THÈSE

DE MÉCANIQUE,

QUI DOIT ÊTRE SOUTENUE, LE 26 AOUT 1831,

PAR M. G. DESROSIERS,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;

Chargé du Cours de Physique au Collége royal de Poitiers.

PROGRAMME D'UNE THÈSE D'ASTRONOMIE.

IMPRIMERIE DE MARCHAND DU BREUIL,
RUE DE LA HARPE, N° 90.

A MONSIEUR LEFEBURE DE FOURCY,

MON ANCIEN PROFESSEUR.

HOMMAGE

DE RESPECT ET DE RECONNAISSANCE.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. le baron THÉNARD, Doyen, LACROIX, le baron POISSON, FRANCOEUR, BIOT, GAY-LUSSAC, DESFONTAINES, GEOFFROY-SAINT-HILAIRE, BEUDANT.	PROFESSEURS.
MIRBEL, DE BLAINVILLE, HACHETTE, POUILLET, DULONG, PRÉVOST (Constant).	PROFESSEURS-ADJOINTS.
LEFEBURE DE FOURCY, LE ROY.	PROFESSEURS-SUPPLÉANS.

THÈSE

DE MÉCANIQUE,

PRÉSENTÉE

POUR ÊTRE ADMIS AU CONCOURS POUR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES.

On se propose ici d'établir des formules d'une exactitude approchée, mais suffisante pour représenter le mouvement des fluides élastiques.

1°. Lorsque le fluide sort d'un vase où il est d'abord à un état connu.

2°. Lorsqu'il sort d'un vase où il est maintenu à un état constant.

3°. Lorsqu'il se meut dans un tuyau de conduite.

4°. Lorsqu'il s'agit de sa force expansive, comme dans les machines à vapeur à détente.

CHAPITRE PREMIER.

Écoulement d'un fluide hors d'un vase, où il est d'abord à un état connu.

1. Admettons l'hypothèse du parallélisme des tranches ; c'est-à-dire, concevons que les molécules d'une même tranche soient animées de la même vitesse, parallèlement à l'axe du tuyau, et que la même masse du fluide passe en même temps par toutes ces sections.

Soit ABCD (*fig.* 1) le vase que l'on considère, et dont je prendrai l'axe AB horizontal. Nous appellerons ω l'aire d'une section quelconque en *mn*.

Ω l'aire de l'orifice CD; O l'aire de la section MN, u la vitesse du fluide *mn*.

p la pression exercée en mn, P la pression dans la section MN, P′ la pression extérieure, qui a lieu en CD la masse de l'unité de volume du fluide dans la section mn, au bout du temps t.

En sorte que l'on a $p = k\rho$, k étant un nombre constant si la température est constante; g la vitesse imprimée par la pesanteur dans l'unité de temps.

Les pressions p. P. P′ sont supposées mesurées par les hauteurs d'une colonne de fluide incompréhensible ; en sorte que si l'on nomme ϖ le poids spécifique de ce fluide, h la hauteur de la colonne qui mesure la pression p ; Π le poids spécifique du fluide élastique à la température 0°, et sous une pression mesurée par la colonne H, on aura, pour le poids spécifique du fluide à une température v° et sous la pression h,

$$\rho g = \frac{h}{H}\,\frac{\Pi}{1 + 0{,}00375\,v};$$

ou, à cause de $p = \varpi h$ et $k = \frac{p}{\rho}$,

$$K = gH\,\frac{\varpi}{\Pi}\,(1 + 0{,}00375\,v).$$

Pour l'air atmosphérique, par exemple, si les pressions sont mesurées par des colonnes de mercure, on aura

$$H = 0^m{,}760 \qquad \Pi = 1^k{,}3 \qquad g = 9^m{,}809 \qquad \varpi = 13568^k; \qquad \text{d'où} \qquad K = 77805\,(1 + 0{,}00375\,v).$$

Dans le cas actuel, nous supposons la température constante dans toute l'étendue du vase ; de plus, l'axe étant horizontal, l'action de la pesanteur n'altérera pas le mouvement des tranches. Par conséquent, $\rho\omega dx$ étant la masse de la tranche mn, $-\rho\omega dx\,\frac{du}{dt}$ sera la force perdue par cette tranche, laquelle doit être égale à l'action exercée sur cette même tranche en vertu de la différence des pressions supportées par les deux faces, on aura donc l'équation

$$\omega dp = -\rho\omega\,dx\,\frac{du}{dt} \qquad \text{ou} \qquad K\,\frac{dp}{p} = -\frac{du}{dt}\,dx, \tag{1}$$

qui doit subsister dans toute l'étendue du vase. Remarquons à présent qu'à cause de l'hypothèse du parallélisme des tranches, la même masse doit passer au même instant par toutes les sections : ainsi, $\rho\omega u$; et, par suite, $p\omega\, u$, sont des quantités constantes pour toutes les sections. On aura donc

$$P\omega a = p'\Omega U\,; \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{P'\,\Omega\,U}{p\,\omega}$$

U indiquant la vitesse d'écoulement de la tranche CD, on en tire

$$du = \frac{P'\Omega\, d\,U}{p\,\omega} - \frac{P'\Omega\, U\, d\,(p\,\omega)}{p^2\,\omega^2},$$

valeur qui, substituée dans l'équation (1), donnera

$$K\,\frac{dp}{p} = -\,\frac{P'\;\Omega}{p\,\omega}\,\frac{d\,U}{d\,t}\,d\,x + \frac{P'^2\;\Omega^2\,U^2}{p^3\,\omega^3}\,d\,(p\,\omega).$$

Il faudrait intégrer cette équation entre p et x, en supposant U et t constans, et après avoir mis pour ω sa valeur en fonction de x ; puis P étant la pression qui existe à la première couche du fluide, et P′ celle qui existe à l'orifice, l la longueur du vase, on prendrait l'intégrale entre les limites P P′ correspondantes aux longueurs o l ou aux sections O et Ω.

Cela posé, observons que $\int_{o}^{l} \frac{p'}{k}\omega dx$ représente la masse du fluide contenue dans le vase au bout du temps t, et que, par conséquent $\dfrac{d\left(\int_{o}^{l}\frac{p}{k}\,\omega\,d\,x\right)}{d\,t}\,dt$ sera la variation subie par cette masse dans le temps dt, laquelle est égale à la dépense par l'orifice ; en sorte que l'on aura la relation

$$-\,\frac{d\left(\int_{o}^{l}\frac{p}{k}\,\omega\,d\,x\right)}{dt}\,dt = \frac{P'}{k}\,\Omega\,U\,dt\,;$$

ou, ce qui revient au même,

$$-\int_{o}^{l} dt\,\left(\frac{dp}{d\,t}\right)\omega\,d\,x = P'\,\Omega\,U\,d\,t\,,$$

$\left(\frac{d\,p}{d\,t}\right)$ étant la différentielle partielle de p par rapport à t. On mettra pour $\left(\frac{dp}{d\,t}\right)$ sa valeur en (x) et (t) dans cette équation, et l'on en prendra l'intégrale, ce qui donnera une équation entre U, dU, t, dt, qu'il s'agira d'intégrer pour avoir U en t.

Ensuite, ayant P en U et U en t, il sera possible d'avoir P en t.

On voit que cette question conduit à des calculs impraticables, et ne peut être résolue qu'en théorie ; encore le sera-t-elle imparfaitement, puisqu'on ne pourra intégrer les équations différentielles que dans des cas choisis exprès.

2. Nous considérerons le cas où le vase est prismatique et l'orifice très-petit. L'équation générale

$$K\frac{dp}{p}=-P'\Omega\frac{dU}{dt}\cdot\frac{dx}{p\omega}-\frac{p'^2\Omega^2v^2}{2}d\left(\frac{1}{p\omega}\right)^2$$

devient

$$K\log p+C=-P'\Omega\frac{dU}{dt}\int_x\frac{dx}{p\omega}-\frac{U^2}{2}\cdot\frac{P'^2\Omega^2}{p^2\omega^2}.$$

P' étant la pression à l'orifice et Ω la section de cet orifice, on aura

$$K\log P'+C=-P'\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{p\omega}-\frac{U^2}{2}$$

d'où retranchant

$$K\log\frac{p}{P'}=-P'\Omega\frac{dU}{dt}\int^x\frac{dx}{p\omega}+\frac{U^2}{2}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{p^2\omega^2}\right),$$

si on suppose le vase partout cylindrique en négligeant la partie *mnpqcd* (*fig.* 2) voisine de l'orifice, ω sera réputé constant, passera hors du signe $\int$, dans le terme $P'\Omega\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{p\omega}$, et l'on aura ainsi l'expression $\frac{P'\Omega}{\omega}\cdot\frac{dU}{dt}\int\frac{dx}{p}$.

Or ω est très-grande par hypothèse par rapport à Ω. Négligeant donc les termes qui contiennent le rapport $\frac{\Omega}{\omega}$ comme coefficient, l'équation ci-dessus devient

$$U^2=2K\log.\frac{p}{P'}$$

pour une autre section du vase, où la pression serait p', on aura encore

$$2K\log.\frac{p'}{P'}=U^2,$$

c'est-à-dire que lorsque l'orifice est très-petit, on peut supposer la pression intérieure partout la même au même instant, et l'on a en général

$$U^2 = 2\,K \log.\frac{p}{P'} \qquad (1),$$

de plus l'équation

$$-\int_0^l d\,t\,\frac{dp}{dt}\,\omega\,d\,x = P'\,\Omega\,U\,dt$$

devient, p étant une fonction de t seulement

$$-dp\int_0^l \omega\,dx = P'\,\Omega\,U\,d\,t$$

soit V le volume du vase, on aura $V\,d\,p = -P'\,\Omega\,U\,d\,t$ (2); éliminons p entre les équations (1) et (2), il vient

$$dt = -\frac{V}{K\Omega}\,e^{\frac{U^2}{2k}}\,d\,U = -\frac{V}{K\Omega}\,d\,U\left(1+\frac{U^2}{2k}+\frac{1}{1.2}\,\frac{U^4}{4\,k^2}+\ldots\right)$$

d'où $\quad t = const. - \dfrac{V}{K\Omega}\left(U+\dfrac{1}{3}\,\dfrac{U^3}{2k}+\dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{1}{5}\,\dfrac{U^5}{4\,k^2}+\ldots\right)$

et $\quad t = const. - \dfrac{V}{K\Omega}\,U\left(1+\dfrac{1}{3}\,\dfrac{U^2}{2k}+\dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{1}{5}\,\dfrac{U^4}{4k^2}+\ldots\right)$

donc $\quad t = const. - \dfrac{2\,V}{\Omega\sqrt{2\,k}}\sqrt{\log\dfrac{p}{P'}}\left[1+\dfrac{1}{3}\log\dfrac{p}{P'}+\dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{1}{5}\left(\log.\dfrac{p}{P'}\right)^2+\ldots\right]$

La constante se déterminera en posant pour $t = 0$, $p = P$ pression initiale; d'où l'on conclura

$$t = \frac{2V}{\Omega\sqrt{2k}}\left[\sqrt{\log\frac{P}{P'}}\left(1+\frac{1}{3}\log.\frac{P}{P'}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{5}\left(\log.\frac{P}{P'}\right)^2+\ldots\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{\log.\frac{p}{P'}}\left(1+\frac{1}{3}\log.\frac{p}{P'}+\ldots\right)\right].$$

Le temps total qui s'écoulera, avant que le fluide intérieur et le fluide extérieur se mettent en équilibre, sera donné par l'équation

$$T = \frac{2V}{\Omega\sqrt{2\,k}}\sqrt{\log.\frac{P}{P'}}\left(1+\frac{1}{3}\log.\frac{P}{P'}+\ldots\right),$$

série très-convergente, car elle l'est plus que la série résultant du développement de e^{n}, et dont on aura à prendre d'autant moins de termes que P diffèrera moins de P'.

On a ainsi le temps en fonction de la pression; si l'on voulait la pression en fonction du temps, il faudrait s'y prendre de la manière suivante; l'equation $V\,dp = -P'\,\Omega U\,dt$ donne, en faisant $\frac{p}{P'} = z$, $U = -\frac{V\,dz}{\Omega\,dt}$, et, à cause de l'équation (1), $U^2 = \frac{V^2}{\Omega^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,k \log z$, on a donc l'équation

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,k\frac{\Omega^2}{V^2}\log.\,z \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = k\frac{\Omega^2}{V^2} + \frac{1}{z}.$$

Maintenant, pour avoir z en fonction de t, supposons

$$Z = A + B\,t + c\,t^2 + \ldots;$$

A.B.C... étant des coefficiens à déterminer convenablement.

Pour $t = 0$ on a $z = \frac{P}{P'}$, donc $A = \frac{P}{P'}$,

de plus, on a $$\frac{dz}{dt} = B + 2\,c\,t + 3\,D t^2 + \ldots,$$

et comme $$\frac{dz}{dt} = \frac{\Omega}{V}\sqrt{2\,k\log.\,\frac{P}{P'}}, \quad \text{lorsque} \quad t = 0,$$

on aura $$B = \frac{\Omega}{V}\sqrt{2\,k\log.\,\frac{P}{P'}}.$$

De la relation $$\frac{dz}{dt} = B + 2\,c\,t\ldots$$ on tire

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 1.2.\,C + 2.3.\,D t + \ldots + m\,(m-1)\,N\,t^{m-2} + \ldots;$$

on aura donc l'identité

$$1.2.C + 2.3.\,D t + \ldots = K\frac{\Omega^2}{V^2}\cdot\frac{1}{\frac{P}{P'} + \frac{\Omega}{V}\sqrt{2k\log.\,\frac{P}{P'}} + c\,t^2 + \ldots};$$

ce qui offrira un développement en série assez convergente, après avoir déterminé les coefficiens C, D, etc. d'après cette identité.

3. Si le fluide, au lieu de se répandre dans un espace indéfini où la pression P′ est constante, se répandait dans un autre réservoir ayant un volume V′, et contenant un gaz à une pression initiale P′, on poserait ainsi l'équation du mouvement.

Soit p et p' les pressions dans les réservoirs V . V′ au bout du temps t, puisque la masse du fluide ne change pas, et que P et P′ sont les pressions initiales, on aura

$$(1)\quad Vp+V'p'=VP+V'P';$$

on aura de plus

$$p'\Omega U\,dt=-V\,dp \quad \text{et} \quad U=\sqrt{2k\log.\frac{p}{p'}}$$

tirant p' de l'équation (1), il vient

$$U=\sqrt{2k\log.\frac{V'p}{V(P-p)+V'P'}},$$

et $$dt=\frac{-VV'\,dp}{[V(P-p)+V'P']\,\Omega\sqrt{2k}\sqrt{\log.\frac{V'p}{V(P-p)+V'P'}}},$$

Telle est la formule que trouve M. Navier dans un mémoire qu'il a lu à ce sujet à l'Institut.

En vertu de la relation $VP+V'P'=Vp+V'p'$, on peut la ramener à celle-ci $$dt=\frac{V'\,dp'}{p'\Omega\sqrt{2k}\sqrt{\log\frac{p}{p'}}},$$ qui devrait convenir au cas ou V est infini; par exemple, lorsque l'on fait entrer l'air atmosphérique dans un récipient parfaitement vide, et comme alors p est constant. L'intégrale de cette expression devient $c-\frac{2V'}{\Omega\sqrt{2k}}\cdot\sqrt{\log\frac{p}{p'}}$, ce qui donne pour expression du temps l'infini, entre les limites $p'=0$, $p'=p$, résultat absurde.

Mais on peut remarquer que si l'on évaluait la quantité de fluide qui s'écoule pendant le temps dt, elle serait d'après les données $p'\Omega\sqrt{2k\log\frac{p}{p'}}$, expression nulle au premier instant, puisque alors $p'=0$, le résultat précédent n'a donc rien qui doive surprendre; on verra néanmoins avec facilité que ces erreurs doivent provenir de ce que pour avoir les valeurs écrites tout-à-l'heure, on a supposé qu'il n'y avait pas brusque changement dans la forme du vase d'où sortait le fluide; mais bien passage par degrés insensibles, et par suite que l'on avait le droit de regarder au point de séparation P comme égal à p', tandis qu'ici cela n'a pas lieu.

Or, sans revenir sur ce qu'on a négligé dans cette théorie, pourquoi plutôt supposer la pression à laquelle le fluide est soumis, plutôt comme égal à p qu'à p'. Rien ne l'indique. Il sera donc intéressant d'essayer à quel résultat on parviendrait en prenant p' à son tour. Or alors, la formule $-V\,dp = P'\,\Omega\,U\,dt$ devient $-V\,dp = p\,\Omega\,U\,dt$,

et dt deviendra

$$dt = \frac{VV'\,dp'}{(V'(P'-p')+VP)\,\Omega\sqrt{2k}\sqrt{\log\frac{V'(P'-p')+PV}{V'p'}}}$$

et si $V=\infty$, $\quad dt = \dfrac{V'\,dp'}{P\Omega\sqrt{2k}\sqrt{\log\frac{p}{p'}}}$, $\quad$ et posant $\dfrac{p'}{p}=z$,

$$dt = \frac{V'}{\Omega\sqrt{2k}}\left(\log\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}dz,$$ et, pour le temps d'écoulement,

$$T = \frac{V'}{\Omega\sqrt{2k}}\int_0^1\left(l\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{V'}{\Omega\sqrt{2k}}\sqrt{\pi},$$

Cette intégrale $\int_0^1\left(l\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$ se présente dans beaucoup de recherches curieuses.

On la trouve encore lorsque l'on se propose de chercher le temps de l'écoulement total d'un fluide incompressible contenu dans un vase cylindrique, dont l'orifice est évasé (tel que ABCD), (*fig.* 3). On sait en effet (*Mécanique de Poisson*) qu'en appelant c la différence des *pressions supérieures et inférieures;* U la vitesse à l'orifice; y' la section supérieure du vase; k l'orifice, h la distance de la tranche supérieure du fluide à l'orifice, ω une section quelconque du vase, z la distance de cette section au niveau supérieur, N l'intégrale $\int_h^o \frac{dz}{\omega}$, ρ la densité, g la vitesse imprimée par la pesanteur dans l'unité de temps, les lois du mouvement d'un fluide incompressible sont données par les équations

$$k\rho N \frac{dU}{dt} = c + g\rho h - \rho \frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{k^2}{y'^2}\right), - y'dh = kU\,dt.$$

Dans le cas d'un cylindre dont b est la section, on a $N = \frac{h}{b}$ $y' = b$;

d'où $$k\rho \frac{h}{b} \frac{dU}{dt} = c + g\rho h - \rho \frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right) \quad (1)$$

et $$- bdh = kU\,dt \quad (2)$$

d'où $dt = \frac{-bdh}{kU}$, valeur qui, substituée dans (1), donne

$$\frac{-\rho k^2 hU\,dU}{b^2\,dh} = c + g\rho h - \rho \frac{U^2}{2}\left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right).$$

Si l'on fait, pour plus de simplicité, $c = 0$ $\frac{b^2}{k^2} = m^2U^2 = 2gZ$, on aura, toute réduction faite,

$$m^2 h\,dh + (1 - m^2) Z\,dh + h\,dZ = 0,$$

équation linéaire du premier ordre; d'où l'on tire, H étant la hauteur initiale de la colonne fluide,

$$Z = \frac{m^2 h}{m^2 - 2}\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m^2-2}\right].$$

De cette valeur de Z, de la relation $U^2 = 2gZ$, et de l'équation (2), on conclura

$$dt = -\sqrt{\frac{m^2 - 2}{2g} h \quad \left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m^2-2}\right]} \quad dh.$$

Faisons $\frac{h}{H} = x^2$, il viendra

$$dt = -\sqrt{2\frac{m^{2}\ldots\frac{1}{2}}{g}}\,\mathrm{H}\,dx\left(1 - x^{2(m^2-2)}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Cette expression est intégrale pour $m^2 - 2 = \frac{1}{2p}$, et $m^2 - 2 = \frac{1}{2p+1}$, p étant un nombre entier, positif ou négatif ; c'est-à-dire que si l'on pose $m^2 - 2 = \frac{1}{n}$ l'intégrale pourra s'obtenir sous forme finie pour toutes les valeurs entières, positives ou négatives de n. *Le passage de* n, *du positif au négatif*, *s'obtient en faisant* $\mathrm{n} = \infty$, *ou* $\mathrm{n} = 0$. Dans le premier cas, l'expression ci-dessus de dt devient $\frac{0}{0}$. Sa valeur s'obtiendra ainsi :

$$x^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{2}{n}\,lx + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{(lx)^2}{1.2} + \ldots \quad \text{d'où} \quad 1 - x^{\frac{2}{n}} = -\frac{2}{n}\,lx - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{(lx)^2}{1.2}; \ldots$$

$$\text{et}\quad \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - x^{\frac{2}{n}}\right)} = \left\{\frac{\frac{2}{n}}{-\frac{2}{n}\,lx - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{(lx)^2}{1.2}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(-lx - \frac{2}{n}\frac{(lx)^2}{1.2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on fait $n = \infty$, cette expression se réduit à $\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$, et l'intégrale à prendre est $\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g}}\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour avoir le temps que le vase met à se vider, il faut la prendre de $x = 0$ à $x = 1$; mais, prise entre ces limites, elle est égale à $\sqrt{\pi}$, le temps cherché sera donc :

$$\pi\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g\sqrt{\pi}}}.$$

Ainsi l'égalité $\int dx\left(l\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$, prise de 0 à 1, donne, en général, le temps que le vase met à vider.

Pour n positif et pair, on n'a que des valeurs algébriques de ce temps ; pour n positif et impair, on a des fonctions de π.

Pour n négatif, $\int_0^1 dx\left(1-x^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ sera imaginaire ; mais comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ le sera aussi, leur produit sera réel, algébrique pour n impair, circulaire pour n pair. Ainsi, pour $n=-2$, par exemple, on aura

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1}}\left(1-x^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

CHAPITRE DEUXIÈME.

Écoulement d'un fluide élastique, maintenu, dans l'intérieur d'un vase dont il s'écoule, à un état constant.

Reprenons l'équation $K\,\frac{dp}{p}=-P'\Omega\,\frac{dU}{dt}\cdot\frac{dx}{p\omega}-\frac{P'^2\Omega^2U^2}{2}\,d\left(\frac{1}{p\omega}\right)^2$.

Intégrant entre les limites o et l, on a

$$K\log\frac{P'}{P}=-P'\Omega\,\frac{dU}{dt}\int_l^o\frac{dx}{p\omega}+\frac{U^2}{2}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right).$$

Supposons que le fluide qui s'écoule soit remplacé au même instant par une égale quantité de fluide soumis à la même pression, provenant, par exemple, d'un gazomètre : alors, ni la pression P, qui a lieu dans la section supérieure, ni l'intégrale $\int_l^o\frac{dx}{p\omega}$ ne varient avec le temps.

Posant donc $\int_o^l\frac{dx}{p\omega}=N'$, on aura

$$K\log\frac{P}{P'}=P'\Omega\,\frac{dU}{dt}N'+\frac{i}{2}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right);$$

d'où

$$dt=\frac{P'\Omega N'\,dU}{K\log\frac{P}{P'}-\frac{U^2}{2}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right)}$$

Intégrant, déterminant la constante de manière à ce que $t=0$ pour $U=0$, et résolvant l'equation intégrée par rapport à U, on trouve

$$U=\sqrt{\frac{2k\log\frac{P}{P'}}{1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}}}\left(\frac{\sqrt{\frac{2k\log\frac{P}{P'}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right)}{P'^2\Omega^2N'^2}}-1}{\sqrt{\frac{2k\log\frac{P}{P'}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right)}{P'^2\Omega^2N'^2}}+1}\right).$$

Le numérateur et le dénominateur du second facteur du second membre croissent rapidement avec le temps t, et il arrivera un instant où leur rapport sera sensiblement égal à l'unité. On pourra supposer alors

$$U=\sqrt{\frac{2k\log\frac{P}{P'}}{1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}}}. \qquad (1)$$

Mais si p est la pression dans la section ω du vase, on aura aussi

$$U=\sqrt{\frac{2k\log\frac{p}{P'}}{1-\frac{P'^2\Omega^2}{p^2\omega^2}}}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\log\frac{p}{P'}}{\log\frac{P}{P'}}=\frac{\frac{P'^2\Omega^2}{p^2\omega^2}-1}{\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}-1} \qquad (2)$$

équation qui donnera la pression p lorsqu'on connaîtra la section ω.

Enfin, le volume de fluide, mesuré sous la pression P, qui a eu lieu dans le gazomètre, et qui se dépense dans chaque unité de temps, sera

$$\frac{p'}{P}\,\Omega\sqrt{\frac{2k\log\dfrac{P}{P'}}{1-\dfrac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}}}$$

si l'orifice CD est très-petit par rapport à la section MN, la valeur de la vitesse U devient

$$U=\sqrt{2k\log\frac{P}{P'}}.$$

Si la pression P différait assez peu de P′ pour qu'on pût négliger les puissances supérieures de $\left(\dfrac{P-P'}{P'}\right)$, les équations (1) et (2) se réduiraient à

$$U=\sqrt{\frac{2k}{P'}\cdot\frac{P-P'}{1-\dfrac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}}},\quad\text{et}\quad\frac{P-p'}{P-P'}=\frac{\dfrac{P'^2\,\Omega^2}{p^2\,\omega^2}-1}{\dfrac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}-1},$$

que l'on discutera dans chaque cas particuliers.

5. Jusqu'ici l'on a supposé l'axe du vase horizontal; si l'on veut tenir compte de la gravité, en le supposant vertical, par exemple, l'équation différentielle du mouvement devient, dans le cas du mouvement permanent,

$$\frac{K\,dp}{p}=g\,dx+P'^2\,\Omega^2\,U^2\frac{d\,(p\,\omega)}{p^3\,\omega^3},$$

d'où l'on tire
$$K\log p+C=g\,x-\frac{1}{2}\,\frac{P'^2\,\Omega^2\,U^2}{p^2\,\omega^2},$$

déterminant la constante de manière à ce que $\omega=O$ pour $p=P$ il vient

$$k\log\frac{p}{P}=g\,x-\frac{1}{2}\left[\frac{P'^2\,\Omega^2}{p^2\,\omega^2}-\frac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}\right]U^2,$$

équation que l'on discuterait comme précédemment.

6. Dans tout ce qui précède, on n'a pas tenu compte des pertes de force vive qui ont lieu lorsque le vase changebrusquement de forme ; on a supposé que chaque molécule tendait à sortir parallèlement à l'axe du vase, ce qui n'est

vrai qu'autant que l'étendue des sections ne varie que par degrés insensibles, c'est-à-dire qu'autant que la surface du vase est soumise à la loi de continuité ; cela n'arrive pas toujours dans la pratique ; le plus souvent des ajustages sont adaptés aux vases, et la loi de continuité est interrompue au point de jonction ; examinons-en l'effet.

Les molécules du fluide, en contact avec la paroi, se meuvent *nécessairement* suivant les directions tracées sur cette paroi ; aussi les molécules appartenantes à la surface de la veine fluide tendent à sortir du vase dans des directions tangentes à cette paroi. Si ces directions ne sont pas parallèles à l'axe de l'orifice, la veine fluide tend à s'élargir ou à se resserrer au-delà de cet orifice ; ce phénomène, connu sous le nom de contraction de la veine fluide, est très-compliqué, d'autant que le mouvement d'un fluide au passage d'un orifice ne dépend pas seulement de la figure de la paroi du vase ; il dépend encore des circonstances du mouvement du fluide dans la partie de la veine qui est hors du vase; car la dépense n'est pas la même lorsque la veine se meut librement dans l'air, ou lorsqu'on lui présente un obstacle qui la force à affecter une forme différente ; l'étude de ces effets et la recherche de la dépense de fluide, qui a lieu dans divers cas, n'a été jusqu'ici qu'une suite de recherches expérimentales.

Toutefois nous essaierons de faire voir comment on pourrait tenir compte analytiquement de cet effet, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. Nous supposerons, pour plus de facilité, le cas qui se présente le plus fréquemment, d'un orifice pratiqué dans une paroi plane.

Soit le vase MNABC (*fig.* 4), dont le fonds $\gamma AB\delta$ soit plan, et dans lequel le fluide sort par l'orifice CD, par suite de l'hypothèse, la tranche arrivée en $\alpha\beta\gamma\delta$ doit se contracter *subitement*, pour s'adapter à la section CD, en se plaçant dans la position $\alpha'\beta'$ C D, et par conséquent acquérir, dans un temps infiniment petit, une vitesse finie; appelant O'' l'aire de la section $\alpha\beta$, et p'' la pression, on aura pour la vitesse du fluide passant à cette section $\frac{P'\Omega U}{p''O''}$, et la vitesse acquise dans le changement de position de $\alpha\beta\gamma\delta$ en $\alpha'\beta'CD$ sera

$$U\left(1-\frac{P'\Omega}{p''O''}\right).$$

La force capable de produire cette variation dans le temps dt pourrait imprimer, dans l'unité de temps, la vitesse $\frac{U\left(1-\frac{P'\Omega}{p''O''}\right)}{dt}$, et la masse de la tranche étant

$\rho\omega u\,dt$ ou $\frac{p''}{k}\,o''\,\frac{P'\Omega U}{p''o''}\,dt = \frac{P'}{k}\,\Omega\,U\,dt$. Le moment de cette action doit être ajouté aux momens de toutes les autres forces qui produisent les variations de vitesse des tranches du fluide ; on l'aura en remarquant que l'on doit regarder l'action dont il s'agit comme s'exerçant sur la masse de la portion de fluide qui passe de la position $\alpha\beta\gamma\delta$ à la position $\alpha'\,\beta'$ C D, et qu'à cause de la valeur trouvée pour la masse de la tranche on a

$$\beta\,\delta = \frac{\frac{P'}{k}\,\Omega U\,dt}{\frac{p''}{k}\quad o''} = \frac{P'\Omega U\,dt}{p''\,o''}, \qquad \text{et} \qquad U\,dt = \frac{\beta'\,\delta}{C'\,D^2};$$

ensorte que l'espace parcouru par le centre de gravité de cette portion de fluide dans le temps dt est $\frac{1}{2}\,U\,dt - \frac{1}{2}\,\frac{P'\Omega U\,dt}{p''\,o''}$.

Le moment cherché est donc

$$\frac{P'}{k}\,\Omega\,U\,dt\,\frac{U - \frac{P'\,\Omega}{p''\,o''}\,U}{dt} \times \frac{1}{2}\left[U\,dt - \frac{P'\,\Omega\,U\,dt}{p''\,o''}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{P'}{k}\cdot\Omega\,U^3 dt\left[1 - \frac{P'\Omega}{p''o''}\right]^2;$$

d'ailleurs, $p\omega\,dx\,\frac{du}{dt}$ est la force motrice d'une tranche quelconque, et.... et $\rho\,\omega\,dx\,\frac{du}{dt}$ est le moment de cette force ; de plus, $\omega\,dp$ est la différence des pressions exercées sur cette face de cette tranche, et $\omega\,dp\,u\,dt$ est le moment de cette nouvelle force ; la somme de tous ces momens doit être nulle. On aura donc

$$\int_{P'}^{P} \omega\,dp\,\omega\,dt + \int_{\Omega}^{o} p\,\omega\,dx\,\frac{du}{dt}\,u\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{P'}{k}\Omega\,U^3 dt\left(1 - \frac{P'\,\Omega}{p\,o'''}\right)^2 = 0,$$

ou

$$\int_{P'}^{P} \frac{dp}{p}\,p\,\omega\,u\,dt + \int_{\Omega}^{o} \frac{p}{k}\,\omega\,u\,dt\,\frac{du}{dt}\,dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{P'}{k}\;\Omega U^3\,dt\left(1 - \frac{P'\,\Omega}{p''\,o''}\right)^2 = 0;$$

ou, divisant par $p\omega u\,dt$, qui est le même pour toutes les tranches du fluide,

$$k\int_{p'}^{P} \frac{dp}{p} + \int_{\Omega}^{o} \frac{du}{dt}\,dx + \frac{1}{2}\,U^2\left(1 - \frac{P'\,\Omega}{p''\,o''}\right)^2 = 0.$$

Mettant pour $\frac{du}{dt}\,dx$ sa valeur $-\frac{P'^2\,\Omega^2\,U^2}{p^3\,\omega^3}\,d\,(p\omega)$ on aura

$$k\int_{P'}^{P}\frac{dp}{p}-\int_{\Omega}^{o}\frac{P'^2\,\Omega^2\,U^2}{p^3\,\omega^3}d\,(p\,\omega)+\frac{1}{2}U^2\left(1-\frac{P'\,\Omega}{p''\,\omega''}\right)^2=0.$$

Mais, $\int\frac{dp}{p}=\log p$, $\int_{\Omega}^{o}\frac{P'^2\,\Omega^2\,U^2}{p^3\,\omega^3}\,d\,(p\,\omega)=\cdot\,\frac{1}{2}\,U^2\left(1-\frac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}\right)$;

alors l'équation devient

$$U^2=\frac{2\,k\log\frac{P}{P'}}{\left(1-\frac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}\right)^2+\left(1-\frac{P\,\Omega}{p''\,O''}\right)^2}.$$

d'où

$$U=\sqrt{\frac{2\,k\log\frac{P}{P'}}{\left(1-\frac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}\right)+\left(1-\frac{P'\,\Omega}{p''\,O''}\right)^2}}$$

Si Ω est très-petit par rapport à O, et O'' on pourra prendre simplement $U=\sqrt{k\log\frac{P}{P'}}$, mais en négligeant la contraction on avait $U=\sqrt{2k\log\frac{P}{P'}}$. La vitesse se trouve donc, par le fait de la contraction, diminuée dans le rapport $\frac{\sqrt{2}}{1}$, elle n'est donc réellement, à très-peu près, que les 0,71 de ce qu'elle serait sans cela; ce rapport est compris entre les nombres limites, donnés par les expériences.

On peut rechercher encore à apprécier l'effet de la contraction, ainsi qu'il suit; l'orifice (*fig.* 5) étant supposé horizontal; soit *MN* la projection verticale, et *n* la projection horizontale de l'axe du vase; concevons qu'on fasse passer par cet axe, une infinité de plans verticaux; *cd* représentera en projection verticale l'intersection du plan de l'orifice par un de ces plans. *cnc' dnd'* représentant en projection horizontale la partie du plan de l'orifice, comprise entre deux plans très-voisins.

Concevons qu'on ait partagé l'aire *cc'ndd'* en une infinité de parties *pq* dont les aires soient égales entre elles, et qui seront regardées comme les intersections d'autant de filets de fluide par le plan de l'orifice. Supposons que les directions respectives de ces filets soient telles que si l'on menait du point n, à chacune de ces directions, des parallèles, la demi circonférence dont ce point est le centre se trouverait partagée par ces parallèles en parties égales; appelant U la vitesse commune des filets au point où ils coupent le plan (*fig.* 6) de l'orifice, et ϕ, l'angle formé par la direction op, de l'un de ces filets avec l'axe MN.

U cos. ϕ sera la vitesse estimée perpendiculairement au plan de l'orifice; la dépense de fluide sera égale à l'aire de l'orifice multipliée par la valeur moyenne de U cos. ϕ. Valeur qui est :

$$\frac{2}{\Pi}\int_0^{2} U \cos\phi \, d\phi = \frac{2}{\Pi} U,$$

donc la dépense sera moindre que celle qui aurait lieu si l'ouverture de l'orifice était libre, dans le rapport de $\frac{2}{\Pi} = 0,6366$.

Ce résultat est indépendant de la figure de l'orifice, et l'expérience montre en effet que la diminution de dépense provenant de la contraction demeure sensiblement le même pour des orifices de diverses figures, pourvu qu'ils n'offrent pas d'angles rentrans; d'ailleurs ce résultat tient le milieu entre ceux qui sont le plus souvent présentés; on peut donc présumer que les hypothèses précédentes s'écartent peu de la vérité;

Ainsi pour avoir la vraie dépense de fluide dans le cas de la contraction, on peut multiplier l'expression de la dépense sans contraction par le nombre 0,6366.

En général, on a remarqué que les corrections à faire, résultant des phénomènes de contraction, étaient les mêmes, soit pour des fluides incompressibles, soit pour des fluides élastiques.

CHAPITRE TROISIÈME.

Mouvement d'un fluide élastique dans un tuyau de conduite.

En supposant, comme cela a toujours lieu dans la pratique, que le tuyau ait partout la même section, on fera dans les équations ci-dessus :

$$U = \sqrt{2k \frac{\log \frac{P}{P'}}{1 - \left(\frac{P'\Omega}{P\,O}\right)^2}}$$

$$\frac{\log \frac{P}{P'}}{\log \frac{p}{P'}} = \frac{1 - \frac{P'^2\,\Omega^2}{P^2\,O^2}}{1 - \frac{P'^2\,\Omega^2}{p^2\,\omega^2}}$$

$O = \Omega = \omega$, et alors elles deviennent

$$U = \sqrt{2k \frac{\log \frac{P}{P'}}{1 - \frac{P'^2}{P'}}}, \quad \frac{\log \frac{p}{P}}{\log \frac{P}{P'}} = \frac{1 - \frac{P'^2}{p^2}}{1 - \frac{P'^2}{P^2}}.$$

On conclut de cette dernière équation que la pression est constante dans toute l'étendue du tuyau, et de plus que l'on peut y satisfaire *pour* deux valeurs de P. L'une un peu plus petite que P; l'autre égale à P', c'est-à-dire à la pression du milieu dans lequel le fluide s'écoule; l'expérience a prouvé qu'il fallait adopter cette dernière valeur.

Au reste les observations indiquent que l'écoulement du fluide dans les tuyaux de conduite, dont le diamètre est très-petit par rapport à la longueur du tuyau, s'opère avec une vitesse beaucoup moindre que celle indiquée par les formules ci-dessus, et de plus, que la pression diminue progressivement, d'une extrémité à l'autre du tuyau; de là la nécessité d'admettre pour un long tuyau l'existence de forces retardatrices, analogues à celles qui modifient dans des cas semblables le mouvement des fluides incompressibles. L'expérience paraît indiquer que l'on peut représenter l'activité de ces forces par une expression semblable à celle qui convient à ces derniers fluides ; mais en négligeant le terme qui contient la première puissance de la vitesse. D'après cela, χ étant le périmètre de la section, et $\mathcal{C}$ un coefficient constant, on aura l'équation :

$$\omega\, dp = -\rho\chi\, dx\, \mathcal{C} u^2 - \rho\omega\, dx \frac{du}{dt} \qquad (1)$$

ou, à cause de $p = k\rho$, $\dfrac{k\, dp}{p} = -\dfrac{\chi}{\omega} \mathcal{C} u^2 dx - \dfrac{du}{dt} dx.$

On a de plus l'équation $P' \Omega U = p\omega u$,

d'où $u^2 = \dfrac{P'^2 \Omega^2 U^2}{p^2 \omega^2}$ et $\dfrac{du}{dt} dx = -\dfrac{P'^2 \Omega^2 U^2}{p^3 \omega^2} d\,(p\omega)$.

On aura donc l'équation

$$K \frac{dp}{p} = -\frac{\chi}{\omega} \mathcal{C} \frac{P'^2 \Omega^2 U^2}{p^2 \omega^2} dx + \frac{P'^2 \Omega^2 U^2}{p^3 \omega^2} d\,(p\omega), \qquad (2)$$

équation qu'on peut ramener à la forme

$$Kp\, dp = \frac{P'^2 \Omega^2 U^2}{\omega^3} (d\omega - \chi \mathcal{C}\, dx) + \frac{P'^2 \Omega^2 U^2}{\omega^2} \cdot \frac{dp}{p},$$

Dans laquelle on ne pourra séparer les variables qui dans un petit nombre de cas préparés, le seul qui doive occuper dans la pratique, est celui où la section ω est supposée constante, et égalée à Ω. Par conséquent, l'équation devient,

$$Kp\, dp = -\frac{\chi}{\omega} \mathcal{C}\, P'^2 U^2 dx + P'^2 U^2 \frac{dp}{p},$$

intégrant, déterminant la constante de manière à ce que l'on ait à la fois $x = o$ et $p = P$, supposant le tuyau à section circulaire, designant par D son diamètre et par λ sa longueur, et mettant à la place de $\dfrac{\chi}{\omega}$ sa valeur $\dfrac{4}{D}$, on trouvera :

$$\frac{K}{2}\,(P^2 - p^2) = \left[\frac{4}{D} \mathcal{C}\, P'^2 x + P'^2 \log \frac{P}{p}\right] U^2$$

$$(3) \qquad \text{d'où } U = \sqrt{\frac{\frac{K}{2}\left(\frac{P^2}{P'^2} - \frac{p^2}{P'^2}\right)}{\frac{4}{D}\mathcal{C} x + \log \frac{P}{p}}};$$

En outre, pour $x = \lambda$ on a $p = P'$,

(4)

$$\text{donc } U = \sqrt{\frac{\frac{K}{2}\left(\frac{P^2}{P'^2} - 1\right)}{\frac{4}{D}\beta\lambda + \log\frac{P}{P'}}};$$

le volume du fluide qui s'écoule pendant l'unité de temps, mesuré sous la pression P qui a lieu dans le gazomètre, est égal au produit de U par $\pi\,\frac{D^2}{4}\times\frac{P'}{P}$. Il est donc

$$\frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{\frac{K}{2}\left(1 - \frac{P'^2}{P^2}\right)}{\frac{4}{D}\beta\lambda + \log\frac{P}{P'}}}; \tag{5}$$

Éliminons U entre (3) et (4), il viendra

$$\frac{P^2 - p^2}{P^2 - P'^2} = \frac{\frac{4\beta x}{D} + \log\frac{P}{p}}{\frac{4\beta\lambda}{D} + \log\frac{P}{P'}}; \tag{6}$$

Équation qui donnera la valeur de la pression p qui a lieu à la distance x, de l'origine du tuyau dans le gazomètre ; cette valeur décroît progressivement, à mesure que l'on s'éloigne de cette origine, de la pression P à la pression P'.

Si le tuyau est suffisamment long, et les pressions P et P' assez peu différentes, on pourra négliger, dans les formules précédentes, les termes $\log\frac{P}{p}\cdot\frac{P'}{p}$. On aura alors, pour la vitesse de l'écoulement,

$$U = \sqrt{\frac{K\,D}{8\beta\lambda}\left(\frac{P^2}{P'^2} - 1\right)}, \tag{7}$$

pour la dépense du fluide dans l'unité de temps,

$$Q = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{K\,D}{8\beta\lambda}\left(\frac{P^2}{P'^2} - 1\right)}, \tag{8}$$

pour la valeur de la pression p',

$$p = \sqrt{\frac{P^2(\lambda - x) + P'^2 x}{\lambda}}; \tag{9}$$

Ces formules s'appliquent au cas d'un tuyau qui a partout le même diamètre; dans la pratique on termine ordinairement les tuyaux de conduite par un ajustage, *mncD*.

Alors on ne connait pas la pression P′ qui a lieu en *mn*; pour la déterminer observons que si U′ est la vitesse en *c*D. Ω′ cet orifice, P″ la pression extérieure on aura les relations,

$$U'^2 = 2\,k \log \frac{P'}{P''}\quad P'\Omega\,U = P''\,\Omega'\,U' = p''\,\Omega' \sqrt{2k \log \frac{P'}{P''}}$$

d'ailleurs,

$$U = \sqrt{\frac{\frac{k}{2}\left(\frac{P^2}{P'^2} - 1\right)}{\frac{4}{D}\,\mathcal{C}\lambda + \log \frac{P}{P'}}}$$

On aura don pour déterminer P′, l'équation

$$\Omega \sqrt{\frac{\frac{k}{2}\,(P^2 - P'^2)}{\frac{4}{D}\,\mathcal{C}\lambda + \log \frac{P}{P'}}} = P''\,\Omega' \sqrt{2\,k \log \frac{P'}{P''}}$$

D'après l'usage établi d'assimiler l'écoulement des fluides élastiques à celui des liquides, M. Girard a été conduit à supposer que les lois de l'écoulement étaient représentées par l'équation

$$\frac{g\,D\,Z}{\lambda} = \mathcal{C}\,U^2.$$

ou z désigne la hauteur de la colonne fluide, considérée sous la pression P dont le poids serait capable de produire la pression $P - p$. On a donc, R, étant la densité correspondante à la pression P, $z = \frac{P - P'}{R\,g}$, et puisque $P = KR$, l'équation précédente revient à

$$U = \sqrt{\frac{K\,D}{4\,\mathcal{C}\lambda}\left(1 - \frac{P'}{P}\right)},$$

Le volume de fluide qui s'écoule sera par seconde

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{K\,D}{\mathcal{C}\,\lambda}\left(1 - \frac{P'}{P}\right)},$$

Expressions qui lorsque P surpasse peu P′, comme cela avait lieu dans les expériences de M. Girard, donnent des résultats peu différens de ceux des formules (7) (8) (9) du n° (2).

En effet, soit $P = P'(1 + \delta)$; si δ est très-petit, on aura à très-peu-près

$$1 - \frac{P^2}{P'^2} = 2\delta \quad \text{et} \quad 1 - \frac{P'}{P} = \delta.$$

Ses expériences ont d'ailleurs indiqué que l'expression précédente représentait les effets naturels avec assez d'exactitude; mais elles ont fait voir que le coefficient $\mathfrak{C}$ dépendait de l'état intérieur du tuyau, et ne dépendait pas sensiblement de la nature du gaz.

Ainsi pour une conduite en fer fondu de $0^m,0812$ de diamètre, garnie intérieurement d'un conduit résineux, on a trouvé les valeurs suivantes de $\mathfrak{C}$.

Air atmosphérique.	*Gaz hydrogène percaboné.*
0,005621	0,005626

et pour un conduit fait de canons de fusils de 0,0158 de diamètre, où il n'existait pas d'enduit. Elles étaient,

0,003219	0,003219

CHAPITRE QUATRIÈME.

Nous terminerons par l'examen de quelques questions relatives à la puissance expansive du gaz.

Première question.

Un piston soumis à l'action de la pesanteur, descend dans un corps de pompe contenant un gaz. Quelles seront les circonstances du mouvement?

Soit M la masse du piston, x son parcours, o sa section, l la distance de sa position primitive au fond du cylindre; P la force élastique dans l'état initial; P′ la pression extérieure pour l'unité de surface, g la vitesse imprimée par la gravité dans l'unité de temps. On aura l'équation

$$\frac{d^2x}{dt} = P'o + Mg - \frac{Pol}{-x}.$$

Multipliant qar $2\,dx$, intégrant et nommant a la vitesse initiale du piston, on aura

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Ma^2 + 2\,(P'o + Mg)\,x + 2\,Pol\log\frac{l-x}{l};$$

le chemin parcouru par le piston jusqu'à ce que la vitesse soit détruite, sera donc donné par l'équation

$$Ma^2 + 2\,(P'o + Mg)\,x - 2\,Pol\log\frac{l-x}{l} = 0. \qquad (1)$$

Cette équation aura une racine réelle positive, et n'en aura qu'une. En effet, les racines sont déterminées par l'intersection de la logarithmique $y = l\log\frac{l-x}{l}$, ayant la position $m'omz$, et d'une droite $y = \dfrac{M\left(a^2 + 2gx + 2\frac{P'ox}{M}\right)}{2\,Po}$, ayant la position ABmD (*fig.* 7).

Si la vitesse était nulle, la courbe et la droite auraient la position indiquée *fig.* 8.

Enfin, si le corps n'entrait dans le fluide qu'en vertu de la vitesse initiale, on aurait simplement

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Ma^2 - 2\,Pol\log\frac{l}{l-x};$$

la position du point ou la vitesse serait détruite, est donnée par l'équation

$$a^2 - \frac{2Pol}{M}\log\frac{l}{l-x} = 0 \quad \text{d'où} \quad x = l\left(1 - e^{-\frac{Ma^2}{2Po}}\right);$$

La position ou l'équilibre existerait entre le poids du corps, si ce corps n'avait pas de vitesse acquise en arrivant dans cette position, serait donnée par l'équation

$$P'O + gM = \frac{Pol}{l-x}; \quad \text{d'où} \quad x = l\left(1 - \frac{PO}{P'o + Mg}\right) = \lambda;$$

valeur que nous supposerons positive ; ce qui exige que l'on ait $P'o + Mg > PO$, comme on peut le voir *à priori*.

Ainsi, lorsqu'on aura résolu par approximation l'équation (1), il sera facile, en retranchant de la valeur trouvée pour x, la longueur λ, d'avoir l'écart dû à la première oscillation.

Mais, d'un autre côté, lorsque le corps aura atteint le point où sa vitesse est nulle, il aura dépassé sa position d'équilibre, et sera repoussé de bas en haut par la force élastique du gaz, il atteindra ainsi une certaine position ou sa vitesse sera nulle de nouveau, mais alors il retombera par l'effet de son poids, et il en résultera un mouvement oscillatoire indéfini; en effet, si nous appelons x' l'espace parcouru en remontant, et l' la longueur de la première course dans ce cas où la vitesse initiale est nulle, l'équation du mouvement ascendant sera;

$$M\frac{d^2x'}{dt^2}=\frac{Pol}{l-l'+x'},\quad -(gM+P'o);$$

d'où l'on tire

$$M\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2=2\,Pol\log\frac{l-l'}{l-l'+x'}-2(Mg+P'o),x'$$

en observant que pour $x'=o$, on doit avoir $\frac{dx'}{dt}=o$.

Alors l'amplitude de la seconde oscillation sera donnée par l'équation

$$lPo\log\frac{l-l'}{l-l'+x'}-{}^2(Mg+P'o)\,x'=o;$$

Équation à laquelle on ne peut satisfaire qu'en posant $x'=l'$, c'est-à-dire que le corps remontera juste au point d'où il serait descendu, pour arriver au point où sa vitesse a été détruite, si dans son mouvement descendant il n'avait pas eu de vitesse initiale, d'où résulte cette proposition, que si un corps descend par l'action de la pesanteur dans un corps de pompe contenant un fluide élastique, il remontera par la réaction, à son point de départ, et produira ainsi indéfiniment une série d'oscillations égales.

Quant à la durée de chaque oscillation, on la déduirait de l'intégrale de l'équation.

$$dt=\frac{\sqrt{M}\;x}{\sqrt{2\left[Po\log\frac{l}{l-x}-(Mg+P'o)\,x\right]}}.$$

Elle ne pourra donc s'obtenir que par approximation, toutefois les effets naturels ne sont pas conformes au résultat ci-dessus, ce que l'on doit attribuer :

1°. Au frottement du piston contre les parois du cylindre.

2°. A la résistance extérieure de l'air qui croît comme le carré de la vitesse.

3°. A la résistance du gaz intérieur qui doit être aussi comme le carré de la vitesse, et de plus être proportionnelle à la densité du fluide.

On peut essayer de tenir compte de ces effets de la manière suivante :

Mouvement descendant.

Outre la force retardatrice $-\frac{Pot}{l-x}$, il en est, disons-nous, une autre, proportionuelle au carré de la vitesse et à la densité du fluide; elle sera, μ désignant un coefficient à déterminer par l'expérience,

$$-\frac{\mu\, Pol}{l-x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

on aura donc l'équation

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=(P'o+Mg)-\frac{Pol}{l-x}-\mu\frac{Pol}{l-x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Posons

$$\frac{P'o+Mg}{M}=\frac{b^2}{2},\quad \frac{Pol}{M}=\frac{a^2}{2},\quad \frac{\mu Pol}{M}=\frac{m}{2};$$

et multipliant par $2dx$, il vient

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{m}{l-x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2dx=b^2\,dx-\frac{a^2}{(l-x)}dx,$$

équation de la forme $dy+f(x)y\,dx=f_1(x)\,dx$.

Si l'on pose $\frac{dx^2}{dt^2}=y$, intégrable par conséquent, et qui donne en déterminant la constante de manière à avoir à la fois $x=o$ $\frac{dx}{dt}=V$, V étant la vitesse initiale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\left(V^2-\frac{b^2l}{m-1}+\frac{a^2}{m}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)^m+\frac{b^2l}{m-1}\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{a}{m}$$

d'où $$dt=\frac{dx}{\sqrt{\left(V^2-\frac{b^2l}{m-1}+\frac{a^2}{m}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)^m\quad\frac{b^2l}{m-1}\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{a}{m}}}.$$

L'équation $\left(V^2 - \frac{m-1}{b^2} + \frac{a^2}{m}\right)\left(- \frac{x}{l}\right)^m + \frac{b^2 l}{m-1}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{a^2}{m} = 0$

donnera la longueur de l'oscillation ; et si l'on appelle l'' la valeur de x convenable, l'intégrale définie

$$\int_0^{l''} \frac{dx}{\sqrt{\left(V^2 - \frac{b^2 l}{m-1} + \frac{a^2}{m}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)^m + \frac{b^2 l}{m-1}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{a^2}{m}}}$$

sera l'expression de la durée de cette oscillation.

Il sera facile d'avoir ces expressions dans chaque cas particulier soit par des interprétations et des résolutions exactes, soit par quelques unes des méthodes connues d'approximation.

Quant à l'équation du mouvement ascendant, elle sera, en appelant x'' l'espace parcouru dans ce mouvement à compter du point le plus bas,

$$M\frac{d^2 x''}{dt^2} = \frac{Po\,l}{l - l'' + x''} - (P'o + Mg) - \mu'\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2;$$

μ' étant un coefficient constant relatif à la résistance de l'air extérieur, nous poserons aussi

$$\frac{\mu'}{M} = m', \quad \text{et } l - l'' + x'' = z;$$

alors on aura

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{a^2}{2z} - \frac{b^2}{2} - \frac{m'}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

d'où, multipliant par $2dz$, et intégrant une première fois, on tire

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = e^{-2m'z}\int e^{2m'z}\left(\frac{a^2}{z} - b^2\right)dz.$$

Cette expression n'est pas connue sous forme finie, à cause du terme

$$\int e^{2mz}\left(\frac{a^2}{r} - b^2\right)dz;$$

En sorte qu'on ne pourra résoudre le problème que par approximation.

On peut montrer toutefois que l'amplitude de l'oscillation ascendante est moindre que celle de l'oscillation descendante.

Faisant abstraction de la partie de la résistance de l'air extérieur, due à la vitesse du mobile, on a pour l'équation du mouvement ascendant.

$$M\frac{d^2x''}{dt^2}=\frac{Pol}{l-l''+x''}-(P'o+Mg);$$

d'où $$M\left(\frac{dx''}{dt}\right)^2=2\,Pol\log\frac{l-l''+x''}{l-l''}-2\,(P'o+Mg)\,x'';$$

et l'équation qui donne l'amplitude de l'oscillation est

$$\log\frac{l-l''+x''}{l-l''}-\frac{P'o+Mg}{Pol}\,x''=o\,;$$

La valeur x'' sera donc l'abscisse du point d'intersection de la logarithmique

(AmC) $$y''=l.\log\frac{l-l''+x''}{l-l''},$$

et de la droite (AmB) $$y''=\frac{Po+Mg}{Po}\,x''\,;$$

c'est-à-dire deux lignes passant par l'origine. De plus l'ordonnée CP de la courbe pour l'abscisse l'' est $\left(l\ \log\frac{l}{l-l''}\right)$, et celle BP de la droite est

$$\left(\frac{P'o+Mg}{Po}\,l''\right).$$

Or on a vu qu'en appellant l' la longueur de l'oscillation descendante obtenue en faisant abstraction de la résistance de l'air due à la vitesse du piston, on avait la relation.

$$l'=\frac{Po}{P'o+Mg}\,l\,\log\frac{l}{l-l'},$$

déduite de l'équation

$$M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2\,(P'o+Mg)\,x+2\,Pol\,\log\frac{l.x}{l},$$

qui est celle du mouvement descendant quand la vitesse initiale est nulle. OB $(P'o+Mg)x$, représente la force vive acquise par le corps parvenu à la distance x, et $2\,Pol\log\frac{l-x}{l}$ représente la force perdue pour arriver à ce même point.

L'expression $(P'o+Mg)\left(x-\frac{Po}{P'o+Mg}\,l\log\frac{l}{l-l'}\right)$ sera donc positive tant que x sera moindre que l; mais on a évidemment $l'' < l'$;

donc $$(P'o + Mg)\, l'' > P o l \log \frac{l}{l - l''};$$

donc on a BP > CP, donc l'abcisse x'' du point d'intersection m est moindre que l''. C Q D.

Deuxième question.

Dans les pompes à feu agissant par expansion, il convient, pour avoir le plus grand effet avec le moins de dépense, d'arrêter la communication entre le cylindre et la chaudière, à une certaine distance cp du point de départ AB. Alors la vapeur contenue dans l'espace AB$m'n'$ agit par expansion. On demande de trouver la distance cp.

Soit P la force élastique de la vapeur dans la chaudière, ou la force agissant sur la face $m'n'$ du piston, P' la force opposé agissant sur la face mn. O la section transversale du cylindre, l sa longueur diminuée de l'épaisseur du piston, l' la distance cherchée, M la masse du gaz fourni sous la pression P, K le rapport de la pression à la densité de la vapeur d'eau. On aura pour le mouvement de AB à cp.

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = (P - p')\, O, \quad \text{d'où} \quad M \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\, (P - p')\, O\, x,$$

en supposant la vitesse initiale nulle ; ainsi la force vive acquise en arrivant en mn, sera $2\,(P - p')\,O\,l'$.

Le gaz agissant par expansion, la loi de la seconde partie du mouvement est

$$M \frac{dz}{dt} = \frac{P\, O\, l'}{x} - P', \quad \text{d'où} \quad m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\, p\, o\, l' \log x - 2\, p'\, o\, x + C,$$

pour $x = l'$ $M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,(P - p')\,O\,l'$, donc on aura

$$M \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\, (P - p')\, O\, l' + P\, O\, l' \log \frac{x}{l'} - 2 p'\, o\, (x - l'),$$

et lorsque x sera égal à l, la force vive acquise sera

$$2\, p\, O\, l' \left(1 + \log \frac{l}{l'}\right) - 2\, p'\, O\, l;$$

d'ailleurs, la dépense de la valeur est $\frac{P}{K}\, o l'$.

Pour qu'il y ait le plus d'avantage possible, il faut que le rapport de la force vive acquise à la fin du mouvement, avec la vapeur dépensée, soit un maximum, ou que l'expression

$$\frac{2\,\mathrm{P}\,\mathrm{O}\,l'\left(1+\log\frac{l}{l'}\right)-2\mathrm{P}'\,\mathrm{O}\,l}{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{K}}\,\mathrm{O}\,l'}\; 2k\left(1+\log\frac{l}{l'}-\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}}\cdot\frac{l}{l'}\right),$$

soit un maximum, ce qui a lieu en posant $l'=\frac{p'}{p}l.$

Dans la pratique, on a ordinairement $p'=0,4\times\mathrm{P}$ d'où $l'=\frac{2}{5}l$, ce qui est aussi le plus généralement la valeur adoptée.

Vu par le Doyen de la Faculté des Sciences, 15 juillet 1831,

Signé Baron THÉNARD.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général des Études, chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

Signé ROUSSELLE.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE DEUXIÈME.

CHAPITRE TROISIÈME.

CHAPITRE QUATRIÈME.

A MONSIEUR RANC,

RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE POITIERS.

HOMMAGE

D'ATTACHEMENT ET DE PARFAITE VÉNÉRATION.