, inclinée à 45°, qui renvoie une partie du faisceau lumineux sur le bain de mercure. La surface du mercure réfléchit ce faisceau normalement ; une partie de la lumière réfléchie traverse la glace et est projetée sur un écran par l'intermédiaire d'un miroir plan M. On voit sur l'écran les hyperboles produites par l'interférence des ondes qui se propagent à la surface du mercure. En employant la méthode stroboscopique, on peut voir ces ondes elles-mêmes. A cet effet nous interceptons la lumière à l'aide d'un disque tournant.

Phénomènes d'interférence présentés par les lames minces non cristallisées. — Anneaux de Newton.

193. — Les lames minces, lorsqu'elles sont éclairées par de la lumière blanche, présentent des phénomènes d'irisation qu'on peut expliquer par la considération des interférences.

Une expérience simple met en évidence ces colorations. Il suffit de projeter un rayon lumineux sur une bulle de savon, pour la voir se couvrir de vives couleurs. Il est facile de comprendre comment ici les interférences peuvent se produire. Chacune des surfaces de la bulle fonctionne comme un miroir : la bulle constitue donc un ensemble de deux miroirs superposés. Chaque miroir réfléchit un faisceau de lumière ; les deux faisceaux réfléchis peuvent interférer.

194. — On peut faire l'expérience en formant avec un liquide visqueux (comme ceux dont on se sert pour l'étude de la capillarité) une lame mince à l'intérieur d'une monture métallique. Sous l'influence de la pesanteur, le liquide tend à descendre à la partie inférieure de la monture : l'épaisseur de la lame va en croissant de la partie supérieure à la partie inférieure ; on aperçoit des irisations d'autant plus

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

brillantes que l'épaisseur est plus faible.

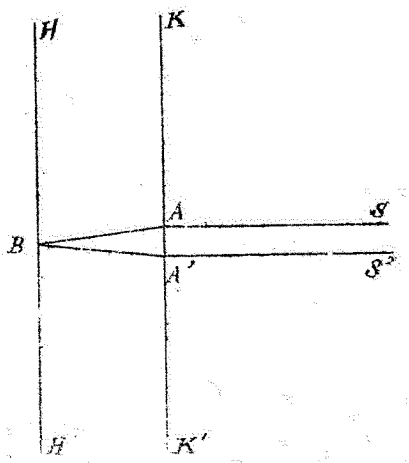
Le même phénomène peut être observé quand on verse à la surface de l'eau une couche mince d'un liquide qui ne peut pas se mélanger avec elle : par exemple de l'essence de térébenthine, de l'huile.

Les mêmes irisations se produisent lorsqu'une lame d'air de très faible épaisseur est enfermée entre deux lames transparentes. C'est ce que l'on observe facilement avec des lames de mica ou de gypse. On voit de plus que si on comprime ces substances, de manière à faire varier l'épaisseur de la lame d'air interposée, on déplace les irisations.

Théorie du phénomène. — Cas de l'incidence normale.

195. — La théorie de ces phénomènes est la même que celle des miroirs de Fresnel. Il suffit pour s'en convaincre de construire les deux images de la source donnée par les deux faces de la lame et de chercher les franges fournies par les interférences des faisceaux émanés de ces deux sources. Mais

il est préférable de raisonner d'une manière plus directe ainsi



Remarque. Les rayons AB et A'B' tous deux normaux à la face HH' sont représentés séparés pour l'intelligence de la figure

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

que nous allons le faire.

Soit une lame d'air HH'KK comprise entre deux corps transparents limités par des surfaces HH' KK' parallèles entre elles.

Considérons un rayon SA tombant normalement sur la face KK'. Une partie de la lumière incidente est réfléchie par cette face, et revient suivant la direction AS; une autre partie pénètre en AB, se réfléchit sur la face HH' puis revient suivant la même direction BA'S'. Il y a interférence entre les rayons réfléchis l'un en A l'autre en B.

Calculons la différence de marche de ces rayons. Elle est égale à

$$AB + BA' = 2e$$

e désignant l'épaisseur de la lame d'air.

Cette quantité représente la différence des chemins parcourus; comme la lumière se réfléchit en B de l'air sur le verre, il y a réflexion avec changement de signe; donc il faut, à la différence de marche ajouter $\frac{\lambda}{2}$ pour tenir compte de la réflexion.*

La différence de marche δ est donc

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

Les élongations des deux rayons s'ajoutent si

$$\delta = n\lambda$$

n étant un nombre entier quelconque.

Les élongations se retranchent, si

$$\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Donc si l'épaisseur e est telle que

$$2e + \frac{\lambda}{2} = n\lambda$$

ou

$$e = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$$

les rayons interférents sont concordants, il y a lumière.

Si l'épaisseur e est telle que

---

* Nous admettons qu'au point A où se produit la réflexion du verre sur le verre, il n'y a pas de changement de signe de l'élongation. Nous aurons à vérifier que les résultats de l'expérience sont bien d'accord avec ceux de la théorie.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$2e + \frac{\lambda}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

ou

$$e = 2n\frac{\lambda}{4}$$

les rayons interférents sont discordants, il y a obscurité.

Lorsque les deux faces de la lame d'air ne sont pas parallèles, l'épaisseur de la lame est variable. En certains points, la distance des lames est telle qu'il y a maximum de lumière pour la radiation de longueur d'onde λ; en d'autres points l'épaisseur est telle qu'il y a obscurité pour cette même radiation. D'où production de franges brillantes et obscures.

Soit par exemple un point où il y a obscurité. En ce point $e = 2n\frac{\lambda}{4}$; pour tous les points tels que cette relation est satisfaite, on a le même phénomène; donc les franges obscures d'une part, les franges brillantes d'autre part, représentent les lignes de niveau de la surface supérieure, par rapport à la surface inférieure. Chaque frange est le lieu des points de l'une des faces qui se trouvent à une même distance de l'autre face.

Supposons que l'une des faces soit plane. —
Une frange obscure correspond à une épaisseur

$$e = 2n\frac{\lambda}{4}$$

La frange obscure voisine correspond à une épaisseur

$$e' = 2(n+1)\frac{\lambda}{4}$$

La différence des épaisseurs en ces deux points est

$$e' - e = \frac{\lambda}{2}$$

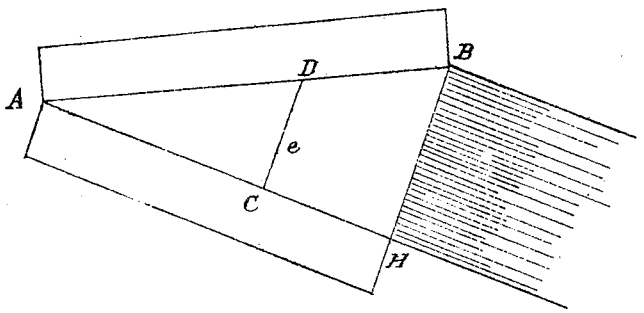
Les franges obscures correspondent donc aux intersections de la surface supérieure avec une série de plans distants l'un de l'autre de $\frac{\lambda}{2}$.

196. — On peut en déduire une méthode pour trouver la forme d'une surface; il suffit de poser cette surface sur un plan et de photographier les franges pour avoir les lignes de niveau de la surface étudiée par rapport au plan d'appui.

M. Cornu a appliqué ce procédé à l'étude des déformations subies par un lame de verre primitivement plane et que l'on soumet à certains efforts.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

197. — La méthode peut encore servir à mesurer les longueurs d'onde. — Posons sur un plan une surface dont la forme est connue. La valeur de e est déterminée en chaque point puisqu'on connaît la forme de la surface.



Soit par exemple une lame plane AB placée au dessus d'une autre lame plane AH. Les deux lames ne sont pas parallèles ; il est facile de mesurer E = BH. — Une simple proportion permet de déterminer l'épaisseur e = CD. On a en effet

$$\frac{e}{E} = \frac{AC}{AH}$$

Si la lame AGH est graduée, on connaît AC et AH et par suite e. — Supposons qu'à cette épaisseur corresponde une frange obscure. Comptons p franges obscures ; au nouveau point correspond une épaisseur e' que l'on détermine de la même façon que e. On a alors

$$e' - e = p\frac{\lambda}{2}$$

d'où

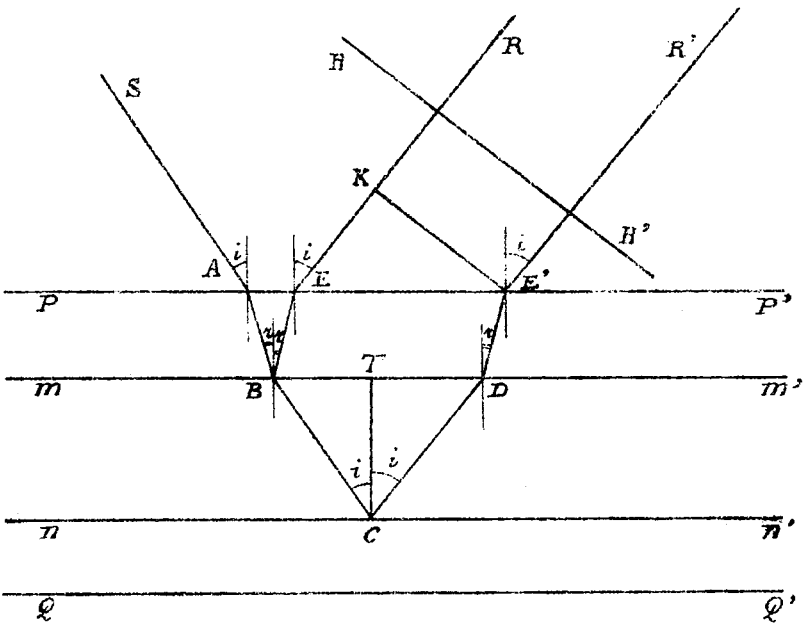
$$\lambda = \frac{2(e'-e)}{p}$$

Cas de l'incidence oblique.

198. — Nous avons supposé que le faisceau incident était normal à la surface réfléchissante. — Dans le cas où le faisceau incident est oblique, on arrive aux mêmes lois.

Soit une lame mince mm'nn' comprise entre deux lames réfringentes PP' et QQ' à faces parallèles. — Considérons un rayon incident SA qui fait avec la normale au point d'incidence un angle i. Il se réfracte suivant AB, se réfléchit en partie en B suivant BE pour ressortir suivant ER ; il pénètre en partie suivant BC, se réfléchit en C suivant CD,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



se refracte en DE' et sort suivant E'R'. Supposons qu'on reçoive les faisceaux émergents sur un écran HH' perpendiculaire à leur direction. Calculons la différence de marche des rayons SABER et SABCDE'R'. La différence des chemins parcourus est

$$BC + CD - EK$$

De plus le rayon SABCDE'R' est réfléchi en C avec changement de signe. La différence de marche des rayons est donc

$$\delta = BC + CD - EK + \frac{\lambda}{2}$$

Or si l'on désigne par e l'épaisseur de la lame mm'nn' on a

$$BC = \frac{e}{\cos i}$$

$$CD = BC = \frac{e}{\cos i}$$

$$EK = EE' \sin KE'E = EE' \sin i$$

$$EE' = BD = 2\,BT = 2e\,\mathrm{tg}\,i$$

d'où $EK = 2e\,\mathrm{tg}\,i \sin i = 2e\,\frac{\sin^2 i}{\cos i}$

Donc $\delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e\,\frac{\sin^2 i}{\cos i} + \frac{\lambda}{2} = 2e\,\frac{1-\sin^2 i}{\cos i} + \frac{\lambda}{2}$

ou finalement $\delta = 2e\cos i + \frac{\lambda}{2}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Donc entre les phénomènes sous l'incidence oblique, et les phénomènes relatifs à l'incidence normale, il y a cette différence que l'épaisseur e est remplacée par $e \cos i$.

Les phénomènes avec l'incidence oblique restent donc les mêmes que s'ils avaient lieu sous l'incidence normale avec une lame d'épaisseur $e' = e \cos i$.

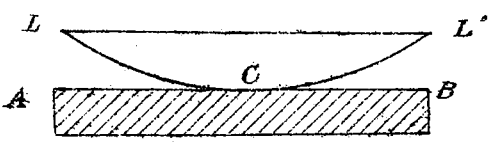
Cette loi est connue sous le nom de loi du Cosinus.

La loi des diamètres que nous allons établir pourra donc être vérifiée, soit avec l'incidence normale, soit avec une incidence oblique.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier expérimentalement les diverses conséquences auxquelles nous sommes arrivés.

Anneaux de Newton.

199. — Soit une lentille sphérique plan convexe de verre LL' posée sur un plan AB par sa convexité. Faisons tomber sur la surface supérieure de la lumière normale. Les franges obtenues dans ce cas sont connues sous le nom d'anneaux de Newton.



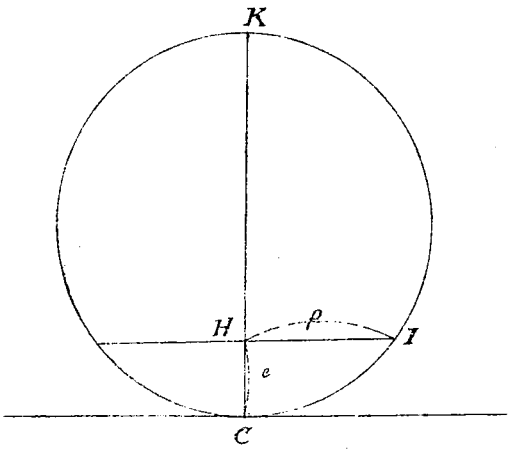
La lentille étant supposée sphérique, les intersections des plans parallèles à AB avec la lentille sont des cercles concentriques; donc les anneaux sont circulaires.

Au point de contact C de la lentille avec le plan AB correspond une épaisseur nulle : donc en ce point la différence de marche $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$ se réduit à $\frac{\lambda}{2}$; les rayons sont discordants, il y a obscurité. — Les anneaux observés par réflexion sont à centre obscur.

Cherchons comment varient les rayons des anneaux.

Soit ρ le rayon de l'anneau correspondant à l'épaisseur e

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



Dans la sphère de diamètre KC, HI est moyenne proportionnelle entre les deux segments KH et HC du diamètre ; donc

$$\rho^2 = e\,(2R - e)$$

R désignant le rayon de la sphère.

Donc $\rho^2 = 2Re - e^2$.

Si l'on suppose que e est petit par rapport à R, e^2 est négligeable par rapport à 2Re. Donc

$$\rho^2 = 2Re$$

Pour les anneaux brillants on a

$$e = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$\text{Donc } 4\rho^2 = 2R\lambda\,(2n+1)$$

Les carrés des diamètres des anneaux brillants réfléchis comptés à partir du centre sont proportionnels aux nombres impairs consécutifs.

Pour les anneaux obscurs, on aurait

$$2n\,\frac{\lambda}{4}$$

$$4\rho^2 = 2R\lambda\,2n$$

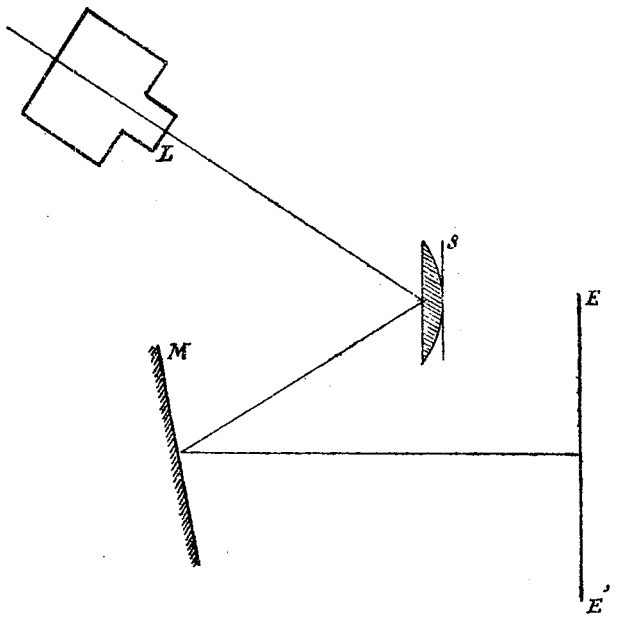
Donc les carrés des diamètres des anneaux obscurs réfléchis comptés à partir du centre sont proportionnels aux nombres pairs consécutifs.

200. — Pour montrer à un auditoire nombreux les anneaux par réflexion, nous employons la disposition suivante.

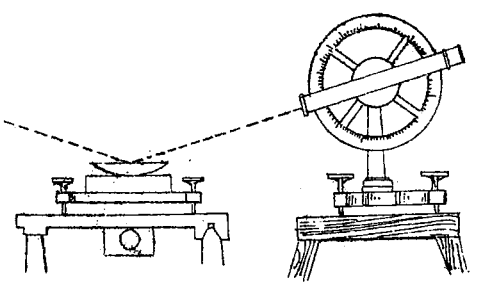
Le faisceau lumineux fourni par un lampe électrique L est dirigé sur un système producteur d'anneaux S composé d'une lentille plan convexe dont la face convexe est en contact avec un plan de verre. Le faisceau lumineux réfléchi est reçu sur un miroir plan M qui le renvoie sur un écran EE'.

201. — La loi des diamètres et celle du cosinus sont facilement vérifiées à l'aide de l'appareil de La Provostaye et Desains. Il se compose 1° d'un appareil producteur d'anneaux, 2° d'un appareil de mesure.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



L'appareil producteur d'anneaux, éclairé par la lumière simple de l'alcool salé est une lentille plan convexe reposant sur un plan de verre réfléchissant. Comme on pourrait craindre que le poids de la lentille ne produise une déformation du plan de verre, on la dispose sur un support particulier qui la maintient au contact de ce plan.



Les rayons réfléchis sont reçus dans une lunette mobile autour d'un axe horizontal.

Le système producteur des anneaux est mobile sur le chariot d'une machine à diviser; en faisant mouvoir la vis micrométrique, on peut amener successivement les bords extrêmes de chaque anneau en coïncidence avec le fil du réticule qui est perpendiculaire au fil horizontal.

Pour vérifier la loi des diamètres, on tourne la vis

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

fig. 1

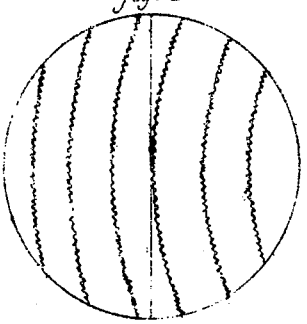
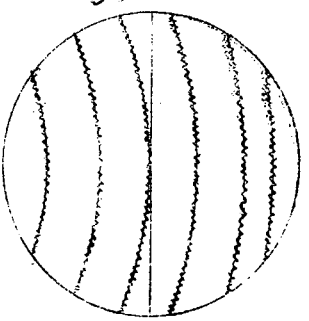


fig. 2



micrométrique jusqu'à amener ce fil du réticule à être tangent à l'un des bords le bord gauche par exemple de l'anneau. L'effet observé dans le champ de la lunette est représenté par la figure (1). On lit la division p marquée par le tambour de la vis.

Par quelques tours de la vis, on fait avancer le chariot jusqu'à ce que le même fil soit tangent au bord droit du même anneau, comme dans la figure 2, on lit p' le diamètre de l'anneau est

$$2r = p - p'$$

r est ici exprimé avec l'unité correspondant à une division du tambour de la vis. Si on emploie une vis dont le pas soit ½ millimètre et dont le tambour soit divisé en 100 parties égales, on arrive à évaluer ainsi r en $\frac{1}{200}$ de millimètre.

Les anneaux voisins du centre n'ont pas leurs contours nets; aussi est-il bon de ne faire porter la visée que sur des anneaux assez éloignés du centre, le 10° ou le 12° par exemple.

De plus pour éviter les erreurs dues au temps perdu de la vis micrométrique, il faut la faire toujours tourner dans le même sens. On lira d'abord les valeurs de p correspondant au 30e anneau brillant à gauche, puis au 29e etc et ainsi de suite, en avançant peu à peu vers le centre; puis on lira les valeurs de p' correspondant au 12e, au 13e ... etc jusqu'au 30e anneau brillant à droite. On pourra alors constater que les carrés des diamètres des anneaux brillants sont proportionnels à la suite des nombres impairs consécutifs.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

202. — L'appareil de Desains permet aussi de vérifier la loi de l'incidence.

Soit ρ le rayon d'un anneau brillant. Sous l'incidence normale avec une épaisseur e, on a

$$\rho^2 = 2Re$$

Si l'incidence est oblique, c'est l'épaisseur $\frac{e}{\cos i}$ qui correspond à la même différence de marche ; donc

$$\rho^2 = 2R\frac{e}{\cos i}$$

Donc les carrés des diamètres des anneaux brillants ou obscurs varient en raison inverse des cosinus des angles d'incidence.

La lunette de l'appareil est mobile autour d'un axe perpendiculaire au centre d'un limbe vertical gradué ; le limbe est supporté par un pied à coulisse de façon qu'on puisse toujours viser le même point tout en faisant varier l'inclinaison.

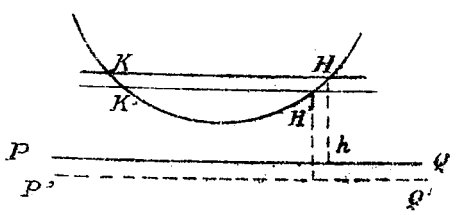
203. — Les anneaux de Newton fournissent un moyen de mesurer les longueurs d'onde. — Supposons qu'on ait déterminé le rayon ρ de l'anneau obscur d'ordre n. On a

$$H\rho^2 = 2R\lambda \times 2n$$

d'où $$\lambda = \frac{\rho^2}{Rn}$$

R peut être déterminé avec le sphéromètre. On tire de la formule la valeur de λ.

204. — On peut encore opérer autrement. — Supposons que la lentille soit fixe ; si on déplace le plan de verre inférieur parallèlement à lui-même d'une quantité Δe les anneaux se déplacent. En effet, chaque anneau HK est caractéristique d'une épaisseur déterminée Hh de la couche d'air intermédiaire ; si on



accroît l'épaisseur de Δe, l'anneau correspondant à l'épaisseur Hh est $H'K'$ dont le rayon est inférieur à HK.

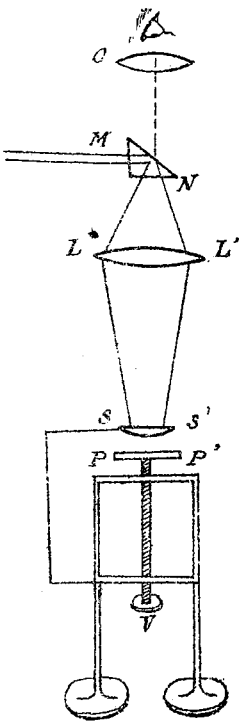
Donc si on accroît

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

l'épaisseur de la lame d'air les anneaux se rapprochent du centre. Si l'épaisseur varie de $\frac{\lambda}{2}$, l'anneau dont l'ordre était n vient prendre la place de l'anneau dont l'ordre était $(n-1)$. Si l'on marque sur le plan inférieur un point de repère et que par ce point de repère passent p franges pour un déplacement du plan égal à ε, on a

$$p\,\frac{\lambda}{2} = \varepsilon$$

d'où $$\lambda = \frac{2\varepsilon}{p}$$



Voici la disposition de l'appareil : un faisceau de lumière simple tombe sur un prisme à réflexion totale MN ; une lentille LL' le concentre sur le système producteur des anneaux SS'. Le plan de verre PP' est porté par une vis micrométrique V. Les anneaux sont observés normalement en plaçant l'œil en O. — On compte le nombre des anneaux qui disparaissent au centre ou, ce qui est plus facile, le nombre de ceux qui passent par un point de repère marqué à l'avance sur sur le plan de verre, lorsqu'on déplace le plan de verre d'une quantité qui est évaluée à l'aide de la vis micrométrique.

Mesure des petits déplacements d'une surface.

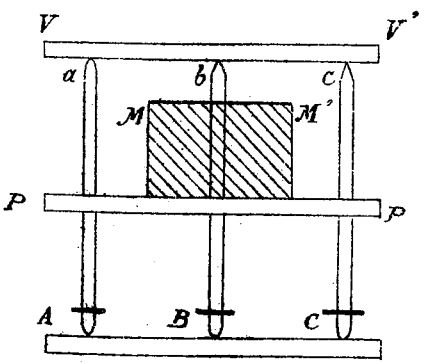
205. — Cette méthode permet d'évaluer avec une extrême précision les petits déplacements d'une surface si λ est déjà connu. Supposons par exemple que la distance du plan de verre à une surface donnée varie de n demi-longueurs d'onde plus une fraction $\frac{1}{p}$ de la demi longueur d'onde. — Alors une frange se déplace de n rangs plus une fraction égale à la $p^{ème}$ partie de la largeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

d'une frange. — Avec un peu d'habitude on arrive à évaluer ces déplacements à $\frac{1}{10^e}$ près de la largeur d'une frange. On peut donc mesurer des déplacements de la même grandeur que $\frac{\lambda}{2 \times 10} = \frac{\lambda}{20}$. Pour le jaune, $\lambda = \frac{1^{mm}}{2000}$; donc cette méthode permet d'évaluer à $\frac{1}{40000}$ de millimètre.

Application. — Dilatation des cristaux. — Méthode de Fizeau.

206. — Fizeau s'est servi de ce procédé pour étudier la dilatation dans une direction quelconque des corps cristallisés de très petites dimensions. Son appareil se compose d'un petit trépied qui supporte un plateau métallique poli PP'. Les pieds ABC reposant sur un plan de verre bien dressé sont formés par trois vis qui traversent le plateau PP' et sont terminées à leurs extrémités supérieures par des pointes mousses a, b, c. Un plan de verre poli VV' à la surface inférieure duquel sont gravés des points de repère repose sur ces pointes. — A l'aide des vis calantes, on peut régler la distance du plateau PP' au plan du verre.



Le cristal à étudier est placé sur le plateau PP'; on règle les vis de façon que sa face supérieure soit à une faible distance de la face inférieure de VV'. Si on fait tomber normalement sur le plateau de verre supérieur un faisceau de lumière monochromatique, on observe des franges. Supposons qu'on porte tout l'appareil à une température θ°. Du déplacement des franges, on déduira la variation de la distance MM' à VV'; cette variation d est égale à la différence entre la dilatation Δ des vis et la dilatation x du cristal

$$d = \Delta - x$$

On mesure Δ en répétant la même expérience après avoir enlevé le cristal. Soit d' la variation de distance de-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

PP' à MM'. On a

$$d' = \Delta$$

$$\text{d'où } x = d' - d$$

Influence de la nature de la lumière

207. — Étudions maintenant ce qui arrive quand on fait varier la nature de la lumière.

Pour une lumière de longueur d'onde λ le diamètre du n^e anneau brillant est donné par la formule

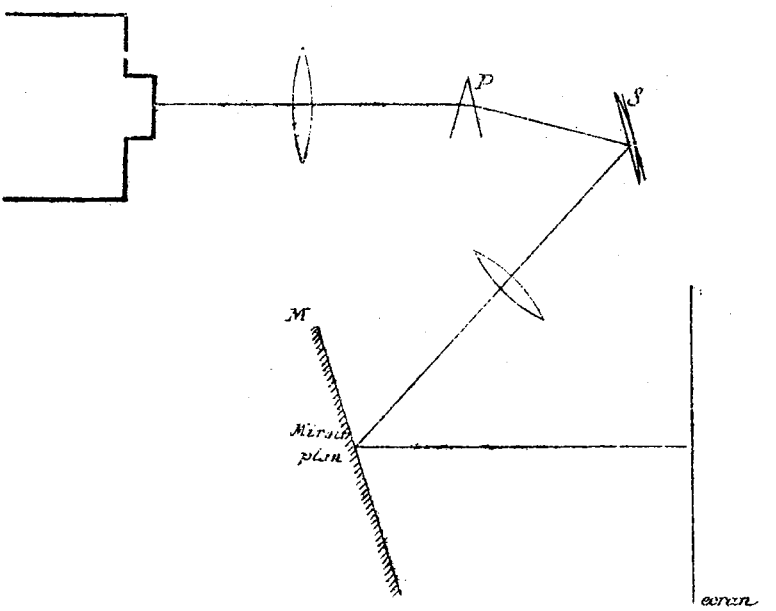
$$4 p^2 = 2 R (2n+1) \lambda$$

Donc les carrés des diamètres des anneaux de même rang sont proportionnels à la valeur de la longueur d'onde.

Or le λ du violet est inférieur au λ du rouge.

Donc les anneaux fournis par la lumière violette, de même que ceux fournis par la lumière jaune seront plus serrés que les anneaux observés en lumière rouge.

On peut vérifier cette conséquence à l'aide de la disposition suivante. La lumière d'une lampe électrique est rendue parallèle à l'aide d'une lentille. Elle tombe sur un prisme P qui fournit un spectre. Le faisceau émergent tombe sur un système S producteur d'anneaux. Les anneaux sont projetés sur



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

un écran. Si on tourne le prisme de façon à projeter successivement sur S la partie violette puis la partie jaune et enfin la partie rouge du spectre, on constate que les anneaux paraissent se dilater.

Anneaux de Newton produits par la lumière blanche.

208. — Jusqu'ici nous avons supposé que les anneaux étaient produits par une lumière simple. — Considérons maintenant le cas où le système producteur d'anneaux est éclairé par la lumière blanche. Alors on observe des irisations analogues à celles que nous avons déjà rencontrées en étudiant les franges des miroirs de Fresnel. Le centre des anneaux est obscur ; le premier anneau est brillant et irisé ; il présente le violet en dedans et le rouge en dehors. A une grande distance du centre, on n'observe plus d'anneaux mais une teinte blanche uniforme ; c'est un blanc d'ordre supérieur ; car, analysée par un prisme, cette lumière blanche donne naissance à un spectre cannelé.

L'explication de ces phénomènes est la même que celle qui a déjà été donnée (§ 187).

Influence de la nature de la substance qui constitue la lame mince.

209. — Les résultats sont analogues si la lame mince au lieu d'être une lame d'air est formée d'une substance quelconque.

Soit V la vitesse de la lumière dans l'air,

V' la vitesse de la lumière dans une substance S quelconque.

L'indice de réfraction m de la substance par rapport à l'air est égal à $\frac{V}{V'}$ (nous l'établirons plus loin).

$$m = \frac{V}{V'}.$$

D'ailleurs les longueurs d'onde λ et λ' dans l'air et dans S sont respectivement $\lambda = VT$

et $\lambda' = V'T$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

en supposant que la source est la même.

Donc

$$m = \frac{V}{V'} = \frac{VT}{V'T} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

D'où $\lambda' = \frac{1}{m}\lambda$

Si la substance S est de l'eau, $m = \frac{4}{3}$, $\frac{1}{m} = \frac{3}{4}$

donc $\lambda' = \frac{3}{4}\lambda$

Le n^e anneau brillant réfléchi dans l'air correspond à une épaisseur e telle que

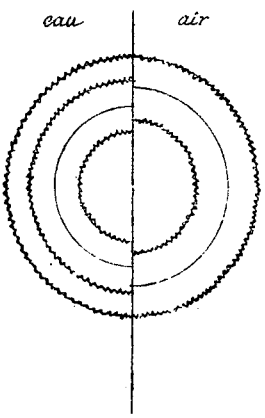
$$2e = (n + \tfrac{1}{2})\lambda$$

Le n^e anneau brillant réfléchi dans l'eau (en supposant que les réflexions se passent de la même manière que dans l'air) correspond à une épaisseur $2e'$

$$2e' = (n + \tfrac{1}{2})\lambda' = \tfrac{3}{4}(n + \tfrac{1}{2})\lambda = \tfrac{3}{4} \times 2e$$

ou $e' = \frac{3}{4}e$

Les anneaux sont donc plus serrés lorsque la lame mince est constituée par de l'eau ; on met ce fait en évidence en plaçant une goutte d'eau entre la lentille et le plan de verre de l'appareil de Newton. On constate alors que le troisième anneau dans l'air coïncide avec le quatrième anneau dans l'eau.



Analogie du phénomène des lames minces avec les phénomènes des tuyaux fermés.

210. — Le phénomène des lames minces est exactement le même que celui des tuyaux fermés que nous avons rencontré en acoustique. — Un tuyau fermé est un appareil qui renforce certains sons ; il existe une relation entre les longueurs d'onde de ces sons et la longueur du tuyau. Une lame mince réfléchit certaines radiations, celles dont la longueur d'onde est liée à l'épaisseur de la lame par une relation déterminée ; c'est une espèce de résonnateur de lumière.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Cherchons les radiations pour lesquelles on obtient de la lumière avec une lame d'épaisseur e donnée.

On a pour la lumière réfléchie

$$2e = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$$

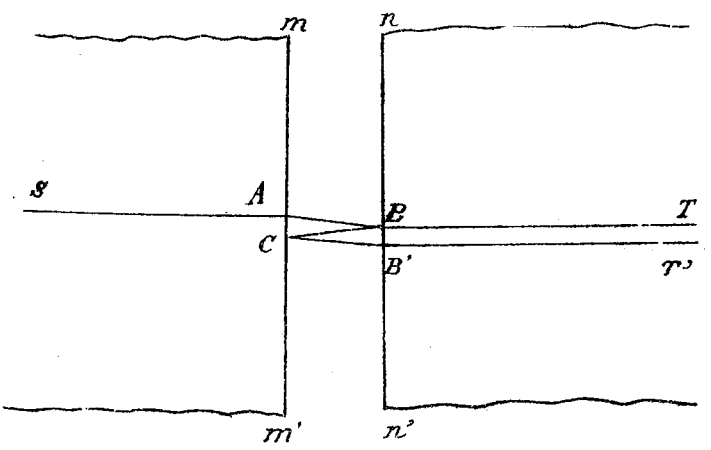
d'où

$$e = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Les valeurs de e sont les harmoniques impairs de la radiation de longueur d'onde $\frac{\lambda}{4}$ qui correspond au son fondamental. Cette radiation fondamentale existe-t-elle toujours ? on ne peut l'affirmer. Le spectre se prolonge de part et d'autre du spectre visible ; toutefois, il n'est pas démontré qu'il se prolonge indéfiniment ; ainsi on ne sait pas s'il existe vers l'infra-rouge des radiations dont la longueur d'onde serait égale à 1 millimètre. Dans tous les cas la lame mince demeure assimilable à un tuyau d'orgue qui à défaut du son fondamental, renforcerait les harmoniques de ce son.

Anneaux colorés obtenus par transmission.

211. — Les lames minces donnent lieu à un second système de franges lorsqu'on les observe dans la direction même du faisceau incident.



Soit un rayon incident SA tombant normalement sur la face mm' ; il traverse, pénètre en AB, puis en BT. En B ce rayon se réfléchit en partie, vient en BC, puis se réfléchit en C et sort normalement en CB'T'.

La différence de marche des deux rayons est égale à

$$\delta = BC + B'C = 2e$$

A cette quantité il faudrait ajouter $2\frac{\lambda}{2}$ pour les deux réflexions avec changement de signe en B et en C. Mais on sait que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les phénomènes d'interférence restent les mêmes, si on ajoute ou retranche un nombre entier de fois λ à la différence de marche des rayons interférents.

Les rayons sont concordants si

$$2e = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2} ; \qquad (1)$$

il y a alors lumière.

Les rayons sont discordants si

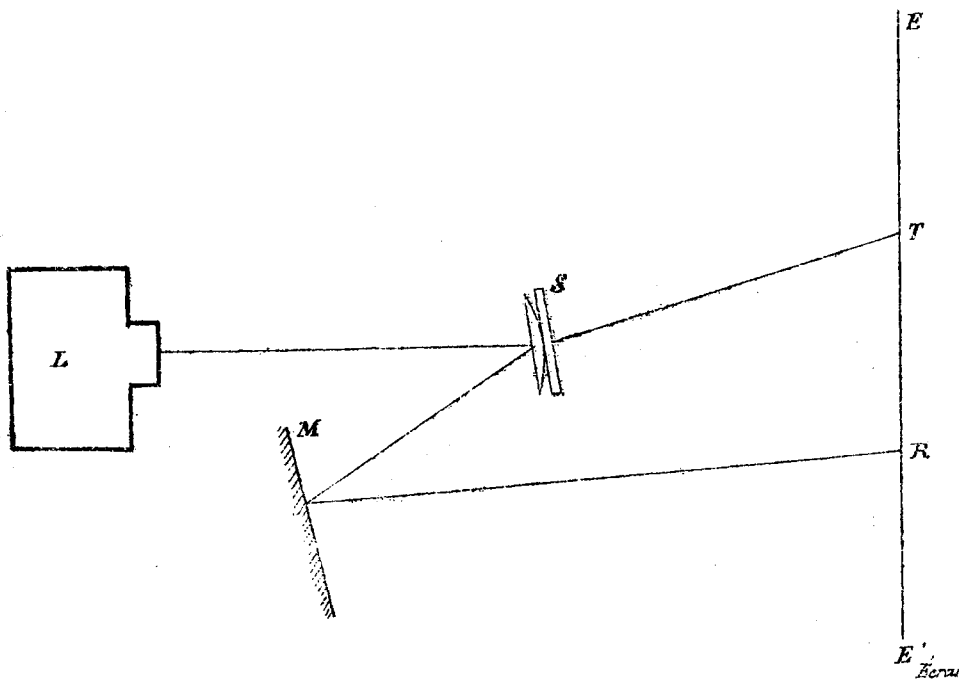
$$2e = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

il y a alors obscurité.

Si la lame mince à une épaisseur variable, pour les points où la première relation sera satisfaite, on aura des franges brillantes; pour ceux où la seconde sera satisfaite, on aura des franges obscures. Si on opère avec le dispositif de Newton (§. 199) on aura des anneaux brillants et des anneaux obscurs.

Dans tous les cas, le phénomène observé par transmission est toujours complémentaire de celui qui est observé par réflexion. Les épaisseurs qui correspondent aux maximums de lumière transmise sont celles qui correspondent aux minimums de lumière réfléchie.

212. — On peut mettre facilement ce fait en évidence en



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

projetant sur un même écran les anneaux transmis et les anneaux réfléchis.

Le système producteur d'anneaux est éclairé directement par une lampe électrique. Les anneaux transmis se projettent en T, les anneaux réfléchis en R par l'intermédiaire d'un miroir plan M.

Les anneaux réfléchis sont à centre noir, les anneaux transmis à centre blanc.

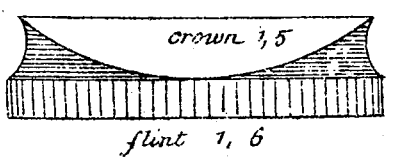
Les anneaux transmis paraissent moins brillants parce qu'ils sont noyés au milieu du faisceau de lumière blanche.

Remarque relative aux réflexions sur les faces qui limitent la lame mince.

213. — Lorsqu'un rayon lumineux se réfléchit sur une surface, la réflexion avec changement de signe ne se produit que d'un milieu moins réfringent sur un milieu plus réfringent. Si la réflexion se produit d'un milieu plus réfringent sur un milieu moins réfringent, il n'y a pas lieu d'ajouter le terme $\frac{\lambda}{2}$ à la différence de marche.

Appliquons ce résultat à la production des anneaux de Newton. — Si entre la lentille et le plan de verre on introduit un liquide dont l'indice de réfraction par rapport à l'air soit plus faible que celui de la substance inférieure, on n'a pas à ajouter $\frac{\lambda}{2}$ à la différence de marche des rayons réfléchis sur le plan de verre; les anneaux réfléchis dans ce cas sont à centre blanc; ils ont la même apparence que les anneaux transmis dans le cas où la lame était d'air.

Young pour réaliser cette expérience plaçait une lentille de crown (indice = 1,5) sur un plan de flint (indice = 1,6). Dans l'espace intermédiaire, on mettait un liquide transparent, de l'essence de lavande ou de girofle ($n = 1,55$).

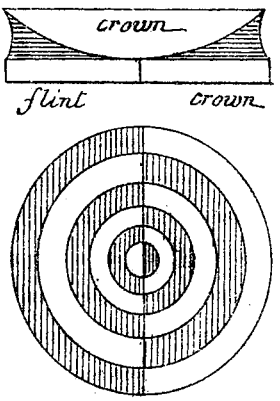


Les réflexions sur le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

deux faces de la lame mince sont alors toutes deux de même espèce, réflexion d'un milieu moins réfringent sur un milieu plus réfringent. A la marche de chacun des rayons interférents, il faut ajouter $\frac{\lambda}{2}$; ce terme disparaît dans la différence de marche. Les anneaux réfléchis obtenus sont donc identiques aux anneaux transmis de Newton.

214. — On peut même obtenir simultanément les anneaux réfléchis et les anneaux à centre noir et à centre blanc. Sur un plan moitié en flint, moitié en crown, on place une lentille plan convexe en crown. Dans l'espace intermédiaire on introduit une goutte d'essence de lavande. Les anneaux réfléchis sont à centre noir du côté du crown, et à centre blanc du côté du flint.



Chemins équivalents.

215. — On dit que les chemins parcourus par deux rayons lumineux sont équivalents s'ils sont parcourus pendant le même temps.

Soient e et e' deux chemins équivalents dans deux milieux A et A' différents, V et V' les vitesses de propagation de la lumière dans ces deux milieux, t le temps employé par la lumière pour parcourir les espaces e et e'

On a

$$e = Vt \qquad e' = V't$$

d'où

$$\frac{e}{e'} = \frac{V}{V'}$$

Mais nous démontrerons bientôt que

$$\frac{V}{V'} = m$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

m étant l'indice de réfraction du milieu A' par rapport au milieu A. Donc

$$\frac{e}{e'} = m$$

ou

$$e = me'$$

Si un milieu a un indice m par rapport à l'air, un chemin e est parcouru dans ce milieu pendant le même temps qu'un chemin me dans l'air. — L'eau a pour indice par rapport à l'air $\frac{4}{3}$; le retard apporté à la marche du rayon qui traverse une épaisseur d'eau égale à e est le même que s'il avait traversé une épaisseur d'air égale à $\frac{4}{3}e$.

On peut faire usage de cette propriété pour mesurer n. Les appareils destinés à cet usage sont les réfractomètres interférentiels.

Réfractomètres interférentiels.

216. — Soient deux rayons lumineux SA et SA' capables d'interférer. Sur le trajet d'un de ces rayons, interposons une lame transparente d'épaisseur e et d'indice n par rapport à l'air. Nous produisons ainsi une variation dans la différence de marche des deux rayons interférents. A l'épaisseur e parcourue dans l'air, nous substituons une épaisseur e parcourue dans la lame, qui équivaut à une épaisseur ne parcourue dans l'air.

La variation de la différence de marche est donc

$$ne - e = (n-1)e.$$

Chaque fois que la différence de marche augmente de λ les franges se déplacent d'un rang. Si

$$(n-1)e = K\lambda$$

à la place de la frange centrale, on trouve la K^{me} frange lumineuse, K étant entier ou fractionnaire.

Si l'on évalue ce nombre K, l'équation précédente permettra de déterminer n avec une grande précision.

Supposons par exemple que $e = 1$ décimètre $= 100^{mm}$

$$\lambda = \frac{1}{2000}$$

Alors $n - 1 = \frac{K}{200000}$.

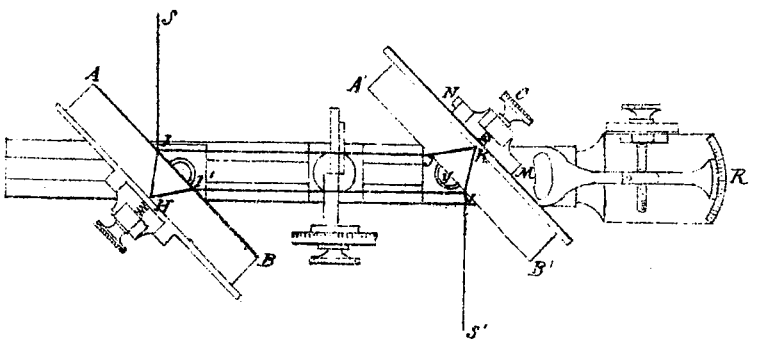
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Miroirs de Jamin.

217. — Pour réaliser cette méthode, il faut que l'on puisse produire des faisceaux interférents séparés. — Un des procédés les plus commodes qui aient été employés est celui des miroirs de Jamin.

Deux miroirs de même épaisseur, (ils ont été découpés dans la même lame de verre) sont étamés sur leur face postérieure. On les dispose sur une coulisse ou sur un banc d'optique de manière que leurs faces transparentes AB, A'B' soient parallèles et en regard l'une de l'autre. Elles peuvent d'ailleurs s'écarter ou se rapprocher à volonté.

La première glace AB inclinée à 45° est fixe ; elle reçoit un faisceau lumineux et le renvoie sur la seconde A'B'. Celle-ci peut tourner autour d'un axe horizontal MN par le jeu

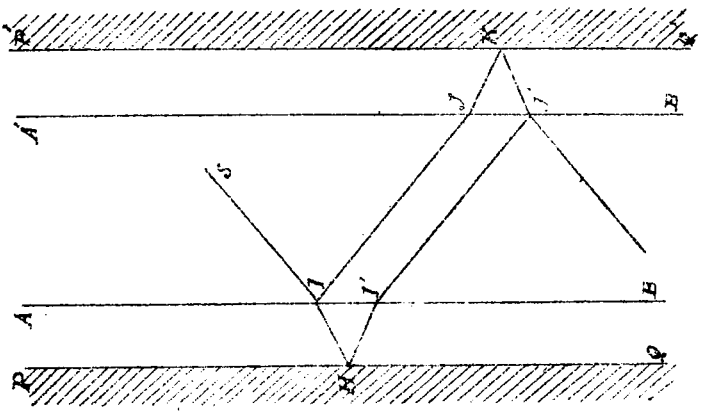


d'une vis o ; on peut ainsi disposer la surface A'B' verticalement.

De plus tout le support peut se mouvoir autour d'un axe vertical V. Une alidade R mesure son déplacement sur un arc de cercle.

Soit un rayon lumineux SI tombant sur la face AB. En I il se partage ; le rayon réfracté pénètre en IH, se réfléchit en H sur la face postérieure suivant HI', ressort en I'J', se réfléchit en J' sur la face antérieure de la seconde glace ; sa direction finale est J'S'.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



Le rayon réfléchi en I suit une marche analogue IJKJ'S'

Lorsque les glaces sont exactement parallèles, les deux rayons émergents se superposent ; leur différence de marche est nulle. Ils ont subi le même nombre de réflexions ; ils ont parcouru tant dans l'air que dans le verre les mêmes chemins.

Si, au contraire, on fait tourner un peu l'un des miroirs, les chemins parcourus ne sont plus les mêmes ; ils peuvent d'ailleurs différer d'aussi peu qu'on le veut. — Si la rotation se produit autour de l'axe horizontal MN, les franges observées sont horizontales et d'autant plus larges que les glaces sont plus près d'être parallèles ; si la rotation a lieu autour de l'axe vertical V, les franges sont verticales.

La théorie complète de ces phénomènes n'est pas encore faite.

218. — L'appareil de Jamin est précieux pour mesurer les petites variations d'indice des diverses substances réfringentes. Par exemple en interposant sur l'un des faisceaux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

interférents un tube contenant un gaz, on peut du déplacement des franges déduire les variations de l'indice d'un gaz lorsque sa pression ou sa température change. — Jamin a étudié par cette méthode l'influence de la vapeur d'eau contenue dans l'air sur la valeur de l'indice de réfraction de ce gaz. — Les changements de densité des liquides entraînent aussi des variations de leur indice de réfraction : c'est ainsi qu'on a constaté que lorsqu'un cristal se nourrit dans sa propre solution, il attire le sel ; la densité du liquide augmente à sa surface et les franges se déplacent.

De la réflexion et de la réfraction de la lumière dans la théorie des ondulations.

Ondes et rayons lumineux.

219. — Dans l'optique géométrique, on représente la marche de la lumière à l'aide d'une série de droites que l'on appelle des rayons lumineux. Ces rayons ont-ils une signification physique ?

Dans la théorie de l'émission, le rayon serait la trajectoire rectiligne d'un corpuscule lumineux, il aurait une signification physique.

Dans la théorie des ondulations dont nous nous servons, il n'en est plus de même : un point lumineux P n'est autre chose qu'un centre d'ébranlement. Au bout du temps θ, cet ébranlement s'est transmis en tous les points d'une surface que l'on appelle la surface d'onde et qui est le lieu géométrique des points ainsi ébranlés. Dans cette théorie, il n'y a donc de réel que la surface d'onde, et le rayon ne peut plus avoir qu'une signification géométrique.

La lumière se propageant avec une vitesse V, l'onde se déplace et se développe avec la vitesse V. Il y a donc lieu de compter le déplacement de la surface d'onde suivant des droites appropriées : ce sont ces droites qui constituent les rayons lumineux. En se déplaçant dans un milieu homogène, l'onde

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

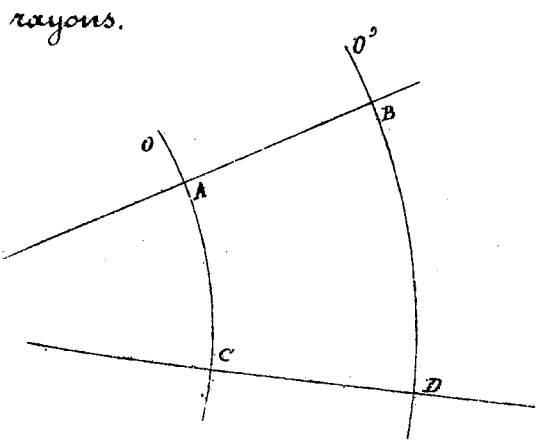
demeure constamment normale à un même système de droites : ce sont ces droites normales que l'on appelle les rayons lumineux.

Il en est ainsi du moins quand on considère les milieux monoréfringents (le vide, les gaz, les liquides, le verre etc.) dont nous nous occuperons d'abord ; dans tous ces milieux, le rayon n'est autre chose qu'une droite normale à l'onde. Dans le cas des milieux biréfringents que nous considérerons plus loin, le rôle du rayon est rempli par une droite qui ne se confond pas avec la normale et dont nous définirons la direction.

En résumé, dans un milieu homogène et monoréfringent, un faisceau de rayons est le faisceau des droites normales au système des ondes émanées d'un même point.

220.— La phase de la vibration lumineuse est la même en tous les points de l'onde. En effet la vibration partie du point P est transmise au bout d'un temps θ avec sa phase en tous les points d'une surface qui est par définition la surface d'onde.

Tautochronisme des chemins comptés suivant les rayons.



221.— Soient O et O' les positions successives de l'onde aux temps θ et θ'. Je dis que les chemins AB et CD parcourus suivant deux rayons différents sont tautochrones, c'est-à-dire parcourus pendant le même temps. En effet ces chemins ont été parcourus l'un et l'autre pendant le temps θ'-θ

Inversement, pour démontrer que deux points tels que B et D appartiennent à une même surface d'onde, il suffira de vérifier que les chemins correspondants sont tautochrones.

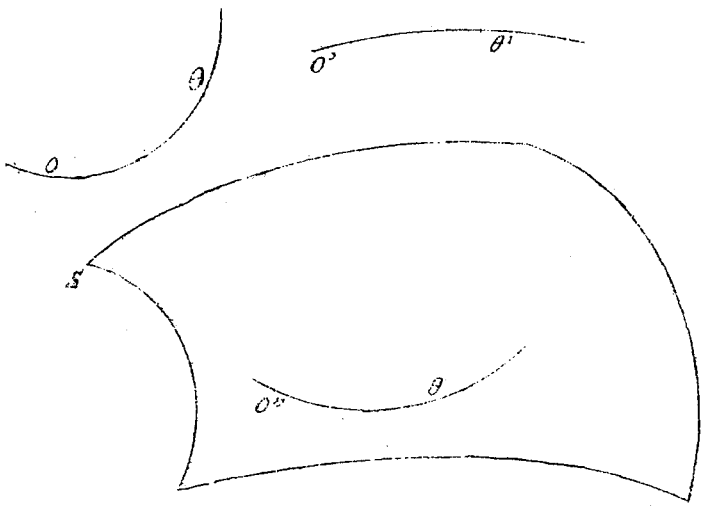
Ces préliminaires établis, il est facile de démontrer que les rayons lumineux tels que nous venons de les définir

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

jouissent des propriétés qu'on leur attribue dans l'optique géométrique, c'est-à-dire qu'ils obéissent aux lois connues de la réflexion et de la réfraction.

Onde réfléchie et onde réfractée.

292. — Soit une surface S qui sépare deux milieux différents. Une onde incidente O qui existe au temps θ dans le premier milieu vient ensuite rencontrer successivement les divers points de S. Ces points sont alors ébranlés; leur mouvement se transmet



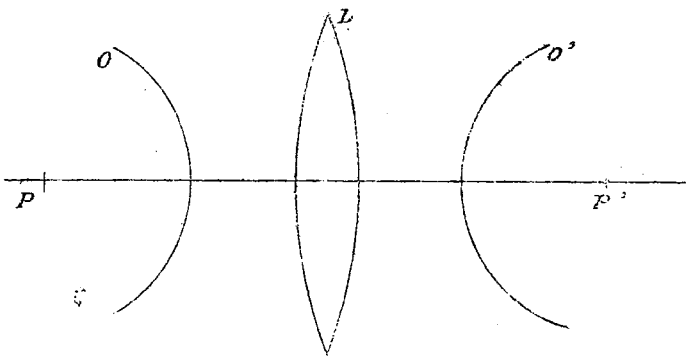
dans l'un et l'autre milieu. Au temps θ, il est parvenu en tous les points d'une surface O' dans le premier milieu; O' est l'onde réfléchie au temps θ'; d'autre part, dans le second milieu, le mouvement est parvenu en tous les points d'une surface O''; O'' est l'onde réfractée au temps θ''.

Il résulte de là que la définition de l'onde et la propriété relative au tautochronisme subsistent dans le cas de l'onde qui a subi soit une réflexion, soit une réfraction. Il en est donc de même lorsque l'onde a subi plusieurs réflexions et refractions.

293. — Considérons, par exemple, au point de vue du tautochronisme, le cas d'une lentille L aplanétique par rapport à un point P, c'est-à-dire donnant du point P une image P' réduite à un point.

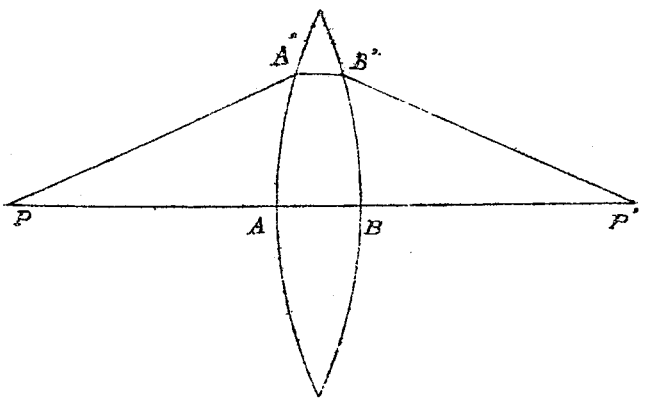
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

L'onde incidente O est une surface sphérique qui a le point P pour centre et pour point de départ ; l'onde réfractée O' est également une surface sphérique qui a P' pour centre et pour point d'arrivée.



O et O' interceptent sur les divers rayons des longueurs tautochrones et il en est de même lorsque ces surfaces se réduisent aux points P et P'. Soient donc θ le temps employé par la lumière à aller de P à P', V et V' les vitesses de la lumière dans l'air et dans le verre dont est formée la lentille.

Exprimons que le temps θ employé pour suivre le chemin PABP' est le même que le temps employé pour suivre le chemin PA'B'P'



Nous aurons :

$$\frac{SA}{V} + \frac{AB}{V'} + \frac{BS'}{V} = \theta$$

$$\frac{SA'}{V} + \frac{A'B'}{V'} + \frac{B'S'}{V} = \theta \quad (1)$$

Si on prend trois axes de coordonnées d'une manière quelconque dans l'espace, on pourra définir les surfaces de la lentille par rapport à ces axes en écrivant analytiquement la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

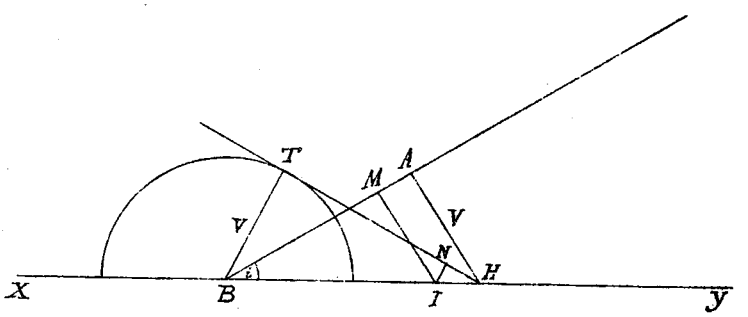
condition (1).

Lois de la réflexion et de la réfraction dans la théorie des ondulations.

224. — Dans l'optique élémentaire, on a établi les lois de la réflexion et de la réfraction en se fondant sur la considération des rayons lumineux. Voyons ce que deviennent ces lois dans le cas où on admet la théorie des ondulations. — Nous ne traiterons que le cas où la source lumineuse serait supposée à l'infini : alors les ondes incidentes sont planes.

Lois de la réflexion.

225. — Soit une surface réfléchissante plane XY et une onde plane incidente AB, faisant avec le plan XY un angle i.



Nous prendrons comme plan du tableau un plan perpendiculaire à l'intersection des plans d'onde avec la surface XY. La droite AB, trace de l'onde sur le plan du tableau, est appelée le front de l'onde.

Soit A un point de l'onde tel que le chemin AH complé sur la normale à l'onde soit parcouru pendant un temps déterminé, l'unité de temps par exemple. Alors AH sera la vitesse V de la lumière dans le premier milieu que nous supposerons être le vide.

Cherchons la position de l'onde au bout de l'unité de temps. La surface à déterminer est le lieu des points auxquels le mouvement vibratoire est parvenu au bout du temps 1; H est un de ces points. D'autre part, l'ébranlement qui est actuellement en B se trouvera au bout du temps 1 en un point quelconque d'une sphère de rayon V et de centre B.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Menons la tangente HT à cette sphère ; je dis que HT est la trace sur le plan du tableau du plan de l'onde réfléchie.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que les chemins suivis par le rayon lumineux entre AB et HT sont tautochrones. Soit M un point de l'onde incidente ; MI le rayon incident et IN le rayon réfléchi. Le temps employé par la lumière pour suivre le chemin MIN est égal à l'unité de temps. En effet, ce temps est égal à $\frac{MI}{V} + \frac{NI}{V}$

Or les triangles semblables BMI et BAH donnent

$$\frac{MI}{V} = \frac{BI}{BH}$$

De même HIN et HBT donnent

$$\frac{NI}{V} = \frac{HI}{BH}$$

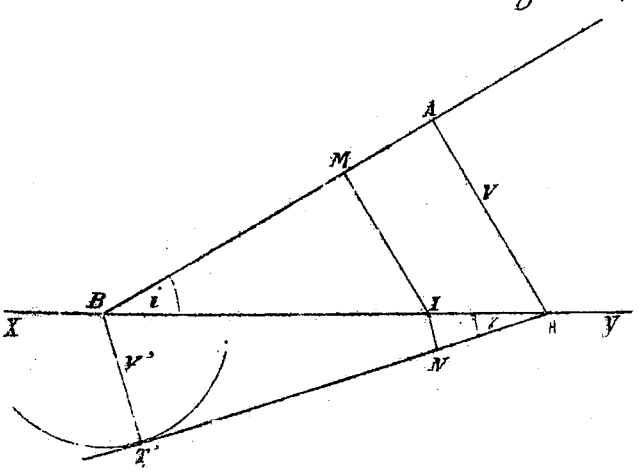
Donc $\frac{MI}{V} + \frac{NI}{V} = \frac{BI + HI}{BH} = 1$

La lumière qui part d'un point quelconque M de l'onde incidente arrive au bout d'une seconde en un point N du plan HT. Donc les chemins parcourus entre les divers points de l'onde incidente et le plan HT sont tautochrones ; le plan dont la trace est HT est donc l'onde réfléchie.

La démonstration du théorème nous donne en même temps la manière de construire l'onde réfléchie.

Lois de la réfraction.

226. — Soit une surface réfringente plane XY séparant deux milieux dans lesquels la vitesse de la lumière a respectivement pour valeurs V et V'



Considérons une onde plane incidente AB,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

et soit A le point de cette onde tel que le chemin AH compté sur la normale à l'onde soit parcouru pendant l'unité de temps.

Cherchons la position de l'onde au bout du temps 1. Le point H est évidemment un point de cette onde. D'autre part l'ébranlement parti de B se trouve au bout du temps 1 sur une sphère dont le centre est B et le rayon V'. Menons la tangente HT' à cette sphère. Je dis que HT' est la trace sur le plan du tableau du plan de l'onde réfractée.

Considérons un point M sur le front de l'onde AB. Le rayon qui passe par ce point est MIN. Je dis que le chemin MI + IN est parcouru en une seconde.

Le temps employé à parcourir ce chemin est en effet $\frac{MI}{V} + \frac{IN}{V'}$.

Or les triangles semblables BMI, BAH donnent

$$\frac{MI}{V} = \frac{BI}{BH};$$

de même HIN, HBT donnent

$$\frac{NI}{V'} = \frac{IH}{BH}$$

Donc

$$\frac{MI}{V} + \frac{NI}{V'} = \frac{BI + IH}{BH} = 1$$

Donc les chemins parcourus par la lumière entre AB et HT sont tautochrones. Donc HT est la trace du plan de l'onde réfractée.

On en déduit facilement la construction de l'onde réfractée.

Relation entre les vitesses de la lumière dans deux milieux et l'indice de réfraction relatif de ces milieux

297. — Les triangles ABH et HBT' donnent

$$V = HB \sin i$$

$$V' = HB \sin r$$

d'où $\frac{V}{V'} = \frac{\sin i}{\sin r} = m$

m désignant l'indice de réfraction du second milieu par rapport au premier.

Donc l'indice de réfraction d'un milieu II par rapport à un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

milieu I est égal au rapport des vitesses de la lumière dans le milieu I et dans le milieu II.

C'est une proportion sur laquelle nous nous sommes déjà appuyés (§ 215).

Diffraction.

228. — Dans l'optique géométrique, on considère la lumière comme formée de rayons rectilignes, et on admet en conséquence l'existence d'une ombre géométrique limitée par un contour qui est net quand la source est un point. Dans la théorie des ondulations, il n'en est plus de même : le rayon n'a plus de signification physique ; l'onde seule existe, et l'on doit prévoir que l'onde lumineuse se comportera comme l'onde sonore qui contourne en partie les obstacles mis sur son trajet.

C'est en effet ce qui a lieu ; l'expérience montre que la lumière s'infléchit au voisinage d'un écran, et qu'on ne peut considérer sa propagation comme rectiligne. Cette déviation subie par la lumière au voisinage d'un écran s'appelle diffraction.

En vertu de la diffraction, il se forme des franges lumineuses à l'intérieur de l'ombre géométrique, et des franges obscures dans la partie qui devrait être lumineuse d'après les lois de la propagation rectiligne. C'est ainsi qu'un trou très fin, pratiqué dans le volet d'une chambre obscure est visible des différents points de la chambre, sans qu'il soit nécessaire de mettre l'œil sur le trajet de la droite qui passe par la source lumineuse et par l'ouverture.

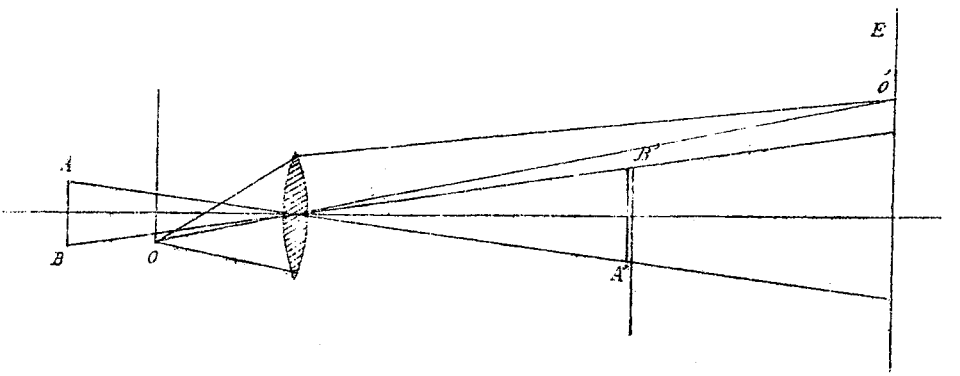
Premier dispositif pour montrer les phénomènes de diffraction.

229. — Pour mettre en évidence les phénomènes de diffraction, nous allons employer en premier lieu un dispositif qui élimine du faisceau lumineux tous les rayons qui obéissent aux lois de l'optique géométrique, pour ne laisser subsister que ceux que nous voulons étudier, ceux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

qui ont été diffractés

Prenons pour source lumineuse une fente rectangulaire étroite AB pratiquée dans un écran. Une lentille convergente donne de cette surface une image réelle et renversée A'B'. Plaçons dans le plan où se forme cette image A'B'



un écran opaque interceptant tous les rayons qui vont former l'image A'B'. Alors le faisceau lumineux est totalement arrêté : un écran E placé au delà de A'B' reste complètement obscur

Plaçons maintenant en O entre la source AB et la lentille L un corps opaque

S'il arrive que l'interposition de ce corps ait pour effet de dévier les rayons qui passent au voisinage de ses bords, ces rayons après avoir traversé la lentille L cessent d'être arrêtés par A'B'; ils vont former quelque part dans l'espace l'image des points où la diffraction s'est produite; en déplaçant convenablement l'écran E, on obtiendra sur cet écran l'image de tous ces points. L'expérience montre en effet qu'on obtient en E l'image nette des bords de O; l'apparence est la même que si ces bords étaient soulignés par une ligne de feu.

230. — On varie l'expérience en changeant la forme de O.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

1° L'objet O est un écran percé d'une fente quelconque. On voit en E apparaître l'image tant des bords de l'écran que de la fente qu'on y a pratiquée, sous forme d'une ligne lumineuse sur fond noir.

2° L'objet O est un blaireau ; chacun des poils du blaireau fait ici l'office d'écran opaque, et dévie les rayons qui tombent sur lui : on voit en E l'image lumineuse du blaireau sur fond noir.

3° On fait tomber en O dans le faisceau lumineux de la poudre de charbon qui a traversé un tamis. Sur l'écran E le phénomène se traduit avec l'apparence d'une pluie lumineuse.

4° On allume en O une lampe à essence de térébenthine. Par la combustion incomplète de ce carbure, on obtient une flamme fuligineuse, fortement chargée de parcelles de carbone. La colonne de fumée qui en résulte se traduit sur l'écran E par une colonne lumineuse.

231. — La méthode que nous venons d'employer est d'un usage général : on peut s'en servir toutes les fois que l'on veut isoler ou mettre en évidence au sein d'un faisceau, les rayons qui ont subi une déviation anomale.

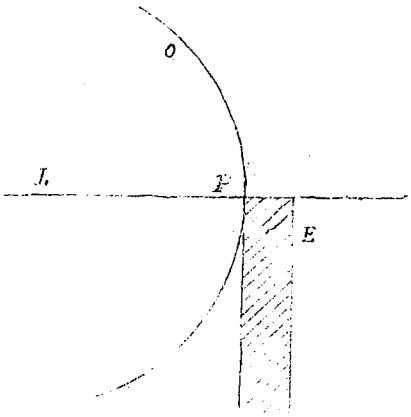
Supposons, par exemple, que l'on veuille vérifier si une lame de verre est homogène. On la place en O après avoir réglé la position de l'écran A'B' de façon à obtenir l'obscurité complète sur l'écran E. Déplaçons maintenant la lame. Si toutes les parties de la lame qui viennent successivement en O sont identiques, l'obscurité subsiste sur l'écran E. Si, au contraire, on amène en O une région présentant des défauts, les rayons lumineux sont déviés et l'on voit apparaître en E sur fond noir l'image lumineuse des défauts de la lame de verre.

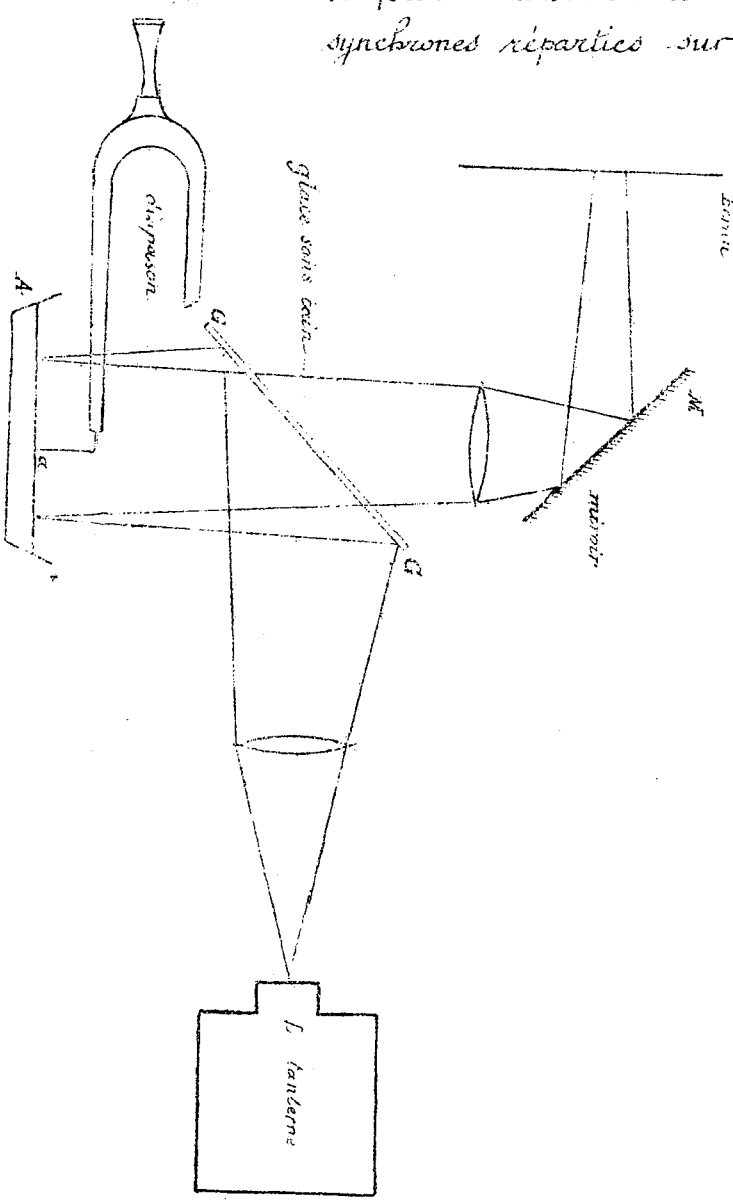
On remarque que cette méthode est identique au fond à celle que Foucault a employée pour vérifier la courbure d'un miroir.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Théorie de la diffraction

239. — Lorsqu'une onde lumineuse O rencontre un écran E qui intercepte une portion de cette onde, le reste de cette onde n'en subsiste pas moins. La partie de l'onde ainsi conservée est le lieu géométrique des points vibrants qui transmettent leur mouvement au milieu situé au delà de l'écran comme le feraient autant de sources lumineuses synchrones réparties sur la



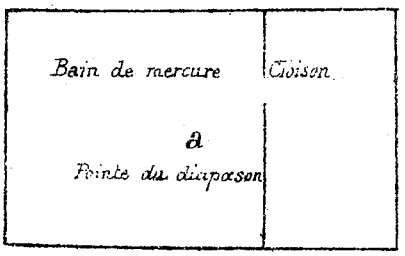


Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

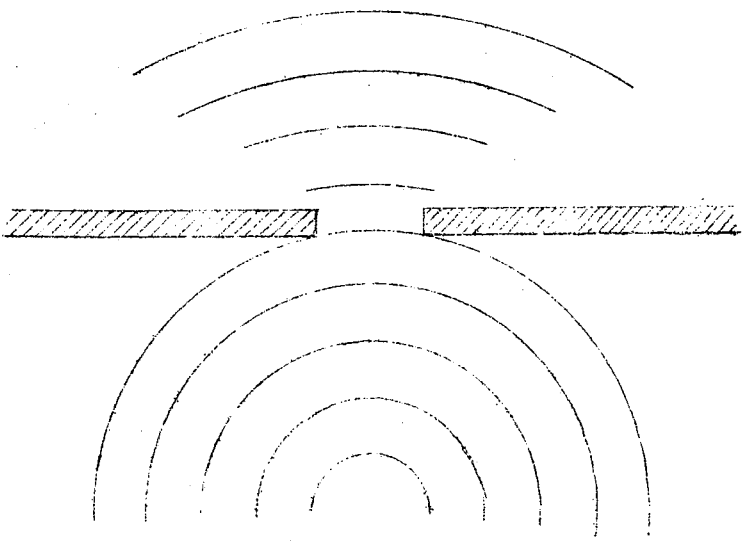
surface. Les points du milieu situés dans l'ombre géométrique reçoivent une partie de ce mouvement vibratoire, c'est-à-dire qu'ils reçoivent une partie de la lumière.

On considère donc à chaque instant l'onde lumineuse comme le lieu géométrique d'une infinité de sources synchrones, dont l'action résultante sur un point pris au delà fournit l'intensité lumineuse en ce point. Cette considération qui résulte évidemment de l'hypothèse même des ondulations s'appelle le principe de Huygens.

233. — Pour figurer aux yeux cette propagation des ondes et montrer leur épanouissement au delà d'une petite ouverture, nous emploierons une disposition déjà indiquée pour montrer l'interférence des ondes (§ 192).



Sur la surface d'un bain de mercure nous déterminons la formation d'un système d'ondes par le mouvement vibratoire d'un diapason et nous étudions leur mouvement par la stroboscopie. Ces ondes dont l'image est projetée sur un écran sont

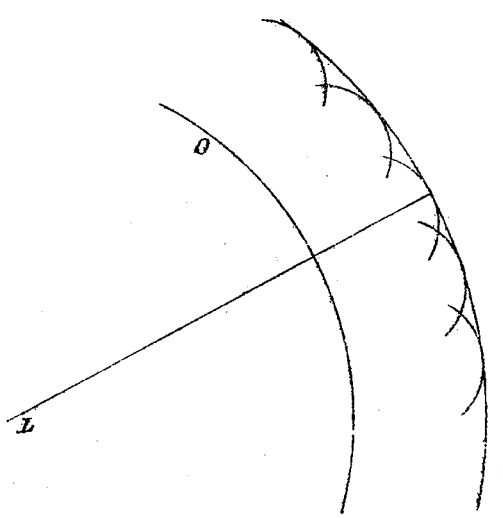


Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

circulaires. Plaçons dans la cuvette une cloison percée d'une ouverture. Les ondes sont interceptées par la cloison, mais les différents points de l'ouverture agissent comme des centres d'ébranlement. On voit des ondes naître de l'ouverture et se propager au-delà : elles ne restent pas comprises à l'intérieur du cône qui a pour base l'ouverture et pour sommet la source vibrante.

234. — Soit une source lumineuse L ; nous supposerons que c'est une fente qui a la forme d'un rectangle allongé. L'onde qui part de cette fente est cylindrique ; la propagation du mouvement vibratoire de la source se fait de la même façon dans un plan quelconque passant par la source.

Prenons comme plan du tableau un plan normal à la fente ; soit L la trace de cette fente, O la trace d'une onde sur le plan du tableau. Chaque point de l'onde O peut être considéré comme un centre d'ébranlement : autrement dit, l'onde peut être regardée comme constituée par une série de sources lumineuses, toutes synchrones, c'est-à-dire ayant la même phase (§. 220) ; chacune de ces sources est l'origine d'une nouvelle onde. Au bout du temps θ quelconque, toutes les ondes ainsi engendrées sont respectivement à la même distance du point qui leur a donné naissance. Le mouvement vibratoire se trouve donc sur une infinité de cylindres de même rayon et dont les axes sont les différentes génératrices de l'onde O. Au bout du temps θ considéré, l'onde lumineuse est constituée par la surface enveloppe de toutes ces

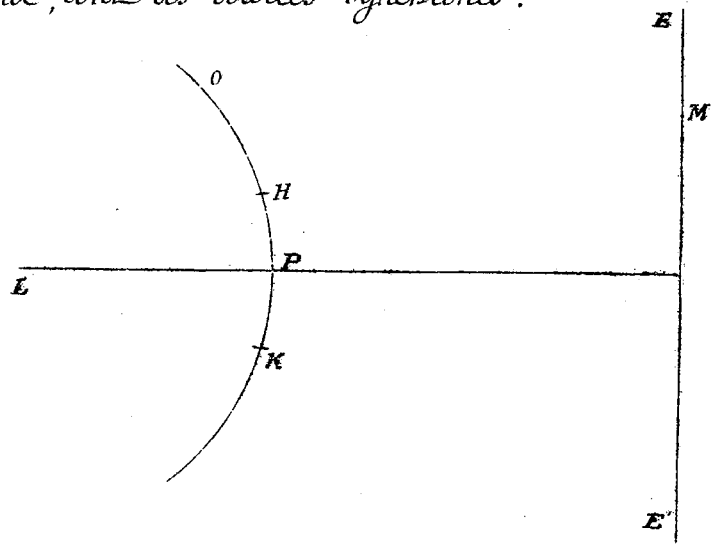


Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

surfaces cylindriques : cette surface enveloppe est un cylindre dont l'axe a sa trace en L, mais dont le rayon est égal à celui du cylindre O augmenté de $V\theta$*.

235. — Ceci posé, considérons une onde O émanant de la source L et proposons-nous de chercher l'amplitude en un point quelconque M de l'écran EE'.

L'amplitude en M est la résultante des amplitudes qui proviennent des différents points A, B, C, - etc qui, appartenant à la même onde, sont des sources synchrones.



Si on intercepte une partie de l'onde HK par exemple par un écran, on supprime une série de sources lumineuses, l'amplitude en M résulte des mouvements de toutes les parties de l'onde qui subsistent.

Le calcul de l'amplitude en M revient donc à trouver la résultante des amplitudes qui proviennent de tous les points d'une surface donnée. — Ce problème n'est autre que celui des interférences : mais, tandis que pour les interférences, nous ne considérions que deux sources, nous avons ici une infinité de sources.

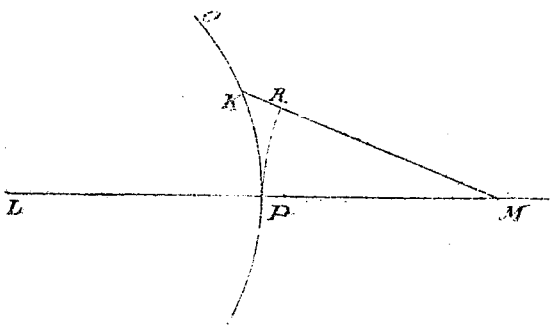
---

*Remarque. Si chacune de ces ondes émanées d'un point de O existait seule, sa surface toute entière serait le siège d'un mouvement vibratoire. Mais lorsque toutes ces ondes existent à la fois, la résultante des mouvements qu'elles impriment est nulle pour tout point situé en deçà de la surface enveloppe, ainsi qu'on le verra plus loin.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La résultante cherchée est une somme algébrique, c'est-à-dire la somme de termes qui n'ont pas même signe. En effet les différents points de l'onde O envoient en M des élongations qui ne sont pas concordantes.

Soit en effet P l'intersection du front de l'onde O avec la droite LM ; le point P est le pôle de l'onde. P envoie en M une élongation qui a un signe déterminé. Un autre point K convenablement placé à la surface de l'onde O envoie en M une élongation de signe contraire à celle qui provient de P.



En effet aux points P et K qui appartiennent à une même onde ; la phase est la même ; à l'arrivée en M, les mouvements vibratoires de P et K ont parcouru des chemins inégaux car $PM < KM$; donc les vibrations qui arrivent en M présentent une différence de marche $\delta = RK$ d'autant plus grande que le point K est plus loin du point P

Si $\delta = \frac{\lambda}{2}$ ou en général si $\delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, les élongations à l'arrivée en M sont de signes contraires ;

Si $\delta = 2n\frac{\lambda}{2}$, les élongations à l'arrivée en M sont au contraire de même signe.

Il est évident dès lors que certains points de l'onde envoient en M des élongations concordantes, tandis que les autres y envoient des élongations discordantes.

236. — Il résulte de là d'une manière générale l'existence de maxima et de minima sur l'écran, c'est-à-dire de franges de diffraction car l'adjonction de termes négatifs à la somme fera passer de valeur d'un maximum à un minimum

En particulier si à l'aide d'écrans convenables, on supprime les parties de l'onde qui envoient en M des élongations

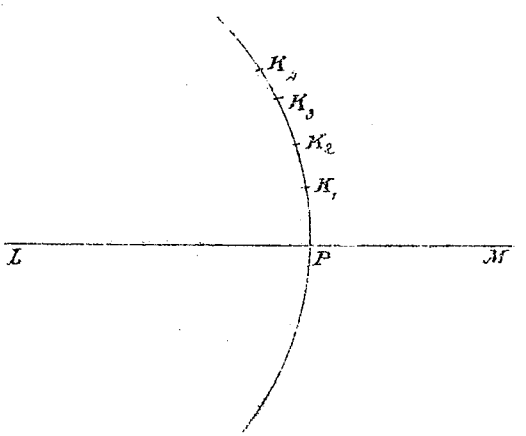
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

de signes contraires à celles envoyées par le point P on doit pouvoir rendre l'éclairement de M plus intense que si, les écrans étant supprimés, l'onde agissait toute entière.

L'expérience montre en effet qu'à l'aide d'un système d'écrans opaques, on peut accroître l'intensité lumineuse en un point comme on le ferait au moyen d'une lentille.

237. — L'intensité lumineuse est exprimée par une série alternée.

Si l'on considère sur le front de l'onde le point P, pôle de l'onde par rapport à un point extérieur M, ainsi que le système des points $K_1, K_2, K_3, \ldots$ définis par la condition que leurs distances au point M aillent en croissant de $\frac{\lambda}{2}$, il est clair que l'amplitude résultante due à chacun de ces points et à la région avoisinante sur l'onde change de signe quand on passe d'un point au suivant et cela en vertu de la différence de marche $\frac{\lambda}{2}$; c'est-à-dire que si le point P et la région avoisinante de l'onde produisent en M l'amplitude positive u_0, le point K_1 produit l'amplitude $-u_1$, le point K_2 l'amplitude $+u_2$ et ainsi de suite. Toutes les parties de l'onde au-dessus du point P produisent donc une amplitude représentée par la somme de la série alternée.

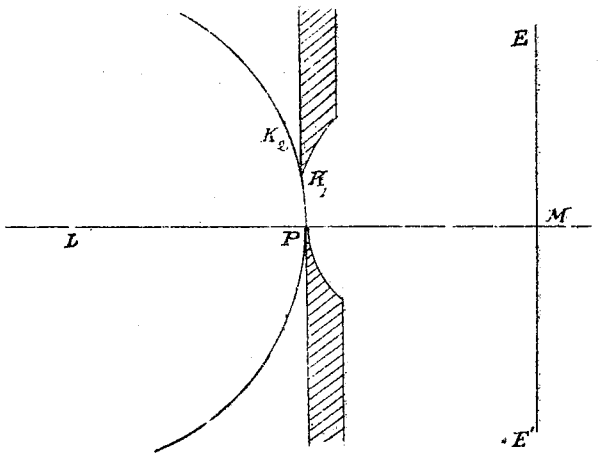


$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 -$$

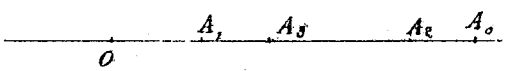
Cette série est convergente. Ce fait résulte de sa signification physique; il résulte également de ce que la valeur absolue des termes de cette série alternée va en diminuant ainsi qu'on le verra plus loin.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

238. — Cela posé, on voit ce qui arrive lorsqu'on découvre graduellement les demi-ondes supérieures en soulevant un écran placé d'abord au point P. La première zône, celle du point P, agit d'abord seule et on obtient une amplitude égale à u_0. Puis le point K_1 étant découvert, le terme u_1 viendra se retrancher du précédent ; en continuant, on formera successivement les sommes partielles u_0, $u_0 - u_1$, $u_0 - u_1 + u_2$, ...



239. — On peut ainsi représenter graphiquement les valeurs de ces sommes partielles par des longueurs portées sur une droite à partir d'une origine O. Le premier terme u_0 est représenté par $OA_0 = u_0$. A partir du point A_0, nous porterons dans le sens A_0O une longueur A_0A_1 égale à u_1. La longueur OA_1 représente évidemment $u_0 - u_1$; comme $u_1 < u_0$ le point A_1 se trouve entre O et A_0. A partir de A_1 portons dans le même sens que OA la longueur u_2 ; nous obtenons le point A_2 ; OA_2 représente la somme $u_0 - u_1 + u_2$. Et ainsi de suite.



Les sommes partielles ainsi obtenues passent donc par une série de maxima. Ces maxima vont en diminuant en valeur absolue ; les minima successifs vont au contraire en croissant en valeur absolue. Les uns et les autres

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

tendent vers la somme de la série qui représente l'amplitude due à la demi-onde toute entière.

L'expérience vérifie ces prévisions. En soulevant l'écran graduellement, on voit en effet l'intensité lumineuse en M passer par une série de maxima et de minima qui présentent les particularités prévues par la théorie.

Théorème relatif aux systèmes d'écrans complémentaires.

240. — On peut varier à l'infini la disposition des fentes et des écrans qui modifient l'intensité lumineuse au point M. Une remarque évidente permet de réduire de moitié le nombre des problèmes distincts qui peuvent ainsi se présenter.

Appelons complémentaires deux systèmes d'écrans tels que les ouvertures dans l'un aient précisément même forme et même position que les écrans dans l'autre. Je dis que si l'on superpose les intensités dues à ces deux systèmes d'écrans pris séparément, on obtient exactement la même intensité que si l'on faisait agir l'onde toute entière, en supprimant tous les écrans.

En effet toutes les actions supprimées par les écrans de l'un des systèmes seraient rétablies par les ouvertures du système complémentaire.

Les intensités produites par les deux systèmes considérés séparément sont donc complémentaires; leur superposition donne l'intensité due à l'onde toute entière.

C'est ainsi par exemple que l'intensité due à un écran placé au pôle de l'onde est complémentaire de l'intensité due à une fente de même largeur placée également au pôle.

Calcul des différences de marche relatives aux divers points de l'onde.

241. — Quel que soit le phénomène de diffraction dont on veuille faire la théorie, le problème revient à trouver pour un point M quelconque l'amplitude résultante

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

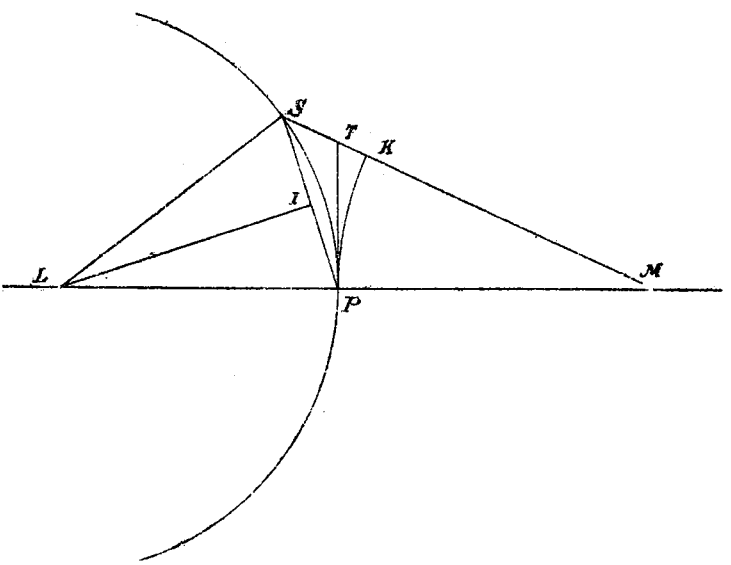
due aux divers points de l'onde lumineuse qui n'ont pas été supprimés par des écrans. Pour calculer cette amplitude résultante par la règle de Fresnel, il faut connaître les différences de phase et par conséquent les différences de marche relatives aux amplitudes composantes.

Nous allons donc d'abord calculer cette différence de marche pour un point S quelconque pris à la surface de l'onde.

La position de ce point S sur l'onde peut être définie par sa distance $SP = s$ au pôle de l'onde P, cette distance étant comptée sur la circonférence qui forme le front de l'onde.

Les sources S et P appartenant à une même onde sont synchrones ; la différence de marche des vibrations qu'elles envoient en M est $\delta = SM - PM$. C'est cette quantité qu'il s'agit de calculer en fonction de s.

Par le point M, menons l'arc de cercle PK de rayon MP et la tangente PT à l'arc PS. Le triangle SPK peut être considéré comme rectangle en K. On a donc $\delta = SK = SP \sin SPK$



Pour des points S assez voisins du pôle P, on peut confondre la corde SP avec l'arc SP et le sinus de l'angle SPK avec l'arc ou l'angle au centre correspondant. Donc,

$$\delta = s \times SPK$$

D'ailleurs $\widehat{SPK} = \widehat{SPT} + \widehat{TPK}$

Menons la bissectrice LI de l'angle PLS.

Les angles ILP et SPT ayant leurs côtés perpendiculaires

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

sont égaux ; donc

$$SPT = \frac{PLS}{2}$$

Or $\quad PLS = \frac{SP}{LP} = \frac{s}{a}$

d'ou $\quad SPT = \frac{s}{2a}$

Le même raisonnement apprendrait que

$$TPK = \frac{s}{2b}$$

a et b étant les distances respectives des points L et M au pôle de l'onde P. On a donc

$$\delta = s\left(\frac{s}{2a} + \frac{s}{2b}\right) = \frac{(a+b)s^2}{2ab}$$

Pour trouver l'amplitude résultante par la règle de Fresnel, il nous faut calculer la différence de phase. La différence de marche étant δ, la différence de phase est $2\pi\frac{\delta}{\lambda}$

On

$$2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\pi(a+b)s^2}{ab\lambda}$$

Cette formule est applicable quelle que soit la position de S à la surface de l'onde, à condition toutefois que l'angle PLS soit assez petit pour pouvoir être confondu avec sa tangente.

242. — Deux points de l'onde P et S envoient en M des amplitudes de signes contraires, si la différence de phase des vibrations issues de ces deux points est égale à $(2n+1)\pi$ à l'arrivée en M.

Ces points S seront déterminés par la condition

$$\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda}s^2 = (2n+1)\pi$$

d'où $\quad s = \sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}$

Supposons que l'élongation venant de P soit positive à un instant donné. L'abscisse curviligne s_1 du point le plus voisin de P qui au même instant envoie en M des élongations négatives est obtenue en faisant $n = 0$

Donc $\quad s_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}$

Les autres points qui envoient des élongations négatives ont pour abscisses curvilignes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$s_3 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\ \sqrt{3}$$

$$s_5 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\ \sqrt{5}$$

$$s_{2n-1} = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\ \sqrt{2n-1}$$

Donc les abscisses curvilignes des points de l'onde qui envoient en M des amplitudes de signes contraires à celle qui provient du pôle sont entre elles comme les racines carrées des nombres impairs consécutifs.

La distance de deux de ces points décroît lorsque leur distance au pôle de l'onde croît. En effet

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)$$

ou

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}\right)$$

La fraction $\frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment; il en est de même de $s_{2n+1} - s_{2n-1}$.

243. — Deux points P et S de l'onde envoient en M des amplitudes de même signe si la différence de phase des vibrations issues de ces deux points est égale à $2n\pi$ à leur arrivée en M.

Les points S de l'onde, qui satisfont à cette condition seront déterminés par leur distance s' au pôle de l'onde. Cette distance satisfait à la relation

$$\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda}\, s'^2 = 2n\pi$$

d'où l'on tire

$$s' = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\ \sqrt{2n}$$

Donc les abscisses curvilignes des points de l'onde qui envoient en M des amplitudes de même signe que celle qui provient du pôle sont entre elles comme les racines carrées des nombres pairs consécutifs.

La distance de deux de ces points décroît quand leur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

distance au pôle de l'onde croît. En effet

$$s'_{2n} = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\ \sqrt{2n}$$

$$s'_{2(n+1)} = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\ \sqrt{2(n+1)}$$

d'où

$$s'_{2(n+1)} - s'_{2n} = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}\left(\sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2ab\lambda}{a+b}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

La fraction $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

Les points de l'onde qui envoient en M des élongations concordantes, sont intermédiaires entre ceux qui envoient en M des élongations discordantes.

Recherche de l'amplitude provenant de tous les points d'une même surface d'onde.

244. — Soit F le pôle de l'onde relativement à un point M. Sur le front de l'onde O, prenons des points S_1, S_2, S_3... infiniment voisins, et soient ds_1, ds_2, ds_3 etc, les arcs FS_1, S_1S_2, S_2S_3...

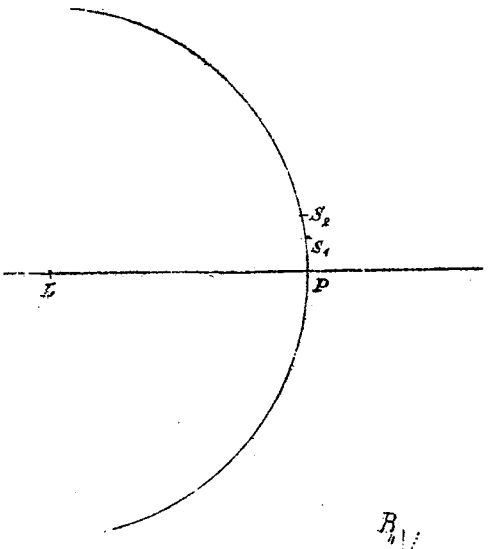
L'arc ds_1 étant infiniment petit, les différents points de cet arc envoient en M des vibrations de même phase que celle qui provient de F. L'amplitude résultante est évidemment proportionnelle à la longueur de l'arc ds_1.

Tous les points de l'arc infiniment petit $ds_2 = S_1S_2$ envoient en M des vibrations de même phase; mais cette phase diffère de la précédente d'une quantité infiniment petite $d\alpha$.

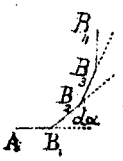
Pour trouver l'amplitude résultante relative aux deux arcs FS_1 et S_1S_2, on peut avoir recours, soit à la formule, soit à la construction graphique donnée par Fresnel pour trouver la résultante de deux ou plusieurs amplitudes composantes (§ 42). Nous ferons d'abord usage de la construction graphique, comme l'a fait M. Cornu.

Par un point A pris dans un plan, menons une droite AB_1 dont la longueur est proportionnelle à ds_1. Par l'extrémité B_1, dans une direction qui fait avec le prolongement de AB_1 un angle égal à la différence de phase $d\alpha$ entre les vibrations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

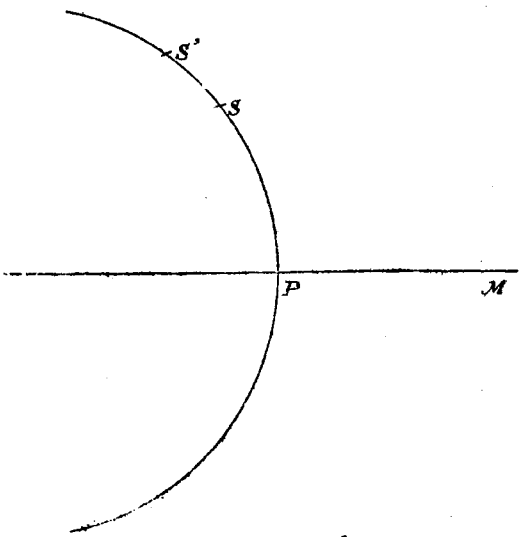


provenant de P et de S_1, menons une longueur $B_1 B_2$ proportionnelle à ds_2. La droite AB_2 est proportionnelle à l'amplitude résultant des différents points de la partie PS_2 de l'onde. Par le point B_2, dans une direction qui fait avec le prolongement de $B_1 B_2$ un angle infiniment petit égal à la différence de phase correspondante portons $B_2 B_3$ proportionnelle à $ds_3 = S_2 S_3$, et ainsi de suite.

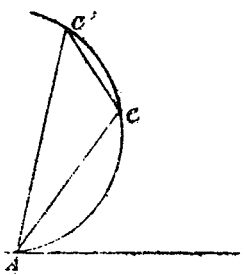


On obtiendra ainsi une ligne polygonale dont les côtés sont infiniment petits et forment entre eux des angles extérieurs infiniment petits, c'est-à-dire une ligne courbe.

Amplitude provenant d'une portion quelconque de l'onde.



245. — A chaque point S de l'onde correspond un point C sur la courbe de diffraction; l'arc PS compté sur le front de l'onde est égal à l'arc AC compté sur la courbe de diffraction. La droite AC est proportionnelle à l'amplitude en M provenant de tous les points de l'onde compris entre P et S.



De même la résultante des amplitudes provenant de la portion PS' de l'onde est représentée par AC', C' étant le point de la courbe de diffraction correspondant à S'.

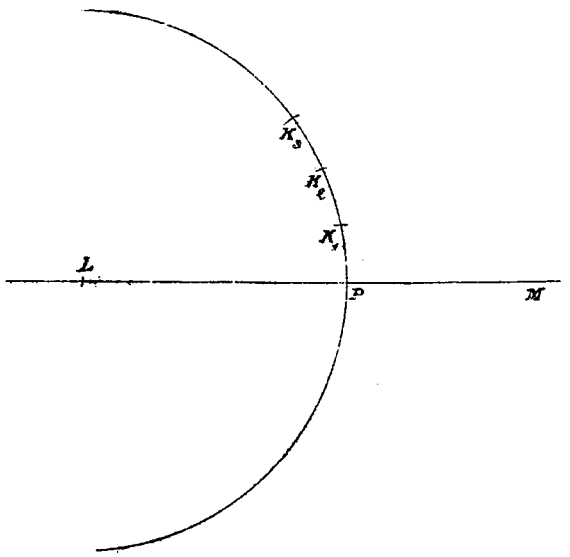
Enfin l'amplitude résultante relative à une portion finie SS' de la surface de l'onde

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

est représentée par la corde GG', somme géométrique des éléments de l'arc GG'.

Forme de la courbe de diffraction

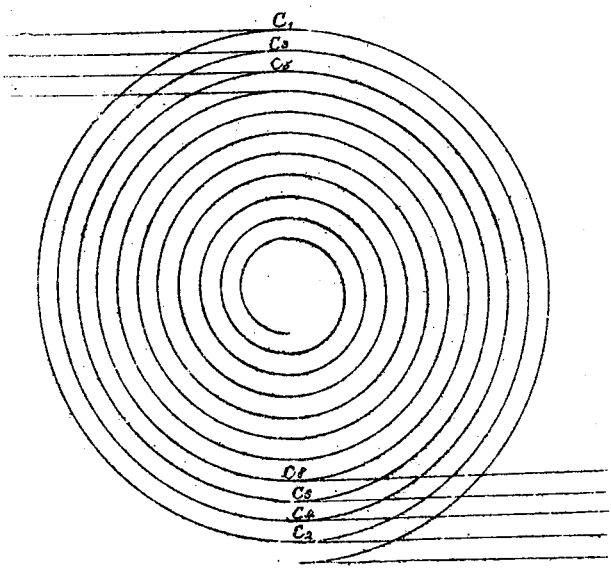
246. — De la construction même de la courbe, il résulte que la tangente en un point quelconque G de la courbe fait avec la tangente à l'origine A un angle égal à la différence de phase des vibrations provenant des points correspondants P et S de l'onde.



Cette propriété va nous permettre d'étudier la forme de la courbe de M. Cornu

Considérons d'abord les points K_1 K_3 K_5 ... de l'onde qui envoient en M des amplitudes de signe contraire à celle qui provient de P. La différence de phase entre la vibration provenant de P et celle provenant de K_1, K_3, K_5... a pour valeurs

$$\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots (2n+1)\pi.$$



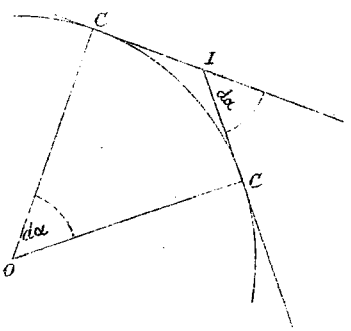
Donc les tangentes aux points correspondants C_1 C_3 C_5 ... de la courbe de diffraction devront faire avec la direction Ax de la tangente en A des angles égaux à $\pi, 3\pi, 5\pi$..., en d'autres termes les tangentes en C_1, C_3, C_5...

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

seront parallèles et de sens contraire à la tangente Ax.

De même aux points K, K_2, K_4, de l'onde qui envoient en M des amplitudes de même signe que celle qui provient de P correspondent des points C, C_2, C_4 de la courbe de Fresnel, tels que la tangente en ces points soit parallèle à la tangente en A et de même sens qu'elle.

247. — La courbe de M. Cornu a d'ailleurs la forme d'une spirale dont le rayon de courbure va en décroissant. En effet le rayon de courbure varie en raison inverse de la longueur de l'arc de courbe s.



Pour démontrer ce théorème considérons deux points C et C' infiniment voisins sur la courbe, tels que $CC' = ds$; menons les normales CO, $C'O$ à la courbe; leur point de rencontre O est le centre de courbure.

Ces deux normales font entre elles un angle $d\alpha$, qui est égal à l'angle des tangentes en C et C' (angle de contingence); si nous nous reportons à la construction de la courbe, nous voyons que $d\alpha$ n'est autre chose que la différence de phase entre les vibrations provenant de deux points de l'onde infiniment voisins. Donc

$$d\alpha = d\left[\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2\right]$$

ou

$$d\alpha = \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} 2s\,ds$$

Le rayon de courbure $R = OC$ satisfait à la relation

$$R\,d\alpha = ds$$

d'où

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ab\lambda}{2\pi(a+b)} \frac{1}{s}$$

Donc le rayon de courbure varie en raison inverse de s. La courbe définie par cette propriété tend vers un point asymptotique, lorsque s croît indéfiniment.

Cette propriété géométrique permet de construire la courbe, avec l'approximation que l'on désire, au moyen d'une

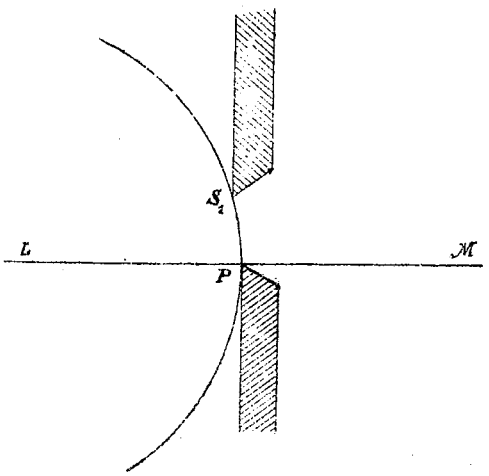
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

série d'arcs de cercle dont le rayon va en décroissant suivant la loi qui vient d'être démontrée.

Applications.

Effet produit par une ouverture de largeur variable placée au pôle de l'onde.

248. — Supposons qu'on place sur le trajet des ondes lumineuses un écran percé d'une ouverture dont un des bords est en P. L'autre bord est supposé mobile et s'écarte peu à peu du point P



L'amplitude résultante en M est représentée par le rayon vecteur de la courbe de M. Cornu.

D'après la forme spiraloïde de cette courbe, on voit que lorsque la largeur de l'ouverture va en croissant à partir de zéro, ce rayon vecteur va d'abord en croissant, puis il passe par une série de maxima et de minima AC_1 (Maximum), AC_2 (Minimum) AC_3 (Max.) AC_4 (Min.) etc.

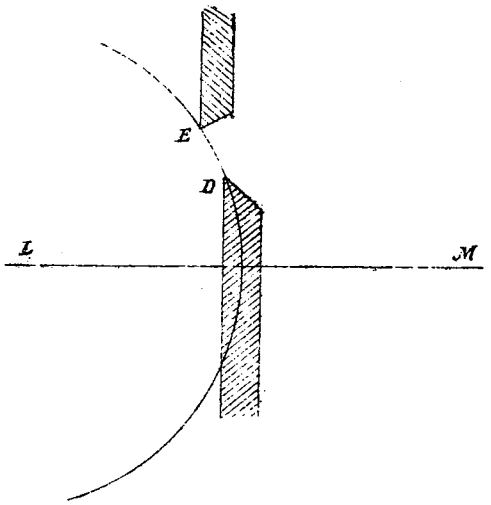
Les amplitudes correspondant aux maxima et aux minima se rapprochent à mesure que la largeur de l'ouverture croît; la différence de ces amplitudes tend vers 0. Lorsque l'ouverture devient supérieure au rayon de la surface de l'onde, l'amplitude totale est représentée par le rayon vecteur AI correspondant au point asymptotique.

Cas où l'ouverture n'est pas au pôle de l'onde

249. — Considérons maintenant une ouverture quelconque allant du point D au point E de l'onde, le point D n'étant pas le pôle de l'onde par rapport à M.

Cherchons sur la courbe de M. Cornu les points correspondants à D et E; soient D_1 et E_1 ces points.

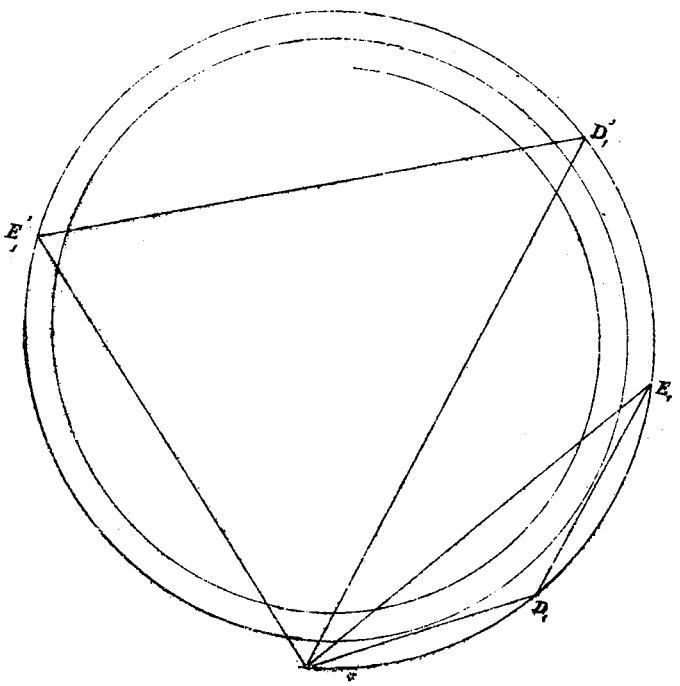
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



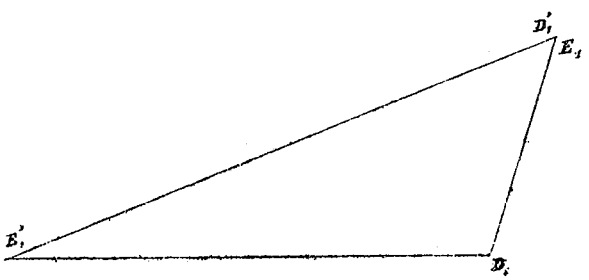
La corde $D_1 E_1$ représente la résultante des vibrations reçues par M et provenant de tous les points de DE.

Cas d'un nombre quelconque d'ouvertures.

250. — A cette ouverture DE ajoutons en une seconde $D'E'$; celle-ci, si elle était seule, produirait en M une amplitude égale à la corde $D'_1 E'_1$ qui a pour extrémités les points D'_1 et E'_1 de la courbe de Fresnel, correspondants aux points D' et E' de l'onde.



Les deux ouvertures fonctionnant simultanément, on a en M une amplitude qui est la résultante de $D_1 E_1$ et $D'_1 E'_1$; cette résultante est représentée par la résultante géométrique $D_1 E'_1$ des deux droites $D_1 E_1$ et $D'_1 E'_1$ égales

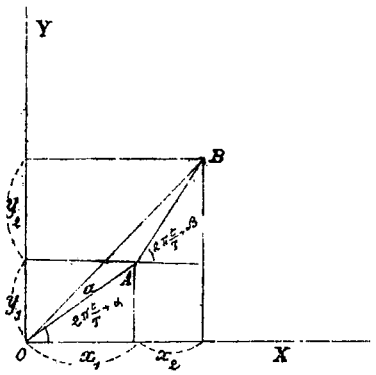


Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

et parallèles aux amplitudes composantes.

Calcul de l'intensité de la lumière diffractée.

251. — Nous avons appris à construire l'amplitude résultante par la règle de Fresnel (§ 108). Les valeurs des composantes X et Y de l'amplitude résultante se déduisent immédiatement de cette construction.



On a en effet

$$X = x_1 + x_2 = a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\alpha\right) + b\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta\right)$$

$$Y = y_1 + y_2 = a\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\alpha\right) + b\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\beta\right)$$

Or on a vu qu'en désignant par $\left(2\pi\frac{t}{T}+\gamma\right)$ l'angle BOX, on avait

$$X = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\gamma\right)$$

$$Y = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\gamma\right)$$

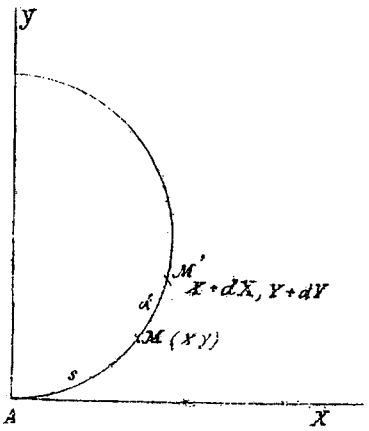
Avec

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha-\beta)$$

et $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta}$.

On peut étendre les formules à la composition d'un nombre quelconque de vibrations de même période.

En appliquant ces formules au cas de la diffraction, on obtiendra donc les coordonnées X et Y d'un point S quelconque de la courbe de M. Cornu.



Soit encore s la longueur de l'arc compté sur cette courbe à partir de son origine.

Donnons à s un accroissement ds; soient (X+dX) et (Y+dY) les coordonnées du point M' voisin de M.

On a évidemment

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$dX = ds \cos (MM', AX)$$
$$dY = ds \sin (MM', AX)$$

Or l'angle de MM' avec AX est précisément égal à la différence de phase des vibrations envoyées par les points de l'onde correspondant à A et M. Il en résulte (§ 241) que

$$(MM', AX) = \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

Donc
$$dX = ds \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$
$$dY = ds \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

Par suite, si l'onde est interceptée par un écran percé d'une ouverture entre les points d'abscisse curviligne 0 et s_1, les composantes X_1 et Y_1 de l'amplitude résultante seront

$$X_1 = \int_0^{s_1} ds \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

$$Y_1 = \int_0^{s_1} ds \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

Si l'écran était percé d'une ouverture comprise entre les points d'abscisses curvilignes 0 et s_2, les composantes X_2 et Y_2 de l'amplitude résultante seraient

$$X_2 = \int_0^{s_2} ds \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

$$Y_2 = \int_0^{s_2} ds \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

Enfin si l'ouverture est comprise entre les points d'abscisses s_1 et s_2, l'amplitude résultante est la différence géométrique entre les amplitudes provenant des arcs $(0, S_2)$ et $(0, S_1)$. Les composantes sont les différences entre les composantes X_1 et X_2, d'une part, Y_1 et Y_2 d'autre part

$$X = X_2 - X_1 = \int_0^{s_2} - \int_0^{s_1} = \int_0^{s_2} + \int_{s_1}^{0} = \int_{s_1}^{s_2}$$

ou
$$X = \int_{s_1}^{s_2} ds \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

$$Y = \int_{s_1}^{s_2} ds \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

Si on a un nombre quelconque d'ouvertures, on calculera

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

séparément la valeur de X et de Y résultant de chacune d'entre elles.

En résumé au point de vue analytique, la question revient à calculer les intégrales

$$\int ds \cos \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

et

$$\int ds \sin \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2$$

entre des limites déterminées.

Intégrales de Fresnel.

252. — Le facteur $\frac{a+b}{ab\lambda}$ dépend de la position du système diffringent (écran ou ouverture) par rapport à la source et à l'écran M; c'est donc un facteur particulier à chaque problème considéré. Afin de faire sortir ce facteur du signe d'intégration, posons

$$\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} s^2 = v^2$$

Il vient

$$s = v\sqrt{\frac{ab\lambda}{\pi(a+b)}}$$

$$ds = dv\sqrt{\frac{ab\lambda}{\pi(a+b)}}$$

et par suite

$$X = \sqrt{\frac{ab\lambda}{\pi(a+b)}} \int \cos v^2 dv$$

$$Y = \sqrt{\frac{ab\lambda}{\pi(a+b)}} \int \sin v^2 dv$$

Les intégrales doivent être prises entre les limites des valeurs de v correspondant aux limites des valeurs de s.

Ces intégrales

$$\int \cos v^2 \, dv$$

et

$$\int \sin v^2 \, dv$$

ont reçu le nom d'Intégrales de Fresnel.

On ne connait aucune méthode pour trouver l'intégrale indéfinie des quantités $\cos v^2 dv$, ou $\sin v^2 dv$. On peut toutefois calculer les valeurs numériques approchées des intégrales définies prises entre certaines limites. Fresnel a donné une table de ces valeurs numériques.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Limite supérieure v de l'intégrale	Valeur de $\int_0^v dv \cos v^2$	Valeur de $\int_0^v dv \sin v^2$
0,1	. . . . .	. . . . .
0,2	. . . . .	. . . . .

Réseaux

253. — Parmi les phénomènes que permet d'expliquer la théorie de la diffraction, le plus important au point de vue de ses applications est celui des réseaux.

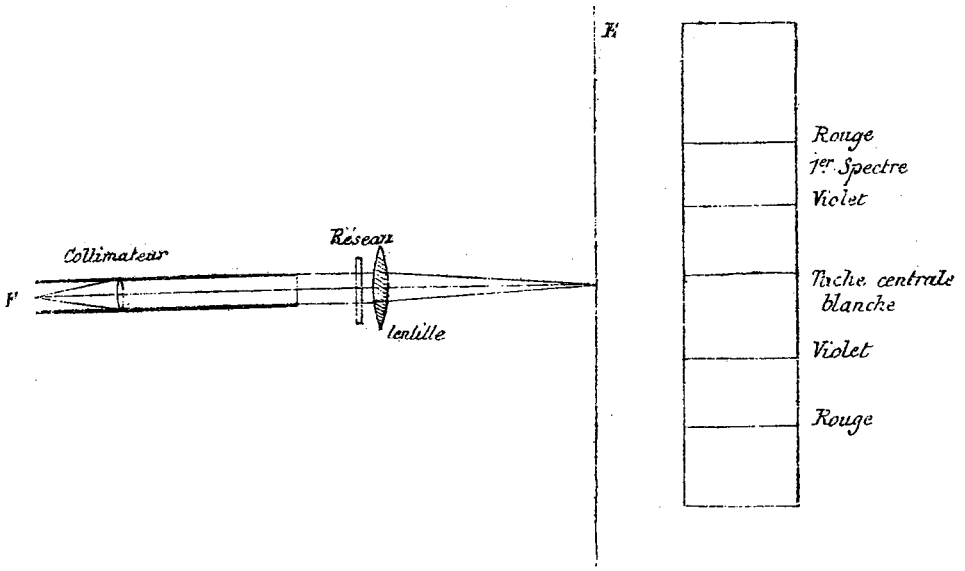
On appelle réseau un écran opaque percé d'un système de fentes parallèles et disposées systématiquement de manière à produire un phénomène optique déterminé.

Les réseaux les plus fréquemment employés sont les réseaux parallèles inventés par Frauenhofer. Ces réseaux sont constitués par une série de fentes rectilignes et équidistantes très rapprochées. Les premiers réseaux construits par Frauenhofer se composaient d'une série de fils fins tendus sur deux vis parallèles et de même pas.

Aujourd'hui on emploie des réseaux par transparence et des réseaux par réflexion. On obtient un réseau par transparence en prenant une lame de verre sur une face de laquelle on a tracé à l'aide d'une machine à diviser une série de traits équidistants. L'intervalle entre deux traits demeure transparent, les traits eux mêmes forment les parties opaques du réseau.

254. — L'expérience montre d'abord qu'un réseau a des propriétés analogues à celles d'un prisme. Sur le trajet d'un faisceau de lumière blanche parallèle fourni par un collimateur à fente, on place un réseau, normalement aux rayons. On obtient alors sur un écran éloigné un phénomène composé d'une tache blanche centrale, placée sur le prolongement du faisceau incident. De chaque côté de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



de cette tache blanche centrale, on observe des spectres présentant le violet du côté de la frange centrale et le rouge en dehors. Dans les spectres ainsi obtenus, la déviation d'une radiation déterminée est indépendante de la nature de la substance qui constitue le réseau. Aussi ces spectres ont-ils reçu le nom de spectres normaux.

Pour avoir un phénomène net, il convient d'opérer comme dans le cas d'un prisme, c'est-à-dire de mettre l'écran E dans le plan focal d'une lentille convergente. La tache centrale est alors remplacée par une image nette de la fente du collimateur et les spectres des différents ordres deviennent également nets. Le phénomène produit sur l'écran est alors semblable à celui que l'on obtiendrait sur un écran E placé à l'infini.

Nous ferons la théorie du phénomène ainsi produit, en commençant par une théorie élémentaire due à Babinet.

Théorie élémentaire des réseaux.

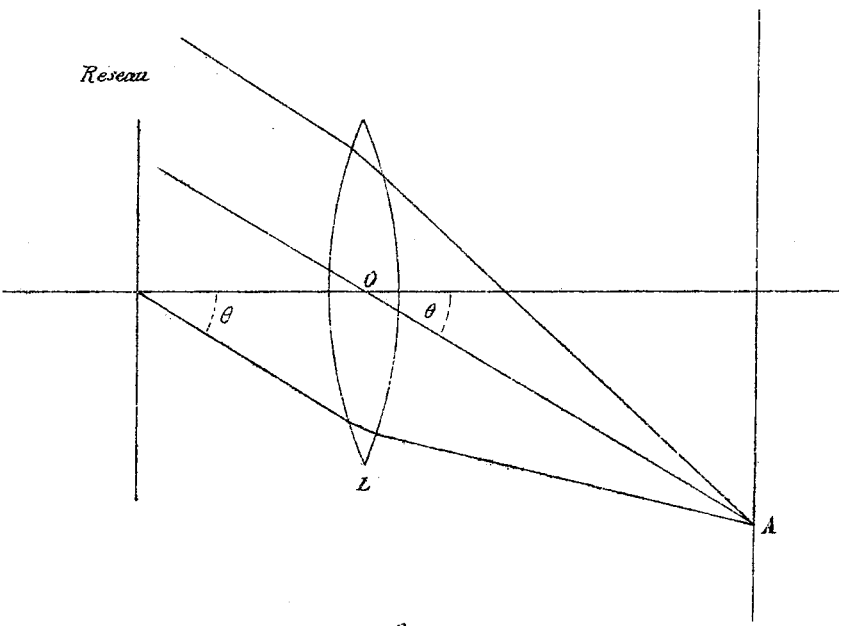
255. — Un réseau se compose de parties successivement transparentes et opaques: les traits constituent la partie opaque, les parties non rayées sont transparentes. Nous désignerons par a la largeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

de chacune des parties transparentes, par b la la qeur de chacune des parties opaques.

Supposons qu'un faisceau de rayons parallèles, c'est-à-dire une onde plane tombe sur le réseau. Nous nous proposons de trouver l'amplitude de la vibration envoyée dans une direction donnée. Cette amplitude est la résultante des amplitudes envoyées dans la même direction par toutes les fentes; C'est cette résultante que l'expérience telle que nous l'avons montrée nous fournit.

En effet derrière le réseau nous avons place une lentille convergente. Considérons les rayons émanés des diverses fentes du réseau dans la direction qui fait l'angle θ avec le plan du réseau; ces rayons étant parallèles entre eux vont converger en un point A.



A est l'intersection de l'axe secondaire de direction θ avec le plan focal principal. Je dis que les différents rayons qui viennent converger en A y arrivent en présentant les mêmes différences de marche que celles qu'ils avaient sur un plan perpendiculaire à leur direction avant leur entrée dans la lentille. En effet, ainsi que nous l'avons vu plus haut (§ 223), la lentille convergente étant supposée aplanétique par rapport à un point de son plan focal principal n'introduit aucune différence de marche entre les rayons qui la traversent.

La lentille L fonctionne donc ici comme un appareil qui totaliserait en A les amplitudes de toutes les vibrations se propageant dans la direction parallèle à OA. La grandeur de la résultante ne dépend d'ailleurs que des différences de marche des vibrations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

composantes à leur arrivée sur un plan quelconque perpendiculaire à OA. — Nous serons donc ramenés à évaluer ces différences de marche.

Le raisonnement est basé sur l'hypothèse que les vibrations sont synchrones à l'arrivée sur le plan du réseau, autrement dit que l'onde incidente est parallèle au plan du réseau. Nous supposons cette condition satisfaite. Alors toutes les fentes du réseau peuvent être regardées comme des sources synchrones.

Soit $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots$ le réseau.

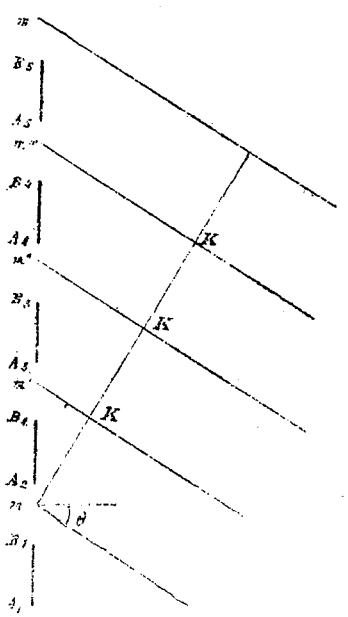
Un point m quelconque de la première ouverture $B_1 A_2$ envoie des vibrations dans une certaine direction θ. Le point homologue m' de la seconde ouverture envoie des vibrations, synchrones à leur départ, dans la même direction θ.

A leur arrivée, les vibrations venant de m et de m' ont une différence de marche δ égale à la différence $m'K$ des chemins parcourus, or

$$\delta = m'K = (a+b)\sin\theta$$

Deux cas peuvent se présenter.

1° La différence de marche δ est égale à λ. Alors les vibrations à l'arrivée sont synchrones. Le point homologue de l'ouverture suivante m'' enverra des vibrations qui seront en retard sur celles de m de $2\lambda = m''K'$; ces vibrations sont synchrones des premières et ainsi de suite.



Les points correspondants dans chaque ouverture envoient donc dans la direction considérée des vibrations concordantes: dans cette direction, il y a lumière.

2° Dans toutes les autres directions voisines de θ, il y a obscurité. En effet, si la différence de marche $m'K$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

n'est pas rigoureusement égale à λ, elle peut être représentée par

$$\delta = (1+\varepsilon)\lambda$$

ε étant une quantité très petite. Alors la différence de marche entre m et m'' est

$$2(1+\varepsilon)\lambda$$

entre m et m'''

$$3(1+\varepsilon)\lambda$$

et ainsi de suite.

entre m et $m^{(p)}$, on a une différence de marche

$$\delta = p(1+\varepsilon)\lambda = p\lambda + p\varepsilon\lambda$$

Or pour une valeur de p assez grande, on a

$$p\varepsilon = \frac{1}{2}$$

d'où $$\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Donc les vibrations envoyées par la première et la $p^{ème}$ fente sont discordantes et s'annulent. Il en sera de même des vibrations envoyées par la 2e et le $(p+1)^{ème}$ fente et ainsi de suite. Les vibrations non annulées seront celles qui seront dues aux dernières fentes en nombre inférieur à p; le nombre p étant très petit par rapport au nombre total des fentes, l'effet de ces p fentes n'est qu'une fraction négligeable de la quantité de lumière incidente.

En résumé, les seules directions où il y a lumière sont données par la relation

$$\delta = \lambda = (a+b)\sin\theta$$

d'où $$\sin\theta = \frac{\lambda}{a+b}$$

Explication de la formation des spectres par les réseaux.

256. — Cette théorie élémentaire va nous permettre d'expliquer la formation du premier spectre. Prenons, pour fixer les idées, un réseau au $\frac{1}{400}$, c'est-à-dire tel qu'il y ait 400 traits opaques par millimètre. Alors $(a+b) = \frac{1}{400}$. Donc il y a éclairement pour une radiation de longueur d'onde λ dans une direction faisant avec la normale aux ondes un angle θ tel que

$$\sin\theta_\lambda = \frac{\lambda}{a+b} = 400\,\lambda$$

Si on opère en lumière blanche, le maximum du violet est obtenu dans une direction telle que

$$\sin\theta_{\lambda\,violet} = \lambda_{violet} \times 400$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Le maximum du rouge est obtenu dans la direction $\theta_{\lambda_{rouge}}$ telle que

$$\sin \theta_{\lambda_{rouge}} = \lambda_{rouge} \times 400$$

Or on sait que $\lambda_{rouge} > \lambda_{violet}$; donc le maximum du violet est plus près du centre du phénomène que le maximum du rouge. Le réseau décompose la lumière en fournissant un spectre qui présente le rouge en dehors, le violet en dedans.

Application. — Mesure des longueurs d'onde à l'aide des réseaux.

257. — Nous concevons de plus comment l'emploi des réseaux peut permettre de mesurer les longueurs d'onde des diverses radiations du spectre. En effet de la relation

$$(a+b) \sin \theta = \lambda$$

on tire λ, si on connaît θ et $(a+b)$.

θ sera déterminé à l'aide d'un goniomètre ; pour une même radiation, cet angle est d'autant plus grand que $(a+b)$ est plus petit. On a donc intérêt à prendre des réseaux excessivement fins.

$(a+b)$ se mesure en évaluant la largeur totale du réseau et le nombre de traits qu'il contient. Si e est cette largeur, p le nombre de traits, on a

$$p\,(a+b) = e$$

d'où $$a+b = \frac{e}{p}$$

Spectres symétriques ; spectres d'ordre supérieur

258. — Nous avons supposé dans ce qui précède que la différence de marche entre les deux radiations émises par m et m' était égale à λ. Nous avons trouvé un maximum de lumière dans une direction faisant un angle θ avec la normale au réseau. Il est évident que le phénomène est symétrique par rapport à cette normale et que s'il existe un spectre à droite, il existe un second spectre symétrique à gauche.

On peut d'ailleurs obtenir d'autres spectres. Considérons une direction faisant avec la normale au réseau un angle θ' déterminé par la condition que la différence de marche entre les vibrations provenant de m et m' soit 2λ. On a alors

$$(a+b) \sin \theta' = 2\lambda$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Dans cette direction, il y a encore maximum de lumière pour la radiation de longueur d'onde λ.

En général, on a maximum de lumière, dans une direction θ telle que

$$(a+b)\sin\theta = K\lambda$$

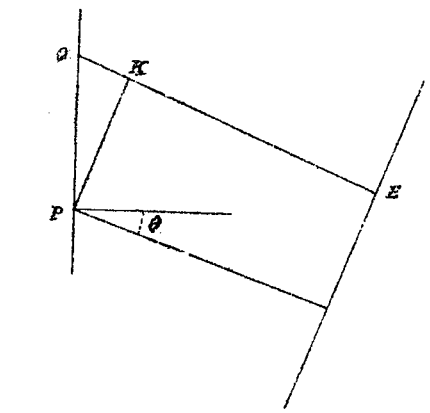
En donnant à K les différentes valeurs entières possibles, on obtient les diverses directions dans lesquelles il y a lumière.

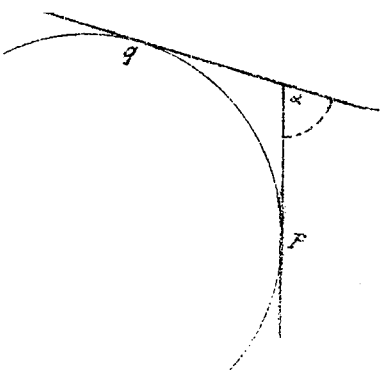
Théorie complète des réseaux.

259. — En appliquant au cas des réseaux la construction de M. Cornu, on obtient une théorie de ces appareils, plus complète sur plusieurs points que celle de Babinet.

Nous considérerons toujours le cas d'un réseau placé normalement à un faisceau de lumière parallèle et nous supposerons qu'on observe le phénomène sur un écran placé à l'infini. Dans ce cas il est facile de démontrer que la courbe de M. Cornu se réduit à une circonférence.

Pour cela, il suffit de faire voir que le rayon de courbure de cette courbe est constant. Or ce rayon de courbure a pour valeur $R = \frac{ds}{d\alpha}$





Soient P et Q deux points pris dans le réseau et qui envoient leurs vibrations dans une direction faisant un angle θ avec la normale. Les points correspondants de la courbe de M. Cornu sont p et q. L'angle α des tangentes en ces deux points est, d'après la construction, égal à la différence de phase des vibrations provenant de P et Q.

Cette différence de phase est $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \alpha$, δ désignant la différence de marche QK

Or

$$QK = PQ \sin QPK = a \sin\theta$$

Donc

$$\alpha = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

On en tire $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{2\pi \sin\theta}{\lambda}$$

Donc $$R = \frac{\lambda}{2\pi \sin\theta}$$

La valeur de R est indépendante de s, c'est-à-dire de la position du point considéré sur la courbe ; la courbe de Fresnel est donc une circonférence de rayon $R = \frac{\lambda}{2\pi \sin\theta}$

Construction de l'amplitude résultante.

260. — A partir d'un point arbitraire O pris comme origine sur la circonférence, menons une corde $B_1 A_2$ telle que

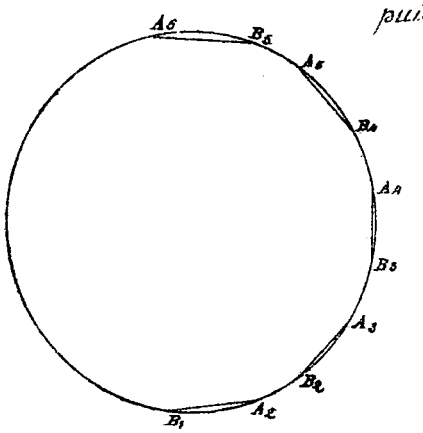
$$\text{arc } B_1 A_2 = a$$

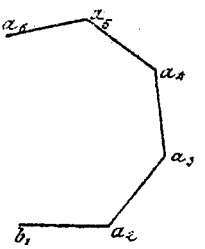
puis à partir du même point O, menons $B_1 B_2$ telle que

$$\text{arc } B_1 B_2 = a + b$$

puis arc $B_2 A_3 = a$ et ainsi de suite.

Sur la figure le point origine O coïncide avec B_1.





L'amplitude totale envoyée dans la direction θ par une fente quelconque a est donc représentée par la corde d'un arc de circonférence égale à a, et ces arcs a sont séparés par des arcs égaux chacun à b.

L'intensité totale de la vibration provenant d'un certain nombre de fentes est représentée par la somme géométrique de toutes les cordes ainsi obtenues.

Pour trouver cette résultante, par un point O quelconque du plan, menons $b_1 a_2$ égale et parallèle à la corde $B_1 A_2$; par a_2 menons $a_2 a_3$ égale et parallèle à la corde suivante $B_2 A_3$ et ainsi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

de suite. La figure obtenue est composée de droites égales entre elles, l'angle de deux côtés consécutifs est constant. C'est donc une ligne brisée regulière inscriptible. La résultante géométrique cherchée est une corde de la circonférence circonscrite; elle reste donc toujours inférieure au diamètre, quel que soit le nombre des fentes. Donc la quantité de lumière envoyée dans une direction quelconque ne croit pas indéfiniment, quand le nombre des fentes va en croissant.

Tel est le résultat que l'on obtient pour un angle θ quelconque. Faisons maintenant varier θ d'une manière continue. Si on fait croître θ à partir de zéro, R va en diminuant, car

$$R = \frac{\lambda}{2\pi \sin\theta}$$

Pour une valeur convenable de θ, l'arc $B_1 B_2$ devient égal à la circonférence entière, c'est-à-dire à $2\pi R$

Alors

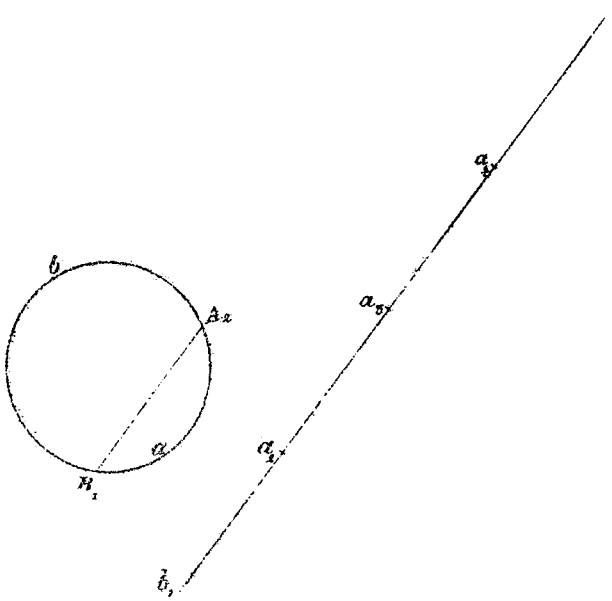
$$(a+b) = 2\pi R$$

ou

$$(a+b) = \frac{\lambda}{\sin\theta}$$

La valeur de θ correspondante est telle que

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a+b}.$$



Dans ce cas les points B_2 B_3... coïncident avec le point B_1; les points A_3 A_4... coïncident avec le point A_2. L'amplitude due à la première ouverture est représentée par $R A_2$; pour construire l'amplitude due aux deux premières

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

fentes, il faut à $B_1 A_2$ ajouter géométriquement une droite parallèle égale et de même sens représentant l'amplitude due à la seconde fente. En d'autres termes, pour cette valeur particulière de θ, le polygone régulier considéré plus haut se réduit à une droite. Dans ce cas, l'amplitude dans la direction θ va en croissant au-delà de toute limite avec le nombre des fentes. Dans cette direction, il y a donc maximum de lumière.

Le même fait se produit pour toute valeur de θ telle que

$$(a+b) = 2n\pi R$$

n étant un nombre entier quelconque. En effet dans ce cas, les points $B_2 B_3 \ldots$ coïncident toujours avec le point B_1 ; de même les points $A_3, A_4 \ldots$ coïncident avec le point A_2. Les directions θ où se produisent les maximums de lumière sont donc données par la condition qui vient d'être écrite. Comme d'ailleurs on a $R = \frac{\lambda}{2\pi \sin\theta}$, il s'ensuit que ces directions sont déterminées par la condition

$$\sin\theta = \frac{n\lambda}{a+b}$$

On retrouve ainsi la formule obtenue par la théorie de Babinet, ainsi que toutes ses conséquences. En particulier le sinus de la déviation éprouvée par une lumière de longueur d'onde λ est proportionnelle à λ.

Intensité de la lumière diffractée.

261. — L'amplitude résultante émise dans la direction d'un maximum par une fente de largeur a est représentée ainsi qu'on vient de le voir, par la corde d'un arc de circonférence qui a pour longueur a et pour rayon R. Cette amplitude a donc pour expression

$$2R \sin \frac{1}{2} \frac{a}{R}$$

et comme d'ailleurs $a + b = 2n\pi R$ (§ 260) on a pour expression de l'amplitude due à une fente unique

$$\frac{a+b}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{a+b}$$

pour les N fentes du réseau, on a

$$N \frac{a+b}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{a+b}$$

L'amplitude incidente étant égale à Na et d'autre part

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les intensités étant proportionnelles aux carrés des amplitudes (§ 273), on voit que, l'intensité incidente étant prise pour unité, l'intensité émise dans la direction du $n^{ème}$ maximum est égale à

$$\left(\frac{a+b}{n\pi a}\sin\frac{n\pi a}{a+b}\right)^2$$

Cette expression ne contient pas λ. Donc les intensités des diverses lumières élémentaires dans chaque spectre sont dans le même rapport que dans la lumière incidente.

Empiètement des spectres des différents ordres.

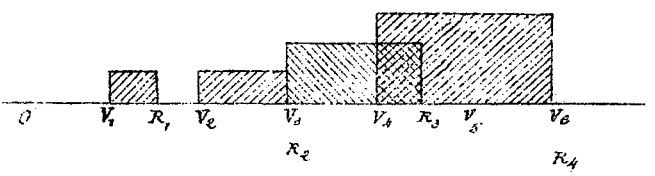
262. — Quand on examine le phénomène produit par les réseaux, on reconnait que les spectres empiètent les uns sur les autres.

Pour expliquer cette particularité, supposons que nous prenions comme abscisses les valeurs de $\sin\theta$ correspondant aux maxima des diverses lumières.

Le premier maximum violet correspond alors à l'abscisse

$$OV_1 = \theta_1 = \frac{\lambda_v}{a+b}$$

si l'on remplace par approximation les sin par les arcs.



Les divers maxima violets correspondent à

$$OV_2 = \theta_2 = 2\theta_1$$
$$OV_3 = \theta_3 = 3\theta_1 \quad \text{etc.}$$

L'abscisse du premier maximum rouge est égale à

$$\theta_1' = \frac{\lambda_r}{a+b}$$

et comme $\lambda_r = \frac{6}{4}\lambda_v = \frac{3}{2}\lambda_v$

On a $\theta_1' = \frac{3}{2}\frac{\lambda_v}{a+b} = \frac{3}{2}\theta_1$.

Les abscisses des maxima rouge sont donc

$$OR_1 = \frac{3}{2}\theta_1$$
$$OR_2 = 3\theta_1 \quad \text{etc}$$

Le second maximum rouge coïncide donc avec le troisième maximum violet. Le second et le troisième spectres lumineux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

sont contigus.

Le troisième et le quatrième spectre se recouvrent en partie; le troisième est compris entre les abscisses

$$OV_3 = 3\theta_1$$

et $$OR_3 = \left(4 + \frac{1}{2}\right)\theta_1$$

Le quatrième spectre commence en V_4 tel que

$$OV_4 = 4\theta_1$$

V_4 est donc à l'intérieur du troisième spectre.

En général les spectres empiéteront de plus en plus.

Cherchons l'abscisse OR_n du rouge du $n^{ième}$ spectre et celle OV_{n+1} du violet du $(n+1)^{ème}$ spectre.

On a $$OR_n = \frac{n\lambda_r}{a+b} = \frac{3n}{2}\theta_1$$

$$OV_{n+1} = (n+1)\theta_1$$

Donc $$OR_n - OV_{n+1} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\theta_1$$

à mesure que n croît, $R_n V_{n+1}$ croît.

Cas où un spectre disparaît.

263. — Il peut arriver que certains spectres fassent défaut. Ce fait se présente toutes les fois que le nombre qui mesure la largeur d'une partie transparente est un multiple de celui qui mesure la largeur d'une partie opaque.

Soit $$a = Kb$$

K étant un nombre entier.

L'expression de l'intensité (§ 261) pour le $n^{ième}$ spectre contient le facteur

$$\sin^2 \frac{n\pi K}{K+1}$$

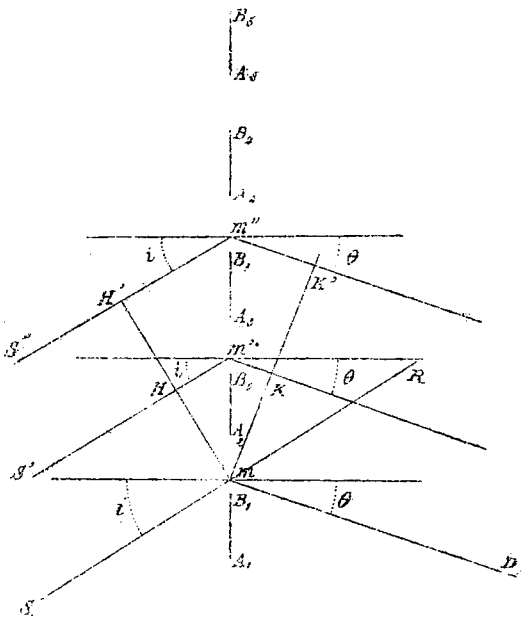
Ce facteur s'annule pour $n = K+1$, c'est-à-dire que le spectre d'ordre $K+1$ disparaît. En particulier si $a = b$, le spectre de deuxième ordre disparaît.

Phénomène observé lorsque l'incidence est oblique.

264. — Jusqu'ici nous avons supposé que l'onde plane incidente était parallèle au plan du réseau. Il est facile d'étendre nos conclusions au cas où l'onde incidente ferait avec le plan du réseau un angle i.

La différence de marche δ entre les vibrations émanées

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



de m et m' dans la direction θ est égale à la différence des chemins parcourus $Hm' + m'K$

ou $(a+b)\sin i + (a+b)\sin\theta$

ou encore

$$(a+b)(\sin i + \sin\theta)$$

On voit qu'on arrivera aux mêmes résultats que précédemment, à condition de remplacer partout dans les calculs

$$\sin\theta$$

par $\sin i + \sin\theta$.

On a maximum de lumière pour la radiation de longueur d'onde λ dans une direction θ donnée par

$$\sin i + \sin\theta = \frac{n\lambda}{a+b} \qquad (1)$$

n étant un nombre entier quelconque.

Le rayon incident Sm paraît dévié en m D, la déviation ω est égale à l'angle $Rm\,D = i+\theta$.

Étudions la variation de cette déviation lorsqu'on fait varier l'incidence.

Nous allons démontrer qu'on obtient un minimum de déviation lorsque $i=\theta$. En effet pour que la déviation soit minima, il faut que

$$\frac{d\omega}{di} = 0$$

ou

$$1 + \frac{d\theta}{di} = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{di} = -1$$

Différentions la relation (1),

$$\cos i + \cos\theta\,\frac{d\theta}{di} = 0 \qquad (2)$$

Pour $\frac{d\theta}{di} = -1$, il vient

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$\cos i = \cos \theta$$

ou comme i et θ sont $< 90°$, $i = \theta$

Pour savoir si cette valeur correspond à un maximum ou à un minimum de la déviation, il faut considérer le signe de la dérivée seconde

$$\frac{d^2\omega}{di^2} = \frac{d^2\theta}{di^2}$$

En différentiant la relation (2), il vient

$$-\sin i + \cos\theta \frac{d^2\theta}{di^2} - \sin\theta\left(\frac{d\theta}{di}\right)^2 = 0$$

Pour $\frac{d\theta}{di} = -1$ et $i = \theta$,

on a

$$\frac{d^2\theta}{di^2} = 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$$

L'angle θ étant inférieur à $90°$, $\mathrm{tg}\,\theta$ est positif. La dérivée seconde de la déviation étant positive, la déviation est minima.

Ainsi les réseaux de même que les prismes dévient les rayons lumineux, et pour une incidence convenable, on obtient un minimum de la déviation.

Cette propriété a été utilisée par M. Mascart dans la mesure des longueurs d'onde. Si l'on se place en effet dans la position du minimum de déviation, la relation (1) donne

$$\lambda = 2\frac{(a+b)}{n}\sin\theta$$

La position du minimum et l'angle θ sont obtenus par la même méthode que celle qui est suivie dans l'évaluation des indices de réfraction à l'aide du goniomètre de Babinet.

Réseaux circulaires.

265. — Les réseaux à traits parallèles et équidistants sont de beaucoup les plus employés. Toutefois on a construit d'autres réseaux qui sont en quelque sorte aux réseaux que nous venons d'étudier ce que les lentilles sont aux prismes à faces planes.

Un réseau formé de traits circulaires concentriques et équidistants

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

fournit un spectre ou pour mieux dire une série de spectres circulaires et concentriques, ainsi qu'il est facile de le comprendre. Un pareil réseau fonctionne à peu près comme un prisme de verre conique.

Réseaux circulaires de M. Cornu.

266. — Si l'on veut donner à un réseau des propriétés analogues à celles d'une lentille, il faut le former de traits circulaires concentriques, non équidistants, mais disposés suivant une loi convenable.

M. Cornu a réalisé un pareil réseau en photographiant simplement les anneaux de Newton. Dans un pareil réseau les diamètres des fentes successives varient comme les racines carrées des nombres entiers consécutifs.

On peut démontrer élémentairement qu'un système ainsi disposé possède un foyer principal, comme une lentille convergente.

Soit y le rayon d'une des fentes, N son numéro d'ordre. On a

$$y^2 = KN$$

K étant un coefficient constant. D'où en différentiant

$$2y\frac{dy}{dN} = K$$

$\frac{dy}{dN}$ est la distance $a+b$ de 2 fentes consécutives.

On a donc pour l'angle θ de diffraction

$$\theta = \frac{n\lambda}{a+b} = n\lambda\frac{2y}{K}. \qquad (1)$$

D'autre part le rayon diffracté rencontre l'axe à une distance f du centre du réseau telle que l'on ait

$$f\,\theta = y \qquad (2)$$

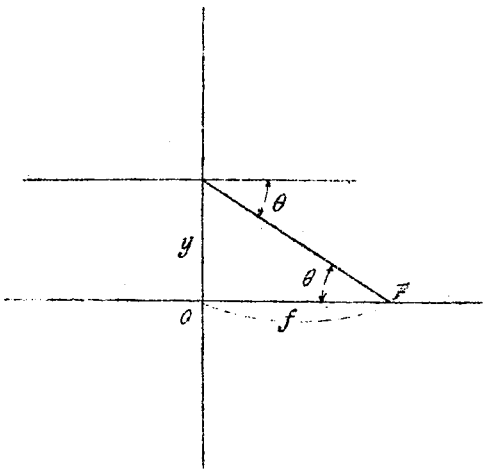
Donc d'après les équations (1) et (2) on a

$$f = \frac{K}{2n\lambda}. \qquad (3)$$

Cette valeur de f est indépendante de y, donc tous les rayons parallèles qui tombent normalement sur le réseau convergent en un même point, qui est le foyer principal du réseau.

La valeur de f dépend de λ; il y a donc une dispersion, et même une dispersion très forte, puisque f est proportionnel à λ. De plus le coefficient n étant arbitraire, on voit que l'on obtient n foyers réels équidistants pour chaque valeur de λ; d'autre part, il existe

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



également n foyers virtuels pour chaque λ; de sorte que le réseau circulaire est comparable à un système de n lentilles convergentes et de n lentilles divergentes d'un grand pouvoir dispersif.

Lumière polarisée.

Direction des vibrations de la lumière.

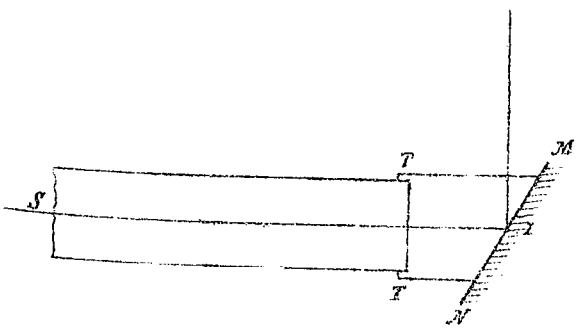
267. — Dans les phénomènes déjà étudiés, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la direction des vibrations lumineuses. Tous les raisonnements que nous avons développés subsistent que les vibrations soient longitudinales ou qu'elles soient transversales.

Nous allons maintenant nous occuper d'une série de phénomènes où intervendra la direction des vibrations. Ces phénomènes sont ceux de la polarisation.

Lumière naturelle.

268. — Lorsqu'un faisceau lumineux n'a subi aucune réflexion ni aucune réfraction, lorsqu'il émane normalement d'une source, on dit qu'il est constitué par de la lumière naturelle. Elle est la lumière du soleil, d'une flamme, de la lampe électrique etc.

Les propriétés de la lumière naturelle sont les mêmes dans tous les azimuths qui passent par le rayon.



Soit par exemple un rayon de lumière naturelle ST tombant sur un miroir MN; si on fait tourner le plan de réflexion autour du rayon incident, sans changer d'ailleurs

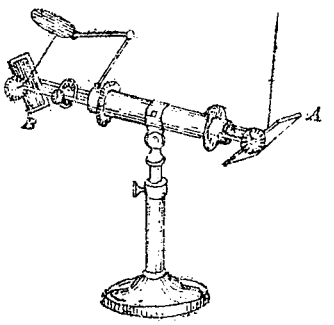
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

l'angle d'incidence, on constate que l'intensité du rayon réfléchi est constante.

Lumière polarisée. — Polarisation par réflexion.

269. — Il n'en est plus de même lorsque la lumière a déjà subi une réflexion sur un miroir de verre.

Pour le montrer nous emploierons l'appareil de Biot. Il se compose d'un tube cylindrique dont les deux extrémités portent deux tambours mobiles autour de l'axe du cylindre et munis d'une graduation. A chacun de ces tambours sont fixés deux montants dont l'un porte un limbe gradué, ils supportent l'axe de rotation d'un miroir.



Les rayons issus d'une source lumineuse tombant sur le premier miroir A sont renvoyés suivant l'axe du cylindre ; ils se réfléchissent sur le second miroir B, après quoi ils sont reçus dans l'œil.

Faisons tourner le tambour du miroir B, tout en laissant constante l'inclinaison du miroir sur les montants : le plan d'incidence sur ce miroir est déterminé par le rayon incident qui coïncide avec l'axe du tube et par la normale au point d'incidence ; cette droite décrit un cône ; le plan d'incidence tourne autour du rayon incident. On observe alors que l'intensité du réfléchi n'est pas constante ; elle varie d'une façon continue pendant la rotation et passe par deux maxima et deux minima pendant la durée d'une révolution complète. Le rayon qui jouit de cette propriété de donner des rayons réfléchis variables dans les différents azimuths est appelé rayon polarisé : le plan de réflexion sur le premier miroir A est appelé plan de polarisation. — Le miroir A qui a fourni de la lumière polarisée, a reçu le nom de polariseur ; le miroir B qui nous indique si nous avons affaire à de la lumière polarisée ou à de la lumière naturelle est l'analyseur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Les maxima sont obtenus lorsque le dièdre des deux plans de réflexion sur les deux miroirs est égal à 0° ou à 180°. Les minima sont obtenus lorsque ces plans de réflexion sont à angle droit.

Ces minima sont nuls lorsque la réflexion sur le verre de l'un et l'autre miroir a lieu sous un angle convenable, qu'on appelle angle de polarisation.

Direction des vibrations.

270. — Le rayon polarisé ne peut être constitué par des vibrations longitudinales. En effet si les vibrations étaient longitudinales, le rayon polarisé jouirait des mêmes propriétés dans tous les plans passant par sa direction de propagation; en particulier, l'intensité du réfléchi serait indépendante de l'azimuth du plan de réflexion.

Les vibrations de la lumière polarisée n'étant pas longitudinales sont inclinées sur la direction de propagation. Je dis que les vibrations sont normales à cette direction. En effet, si elles étaient obliques, on pourrait les décomposer en deux composantes: l'une longitudinale, suivant la direction de propagation, l'autre transversale, normale à cette direction. En admettant que pour un angle convenable des plans de réflexion, on arrive à éteindre les vibrations transversales, il serait impossible de jamais éteindre les composantes longitudinales. Il faut donc que ces composantes soient nulles, en d'autres termes que les vibrations du rayon polarisé soient normales à la direction de propagation.

Constitution de la lumière naturelle. Hypothèse de Fresnel.

271. Fresnel a cherché à expliquer les différences entre les effets observés avec la lumière naturelle et avec la lumière polarisée.

Suivant Fresnel, la lumière naturelle se compose de vibrations qui ont lieu suivant une trajectoire quelconque située dans un plan normal au rayon.

Fresnel admet qu'après polarisation par réflexion sous l'angle de polarisation, la vibration est réduite à une composante rectiligne parallèle au plan du miroir, c'est-à-dire

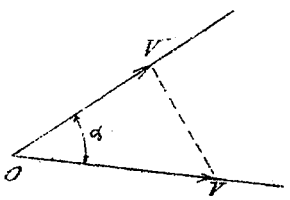
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

perpendiculaire au plan de réflexion (plan de polarisation), cette composante étant d'ailleurs normale au rayon.

D'après cette hypothèse, le polariseur est un appareil qui réfléchit les vibrations, avec cette propriété de ne laisser passer qu'une composante de ces vibrations, celle qui est perpendiculaire au plan de réflexion ou de polarisation.

Nous allons voir que cette hypothèse explique l'expérience que nous avons faite avec l'appareil de Biot.

272. Soit un rayon qui, après réflexion sur le miroir A a été réduit à sa composante rectiligne ou parallèle au plan du miroir; on dit qu'il est polarisé rectilignement. Cherchons ce qui arrive lorsqu'il tombe sur le second miroir. Le premier miroir ne laisse passer que les vibrations parallèles à OV; le second ne laisse passer que les vibrations parallèles à OV', normale au plan de polarisation du deuxième miroir. Pour obtenir l'amplitude de la vibration qui passe, il faut prendre la composante de OV suivant OV', ce qui revient à projeter OV sur OV'.



Soit α l'angle de OV avec OV' (c'est l'angle des plans de réflexion sur les deux miroirs). La projection de OV sur OV' sera

$$OV \cos \alpha$$

Donc l'amplitude de la vibration réfléchie par l'analyseur est égale à l'amplitude de la vibration incidente multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans de réflexion.

Si les deux plans de polarisation coïncident ($\alpha = 0$ ou $\alpha = 180$) l'amplitude réfléchie est maximum. Si les deux plans de polarisation sont rectangulaires, l'amplitude réfléchie est nulle.

Au point de vue expérimental, un rayon est dit polarisé rectilignement lorsqu'on peut l'éteindre totalement pour une position convenable du miroir analyseur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Relation entre l'amplitude vibratoire et l'intensité photométrique.

273. — Pour vérifier expérimentalement ces résultats, il faudrait pouvoir mesurer l'amplitude de la vibration. Or l'amplitude n'est qu'une conception théorique : ce que nous pouvons mesurer, c'est l'intensité photométrique d'un rayon lumineux.

Admettons que l'intensité est proportionnelle à la force vive moyenne des molécules vibrantes pendant la durée d'une vibration et cherchons la valeur de cette force vive moyenne.

Soit v la vitesse d'une de ces molécules au temps t, m sa masse. La force vive de la molécule est $\frac{1}{2} m v^2$. La force vive moyenne pendant la durée d'une vibration de période T sera

$$\frac{1}{2} \frac{\int_0^T m v^2 dt}{T}$$

Supposons que l'élongation y soit représentée par

$$y = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Alors la vitesse v, à chaque instant x pour expression

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

Donc

$$\frac{1}{2T} \int_0^T m v^2 dt = \frac{1}{2T} \int_0^T m \times \frac{4\pi^2}{T^2} A^2 \times \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt$$

$$= \frac{2 \pi^2 m}{T^3} A^2 \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{t}{T} dt$$

Or $\quad 2 \cos^2 2\pi \frac{t}{T} = 1 + \cos 4\pi \frac{t}{T}$

Donc

$$\frac{1}{2T} \int_0^T m v^2 dt = \frac{\pi^2 m A^2}{T^3} \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos 4\pi \frac{t}{T} dt \right)$$

De plus $\int_0^T dt = T$

$$\int_0^T \cos 4\pi \frac{t}{T} dt = \frac{T}{4\pi} \left(\sin 4\pi \frac{t}{T} \right)_0^T = 0$$

Donc $\frac{1}{2T} \int_0^T m v^2 dt = \frac{\pi^2 m A^2}{T^2}$

La force vive moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude. Si on admet que l'intensité photométrique est elle même proportionnelle à la force vive moyenne, on voit que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

l'intensité photométrique est proportionnelle au carré de l'amplitude vibratoire.

Intensité du rayon doublement réfléchi. — Loi de Malus.

274. — Appliquons ce résultat au calcul de l'intensité photométrique du rayon doublement réfléchi (N° 272).

L'amplitude incidente étant $OV = A$, l'amplitude résultante est $OV \cos\alpha = A \cos\alpha$. Donc l'intensité est $A^2 \cos^2\alpha$. — Cette conséquence constitue la loi de Malus.

Loi de Malus. — Lorsque le plan de polarisation de l'analyseur et du polariseur font entre eux un angle α, l'intensité du rayon émergent est diminuée dans le rapport de 1 à $\cos^2\alpha$.

Cette loi peut être vérifiée expérimentalement. Il suffit pour cela de mesurer à l'aide d'un photomètre quelconque les intensités du rayon incident et du rayon doublement réfléchi.

Angle de polarisation. — Loi de Brewster.

275. — Dans les expériences précédentes, nous avons maintenu l'incidence constante sur chacun des miroirs. Nous opérions avec des miroirs de verre noir disposés de façon que le rayon incident tombait sur le polariseur ainsi que sur l'analyseur sous un angle de 35°½.

Si nous changeons l'incidence sur le polariseur, en faisant tourner le miroir autour de l'axe fixé aux montants du tambour, nous n'arrivons plus à obtenir l'extinction totale; nous observons seulement des variations régulières d'intensité, mais les minima ne sont plus nuls.

Il en est de même si, laissant le polariseur dans sa position primitive, nous faisons varier l'incidence sur l'analyseur.

Donc pour que l'extinction totale puisse être obtenue, il faut que le rayon incident tombe sur le polariseur sous une incidence donnée : l'angle correspondant est l'angle de polarisation.

Brewster a trouvé par l'expérience une relation entre l'angle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

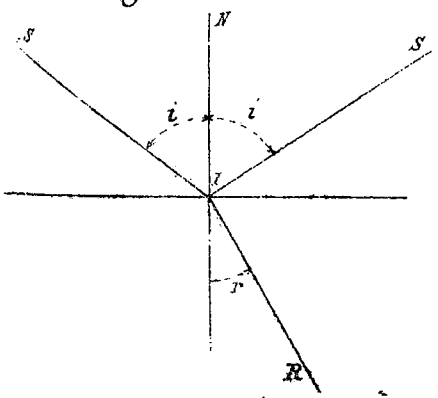
de polarisation et l'indice de la substance qui constitue le miroir.

Loi de Brewster

276. — La tangente de l'angle de polarisation d'une substance est égale à l'indice de réfraction de cette substance.

Lorsqu'un rayon tombe sur une surface réfléchissante en faisant avec la normale à la surface un angle égal à l'angle de polarisation, on dit que le rayon tombe sous l'incidence brewstérienne.

Lorsqu'un rayon tombe sur une substance transparente sous l'incidence brewstérienne, le rayon réfracté est perpendiculaire au rayon réfléchi.



En effet i et r étant les angles d'incidence et de réfraction on a

$$\sin i = m \sin r$$

D'autre part, d'après la loi de Brewster

$$\operatorname{tg} i = m$$

ou $\frac{\sin i}{\cos i} = m$

d'où $\sin i = \frac{\sin i}{\cos i} \sin r$.

ou $\cos i = \sin r$.

Donc i et r sont complémentaires. Il en résulte que l'angle SIR est égal à un droit.

Application. Mesure de l'indice de réfraction d'une substance.

277. — Nous pouvons conclure de là une nouvelle méthode de mesure des indices de réfraction.

Supposons qu'on ait déterminé l'angle de polarisation p d'une substance. La relation $\operatorname{tg} p = m$ donnera m.

Cette méthode est précieuse dans certains cas. En effet, les autres méthodes de mesure ne permettent d'opérer qu'avec les rayons réfractés : on ne peut donc les appliquer qu'à la mesure des indices des substances transparentes. Pour les substances opaques comme le verre noir, le jais etc, on ne peut appliquer

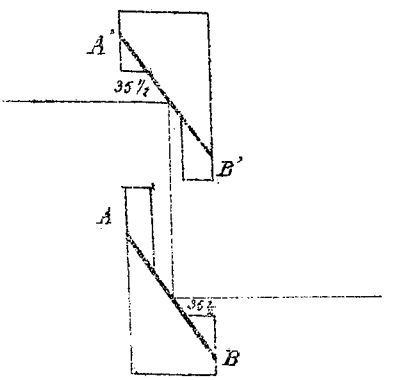
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les méthodes ordinaires. On peut alors trouver m par la recherche de l'angle de polarisation. L'angle p existe pour toutes les substances dont l'indice de réfraction est voisin de l'unité. Pour quelques substances qui, comme le diamant, ont un indice très élevé, on n'obtient jamais l'extinction totale quel que soit l'angle d'incidence.

Analyseur portatif

278. — Il est facile de construire un appareil simple pouvant servir d'analyseur.

Soient deux glaces de verre AB, A'B' parallèles entre elles.



Le système des deux glaces peut être monté dans une garniture métallique ou plus simplement dans un bouchon de liège. Si l'on reçoit sur cet appareil un rayon de lumière naturelle, AB agira comme polariseur, A'B' comme analyseur; mais les deux miroirs étant parallèles, on n'arrivera pas à produire l'extinction en tournant le système.

Si, au contraire, le rayon incident est polarisé, en tournant l'appareil, on trouvera une position pour laquelle les vibrations du rayon polarisé seront dans le plan de polarisation des miroirs; ces vibrations seront donc éteintes et on obtiendra l'obscurité.

On peut avec cet appareil vérifier que les rayons lumineux qui se sont réfléchis sur l'eau, sur une vitre etc. sont polarisés.

On peut encore s'en servir pour voir un objet qui se trouve dans l'eau au voisinage de la surface. La lumière venant de la surface et qui empêcherait de voir l'objet s'éteint pour une position déterminée de l'appareil.

Polarisation par réfraction

279. — La réfraction polarise aussi les rayons lumineux;

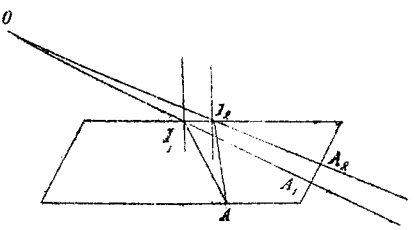
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

mais cette polarisation n'est jamais complète. Si un rayon lumineux traverse une lame réfringente, et est ensuite reçu sur un miroir fonctionnant comme analyseur, on observe que l'intensité du rayon réfléchi varie avec l'azimuth : cette intensité passe par des maxima et des minima ; mais les minima ne sont jamais nuls.

On en conclut que la lumière obtenue est un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée. On dit que c'est de la lumière partiellement polarisée.

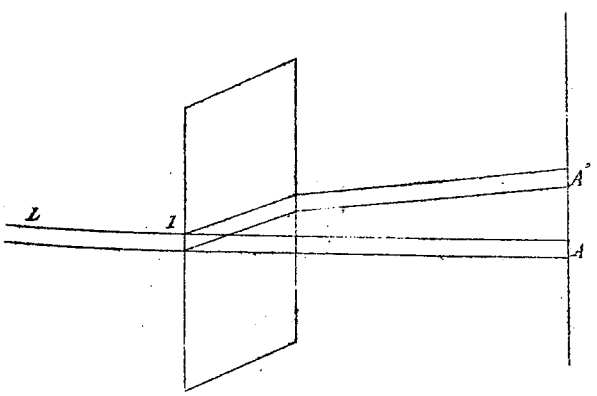
Toutefois un certain nombre de corps fournissent des rayons complètement polarisés par réfraction : ce sont les cristaux qui présentent le phénomène de la double réfraction.

Double réfraction.



280. — La double réfraction a été observée pour la première au seizième siècle sur le spath d'Islande. Ce corps est une variété de carbonate de chaux cristallisée en rhomboèdres assez volumineux.

Si à travers un cristal de spath d'Islande, on regarde un objet lumineux A, cet objet paraît dédoublé : on voit deux images : l'une dans la direction I_1A_1, l'autre dans la direction I_2A_2.



Si un faisceau lumineux tombe sur un cristal de spath, ce faisceau lumineux se dédouble ; si on intercepte les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

rayons réfractés par un écran, on obtient deux taches lumineuses distinctes en A et A'.

Si l'on fait tourner le cristal sur lui-même, l'une des taches reste fixe, l'autre paraît tourner autour de la première

Polarisation des rayons réfractés.

281. — Les deux faisceaux ainsi obtenus sont polarisés dans des plans perpendiculaires entre eux. Il suffit pour s'en convaincre de recevoir les faisceaux émergents sur un miroir analyseur. En faisant tourner ce miroir, on constate que l'un des faisceaux (I) s'éteint pour une position α de l'analyseur, l'autre (II) pour la position caractérisée par $90+\alpha$, qui correspond à un maximum d'intensité de (I); la position $180+\alpha$ correspond à un minimum pour (I) et à un maximum pour (II) et ainsi de suite

Il en résulte que les vibrations des deux rayons sont perpendiculaires l'une à l'autre.

282. — Les intensités des deux faisceaux sont complémentaires. Supposons que l'intensité incidente soit 1. Soit α l'angle du plan de polarisation d'un des rayons avec le plan de polarisation de l'analyseur; l'autre rayon est polarisé dans un plan faisant avec le plan de polarisation de l'analyseur un angle égal à $90+\alpha$.

L'intensité du premier rayon est $\cos^2\alpha$

celle du second est $\sin^2\alpha$

Or on sait que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

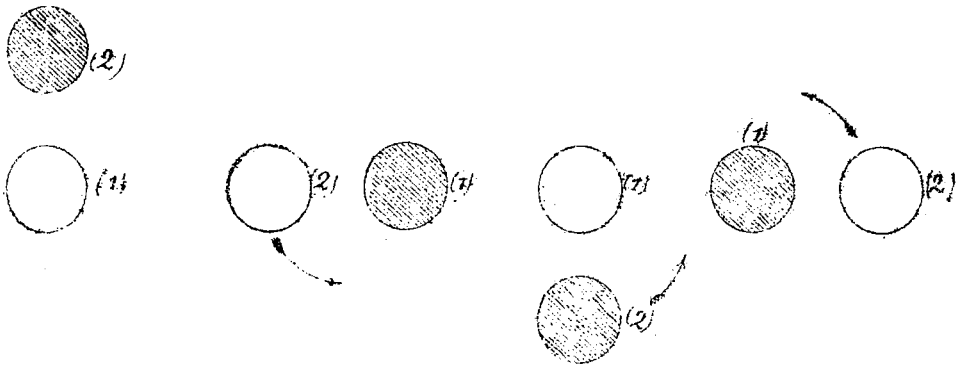
ce qui démontre la proposition

283. — Un cristal biréfringent quelconque étant un polariseur peut être employé aussi comme analyseur

Si en effet on fait tomber sur un cristal de spath un faisceau polarisé par réflexion, on obtient deux faisceaux réfractés. En tournant le cristal de spath, on constate que les faisceaux sont éteints alternativement pour des positions à 90° l'une de l'autre.

Lorsqu'on emploie les cristaux biréfringents comme analyseurs ou polariseurs, il est commode de se débarrasser d'un des faisceaux réfractés. Plusieurs dispositions ont été proposées dans ce but : telles sont celles de Rochon, de Wollaston; la plus employée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



est connue sous le nom de Prisme de Nicol, ou simplement de Nicol. Nous étudierons quelques-unes de ces dispositions après avoir donné la théorie de la double réfraction.

Théorie de la double réfraction.

284. — Nous avons démontré que les deux rayons réfractés fournis par un cristal biréfringent ont des directions de vibration perpendiculaires (§ 281); il est évident d'ailleurs qu'ils ont des indices différents. Il en résulte que les vitesses de propagation de ces deux rayons sont différentes.

Soit en général V la valeur de la vitesse de propagation d'un mouvement vibratoire. Cette quantité satisfait à la formule de Newton

$$V = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

ρ désigne la densité absolue du milieu hypothétique, l'éther, dont les vibrations constituent la lumière à l'intérieur du cristal; S est le coefficient d'élasticité de ce milieu, c'est-à-dire le coefficient par lequel il faut multiplier l'élongation pour obtenir la force élastique.

Puisque pour les deux rayons V est différent, tandis que ρ est constant, il faut bien admettre que la force élastique mise en jeu dans les diverses directions du cristal n'est pas constante; il en est de même du coefficient d'élasticité.

Ce résultat n'a rien qui puisse étonner: on sait en effet que les propriétés physiques des cristaux sont variables avec les directions; il en est ainsi par exemple de la conductibilité calorifique de la dilatation etc.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Corps isotropes et corps anisotropes.

285 — A ce point de vue, on a divisé les corps en deux grandes classes 1° Corps isotropes 2° Corps anisotropes.

Un corps est isotrope s'il jouit de propriétés identiques dans toutes les directions que l'on peut mener par chaque point à l'intérieur du corps.

Les corps qui ne sont pas isotropes sont dits anisotropes Les cristaux ne jouissant pas des mêmes propriétés dans toutes les directions autour d'un point sont des corps anisotropes.

286 — Au point de vue de leur forme extérieure, les différentes substances solides peuvent au contraire se grouper en deux grandes classes, celle des corps amorphes, et celle des corps cristallisés; cette dernière comprend d'ailleurs plusieurs subdivisions

I. Corps amorphes.

II. Corps cristallisés.

1° Système cubique (Exemple — Sel marin)
2° Système hexagonal (Exemples — Quartz Spath d'Islande).
3° Système du prisme droit à base carrée (Ex. Prussiate jaune de potasse)
4° Système du prisme droit à base rectangle (Exemple — Arragonite).
5° Système du prisme oblique symetrique (Exemple — Gypse)
6° Système du prisme oblique dissymétrique (Exemple — Sulfate de cuivre)

Les corps amorphes isotropes et ceux qui sont cristallisés dans le système cubique sont monoréfringents; ils jouissent des mêmes propriétés optiques dans toutes les directions autour d'un point, ils sont donc isotropes au point de vue optique.

Les corps cristallisés dans les cinq derniers systèmes sont biréfringents : ils sont anisotropes au point de vue optique. On les distingue en cristaux uniaxes et cristaux biaxes.

Les cristaux appartenant aux systèmes du prisme hexagonal et du prisme droit à base carrée sont uniaxes. Ceux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

qui appartiennent aux systèmes du prisme droit à base rectangle, du prisme oblique symétrique ou dissymétrique sont biaxes.

Phénomènes présentés par les cristaux uniaxes.

287. — Les cristaux uniaxes sont caractérisés par un axe cristallographique seul en son genre, tandis que leurs autres axes de symétrie sont perpendiculaires au premier et égaux entre eux. Ainsi, dans le prisme hexagonal, l'axe de symétrie unique en son genre joint les centres des deux bases; trois autres axes situés dans un plan perpendiculaire sont égaux entre eux et forment l'un avec l'autre des angles de 120°. Dans le prisme droit à base carrée la droite qui joint les centres des deux carrés de base est un axe unique en son genre; au point de vue cristallographique, le cristal admet encore deux autres axes égaux entre eux et rectangulaires dans un plan perpendiculaire à l'axe unique.

Indice ordinaire; indice extraordinaire principal

288. — Au point de vue optique, on constate par l'expérience que toute vibration lumineuse perpendiculaire à l'axe cristallographique unique est réfractée avec un indice n indépendant de la direction du rayon et que l'on appelle l'indice ordinaire. La vitesse de propagation correspondante a une valeur O qui est la vitesse de propagation du rayon ordinaire.

Si la vibration lumineuse est parallèle à l'axe cristallographique, l'expérience montre que le rayon est réfracté avec un indice n' que l'on appelle l'indice extraordinaire principal et qui est le même quelle que soit la direction du rayon. Il s'en suit que la vitesse de propagation correspondante a une valeur E qui est la vitesse de propagation du rayon extraordinaire principal.

Pour réaliser l'expérience, on prend un prisme de spath ou de quartz dont les arêtes sont parallèles à l'axe cristallographique.

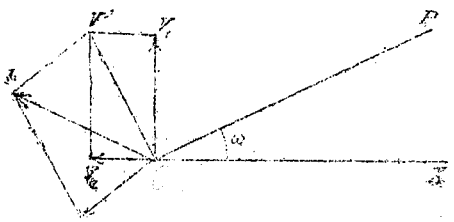
L'expérience montre que si la vibration incidente est perpendiculaire à l'axe, le rayon réfracté possède un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

indice m indépendant de l'angle d'incidence et que l'on mesure comme si le milieu était monoréfringent. Si la vibration incidente est parallèle à l'axe, on constate l'existence du rayon extraordinaire principal d'indice m'. Enfin si la vibration est quelconque, on constate l'existence simultanée de l'un et de l'autre rayon. Dans ce cas, la vibration incidente se décompose en ses deux composantes rectilignes, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à l'axe.

Considérons maintenant le cas tout à fait général où le plan d'incidence ainsi que la face d'incidence soit orientés d'une manière quelconque par rapport à l'axe du cristal et si le rayon incident est formé par de la lumière naturelle. L'expérience montre qu'il y a alors deux rayons réfractés; l'un d'eux est le rayon ordinaire, dont l'indice m est indépendant de l'angle d'incidence et qui suit les deux lois de Descartes, tout comme si le cristal était monoréfringent. L'autre rayon est le rayon extraordinaire; il ne suit en général aucune des lois de Descartes, c'est-à-dire qu'il n'est pas contenu dans le plan d'incidence, et que son indice μ (en désignant par μ le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction) n'est pas indépendant de l'angle d'incidence.

289. — La théorie permet de retrouver ces résultats de l'expérience. La vibration incidente étant quelconque n'est plus rectiligne, mais elle a toujours lieu dans un plan perpendiculaire au rayon incident. Cette vibration, plane à son entrée dans le cristal, se décompose en deux composantes rectilignes perpendiculaires entre elles. L'une de ces composantes OV est perpendiculaire à l'axe du cristal; c'est elle qui constitue le rayon ordinaire. Quant au rayon extraordinaire, il est constitué par la seconde composante



Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

CV'. Ainsi qu'on va le voir, cette vibration CV se propage avec une vitesse qui dépend de l'angle que fait sa direction de propagation avec l'axe : de là l'existence d'un indice μ variable avec l'angle d'incidence ; de là aussi la séparation des deux rayons

Prenons pour plan de la figure le plan de la section principale, c'est-à-dire le plan mené par l'axe CX du cristal normalement à la face d'incidence qui est quelconque. Soit CP la normale menée par le point d'incidence C au plan de l'onde extraordinaire ; soit ω l'angle que fait CP avec CX. La vibration incidente en C se décompose en une composante CV, perpendiculaire à CX et au plan de la figure, — c'est la vibration ordinaire — et en une composante CV' perpendiculaire à CV, située par conséquent dans le plan de la figure.

Nous nous proposons d'obtenir la vitesse de propagation V_ω propre à CV' ; à cet effet, nous ferons usage de la formule de Newton

$$V_\omega = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

ou

$$S = \rho V_\omega^2 \qquad (1)$$

Il importe donc de connaître la valeur du coefficient d'élasticité S qui entre dans cette formule.

Pour cela, décomposons CV' en ses deux composantes situées dans le plan de la figure ; l'une CV_1' perpendiculaire à l'axe CX, l'autre CV_2 dirigée suivant cet axe.

On a donc

$$CV_1' = \sigma \cos \omega$$
$$CV_2 = \sigma \sin \omega$$

en désignant par σ l'élongation CV'

Ces composantes mettent en jeu respectivement des forces élastiques égales à

$$F_1 = S_1 \sigma \cos \omega$$
$$F_2 = S_2 \sigma \sin \omega$$

On remarquera que les coefficients S_1 et S_2 sont connus ; car ils correspondent aux vitesses de propagation O et E. On a

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

donc, en vertu de la formule de Newton

$$O = \sqrt{\frac{S_1}{\rho}}$$

$$E = \sqrt{\frac{S_2}{\rho}}$$

ou

$$S_1 = \rho O^2$$
$$S_2 = \rho E^2 \qquad (2)$$

On cherche ici le coefficient S par lequel il faut multiplier l'élongation σ pour obtenir la force élastique correspondante $S\sigma$. Cette force élastique est la projection sur la direction σ de la force élastique dont les composantes sont F_1 et F_2. Pour obtenir la projection de la résultante, il suffit de faire la somme des projections des composantes. On a donc

$$F = F_1 \cos\omega + F_2 \sin\omega$$

ou

$$S\sigma = S_1 \sigma \cos^2\omega + S_2 \sigma \sin^2\omega$$

et, en supprimant le facteur commun σ, il vient

$$S = S_1 \cos^2\omega + S_2 \sin^2\omega$$

D'après les équations (1) et (2), cette relation peut s'écrire

$$V_\omega^2 = O^2 \cos^2\omega + E^2 \sin^2\omega \qquad (3)$$

En résumé

Toute onde incidente traversant un cristal uniaxe, s'y décompose en deux autres

1° Une onde ordinaire dont les vibrations perpendiculaires à la section principale se propagent avec une vitesse constante O indépendante de la direction

2° Une onde extraordinaire dont la vitesse de propagation V_ω varie avec la direction de propagation suivant la relation (3). Les vibrations extraordinaires sont toujours contenues dans le plan de la section principale.

Surface de l'onde dans les cristaux uniaxes.

290. – Dans les cristaux biréfringents, comme dans les corps monoréfringents, on obtient la position de l'onde plane des rayons réfractés, en appliquant la construction d'Huyghens.

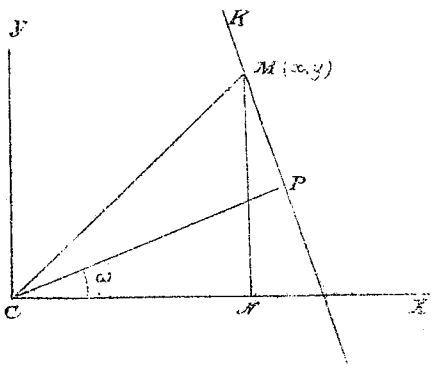
Pour le rayon ordinaire, tout se passe comme si le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

cristal étais monorefringent ; on obtient l'onde réfractée en menant un plan tangent à une sphère ayant pour rayon la vitesse ordinaire, cette sphère est la surface d'onde du rayon ordinaire.

Pour le rayon extraordinaire, cette sphère est remplacée par une autre surface à laquelle on donne le nom de surface d'onde du rayon extraordinaire.

Les propriétés du cristal étant les mêmes dans tous les plans menés par l'axe, la surface de l'onde extraordinaire est de revolution autour de l'axe. Il suffit, pour la déterminer, de trouver l'équation de sa méridienne. Cette méridienne est l'enveloppe de la droite PK trace du plan de l'onde sur le plan de la figure. L'équation de la droite PK se trouve d'ailleurs facilement en écrivant que la projection du segment CM sur CP est égale à V, M étant un point quelconque de la droite PK.



Or proj. CM = proj. CN + proj. NM.

Donc $V = x \cos\omega + y \sin\omega$

D'autre part $V^2 = O^2 \cos^2\omega + E^2 \sin^2\omega$.

On a donc

$$(x \cos\omega + y \sin\omega)^2 = O^2 \cos^2\omega + E^2 \sin^2\omega .$$

ou en ordonnant et divisant par $\cos^2\omega$,

$$(y^2 - E^2)\, tg^2\omega + 2xy\, tg\,\omega + x^2 - O^2 = 0$$

Pour avoir l'enveloppe de la droite, lieu des points xy, il suffit d'éliminer $tg\,\omega$ entre cette équation et sa dérivée ; cela revient à écrire que l'équation du second degré en $tg\,\omega$ a une racine double

L'équation de l'enveloppe sera donc

$$x^2 y^2 - (x^2 - O^2)(y^2 - E^2) = 0$$

ou $$O^2 y^2 + E^2 x^2 - O^2 E^2 = 0$$

ou enfin $$\frac{x^2}{O^2} + \frac{y^2}{E^2} = 1$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La courbe méridienne est une ellipse qui a pour axes l'axe du cristal CX qui est aussi l'axe de révolution de la surface d'onde, et une perpendiculaire CV à l'axe CX.

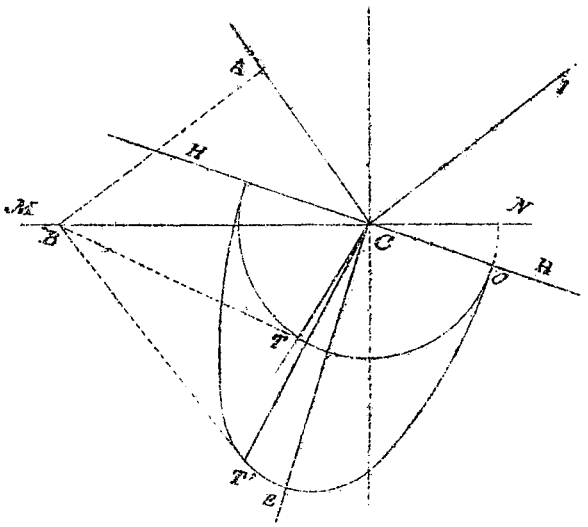
La surface de l'onde extraordinaire est donc un ellipsoïde de révolution engendré par cette ellipse tournant autour de l'axe du cristal. Par sa définition même, cette surface de l'onde jouit des mêmes propriétés que la sphère de Huyghens (§ 224) relativement à la construction des ondes.

Construction d'Huyghens.

Considérons d'abord le cas particulier où la construction d'Huyghens peut se faire dans le plan de la figure.

1° Le plan d'incidence contient l'axe.

291. — Soit IG un rayon incident, HGH' la parallèle à l'axe du cristal menée par le point d'incidence, MN la face réfringente du cristal.



Prenons comme plan de la figure le plan d'incidence HGN. Soit GA la trace du plan de l'onde sur le plan de la figure.

La surface de l'onde ordinaire est la sphère de centre G et de rayon O; sa trace sur le plan de la figure est le cercle GO. La surface de l'onde extraordinaire a pour trace sur le plan de la figure l'ellipse GOE dont les axes sont O et E :

Considérons sur le front de l'onde un point A tel que la vibration lumineuse mette l'unité de temps pour se propager dans le premier milieu de A jusqu'à la rencontre de la surface en B. L'onde GA sera arrivée au bout du temps 1 en B; son intersection avec la surface réfringente est une droite perpendiculaire au plan du tableau en B. Cette droite appartient aussi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

aux ondes réfractées ; celles-ci sont tangentes aux surfaces d'onde (c'est la définition même des surfaces d'onde) ; donc les ondes réfractées s'obtiendront en menant par cette droite B des plans tangents aux surfaces d'onde. Ces plans passant par une droite normale au plan du tableau sont normaux à ce plan ; ils ont pour trace les tangentes BT et BT' au cercle CO et à l'ellipse COE.

Les rayons réfractés sont alors CT et CT'

On voit immédiatement que le rayon ordinaire CT suit les deux lois de Descartes, car nous avons pour ce rayon exactement la même construction que celle qui a été exposée plus haut en partant des lois élémentaires de la réfraction

Le rayon extraordinaire CT' obéit encore à la première loi de Descartes, car il se trouve dans le plan d'incidence ; mais il n'obéit plus à la seconde loi de Descartes

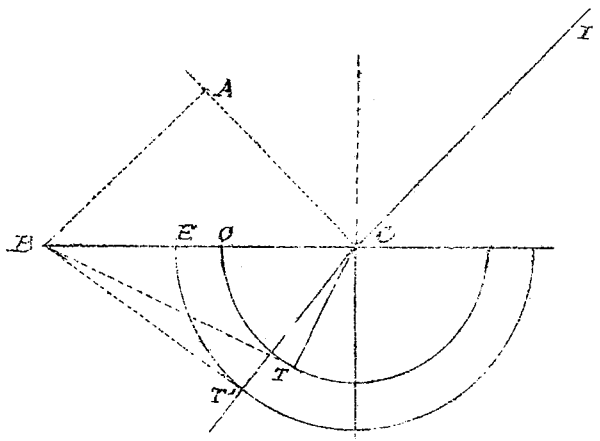
En effet supposons qu'on laisse l'angle d'incidence constant, mais qu'on opère avec différentes lames cristallines pour lesquelles l'angle de la face d'incidence avec l'axe serait différent. La sphère CO reste la même ; mais l'ellipsoïde change de position ; il en est de même de BT' et de CT' ; donc pour une même incidence, le rayon réfracté CT' peut occuper différentes positions ; le rapport de sin i à sin r pour le rayon extraordinaire n'est donc pas constant.

292. Lorsque le rayon incident est parallèle à l'axe ; et la face d'incidence normale à cet axe, les deux points T et T' sont confondus en O. Alors le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire le sont aussi ; ils coïncident avec l'axe cristallographique de la substance. Dans ce cas, les deux rayons réfractés ont non seulement la même direction, mais aussi la même vitesse CO La droite CO est appelée l'axe optique du cristal Cette direction est unique dans le cristal ; c'est pourquoi on donne à un pareil cristal le nom d'uniaxe.

II Le plan d'incidence est normal à l'axe

293. Prenons le plan d'incidence pour plan du tableau ; les sections de l'ellipsoïde extraordinaire et de la sphère ordinaire sont des circonférences de rayons E et C.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



Nous répéterons les mêmes raisonnements et la même construction que précédemment.

On obtiendra comme onde extraordinaire BT et comme onde ordinaire BT

Les deux rayons CT et CT' obéissent séparément aux lois de Descartes, ils se comportent respectivement comme des rayons monoréfringents

Ce cas est précisément celui que l'on rencontre lorsqu'on étudie la biréfringence avec un prisme de quartz dont les faces et l'arête sont parallèles à l'axe

Les triangles BTC et BT'C fournissent

$$O = CT = BC \sin r$$

$$E = CT = BC \sin r'$$

Or dans le triangle ACB on a

$$AB = V = BC \sin i$$

V étant la vitesse de la lumière dans le premier milieu

On en tire $BC = \frac{V}{\sin i}$

et $$O = \frac{V}{\frac{\sin i}{\sin r}} = \frac{V}{m}$$

$$E = \frac{V}{\frac{\sin i}{\sin r'}} = \frac{V}{m'}$$

m et m' étant les indices de réfraction du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire principal.

On voit qu'en désigne sous le nom d'indice de réfraction du rayon extraordinaire principal l'indice constant que l'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

obtient en étudiant la réfringence dans un plan d'incidence perpendiculaire à l'axe.

Cristaux positifs et cristaux négatifs.

294. — Les cristaux uniaxes se subdivisent en deux groupes suivant les valeurs relatives de O et de E.

1° $O > E$. L'ellipsoïde étant de révolution autour de l'axe de longueur O est de révolution autour de son grand axe : il est allongé. On dit alors que le cristal est positif

Dans ce cas $m < m'$

ou $m' - m > 0$

Dans ces cristaux, le rayon extraordinaire est plus près de l'axe que le rayon ordinaire : il est comme attiré par l'axe : aussi ces cristaux sont-ils quelquefois dits attractifs.

2° $O < E$. L'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe : il est aplati. On dit alors que le cristal est négatif.

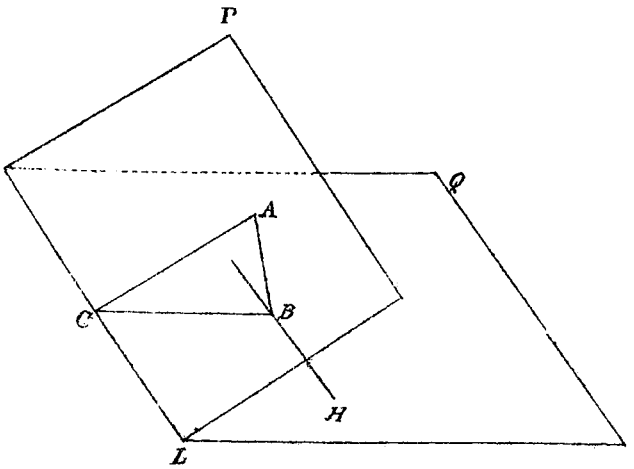
Dans ce cas $m > m'$

ou $m' - m < 0$.

Ces cristaux sont quelquefois dits répulsifs.

Construction de Huyghens dans le cas où le plan d'incidence est quelconque.

295. — Soit P le plan de l'onde incidente, Q celui de la face incidente ; menons par le point d'incidence C la perpendiculaire CA à l'intersection des deux plans P et Q ; prenons le point A tel que la vibration lumineuse mette un temps égal à l'unité pour



16.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

aller de A à la surface réfringente en B. L'onde incidente au bout du temps 1 passera par la droite BH parallèle à CL. Il en sera de même des ondes réfractées. On les construira en menant par BH les plans tangents à la sphère et à l'ellipsoïde d'onde. Il est évident que le rayon ordinaire vérifiera toujours les lois de Descartes, quant au rayon extraordinaire il ne vérifie aucune de ces lois, le point de contact du plan tangent à l'ellipsoïde mené par BH ne sera pas en général dans le plan d'incidence AGB.

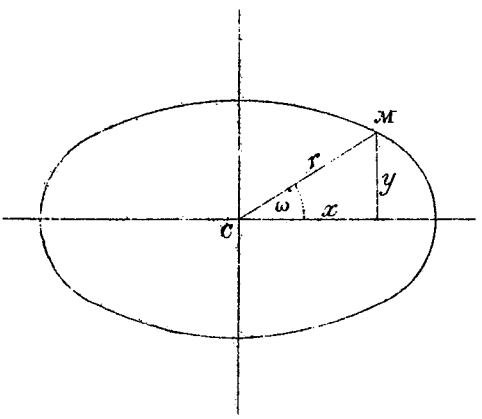
Indice de réfraction du rayon extraordinaire dans une direction donnée.

296. – L'indice de réfraction du rayon extraordinaire dans une direction déterminée est le rapport entre la vitesse de la lumière dans le premier milieu et la vitesse dans la direction considérée et comptée suivant le rayon dans le second milieu. Cette vitesse est égale au rayon vecteur r de l'ellipsoïde.

Si on désigne par μ l'indice de réfraction dans une direction faisant un angle ω avec l'axe optique du cristal, on a

$$\mu = \frac{V}{r}$$

V étant la vitesse dans le premier milieu.



Or si x et y sont les coordonnées du point M cherché tel que $CM = r$, on a

$$x = r \cos\omega$$
$$y = r \sin\omega$$

d'où en portant dans l'équation de l'ellipse méridienne

$$\frac{\cos^2\omega}{O^2} + \frac{\sin^2\omega}{E^2} = \frac{1}{r^2}$$

Or $O = \frac{V}{m}$, $E = \frac{V}{m'}$.

donc $m^2 \cos^2\omega + m'^2 \sin^2\omega = \mu^2$

En remplaçant $\cos^2\omega$ par $1 - \sin^2\omega$, il vient

$$m^2 + (m'^2 - m^2)\sin^2\omega = \mu^2$$

ou $(m'^2 - m^2)\sin^2\omega = \mu^2 - m^2$

$$(m' - m)(m' + m)\sin^2\omega = (\mu - m)(\mu + m)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Comme μ est intermédiaire entre m et m', on peut confondre $m + m$ et $\mu + m$; on aura

$$(m' - m) \sin^2 \omega = \mu - m$$

équation qui permet de déterminer μ.

Applications

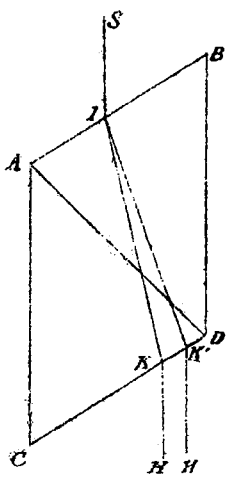
Appareils de polarisation fondés sur la double réfraction.

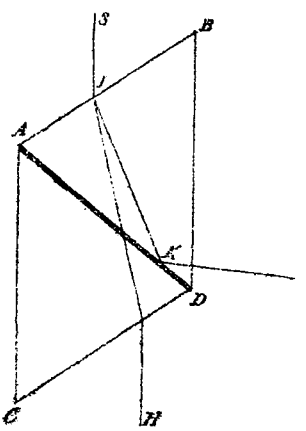
297. — Les cristaux bi-réfringents sont des polariseurs parfaits, ils décomposent un faisceau lumineux qui tombe sur eux en deux faisceaux polarisés à angle droit. Mais pour qu'on puisse les utiliser comme appareils de polarisation, il faut que les deux faisceaux soient séparés. Diverses dispositions ont été proposées dans ce but : nous étudierons celles qui sont le plus employées : le prisme de Nicol ou comme on dit plus communément le Nicol, le prisme biréfringent et les lames de tourmaline.

Nicol

298 — Soit ABCD la section d'un parallélipipède de spath, SI un faisceau incident tombant sur ce parallélipipède et contenu dans le plan de la section principale.

Ce faisceau se dédouble à son entrée dans le cristal en deux rayons l'un IK extraordinaire, l'autre IK' ordinaire qui sortent parallèlement au rayon incident en KH, K'H'.





Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Nous pouvons séparer les deux faisceaux en coupant le parallélipipède suivant AD et séparant les deux parties que nous recollerons ensuite à une faible distance l'une de l'autre avec du baume de Canada.

En choisissant convenablement les dimensions du prisme, on pourra faire que l'un des faisceaux IK' soit réfléchi totalement sur la surface AD.

Il n'est pas nécessaire d'interposer du baume de Canada entre les deux parties du prisme. Foucault a construit des nicols en séparant les deux parties par une simple lame d'air.

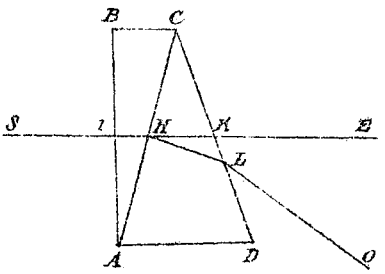
En résumé un nicol est un cristal biréfringent disposé de façon que l'un des rayons, le rayon ordinaire soit éliminé par la réflexion totale. Le rayon extraordinaire traverse seul le cristal.

Prisme biréfringent.

293. — Une lame de spath à faces parallèles sépare peu les faisceaux ordinaire et extraordinaire à moins qu'elle n'ait une épaisseur considérable. On obtient une séparation plus complète avec un prisme de spath; mais il a l'inconvénient de dévier le faisceau incident et de disperser la lumière. Pour remédier à ce défaut, on l'achromatise par un prisme de crown qui corrige la déviation et annule presque complètement la dispersion de l'un des faisceaux.

L'appareil se compose alors d'un prisme de crown ABC, et d'un prisme de spath ACD.

La face CD est une face naturelle du cristal; la face AC est taillée perpendiculairement à la section principale.



Un rayon incident SI tombant normalement sur le crown s'y propage sans déviation en IH; en H

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

il est décomposé en un rayon ordinaire et un rayon extraordinaire. Mais l'indice extraordinaire du spath (1,486) étant à peu près le même que celui du crown (1,51), le rayon extraordinaire n'est pas dévié et se propage en HKE. Le rayon ordinaire au contraire est dévié vers la base en HLO, car son indice est beaucoup plus grand (1,658) que celui du crown. Les deux faisceaux sont ainsi séparés.

Propriétés particulières de la tourmaline.

300. — La tourmaline se trouve dans la nature cristallisée en prismes hexagonaux de couleur verte. C'est donc un cristal biréfringent uniaxe, comme ceux que nous avons étudiés. Mais en outre, elle jouit d'une propriété particulière. Si on taille la tourmaline parallèlement à l'axe, on observe, pour peu que la lame soit épaisse que le rayon émergent est polarisé dans un plan perpendiculaire à l'axe. c'est le rayon extraordinaire. Quant au rayon ordinaire, il a été absorbé par le cristal. Une tourmaline constitue donc un polariseur très simple et qui peut remplacer le nicol, dans les cas où sa coloration verte ne gêne pas.

Polarisation chromatique.

301. — Si entre un polariseur et un analyseur à l'extinction, on introduit un lame monoréfringente, l'extinction subsiste. Il n'en est plus de même si la lame est biréfringente : la lumière reparaît alors, blanche si la lumière employée est blanche et la lame suffisamment épaisse, colorée, si cette lame est suffisamment mince.

Les phénomènes présentés par une lame biréfringente intercalée entre un polariseur et un analyseur sont dits de polarisation chromatique.

Théorie de la polarisation chromatique.

302. — Lorsqu'un faisceau de lumière polarisée tombe sur un cristal biréfringent, il est décomposé en deux faisceaux, l'un ordinaire constitué par des vibrations perpendiculaires à la section principale, l'autre extraordinaire constitué par des vibrations qui se font dans le plan même de la section principale.

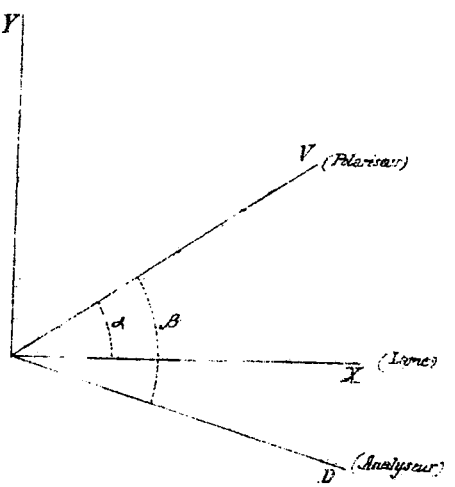
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

les deux ondes correspondantes traversent une même épaisseur de cristal avec des vitesses différentes donc elles ont à la sortie des retards différents, tout comme si elles avaient acquis une certaine différence de marche dans l'air.

Les deux vibrations correspondantes ne peuvent cependant pas interférer, car elles sont rectangulaires et les interférences ne se produisent qu'entre des vibrations de même direction. Grâce à l'analyseur il peut y avoir interférence. En effet le nicol analyseur ne laisse passer que les vibrations qui se font dans le plan de sa section principale, les vibrations qui ont traversé l'analyseur étant parallèles peuvent interférer. Soient alors a et a' les amplitudes des deux vibrations qui interfèrent, φ leur différence de phase; on sait (§ 107) que l'amplitude résultante A est donnée par la relation $A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos\varphi$

Proposons nous dans le cas présent de calculer a, a' et φ.

Soient OV la direction des vibrations que laisse passer le polariseur; OX, OY les directions des vibrations ordinaires et extraordinaires de la lame cristalline, OD la direction des vibrations que transmet l'analyseur.



Désignons par α l'angle de OV avec OX, et par β l'angle de OV avec OD; prenons comme unité l'amplitude de la vibration transmise par le polariseur. Cette vibration, par son passage dans la lame cristalline est décomposée en ses deux composantes suivant OX et OY; leur amplitude est

suivant OX . . . . . $\cos\alpha$

suivant OY . . . . . $\sin\alpha$

A leur sortie de la lame, ces deux composantes ont

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

une différence de phase $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$, en appelant δ la différence de marche des rayons ordinaire et extraordinaire.

Soit m l'indice de réfraction ordinaire

m' l'indice de réfraction extraordinaire

e l'épaisseur du cristal.

Le chemin équivalent dans l'air à celui qui a été parcouru par le rayon ordinaire dans le cristal est me

Le chemin équivalent à celui qui a été parcouru par le rayon extraordinaire est $m'e$

Donc $$\delta = (m' - m)e$$

et $$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{(m'-m)e}{\lambda}$$

Les deux vibrations suivant OX et OY se composent pour donner une vibration elliptique (§ 44). Si on les reçoit sur un analyseur celui-ci ne laissant passer que les vibrations suivant OD prélève sur les vibrations OX et OY leur composante suivant OD.

La vibration $\cos\alpha$ dirigée suivant OX a suivant OD une composante dont l'amplitude est $a = \cos\alpha \cos(\beta - \alpha)$.

La vibration $\sin\alpha$ dirigée suivant OY a suivant OD une composante dont l'amplitude est

$$a' = \sin\alpha \cos\left(\beta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \sin(\beta - \alpha)$$

L'amplitude A de la vibration résultante est donc donnée par la relation

$$A^2 = \cos\alpha \cos^2(\beta-\alpha) + \sin^2\alpha \sin^2(\beta-\alpha) - 2\cos\alpha \sin\alpha \cos(\beta-\alpha) \sin(\beta-\alpha) \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

Or

$$\cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

Donc

$$A^2 = [\cos\alpha \cos(\beta-\alpha) - \sin\alpha \sin(\beta-\alpha)]^2 + 4\cos\alpha \cos(\beta-\alpha) \sin\alpha \sin(\beta-\alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

ou finalement

$$A^2 = \cos^2\beta + \sin 2\alpha \sin 2(\beta-\alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} \qquad (1)$$

Si l'analyseur au lieu d'être un nicol avait été un prisme biréfringent, on aurait eu deux images, l'une produite par l'interférence des vibrations dirigées suivant OD, l'autre produite par l'interférence des vibrations dirigées dans un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

plan perpendiculaire. Pour obtenir l'intensité de cette seconde vibration, il suffit de changer β en $\beta + \frac{\pi}{2}$. On obtient alors

$$A'^2 = \sin^2\beta - \sin 2\alpha \sin^2(\beta - \alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} \qquad (2)$$

Quelles que soient les circonstances dans lesquelles on se place, on voit que les deux images seront toujours complémentaires : on a en effet

$$A^2 + A'^2 = 1$$

Si on prend comme analyseur un nicol et si on le fait tourner de 90°, on change encore β en $\beta + \frac{\pi}{2}$; on doit observer des phénomènes complémentaires. Ce fait est facile à vérifier par l'expérience.

Signification physique des termes qui entrent dans l'expression de l'intensité.

303. — Supposons que le faisceau incident soit un faisceau de lumière blanche. Si on supprimait la lame cristalline l'amplitude de la vibration transmise par le nicol analyseur serait $\cos\beta$; donc le premier terme du second membre de (1) représente ce qui passerait de la lumière blanche incidente si on recevait directement le faisceau sur l'analyseur. On conçoit en effet que dans ce cas, quelles que soient les longueurs d'onde des radiations incidentes, les intensités de ces radiations sont réduites dans le même rapport.

Quant au second terme

$$\sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

sa valeur dépend de λ. Pour certaines valeurs de λ ce terme est maximum, pour d'autres valeurs, il est nul. Les radiations pour lesquelles $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$ sont éteintes ; la coloration est due à la superposition des autres radiations. C'est donc à ce second terme qu'est due la coloration : aussi lui donne-t-on par abréviation le nom de terme coloré. Le premier terme est le terme blanc.

Pour une position déterminée du polariseur, de l'analyseur et de la lame, l'effet observé est dû à la superposition de la lumière blanche et de la lumière colorée dont l'intensité est représentée par le terme coloré.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

La valeur du terme coloré dépend non seulement de λ, mais aussi de δ et enfin des angles α et β. Pour discuter les conséquences de la formule (1), nous distinguerons deux cas.

I. Polarisation chromatique en lumière parallèle.

304. — Considérons d'abord le cas particulier où la lame cristalline est placée entre deux nicols à l'extinction. Alors $\beta = \frac{\pi}{2}$, ou $\cos\beta = 0$. Donc

$$A^2 = \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

Pour une position particulière de la lame cristalline α est fixe; donc la valeur de A^2 ne dépend que de $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$.

Supposons que l'on opère en lumière monochromatique; λ est déterminé; la valeur de $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$ varie avec δ. Or

$$\delta = (m' - m)e$$

si on prend des cristaux d'épaisseur croissant à partir de 0, δ croît à partir de 0. Pour une valeur convenable de e on a

$$\frac{\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\delta = \frac{\lambda}{2}$$

Alors A^2 est maximum. Le cristal qui donne ainsi un maximum de lumière pour une radiation déterminée est dit cristal demi onde pour cette radiation.

Si au contraire $\frac{\pi\delta}{\lambda} = \pi$

ou

$$\delta = \lambda$$

A^2 est nul; donc l'extinction subsiste. Un tel cristal est un cristal d'une onde entière.

e croissant, la valeur de δ passe successivement par des valeurs telles que $\frac{\pi\delta}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

ou que $\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$

et par des valeurs telles que

$$\frac{\pi\delta}{\lambda} = n\pi$$

ou

$$\delta = n\lambda$$

Pour les premières, A^2 est maximum; pour les secondes, A^2 est égal à 0.

Le phénomène observé dépend donc de l'épaisseur; l'expérience

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

met cette influence de l'épaisseur en évidence de plusieurs manières

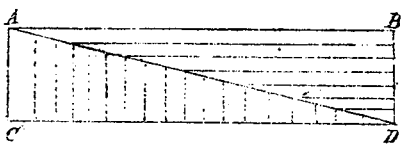
Influence de l'épaisseur.

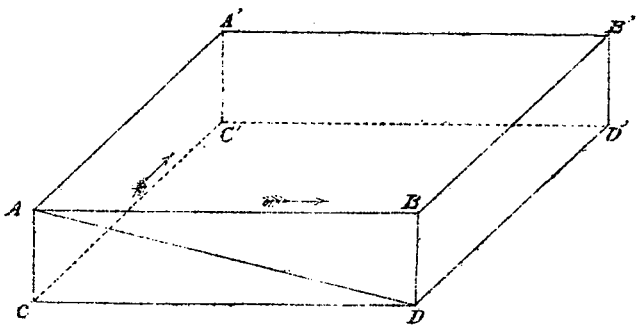
305. — L'expérience peut être disposée de manière à obtenir des franges analogues aux franges d'interférence ou aux anneaux de Newton.

1° Prenons par exemple un prisme de quartz dont les arêtes sont parallèles à l'axe du cristal et dont l'angle est très aigu. L'épaisseur du prisme varie de 0 à e. La différence de marche entre les rayons ordinaires et les rayons extraordinaires varie de 0 à $e(n-n')$.

Si on place un tel prisme entre deux nicols à l'extinction et éclairés par de la lumière monochromatique parallèle, pour tous les points où $\delta = n\lambda$, l'extinction subsiste, pour tous les points où $\delta = (n+\frac{1}{2})\lambda$, il y a maximum d'éclairement. Donc on observera des franges alternativement brillantes et obscures.

2° On peut disposer deux prismes de quartz de manière à obtenir une différence de marche variable à volonté ; c'est le but du compensateur de Babinet.





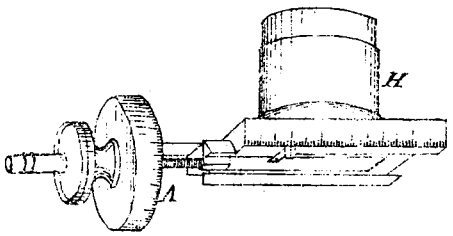
Compensateur de Babinet.

306. — Le compensateur de Babinet perfectionné par Jamin se compose de deux prismes de quartz très aigus, à base de triangle rectangle ABD, ACD accollés par leur face hypoténuse de manière que leur ensemble forme un parallélipipède rectangle. Les lames sont taillées parallèlement à l'axe du cristal, mais sont croisées.

Dans le prisme

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

supérieur ABD, l'axe du cristal est parallèle au long côté AB ; dans le prisme inférieur AGD l'axe est parallèle aux arêtes du prisme GG'.



Dans l'appareil de Chamin, l'un des prismes est fixé sur la bonnette H ; l'autre se déplace parallèlement à son axe par le jeu de la vis micrométrique V qui mesure son déplacement.

Etudions l'effet produit sur le rayon lumineux par un compensateur.

Le faisceau tombant normalement sur la face AB A'B' du premier quartz se dédouble 1° en un faisceau ordinaire dont les vibrations sont perpendiculaires au plan de la section principale et se propagent avec une vitesse O ; 2° en un faisceau extraordinaire dont les vibrations qui sont dans le plan de la section principale se propagent avec une vitesse E.

Les deux faisceaux suivent la même direction et se présentent à la surface du second quartz déjà polarisés. Les axes et par suite les sections principales de deux quartz étant perpendiculaires, les vibrations ordinaires du premier quartz se font dans le plan de la section principale du second quartz et y deviennent vibrations extraordinaires se propageant avec la vitesse E. Inversement le rayon extraordinaire dans le premier quartz devient ordinaire dans le second.

Soit e l'épaisseur traversée dans le premier quartz
e' l'épaisseur traversée dans le second
m et m' les indices ordinaire et extraordinaire du quartz
La différence de marche contractée dans le premier quartz est $(m - m')e$
Dans le second quartz, elle est $(m' - m)e'$
La différence de marche totale est

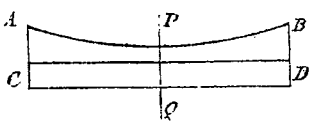
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$\delta = (m - m')(e - e')$$

Si on fait glisser le second quartz sur le premier, e reste constant, e' varie ; e - e' varie. On peut donc avec cet appareil introduire entre les deux rayons une différence de marche variable à volonté. Supposons les deux prismes dans une position invariable l'un par rapport à l'autre. Le compensateur placé entre deux nicols à l'extinction et éclairés par une lumière simple donne des franges obscures aux points où $\delta = n\lambda$ et brillantes aux points où $\delta = (n + \frac{1}{2})\lambda$. Si les deux prismes sont égaux, au milieu $e = e'$, donc $\delta = 0$. A ce point correspond une frange obscure qui est une ligne de symétrie du phénomène ; c'est la frange centrale.

Cuvette hémisphérique de Biot.

307. — Biot a modifié cette disposition de manière à obtenir un phénomène analogue à celui des anneaux de Newton. Il superposait deux lames de quartz AB et CD, toutes deux parallèles à l'axe, mais disposées de façon que les axes dans les deux lames soient rectangulaires. La lame supérieure AB avait été creusée en cuvette sphérique de façon que l'épaisseur au centre P fût égale à l'épaisseur constante de CD



En un point quelconque de la lame, la différence de marche entre les rayons ordinaire et extraordinaire est comme dans le cas du compensateur

$$\delta = (e - e')(m - m')$$

Au centre $e = e'$, donc $\delta = 0$; l'obscurité subsiste. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour le compensateur montre qu'en lumière monochromatique on obtient des anneaux alternativement obscurs et brillants.

Phénomènes observés en lumière blanche.

308. — Supposons maintenant qu'on opère en lumière blanche. Il peut alors arriver qu'un même cristal soit un cristal demi-onde pour certains λ, qu'il soit au contraire un cristal onde entière pour d'autres λ. La lumière qui

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

traverse l'analyseur ne contient pas les radiations pour lesquelles

$$\delta = n\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{\delta}{n} \qquad (I)$$

Les radiations pour lesquelles

$$\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{\delta}{n + \frac{1}{2}} \qquad (II)$$

ont au contraire une intensité maximum.

On obtient alors une teinte due à la superposition de toutes les radiations satisfaisant à la condition (II). Il est facile de constater que cette lumière n'est pas une lumière simple : il suffit pour cela de recevoir le faisceau lumineux sur un spectroscope à sa sortie de l'analyseur. Le spectre obtenu est un spectre cannelé où manquent toutes les radiations (I).

Le phénomène obtenu en lumière blanche devient très brillant avec le compensateur ou avec la cuvette sphérique de Biot (306, 307).

Dans le plan médian du compensateur on a en effet $e = e'$, $\delta = 0$ pour toutes les radiations : l'obscurité subsiste : c'est la frange centrale. De chaque côté, le violet est éteint en un point tel que $\delta = \lambda_v$, point où le rouge n'est pas encore éteint ; le rouge est éteint en un point tel que $\delta = \lambda_r$, point où le violet n'est pas éteint ; on obtient donc des franges irisées présentant le rouge en dedans et le violet en dehors.

Le même résultat est obtenu avec la cuvette hémisphérique de Biot.

Aux points éloignés du centre du phénomène, on obtient du blanc supérieur qui au spectroscope donne un spectre cannelé.

Cas général où le polariseur et l'analyseur sont dans des positions quelconques.

309. — La formule (1)

$$A^2 = \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2(\beta - \alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}.$$

va nous permettre de nous rendre compte de ce qui arrive quand on fait tourner l'analyseur, ou le polariseur ou la lame cristalline.

1er Cas.

310. — On fait tourner la lame cristalline.

Alors α varie, β reste fixe.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Le terme coloré peut s'annuler pour

$$\sin 2\alpha = 0$$

et $\sin 2(\beta - \alpha) = 0$

c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\alpha = \beta \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Supposons $\beta < \frac{\pi}{2}$. Nous pourrons représenter la variation de l'image par le tableau suivant

α	Terme coloré	Image
0	Nul	Blanche
	+	Teinte T
β	Nul	Blanche
	—	Teinte complémentaire de T
$\frac{\pi}{2}$	Nul	Blanche
	+	Teinte T
$\beta + \frac{\pi}{2}$	Nul	Blanche
	—	Teinte complémentaire de T
π	Nul	Blanche

A partir de $\alpha = \pi$ les mêmes phénomènes se reproduisent car A^2 ne change pas si on change α en $\alpha + \pi$.

On voit donc que dans une rotation de la lame, il y a huit changements de teinte lorsque le polariseur et l'analyseur sont dans une position quelconque.

Si les deux nicols étaient à l'extinction, les résultats seraient différents : on a alors

$$A^2 = \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}.$$

Le terme coloré conserve un signe constant. Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on obtient non plus de la lumière blanche, mais l'extinction ($A = 0$) et cela sans changement de teinte. La teinte a d'ailleurs la plus grande intensité pour

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha = 45°$$

et $2\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ou $\alpha = 135°$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

2e Cas.

311. — On fait tourner l'analyseur.

Alors β varie ; α reste fixe.

Le terme coloré s'annule pour $\beta = \alpha$, $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$

Soit encore $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Nous représenterons les diverses phases du phénomène dans le tableau suivant

β	Terme coloré	Image
$0 < \beta < \alpha$	—	Teinte T
α	Nul	Lumière blanche
$\alpha < \beta < \alpha + \frac{\pi}{2}$	+	Teinte complémentaire de T
$\alpha + \frac{\pi}{2}$	Nul	Lumière blanche
$\alpha + \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$	—	Teinte T

Même remarque que précédemment lorsque β est supérieur à π.

Par une rotation complète de l'analyseur on produit quatre fois le changement d'une teinte en sa complémentaire en passant par l'intermédiaire de la lumière blanche.

On peut analyser la teinte obtenue en recevant le faisceau émergent sur la fente d'un spectroscope. Toutes les radiations pour lesquelles δ est un nombre entier ne figurent pas dans le spectre. On obtient un spectre cannelé : si l'on vient à faire tourner l'analyseur de 90° la teinte se change en sa complémentaire ; les franges obscures du spectre se changent en franges lumineuses et inversement.

312. — On arriverait aux mêmes résultats si l'on faisait tourner l'analyseur au lieu de faire tourner le polariseur.

II. Polarisation chromatique dans la lumière divergente.

313. — Supposons qu'un faisceau de lumière émané d'un point tombe sur une lame d'un cristal uniaxe. L'épaisseur du cristal traversée par le rayon dépend de l'inclinaison du rayon : il en résulte que d'un point d'incidence à l'autre, la différence de marche entre les rayons ordinaire et extraordinaire issus d'un même incident est variable.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Nous n'étudierons que le cas particulier où la lame cristalline est taillée perpendiculairement à l'axe du cristal. Si on place entre deux nicols à l'extinction une lame de spath ainsi travaillée, on observe une série d'anneaux analogues aux anneaux de Newton ; mais ces anneaux sont coupés par une croix noire suivant deux diamètres rectangulaires. Si l'on vient à tourner l'analyseur de 90°, chaque couleur se change en sa complémentaire ; la croix noire se change en croix blanche. Enfin si l'angle de l'analyseur avec le polariseur est quelconque, la position des anneaux change, et la croix noire est remplacée par une double croix grise.

Théorie du phénomène.

314. La théorie du phénomène est la même que celle que nous avons faite dans le cas de la lumière parallèle.

Il est d'abord évident que le phénomène observé doit être symétrique par rapport au rayon qui tombe normalement sur la lame cristalline. En effet ce rayon coïncidant avec l'axe optique, le cristal et le faisceau lumineux tant incident qu'émergent sont symétriques par rapport à lui.

D'autre part l'analyseur et le polariseur étant primitivement à l'extinction, on voit immédiatement que le centre du phénomène doit être noir : car les deux rayons qui se propagent suivant l'axe, ayant des vitesses égales ont à la sortie du cristal une différence de marche nulle et par suite ne peuvent interférer.

Si dans un azimuth quelconque passant par l'axe du phénomène, on considère des points de plus en plus éloignés du centre, c'est-à-dire des rayons de plus en plus éloignés de l'axe, la valeur de δ va en croissant à partir de 0. Quant à l'angle α que font entre eux les plans de vibration du polariseur et du rayon ordinaire dans le cristal, cet angle est constant pour tous les points d'un même azimuth, car cet azimuth coïncide avec le plan de vibration du rayon ordinaire. L'angle α est donc en même

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

temps l'angle que fait avec le plan de vibration du polariseur un azimuth passant par l'axe. Il résulte de cette remarque que dans la formule (1) (§ 302).

$$A^2 = \cos^2\beta + \sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

représente l'intensité en un point quelconque du champ ayant pour coordonnées polaires α et δ.

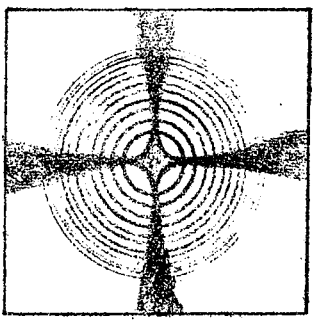
Considérons d'abord le cas particulier où les deux nicols sont à l'extinction. On a $\alpha\beta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\beta = 0$ et la formule (1) se réduit à

$$(2)\quad A^2 = \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}.$$

Croix noire.

315 — Quelle que soit la valeur de λ et celle de δ, A^2 est nul pour $\sin 2\alpha = 0$, c'est-à-dire pour

$$\alpha = 0 \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$



On obtient ainsi la position des branches de la croix noire. On voit que ces branches coïncident avec le plan de vibration du polariseur et avec le plan qui lui est perpendiculaire. En effet en tous les points des azimuths $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $A^2 = 0$, quelle que soit la valeur de δ.

Anneaux.

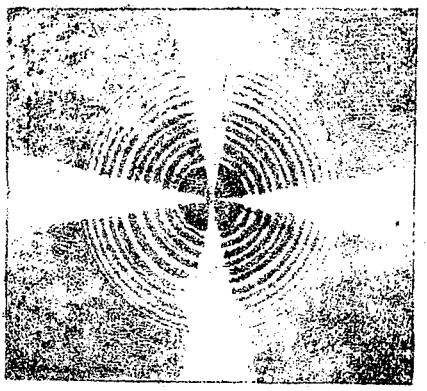
316. — Considérons maintenant un azimuth quelconque; α étant quelconque, le premier facteur de A^2, $\sin^2 2\alpha$, est toujours positif et constant pour tous les points du même azimuth. A^2 ne peut plus s'annuler que pour certains points tels que le second facteur $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$ soit égal à zéro, c'est-à-dire pour les valeurs de δ telles que

$$\delta = n\lambda$$

n étant un nombre entier.

Attribuons à λ une valeur déterminée, ce qui revient à supposer que l'on opère en lumière monochromatique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



On voit que l'on obtient de l'obscurité pour tous les points tels que l'on ait :
$\delta = 0$ $\delta = \lambda$ $\delta = 2\lambda$ $\delta = 3\lambda$ etc
c'est-à-dire pour le centre et pour une série de circonférences concentriques
On obtient donc en lumière monochromatique une série d'anneaux noirs. Pour tous les points d'une même circonférence $A^2 = 0$, car pour $\delta = n\lambda$, $\sin\frac{\pi\delta}{\lambda}$ est égal à zéro, quel que soit α

Les valeurs intermédiaires de δ rendent $\sin^2\frac{\pi\delta}{\lambda}$ égal à l'unité ; ce sont les valeurs de δ telles que

$$\frac{\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}(2n+1)$$

$$\text{ou} \quad \delta = n\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

Les anneaux noirs alternent donc avec des anneaux brillants ; et l'intensité en un point quelconque d'un anneau brillant est donnée par la formule

$$A^2 = \sin^2 2\alpha$$

Cette intensité varie donc avec l'azimuth α et elle s'annule, comme nous l'avons vu, pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire pour les branches de la croix noire

En résumé on obtient en lumière monochromatique, une croix noire, et une série d'anneaux concentriques, alternativement noirs et brillants.

Lois des rayons des anneaux.

Ainsi qu'on vient de le voir, les rayons des anneaux noirs, sont tels que l'on ait successivement

$$\delta = \lambda \quad \delta = 2\lambda \quad \delta = 3\lambda$$

les valeurs de δ croissent donc comme les nombres entiers 1.2.3....
D'autre part la différence de marche δ est égale à $(p - m)e$, e étant l'épaisseur traversée ; on a vu (§ 296) que l'on avait

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$\mu - m = (m' - m) \sin^2 \omega$$

ω étant l'angle que fait le rayon considéré avec l'axe du cristal. On démontre aisément que si les angles ω sont petits, les valeurs de $\sin\omega$ ou de ω sont proportionnelles aux valeurs du rayon vecteur d'un point quelconque du phénomène. Il s'ensuit que les carrés de ces rayons pour tous les points situés sur des anneaux noirs sont entre eux comme les nombres λ, 2λ, 3λ, ... c'est-à-dire proportionnels aux nombres entiers consécutifs.

En d'autres termes la loi des rayons est la même que celle des anneaux de Newton par réflexion.

Si l'on opère avec de la lumière blanche, les phénomènes dus aux différentes lumières simples se superposent, et l'on obtient des anneaux irisés, disposés comme les anneaux de Newton par réflexion.

Cas où l'angle α est quelconque

317. — L'angle α étant quelconque, l'intensité A^2 est donnée par la formule (1)

$$A^2 = \cos^2\beta + \sin 2\alpha \sin 2(\beta - \alpha) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$$

L'éclairement est donc représenté par une somme de deux termes.

Lignes neutres. — Croix grise.

318. — Considérons d'abord les points du plan où le second terme s'annule ; le premier seul subsiste.

Cette condition est satisfaite pour les points où l'on a

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$\text{ou bien} \quad \sin 2(\beta - \alpha) = 0$$

Pour que $\sin 2\alpha = 0$, il suffit que l'on ait

$$\alpha = 0$$

$$\alpha' = \frac{\pi}{2}$$

Suivant ces deux directions à angle droit OV et OV' l'éclairement se réduit à $\cos^2\beta$. Les droites correspondantes sont appelées des lignes neutres. Ce sont les deux branches d'une croix qui est grise, si la lumière incidente est blanche. En effet le terme $\cos^2\beta$ est indépendant de λ ; toutes les radiations incidentes qui constituent la lumière blanche ont donc leur intensité réduite

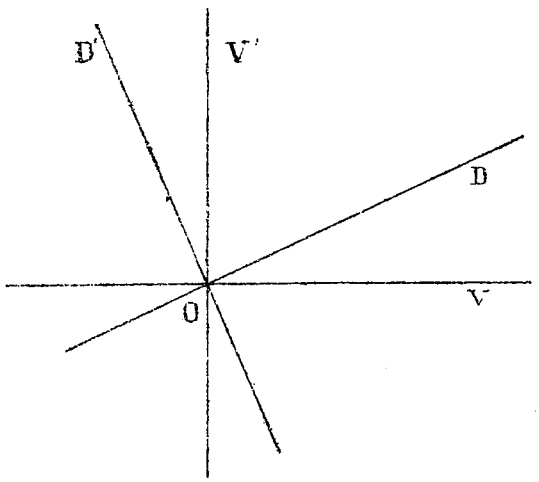
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

dans le même rapport de 1 à $\cos^2\beta$.

Pour que $\sin 2(\beta-\alpha)=0$, il faut que

$$\alpha=\beta$$

$$\text{ou} \quad \alpha=\beta+\frac{\pi}{2}$$



C'est-à-dire qu'on a deux autres lignes neutres l'une OD dans le plan qui contient les vibrations de l'analyseur et l'autre OD' dans le plan perpendiculaire. On obtient ainsi les deux branches d'une seconde croix grise, car suivant ces nouvelles directions l'intensité est encore réduite dans le rapport de 1 à $\cos^2\beta$.

Anneaux.

319. — Dans l'intervalle des lignes neutres, l'espace est recouvert d'anneaux. Pour expliquer leur existence, supposons d'abord que nous éclairions le système avec une lumière simple de longueur d'onde λ. Alors pour tous les points tels que

$$\frac{\pi\delta}{\lambda}=n\pi$$

ou

$$\delta=n\lambda$$

n étant un nombre entier quelconque, la valeur de A^2 est réduite à $\cos^2\beta$. On obtient ainsi une série d'anneaux ayant même éclairement que les lignes neutres.

Si la lumière incidente est blanche, l'équation $\delta=n\lambda$ n'est satisfaite en un point que par certaines valeurs de λ; le second terme n'est pas nul pour les autres valeurs de λ; les anneaux en question présentent alors une coloration correspondante.

320. — Les deux croix grises qui constituent les lignes neutres partagent le champ en huit angles consécutifs. Il faut remarquer que lorsque l'on passe d'un des angles au suivant, le système des anneaux se change en son complémentaire : de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

sorte que d'un angle au suivant, les anneaux au lieu de se continuer, sont au contraire alternés. En effet, les branches des deux croix grises sont situées dans des azimuths tels que le second terme de la valeur de A^2 s'y annule en changeant de signe. Il en résulte que si l'on considère deux azimuths quelconques, mais convenablement inclinés sur la branche de croix qui les sépare, les valeurs du second terme de A^2 ne diffèrent, pour une même valeur de δ, que par leur signe. La somme des valeurs de A^2 correspondantes est donc égale à $2\cos^2\beta$, c'est-à-dire que les éclairements aux points correspondants sont complémentaires.

321. — D'après la discussion précédente, on prévoit comment le phénomène varie, lorsque l'on fait tourner l'une des parties du système qui le produit.

Si l'on fait tourner la lame cristalline dans son plan, il est évident que le phénomène reste le même, puisque la lame est symétrique par rapport à son axe.

Si au contraire on fait tourner le polariseur la croix OVV' tourne dans le même sens. La croix DOD' reste fixe ; en même temps comme l'angle β change, l'intensité de la lumière dans les croix et dans les anneaux varie.

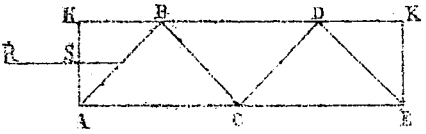
Si enfin on fait tourner l'analyseur en laissant le polariseur fixe, la croix OVV' reste fixe ; la croix DOD' suit le mouvement de l'analyseur ; l'intensité de la lumière dans les croix et les anneaux varie avec β comme dans le cas précédent.

Double réfraction accidentelle.

322. — Les substances cristallisées ne sont pas les seules qui présentent les phénomènes de biréfringence. On peut communiquer à une substance monoréfringente, telle que le verre, les propriétés optiques des substances biréfringentes, en la soumettant à des actions mécaniques ou élastiques qui la rendent anisotrope : on produit ainsi la double réfraction dite accidentelle.

323. — Fresnel a montré qu'un prisme de verre ordinaire, monoréfringent devient biréfringent lorsqu'on le soumet à une compression mécanique dans la direction de ses arêtes. Son appareil, que l'on peut voir à l'observatoire de Paris, se compose d'une série de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



prismes de verre que l'on peut comprimer au moyen de petites presses à vis et qui sont séparés par des prismes de verre que l'on ne comprime pas et qui compensent exactement la dispersion produite par les premiers.

Un rayon de lumière traversant le système est donc transmis sans déviation ni dédoublement quand les presses ne fonctionnent pas : au contraire, dès qu'on fait agir les vis, le rayon se dédouble en deux rayons polarisés à angle droit.

324 : — Au lieu de cette démonstration directe qui exige un appareil spécial, il est plus commode d'utiliser les phénomènes de polarisation chromatique pour mettre en évidence la double réfraction acquise par le verre.

Entre deux nicols à l'extinction, on place un cube de verre monoréfringent. Ce cube est serré entre deux mâchoires qui peuvent le comprimer suivant une direction à 45° du plan de polarisation de la lumière incidente.

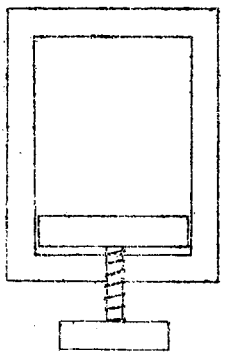
Si l'on comprime, on constate que la lumière réapparaît. La teinte est uniforme si la pression est uniformément répartie ; sa coloration correspond au degré de biréfringence du cube qui se comporte dès lors comme un cristal parallèle.

En graduant expérimentalement l'appareil, on peut faire une sorte de dynamomètre optique : un pareil dynamomètre a la propriété, utile dans certains cas, d'indiquer des pressions considérables tout en ne subissant que des déformations extrêmement petites puisque la compressibilité seule du verre est en jeu.

325. — Nous pouvons montrer la biréfringence du verre en nous servant de la presse de Brewster. Une lame de verre de quelques millimètres d'épaisseur et de forme carrée est placée dans une presse à main AB. En serrant la vis V, la lame est comprimée dans la direction HK.

Si l'on place cette lame entre deux nicols à l'extinction, on voit apparaître des bandes ou des plages colorées, symétriques par rapport à la ligne médiane HK. Ici la compression

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



du verre varie d'un point à l'autre de la masse. Aussi obtenons nous, non point comme précédemment une teinte plate, mais des franges : Ces franges disparaissent en même temps que la pression.

326. — On explique ces phénomènes en remarquant que le verre est en général un corps isotrope : lorsqu'on le comprime dans une certaine direction, il devient anisotrope et biréfringent. Toute action qui tend à détruire l'isotropie tend à produire la biréfringence. Ainsi, lorsque les vibrations sonores se propagent dans une lame de verre, les différents points de la lame sont dans des états différents : nous l'avons constaté en plaçant la lame entre deux nicols à l'extinction (§. 141) De même on communique la biréfringence à une lame de verre lorsqu'on l'échauffe en un de ses points. Dans la trempe du verre, les parties externes éprouvent une solidification plus rapide que les parties internes ; le verre trempé est anisotrope et biréfringent. Il faut même remarquer qu'il est rare qu'une lame ou une lentille ne soit pas quelque peu trempée à moins d'avoir été recuite avec les plus grandes précautions. Aussi lorsqu'on interpose une lame de verre quelconque entre deux nicols à l'extinction, la lumière est en général plus ou moins rétablie.

Phénomène de Kerr. Biréfringence des liquides placés dans un champ électrique.

327. — La compression ne communique évidemment pas la biréfringence aux liquides, car les pressions exercées en un point se transmettent également dans toutes les directions de sorte que l'isotropie n'est pas détruite. On peut néanmoins établir une dissymétrie au sein d'un liquide en le plaçant dans un champ électrique. Ce phénomène observé pour la première fois par le physicien anglais Kerr est connu sous le nom de phénomène de Kerr.

Pour le montrer on remplit de sulfure de carbone une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

cuve de verre à faces parallèles. Deux plaques de cuivre a et b parallèles et isolées, immergées dans le liquide constituent les deux armatures d'un condensateur que l'on charge à l'aide soit d'une machine électrique soit d'une bobine d'induction. La cuve est placée entre deux nicols à l'extinction disposés de façon que la section principale de chacun d'eux fasse un angle de 45° avec les deux plaques de cuivre.

Aussitôt que l'on charge le condensateur, on voit la lumière réapparaître dans l'intervalle qui sépare les deux plaques. L'intensité de la lumière qui passe est d'autant plus grande que la différence de potentiel entre a et b est plus grande, autrement dit que le champ électrique est plus intense.

Si l'on décharge le condensateur après l'avoir chargé avec la machine électrique, la lumière disparaît instantanément. Si l'on opère en mettant les deux plaques du condensateur en communication avec les deux pôles d'une bobine d'induction, on observe encore la réapparition de la lumière; ici elle est instantanée comme la charge elle-même : on observe simplement un éclair à chaque rupture du circuit inducteur.

M. Kerr a reconnu que la direction de l'axe optique de cette substance biréfringente coïncidait avec la direction des lignes de force.

En étudiant de la même façon un grand nombre de liquides, M. Kerr a reconnu que les uns étaient positifs, les autres négatifs (§ 241). D'autres enfin placés dans un champ électrique même très intense sont restés inactifs.

Les mêmes expériences ont été réalisées avec des solides isotropes tels que le verre; M. Kerr a reconnu que l'électrisation du verre lui communiquait des propriétés biréfringentes.

Polarisation elliptique.

328. — On a vu (§ 298) que la lumière polarisée rectilignement a pour caractère d'être totalement extinguible par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

un nicol analyseur et qu'elle est constituée par des vibrations rectilignes. Mais la lumière peut également être polarisée elliptiquement : la trajectoire de chaque molécule vibrante est dans ce cas une ellipse

Production de la lumière elliptique.

329. — On obtient de la lumière polarisée elliptiquement de diverses manières :

1° Lorsqu'un rayon polarisé rectilignement tombe normalement sur un cristal biréfringent parallèle à l'axe il en sort polarisé elliptiquement. En effet la vibration incidente se décompose alors en deux composantes rectangulaires qui ont acquis par leur passage à travers le cristal une différence de phase. Les deux composantes ont donc pour résultante une vibration elliptique, ainsi qu'on l'a vu en acoustique, à propos des expériences de Lissajous (§ 144).

2° On obtient de la lumière polarisée elliptiquement dans d'autres conditions encore, notamment par la réflexion sur un miroir métallique d'un rayon polarisé rectilignement.

Etude de la lumière elliptique.

330. — Etant donné un rayon de lumière, comment reconnaître s'il est polarisé elliptiquement ? Comment déterminer en outre ses éléments, c'est-à-dire la direction des axes de l'ellipse et leur rapport ?

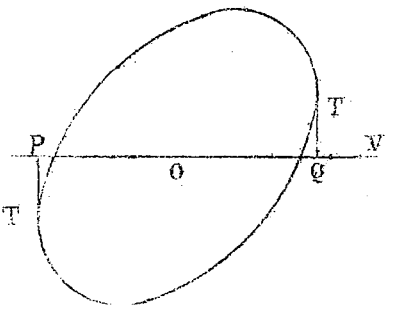
Première méthode

331. — On peut songer tout d'abord à recevoir le rayon sur un nicol analyseur. En faisant tourner ce nicol, on observe que le rayon transmis ne s'éteint jamais ; mais que son intensité passe par un maximum et un minimum qui correspondent à des positions de l'analyseur perpendiculaires entre elles.

En effet l'amplitude au sortir du nicol est la somme des projections des deux composantes de la vibration elliptique sur la direction OV de la vibration transmise par l'analyseur.

La somme des projections des composantes est égale à la projection PQ de la résultante. Elle est donc égale à la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



projection PQ de l'ellipse sur OV.

Il résulte de cette remarque que le maximum et le minimum d'intensité ont lieu lorsque OV vient à coïncider successivement avec le grand axe et avec le petit axe de l'ellipse.

En outre, en mesurant par une méthode photométrique le rapport des intensités maxima et minima, et en extrayant la racine carrée du nombre obtenu, on aurait le rapport des amplitudes correspondantes c'est-à-dire le rapport des axes de l'ellipse.

L'emploi du nicol permet donc, théoriquement tout au moins, de trouver les éléments de l'ellipse de polarisation. Mais au point de vue expérimental, la méthode manque de précision. On sait en effet que la détermination expérimentale d'un maximum ne comporte qu'une faible approximation.

Méthode de compensation.

332. — Il est donc nécessaire, pour trouver les éléments de l'ellipse, d'avoir recours à une autre méthode, dite de compensation.

Cette méthode consiste à faire varier d'une quantité connue la différence de phase des deux composantes qui produisent l'ellipse de telle façon que cette ellipse se transforme en une droite, ou, comme on le dit, de façon à rétablir la polarisation rectiligne.

On reconnaît d'ailleurs aisément que l'on a réussi à rétablir la polarisation rectiligne, car, lorsque cette condition est réalisée, le rayon est entièrement extinguible par un nicol.

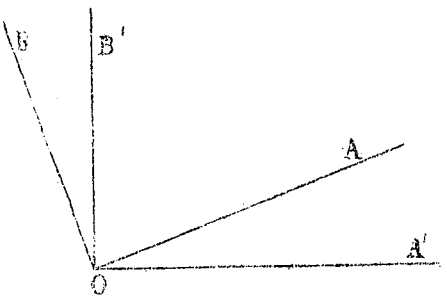
Pour appliquer cette méthode on a recours à deux dispositifs différents.

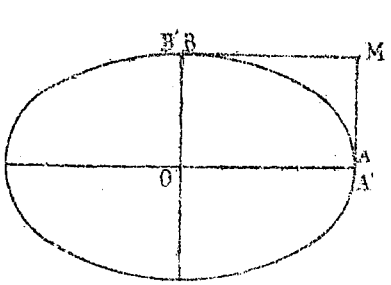
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Procédé deÉnarmont.

333. — On peut avec Énarmont employer comme compensateur une lame de mica dite mica quart d'onde sur laquelle on a marqué d'avance la direction des axes OA' et OB. On reçoit le rayon à analyser sur ce mica, et on fait tourner le mica dans son plan jusqu'à ce que la polarisation rectiligne soit rétablie, ce que l'on reconnaît à l'aide d'un nicol analyseur. A ce moment les axes du mica quart d'onde coïncident en direction avec les axes de l'ellipse de polarisation ainsi qu'il est facile de le démontrer.

En effet l'ellipse de polarisation peut être considérée comme due à la superposition de deux vibrations composantes dirigées respectivement suivant les deux axes de cette ellipse et présentant entre elles une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$. D'autre part, le mica quart d'onde est, par définition, un cristal d'une épaisseur telle que deux vibrations composantes dirigées suivant OA' et OB' acquièrent par leur passage à travers le cristal une différence de marche égale à $\pm \frac{\lambda}{4}$, c'est-à-dire une différence de phase égale à $\frac{\pi}{2}$. Donc si les directions des axes du mica OA', OB' coïncident avec les directions des axes de l'ellipse de polarisation OA, OB, la différence de phase totale qui existe entre les vibrations composantes au sortir du mica est égale à $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$. Elle est égale à zéro ou à π. Dans l'un et l'autre cas, la polarisation rectiligne est rétablie.





En outre l'appareil permet de trouver sans difficulté le rapport des axes OA, OB de l'ellipse de polarisation. En effet en mettant le nicol analyseur à l'extinction, on obtient la direction OM de la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

vibration rectiligne rétablie. Or celle-ci est la résultante des vibrations rectilignes composantes et dirigées suivant OA et OB. Il en résulte que le rapport de ces composantes est égal à la tangente de l'angle aigu que OM fait avec la direction de OA, ou ce qui revient au même de OA'.

Procédé de M. Jamin.

334. — Au lieu de mica-quartz d'onde, on peut, comme l'a fait M. Jamin, employer le compensateur de Babinet que nous avons déjà décrit (§ 306).

Soit φ la différence de phase entre les deux vibrations rectangulaires dirigées suivant les sections principales des quartz qui constituent le compensateur et dont la résultante est la vibration elliptique.

Sur le faisceau polarisé elliptiquement interposons le compensateur et faisons varier son épaisseur jusqu'à ce que la polarisation rectiligne soit rétablie. La différence de phase φ' fournie par le compensateur satisfait alors à l'une des conditions suivantes

$$\varphi + \varphi' = 0 \qquad (1)$$

$$\text{ou} \qquad \varphi + \varphi' = \pi \qquad (2)$$

Une graduation portée par la garniture métallique des quartz permet la lecture de φ'; cette quantité est, comme on sait, liée aux épaisseurs e et e' des deux quartz par la relation

$$\varphi' = \frac{2\pi(e-e')(n-n')}{\lambda}$$

On peut donc connaître φ si on sait laquelle des deux équations (1) ou (2) convient.

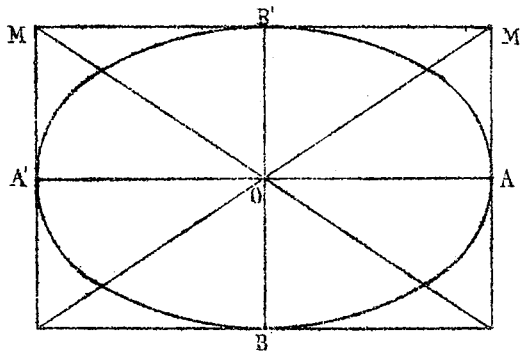
Or si $\varphi + \varphi' = 0$ la polarisation rectiligne est rétablie comme si la lame et le compensateur n'existaient pas; donc à la sortie du compensateur, le rayon rectiligne est polarisé dans le même azimuth qu'à la sortie du polariseur; l'azimuth dans lequel il faut placer l'analyseur pour l'extinction n'a pas varié.

Si $\varphi + \varphi' = \pi$, cet azimuth a varié.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

335. — La méthode précédente permet encore de déterminer le rapport des amplitudes des vibrations composantes.

Supposons qu'on ait rétabli la polarisation rectiligne. Les vibrations sont dirigées suivant les diagonales OM ou OM' du rectangle circonscrit à l'ellipse de vibration. Une des diagonales correspond au cas de $\varphi + \varphi' = 0$, l'autre au cas de $\varphi + \varphi' = \pi$. En mesurant l'angle MOM' de ces deux directions, on peut déduire le rapport des amplitudes. En effet



$$MOM' = 180^\circ - 2MOA$$

$$MOA = 90^\circ - \frac{MOM'}{2}$$

$$\text{d'où } \operatorname{Cotg} \frac{MOM'}{2} = \operatorname{tg} MOA = \frac{b}{a}$$

Lumière polarisée circulairement.

336. — Dans le cas particulier où l'ellipse de polarisation est réduite à un cercle, la polarisation est dite circulaire.

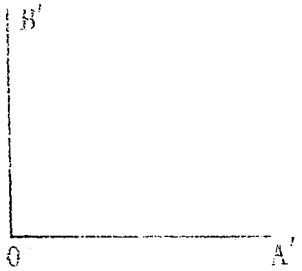
Un cercle peut être considéré comme une ellipse dans laquelle un diamètre quelconque jouit des propriétés d'un axe principal. Il s'ensuit que si l'on place un mica quart d'onde sur le trajet d'un rayon polarisé circulairement en orientant ses axes d'une manière quelconque, la polarisation rectiligne est rétablie. On reconnaît donc ainsi d'une manière très simple l'existence de la polarisation circulaire.

Il est à remarquer que si l'on se bornait à employer un nicol sans interposer de quart d'onde, on ne pourrait distinguer la lumière polarisée circulairement de la lumière naturelle; car l'intensité de la lumière transmise demeure ici indépendante de l'orientation du nicol comme dans le cas de la lumière naturelle.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

337. — Lorsque l'on a constaté qu'un rayon de lumière est polarisé circulairement, c'est-à-dire que la trajectoire de la molécule vibrante est un cercle, il importe quelquefois de savoir dans quel sens cette trajectoire est parcourue.

A cet effet remarquons que les deux composantes rectangulaires de la vibration circulaire peuvent être considérées comme présentant l'une sur l'autre une différence de phase $\varphi = \frac{\pi}{2}$. La lame quart d'onde ajoute une nouvelle différence de phase $\varphi' = \pm \frac{\pi}{2}$. La différence de phase totale $\varphi + \varphi'$ est donc 0 ou π.



Si $\varphi + \varphi' = 0$, la polarisation rectiligne est rétablie dans l'azimuth de polarisation du polariseur. On reconnaît que $\varphi + \varphi' = \pi$ quand cette condition n'est pas remplie.

Or dans le mica quart d'onde, les vibrations qui traversent la lame perpendiculairement à la section principale ont un retard de $\frac{\pi}{2}$ sur celles qui traversent suivant la section principale. Soit OA' la section principale du mica. Si $\varphi + \varphi' = 0$, c'est que la composante de la vibration circulaire suivant OA' avait un retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la composante perpendiculaire suivant OB'. La vibration était donc circulaire droite. Si $\varphi + \varphi' = \pi$, c'est que la composante de la vibration circulaire suivant OB avait déjà un retard de $\frac{\pi}{2}$ auquel vient s'ajouter un nouveau retard de $\frac{\pi}{2}$ dû à la lame quart d'onde. Donc la vibration était circulaire gauche.

Distinction de la lumière naturelle et de la lumière partiellement ou complètement polarisée; analyse de la lumière polarisée (rectiligne, circulaire ou elliptique.)

338. — Étant donné un rayon lumineux, il peut être naturel ou polarisé.

Dans le cas où il est polarisé, il peut être rectiligne, circulaire ou elliptique. Nous allons chercher à distinguer ces divers cas.

La lumière naturelle reçue sur un nicol analyseur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

donne une image dont l'intensité reste constante quelle que soit l'orientation du nicol ; il en est de même de la lumière circulaire. Mais si on interpose sur le trajet du faisceau un quart d'onde, le circulaire est transformé en rectiligne tandis que le naturel reste naturel.

La lumière polarisée rectilignement ou elliptiquement reçue sur un nicol analyseur donne une image d'intensité variable avec l'orientation du nicol. Si l'on arrive à produire l'extinction, on peut affirmer que la polarisation est rectiligne. Dans le cas contraire on aura affaire à de la lumière elliptique ou à de la lumière partiellement polarisée mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée. Si on vient à placer un compensateur dans le trajet du faisceau, pour une épaisseur convenable du compensateur, on reproduit la polarisation rectiligne, dans le cas où la lumière est elliptique : à ce moment, le rayon est extinguible par un nicol. — Au contraire avec la lumière partiellement polarisée, on ne peut reproduire l'extinction pour aucune épaisseur du compensateur, ni pour aucune position du nicol analyseur.

Polarisation rotatoire.

339. — Lorsqu'une lame d'un cristal uniaxe, taillée perpendiculairement à l'axe optique du cristal reçoit normalement un faisceau de rayons parallèles, les rayons tant ordinaires qu'extraordinaires ne sont pas déviés ; ils se propagent avec la même vitesse dans l'intérieur du cristal : c'est, comme nous l'avons vu (§ 292) la propriété caractéristique de l'axe optique du cristal. Si le cristal est placé entre deux nicols, tout se passe comme s'il était monoréfringent. Il en résulte que le faisceau émergent ne doit présenter aucune coloration.

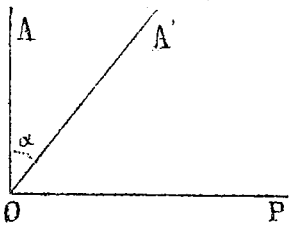
En 1811, quelque temps après la découverte de la polarisation chromatique, Arago reconnut que le quartz faisait exception à cette règle. Les phénomènes particuliers qu'il découvrit furent spécialement étudiés par Biot.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Phénomènes fondamentaux

340. — Deux nicols à l'extinction A et B sont éclairés par un faisceau de lumière parallèle que nous supposerons d'abord monochromatique, plaçons entre A et B une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe. La lumière reparaît ; mais par une rotation convenable de l'analyseur, on reproduit l'extinction.

Soit OP la trace sur le plan du tableau du plan des vibrations du polariseur ; OA la trace du plan des vibrations de l'analyseur. Pour l'extinction OA est perpendiculaire à OP.



Une fois le quartz interposé, l'extinction ne peut être obtenue que si on fait tourner l'analyseur d'un angle α. Puisque l'extinction peut être obtenue, c'est que la polarisation est demeurée rectiligne, mais le plan dans lequel se fait la vibration a tourné de l'angle α ; cet angle est dit l'angle de rotation. Le phénomène qui consiste essentiellement en une rotation du plan de polarisation est connu sous le nom de polarisation rotatoire.

341. — Le quartz n'est pas le seul corps qui jouisse de la propriété de faire tourner le plan de polarisation. Le même phénomène peut être observé avec un certain nombre de solides cristallisés ou amorphes, avec des liquides organiques et même avec leurs vapeurs.

Parmi les solides cristallisés, nous citerons outre le quartz qui cristallise dans le système hexagonal, le cinabre qui cristallise dans le système du prisme droit à base carrée, le bromate et le chlorate de soude qui cristallisent dans le système cubique. Un grand nombre de liquides organiques, tels que les huiles essentielles, les dissolutions d'acide tartrique, les jus sucrés, les alcaloïdes présentent les mêmes propriétés. Enfin il résulte des recherches de Biot et de M. Gernez que la vapeur d'essence de térébenthine présente le phénomène de polarisation rotatoire au même degré que

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

le liquide lui-même.

Etudions les lois du phénomène à l'aide d'une lame de quartz taillée perpendiculairement à l'axe.

Lois du phénomène.

342. — L'angle de rotation dépend de l'épaisseur de la substance traversée, de la nature de la radiation, enfin de la nature de la substance.

Influence de l'épaisseur. — Pouvoir rotatoire.

343. — L'angle de rotation α est proportionnel à l'épaisseur de la substance traversée.

L'angle de rotation dû à une épaisseur de 1 millimètre de la substance a reçu le nom de pouvoir rotatoire

Influence de la nature de la substance.

344. — Les différents échantillons de quartz ne font pas tourner dans le même sens le plan de polarisation. Lorsque le plan de polarisation tourne vers la droite de l'observateur qui regarde à travers l'analyseur (dans le sens des aiguilles d'une montre), le quartz est dit dextrogyre (fig. 1). Lorsque le plan de polarisation tourne vers la gauche, le quartz est dit lévogyre

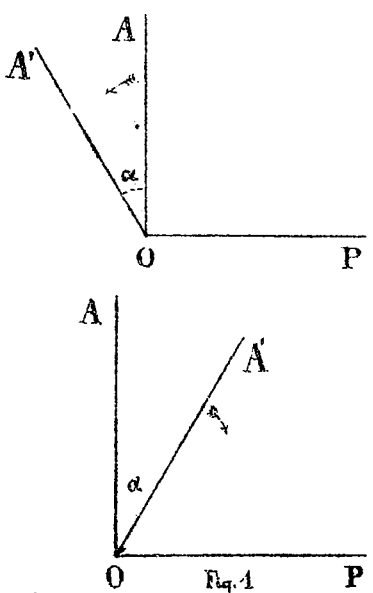


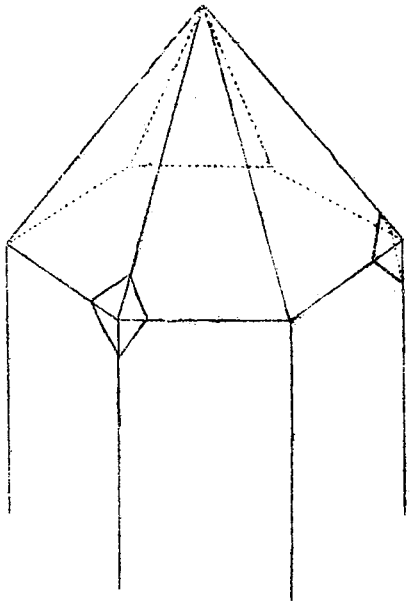
Fig. 1

Parmi les corps doués de pouvoir rotatoire, les uns sont dextrogyres, les autres sont lévogyres.

On représente souvent le sens de la rotation par des flèches; les corps dextrogyres sont affectés du symbole ↗ ; les corps lévogyres du symbole ↖.

345. — M. Pasteur a montré que cette différence entre les différents échantillons de quartz était corrélative d'une dissymétrie dans la forme du cristal. Le quartz se présente sous forme de prismes hexagonaux surmontés d'une pyramide. Les sommets de base de la pyramide portent de deux en deux des facettes obliques

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC



sur l'axe et sur le plan passant par l'axe et l'arête correspondante.

Dans ces conditions la loi de symétrie de Haüy voudrait qu'il y eût deux de ces facettes sur chaque arête ; il n'en est rien. Si le cristal est complet, les extrémités des arêtes tronquées en haut ne le sont pas en bas et inversement.

En résumé la moitié seulement des sommets ont été tronqués ; on dit alors que le cristal est hémièdre.

Supposons un observateur regardant la base de la pyramide supérieure, en plaçant l'œil au sommet. Si les facettes de la base sont plus inclinées vers la droite que vers la gauche de cet observateur, l'hémièdrie est droite ; si les facettes sont plus inclinées vers la gauche, l'hémièdrie est gauche.

On connaît des cristaux de quartz qui présentent l'hémièdrie droite, d'autres qui présentent l'hémièdrie gauche. De quelque manière qu'on cherche à superposer ces cristaux, on ne peut y arriver : on dit alors que l'hémièdrie n'est pas superposable *.

Les quartz hémièdres droits sont dextrogyres ; les hémièdres gauches sont lévogyres ; il existe donc une relation entre le sens de la rotation et le sens de l'hémièdrie.

346. — La valeur du pouvoir rotatoire d'une substance est indépendante du sens de la rotation ; une lame de quartz de 1 mm d'épaisseur fait toujours tourner le plan de polarisation d'un même angle α, que cette lame soit dextrogyre ou

* Il y a entre un hémièdre droit et un hémièdre gauche la même disymétrie qu'entre la main droite et la main gauche. L'hémièdre gauche est superposable avec l'image que donnerait un miroir plan d'un hémièdre droit.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

lévogyre.

347. — Lorsqu'on superpose dans un ordre quelconque des lames de quartz perpendiculaires à l'axe, les unes dextrogyres, les autres lévogyres, la rotation observée est la somme algébrique des rotations individuelles dues à chacune des lames.

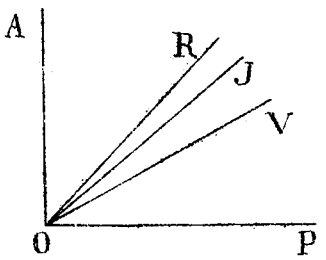
Influence de la nature de la radiation.

348. — La rotation produite par une lame de quartz donnée varie en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

Pour démontrer cette loi, Biot produisait un spectre avec de la lumière préalablement polarisée. Il recevait successivement chacune des couleurs sur le quartz et mesurait la rotation de son plan de polarisation.

Nous sommes maintenant en mesure de comprendre ce qui se passera si l'on éclaire la lame de quartz avec de la lumière blanche. Le plan de polarisation pour chaque radiation simple tourne d'un angle α qui varie avec la longueur d'onde de cette radiation. Si on dispose le nicol analyseur de façon à éteindre une radiation particulière, on voit toute la partie du spectre non éteinte ; on obtient donc la teinte complémentaire de la lumière éteinte. Le faisceau est coloré.

Si l'on vient à faire tourner l'analyseur, la teinte change progressivement. Soit en effet OA la trace sur le plan du tableau du plan de polarisation primitif de l'analyseur, OR, OJ, OV les traces des plans de polarisation pour le rouge, le jaune et le violet, après interposition de la lame de quartz.



Si l'on fait tourner l'analyseur de OA vers OP, on éteint successivement le rouge, l'orangé, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet. On a donc d'une façon continue les teintes complémentaires des diverses couleurs du spectre.

349. — Ce phénomène différentie nettement la polarisation rotatoire de la polarisation chromatique. Dans la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

polarisation chromatique, par la rotation de l'analyseur, on faisait varier l'intensité de l'image de teinte verte par exemple ; puis après avoir passé par une image blanche, on obtenait une nouvelle image d'intensité variable, mais dont la teinte restait rouge, pendant une rotation d'un quadrant. Ici au contraire la teinte de l'image obtenue varie d'une façon continue.

De plus dans le phénomène de polarisation chromatique, la rotation de la lame produisait des changements de teinte et d'intensité. Ici la rotation de quartz autour de son axe ne produit aucun effet.

350. — Lorsque l'épaisseur du quartz est grande, on obtient une teinte blanche. C'est du blanc d'ordre supérieur dont il est facile d'expliquer la production. En effet la rotation d'un rayon de longueur d'onde λ est proportionnelle à l'épaisseur.

Si l'épaisseur est petite, cette rotation correspond à un arc inférieur à une circonférence. Si l'épaisseur est grande, on peut avoir une rotation de plusieurs circonférences plus une fraction de circonférence. Supposons pour fixer les idées que la rotation pour le rouge soit de 10 circonférences $+\alpha$. Pour la radiation de longueur d'onde λ', on aura une rotation de 11 circonférences $+\alpha$; pour celle de longueur d'onde λ'', une rotation de 12 circonférences $+\alpha$ etc. Si on dispose l'analyseur de façon à éteindre la lumière rouge on éteint en même temps toutes les autres radiations λ', λ'' etc. Les valeurs de λ qui correspondent à des radiations éteintes sont d'autant plus rapprochées que l'épaisseur du cristal est plus considérable. La teinte observée est due à la superposition de toutes les radiations non éteintes lesquelles sont prises dans toute l'étendue du spectre : on obtient l'apparence du blanc. Toutefois c'est un blanc incomplet ; il suffit de l'analyser à l'aide du spectroscope pour obtenir un spectre cannelé. Si entre les radiations de longueur d'onde λ et λ', il y a p franges noires, c'est que p radiations de longueurs d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{p-1}$ sont éteintes dans la position actuelle de l'analyseur. La rotation de la radiation λ_0 étant

$$2n\pi + \alpha$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

celle de la radiation λ_1 sera

$$2(n+1).$$

de λ_2 $\qquad 2(n+2)\pi+\alpha$.

. . . . . .

de λ_{p-1} $\qquad 2(n+p-1)\pi+\alpha$.

351. — On obtient un phénomène plus brillant en remplaçant le nicol analyseur par un prisme biréfringent. Dans ce cas, si le quartz est suffisamment mince pour que la lumière émergente soit colorée, les deux images observées directement ont des teintes complémentaires. Si le quartz est épais et qu'on reçoive la lumière émergente sur un spectroscope, on obtient deux spectres cannelés, mais dont les cannelures ne se correspondent pas; les bandes noires d'un des spectres correspondent au contraire aux maxima lumineux de l'autre.

Influence de la température.

352. — Le pouvoir rotatoire d'une substance varie avec la température.

Les expériences de M. Tubert et celles de M. Gernez (Journal de physique 1879) ont montré que le pouvoir rotatoire du quartz croissait avec la température.

Théorie de la polarisation rotatoire.

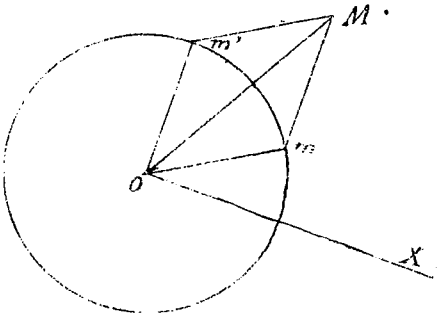
353. — Fresnel a imaginé une théorie qui permet de rendre compte des phénomènes de polarisation rotatoire. Cette théorie n'est pas plus simple que le fait même qu'elle se propose d'expliquer. Mais ce fait ainsi considéré à part demeure isolé, sans relation avec les autres phénomènes de la haute optique. La théorie de Fresnel a au contraire l'avantage d'expliquer la rotation du plan de polarisation par un phénomène d'interférence. Seulement, comme on va le voir, l'interférence se produit ici entre des rayons polarisés non plus rectilignement mais circulairement.

354. — Le caractère particulier des phénomènes de polarisation rotatoire réside dans ce fait qu'une vibration rectiligne à l'entrée du corps est encore rectiligne à la sortie, mais a changé de direction. Or une vibration rectiligne peut être

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

considérée comme la résultante de deux vibrations circulaires d'amplitudes égales, mais dont les sens sont inverses.

Soit par exemple OM l'élongation à un instant donné d'une vibration rectiligne de direction fixe OM peut être considérée comme la résultante géométrique de deux droites om, om' égales entre elles ; dès lors OM est la diagonale du losange construit sur om et om'. L'angle mOM = m'OM est indéterminé. On peut supposer que le rayon om tourne avec une vitesse uniforme autour de O dans un certain sens, par exemple le sens des aiguilles d'une montre ; om' tourne autour de O en sens inverse, mais avec la même vitesse. Dans ce cas, la résultante OM conserve une direction fixe.



Ceci posé, considérons une vibration rectiligne d'élongation OM tombant sur la face d'entrée d'un cristal de quartz. Cette vibration est la résultante de deux rayons circulaires de sens inverse. Soit d'abord l'un d'eux, celui qui est dû à la rotation du circulaire droit om. L'angle mOX que la droite om fait avec la direction OX étant φ_0 au temps 0, cet angle devient au temps t égal à

$$\varphi_0 - 2\pi \frac{t}{T}$$

Nous donnerons à cet angle le nom de phase.

Au lieu de considérer ce qui se passe à l'entrée du cristal, considérons le rayon circulaire droit parvenu en un point du cristal situé à une distance x de la face d'entrée. La vitesse de propagation du rayon dextrogyre étant égale à V, le temps employé à parcourir la distance x est égal à $\frac{x}{V}$. La phase au point x et au temps t est donc égale à la phase à l'entrée du cristal au temps $t - \frac{x}{V}$; cette phase est par suite

$$\varphi = \varphi_0 - 2\pi \frac{t - \frac{x}{V}}{T}$$

ou, en posant $VT = \lambda$, on a pour la phase du circulaire droit à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

la distance x.

$$\varphi = \varphi_0 - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Désignons de même par φ' la phase du rayon lévogyre om au point x; par un raisonnement analogue, on trouve pour

$$\varphi' = \varphi_0 + \frac{2\pi\left(t - \frac{x}{V'}\right)}{T}$$

On a ici le signe + au lieu du signe — parce que la rotation a changé de sens. V' désigne la vitesse de propagation du rayon circulaire gauche. En posant $V'T = \lambda'$ on a

$$\varphi' = \varphi_0 + 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda'}\right)$$

Cela posé, puisque les angles de direction des composantes om et om' sont respectivement φ et φ', l'angle de direction de leur résultante est $\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, puisque la résultante est dirigée suivant la bissectrice. On a donc pour la direction suivant laquelle s'effectue la vibration rectiligne résultante

$$\frac{\varphi+\varphi'}{2} = \frac{\varphi_0+\varphi_0'}{2} + 2\pi x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

On trouve ainsi en x une résultante rectiligne dont la direction a tourné d'un angle

$$2\pi x\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

Celle est la rotation due à l'épaisseur x.

On voit d'abord qu'elle est proportionnelle à l'épaisseur.

On voit en second lieu que le coefficient de proportionnalité ou le pouvoir rotatoire est égal à

$$2\pi\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 2\pi\left(\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'}\right).$$

D'après la loi de Biot, il devrait être de la forme $\frac{\text{Constante}}{\lambda^2}$. Si l'on admet qu'entre certaines limites, la différence $\lambda - \lambda'$ est petite et à peu près indépendante de λ, la fraction $\frac{2\pi(\lambda'-\lambda)}{\lambda\lambda'}$ diffère peu de la forme $\frac{\text{Constante}}{\lambda^2}$.

Ainsi d'après la théorie de Fresnel, le pouvoir rotatoire n'est pas, comme le veut la loi de Biot en raison inverse de λ^2. Il est égal à $\frac{2\pi(\lambda'-\lambda)}{\lambda\lambda'}$ et ne satisfait qu'approximativement à la loi de Biot. C'est en effet ce que l'expérience a vérifié.

On voit enfin que le signe de la différence $\lambda - \lambda'$, ou ce qui

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

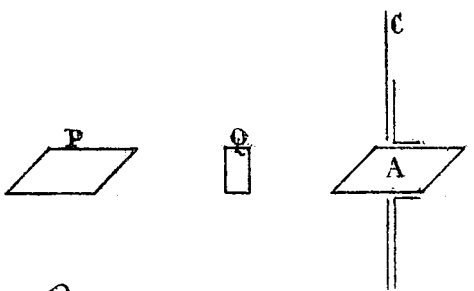
revient au même de la différence $V' - V$ détermine le sens de la rotation du cristal.

Mesure des pouvoirs rotatoires.

355. — Nous avons jusqu'ici étudié les lois de la polarisation rotatoire sans nous préoccuper des procédés qui permettent de déterminer d'une façon précise les pouvoirs rotatoires des diverses substances. Nous allons maintenant exposer les différentes méthodes qui ont été proposées pour cette mesure.

Méthode de Biot.

356. — L'appareil le plus simple qui ait été employé dans ce but est dû à Biot. Il se compose essentiellement d'un polariseur P éclairé par la lumière du sodium, d'un analyseur A monté dans une garniture métallique mobile en face d'un limbe gradué C.



On commence par disposer le polariseur et l'analyseur à l'extinction : on note la position de l'analyseur par une lecture sur le limbe de A. On interpose ensuite la substance active, une lame de quartz Q par exemple ; la lumière réapparaît. On rétablit l'extinction par une rotation convenable de l'analyseur : l'angle de rotation est donné par la différence des lectures sur le limbe.

Ce procédé présente certains inconvénients. D'abord, il faut opérer en lumière homogène ; de plus, la précision est limitée : car la position de l'extinction est celle d'un minimum ; elle est donc difficile à apercevoir nettement.

On a donc été amené à chercher les moyens d'apprécier la position d'un plan de polarisation autrement que par l'extinction.

Lames sensibles.

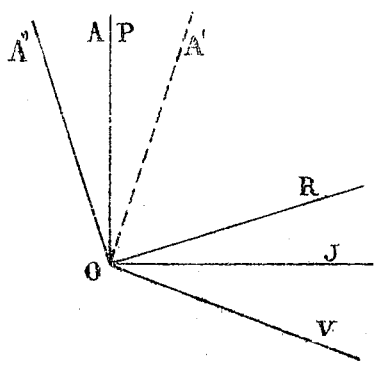
357. — Une première solution du problème utilise les propriétés rotatoires particulières du quartz. Les divers échantillons de quartz sont les uns dextrogyres, les autres lévogyres

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Prenons une lame de quartz dextrogyre d'une épaisseur telle qu'elle dévie le plan de polarisation du jaune moyen d'un angle égal à 90°. Plaçons cette lame entre deux nicols dont les sections principales sont parallèles, le nicol polariseur étant éclairé par un faisceau de lumière blanche. Le plan de polarisation du jaune moyen tourne alors de 90°, de sorte qu'il se trouve être perpendiculaire à la section principale du nicol analyseur : les radiations jaunes sont alors complètement éteintes dans le faisceau émergent. La suppression du jaune aura pour effet de faire apparaître la couleur complémentaire du jaune ; c'est une teinte lilas connue sous le nom de teinte sensible.

Etudions ce qui se passera lorsque l'on viendra à faire tourner l'analyseur.

Les sections principales de l'analyseur et du polariseur ayant leurs traces sur un plan perpendiculaire à la direction des rayons confondues en OA, OP, le plan de polarisation des rayons rouges est dévié en OR, celui des rayons violets en OV. Faisons tourner l'analyseur vers la droite en OA' ; nous éteignons ainsi les radiations violettes, le rouge domine. Si au contraire l'analyseur tourne vers la gauche en OA'' les radiations rouges sont éteintes, le bleu domine. Enfin si on tourne de gauche à droite de OA'' à OA' la teinte vire du bleu au rouge en passant par la teinte sensible.



Un raisonnement analogue montrerait qu'avec une substance lévogyre, on passerait du bleu au rouge en tournant de droite à gauche.

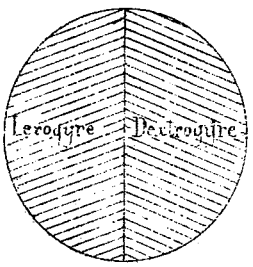
L'œil a la propriété de distinguer avec une grande netteté ce passage du bleu au rouge par le violet : c'est ce qui a fait donner à la teinte mauve obtenue le nom de teinte sensible.

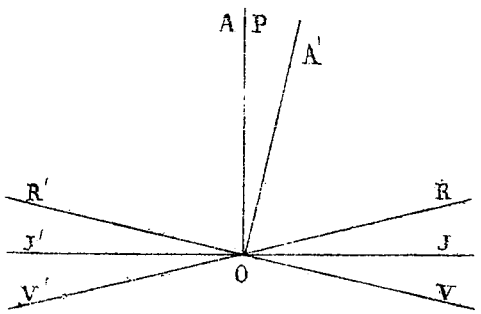
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Biquartz ou quartz à deux rotations

358. — On conçoit comment son emploi permettrait de mesurer la rotation du plan de polarisation avec une précision plus grande que celle de la méthode précédente. On augmente encore la sensibilité du procédé par l'emploi du biquartz ou quartz à deux rotations.

Le biquartz imaginé par Soleil est un disque composé de deux lames de quartz, l'une dextrogyre, l'autre lévogyre, qui se touchent suivant un diamètre. Les deux demi disques ont une égale épaisseur, qu'on choisit de façon qu'ils dévient en sens inverse de 90° le plan de polarisation du jaune moyen. Si on place ce biquartz entre deux nicols dont les sections principales sont parallèles, les deux moitiés dévient le plan de polarisation des radiations jaunes à 90°, la moitié dextrogyre en OJ, la moitié lévogyre en OJ'. Les deux demi disques présentent la teinte sensible. Tient-on à tourner l'analyseur de façon à l'amener en OA'; la teinte rouge complémentaire des rayons violets éteints apparaît dans la moitié dextrogyre; la teinte bleue complémentaire des rayons rouges éteints apparaît dans la moitié lévogyre. On voit que l'effet du biquartz est de doubler la sensibilité. Son emploi permet de fixer avec une très grande précision les déviations du plan de polarisation et par suite les pouvoirs rotatoires.





359. — Mais la mesure des pouvoirs rotatoires n'a pas seulement une importance théorique : les phénomènes de polarisation rotatoire ont servi à fonder une méthode nouvelle d'analyse chimique rapide et précise, aujourd'hui très employée dans l'industrie. Nous avons vu en effet que les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

jus sucrés jouissaient à la propriété de dévier le plan de polarisation la déviation varie avec la teneur en sucre du sirop. De la déviation du plan de polarisation, on peut donc déduire le poids de sucre contenu dans le jus sucré. Cette méthode d'analyse est connue sous le nom de Saccharimétrie.

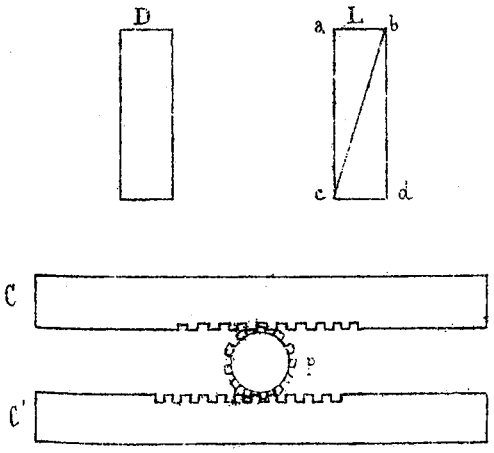
Saccharimétrie.

Principe de la méthode.

360. — Un tube plein de la liqueur à étudier est placé entre un polariseur et un analyseur. Il produit une rotation du plan de polarisation. La valeur absolue de cette rotation importe peu : ce qu'il est nécessaire de connaître, c'est le poids de sucre contenu dans le sirop. On compense la rotation obtenue par l'introduction dans le faisceau lumineux d'une lame de quartz de rotation contraire. De l'épaisseur du quartz compensateur, on déduit le titre de la solution sucrée.

Compensateur de Soleil.

361. — Le compensateur se compose de deux lames de quartz taillées perpendiculairement à l'axe. L'une des lames D est dextrogyre ; l'autre L est lévogyre elle est coupée en deux parties abc, bcd qui peuvent glisser l'une sur l'autre de manière à faire varier l'épaisseur traversée par la lumière. Les deux moitiés sont portées par deux garnitures C et C' munies chacune d'une crémaillère qui engrène avec un pignon denté p. Si l'on tourne ce pignon, les montures se déplacent l'une par rapport à l'autre : ces déplacements sont évalués à l'aide d'une échelle d'ivoire et d'un vernier portés par les garnitures C et C'.

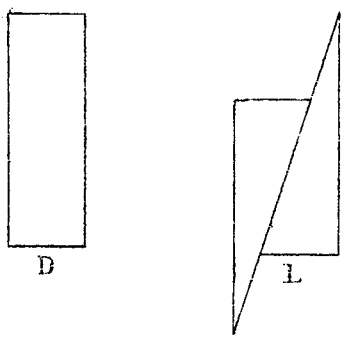


Lorsque les zéros de l'échelle et du vernier coïncident, les deux lames abc, bcd sont au contact dans la position L. La

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

somme de leurs épaisseurs est égale à l'épaisseur de la lame D ; l'action dextrogyre de cette lame est annulée par l'action lévogyre de L.

Si donc on place ce compensateur entre deux nicols à l'extinction, cette extinction sera maintenue ; interposons un tube contenant un jus sucré, la lumière réapparaîtra ; nous pourrons reproduire l'extinction par l'usage du compensateur. — Supposons, que la solution soit dextrogyre ; il suffira pour annuler son effet d'augmenter l'épaisseur de quartz lévogyre. On lira sur l'échelle l'épaisseur de quartz lévogyre qui produit la même rotation que la solution.

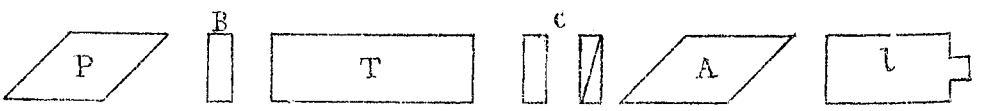


En général les compensateurs portent une double graduation : l'une qui indique les épaisseurs de quartz, l'autre qui indique la teneur en sucre correspondant à une épaisseur donnée de quartz. Cette dernière graduation est obtenue par des expériences préalables faites avec des solutions dont le titre est connu.

Saccharimètre de Soleil.

362. — Dans l'exemple précédent, nous avons supposé qu'on compensait l'action du sirop en reproduisant l'extinction. Toutes les dispositions des appareils de polarisation précédemment indiquées sont évidemment applicables dans les saccharimètres.

Ainsi Soleil a construit un saccharimètre où il a fait à la fois usage du quartz à deux rotations et du compensateur. Cet appareil comprend un polariseur P, un biquartz B, un tube à liquide T, un compensateur C, un analyseur A. Le faisceau



lumineux est reçu dans une lunette de Galilée l.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

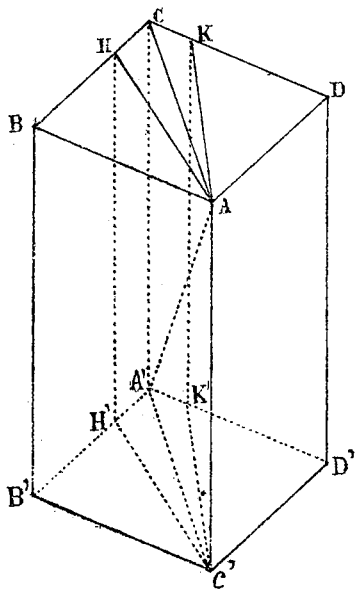
Ce que nous avons dit précédemment suffit pour faire comprendre la manipulation de l'appareil. Le tube T étant d'abord vide, par la rotation de l'analyseur on amène les deux moitiés de l'image à posséder la teinte sensible, le compensateur étant au zéro. On remplit alors le tube de la dissolution à étudier; à l'aide du compensateur, on ramène l'égalité des teintes des deux moitiés de l'image. La lecture du compensateur donne le titre du sirop. Cette méthode de Soleil n'est applicable qu'aux jus incolores. Pour les liquides colorés, ou bien lorsque la lumière employée est elle-même colorée, l'observation de la teinte sensible devient impossible. Il faut alors avoir recours aux saccharimètres à pénombre ou aux saccharimètres à franges.

Saccharimètres à pénombre.

Saccharimètre à pénombre de Cornu et J. Duboscq.

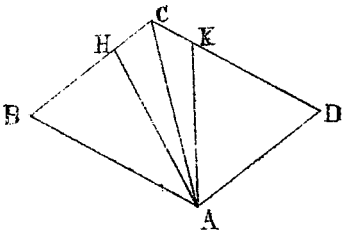
363. — Le saccharimètre à pénombre de Cornu et J. Duboscq se compose d'un nicol polariseur, du tube à liquide, d'un analyseur particulier, connu sous le nom de nicol coupé ou prisme de Selle, qui constitue la partie originale de l'appareil et d'une lunette de Galilée.

364. — Le nicol coupé est une modification du nicol qu'on obtient de la manière suivante. Soit ABCD A'B'C'D' un nicol dont l'axe est AA' et la section principale ACA'. On le coupe suivant cette section principale. On use les parties ACHH'A'C' et ACKK'A'C'. On rapproche et on colle les deux parties restantes; on obtient ainsi un nouveau prisme dont les deux moitiés ont leurs sections principales suivant AC_1 et AC_2.

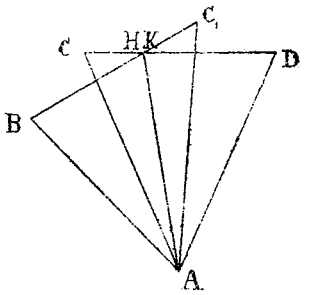


Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

faisant un angle d'environ 5° entre elles.



Supposons que la lumière jaune du sodium polarisée par le nicol polariseur tombe sur ce nicol coupé. Lorsque la section principale AC_1 sera perpendiculaire à la section principale du polariseur, la lumière sera éteinte dans la partie gauche de l'analyseur, mais elle ne le sera pas dans la partie droite. Si au contraire AC_2 est perpendiculaire à la section principale du polariseur, c'est dans la partie gauche que la lumière est éteinte. Les deux positions de l'analyseur pour lesquelles ces extinctions se produisent sont distantes de 5°.

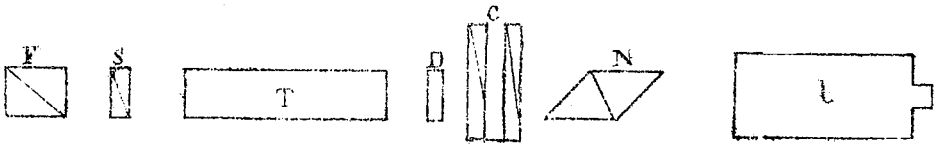


Dans l'intervalle, tant que le plan HK n'est pas perpendiculaire à la section principale du polariseur, les deux images ne sont pas d'égale intensité; on juge facilement de cette différence d'intensité, de sorte que l'on peut arriver à l'égalité des deux pénombres avec une très grande précision. On se servira de cette égalité des pénombres, comme l'on a fait plus haut de l'identité des teintes des deux moitiés du biquartz

Saccharimètre à franges.

365. — Nous terminerons cette description des saccharimètres par celle d'un saccharimètre à franges et à lumière blanche récemment imaginé par MM Ch. et A. Duboscq.

La lumière blanche d'un bec de gaz ou d'une lampe à pétrole traverse successivement un prisme de Foucault F qui sert de polariseur, un polariscope de Chemarmous S, le tube à liquide T,

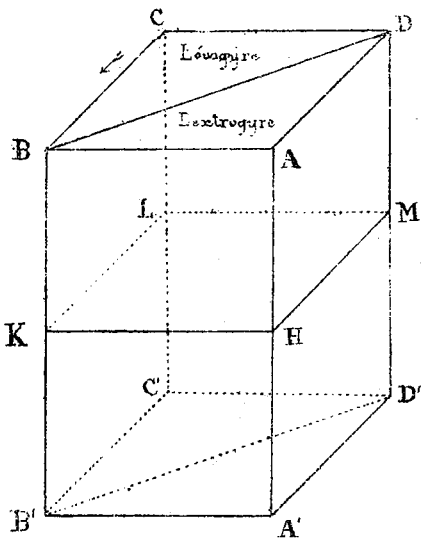


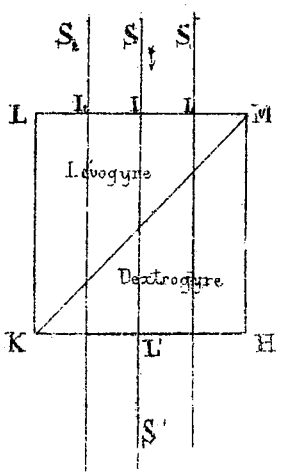
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

le quartz dextrogyre D et le compensateur C ; en N est un nicol analyseur : on reçoit le faisceau émergent dans la lunette de Galilée L.

366. — Le polariscope de Ténarmont est un appareil qui rappelle à la fois le compensateur et le quartz à deux rotations.

Considérons un prisme rectangle en quartz ABCDA'B'C'D' formé de deux prismes triangulaires accolés : l'un ABDA'B'D' est dextrogyre, l'autre BCDB'C'D' est lévogyre. Les arêtes latérales du prisme sont perpendiculaires à l'axe optique du quartz. Plaçons ce système entre deux nicols à l'extinction de manière que ses arêtes latérales soient parallèles à la section principale du polariseur et ses faces latérales perpendiculaires au rayon. On observe alors une frange verticale noire au centre qui se déplace à droite ou à gauche suivant que l'on tourne l'analyseur à droite ou à gauche. Pour expliquer cet effet, considérons une section droite quelconque HKLM du prisme ; soit SI un rayon incident normal situé dans le plan médian du prisme. Ce rayon traverse des épaisseurs égales de quartz lévogyre et dextrogyre ; il ressort en I'S' sans que son plan de polarisation ait tourné, de sorte que l'extinction subsiste pour tous les rayons qui sont dans le plan médian. Il n'en est pas de même pour les rayons tels que $S_1 I_1$ ou $S_2 I_2$. Le premier traverse une épaisseur plus grande de

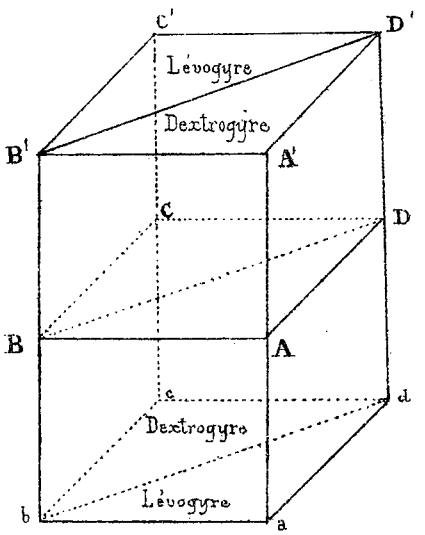




Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

quartz dextrogyre, son plan de polarisation est dévié vers la droite; le second traversant une épaisseur plus grande de quartz lévogyre, son plan de polarisation est dévié vers la gauche. La lumière réapparaît donc en tous les points qui ne sont pas dans le plan médian, ce qui produit l'apparence d'une frange noire dans ce plan. Vient-on à tourner l'analyseur vers la droite, on éteint les rayons dont le plan de polarisation a été dévié vers la droite, c'est-à-dire que la frange noire se déplace vers la droite. Si au contraire on tourne l'analyseur vers la gauche, la frange noire se déplace vers la gauche.

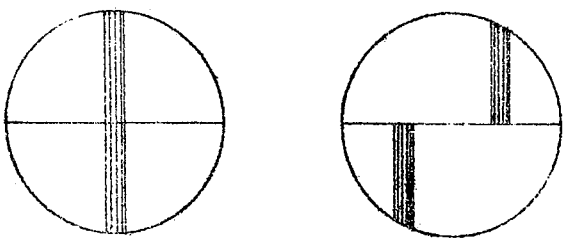
Le polariscope de Senarmont se compose de deux prismes analogues au prisme ABCD A'B'C'D' accolés, de façon que le prisme dextrogyre ABD A'B'D' soit continué par le prisme lévogyre ABD abd, et le prisme lévogyre BCD B'C'D' par le dextrogyre BCD bcd.



On conçoit aisément que ce système jouera un rôle analogue à celui du quartz à deux rotations.

Si ce polariscope est placé entre deux nicols à l'extinction, comme on l'a vu plus haut, on obtiendra deux franges noires et droites situées exactement dans le prolongement l'une de l'autre, dans le plan où les épaisseurs de quartz droit et gauche sont égales.

Si l'on introduit une substance douée d'un pouvoir rotatoire droit par exemple, la frange centrale sera déplacée vers la droite dans la partie supérieure et vers la gauche dans la partie inférieure.



Pour les ramener

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

en ligne droite, il faudra ajouter une quantité de quartz lévogyre équilibrant le pouvoir rotatoire droit de la substance interposée. Dans le saccharimètre de Ch. et A. Duboscq, ce résultat est obtenu par le jeu du compensateur C. Celui-ci porte deux divisions: l'une commune à tous les saccharimètres mesure les épaisseurs du quartz : l'autre indique le nombre de grammes de sucre contenus dans 100 centimètres cubes de la solution.

Précautions à prendre dans les expériences saccharimétriques.

367.— Ces dosages saccharimétriques constituent une des plus importantes applications des phénomènes de polarisation rotatoire : toutefois, pour que la méthode soit à l'abri de tout reproche, il y a certaines précautions à prendre. Le sucre de canne est une substance dextrogyre ; il en est de même du glucose. Les jus sucrés peuvent encore contenir du lévulose qui est lévogyre.

Pour déterminer les proportions de ces diverses substances qui se trouvent dans un sirop, on commence par le décolorer en y ajoutant du sous-acétate de plomb qui précipite la matière colorante sans rien changer au pouvoir rotatoire. On observe alors la rotation. Puis on ajoute au jus sucré une très petite quantité d'acide chlorhydrique fumant et on chauffe au bain marie vers 70°. Le sucre de canne est alors transformé en sucre interverti ; le glucose n'est pas altéré. On observe de nouveau ; la différence entre les deux lectures représente la somme des rotations du sucre de canne et du sucre interverti qu'il a fourni.

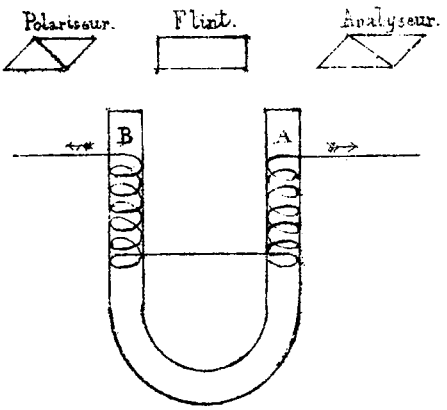
Polarisation rotatoire magnétique.

368.— On ne connaît encore qu'un nombre limité de substances jouissant naturellement du pouvoir rotatoire. Le phénomène est cependant plus général. Nous avons déjà montré (§ 327) qu'une substance monoréfringente placée dans un champ électrique pouvait acquérir les propriétés des corps biréfringents ; de même il est facile de voir qu'un corps transparent quelconque placé dans un champ magnétique acquiert la propriété de faire tourner le plan de polarisation de la lumière.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Expérience de Faraday.

369. — Ce phénomène a été observé pour la première fois en 1845 par Faraday. Il entourait un cylindre de fer doux replié en fer à cheval d'un fil conducteur communiquant avec les deux pôles d'une pile par l'intermédiaire d'un commutateur. Entre les extrémités A et B de cet électro-aimant était disposée une lame transparente placée entre deux nicols. On commence par disposer les nicols à l'extinction sans faire passer le courant ; puis on établit le courant. La lumière réapparaît : on peut reproduire l'extinction en tournant d'un certain angle le nicol analyseur. Si à l'aide du commutateur, on vient à changer le sens du courant, ce qui change les pôles de l'électro-aimant, on reconnaît que le sens de la rotation change. Enfin avec le même courant lancé en sens contraire, on obtient des rotations égales, mais de sens contraires.



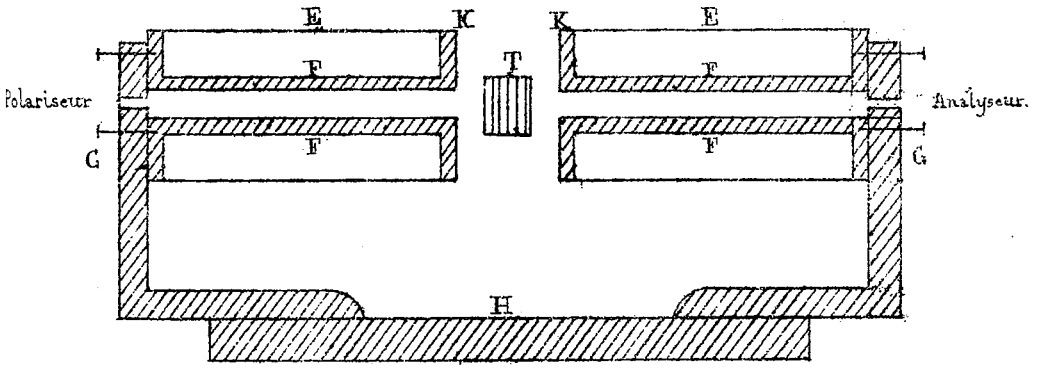
Appareil de Ruhmkorff.

370. — On emploie aujourd'hui pour montrer ces phénomènes de polarisation rotatoire magnétique, un appareil construit par Ruhmkorff. Il se compose de deux grosses bobines E traversées suivant leur axe par des cylindres de fer doux F. Ces cylindres sont forés de manière à permettre le passage du rayon lumineux ; ils se terminent à leurs faces en regard par des pièces polaires K de même diamètre que les bobines. A l'autre extrémité, ils se prolongent par des garnitures de fer doux G pouvant glisser dans une rainure portée par la pièce H qui sert de support à l'appareil. On peut ainsi éloigner ou rapprocher à volonté les deux bobines. Le corps transparent est placé en T, le polariseur en P et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

l'analyseur en A.

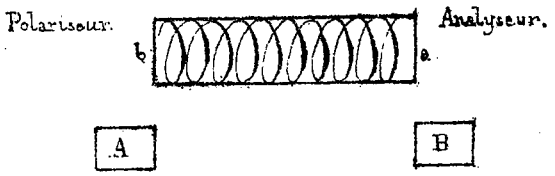
En plaçant en T divers corps transparents, on a pu reconnaître, que presque tous jouissaient du pouvoir rotatoire,



mais le sens de la rotation n'était pas le même pour tous ; d'une manière générale, on peut dire que les corps magnétiques ou leurs composés produisent une rotation de sens contraire à celle qui est produite par les corps diamagnétiques.

Règle de Faraday.

371. — Faraday a donné une règle qui permet de retrouver facilement le sens de la rotation pour un corps diamagnétique.



Soient A et B le pôle austral et le pôle boréal d'un électro-aimant, T le corps transparent placé dans le champ magnétique qu'ils produisent. Si le corps T était magnétique, il prendrait un pôle austral à droite, un pôle boréal à gauche ; l'aimant ab ainsi formé aurait ses courants particulaires dirigés de haut en bas en avant du tableau. Le plan de polarisation

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

tourne dans le même sens que ces courants particulaires. On voit que dans le cas de la figure, l'œil se trouvant du côté du pôle boréal de l'electro-aimant, le plan de polarisation paraîtra tourner en sens inverse des aiguilles d'une montre.

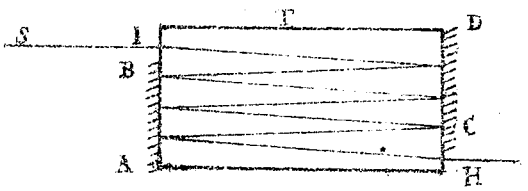
En changeant le sens du courant, on change les pôles de l'électro-aimant et en même temps le sens de la rotation.

Le sens de la rotation reste le même dans l'espace si l'on vient à prendre le polariseur pour analyseur et inversement ainsi dans le cas de la figure, le plan de polarisation paraît toujours tourner en avant du plan du tableau, que l'œil soit en O ou qu'il soit en P. Cette propriété differentie nettement la polarisation rotatoire magnétique de la polarisation rotatoire ordinaire. Nous verrons plus loin comment on s'en est servi pour amplifier les rotations magnétiques.

Les lois de la polarisation rotatoire magnétique ont été établies par Verdet. Nous allons les rappeler sans insister sur les détails de leur démonstration expérimentale.

Influence de l'épaisseur.

372. — La rotation magnétique du plan de polarisation produite par une substance transparente quelconque est proportionnelle à l'épaisseur traversée dans cette substance.



Soit alors T la substance taillée en forme de prisme droit allongé. Supposons que les faces extrêmes aient été argentées de A en B et de C en D. Un rayon incident SI pénètre dans la substance, se réfléchit sur CD, puis sur AB et ainsi de suite et émerge par CH après avoir parcouru un certain nombre de fois n l'épaisseur de la substance, ce qui a multiplié la rotation par n.

Influence de la valeur du champ et de sa direction

373. — La rotation magnétique est proportionnelle.

1° A la valeur du champ.

2° Au cosinus de l'angle formé par la direction des lignes de force du champ magnétique avec la direction du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

rayon lumineux.

Cela revient à dire que la rotation magnétique est proportionnelle à la composante du champ magnétique suivant la direction du rayon.

Il en résulte que si le rayon lumineux est perpendiculaire à la direction des lignes de force du champ, la rotation est nulle. Cette particularité avait été observée par Faraday.

Influence de la nature de la substance.

374. — La rotation est proportionnelle à un coefficient caractéristique de la nature du corps et qui est positif ou négatif suivant que le corps est diamagnétique ou magnétique.

Supposons le corps placé dans un champ magnétique uniforme ; soient V et V' les potentiels magnétiques en deux points du champ situés sur une même ligne de force. Si e désigne la distance de ces deux points, le champ magnétique a pour valeur $\frac{V-V'}{e} = \varphi$.

La rotation ω entre les deux points est proportionnelle au champ φ, à leur distance e et à une constante K, de sorte que l'on peut écrire

$$\omega = Ke\varphi = K(V - V')$$

La constante K a reçu le nom de constante de Verdet, ou encore de pouvoir rotatoire magnétique spécifique.

Si l'on fait $V - V' = 1$, on a $\omega = K$; donc la constante de Verdet est la rotation entre deux points qui présentent une différence de potentiel magnétique égale à l'unité.

Influence de la nature de la radiation.

375. — De même que le pouvoir rotatoire ordinaire, la constante de Verdet varie avec la nature de la radiation. Henri Becquerel a reconnu que le quotient

$$\rho = \frac{K}{n^2(n^2-1)}$$

du pouvoir rotatoire magnétique K par le produit $n^2(n^2-1)$ varie très peu pour les diverses substances : il est constant pour les corps d'une même famille chimique.

Influence de la température.

376. — M. Bichat a montré que le pouvoir rotatoire

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

magnétique des liquides diminuait avec la température. Il peut en général être représenté par une formule parabolique telle que

$$K_t = K_0 - at - bt^2$$

K_t étant la rotation à $t°$, K_0 à $0°$; a et b des constantes positives.

Pour les solides au contraire, des expériences de M. Joubert sur le flint ont montré que le pouvoir rotatoire magnétique augmente quand la température s'élève de 10° à 582°, point de fusion du verre.

Pouvoirs rotatoires magnétiques en valeur absolue.

377. — La substance qui présente le pouvoir rotatoire magnétique de la façon la plus marquée est le sulfure de carbone; c'est en même temps un corps que l'on peut obtenir chimiquement pur. On a, dans presque toutes les expériences relatives à la polarisation rotatoire magnétique, rapporté les valeurs des pouvoirs rotatoires à celui du sulfure de carbone pris comme unité.

Mais, d'après la définition même de la constante de Verdet, il est évident que cette quantité peut être évaluée en unités absolues. Cette détermination pourrait d'ailleurs présenter un jour un intérêt pratique puisque, le pouvoir magnéto-rotatoire une fois déterminé, elle fournirait une méthode pour déterminer l'intensité d'un champ magnétique en valeur absolue par une simple mesure d'angle.

Les pouvoirs rotatoires étant tous exprimés en fonction de celui du sulfure de carbone, le problème est ramené à la détermination de la constante de Verdet pour ce corps particulier. Les premières recherches relatives à cette question sont dues à Gordon; mais il y a une certaine incertitude sur les résultats qu'il a fournis, car la température à laquelle les expériences avaient été faites n'est pas connue exactement.

M. Henri Becquerel a repris la question en se plaçant dans des conditions telles qu'il opérât toujours à 0°. Le champ magnétique était dû à une bobine cylindrique de très grande longueur. On sait qu'à l'intérieur d'une telle bobine parcourue par un courant d'intensité électro-magnétique I, le champ magnétique a pour valeur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

$$4\pi NI$$

N désignant le nombre de spires du fil de la bobine par unité de longueur. On avait donc pour la rotation

$$\omega = K.\ 4\pi NI$$

N était facile à compter; I était mesuré à l'aide d'un galvanomètre apériodique que l'on graduait ensuite en unités absolues, en se servant des indications d'un voltamètre à lames d'argent. Pour cela on intercalait dans un même circuit le galvanomètre et le voltamètre. Le galvanomètre indiquant une déviation α, un poids p d'argent était dissous à l'électrode d'entrée et déposé à l'électrode de sortie du courant pendant la durée d'une seconde. Or d'après les expériences de MM. Mascart, Kohlrausch etc. un courant d'un ampère (10^{-1} C.G.S) dissout $0^{mmg}.118$ d'argent par seconde. Donc l'intensité du courant qui dissout p^{gr} pendant une seconde est en ampères

$$\frac{p}{0,118}$$

En unités absolues CGS on a

$$I = \frac{10p}{0,118}$$

Table des matières
de l'Optique physique.

Numéros des Paragraphes		Pages
161	Objet de l'optique physique. Nature de la lumière : la lumière produit des phénomènes d'interférences. Franges brillantes et franges obscures.	129
	Interférences.	
162	Miroirs de Fresnel, expérience, description du phénomène.	129
163	Deux rayons issus d'un même point L	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	ont après leur réflexion sur les deux miroirs la même différence de marche que s'ils provenaient de points symétriques de L par rapport aux miroirs	130
164	Cas où l'on emploie une fente lumineuse au lieu d'un point lumineux	131
165	Calcul de la différence de phase. Position des franges obscures : elles correspondent à une différence de marche $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$. Position des franges brillantes : Elles correspondent à une différence de marche $2n\frac{\lambda}{2}$.	
166	Frange centrale — Distance d'une frange quelconque à la frange centrale $z = \delta\frac{D}{a}$ . . .	132
167	Distance de deux franges obscures ou de deux franges brillantes $z_{n+1} - z_n = \lambda\frac{D}{a}$	134
168	Distance d'une frange obscure à la frange brillante voisine $z'_n - z_n = \frac{\lambda}{2}\frac{D}{a}$	134
169-170	Application des miroirs de Fresnel à la détermination de la longueur d'onde. Mesure de la distance de deux franges. Loupe de Fresnel.	135
171	Valeurs des longueurs d'onde des différentes radiations	136
172	Périodes des vibrations lumineuses. Distance des franges avec les différentes lumières	137
173	La distance des franges varie avec l'angle des miroirs	137
174	Réglage des miroirs	138
175	Procédés divers pour produire les franges d'interférence	138
176	Bilentilles de Billet	139
177	Mesure des longueurs d'onde à l'aide	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	des bilentilles	140
178	Vérifications diverses	141
179	Biprisme de Fresnel	141
180	Bilames. Les faisceaux réfractés n'ont pas de partie commune ; emploi d'une lentille convergente	142
181	Production des franges d'interférence avec un seul miroir — Remarque : la frange centrale est obscure. La réflexion d'un rayon de l'air sur le verre introduit une différence de marche égale à $\frac{\lambda}{2}$	143
182	Deux faisceaux ne peuvent interférer que s'ils proviennent d'une même source lumineuse	144
183	Influence de la nature de la lumière sur les phénomènes d'interférence	145
184	Phénomènes observés quand on produit les interférences avec la lumière blanche. — Blanc d'ordre supérieur	146
185	Explication de l'irisation des franges voisines de la frange centrale	146
186	Explication du blanc d'ordre supérieur	147
187	Analyse de la lumière blanche d'ordre supérieur. Emploi du spectroscope — Spectres cannelés	147
188	Nombre des cannelures	148
189	Emploi des cannelures du spectre pour la mesure des longueurs d'onde. Expérience de Fizeau et Foucault	149
190-191	Lieu géométrique des franges d'interférence dans l'espace	150
192	Disposition expérimentale pour montrer les interférences produites par les ondes se propageant à la surface d'un bain de mercure	152

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	Phénomènes d'interférence présentés par les lames minces non cristallisées.	
193	Irisations produites par les lames minces...	153
194	Expériences : bulle de savon, couche d'huile à la surface de l'eau, lames de gypse	153
195	Théorie du phénomène — Cas de l'incidence normale	
	Franges brillantes $e = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$	
	obscures $e = 2n\frac{\lambda}{4}$	
	Les franges sont les lignes de niveau de l'une des surfaces par rapport à l'autre	154
196	Applications.	
	1° Étude des déformations d'une lame de verre soumise à certains efforts (Cornu)	156
197	2° Mesure des longueurs d'onde	157
198	Cas de l'incidence oblique	158
199	Anneaux de Newton.	
	Loi des diamètres —	
	Anneaux brillants réfléchis	
	$\rho^2 = \frac{R\lambda}{2}(2n+1)$	
	Anneaux obscurs réfléchis	
	$\rho^2 = \frac{R\lambda}{2} \cdot 2n$	159
200	Disposition expérimentale pour projeter les anneaux de Newton	160
201	Vérification expérimentale de la loi des diamètres. Appareil de La Provostaye et Desains	161
202	Vérification de la loi du cosinus	163
203	Application à la mesure des longueurs d'onde	
	1° Procédé — $\lambda = \frac{\rho^2}{Rn}$. Emploi du sphéromètre	
204	2° Procédé — Appareil de Fizeau	163
205	Mesure des petits déplacements d'une surface	164
206	Dilatation des cristaux — Méthode de Fizeau...	165
207	Influence de la nature de la lumière sur le diamètre des anneaux. Expérience de projection...	166

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
208	Anneaux de Newton en lumière blanche..	167
209	Influence de la nature de la substance qui constitue la lame mince.....	167
210	Analogie du phénomène des lames minces avec le phénomène des tuyaux fermés.....	168
211	Anneaux colorés par transmission.....	169
212	Dispositions expérimentale permettant de projeter en même temps les anneaux transmis et les anneaux réfléchis.....	170
213	Remarque relative aux réflexions sur les faces qui limitent la lame mince. Anneaux réfléchis à centre blanc. Expérience de Young...	171
214	Production simultanée des anneaux réfléchis à centre noir et à centre blanc.....	172
215	Chemins équivalents.....	172
216	Réfractomètres interférentiels.....	173
217	Miroirs de Jamin.....	174
218	Application à l'étude de la variation des indices de réfraction des gaz ou des liquides.....	175
	Théorie des ondulations.	
219	Ondes et rayons lumineux.....	176
220	La phase de la vibration lumineuse est la même en tous les points d'une surface d'onde..	177
221	Isochronisme des chemins comptés suivant les rayons.....	177
222	Onde réfléchie et onde réfractée.....	178
223	Application. Lentilles aplanétiques.....	178
224	Lois de la réflexion et de la réfraction dans la théorie des ondulations.....	180
225	Lois de la réflexion.....	180
226	Lois de la réfraction.....	181
227	Relation entre les vitesses de la lumière	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	dans deux milieux et l'indice de réfraction relatif de ces milieux	182
	Diffraction.	
228	En quoi consiste la diffraction. Les phénomènes de diffraction sont en contradiction avec les hypothèses de l'optique géométrique	183
229	Premier dispositif pour montrer les phénomènes de diffraction	183
230	Diverses expériences que l'on peut réaliser à l'aide de ce dispositif	184
231	Généralisation — Le dispositif précédent peut servir à mettre en évidence tous les rayons d'un faisceau lumineux qui ont subi une déviation anormale.	
	Exemple = Homogénéité d'une lame transparente	185
	Théorie de la diffraction.	
232	Principe de Huygens	186
233	Expérience montrant la propagation des ondes produites à la surface d'un bain de mercure au-delà d'une petite ouverture percée dans une cloison	187
234	Principe des ondes enveloppes	188
235	Le problème de la diffraction est la généralisation du problème des interférences	
	Pôle de l'onde — Zones de Huygens	189
236	Franges de diffraction	190
237	L'intensité lumineuse en un point est exprimée par une série alternée	191
238	Phénomène présenté par une fente dont on fait varier la largeur	192
239	Représentation graphique de l'amplitude résultante	192

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
240	Ecrans complémentaires — Principe de Babinet	193
241	Calcul des différences de marche relatives aux divers points de l'onde	193
	$$\delta = \frac{(a+b)s^2}{2ab}$$	
242	Abscisses curvilignes des points de l'onde qui envoient des élongations de signes contraires à celle qui émane du pôle	195
	$$s = \sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}$$	
243	Abscisses curvilignes des points de l'onde qui envoient des élongations de même signe que celle qui émane du pôle	
	$$s' = \sqrt{2n}\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}$$	
244	Recherche de l'amplitude provenant de tous les points d'une même surface d'onde. Méthode de M. Cornu	197
245	Amplitude provenant d'une portion quelconque de l'onde	198
246	Forme de la courbe de diffraction	199
247	Le rayon de courbure de la courbe de diffraction varie en sens inverse de la longueur de l'arc pris sur le front de l'onde	200
	Applications	
248	Effet produit par une ouverture de largeur variable placée au pôle de l'onde	201
249	Cas où l'ouverture n'est pas au pôle de l'onde	201
250	Cas d'un nombre quelconque d'ouvertures . .	202
251	Calcul de l'intensité de la lumière diffractée	203
252	Intégrales de Fresnel	205

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	Réseaux.	
253	Définition d'un réseau. Réseaux par transparence; réseaux par réflexion	206
254	Spectres fournis par les réseaux. Spectre normal. Expérience	207
255	Théorie élémentaire des réseaux (Babinet)	207
256	Explication de la formation des spectres par les réseaux	210
257	Application — Mesure des longueurs d'onde à l'aide des réseaux $\lambda = (a+b) \sin \theta$	211
258	Spectres symétriques; spectres d'ordre supérieur	211
259	Théorie complète des réseaux dans la lumière parallèle. La courbe de diffraction des réseaux se réduit à une circonférence	212
260	Construction de l'amplitude résultante	213
261	Intensité de la lumière diffractée	215
262	Empiètement des spectres des différents ordres	216
263	Cas où un spectre disparaît	217
264	Réseaux sous une incidence oblique; minimum de déviation. Application à la mesure des longueurs d'onde	217
265	Réseaux circulaires	219
266	Réseaux circulaires de M. Cornu jouissant des propriétés des lentilles	220
	Polarisation.	
267	Direction des vibrations de la lumière	221
268	Lumière naturelle. Les propriétés de la lumière naturelle sont les mêmes dans tous les azimuths qui passent par le rayon	221
269.	Lumière polarisée — Polarisation par réflexion. Appareil de Biot — Plan de polarisation — Polariseur — Analyseur — Angle de polarisation	222

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
270	Direction des vibrations : les vibrations sont normales à la direction de propagation.....	223
	Pas de vibrations longitudinales	
271	Constitution de la lumière naturelle.	
	Hypothèse de Fresnel.....	223
272	Application de cette hypothèse à l'explication de l'expérience précédente.....	224
	Amplitude de la vibration réfléchie par l'analyseur.	
	Définition du rayon polarisé rectilignement.	
273	Relation entre l'amplitude vibratoire et l'intensité photométrique	
	L'intensité photométrique est proportionnelle au carré de l'amplitude vibratoire.....	225
274	Intensité du rayon doublement réfléchi. Loi de Malus.....	226
275	Angle de polarisation.	
276	Relation entre l'angle de polarisation et l'indice de la substance du miroir. — Loi de Brewster. — Incidence Brewstérienne.....	227
277	Application. Mesure de l'indice de réfraction d'une substance.....	227
278	Analyseur portatif.....	228
279	Polarisation par réfraction. La lumière polarisée par réfraction simple est partiellement polarisée.....	228
	Double réfraction.	
280	Phénomène de la double réfraction.....	229
281	Polarisation des rayons réfractés. Les deux faisceaux réfractés sont polarisés dans des plans perpendiculaires entre eux.....	230
282	Les intensités des deux faisceaux réfractés sont	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	complémentaires.	230
283	Un cristal biréfringent peut être employé soit comme polariseur, soit comme analyseur. . . .	230
	Théorie de la double réfraction.	
284	Relation entre la vitesse de propagation d'une vibration lumineuse et le coefficient d'élasticité de l'éther lumineux	231
285	Corps isotropes et anisotropes.	232
286	Corps amorphes et corps cristallisés — Système cristallins.	
	Relation entre la constitution des corps et leurs propriétés réfringentes	232
	Corps monoréfringents ; corps biréfringents uniaxes et biaxes.	
287	Phénomènes présentés par les cristaux uniaxes	233
288	Indice ordinaire ; indice extraordinaire principal — Expériences	233
289	Propagation d'une onde quelconque dans un cristal uniaxe — Onde ordinaire — Onde extraordinaire.	
290	Surface de l'onde dans les cristaux uniaxes . . .	236
291	Construction de l'onde réfractée selon Huygens	
	1° Le plan d'incidence contient l'axe	238
292	Cas particulier — Rayon incident parallèle à l'axe — Axe optique	239
293	2° Le plan d'incidence est normal à l'axe . .	239
294	Cristaux positifs ou attractifs ($m' > m$)	
	négatifs ou répulsifs ($m' < m$)	241
295	3° Le plan d'incidence est quelconque	241
296	Indice de réfraction du rayon extraordinaire dans une direction donnée	
	$\mu - m = (m' - m) \sin^2 \omega$.	
	Applications.	
297	Appareils de polarisation fondés sur la double	

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
	fraction	243
298	Nicol	243
299	Prisme biréfringent	244
300	Propriétés particulières de la tourmaline	245
	Polarisation chromatique.	
301	Phénomènes produits par le passage des rayons polarisés à travers les lames minces cristallisées biréfringentes. — Polarisation chromatique	245
302	Théorie de la polarisation chromatique. Intensité de l'image observée	245
303	Signification physique des différents termes de l'expression obtenue. Terme blanc. Terme coloré	248
304	Polarisation chromatique en lumière parallèle	249
	Vérifications expérimentales. Influence de l'épaisseur	
305	1°. Emploi d'un prisme de quartz	250
306	2°. Compensateur de Babinet	250
307	3°. Cuvette hémisphérique de Biot	252
308	Phénomènes observés en lumière blanche	252
309	Phénomènes observés lorsqu'on fait varier les positions respectives de l'analyseur et de la lame cristalline.	
310	1°. On fait tourner la lame cristalline	253
311	2°. On fait tourner l'analyseur	255
312	3°. On fait tourner le polariseur	255
313	Polarisation chromatique en lumière divergente.	
314	Théorie du phénomène. — Il est symétrique par rapport au rayon qui tombe normalement sur la lame cristalline	256

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
315	Cas où la lame est placée entre un polariseur et un analyseur à l'extinction. Croix noire	257
316	Anneaux. Loi des rayons de ces anneaux	257
317	Cas où la lame est placée entre un polariseur et un analyseur dans une position quelconque	259
318	Lignes neutres. Croix grises	259
319	Anneaux	260
320	Les croix grises divisent le champ en segments tels que dans deux segments adjacents les colorations soient complémentaires	260
321	Phénomènes observés dans la rotation de l'analyseur, du polariseur, ou de la lame	261
322	Double réfraction accidentelle	261
323	Biréfringence du verre comprimé. Expérience de Fresnel	261
324	Emploi des phénomènes de polarisation chromatique pour montrer la biréfringence du verre comprimé. Dynamomètre optique	262
325	Presse de Brewster	262
326	Explication de la biréfringence du verre comprimé	
327	Phénomène de Kerr. Biréfringence des liquides placés dans un champ électrique	263
	Polarisation elliptique.	
328	Lumière polarisée elliptiquement	264
329	Production de la lumière elliptique	265
330	Etude de la lumière elliptique. Direction et rapport des axes de l'ellipse	265
331	Analyse de la lumière elliptique à l'aide d'un nicol et de mesures photométriques	266
332	Méthode de compensation	
333	Procédé de Senarmont. Emploi du mica quart d'onde	267

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
334	Procédé de Jamin. Emploi du compensateur de Babinet	268
335	Rapport des composantes de la vibration elliptique	269
336	Lumière polarisée circulairement	269
337	Sens des vibrations circulaires	270
338	Distinction de la lumière naturelle et de la lumière polarisée - Analyse de la lumière polarisée	271
	Polarisation rotatoire.	
339	Introduction	271
340	Phénomènes fondamentaux. Angle de rotation.	
341	Généralité du phénomène - Corps qui font tourner le plan de polarisation de la lumière	272
342	Lois du phénomène	273
343	Influence de l'épaisseur - Pouvoir rotatoire - Angle de rotation proportionnel à l'épaisseur de la substance	273
344	Influence de la nature de la substance. Corps dextrogyres et lévogyres	273
345	Corrélation entre le pouvoir rotatoire et la forme cristalline - Observations de M. Pasteur.	273
346	La valeur du pouvoir rotatoire d'une substance est indépendante du sens de la rotation	274
347	Superposition de plusieurs lames de rotations contraires	275
348	Influence de la nature de la radiation - La rotation varie en raison inverse du carré de la longueur d'onde	275
349	Distinction entre la polarisation rotatoire et la polarisation chromatique	275
350	Phénomènes observés avec les quartz épais - Blanc d'ordre supérieur - Analyse de cette lumière : spectres cannelés	276

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC

Numéros des Paragraphes		Pages
351	Observation des spectres cannelés avec un prisme biréfringent	277
352	Influence de la température	277
353	Théorie de la polarisation rotatoire	277
354	Exposition de la théorie	277
355	Mesure des pouvoirs rotatoires	280
356	Méthode de Biot	280
357	Lames sensibles. — Teinte sensible. — Relation entre le sens du virement des teintes et le sens de rotation de la substance	281
358	Biquartz ou quartz à deux rotations	282
359	Importance pratique de la mesure des pouvoirs rotatoires	282
	Saccharimétrie	
360	Principe des méthodes saccharimétriques	283
361	Compensateur de Soleil	283
362	Saccharimètre de Soleil	284
363	Saccharimètre à pénombre de Cornu et J. Duboscq	285
364	Nicol coupé ou prisme de Jellet	285
365	Saccharimètre à franges	286
366	Polariscope de Ténarmont	287
367	Précaution à prendre dans les expériences saccharimétriques	289
	Polarisation rotatoire magnétique.	
368	Propriétés de polarisation rotatoire acquises par les corps transparents placés dans un champ magnétique	289
369	Expérience de Faraday	290
370	Appareil de Ruhmkorff	290
371	Règle de Faraday pour trouver le sens de la rotation magnétique	291
372	Influence de l'épaisseur sur la rotation magnétique	292
373	Influence de la valeur du champ et de sa direction	292
374	Influence de la nature de la substance	293
375	Influence de la nature de la radiation	293
370	Influence de la température	293

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu – UPMC