N° D'ORDRE
414.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. CH. BIEHLER,

Directeur des Études à l'École préparatoire du Collége Stanislas.

THÈSE D'ANALYSE. — SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

THÈSE D'ALGÈBRE.

Soutenues le 8 Avril 1879, devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président.*
BOUQUET, DARBOUX, } *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1879

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

5084 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

A MON MAITRE

M. CHARLES HERMITE

Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.

HOMMAGE

DE RECONNAISSANCE ET DE RESPECTUEUSE AFFECTION.

CHARLES BIEHLER.

THÈSE D'ANALYSE.

INTRODUCTION.

Dans une Lettre à M. Liouville, communiquée par ce dernier à l'Académie des Sciences en 1861, M. Hermite a indiqué de quelle manière la considération des développements en séries simples de sinus et de cosinus des fonctions doublement périodiques de troisième espèce [1] conduit à la démonstration des théorèmes de M. Kronecker sur les formes quadratiques. L'année suivante (*Comptes rendus* du 7 juillet 1862), M. Hermite est revenu sur les résultats précédents pour en faire une étude plus complète. Le point de départ de ses recherches se trouve dans les séries qu'il obtient en particularisant la variable dans les développements de certaines fonctions doublement périodiques de troisième espèce, tandis que M. Kronecker était parvenu au même but,

[1] M. Hermite a donné le nom de *fonctions doublement périodiques de première espèce* aux fonctions qui possèdent deux périodes a et b, celui de *fonctions doublement périodiques de deuxième espèce* à des fonctions qui possèdent une période a et se reproduisent à un facteur constant près lorsqu'on change z en $z+b$, enfin celui de *fonctions doublement périodiques de troisième espèce* à des fonctions qui possèdent la période a et qui se reproduisent à un facteur exponentiel variable près quand on change z en $z+b$. Nous conserverons ces dénominations et nous adopterons la notation de Jacobi dans ce qui suit.

c'est-à-dire à la détermination du nombre des classes quadratiques de même déterminant, par l'étude des équations algébriques à coefficients entiers, dont dépendent les modules qui donnent lieu, dans la théorie des fonctions elliptiques, à la multiplication complexe.

Les fonctions dont l'étude a permis à M. Hermite de donner cette nouvelle extension aux travaux de Jacobi sur l'Arithmétique supérieure sont des quotients de fonctions Θ, dans lesquelles il figure au numérateur deux fonctions Θ distinctes l'une de l'autre ou égales entre elles et au dénominateur une autre de ces fonctions. M. Hermite a donné, sans démonstration, les formules qui lui ont servi de point de départ dans ses recherches arithmétiques. La première Partie de ce travail a pour objet la démonstration des formules de M. Hermite.

Ces formules, au nombre de vingt-quatre, se partagent en deux Catégories : la première Catégorie comprend les douze fonctions dans lesquelles les deux facteurs Θ qui figurent au numérateur sont distincts; la deuxième Catégorie comprend celles qui renferment au numérateur le carré d'une fonction Θ.

La deuxième Partie a pour objet la démonstration de formules nouvelles analogues aux formules de M. Hermite; ce sont les développements des fonctions de troisième espèce dans lesquelles le numérateur est le produit de trois facteurs Θ et le dénominateur un autre. Ces formules, au nombre de quarante, se partagent en trois Catégories. La première Catégorie comprend les quatre formules qui donnent les développements des fonctions dans lesquelles les trois facteurs du numérateur sont distincts; la deuxième Catégorie comprend vingt-quatre formules qui donnent les développements des fonctions dans lesquelles il figure au numérateur le carré d'une fonction Θ; enfin, la troisième Catégorie comprend douze formules donnant les développements des fonctions dans lesquelles le numérateur est le cube de l'une des fonctions Θ.

La troisième Partie a pour objet la démonstration des formules qui donnent les développements des inverses des fonctions envisagées dans les deux premières.

Enfin, il m'a paru qu'il ne serait pas sans intérêt d'ajouter aux développements précédents ceux d'autres fonctions dans lesquelles le dénominateur est le produit des carrés de deux fonctions Θ et le numérateur la première, la seconde ou la troisième puissance d'une autre. Ces formules m'ont donné comme conséquence la cinquième, la sixième et la septième puissance des quantités $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$, $H_1(o)$. On sait que les travaux de Jacobi ayant pour objet les applications de la théorie des fonctions elliptiques à l'Arithmétique supérieure ont eu pour point de départ les expressions des puissances paires de ces quantités; les travaux plus récents de M. Kronecker et de M. Hermite reposent sur les expressions du cube de ces fonctions. Mon but, pour le moment, n'est pas d'obtenir les conséquences arithmétiques que peuvent offrir les formules trouvées; je me contente de signaler quelques-unes de celles qui se présentent immédiatement.

Pour établir les formules dont la démonstration fait l'objet des deux premières Parties de ce travail, j'ai fait usage de la méthode de M. Liouville. Le principe de cette méthode consiste à associer à chaque fonction celle qui s'en déduit par le changement de z en $z + i\mathrm{K}'$; l'une de ces deux fonctions, devenant infinie pour $z = o$, n'est plus développable par la formule de Fourier; on en retranche une partie simplement périodique, choisie de manière que la différence ne devienne plus infinie pour $z = o$. Cette différence est alors développable en série de sinus et cosinus, et, en comparant les développements de deux fonctions associées, on obtient des relations entre les coefficients des deux développements; ces relations déterminent alors les coefficients.

J'ai fait usage également de la méthode donnée par M. Hermite, pour le développement des fonctions doublement périodiques, dans une Note insérée par lui dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de Lacroix. Cette méthode s'applique aux fonctions de troisième espèce;

elle fournit une relation linéaire entre deux coefficients qui permet de trouver l'expression générale de ces coefficients.

Pour établir les formules qui font l'objet de la troisième Partie, j'abandonne les méthodes précédentes, quoiqu'elles s'appliquent encore comme je le montre sur le développement de la fonction $\frac{1}{\Theta(z)}$, pour me servir de celle qu'ont donnée MM. Briot et Bouquet dans la deuxième édition de leur *Traité des fonctions elliptiques*. Cette méthode fournit le développement d'une fonction doublement périodique, en une somme illimitée de termes simplement périodiques. Mais cette méthode, comme l'ont fait remarquer MM. Briot et Bouquet, s'applique aussi aux fonctions de troisième espèce. Elle a l'avantage de fournir rapidement l'expression générale d'un terme de la somme dont il a été question plus haut, et, par une transformation simple, elle donne deux expressions nouvelles du développement de chaque fonction.

BIEHLER.

Paris, le 2 mai 1878.

SUR LES

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

DE TROISIÈME ESPÈCE.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Les douze premières formules de M. Hermite peuvent être divisées en trois groupes comprenant chacun quatre formules.

Le premier groupe comprend les développements des fonctions

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta_1(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)};$$

le second groupe comprend ceux des fonctions

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)};$$

enfin le troisième groupe renferme ceux des fonctions

$$\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

Nous désignerons, pour abréger, par x la quantité $\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}$, par ω l'expression $\frac{i\pi K'}{2K}$, et nous poserons

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU PREMIER GROUPE.

2. La fonction $\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}$ admet la période $2K$; elle est finie et continue dans toute l'étendue de la bande limitée par les deux parallèles menées à la direction K par les deux points $z = +iK'$ et $z = -iK'$; elle est donc développable par la formule de Fourier, en série convergente, suivant les puissances de l'exponentielle $e^{\frac{i\pi z}{K}}$ ou e^{2ix} pour toutes les valeurs de z comprises dans l'intérieur de la bande.

Pour ces valeurs on a

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \mathcal{A}_m\, e^{2mix},$$

ou bien

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \mathcal{A}_0 + \sum_{m=1}^{m=+\infty} (\mathcal{A}_m + \mathcal{A}_{-m}) \cos 2mx + i \sum_{m=1}^{m=+\infty} (\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_{-m}) \sin 2mx;$$

la fonction qui figure dans le premier membre de l'équation est impaire, à cause des relations

$$\begin{aligned} \Theta(-z) &= \Theta(z), \\ H(-z) &= -H(z), \\ H_1(-z) &= H_1(z); \end{aligned}$$

les termes d'ordre pair doivent donc disparaître du second membre, et la fonction $\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}$ est développable de la manière suivante :

$$(a) \qquad \frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \sum A_m \sin 2mx.$$

3. Considérons actuellement la fonction $\frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{H(z)}$. Cette fonction de-

vient infinie pour $z = 0$, et en général pour

$$z = 2mK + 2m'iK' ;$$

elle n'est donc pas développable, par la formule de Fourier, suivant les puissances de l'exponentielle e^{ix} dans la bande considérée; mais, si l'on choisit convenablement la constante α, la fonction

$$\frac{\Theta(z)\Theta_1(z)}{H(z)} - \frac{\alpha}{\sin x}$$

restera finie pour les valeurs $z = 2mK$ ou $x = m\pi$, qui annulent $H(z)$; elle sera développable en série convergente, par la formule de Fourier, dans toute l'étendue de la bande limitée par deux parallèles à la direction K menées par les points $z = 2iK'$ et $z = -2iK'$; elle n'admet pas, comme la précédente, la période $2K$, mais elle admet la période $4K$, et, par suite, elle est développable suivant les puissances de l'exponentielle e^{ix} :

$$\frac{\Theta(z)\Theta_1(z)}{H(z)} - \frac{\alpha}{\sin x} = \sum \mathfrak{B}_m e^{mix}.$$

La fonction $\frac{\Theta(z)\Theta_1(z)}{H(z)} - \frac{\alpha}{\sin x}$ est impaire; les cosinus disparaîtront donc du second membre; de plus, elle change de signe quand on change x en $x + \pi$; par suite, les multiples pairs de l'arc x ne figureront pas non plus sous les sinus.

On a donc

$$(b) \qquad \frac{\Theta(z)\Theta_1(z)}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + \sum B_m \sin(2m+1)x.$$

4. Nous venons de trouver la forme des développements de nos deux premières fonctions; il nous reste à en calculer les coefficients.

Remarquons, à cet effet, que l'on a

$$\Theta(z + iK') = \quad i\,H(z)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z + iK')},$$

$$H(z + iK') = \quad i\,\Theta(z)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z + iK')},$$

$$\Theta_1(z + iK') = +\, H_1(z)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z + iK')},$$

et, à cause de la notation que nous avons adoptée,

$$\Theta(z+i\mathrm{K}') = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}\,\mathrm{H}\,(z)\,e^{-ix},$$

$$\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}') = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}\,\Theta\,(z)\,e^{-ix}.$$

$$\Theta_1(z+i\mathrm{K}') = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\mathrm{H}_1(z)\,e^{-ix},$$

par suite

$$\frac{\Theta(z+i\mathrm{K}')\,\Theta_1(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}')} = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\,e^{-ix};$$

mais

$$\frac{\Theta(z+i\mathrm{K}')\,\Theta_1(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}')} = \frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum \mathrm{B}_m \sin(2m+1)(x+\omega).$$

Comparant cette relation avec la précédente et avec l'équation (a), il viendra

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum \mathrm{B}_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-ix}\sum \mathrm{A}_m \sin 2mx.$$

En développant les deux membres suivant les puissances de l'exponentielle e^{ix} et en égalant les coefficients des mêmes puissances de e^{ix} dans les deux membres, on obtiendra des relations entre les coefficients au moyen desquelles on pourra les déterminer.

On a d'abord

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} = \frac{2i\alpha}{e^{i(x+\omega)} - e^{-i(x+\omega)}} = \frac{-2i\alpha\,e^{i(x+\omega)}}{1 - e^{2i(x+\omega)}},$$

ou bien

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} = \frac{-2i\alpha\sqrt{q}\,e^{ix}}{1 - qe^{2ix}},$$

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} = -2i\alpha\sqrt{q}e^{ix}(1 + qe^{2ix} + q^2e^{4ix} + \ldots + q^m e^{2mix} + \ldots),$$

$$\sum \mathrm{B}_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{\mathrm{B}_0}{2i}\left(e^{ix}q^{\frac{1}{2}} - e^{-ix}q^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\mathrm{B}_1}{2i}\left(e^{3ix}q^{\frac{3}{2}} - e^{-3ix}q^{-\frac{3}{2}}\right) + \ldots,$$

$$\sum \mathrm{A}_m \sin 2mx = \frac{\mathrm{A}_1}{2i}(e^{2ix} - e^{-2ix}) + \frac{\mathrm{A}_2}{2i}(e^{4ix} - e^{-4ix}) + \ldots.$$

Il faut donc égaler les coefficients des mêmes puissances de e^{ix} dans l'égalité

$$
\begin{aligned}
&-2i\alpha\sqrt{q}e^{ix}(1+qe^{2ix}+q^2e^{4ix}+\ldots+q^m e^{2mix}+\ldots)\\
&\quad+\frac{B_0}{2i}\left(e^{ix}q^{\frac{1}{2}}-e^{-ix}q^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&\quad-\frac{B_1}{2i}\left(e^{3ix}q^{\frac{3}{2}}-e^{-3ix}q^{-\frac{3}{2}}\right)+\ldots+\frac{B_m}{2i}\left(e^{(2m+1)ix}q^{\frac{2m+1}{2}}-e^{-(2m+1)ix}q^{-\frac{2m+1}{2}}\right)+\ldots\\
&=\frac{A_1}{2i}(e^{2ix}-e^{-2ix})\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}\\
&\quad+\frac{A_2}{2i}(e^{4ix}-e^{-4ix})\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}+\ldots+\frac{A_m}{2i}(e^{2mix}-e^{-2mix})\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}+\ldots,
\end{aligned}
$$

ce qui nous donne les relations

$$
\begin{gathered}
-2i\alpha\sqrt{q}+\frac{B_0}{2i}q^{\frac{1}{2}}=\frac{A_1}{2i\sqrt[4]{q}},\\
-2i\alpha\sqrt{q^3}+\frac{B_1}{2i}q^{\frac{3}{2}}=\frac{A_2}{2i\sqrt[4]{q}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
-2i\alpha\sqrt{q^{2m+1}}+\frac{B_m}{2i}q^{\frac{2m+1}{2}}=\frac{A_{m+1}}{2i\sqrt[4]{q}},
\end{gathered}
$$

et

$$
\begin{gathered}
-\frac{B_0}{2i}q^{-\frac{1}{2}}=0,\\
-\frac{B_1}{2i}q^{-\frac{3}{2}}=-\frac{A_1}{2i\sqrt[4]{q}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
-\frac{B_m}{2i}q^{-\frac{2m+1}{2}}=-\frac{A_m}{2i\sqrt[4]{q}}.
\end{gathered}
$$

On en tire

$$-2i\alpha q^{\frac{2m+1}{2}}+\frac{A_m}{2i\sqrt[4]{q}}q^{2m+1}=\frac{A_{m+1}}{2i\sqrt[4]{q}}$$

ou bien

$$A_{m+1}=A_m q^{2m+1}+4\alpha q^{m+\frac{3}{4}}.$$

Si l'on pose

$$A_m = q^{m^2}\mathcal{A}_m,$$

il viendra

$$\mathcal{A}_{m+1} = \mathcal{A}_m + 4\alpha q^{m+\frac{3}{4}-(m+1)^2},$$

ou

$$\mathcal{A}_{m+1} = \mathcal{A}_m + 4\alpha q^{-\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

et, par suite,

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{m-1} + 4\alpha q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}},$$

$$\mathcal{A}_{m-1} = \mathcal{A}_{m-2} + 4\alpha q^{-\frac{(2m-3)^2}{4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \quad + 4\alpha q^{-\frac{9}{4}},$$

d'où

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_1 + 4\alpha\left(q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right);$$

mais

$$A_1 = 4\alpha q^{\frac{3}{4}}, \quad A_1 = q\,\mathcal{A}_1,$$

et, par suite,

$$\mathcal{A}_1 = 4\alpha q^{-\frac{1}{4}};$$

on en tire la valeur de $\mathcal{A}_m$ sous la forme

$$\mathcal{A}_m = 4\alpha\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)$$

et

$$A_m = 4\alpha q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right).$$

5. La relation

$$\frac{B_m}{2i} q^{-\frac{2m+1}{2}} = \frac{A_m}{2i\sqrt[4]{q}}$$

nous fournit la valeur de B_m,

$$B_m = 4\alpha q^{+m+\frac{1}{4}+m^2}\mathcal{A}_m$$

ou bien

$$B_m = 4\alpha q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right);$$

on a donc

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 4\alpha \sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx,$$

et

$$\frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + 4\alpha \sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin(2m+1)x;$$

il reste à déterminer la valeur de α.

6. Il suffit d'exprimer, à cet effet, que la fonction

$$\frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} - \frac{\alpha}{\sin x}$$

reste finie pour $z = 0$. Cela exige que

$$\sin x \frac{d}{dx}\left[\Theta(z)\,\Theta_1(z)\right] + \cos x\,\Theta(z)\,\Theta_1(z) - \alpha\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{H}'(z) = 0$$

pour $z = 0$ ou $x = 0$; cette condition donne

$$\Theta(0)\,\Theta_1(0) = \alpha\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{H}'(0).$$

Or, on sait que $\frac{\sin \operatorname{am} z}{z}$ a pour limite l'unité, pour $z = 0$,

$$\sin \operatorname{am} z = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)},$$

$$\frac{\sin \operatorname{am} z}{z} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(z)}{z}\times\frac{1}{\Theta(z)};$$

pour $z = 0$, $\frac{\mathrm{H}(z)}{z}$ a pour limite $\mathrm{H}'(0)$; on a donc

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{H}'(0)\times\frac{1}{\Theta(0)};$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{H}'(0) = \sqrt{k}\,\Theta(0);$$

α sera donc donné par l'équation

$$\Theta(o)\,\Theta_1(o) = \alpha\,\frac{2K}{\pi}\,\Theta(o)\sqrt{k};$$

mais on a

$$\Theta_1(o) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots + 2q^{n^2} + \ldots,$$

$$H_1(o) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + \ldots + 2\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}} + \ldots;$$

par suite, après la suppression des facteurs communs $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$, il viendra

$$1 = \alpha H_1(o), \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{1}{H_1(o)}.$$

Nous désignerons, comme l'a fait M. Hermite, par θ, θ_1, η les quantités $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$, $H_1(o)$:

$$\theta = \Theta(o) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots,$$

$$\theta_1 = \Theta_1(o) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

$$\eta = H_1(o) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots.$$

Il est aisé de s'assurer que, pour cette valeur de α, la fonction $\frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{H(z)} - \frac{\alpha}{\sin x}$ restera finie pour $z = 0, \ldots,$ et en général pour $z = 2mK$.

En introduisant cette valeur de α dans les équations précédentes, il viendra

$$\eta\,\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx,$$

$$\eta\,\frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{H(z)} = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin(2m+1)x.$$

7. Pour obtenir les deux autres formules du premier groupe, il

suffira de changer dans les précédentes x en $x + \frac{\pi}{2}$ ou z en $z + \mathrm{K}$. Or on a

$$\Theta(z+\mathrm{K}) = \Theta_1(z), \qquad \mathrm{H}(z+\mathrm{K}) = \mathrm{H}_1(z),$$
$$\Theta_1(z+\mathrm{K}) = \Theta(z), \qquad \mathrm{H}_1(z+\mathrm{K}) = -\mathrm{H}(z);$$

par suite,

$$\frac{\mathrm{H}(z+\mathrm{K})\,\mathrm{H}_1(z+\mathrm{K})}{\Theta(z+\mathrm{K})} = -\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta(z+\mathrm{K})\,\Theta_1(z+\mathrm{K})}{\mathrm{H}(z+\mathrm{K})} = \frac{\Theta_1(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

On a aussi

$$\sin 2m\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(2mx + m\pi) = (-1)^m \sin 2mx,$$
$$\sin(2m+1)\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[(2m+1)\frac{\pi}{2} + (2m+1)x\right] = (-1)^m \sin\left[\frac{\pi}{2} + (2m+1)x\right],$$
$$\sin(2m+1)\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^m \cos(2m+1)x;$$

il en résulte donc les développements

$$\eta\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)(-1)^{m-1}\sin 2mx,$$

$$\eta\,\frac{\Theta_1(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = \frac{1}{\cos x} + 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)(-1)^m\cos(2m+1)x.$$

8. Le premier groupe des développements comprend donc les quatre formules

$$\eta\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{m^2}\,\mathrm{a}_m \sin 2mx,$$

$$\eta\,\frac{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\,\mathrm{a}_m \sin(2m+1)x,$$

$$\eta\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{m^2}\,\mathrm{a}_m (-1)^{m-1}\sin 2mx,$$

$$\eta\,\frac{\Theta_1(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = \frac{1}{\cos x} + 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\,\mathrm{a}_m (-1)^m\cos(2m+1)x,$$

où

$$a_m = q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}.$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU DEUXIÈME GROUPE.

9. Ce groupe comprend les quatre fonctions

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

La première fonction $\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)}$ admet la période $4\mathrm{K}$; elle est impaire; elle change de signe quand on change z en $z+2\mathrm{K}$; elle est finie pour toutes les valeurs de z comprises dans l'intérieur de la bande limitée par les parallèles à la direction K menées par les points $z=+i\mathrm{K}'$, $z=-i\mathrm{K}'$; elle est donc développable suivant la forme

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m \sin(2m+1)x.$$

La fonction $\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)}$ admet la période $2\mathrm{K}$; elle devient infinie pour $z=0$; mais

$$\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)} - \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x},$$

pour une valeur convenablement choisie de la constante α, reste finie pour $x=0$ et $x=m\pi$; elle est développable suivant la forme

$$\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)} - \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x} = \sum_{m=1}^{m=+\infty} \mathrm{B}_m \sin 2mx.$$

10. Pour obtenir les coefficients des développements, changeons dans cette dernière égalité z en $z+i\mathrm{K}'$ ou x en $x+\omega$.

En vertu de la relation

$$\frac{\Theta(z+i\mathrm{K}')\,\mathrm{H}_1(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}')} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,e^{-ix}\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)},$$

on aura

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)} + \sum_{m=1}^{m=+\infty} \mathrm{B}_m \sin 2m(x+\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-ix} \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)} = i\alpha \frac{e^{ix}\sqrt{q} + e^{-ix}\sqrt{q^{-1}}}{e^{ix}\sqrt{q} + e^{-ix}\sqrt{q^{-1}}} = -i\alpha \frac{1+qe^{2ix}}{1-qe^{+2ix}},$$

ou

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)} = -i\alpha\left(1 + \frac{2qe^{2ix}}{1-qe^{2ix}}\right),$$

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)} = -i\alpha(1 + 2qe^{2ix} + 2q^2e^{4ix} + \ldots + 2q^m e^{2mix} + \ldots;$$

il suffit d'égaler les coefficients des mêmes puissances de e^{ix} dans l'équation

$$\begin{aligned}
&-i\alpha(1 + 2qe^{2ix} + 2q^2e^{4ix} + \ldots + 2q^m e^{2mix} + \ldots) \\
&\quad + \frac{\mathrm{B}_1}{2i}(e^{2ix}q - e^{-2ix}q^{-1}) + \frac{\mathrm{B}_2}{2i}(e^{4ix}q^2 - e^{-4ix}q^{-2}) + \ldots \\
&\quad + \frac{\mathrm{B}_m}{2i}(e^{2mix}q^m - e^{-2mix}q^{-m}) + \ldots \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-ix} \frac{\mathrm{A}_0}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) + \frac{\mathrm{A}_1}{2i\sqrt[4]{q}} e^{-ix}(e^{3ix} - e^{-3ix}) + \ldots.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi les équations

$$\begin{aligned}
-i\alpha &= \frac{\mathrm{A}_0}{2i\sqrt[4]{q}}, \\
-2i\alpha q + \frac{\mathrm{B}_1}{2i} q &= \frac{\mathrm{A}_1}{2i\sqrt[4]{q}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
-2i\alpha q^m + \frac{\mathrm{B}_m}{2i} q^m &= \frac{\mathrm{A}_m}{2i\sqrt[4]{q}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{B}_1}{2i} q^{-1} &= -\frac{\mathrm{A}_0}{2i\sqrt[4]{q}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
-\frac{\mathrm{B}_m}{2i} q^{-m} &= -\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{2i\sqrt[4]{q}}.
\end{aligned}$$

On en tire

$$\mathrm{A}_m = \mathrm{A}_{m-1}\, q^{2m} + 4\alpha\, q^{m+\frac{1}{4}},$$

et, si l'on pose

$$\mathrm{A}_m = \mathcal{A}_m\, q^{\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

on obtient

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{m-1} + 4\alpha\, q^{-m^2},$$

d'où

$$\mathcal{A}_m = 2\alpha(1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-m^2}),$$

et, par suite,

$$\mathrm{A}_m = 2\alpha q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-m^2})$$

et

$$\mathrm{B}_m = 2\alpha\, q^{m^2} (1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-(m-1)^2}).$$

Les développements des deux fonctions sont donc

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = 2\alpha \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(m+1)^2}{4}} (1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-m^2}) \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x} + 2\alpha \sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{(m+1)^2} (1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-m^2}) \sin(2m+2)x.$$

11. La constante α se déterminera, comme précédemment, par la condition que l'expression

$$\operatorname{tang} x \frac{d}{dx}[\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)] + \Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z) \times \frac{1}{\cos^2 x} - \alpha \frac{2\mathrm{K}}{\pi} \mathrm{H}'(z)$$

soit nulle pour $z = 0$, ce qui donne

$$\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(0) = \alpha \frac{2\mathrm{K}}{\pi} \Theta(0) \sqrt{k}$$

ou bien

$$1 = \alpha \sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}, \quad \alpha = \frac{1}{\theta_1}.$$

12. Si l'on change ensuite z en $z + \mathrm{K}$, on obtient les séries qui se rapportent aux deux autres fonctions; on a donc

$$\theta_1 \frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\,\mathfrak{B}_m \sin(2m+1)x,$$

$$\theta_1 \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{1}{\operatorname{tang} x} + 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{(m+1)^2}\,\mathfrak{B}_m \sin(2m+2)x,$$

$$\theta_1 \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\,\mathfrak{B}_m (-1)^m \cos(2m+1)x,$$

$$\theta_1 \frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = \frac{1}{\cot x} + 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{(m+1)^2}\,\mathfrak{B}_m (-1)^{m-1} \sin(2m+2)x;$$

dans cette formule, $\mathfrak{B}_m$ a pour valeur l'expression

$$\mathfrak{B}_m = 1 + 2q^{-1} + 2q^{-4} + \ldots + 2q^{-m^2}.$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU TROISIÈME GROUPE.

13. Ce groupe comprend les quatre fonctions

$$\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

La première fonction admet la période $4\mathrm{K}$; elle est paire, et elle change de signe quand on change z en $z + 2\mathrm{K}$; elle est développable suivant la forme

$$\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m \cos(2m+1)x.$$

La fonction $\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)}$ admet la période $2\mathrm{K}$; elle devient infinie pour $z = 0$; mais

$$\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} - \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x},$$

pour $z=0$, reste finie et est développable suivant la forme

$$\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)}-\frac{\alpha}{\operatorname{tang} x}=\sum_{m=1}^{m=+\infty}\mathrm{B}_m\sin 2mx.$$

14. De la relation

$$\frac{\mathrm{H}_1(z+i\mathrm{K}')\,\Theta_1(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}')}=\frac{-i}{\sqrt[4]{q}}\,\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\,e^{-ix}$$

on tire

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)}+\sum_{m=1}^{m=+\infty}\mathrm{B}_m\sin 2m(x+\omega)=\frac{-i}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-ix}\sum_{m=1}^{m=+\infty}\mathrm{B}_m\cos(2m+1)x,$$

ou

$$\begin{aligned}
&-i\alpha(1+2qe^{2ix}+2q^2e^{4ix}+\ldots+2q^me^{2mix}+\ldots)\\
&\quad+\frac{\mathrm{B}_1}{2i}(e^{2ix}q-e^{-2ix}q^{-1})+\frac{\mathrm{B}_2}{2i}(e^{4ix}q^2-e^{-4ix}q^{-2})+\ldots+\frac{\mathrm{B}_m}{2i}(e^{2mix}q^m-e^{-2mix}q^{-m})+\ldots\\
&=+\frac{\mathrm{A}_0}{2i\sqrt[4]{q}}\,e^{-ix}(e^{ix}+e^{-ix})+\frac{\mathrm{A}_1}{2i\sqrt[4]{q}}\,e^{-ix}(e^{3ix}+e^{-3ix})+\ldots+\frac{\mathrm{A}_m}{2i\sqrt[4]{q}}(e^{(2m+1)ix}+e^{-(2m+1)ix})\,e^{-ix}+\ldots.
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de e^{ix}, il vient

$$\mathrm{A}_m=-\mathrm{A}_{m-1}\,q^{2m}+4\alpha q^{m+\frac{1}{4}},$$

et, si l'on pose

$$\mathrm{A}_m=(-1)^m\,\mathcal{A}_m\,q^{\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

on obtiendra

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_m&=\mathcal{A}_{m-1}+(-1)^m\,q^{-m^2}4\alpha,\\
\mathcal{A}_{m-1}&=\mathcal{A}_{m-2}+(-1)^{m-1}\,q^{-(m-1)^2}4\alpha,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathcal{A}_1&=\mathcal{A}_0-q^{-1}4\alpha,\\
\mathcal{A}_m&=\mathcal{A}_0-4\alpha q^{-1}+\ldots+(-1)^m4\alpha q^{-m^2},\\
\mathcal{A}_m&=2\alpha\left[1-2q^{-1}+2q^{-4}-\ldots+(-1)^m q^{-m^2}\right],\\
\mathrm{A}_m&=(-1)^m2\alpha\,q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2}\left[1-2q^{-1}+2q^{-4}+\ldots+2(-1)^m q^{-m^2}\right],\\
\mathrm{B}_{m+1}&=(-1)^{m+1}2\alpha\,q^{(m+1)^2}\left[1-2q^{-1}+2q^{-4}-\ldots+2(-1)^m q^{-m^2}\right];
\end{aligned}$$

par suite

$$\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m 2\alpha q^{\frac{1}{4}(2m+1)^2}\left[1 - 2q^{-1} + \ldots + 2(-1)^m q^{-m^2}\right]\cos(2m+1)x,$$

$$\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x} + \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^{m+1} 2\alpha q^{(m+1)^2}\left[1 - 2q^{-1} + \ldots + 2(-1)^m q^{-m^2}\right]\sin(2m+2)x.$$

En déterminant la constante α comme précédemment, il vient

$$\alpha = \frac{1}{\theta}.$$

15. Si l'on change ensuite x en $x + \frac{\pi}{2}$ ou z en $z + \mathrm{K}$, on obtient les quatre formules

$$\theta\,\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\,\mathrm{C}_m \cos(2m+1)x,$$

$$\theta\,\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{1}{\operatorname{tang} x} + 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^{m+1} q^{(m+1)^2}\,\mathrm{C}_m \sin(2m+2)x,$$

$$\theta\,\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\,\mathrm{C}_m \sin(2m+1)x,$$

$$\theta\,\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = \frac{1}{\cot x} - 2\sum_{m=0}^{m=+\infty} q^{(m+1)^2}\,\mathrm{C}_m \sin(2m+2)x,$$

en posant

$$\mathrm{C}_m = 1 - 2q^{-1} + 2q^{-4} - \ldots + 2(-1)^m q^{-m^2}.$$

Ce sont les formules qui appartiennent au troisième groupe.

Nous allons maintenant passer à la démonstration des développements de la seconde espèce.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE.

16. Cette seconde Catégorie comprend les douze fonctions

$$\frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$\frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

divisées comme les premières en trois groupes de quatre fonctions.

PREMIER GROUPE.

17. La fonction $\frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)}$ est paire et admet la période $z = 2\mathrm{K}$; elle est développable suivant la forme

$$\frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m \cos 2mx;$$

$\frac{\Theta^2(z)}{\mathrm{H}(z)}$ est développable suivant la forme

$$\frac{\Theta^2(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{B}_m \sin(2m+1)x.$$

La relation

$$\frac{\Theta^2(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}')} = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-ix} \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\Theta(z)}$$

nous donne

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{B}_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}} e^{-ix} \sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m \cos 2mx.$$

En opérant comme précédemment, on obtient entre A_m et A_{m+1} la relation

$$\mathrm{A}_{m+1} = -\mathrm{A}_m q^{2m+1} - 4\alpha q^{m+\frac{3}{4}}.$$

Posant

$$A_m = (-1)^m \mathcal{A}_m q^{m^2},$$

il viendra

$$\mathcal{A}_{m+1} = \mathcal{A}_m + 4\alpha(-1)^m q^{-\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_1 + 4\alpha\left[-q^{-\frac{9}{4}} + q^{-\frac{25}{4}} - \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right],$$

$$\mathcal{A}_1 = 2A_0 + 4\alpha q^{-\frac{1}{4}},$$

$$\mathcal{A}_m = 2A_0 + 4\alpha\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right],$$

$$A_m = 2A_0(-1)^m q^{m^2} + 4\alpha(-1)^m q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right].$$

Cette formule subsiste pour toutes les valeurs de m, depuis $m = 1$ jusqu'à $m = +\infty$; il faut en excepter la valeur zéro. On a de même

$$B_m = 2A_0(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} + 4\alpha(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right],$$

formule qui a lieu également pour toutes les valeurs de m, depuis $m = 0$ jusqu'à $m = +\infty$.

On a, par suite,

$$\frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = A_0 + 2A_0 \sum_{m=1}^{m=+\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mx$$
$$+ 4\alpha \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] \cos 2mx,$$

$$\frac{\Theta^2(z)}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + A_0 \sum_{m=0}^{m=+\infty} 2(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin(2m+1)x$$
$$+ 4\alpha \sum_{m=1}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] \sin(2m+1)x;$$

α se détermine comme précédemment :

$$\alpha = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_1 r_1},$$

et, si l'on pose $\frac{A_0}{\alpha} = A$, il viendra

$$\frac{\theta_1\eta}{\theta}\frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = A\,\Theta(z) + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx,$$

$$\frac{\theta_1\eta}{\theta}\frac{\Theta_2(z)}{H(z)} = \frac{1}{\sin x} + A\,H(z) + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin(2m+1)x.$$

18. Posant

$$Z(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx,$$

$$U(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin(2m+1)x,$$

les formules précédentes deviendront

$$\frac{\theta_1\eta}{\theta}\frac{H^2(z)}{\theta(z)} = A\,\Theta(z) - Z(x),$$

$$\frac{\theta_1\eta}{\theta}\frac{\Theta^2(z)}{\Theta(z)} = A\,H(z) + U(x).$$

Si l'on fait dans la première formule $z = 0$, il viendra

$$A\,\Theta(0) - Z(0) = 0,$$

$$A = \frac{Z(0)}{\theta},$$

et, par suite,

$$\theta_1\eta\,\frac{H^2(z)}{\Theta(z)} = Z(0)\,\Theta(z) - \theta\,Z(x),$$

$$\theta_1\eta\,\frac{\Theta_2(z)}{H(z)} = Z(0)\,H(z) + \theta\,U(x).$$

Changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$ ou z en $z + K$, et désignant par $U_1(x)$, $Z_1(x)$

ce que deviennent $U(x)$ et $Z(x)$ par cette transformation, nous aurons

$$Z_1(x) = -4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] \cos 2mx,$$

$$U_1(x) = \frac{1}{\cos x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right] \cos(2m+1)x,$$

$$\theta_1 \eta \frac{H_1^2(z)}{\Theta_1(z)} = Z(0)\,\Theta_1(z) - \theta Z_1(x),$$

$$\theta_1 \eta \frac{\Theta^2(z)}{H(z)} = Z(0)\,H_1(z) + \theta U_1(x).$$

On obtient ainsi les quatre formules du premier groupe.

DEUXIÈME GROUPE.

19. La fonction $\frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)}$ peut être développée suivant la forme

$$\frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \cos 2mx,$$

et $\frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)}$ suivant l'expression

$$\frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + \sum B_m \sin(2m+1)x;$$

et, comme

$$\frac{\Theta_1^2(z+iK')}{H(z+iK')} = \frac{-ie^{-ix}}{\sqrt[4]{q}} \frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)},$$

on obtient l'équation

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=+\infty} B_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{-ie^{-ix}}{\sqrt[4]{q}} \sum A_m \cos 2mx,$$

et l'on en tire

$$A_m = 2A_0(-1)^m q^{m^2} - 4\alpha(-1)^m q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]$$

pour toutes les valeurs de m de 1 à $+\infty$, et

$$B_m = -2A_0(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} - 4\alpha(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right]$$

pour toutes les valeurs de m de 1 à $+\infty$;

$$B_0 = -2A_0 q^{\frac{1}{4}}.$$

On a, par suite,

$$\frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)} = A_0 + \sum_{m=1}^{m=\infty} 2A_0(-1)^m q^{m^2} \cos 2mx$$

$$-4\alpha \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \cos 2mx,$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} - 2A_0 \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin(2m+1)x$$

$$+4\alpha \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right] \sin(2m+1)x;$$

α a pour valeur $1 : \frac{\eta\theta}{\theta_1}$, et, en posant $\frac{A_0}{\alpha} = A$, il vient

$$\frac{\eta\theta}{\theta_1} \frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)} = A\Theta(z) + Z(x),$$

$$\frac{\eta\theta}{\theta_1} \frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)} = -AH(z) + U(x);$$

faisant dans la première formule $z = K$ ou $x = \frac{\pi}{2}$,

$$A\theta_1 + Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$\eta\theta \frac{H_1^2(z)}{\Theta(z)} = \quad Z\left(\frac{\pi}{2}\right)\Theta(z) + \theta_1 Z(x),$$

$$\eta\theta \frac{\Theta_1^2(z)}{H(z)} = -Z\left(\frac{\pi}{2}\right)H(z) + \theta_1 U(x);$$

si l'on change x en $x + \frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\eta\theta \frac{H^2(z)}{\Theta_1(z)} = Z\left(\frac{\pi}{2}\right) \Theta_1(z) + \theta_1 Z_1(x),$$

$$\eta\theta \frac{\Theta^2(z)}{H_1(z)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right) H_1(z) + \theta_1 U_1(x).$$

TROISIÈME GROUPE.

20. La fonction $\frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)}$ est paire et admet pour période $2K$. Elle se développe suivant la forme

$$\frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \cos 2mx;$$

$\frac{H_1^2(z)}{H(z)}$ est impaire et admet pour période $4K$; elle se développe suivant la forme

$$\frac{H_1^2(z)}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} = \sum_{m=0}^{m=+\infty} B_m \sin(2m+1)x.$$

La relation

$$\frac{H_1^2(z+iK')}{H(z+iK')} = \frac{-i}{\sqrt[4]{q}} \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} e^{-ix}$$

nous donne

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{-1}{\sqrt[4]{q}} e^{-ix} \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \cos 2mx.$$

Cette équation est la même que la précédente ; elle nous donnera pour A_m et B_m des valeurs de même forme.

α a pour valeur $\frac{\eta}{\theta\theta_1}$, et l'on a

$$\frac{\theta\theta_1}{\eta} \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} = A\,\Theta(z) + Z(x),$$

$$\frac{\theta\theta_1}{\eta} \frac{H_1^2(z)}{H(z)} = -A\,H(z) + U(x).$$

Si l'on fait $z = \mathrm{K}$ dans cette dernière égalité, il viendra

$$-\mathrm{A}\eta + \mathrm{U}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \mathrm{U}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{U}_1(0),$$

$$\theta\theta_1 \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta(z)} = \mathrm{U}_1(0)\,\Theta(z) + \eta\,\mathrm{Z}(x),$$

$$\theta\theta_1 \frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\mathrm{H}(z)} = -\,\mathrm{U}_1(0)\,\mathrm{H}(z) + \eta\,\mathrm{U}(x).$$

Si l'on change x en $\frac{\pi}{2} + x$ dans ces formules, il viendra

$$\theta\theta_1 \frac{\Theta^2(z)}{\Theta_1(z)} = \quad \mathrm{U}_1(0)\,\Theta_1(z) + \eta\,\mathrm{Z}_1(x),$$

$$\theta\theta_1 \frac{\mathrm{H}^2(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = -\,\mathrm{U}_1(0)\,\mathrm{H}_1(z) + \eta\,\mathrm{U}_1(x).$$

Ce sont les formules du troisième groupe de la seconde Catégorie.

21. On voit que, dans ces douze dernières formules, il n'entre, outre les quatre fonctions $\Theta(z)$, $\Theta_1(z)$, $\mathrm{H}(z)$, $\mathrm{H}_1(z)$, que deux fonctions distinctes, savoir :

$$\mathrm{Z}(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx,$$

$$\mathrm{U}(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin(2m+1)x,$$

et celles qu'on en déduit en changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$, savoir :

$$\mathrm{Z}_1(x) = -4\sum_{m=1}^{m=+\infty} q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx,$$

$$\mathrm{U}_1(x) = \frac{1}{\cos x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos(2m+1)x.$$

Il y figure également les constantes $Z(o)$, $Z_1(o)$ et $U_1(o)$:

$$Z(o) = 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)}{4}} \right],$$

$$Z_1(o) = -4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)}{4}} \right],$$

$$U_1(o) = 1 + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} \right].$$

Nous allons passer maintenant à la démonstration de formules nouvelles, analogues aux précédentes; nous emploierons encore pour cela la méthode de M. Liouville, qui nous a permis d'arriver aisément aux résultats auxquels nous venons de parvenir.

DEUXIÈME PARTIE.

22. Cette deuxième Partie comprend les développements de fractions dont le numérateur est formé par le produit de trois fonctions Θ distinctes ou égales entre elles, et le dénominateur par une seule de ces fonctions. Si les trois fonctions du numérateur sont distinctes, on obtient une première Catégorie comprenant quatre fonctions, savoir

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

On en obtient deux autres respectivement de vingt-quatre et de douze formules, qui se partagent également en groupes de quatre formules chacun, si l'on suppose deux des fonctions Θ du numérateur égales, et si l'on fait égales les trois fonctions du numérateur.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS APPARTENANT A LA PREMIÈRE CATÉGORIE.

23. La fonction $\dfrac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}$ est une fonction impaire qui admet pour période $2\mathrm{K}$; elle est développable de la manière suivante :

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=1}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m \sin 2mx.$$

La seconde $\dfrac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)}$ est impaire et admet la période $2\mathrm{K}$; elle est donc développable, comme nous l'avons vu précédemment pour d'autres fonctions, sous la forme

$$\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x} + \sum \mathrm{B}_m \sin 2mx.$$

On a

$$\frac{\Theta(z+i\mathrm{K}')\,\mathrm{H}_1(z+i\mathrm{K}')\,\Theta_1(z+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(z+i\mathrm{K}')} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,e^{-2ix}\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)};$$

par suite,

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \sin 2m(x+\omega) = \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{A}_m \sin 2mx\right)\frac{1}{\sqrt{q}}\,e^{-2ix}.$$

Nous avons déjà utilisé le développement de $\frac{1}{\operatorname{tang}(x+\omega)}$ suivant les puissances de q. En nous reportant à ce qui a été établi, nous aurons

$$\begin{aligned}
&-i\alpha(1+2qe^{2ix}+2q^2e^{4ix}+\ldots+2q^m e^{2mix}+\ldots)\\
&\qquad+\frac{\mathrm{B}_1}{2i}(e^{2ix}q-e^{-2ix}q^{-1})+\frac{\mathrm{B}_2}{2i}(e^{4ix}q^2-e^{-4ix}q^{-2})+\ldots\\
&\quad=\frac{1}{\sqrt{q}}\,e^{-2ix}\,\frac{\mathrm{A}_1}{2i}(e^{2ix}-e^{-2ix})+\frac{1}{\sqrt{q}}\,e^{-2ix}\,\frac{\mathrm{A}_2}{2i}(e^{4ix}-e^{-4ix})+\ldots.
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients des diverses puissances de l'exponentielle, il viendra

$$-2i\alpha q^m+\frac{\mathrm{B}_m}{2i}\,q^m=\frac{1}{\sqrt{q}}\,\frac{\mathrm{A}_{m+1}}{2i},$$

$$\frac{\mathrm{B}_m}{2i}\,q^{-m}=\frac{\mathrm{A}_{m-1}}{2i\sqrt{q}},$$

$$\mathrm{A}_{m+1}=\mathrm{A}_{m-1}\,q^{2m}+4\alpha q^{m+\frac{1}{2}}.$$

Posant $\mathrm{A}_m=4\alpha q^{\frac{m^2}{2}}\mathcal{A}_m$, on a

$$\mathcal{A}_{m+1}=\mathcal{A}_{m-1}+q^{-\frac{m^2}{2}};$$

on tire de cette formule les deux suivantes :

$$\mathcal{A}_{2m}=\mathcal{A}_{2m-2}+q^{-\frac{1}{2}(2m-1)^2},$$

$$\mathcal{A}_{2m+1}=\mathcal{A}_{2m-1}+q^{-\frac{1}{2}4m^2},$$

et, par suite,

$$\mathcal{A}_{2m}=\mathcal{A}_2+q^{-\frac{3^2}{2}}+q^{-\frac{5^2}{2}}+\ldots+q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}},$$

$$\mathcal{A}_{2m+1}=\mathcal{A}_1+q^{-\frac{2^2}{2}}+q^{-\frac{4^2}{2}}+\ldots+q^{-\frac{4m^2}{2}};$$

il est aisé de voir que $\mathcal{A}_2 = q^{-\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}$; par suite,

$$\mathrm{A}_{2m} = 2\alpha q^{\frac{4m^2}{2}}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{1}{2}(2m-1)^2}\right),$$

$$\mathrm{A}_{2m+1} = 2\alpha q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{1}{2}4m^2}\right).$$

On déduit des formules précédentes

$$\mathrm{B}_{2m} = 2\alpha q^{\frac{4m^2}{2}}\left(1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{1}{2}(2m-2)^2}\right),$$

$$\mathrm{B}_{2m+1} = 2\alpha q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{1}{2}(2m-1)^2}\right),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} &= 2\alpha\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{4m^2}{2}}\right)\sin(4m+2)x \\ &+ 2\alpha\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)\sin 4mx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} &= \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x} + 2\alpha\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right)\sin(4m+2)x \\ &+ 2\alpha\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}}\left(1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{1}{2}(2m-2)^2}\right)\sin 4mx.\end{aligned}$$

24. Nous déterminerons α comme précédemment par la condition que

$$\operatorname{tang} x\,\frac{d}{dx}[\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)] + \frac{1}{\cos^2 x}[\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)] - \alpha\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{H}'(z)$$

soit nul pour $z = 0$; d'où

$$\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0) - \alpha\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\Theta(0)\sqrt{k} = 0,$$

et par suite $\alpha = 1$. Remplaçant ensuite x par $\frac{\pi}{2} + x$, on obtiendra le groupe des quatre formules

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m+1} \sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin 4mx,$$

$$\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{1}{\operatorname{tang} x} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m-1} \sin 4mx,$$

$$\frac{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m+1} \sin(4m+2)x - 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin 4mx,$$

$$\frac{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = \frac{1}{\cot x} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin(4m+2)x - 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m-1} \sin 4mx,$$

$$\mathfrak{a}_{2m+1} = 1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{4m^2}{2}},$$

$$\mathfrak{a}_{2m} \quad = 2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}.$$

Dans ces formules, $\mathfrak{a}_{2m+1}$ devra être pris égal à 1 pour $m = 0$.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE.

25. Cette Catégorie comprend vingt-quatre formules divisées en six groupes de quatre formules chacun. Ce sont les développements des fonctions

$$(a) \qquad \frac{\mathrm{H}^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(a') \qquad \frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(b) \qquad \frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(b') \qquad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(c) \qquad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(c') \qquad \frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

26. Les fonctions des groupes (a) et (a') se développent de la manière :

$$\frac{\mathrm{H}^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=}^{m=\infty} \mathrm{A}_m \cos(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}'_m \cos(2m+1)x,$$

$$\frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha'}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}'_m \sin(2m+1)x;$$

pour les premières on a l'égalité

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{i}{\sqrt{q}}\, e^{-2ix} \sum \mathrm{A}_m \cos(2m+1)x,$$

et pour les autres,

$$\frac{\alpha'}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}^m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{-i}{\sqrt{q}}\, e^{-2ix} \sum \mathrm{A}'_m \cos(2m+1)x.$$

On en tire

$$\mathrm{A}_{2m+1} = (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}_0 + 4\alpha \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^m \quad q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \right\},$$

$$\mathrm{A}_{2m} \quad = (-1)^m \quad q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}_0 + 4\alpha \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \right\}.$$

On obtient, par suite, les valeurs de B_{2m+1}, B_{2m} :

$$\mathrm{B}_{2m+1} = (-1)^m q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}_0 + 4\alpha \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^m \quad q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}} \right] \right\},$$

$$\mathrm{B}_{2m} \quad = (-1)^m q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}_0 + 4\alpha \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}} \right] \right\}.$$

Quant aux valeurs de A'_m, B'_m, on obtient

$$A'_{2m+1} = (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}'_0 - 4\alpha' \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^m \quad q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}} \right] \right\},$$

$$A'_{2m} = (-1)^m \quad q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}'_0 - 4\alpha' \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \right\},$$

$$B'_{2m+1} = (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}'_0 - 4\alpha' \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \right\},$$

$$B'_{2m} = (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left\{ \mathcal{A}'_0 - 4\alpha' \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}} \right] \right\},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{H^2(z)\, H_1(z)}{\Theta(z)} = {} & \mathcal{A}_0 \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \cos(4m+3)x + \mathcal{A}_0 \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \cos(4m+1)x \\
& + 4\alpha \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^m \quad q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}} \right] \cos(4m+3)x \\
& + 4\alpha \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \quad q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \cos(4m+1)x;
\end{aligned}$$

la valeur de α s'obtient aisément, comme on l'a vu :

$$\alpha = \frac{\theta}{\eta}.$$

27. Posons

$$F^{(1)}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \cos(4m+3)x + \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \cos(4m+1)x$$

et

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(x) = {} & 4 \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^m \quad q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}} \right] \cos(4m+3)x \\
& + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \quad q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}} \right] \cos(4m+1)x.
\end{aligned}$$

Si l'on fait, de plus,

$$\Phi^{(1)}(x) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \sin(4m+3)x + \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \sin(4m+1)x,$$

$$\mathrm{U}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=+\infty} (-1)^m q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right] \sin(4m+3)x$$

$$+ 4\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right] \sin(4m+1)x,$$

et si l'on désigne par $\mathrm{F}_1^{(1)}(x)$, $\mathrm{Z}_1^{(1)}(x)$, $\Phi_1^{(1)}(x)$ et $\mathrm{U}_1^{(1)}(x)$ ce que deviennent $\mathrm{F}^{(1)}(x)$, $\mathrm{Z}^{(1)}(x)$, $\Phi^{(1)}(x)$ et $\mathrm{U}^{(1)}(x)$ quand on y remplace x par $\frac{\pi}{2} + x$, on aura

$$\mathrm{F}^{(1)}(0)\frac{\eta}{\theta}\frac{\mathrm{H}^2(z)\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = -\mathrm{Z}^{(1)}(0)\,\mathrm{F}^{(1)}(x) + \mathrm{F}^{(1)}(0)\,\mathrm{Z}^{(1)}(x),$$

$$\mathrm{F}^{(1)}(0)\frac{\eta}{\theta}\frac{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = -\mathrm{Z}^{(1)}(0)\,\Phi^{(1)}(x) + \mathrm{F}^{(1)}(0)\,\mathrm{U}^{(1)}(x),$$

$$\mathrm{F}^{(1)}(0)\frac{\eta}{\theta}\frac{\mathrm{H}_1^2(z)\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)} = \quad \mathrm{Z}^{(1)}(0)\,\mathrm{F}_1^{(1)}(x) - \mathrm{F}^{(1)}(0)\,\mathrm{Z}_1^{(1)}(x),$$

$$\mathrm{F}^{(1)}(0)\frac{\eta}{\theta}\frac{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = -\mathrm{Z}^{(1)}(0)\,\Phi_1^{(1)}(x) + \mathrm{F}^{(1)}(0)\,\mathrm{U}_1^{(1)}(x).$$

Telles sont les formules appartenant au premier groupe.

28. L'expression des valeurs de A'_{2m}, A'_{2m+1}, ... nous montre que

$$\frac{\Theta_1^2(z)\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \quad \mathcal{A}'_0\,\mathrm{F}^{(1)}(x) - \alpha'\,\mathrm{Z}^{(1)}(x),$$

$$\frac{\mathrm{H}_1^2(z)\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = -\mathcal{A}'_0\,\Phi^{(1)}(x) + \alpha'\,\mathrm{U}^{(1)}(x).$$

La constante α' a ici la valeur $\frac{\eta}{\theta}$, et $\mathcal{A}'_0$ est donné par l'équation

$$0 = \mathcal{A}'_0\,\Phi^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\eta}{\theta}\,\mathrm{U}^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ou

$$\mathcal{A}'_0\,\Phi_1^{(1)}(0) - \frac{\eta}{\theta}\,\mathrm{U}_1^{(1)}(0) = 0.$$

On obtient ainsi le second groupe au moyen des mêmes éléments

$$\Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\theta}{\gamma}\,\frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = \quad \mathrm{U}_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{F}^{(1)}(x) - \Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{Z}^{(1)}(x),$$

$$\Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\theta}{\gamma}\,\frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = -\,\mathrm{U}_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\Phi^{(1)}(x) + \Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{U}^{(1)}(x),$$

$$\Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\theta}{\gamma}\,\frac{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)} = -\,\mathrm{U}_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{F}_1^{(1)}(x) + \Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{Z}_1^{(1)}(x),$$

$$\Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\theta}{\gamma}\,\frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = -\,\mathrm{U}_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\Phi_1^{(1)}(x) + \Phi_1^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{U}_1^{(1)}(x).$$

29. Passons actuellement aux groupes des formules désignés par (b) et (b') :

$$\frac{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}_m \cos 2mx,$$

$$\frac{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha}{\operatorname{tang} x} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \sin 2mx,$$

$$\frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}'_m \cos 2mx,$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha'}{\operatorname{tang} x} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}'_m \sin 2mx.$$

Pour déterminer les coefficients, on a les relations

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tang}(x+\omega)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \sin 2m(x+\omega) = \left(\sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}_m \cos 2mx\right)\frac{ie^{-2ix}}{\sqrt{q}},$$

$$\frac{\alpha'}{\operatorname{tang}(x+\omega)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}'_m \sin 2m(x+\omega) = \left(\sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}'_m \cos 2mx\right)\frac{-\,ie^{-2ix}}{\sqrt{q}},$$

d'où

$$A_{2m+1} = 2\alpha(-1)^{m+1} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[1 - 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} - \ldots + 2(-1)^m q^{-\frac{(2m)^2}{2}}\right],$$

$$A_{2m} = 2\alpha(-1)^m q^{\frac{(2m)^2}{2}} \left[\mathcal{A}_0 + 2q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right],$$

$$B_{2m+1} = 2\alpha(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[\mathcal{A}_0 + 2q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right],$$

$$B_{2m} = 2\alpha(-1)^m q^{\frac{(2m)^2}{2}} \left[1 - 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} - \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-2)^2}{2}}\right],$$

$$A'_{2m+1} = 2\alpha'(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[1 - 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2(-1)^m q^{-\frac{(2m)^2}{2}}\right],$$

$$A'_{2m} = 2\alpha'(-1)^{m+1} q^{\frac{(2m)^2}{2}} \left[\mathcal{A}'_0 + 2q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right],$$

$$B'_{2m+1} = 2\alpha'(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[\mathcal{A}'_0 + 2q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right],$$

$$B'_{2m} = 2\alpha'(-1)^m q^{\frac{(2m^2)}{2}} \left[1 - 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} - \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-2)^2}{2}}\right].$$

30. Si l'on fait

$$F^{(2)}(x) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m)^2}{2}} \cos 4mx,$$

$$\Phi^{(2)}(x) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \sin(4m+2)x,$$

$$Z^{(2)}(x) = -2q^{\frac{1}{2}}\cos 2x - 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[1 - 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} - \ldots + 2(-1)^m q^{-\frac{(2m)^2}{2}}\right] \cos(4m+2)x$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m)^2}{2}} \left[2q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right] \cos 4mx,$$

$$U^{(2)}(x) = \frac{1}{\operatorname{tang} x} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left[2q^{-\frac{1}{2}} - 2q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right] \sin(4m+2)x$$
$$- 2q^2 \sin 4x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m)^2}{2}} \left[1 - 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} - \ldots + 2(-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-2)^2}{2}}\right] \sin 4mx,$$

il viendra

$$\frac{H^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = \alpha \mathcal{A}_0\, F^{(2)}(x) + \alpha Z^{(2)}(x),$$

$$\frac{\Theta^2(z)\,H_1(z)}{H(z)} = \alpha \mathcal{A}_0\, \Phi^{(2)}(x) + \alpha U^{(2)}(x);$$

la constante α est égale à $\frac{\theta}{\theta_1}$, et $\mathcal{A}_0$ est donné par l'équation

$$\mathcal{A}_0\, F^{(2)}(o) + Z^{(2)}(o) = o.$$

On obtient le groupe des quatre formules (b) comme plus haut, en désignant par $F_1^{(2)}(x)$, $\Phi_1^{(2)}(x)$, $Z_1^{(2)}(x)$, $U_1^{(2)}(x)$ ce que deviennent les fonctions $F^{(2)}(x)$, $\Phi^{(2)}(x)$, $Z^{(2)}(x)$, $U^{(2)}(x)$ en y remplaçant x par $\frac{\pi}{2} + x$, sous la forme

$$F^{(2)}(o)\,\frac{\theta_1}{\theta}\,\frac{H^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = -\,Z^{(2)}(o)\,F^{(2)}(x) + F^{(2)}(o)\,Z^{(2)}(x),$$

$$F^{(2)}(o)\,\frac{\theta_1}{\theta}\,\frac{\Theta^2(z)\,H_1(z)}{H(z)} = -\,Z^{(2)}(o)\,\Phi^{(2)}(x) + F^{(2)}(o)\,U^{(2)}(x),$$

$$F^{(2)}(o)\,\frac{\theta_1}{\theta}\,\frac{H_1^2(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = -\,Z^{(2)}(o)\,F_1^{(2)}(x) + F^{(2)}(o)\,Z_1^{(2)}(x),$$

$$F^{(2)}(o)\,\frac{\theta_1}{\theta}\,\frac{\Theta_1^2(z)\,H(z)}{H_1(z)} = \quad Z^{(2)}(o)\,\Phi_1^{(2)}(x) - F^{(2)}(o)\,U_1^{(2)}(x).$$

31. Les formules relatives au groupe des fonctions (b') s'obtiennent au moyen des mêmes éléments

$$\frac{H_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = -\,\alpha'\mathcal{A}'_0\,F^{(2)}(x) - \alpha' Z^{(2)}(x),$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,H_1(z)}{H(z)} = \quad \alpha'\mathcal{A}'_0\,\Phi^{(2)}(x) + \alpha' U^{(2)}(x),$$

$$\alpha' = \frac{\theta_1}{\theta}, \quad \mathcal{A}'_0 = -\,\frac{Z_1^{(2)}(o)}{F_1^{(2)}(o)};$$

par suite, les formules du groupe (b') prendront la forme

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} F_1^{(2)}(0) \frac{H_1^2(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)} = Z_1^{(2)}(0)\,F^{(2)}(x) - F_1^{(2)}(0)\,Z^{(2)}(x),$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} F_1^{(2)}(0) \frac{\Theta^2(z)\,H_1(z)}{H(z)} = - Z_1^{(2)}(0)\,\Phi^{(2)}(x) + F_1^{(2)}(0)\,U^{(2)}(x),$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} F_1^{(2)}(0) \frac{H^2(z)\,\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = Z_1^{(2)}(0)\,F_1^{(2)}(x) - F_1^{(2)}(0)\,Z_1^{(2)}(x),$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} F_1^{(2)}(0) \frac{\Theta^2(z)\,H(z)}{H_1(z)} = Z_1^{(2)}(0)\,\Phi_1^{(2)}(x) - F_1^{(2)}(0)\,U_1^{(2)}(x).$$

32. Passons maintenant aux huit dernières formules dont les groupes ont été désignés par (c) et (c').

On a

$$\frac{H_1^2(z)\,H(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,H(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A'_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{H_1^2(z)\,\Theta(z)}{H(z)} = \frac{\alpha'}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B'_m \sin(2m+1)x.$$

A_m, B_m, A'_m et B'_m se déduisent des formules

$$\frac{\alpha}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-2ix} \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\alpha'}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B'_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{-2ix} \sum_{m=0}^{m=\infty} A'_m \sin(2m+1)x.$$

On voit donc que les équations qui déterminent les coefficients A_m et B_m ne diffèrent de celles qui donnent A'_m et B'_m qu'en ce que α est changé en α'.

On obtient pour ces coefficients les valeurs suivantes :

$$\mathrm{A}_{2m+1} = q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[-\mathcal{A}_0 + 4\alpha\left(q^{-\frac{1}{8}} + q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}}\right)\right],$$

$$\mathrm{A}_{2m} = q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[\mathcal{A}_0 + 4\alpha\left(q^{-\frac{9}{8}} + q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right)\right],$$

$$\mathrm{B}_{2m+1} = q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[\mathcal{A}_0 + 4\alpha\left(q^{-\frac{9}{8}} + q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right)\right],$$

$$\mathrm{B}_{2m} = q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[-\mathcal{A}_0 + 4\alpha\left(q^{-\frac{1}{8}} + q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right)\right],$$

33. Si l'on pose

$$\mathrm{F}^{(3)}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} \sin(4m+1)x - \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} \sin(4m+3)x.$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{F}^{(3)}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \sin(2m+1)x,$$

$$\mathrm{Z}^{(3)}(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[q^{-\frac{9}{8}} + q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right]\sin(4m+1)x$$
$$+ 4\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[q^{-\frac{1}{8}} + q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}}\right]\sin(4m+3)x,$$

$$\mathrm{U}^{(3)}(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[q^{-\frac{1}{8}} + q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right]\sin(4m+1)x$$
$$+ 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[q^{-\frac{9}{8}} + q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right]\sin(4m+3)x,$$

il viendra

$$\frac{\mathrm{H}_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)} = \mathcal{A}_0\,\mathrm{F}^{(3)}(x) + \alpha \mathrm{Z}^{(3)}(x),$$

$$\frac{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)} = -\mathcal{A}_0\,\mathrm{F}^{(3)}(x) + \alpha \mathrm{U}^{(3)}(x),$$

et, dans ces formules, α a la valeur $\frac{\theta_1}{\eta_1}$, et $\mathcal{A}_0$ est donné par l'équation

$$\mathcal{A}_0\, F^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha Z^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

et, suivant la notation adoptée,

$$\mathcal{A}_0\, F_1^{(3)}(0) + \alpha Z_1^{(3)}(0) = 0.$$

On obtient ainsi le groupe des quatre formules (c)

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\eta_1}{\theta_1}\,\frac{H_1^2(z)H(z)}{\Theta(z)} = -Z_1^{(3)}(0)F^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)Z^{(3)}(x),$$

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\eta_1}{\theta_1}\,\frac{\Theta_1^2(z)\Theta(z)}{H(z)} = +Z_1^{(3)}(0)F^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)U^{(3)}(x),$$

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\eta_1}{\theta_1}\,\frac{H^2(z)H_1(z)}{\Theta_1(z)} = -Z_1^{(3)}(0)F_1^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)\,Z_1^{(3)}(x),$$

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\eta_1}{\theta_1}\,\frac{\Theta^2(z)\Theta_1(z)}{H_1(z)} = -Z_1^{(3)}(0)F_1^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)\,U_1^{(3)}(x).$$

34. Les formules (c') s'obtiennent en remplaçant dans les formules précédentes les valeurs de α et de $\mathcal{A}_0$ par d'autres, qui s'obtiennent d'une manière analogue.

Le groupe des formules (c') est

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\theta_1}{\eta_1}\,\frac{\Theta_1^2(z)H(z)}{\Theta(z)} = +U_1^{(3)}(0)\,F^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)\,Z^{(3)}(x),$$

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\theta_1}{\eta_1}\,\frac{H_1^2(z)\Theta(z)}{H(z)} = -U_1^{(3)}(0)F^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)U^{(3)}(x),$$

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\theta_1}{\eta_1}\,\frac{\Theta^2(z)H_1(z)}{\Theta_1(z)} = +U_1^{(3)}(0)\,F_1^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)\,Z_1^{(3)}(x),$$

$$F_1^{(3)}(0)\,\frac{\theta_1}{\eta_1}\,\frac{H^2(z)\Theta_1(z)}{H_1(z)} = -U_1^{(3)}(0)F_1^{(3)}(x) + F_1^{(3)}(0)U_1^{(3)}(x).$$

Remarquons qu'il n'entre dans ces huit dernières formules que trois fonctions distinctes, savoir $F^{(3)}(x)$, $Z^{(3)}(x)$, $U^{(3)}(x)$, tandis que, dans les seize formules analogues établies précédemment, il figure quatre fonctions différentes.

Nous allons actuellement établir les formules de la troisième Catégorie.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DE LA TROISIÈME CATÉGORIE.

35. Ces fonctions, au numérateur desquelles figure le cube de l'une des fonctions Θ, sont au nombre de douze. Elles forment trois groupes de quatre fonctions chacun, savoir :

$$(a'') \qquad \frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta^3(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(b'') \qquad \frac{\Theta_1^3(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\Theta^3(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}^3(z)}{\mathrm{H}_1(z)},$$

$$(c'') \qquad \frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta^3(z)}{\mathrm{H}(z)}, \quad \frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta_1(z)}, \quad \frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}_1(z)}.$$

36. Les équations qui donnent les coefficients des fonctions appartenant aux deux groupes (a'') et (b'') sont celles qui nous ont déjà donné les coefficients des fonctions des groupes (a') et (b') de la Catégorie précédente, savoir :

$$\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}''_m \cos(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha''}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}''_m \sin(2m+1)x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha''}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}''_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{-i}{\sqrt{q}} e^{-2ix} \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}''_m \cos(2m+1)x,$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta(z)} = \quad \mathcal{A}''_0 \mathrm{F}^{(1)}(x) - \alpha'' \mathrm{Z}^{(1)}(x),$$

$$\frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)} = - \mathcal{A}''_0 \Phi^{(1)}(x) + \alpha'' \mathrm{U}^{(1)}(x);$$

α'' a pour valeur $\dfrac{\theta_1^2}{\theta\eta}$, et

$$\frac{\eta^3}{\theta} = \mathcal{A}''_0\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o}) - \alpha''\,\mathrm{Z}^{(1)}(\mathrm{o}),$$

d'où

$$\mathcal{A}''_0 = \frac{\theta_1^2\,\mathrm{Z}^{(1)}(\mathrm{o}) + \eta^4}{\theta\eta\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})}.$$

On obtient, par suite, pour les fonctions du groupe a'', les valeurs suivantes :

$$\theta\eta\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta(z)} = \quad [\theta_1^2\,\mathrm{Z}^{(1)}(\mathrm{o}) + \eta^4]\,\mathrm{F}^{(1)}(x) - \theta_1^2\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{Z}^{(1)}(x),$$

$$\theta\eta\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)} = -\,[\theta_1^2\,\mathrm{Z}^{(1)}(\mathrm{o}) + \eta^4]\,\Phi^{(1)}(x) + \theta_1^2\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{U}^{(1)}(x),$$

$$\theta\eta\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta_1(z)} = -\,[\theta_1^2\,\mathrm{Z}^{(1)}(\mathrm{o}) + \eta^4]\,\mathrm{F}_1^{(1)}(x) + \theta_1^2\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{Z}_1^{(1)}(x),$$

$$\theta\eta\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\frac{\Theta^3(z)}{\mathrm{H}_1(z)} = -\,[\theta_1^2\,\mathrm{Z}^{(1)}(\mathrm{o}) + \eta^4]\,\Phi_1^{(1)}(x) + \theta_1^2\,\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{o})\,\mathrm{U}_1^{(1)}(x).$$

37. Quant aux fonctions du groupe (b''), on obtient

$$\frac{\Theta_1^3(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}''_m \cos 2mx,$$

$$\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{\alpha''}{\operatorname{tang} x} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}''_m \sin 2mx,$$

d'où

$$\frac{\alpha''}{\operatorname{tang}(x+\omega)} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{B}''_m \sin 2m(x+\omega) = \frac{-i}{\sqrt{q}}\,e^{-2ix} \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}''_m \cos 2mx,$$

et, par suite,

$$\frac{\Theta_1^3(z)}{\Theta(z)} = -\,\alpha''\mathcal{A}''_0\,\mathrm{F}^{(2)}(x) - \alpha''\,\mathrm{Z}^{(2)}(x),$$

$$\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\mathrm{H}(z)} = \quad \alpha''\mathcal{A}''_0\,\Phi^{(2)}(x) + \alpha''\,\mathrm{U}^{(2)}(x);$$

α'' a pour valeur $\alpha'' = \dfrac{\eta^2}{\theta\theta_1}$, et

$$\mathcal{A}''_0 = -\frac{Z^{(2)}(o)}{F^{(2)}(o)} - \frac{\theta_1^3}{\theta}\,\frac{\theta\theta_1}{\eta^2}\,\frac{1}{F^{(2)}(o)},$$

$$\mathcal{A}''_0 = -\frac{Z^{(2)}(o)\,\eta^2 + \theta_1^4}{F^{(2)}(o)\,\eta^2},$$

et l'on a, par suite, le groupe des quatre formules suivantes :

$$\theta\theta_1\,F^{(2)}(o)\,\frac{\Theta_1^3(z)}{\Theta(z)} = \quad [Z^{(2)}(o)\,\eta^2 + \theta_1^4]\,F^{(2)}(x) - \eta^2\,Z^{(2)}(x)\,F^{(2)}(o),$$

$$\theta\theta_1\,F^{(2)}(o)\,\frac{H_1^3(z)}{H(z)} = -\,[Z^{(2)}(o)\,\eta^2 + \theta_1^4]\,\Phi^{(2)}(x) + \eta^2\,U^{(2)}(x)\,F^{(2)}(o),$$

$$\theta\theta_1\,F^{(2)}(o)\,\frac{\Theta^3(z)}{\Theta_1(z)} = \quad [Z^{(2)}(o)\,\eta^2 + \theta_1^4]\,F_1^{(2)}(x) - \eta^2\,Z_1^{(2)}(x)\,F^{(2)}(o),$$

$$\theta\theta_1\,F^{(2)}(o)\,\frac{H^3(z)}{H_1(z)} = \quad [Z^{(2)}(o)\,\eta^2 + \theta_1^4]\,\Phi_1^{(2)}(x) - \eta^2\,U_1^{(2)}(x)\,F^{(2)}(o).$$

38. Il nous reste à trouver les développements des fonctions du groupe (c''). Or

$$\frac{H^3(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A''_m \sin(2m+1)x,$$

$$\frac{\Theta^3(z)}{H(z)} = \frac{\alpha''}{\sin x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B''_m \sin(2m+1)x;$$

par suite, l'équation

$$\frac{\alpha''}{\sin(x+\omega)} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B''_m \sin(2m+1)(x+\omega) = \frac{-1}{\sqrt{q}}\,e^{-2ix}\sum_{m=0}^{m=\infty} A''_m \sin(2m+1)x$$

nous donne

$$A''_{2m+1} = -\,q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[\mathcal{A}''_0 + 4\alpha''\left(q^{-\frac{1}{8}} + q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}}\right)\right],$$

$$A''_{2m} = \quad q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[\mathcal{A}''_0 - 4\alpha''\left(q^{-\frac{9}{8}} + q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right)\right],$$

$$B''_{2m+1} = -\,q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[\mathcal{A}''_0 - 4\alpha''\left(q^{-\frac{9}{8}} + q^{-\frac{49}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right)\right],$$

$$B''_{2m} = \quad q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[\mathcal{A}''_0 + 4\alpha''\left(q^{-\frac{1}{8}} + q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right)\right].$$

On obtient donc

$$\frac{H^3(z)}{\Theta(z)} = \mathcal{A}''_0\, F^{(3)}(x) - \alpha''\, Z^{(3)}(x),$$

$$\frac{\Theta^3(z)}{H(z)} = -\mathcal{A}''_0\, F^{(3)}(x) + \alpha''\, U^{(3)}(x).$$

La constante α'' est égale à $\frac{\theta^2}{\eta_1\theta_1}$, et

$$\mathcal{A}''_0 = \frac{\theta^2 Z_1^{(3)}(0) + \eta^4}{\theta_1\eta\, F_1^{(3)}(0)}.$$

On obtient, par conséquent, les quatre derniers développements sous la forme

$$\theta_1\eta\, F_1^{(3)}(0)\, \frac{H^3(z)}{\Theta(z)} = \left[\theta^2 Z_1^{(3)}(0) + \eta^4\right] F^{(3)}(x) - \theta^2\, F_1^{(3)}(0)\, Z^{(3)}(x),$$

$$\theta_1\eta\, F_1^{(3)}(0)\, \frac{\Theta^3(z)}{H(z)} = -\left[\theta^2 Z_1^{(3)}(0) + \eta^4\right] F^{(3)}(x) + \theta^2\, F_1^{(3)}(0)\, U^{(3)}(x),$$

$$\theta_1\eta\, F_1^{(3)}(0)\, \frac{H_1^3(z)}{\Theta_1(z)} = \left[\theta^2 Z_1^{(3)}(0) + \eta^4\right] F_1^{(3)}(x) - \theta^2\, F_1^{(3)}(0)\, Z_1^{(3)}(x),$$

$$\theta_1\eta\, F_1^{(3)}(0)\, \frac{\Theta_1^3(z)}{H_1(z)} = -\left[\theta^2 Z_1^{(3)}(0) + \eta^4\right] F_1^{(3)}(x) + \theta^2\, F_1^{(3)}(0)\, U_1^{(3)}(x).$$

39. La méthode de M. Liouville nous a permis de faire, d'une manière simple, le développement de nos fonctions; nous allons appliquer, dans le même but, la méthode que M. Hermite a donnée pour le développement des fonctions doublement périodiques; en modifiant cette méthode ainsi que l'ont indiqué MM. Briot et Bouquet dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*, on arrive rapidement à l'expression générale d'un coefficient quelconque.

MÉTHODE DE M. HERMITE.

40. *Développement de la fonction* $\frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)}$. — La fonction $\frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)}$ est périodique; elle admet pour période $2K$; elle est développable suivant les puissances de l'exponentielle $e^{\frac{i\pi z}{K}}$ pour toutes les valeurs de z

comprises dans l'intérieur de la bande formée par deux parallèles à la direction K menées par les points $z = +iK'$, $z = -iK'$.

On a pour ces valeurs

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{\frac{mi\pi z}{K}}.$$

Un coefficient quelconque A_m a pour valeur

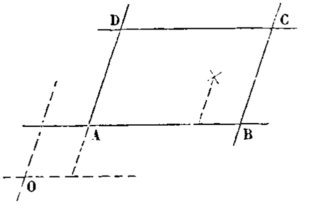
$$A_m = \frac{1}{2K}\int_{z_0}^{z_0+2K} \Pi(z)\,dz,$$

$\Pi(z)$ étant la fonction

$$\Pi(z) = \frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}\,e^{-\frac{mi\pi z}{K}}.$$

Il reste à évaluer l'intégrale qui fournit la valeur de A_m. A cet effet, considérons le parallélogramme dont les sommets sont les points $z = z_0$, $z = z_0 + 2K$, $z = z_0 + 2iK'$, $z = z_0 + 2K + 2iK'$; soit ABCD (*fig.* 1) ce parallélogramme. L'intégrale prise le long du côté AB est préci-

Fig. 1.



sément la quantité à évaluer; sur les côtés AD, BC, parallèles à iK' et distants de la quantité $2K$, la fonction $\Pi(z)$ a la même valeur, et, comme ces côtés sont parcourus en sens contraires quand on effectue l'intégration autour du parallélogramme, ils fournissent dans l'intégrale une somme nulle; l'intégrale relative au contour du parallélogramme se réduit donc aux deux parties qui sont relatives aux côtés AB, CD, c'est-à-dire à

$$\int_{z_0}^{z_0+2K} [\Pi(z) - \Pi(z+2iK')]\,dz;$$

mais on sait que l'intégrale prise le long du contour d'une aire est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de la fonction relatifs aux pôles de cette fonction situés dans l'intérieur du contour; il n'y a qu'un seul pôle dans l'intérieur du parallélogramme : c'est $2K + iK'$. En appelant Δ le résidu correspondant à ce pôle, il vient

$$\int_{z_0}^{z_0+2K} [\Pi(z) - \Pi(z+2iK')]\,dz = 2i\pi\Delta$$

(nous supposons z_0 compris dans le parallélogramme $z=0$, $z=2K$, $z=2iK'$, $z=2K+2iK'$, ce qui est toujours permis).

41. Calculons les éléments de cette formule :

$$\begin{aligned}
H(z+2iK') &= -H(z)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(z+iK')},\\
H_1(z+2iK') &= H_1(z)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(z+iK')},\\
\Theta(z+2iK') &= -\Theta(z)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(z+iK')};
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Pi(z+2iK') &= \Pi(z)\,e^{+(2m+1)\pi\frac{K'}{K}}\,e^{-\frac{i\pi z}{K}},\\
\Pi(z+2iK') &= \Pi(z)\,q^{-(2m+1)}\,e^{-\frac{i\pi z}{K}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\Pi(z) - \Pi(z+2iK') = \Pi(z)\left(1 - q^{-(2m+1)}\,e^{-\frac{i\pi z}{K}}\right).$$

Or

$$2KA_m = \int_{z_0}^{z_0+2K} \Pi(z)\,dz, \qquad 2KA_{m+1} = \int_{z_0}^{z_0+2K} \Pi(z)\,e^{-\frac{i\pi z}{K}}\,dz;$$

par suite, l'égalité précédente devient

$$2K\left(A_m - A_{m+1}\,q^{-(2m+1)}\right) = 2i\pi\Delta.$$

Il reste à évaluer Δ.

Or, on sait que Δ est la limite de $\varepsilon\Pi(2K+iK'+\varepsilon)$ pour $\varepsilon = 0$, car

$iK' + 2K$ est une racine simple de l'équation $\Theta(z) = 0$:

$$\varepsilon \Pi(2K + iK' + \varepsilon) = \varepsilon \frac{H(iK' + \varepsilon) H_1(iK' + \varepsilon)}{\Theta(iK' + \varepsilon)} e^{-\frac{mi\pi}{K}(\varepsilon + iK')},$$

$$H(iK' + \varepsilon) = i\Theta(\varepsilon) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2\varepsilon + iK')},$$

$$H_1(iK' + \varepsilon) = \Theta_1(\varepsilon) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2\varepsilon + iK')},$$

$$\Theta(iK' + \varepsilon) = iH(\varepsilon) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2\varepsilon + iK')};$$

par suite,

$$\varepsilon \Pi(2K + iK' + \varepsilon) = \varepsilon \frac{\Theta(\varepsilon)\Theta_1(\varepsilon)}{H(\varepsilon)} e^{-\frac{i\pi}{4K}(2\varepsilon + iK')} e^{-\frac{mi\pi}{K}(\varepsilon + iK')};$$

pour $\varepsilon = 0$,

$$\Delta = \frac{\Theta(0)\Theta_1(0)}{H'(0)} \frac{1}{\sqrt[4]{q}} q^{-m}, \quad \Delta = \frac{\theta_1}{\sqrt{k}} q^{-\left(m + \frac{1}{4}\right)},$$

$$2K\left(A_m - A_{m+1} q^{-(2m+1)}\right) = 2i\pi \frac{\theta_1}{\sqrt{k}} q^{-\left(m + \frac{1}{4}\right)},$$

ou bien

$$A_m - A_{m+1} q^{-(2m+1)} = \frac{2i\pi\theta_1}{2K\sqrt{k}} q^{-\left(m + \frac{1}{4}\right)} = \frac{2i}{\eta} q^{-\left(m + \frac{1}{4}\right)},$$

et enfin

$$A_{m+1} = A_m q^{2m+1} - \frac{2i}{\eta} q^{m + \frac{3}{4}}.$$

Cette relation donnerait A_m au moyen d'un calcul analogue à celui que nous avons fait.

42. Mais on peut trouver l'expression d'un coefficient quelconque en intégrant, comme l'ont fait MM. Briot et Bouquet, non plus autour du parallélogramme considéré, mais autour d'un parallélogramme ayant pour sommets $z = z_0$, $z = z_0 + 2K$, $z = z_0 + 2niK'$, $z = z_0 + 2K + 2niK'$, qu'on peut regarder comme la réunion de n parallélogrammes égaux au premier.

Les pôles de la fonction $\Pi(z)$, situés dans l'intérieur de ce parallélogramme, sont les points $z = 2K + (2n' - 1)iK'$.

On obtient, comme précédemment, l'égalité

$$2\mathrm{K}\left(\mathrm{A}_m - \mathrm{A}_{m+n}\, q^{-(n^2+2mn)}\right) = 2i\pi\,\Delta,$$

$$\Delta = \frac{2\mathrm{K}}{\pi\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{4}-m(2n'-1)};$$

par suite,

$$\mathrm{A}_m - \mathrm{A}_{m+n}\, q^{-(n^2+2mn)} = \frac{2i}{\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{4}-m(2n'-1)}.$$

Si l'on fait ensuite dans cette formule $m = 0$, on aura

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{A}_0\, q^{n^2} - \frac{2i}{\eta}\, q^{n^2}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{4}}.$$

A_0 est l'intégrale

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_{z_0}^{z_0+2\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\, dz.$$

Cette intégrale est nulle, car

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\,(2\mathrm{K}-z) &= \mathrm{H}\,(z),\\
\mathrm{H}_1(2\mathrm{K}-z) &= -\,\mathrm{H}_1(z),\\
\Theta\,(2\mathrm{K}-z) &= \Theta\,(z),
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{H}(2\mathrm{K}-z)\,\mathrm{H}_1(2\mathrm{K}-z)}{\Theta(2\mathrm{K}-z)} = -\,\frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}.$$

On a, de plus,

$$\mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{-m} = 0,$$

car

$$\mathrm{A}_m = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_{z_0}^{z_0+2\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\, e^{-\frac{mi\pi z}{\mathrm{K}}}\, dz,$$

$$\mathrm{A}_{-m} = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_{z_0}^{z_0+2\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\, e^{\frac{mi\pi z}{\mathrm{K}}}\, dz,$$

$$\mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{-m} = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_{z_0}^{z_0+2\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\left(e^{-\frac{mi\pi z}{\mathrm{K}}} + e^{\frac{mi\pi z}{\mathrm{K}}}\right) dz,$$

$$\mathrm{A}_m + \mathrm{A}_{-m} = \frac{1}{\mathrm{K}}\int_{z_0}^{z_0+2\mathrm{K}} \frac{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}\cos\frac{m\pi z}{\mathrm{K}}\, dz.$$

En appelant, pour abréger, $\Phi(z)$ la fonction qui est sous le signe $\int$, on a

$$\Phi(2K - z) = -\Phi(z);$$

par suite,

$$A_m + A_{-m} = 0.$$

La fonction $\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}$ se développe donc de la manière suivante :

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = 2i\sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sin\frac{m\pi z}{K}.$$

Nous avons trouvé

$$A_m = -\frac{2i}{\eta} q^{m^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}},$$

d'où

$$\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \frac{4}{\eta}\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} q^{-\frac{(2\mu-1)^2}{4}} \sin\frac{m\pi z}{K},$$

ou encore

$$\eta\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}\left(q^{-\frac{1}{4}} + q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right)\sin 2mx.$$

C'est le développement de la fonction $\eta\frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}$, tel que nous l'avons déjà obtenu.

Les développements des autres fonctions qui ne deviennent pas infinies pour $z = 0$ s'obtiennent de la même manière.

43. Considérons, comme second exemple, le développement de

$$\frac{H(z)\,\Theta_1(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{\frac{mi\pi z}{K}}.$$

En posant

$$\Pi(z) = \frac{H(z)\,\Theta_1(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} e^{-\frac{mi\pi z}{K}},$$

on aura

$$\Pi(z + 2niK') = \Pi(z)e^{-\frac{2ni\pi z}{K}} q^{-(2n^2+2mn)},$$

et, par suite,

$$2K(A_m - A_{m+2n}q^{-(2n^2+2mn)}) = 2i\pi\Delta,$$

$$\Delta = \frac{\theta_1\eta}{\sqrt{k}} \sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{2} - m(2n'-1)},$$

d'où

$$A_{m+2n} = A_m q^{2n^2+2mn} - 2iq^{2n^2+2mn} \sum_{n=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{2} - m(2n'-1)}$$

Si l'on fait successivement $m = 0$, $m = 1$, il viendra

$$A_{2n} = A_0 q^{\frac{4n^2}{2}} - 2iq^{\frac{1}{2}4n^2} \sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{2}},$$

$$A_{2n+1} = A q^{\frac{(2n+1)^2}{2}} - 2iq^{\frac{(2n+1)^2}{2}} \sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{4n'^2}{2}},$$

où

$$A q^{\frac{1}{2}} = A_1.$$

Ce sont les formules que nous avons trouvées plus haut.

On a, comme dans l'exemple précédent,

$$A_m + A_{-m} = 0,$$

et, par suite,

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\frac{i}{K}\int_{z_0}^{z_0+2K} \frac{H(z)\,\Theta_1(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} \sin\frac{\pi z}{2K}\, dz.$$

44. Appliquons encore la méthode à un troisième exemple, à la fonction

$$\frac{H^3(z)}{\Theta(z)}.$$

On a

$$e^{\frac{i\pi z}{2K}} \frac{H^3(z)}{\Theta(z)} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{\frac{mi\pi z}{K}};$$

car $e^{\frac{i\pi z}{2K}}\dfrac{H^3(z)}{\Theta(z)}$ admet, grâce au facteur $e^{\frac{i\pi z}{2K}}$, la période $2K$:

$$A_m = \frac{1}{2K}\int_{z_0}^{z_0+2K} e^{+\frac{i\pi z}{2K}} \frac{H^3(z)}{\Theta(z)} e^{-\frac{mi\pi z}{K}} dz = \frac{1}{2K}\int_{z_0}^{z_0+2K} \Pi(z)\,dz,$$

$$H(z+2niK') = (-1)^n q^{-n^2} e^{-\frac{ni\pi z}{K}} H(z),$$

$$\Theta(z+2niK') = (-1)^n q^{-n^2} e^{-\frac{ni\pi z}{K}} \Theta(z),$$

$$\frac{H^3(z+2niK')}{\Theta(z+2niK')} = q^{-2n^2} e^{-\frac{2ni\pi z}{K}} \frac{H^3(z)}{\Theta(z)},$$

$$\Pi(z+2niK') = \Pi(z) e^{\frac{i\pi}{2K}2niK' + \frac{2mni\pi K'}{K}} q^{-2n^2} e^{-\frac{2ni\pi z}{K}},$$

$$\Pi(z+2niK') = \Pi(z) q^{-2n^2-2mn+n} e^{-\frac{2ni\pi z}{K}},$$

$$\Pi(z) - \Pi(z+2niK') = \Pi(z)\left(1 - q^{-2n^2-2mn+n} e^{-\frac{2ni\pi z}{K}}\right),$$

$$2K\left(A_m - A_{m+2n} q^{-2n^2-2mn+n}\right) = 2i\pi\Delta,$$

$$\Delta = -\frac{\theta^3}{\sqrt{k}\,\theta_1}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{2} - m(2n'-1) + n' - \frac{1}{2}},$$

$$A_m - A_{m+2n} q^{-2n^2-2mn+n} = -2i\frac{\theta^2}{\theta_1\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(2n'-1)^2}{2} - m(2n'-1) + n' - \frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait, dans cette formule, $m=0$, $m=1$, on obtiendra

$$A_0 - A_{2n} q^{-2n^2+n} = -\frac{2i\theta^2}{\theta_1\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\left[\frac{(2n'-1)^2}{2} - \frac{2n'-1}{2}\right]},$$

$$A_1 - A_{2n+1} q^{-2n^2-n} = -\frac{2i\theta^2}{\theta_1\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\left[\frac{(2n'-1)^2}{2} + \frac{2n'-1}{2}\right]},$$

$$A_{2n} = \left[A_0 + \frac{2\theta^2 i}{\theta_1\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\left[\frac{(2n'-1)^2}{2} - \frac{2n'-1}{2}\right]}\right] q^{+2n^2-n},$$

$$A_{2n+1} = \left[A_1 + \frac{2\theta^2 i}{\theta_1\eta}\sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\left[\frac{(2n'-1)^2}{2} + \frac{2n'-1}{2}\right]}\right] q^{2n^2+n}.$$

45. La forme de ces coefficients n'est pas la même que celle qu'on obtient par la méthode de M. Liouville; cela tient à ce que, dans les formules données plus haut, il figure sous le signe $\sum$ le facteur $q^{-\frac{1}{8}}$ et en dehors le facteur $q^{\frac{1}{8}}$. En introduisant ce facteur, il vient

$$\mathrm{A}_{2n} = \left[\mathrm{A}_0 q^{-\frac{1}{8}} + \frac{2\theta^2 i}{\theta_1 \eta} \sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(4n'-3)^2}{8}}\right] q^{\frac{(4n-1)^2}{8}},$$

$$\mathrm{A}_{2n+1} = \left[\mathrm{A}_1 q^{-\frac{1}{8}} + \frac{2\theta^2 i}{\theta_1 \eta} \sum_{n'=1}^{n'=n} q^{-\frac{(4n'-1)^2}{8}}\right] q^{\frac{(4n+1)^2}{8}}.$$

Mais nous avons posé

$$e^{\frac{i\pi z}{2\mathrm{K}}} \frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathrm{A}_m e^{\frac{mi\pi z}{\mathrm{K}}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \mathrm{A}_m e^{\frac{(2m-1)i\pi z}{2\mathrm{K}}};$$

on a également les relations

$$\mathrm{A}_m = -\mathrm{A}_{-(m-1)},$$

car $\frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta(z)}$ est de la forme

$$\frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta(z)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{a}_m \sin(2m+1)\frac{\pi z}{2\mathrm{K}},$$

d'où

$$\mathrm{a}_{2\;+1} = \left[-\mathrm{a}_0 - \frac{4\theta^2}{\theta_1 \eta} \sum_{m'=0}^{m'=m} q^{-\frac{(4m'+1)^2}{8}}\right] q^{\frac{(4m+3)^2}{8}},$$

$$\mathrm{a}_{2m} = \left[\mathrm{a}_0 - \frac{4\theta^2}{\theta_1 \eta} \sum_{m'=1}^{m'=m} q^{-\frac{(4m'-1)^2}{8}}\right] q^{\frac{(4m+1)^2}{8}},$$

où

$$\mathrm{a}_0 = 2i\mathrm{A}_1.$$

Ce sont précisément les valeurs des coefficients sous leur première forme.

TROISIÈME PARTIE.

---

46. Cette troisième Partie comprend les développements des fonctions doublement périodiques de troisième espèce formées par des fractions dans lesquelles il figure au dénominateur une ou plusieurs fonctions Θ de plus qu'au numérateur. Ces nouvelles fonctions peuvent être développées en séries de sinus et de cosinus, soit par la méthode de M. Liouville, soit par celle de M. Hermite; mais il est à remarquer que les développements que l'on obtient ainsi présentent, au premier abord, l'apparence de séries divergentes. Une étude plus approfondie fait disparaître ce caractère de séries divergentes, et l'on obtient pour coefficients des sinus et cosinus des fonctions de q qui tendent rapidement vers zéro quand le rang du terme considéré augmente.

Pour mettre ce fait en évidence, nous allons présenter avec quelques détails ce qui concerne la fonction $\frac{1}{\Theta(z)}$, qui rentre dans la classe de celles que nous étudions dans cette troisième Partie.

47. Jacobi est le premier qui ait donné un développement de $\frac{1}{\Theta(z)}$ conduisant à l'expression de cette fonction en série de sinus et cosinus (*Fundamenta*, p. 187). Après avoir obtenu l'expression de $\Theta(z)$ en un produit d'un nombre illimité de facteurs sous la forme

$$(1)\quad \Theta(z) = \Theta(0)\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots(1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2})\ldots}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2};$$

où x désigne la fonction $\frac{\pi z}{2K}$, comme précédemment, Jacobi arrive, par la transformation de la constante $\frac{\Theta(0)}{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}$, à l'équation

$$(2)\quad \frac{\sqrt{hk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{\Theta(z)} = \frac{2\sqrt[4]{q}[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots]^2}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\ldots(1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2})\ldots};$$

il ajoute qu'on peut tirer aisément de cette égalité la suivante :

$$(3)\quad \frac{\sqrt{hk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{\Theta(z)} = \frac{2\sqrt[4]{q}(1-q^2)}{1-2q\cos 2x+q^2} - \frac{2\sqrt[4]{q^9}(1-q^6)}{1-2q^3\cos 2x+q^6} + \frac{2\sqrt[4]{q^{25}}(1-q^{10})}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} - \ldots,$$

en appliquant au second membre de l'égalité (2) la méthode connue de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Chacune des fractions qui figurent dans cette dernière équation étant développée suivant les puissances de q, on obtient

$$(4)\quad \frac{\sqrt{hk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x.$$

En effet, l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{\sqrt{hk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(1-q^{4m-2})}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}};$$

or,

$$\frac{2(1-q^{4m-2})}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}} = \frac{1+q^{2m-1}e^{-2ix}}{1-q^{2m-1}e^{-2ix}} + \frac{1+q^{2m-1}e^{2ix}}{1-q^{2m-2}e^{2ix}};$$

chacun des termes du second membre étant développé par le procédé de la division, on aura

$$\frac{1+q^{2m-1}e^{-2ix}}{1-q^{2m-1}e^{-2ix}} = 1+2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}q^{(2m-1)\mu}e^{-2\mu ix},$$

$$\frac{1+q^{2m-1}e^{2ix}}{1-q^{2m-1}e^{2ix}} = 1+2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}q^{(2m-1)\mu}e^{2\mu ix},$$

et, par suite,

$$\frac{2(1-q^{4m-2})}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}=2+4\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

ce qui fournit bien le développement de la formule (4).

Nous allons maintenant arriver à cette même formule par des procédés plus rigoureux que celui qu'a indiqué Jacobi.

48. Cauchy, dans l'un des beaux Mémoires qu'il présenta, en 1843, à l'Académie des Sciences, sur les *Factorielles géométriques* [*Mémoire sur l'application du calcul des résidus au développement des produits composés d'un nombre infini de facteurs* (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 572; 1843)], donna l'expression de $\frac{1}{\Theta(z)}$ sous forme d'une infinité de fractions. En appliquant le calcul des résidus à la fonction

$$f(x)=\frac{[(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\ldots]^2}{(1-tx)(1-t^3x)\ldots(1-tx^{-1})(1-t^3x^{-1})\ldots},$$

il trouva

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= -1+t^2-t^6+t^{12}-\ldots\\ &\quad+\frac{1}{1-tx}-\frac{t^2}{1-t^3x}+\frac{t^6}{1-t^5x}-\ldots\\ &\quad+\frac{1}{1-tx^{-1}}-\frac{t^2}{1-t^3x^{-1}}+\frac{t^6}{1-t^5x^{-1}}-\ldots; \end{aligned}\right.$$

en posant

$$T=-1+t^2-t^6+t^{12}-\ldots$$

ou

$$T=\sum(-1)^{n-1}t^{n(n+1)},$$

il trouva aisément

$$T_n=\frac{(-1)^n T-1+t^2-\ldots\pm t^{n(n-1)}}{t^{n^2}};$$

par suite,

$$\begin{aligned} &\frac{[(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)\ldots]^2}{(1-tx)(1-t^3x)\ldots(1-tx^{-1})(1-t^3x^{-1})\ldots}\\ &\quad=T-\frac{T-1}{t}(x+x^{-1})+\frac{T-1+t^2}{t^4}(x^2+x^{-2})+\ldots \end{aligned}$$

Ce développement peut s'écrire

$$f(x) = \mathrm{T} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{T}_n (x^n + x^{-n}),$$

où

$$\mathrm{T}_n = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1}\, t^{(n+\mu-1)(n+\mu)-n^2},$$

$$\mathrm{T}_n = t^{-\frac{1}{4}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1}\, t^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+n(2\mu-1)},$$

et

$$\mathrm{T} = t^{-\frac{1}{4}} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1}\, t^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}};$$

par suite,

$$(6)\quad \sqrt[4]{t}\, f(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1}\, t^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1}\, t^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+n(2\mu-1)} (x^n + x^{-n}).$$

Si l'on fait, dans cette formule,

$$x = e^{\frac{i\pi z}{\mathrm{K}}} \quad \text{et} \quad t = q = e^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}},$$

le premier membre $\sqrt[4]{q}\, f(x)$ devient égal, d'après la formule (2), à $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{kk'\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^3}}{\Theta(z)}$, et l'on voit que l'égalité (6), déduite de la formule (5) de Cauchy, n'est autre chose que l'égalité (4) déduite de la formule (3) de Jacobi.

49. Cauchy indique ensuite une autre méthode pour arriver au même résultat. Il fait de cette méthode un fréquent usage dans un Mémoire intitulé : *Mémoire sur les fonctions dont plusieurs valeurs sont liées entre elles par une équation linéaire, et sur diverses transformations de produits composés d'un nombre infini de facteurs* (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 523 et 567).

La fonction $f(x)$ jouit en effet de la propriété indiquée par l'équation suivante :

$$f(t^2x) + txf(x) = 0. \tag{a}$$

Si l'on pose

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} T_n x^n,$$

il semble que l'équation (a) entraîne

$$T_{n-1} + T_n t^{2n-1} = 0,$$

de laquelle on conclurait

$$T_n = (-1)^n T_0 t^{-n^2}.$$

Cauchy fait remarquer que cette équation est inexacte, puisqu'elle donnerait pour $f(x)$ une série divergente, et il rend compte de ce résultat, qui paraît si singulier au premier abord.

50. Il fait observer à cet effet que $f(x)$ se décompose en une somme de fractions simples dont l'une, $\frac{1}{1-tx^{-1}}$, offre un développement qui change de nature quand on remplace x par t^2x. Le module de tx est supposé plus petit que 1, quand on développe $f(x)$ suivant les puissances positives de t, et l'égalité

$$\frac{1}{1-tx^{-1}} = 1 + \frac{t}{x} + \frac{t^2}{x^2} + \ldots$$

devient, par la transformation de x en t^2x,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{tx}} = 1 + \frac{1}{tx} + \frac{1}{t^2x^2} + \ldots,$$

dont le second membre n'est pas convergent quand le module de tx est inférieur à 1. Pour lever la difficulté, Cauchy retranche de $f(x)$ la fraction $\frac{1}{1-tx^{-1}}$, dont le développement n'est plus légitime après la transformation de x en t^2x, et applique ensuite au développement de $f(x)$ la formule (a).

Posant

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathrm{T}_n x^n,$$

il trouve, pour toutes valeurs de x et de t telles que le module de $\frac{t}{x}$ soit moindre que l'unité, ainsi que celui de tx,

$$f(x) - \frac{1}{1 - t x^{-1}} = \mathrm{T}_0 - 1 + (\mathrm{T}_{-1} - t)\, x^{-1} + \ldots + \mathrm{T}_1 x + \mathrm{T}_2 x^2 + \ldots;$$

remplaçant x par t^2x dans les deux membres, il vient

$$\begin{aligned} f(t^2x) - \frac{1}{1 - \frac{1}{tx}} = \mathrm{T}_0 - 1 + (\mathrm{T}_{-1} - t)\,\frac{1}{t^2x} + (\mathrm{T}_{-2} - t^2)\,\frac{1}{t^4x^2} + \ldots \\ + \mathrm{T}_1 t^2 x + \mathrm{T}_2 t^4 x^2 + \ldots; \end{aligned}$$

mais

$$f^2(t^2x) - \frac{1}{1 - \frac{1}{tx}} = f(t^2x) - \frac{tx}{tx - 1};$$

par suite, en vertu de (a),

$$f(t^2x) - \frac{1}{1 - \frac{1}{tx}} = -tx\left[f(x) - \frac{1}{1 - tx}\right],$$

d'où

$$\begin{aligned} -tx\left[f(x) - \frac{1}{1 - tx}\right] = \mathrm{T}_0 - 1 + (\mathrm{T}_{-1} - t)\, t^{-2}x^{-1} + (\mathrm{T}_{-2} - t^2)\, t^{-4}x^{-2} + \ldots \\ + \mathrm{T}_1 t^2 x + \mathrm{T}_2 t^4 x + \ldots; \end{aligned}$$

remplaçant $f(x)$ et $\frac{1}{1 - tx}$ par leurs développements dans cette égalité, et égalant les coefficients de x^{+n} dans les deux membres, il obtient

$$\mathrm{T}_{n-1} - t^{n-1} + \mathrm{T}_n t^{2n-1} = 0,$$
$$\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_{-n},$$

par suite,

$$T_1 = -\frac{T-1}{t},$$

$$T_2 = -\frac{T_1 - t}{t^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, par conséquent,

$$T_n = (-1)^n \frac{T - 1 + t^2 - t^6 + \ldots \pm t^{n(n-1)}}{t^{n^2}},$$

qui est l'expression de T_n déjà trouvée.

51. Remarquons que la propriété, dont jouit la fonction $f(x)$, de satisfaire à l'équation linéaire

$$(a) \qquad f(t^2 x) + t x f(x) = 0,$$

n'est autre que la propriété bien connue de la fonction $\Theta(z)$

$$(b) \qquad \Theta(z + 2iK') = -\Theta(z) e^{-\frac{i\pi}{K}(z+iK')}.$$

La méthode de Cauchy revient donc à utiliser l'équation (b) pour déterminer les coefficients A_m, après avoir posé

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\Theta(z)} = \sum A_m \cos \frac{m\pi z}{K}.$$

La fonction $\frac{1}{\Theta(z)}$ devenant infinie pour $z = \pm iK'$, l'équation

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\Theta(z + 2iK')} = \sum A_m \cos \frac{2m\pi}{K}(z + 2iK')$$

n'est pas exacte, car le développement donné par la formule (α) ne s'applique qu'aux points du plan situés dans l'intérieur de la bande formée par deux parallèles menées à la direction K par les points $z = +iK'$, $z = -iK'$. Pour chaque bande formée par deux parallèles à la direction K menées par les points $z = (2m+1)iK'$, $z = (2m-1)iK'$, les coefficients du développement de $\frac{1}{\Theta(z)}$ sont différents; l'équation (β) ne peut donc pas servir à déterminer les coefficients A_m, et, par suite, la propriété représentée par l'équation (b) ne peut pas servir à trouver les coefficients.

52. MM. Briot et Bouquet ont donné (*Théorie des fonctions elliptiques*, Livre IV, Chapitre V) une méthode pour opérer le développement d'une fonction doublement périodique en une somme d'une infinité de termes simplement périodiques; comme ils l'ont fait remarquer, cette méthode s'applique aux fonctions de troisième espèce, et ils l'ont appliquée aux fonctions formées par les inverses des fonctions Θ, ainsi qu'aux dérivées logarithmiques des fonctions Θ. Cette méthode repose sur le calcul des résidus, et le principe de cette méthode a été donné par Cauchy.

MM. Briot et Bouquet ont trouvé ainsi

$$\frac{1}{\Theta(z)} = -\frac{i\pi}{\omega\,\theta'_1(0)} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^{m-1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \cot\frac{\pi}{\omega}\left[z - (2m-1)\frac{\omega'}{2}\right]$$

ou

$$\frac{1}{\Theta(z)} = -\frac{2\pi}{\omega\,\theta'_1(0)} \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m-1} \frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(1-q^{4m-2})}{1-2q^{2m-1}\cos\frac{2\pi z}{\omega} + q^{4m-2}},$$

où ω désigne la quantité que nous avons représentée par $2K$; ω' désigne la quantité $2iK'$, et $\theta'_1(z)$ la fonction $H(z)$.

La seconde de ces formules est précisément la formule (3) de Jacobi. Nous ne nous arrêterons pas à indiquer dans ses détails la manière dont MM. Briot et Bouquet sont arrivés à ce résultat; nous développerons la méthode qu'ils ont donnée sur les exemples plus complexes dont l'étude fait l'objet de cette troisième Partie, et nous passons immédiatement à la méthode de MM. Liouville et Hermite.

53. En posant

$$(a)\qquad \frac{1}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \cos\frac{m\pi z}{K},$$

$$(b)\qquad \frac{1}{H(z)} = \frac{\alpha}{\sin\frac{\pi z}{2K}} + \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \sin\frac{(2m+1)\pi z}{2K},$$

on obtient, comme nous l'avons vu précédemment, entre A_m et B_m, les relations

$$-i\sqrt[4]{q}\,A_m = -2i\alpha\sqrt{q^{2m+1}} + \frac{B_m}{2i}\sqrt{q^{2m+1}},$$

$$-i\sqrt[4]{q}\,\frac{A_{m+1}}{2} = -\frac{B_m}{2i}\,q^{-\left(\frac{2m+1}{2}\right)},$$

ce qui donne

$$A_m = -A_{m-1}q^{2m-1} + 4\alpha q^{-\left(m-\frac{1}{4}\right)},$$

et, par suite,

$$(c) \qquad A_m q^{m^2} = (-1)^m 2\left(A_0 + 2\alpha\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}\right);$$

dans ces formules, α a une valeur telle que la différence $\frac{1}{H(z)} - \frac{\alpha}{\sin\frac{\pi z}{2K}}$ soit finie pour $z = 0$.

On voit donc que $\Theta(z)^{-1}$ se présente sous l'apparence d'une série divergente, car la formule précédente (a) nous donne

$$\frac{1}{\Theta(z)} = A_0 + 2A_0\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{-m^2}\cos\frac{m\pi z}{K} + 4\alpha\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{-m^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}\cos\frac{m\pi z}{K};$$

les deux séries

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{-m^2}\cos\frac{m\pi z}{K}, \quad \sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{-m^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}\cos\frac{m\pi z}{K};$$

sont divergentes; il nous est aisé de lever cette indétermination.

Remarquons à cet effet que, dans l'égalité

$$\frac{1}{\Theta(z)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m\cos\frac{m\pi z}{K},$$

le coefficient A_m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment, par suite, $A_m q^{m^2}$ a aussi pour limite zéro. L'équation (c), savoir

$$A_m q^{m^2} = (-1)^m 2\left[A_0 + 2\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}\right],$$

nous donnera donc

$$A_0 + 2\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} = 0;$$

par suite,

$$A_0 = -2\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}},$$

ou bien

$$A_0 = -2\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} - 2\alpha \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}},$$

d'où

$$A_0 + 2\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} = -2\alpha \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}}.$$

L'équation (c) devient donc

$$(d) \qquad A_m q^{m^2} = (-1)^{m+1} 4\alpha \sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}},$$

mais

$$\sum_{\mu=m+1}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m+\mu} q^{\frac{(2m+2\mu-1)^2}{4}};$$

en substituant dans (d) cette valeur, il viendra

$$A_m q^{m^2} = 4\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2m+2\mu-1)^2}{4}},$$

et, par conséquent,

$$(e) \qquad A_m = 4\alpha \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4} + m(2\mu-1)};$$

donc

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Theta(z)} = 2\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+m(2\mu-1)}\cos\frac{m\pi z}{K}.$$

On voit aisément que la constante $\frac{1}{\alpha}$ est égale à $\sqrt{kk'\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3}$ ou à $\theta\theta_1\eta$; par conséquent,

$$\frac{\theta\theta_1\eta}{\Theta(x)} = 2\sum_{\mu=1}^{m=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2\mu-1)^2}{4}+m(2\mu-1)}\cos\frac{m\pi z}{K},$$

ce qui est la formule trouvée par les méthodes de Jacobi, de Cauchy et de MM. Briot et Bouquet.

54. La méthode de M. Liouville et celle de M. Hermite, appliquées aux fonctions plus complexes qui forment les inverses des fonctions développées dans les deux premières Parties, donneront toujours lieu à une difficulté du genre de celle que nous venons de lever à propos du développement de $\frac{1}{\Theta(z)}$; mais on voit dès maintenant que l'indétermination qui se présente dans ce cas pourra se lever de la même manière que précédemment.

55. Signalons, avant de terminer ce sujet, la différence essentielle entre la difficulté qu'a rencontrée Cauchy pour développer $\frac{1}{\Theta(z)}$ par le moyen de l'équation linéaire

$$(a) \qquad f(t^2x) + txf(x) = 0,$$

et celle que nous venons de rencontrer en appliquant à la même fonction les méthodes de MM. Liouville et Hermite; l'emploi de l'équation (a) conduisait à une détermination fausse des coefficients, que l'illustre géomètre n'a évitée qu'en recourant à l'analyse que nous avons exposée; l'application des méthodes de MM. Liouville et Hermite, au contraire, est parfaitement légitime et ne conduit qu'à une *indétermination* aisée à lever.

Dans ce qui va suivre, nous appliquerons exclusivement la méthode de MM. Briot et Bouquet, qui conduit rapidement au résultat.

56. Nous appliquerons d'abord la méthode aux inverses des douze premières fonctions de M. Hermite; ce sont les fonctions

$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\Theta(z)},$$
$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\mathrm{H}(z)},$$
$$\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)}.$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU PREMIER GROUPE.

57. Considérons d'abord la fonction

$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)},$$

que nous désignerons, pour abréger, par $\mathrm{F}(z)$, et soit $\Pi(z)$ la fonction

$$\Pi(z) = \frac{\mathrm{F}(z)}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-t)};$$

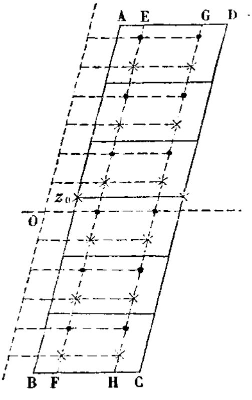
$\Pi(z)$ admet la période $2\mathrm{K}$, car $\mathrm{F}(z+2\mathrm{K}) = \mathrm{F}(z)$.

Les infinis de $\Pi(z)$ sont les zéros des deux fonctions $\mathrm{H}(z)$, $\mathrm{H}_1(z)$, auxquels s'ajoutent encore ceux de $\operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-t)$.

La fonction $\Pi(z)$ est, comme toutes les fonctions que nous considérerons dans la suite, méromorphe dans toute l'étendue du plan; par suite, l'intégrale définie de $\Pi(z)$ prise le long d'un contour sur lequel la fonction ne devient pas infinie est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles de cette fonction, situés dans l'intérieur de ce contour.

Prenons pour contour celui d'un parallélogramme dont les sommets sont les points $A(z_0 + 2niK')$, $B(z_0 - 2niK')$, $D(z_0 + 2K + 2niK')$, $C(z_0 + 2K - 2niK')$, et soit z_0 (*fig.* 2) un point situé dans l'intérieur du parallélogramme dont les sommets sont les points $z = 0$, $z = K$, $z = iK'$, $z = K + iK'$.

Fig. 2.



Les zéros de la fonction $H(z)$ situés dans le parallélogramme ABCD, sont les points

$$z = 2K + 2miK';$$

ils sont représentés par les points ronds de la droite GH.

Les zéros de $H_1(z)$, dans le même parallélogramme, sont

$$z = K + 2miK';$$

ils sont représentés par les points ronds de la droite EF.

Les zéros de $\Theta(z)$ et de $\Theta_1(z)$ sont donnés par les formules

$$z = 2K + (2m - 1)iK',$$
$$z = K + (2m - 1)iK';$$

ils sont figurés par les petites croix placées sur les droites GH et EF.

La fonction $F(z)$ devient infiniment petite sur les côtés AD et BC du parallélogramme quand ces côtés s'éloignent de l'origine de part et d'autre; l'intégrale $\int \Pi(z)\,dz$, le long de AD et de BC, tend également vers zéro quand ces côtés s'éloignent indéfiniment.

De plus, sur AB et CD, l'intégrale $\int \Pi(z)\,dz$ a des valeurs égales et de signes contraires; la somme des résidus de la fonction $\Pi(z)$ relatifs aux pôles de cette fonction, situés dans l'intérieur du parallélogramme ABCD, est donc nulle. La fonction tang $\frac{\pi}{2K}(z-t)$ n'a qu'un seul zéro dans l'intérieur de ce parallélogramme : c'est $z=t$ (t étant supposé en un point quelconque dans l'intérieur du même contour). Le résidu relatif au pôle $z=t$ est la limite de $\frac{\varepsilon F(t+\varepsilon)}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}\varepsilon}$; cette limite est $\frac{2K}{\pi}F(t)$.

Cherchons les résidus de la fonction $\Pi(z)$ relatifs aux pôles

$$z = 2K + 2miK',$$
$$z = K + 2miK',$$

provenant des zéros des fonctions $H(z)$ et $H_1(z)$. On sait que

$$H(z+2miK') = (-1)^m q^{-m^2} e^{-\frac{mi\pi z}{K}} H(z),$$
$$H_1(z+2miK') = (+1)^m q^{-m^2} e^{-\frac{mi\pi z}{K}} H_1(z),$$
$$\Theta(z+2miK') = (-1)^m q^{-m^2} e^{-\frac{mi\pi z}{K}} \Theta(z);$$

par suite,

$$F(z+2miK') = q^{m^2} e^{\frac{mi\pi z}{K}} F(z).$$

En appelant Δ le résidu relatif au pôle $2K+2miK'$, Δ_1 le résidu relatif au pôle $K+2miK'$, il vient

$$\Delta = q^{m^2}\frac{\Theta(0)}{H'(0)\,H_1(0)}\,\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(2K+2miK'-t)},$$

$$\Delta_1 = q^{m^2}(-1)^{m+1}\frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)\,H'(0)}\,\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(K+2miK'-t)};$$

par suite,

$$\frac{2K}{\pi}F(t) = \sum_{m=-(n-1)}^{m=n}\frac{q^{m^2}\theta}{\theta\sqrt{k}\,\eta}\cot\frac{\pi}{2K}(t-2miK') + \sum_{m=-(n-1)}^{m=n}(-1)^m\frac{q^{m^2}\theta_1}{\theta\sqrt{k}\,\eta}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(t-2miK').$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, on obtient

$$\theta\sqrt{k}\,\eta\,\frac{2K}{\pi}F(t) = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\cot\frac{\pi}{2K}(t-2miK') + \theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{m^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2K}(t-2miK').$$

Cette formule subsiste pour toutes les valeurs de t comprises dans la bande formée par les parallèles à la direction $i\mathrm{K}'$ menées par les points $z = z_0$, $z = z_0 + 2\mathrm{K}$, et, comme on a

$$\mathrm{F}(t + 2\mathrm{K}) = \mathrm{F}(t),$$

et que le second membre admet aussi la période $2\mathrm{K}$, elle subsiste dans toute l'étendue du plan.

En adoptant la notation ordinaire, on a

$$\theta\sqrt{k}\,\eta\,\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\mathrm{F}(z) = \theta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\cot(x - 2m\omega) + \theta_1 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m q^{m^2}\,\mathrm{tang}(x - 2m\omega),$$

ou encore

$$\theta\theta_1\eta^2\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \theta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\cot(x - 2m\omega) + \theta_1 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m q^{m^2}\,\mathrm{tang}(x - 2m\omega).$$

Nous allons transformer le second membre.

58. Considérons les termes qui sont fournis par des valeurs de m, égales et de signes contraires,

$$\theta q^{m^2}[\cot(x - 2m\omega) + \cot(x + 2m\omega)],$$

$$\cot(x + 2m\omega) = i\,\frac{e^{i(x+2m\omega)} + e^{-i(x+2m\omega)}}{e^{i(x+2m\omega)} - e^{-i(x+2m\omega)}} = i\,\frac{e^{ix}q^m + e^{-ix}q^{-m}}{e^{ix}q^m - e^{-ix}q^{-m}},$$

$$\cot(x - 2m\omega) = i\,\frac{e^{i(x-2m\omega)} + e^{-i(x-2m\omega)}}{e^{i(x-2m\omega)} - e^{-i(x-2m\omega)}} = i\,\frac{e^{ix}q^{-m} + e^{-ix}q^m}{e^{ix}q^{-m} - e^{-ix}q^m},$$

$$\cot(x + 2m\omega) + \cot(x - 2m\omega) = i\left(-\frac{1 + e^{2ix}q^{2m}}{1 - e^{2ix}q^{2m}} + \frac{1 + e^{-2ix}q^{2m}}{1 - e^{-2ix}q^{2m}}\right),$$

ou bien

$$\cot(x + 2m\omega) + \cot(x - 2m\omega) = i\left(\frac{-2e^{2ix}q^{2m}}{1 - e^{2ix}q^{2m}} + \frac{2e^{-2ix}q^{2m}}{1 - e^{-2ix}q^{2m}}\right),$$

$$\cot(x + 2m\omega) + \cot(x - 2m\omega) = \frac{4q^{2m}\sin 2x}{1 - 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}}.$$

On transformerait de même la somme

$$\mathrm{tang}(x + 2m\omega) + \mathrm{tang}(x - 2m\omega),$$

qui donne

$$\operatorname{tang}(x+2m\omega)+\operatorname{tang}(x-2m\omega)=\frac{4q^{2m}\sin 2x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}.$$

La formule précédente devient alors

$$\theta\theta_1\eta_1^2\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\mathrm{H}_1(z)}=\theta\left[\cot x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{m^2+2m}\sin 2x}{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right]$$
$$+\theta_1\left[\operatorname{tang}x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2+2m}\sin 2x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right].$$

59. Cette égalité peut prendre une troisième forme qui nous donnera les deux sommes sous forme de séries de sinus des multiples de l'arc x.

On a, en effet,

$$\frac{q^{2m}\sin 2x}{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}=\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}q^{2m\mu}\sin 2\mu x,$$

$$\frac{q^{2m}\sin 2x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}=\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu+1}q^{2m\mu}\sin 2\mu x;$$

par suite,

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}=\theta\left[\cot x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{m^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}q^{2m\mu}\sin 2\mu x\right]$$
$$+\theta_1\left[\operatorname{tang}x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}q^{m^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}q^{2m\mu}\sin 2\mu x\right].$$

60. Considérons en second lieu la fonction

$$\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}=\mathrm{F}(z);$$

$\dfrac{\mathrm{F}(z)}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-t)}$ admet la période $2\mathrm{K}$, et, de même que pour la précédente, la somme des résidus de cette fonction relatifs aux pôles situés dans l'intérieur du parallélogramme ABCD est nulle. Ces pôles sont les points

$$z = 2K + (2m-1)iK' \quad \text{pour} \quad \Theta(z),$$
$$z = K + (2m-1)iK' \quad \text{pour} \quad \Theta_1(z),$$

$$H[z + 2(m-1)iK'] = (-1)^{m-1} q^{-(m-1)^2} e^{-(m-1)\frac{i\pi z}{K}} H(z),$$

$$H[z + (2m-1)iK'] = (-1)^{m-1} q^{-(m-1)^2} e^{-(m-1)\frac{i\pi z}{K}} q^{-(m-1)} i\,\Theta(z)\, e^{-\frac{i\pi z}{2K}} q^{-\frac{1}{4}},$$

$$H[z + (2m-1)iK'] = (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{-(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}} i\,\Theta(z),$$

$$\Theta\,[z + (2m-1)iK'] = (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{-(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}} i\,H(z),$$

$$\Theta_1[z + (2m-1)iK'] = (+1)^{m} \quad q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{-(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}}\, H_1(z),$$

$$F(z + (2m-1)iK') = q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}} \frac{\Theta(z)}{H(z)\,H_1(z)},$$

et, par suite,

$$\varepsilon F[2K + (2m-1)iK' + \varepsilon] = -q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \frac{\Theta(\varepsilon)\,\varepsilon}{H(\varepsilon)\,H_1(\varepsilon)} e^{(2m-1)\frac{i\pi\varepsilon}{2K}},$$

$$\lim \varepsilon F[2K + (2m-1)iK' + \varepsilon] = -q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \frac{\theta}{\theta\sqrt{k}\,\eta},$$

$$\varepsilon F[\,K + (2m-1)iK' + \varepsilon] = \quad q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} (-1)^{m-1} i \frac{\Theta_1(\varepsilon)\,\varepsilon\,(-1)}{H_1(\varepsilon)\,H(\varepsilon)} e^{(2m-1)\frac{i\pi\varepsilon}{2K}},$$

$$\lim \varepsilon F[\,K + (2m-1)iK' + \varepsilon] = \quad q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} (-1)^{m} i \frac{\theta_1}{\theta\sqrt{k}\,\eta}.$$

Il en résulte

$$\theta\sqrt{k}\,\eta\,\frac{2K}{\pi} F(t) + \theta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{-q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[2K + (2m-1)iK' - t]}$$
$$+ \theta_1 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m i\, q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin\frac{\pi}{2K}[K + (2m-1)iK' - t]} = 0,$$

ou bien

$$\theta\theta_1\eta^2 F(z) = \theta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin[x - (2m-1)\omega]} + \theta_1 \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^{m+1} i q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\cos[x - (2m-1)\omega]},$$

ou encore

$$\theta\theta_1\kappa^2\frac{\mathbf{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)} = \theta\sum_{m=1}^{m=\infty} 4q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\,\frac{(1+q^{2m-1})\sin x}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}$$

$$+\,\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty} 4(-1)^{m+1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\,\frac{(1-q^{2m-1})\sin x}{1+2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}};$$

en développant chaque somme, il vient

$$\theta\theta_1\kappa^2\frac{\mathbf{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)} = 4\theta\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{2m-1}{2}(2\mu-1)}\sin(2\mu-1)x$$

$$+\,4\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{2m-1}{2}(2\mu-1)}\sin(2\mu-1)x.$$

61. En changeant, dans les formules que nous venons d'obtenir, z en $z+\mathrm{K}$ ou x en $x+\frac{\pi}{2}$, on obtient toutes les formules du premier groupe, savoir :

$$\theta\theta_1\kappa^2\frac{\Theta(z)}{\mathbf{H}(z)\,\mathbf{H}_1(z)} = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\cot(x-2m\omega)+\theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{m^2}\operatorname{tang}(x-2m\omega),$$

$$\theta\theta_1\kappa^2\frac{\mathbf{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)} = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\operatorname{cos\acute{e}c}[x-(2m-1)\omega]$$

$$+\,\theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1}iq^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\operatorname{s\acute{e}c}[x-(2m-1)\omega],$$

$$\theta\theta_1\kappa^2\frac{\Theta_1(z)}{\mathbf{H}_1(z)\,\mathbf{H}(z)} = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\operatorname{tang}(x-2m\omega)+\theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{m^2}\cot(x-2m\omega),$$

$$\theta\theta_1\kappa^2\frac{\mathbf{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\Theta(z)} = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\operatorname{s\acute{e}c}[x-(2m-1)\omega]$$

$$+\,\theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m iq^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\operatorname{cos\acute{e}c}[x-(2m-1)\omega].$$

62. Ce groupe de formules peut aussi s'écrire

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}=\theta\left[\cot x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{m^2+2m}\sin 2x}{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right]$$
$$+\,\theta_1\left[\operatorname{tang} x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2+2m}\sin 2x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right],$$

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}=\theta\sum_{m=0}^{m=\infty}4q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\frac{(1+q^{2m-1})\sin x}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}$$
$$+\,\theta_1\sum_{m=0}^{m=\infty}4(-1)^{m+1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\frac{(1-q^{2m-1})\sin x}{1+2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}},$$

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\mathrm{H}(z)}=\theta\left[\operatorname{tang} x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^{m^2+2m}\sin 2x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right]$$
$$+\,\theta_1\left[\cot x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2+2m}\sin 2x}{1-2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right],$$

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\Theta(z)}=\theta\sum_{m=0}^{m=\infty}4q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\frac{(1+q^{2m-1})\cos x}{1+2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}$$
$$+\,\theta_1\sum_{m=0}^{m=\infty}4(-1)^{m+1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\frac{(1-q^{2m-1})\cos x}{1-2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}}.$$

63. Ce premier groupe se présente enfin sous une troisième forme

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)}=\theta\left[\cot x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}q^{m^2+2m\mu}\sin 2\mu x\right]$$
$$+\,\theta_1\left[\operatorname{tang} x+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}q^{m^2+2m\mu}\sin 2\mu x\right],$$

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)}=4\theta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\sin(2\mu-1)x$$
$$+\,4\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\sin(2\mu-1)x,$$

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\mathrm{H}(z)} = \theta\left[\operatorname{tang}x + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{m^2+2m\mu}\sin 2\mu x\right]$$

$$+\theta_1\left[\cot x + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m}q^{m^2+2m\mu}\sin 2\mu x\right],$$

$$\theta\theta_1\eta^2\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\Theta(z)} = 4\theta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x$$

$$+4\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x.$$

Si l'on fait dans cette dernière formule $x=0$, $z=0$, il vient

$$\eta^3 = 4\theta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} + 4\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}},$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU DEUXIÈME GROUPE.

64. Le second groupe comprend les quatre fonctions

$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)}.$$

En opérant sur les fonctions

$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)} : \sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)} : \operatorname{tang}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-t)$$

comme nous l'avons fait sur les précédentes, on obtient aisément

$$\theta_1^2\eta\theta\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)} = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}q^{m^2}\operatorname{coséc}(x-2m\omega) + \eta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1}iq^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\operatorname{séc}[x-(2m-1)\omega],$$

$$\theta_1^2\eta\theta\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \theta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\cot[x-(2m-1)\omega] + \eta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{m^2}\operatorname{tang}(x-2m\omega),$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)} = \theta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2} \operatorname{séc}[x - 2m\omega] + \eta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m i q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \operatorname{coséc}[x - (2m-1)\omega],$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)} = \theta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \operatorname{tang}[x - (2m-1)\omega] + \eta \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m q^{m^2} \cot(x - 2m\omega).$$

65. Si l'on élimine ω au moyen de la relation $\sqrt{q} = e^{i\omega}$, les équations précédentes prennent la nouvelle forme

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)} = \theta \left[\frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2+m} \frac{(1+q^{2m})\sin x}{1 - 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}} \right]$$
$$+ 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + \frac{2m-1}{2}} \frac{(1-q^{2m-1})\sin x}{1 + 2q^{2m-1}\cos 2x + q^{4m-2}},$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \theta \sum_{m=1}^{m=\infty} 4 q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + 2m - 1} \frac{\sin 2x}{1 - 2q^{2m-1}\cos 2x + q^{4m-2}}$$
$$+ \eta \left[\operatorname{tang} x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+2m} \sin 2x}{1 + 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}} \right],$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)} = \theta \left[\frac{1}{\cos x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2+m} \frac{(1+q^{2m})\cos x}{1 + 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}} \right]$$
$$+ 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + \frac{2m-1}{2}} \frac{(1-q^{2m-1})\cos x}{1 - 2q^{2m-1}\cos 2x + q^{4m-2}},$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)} = +\theta \sum_{m=1}^{m=\infty} 4 q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + 2m - 1} \frac{\sin 2x}{1 + 2q^{2m-1}\cos 2x + q^{4m-2}}$$
$$+ \eta \left[\cot x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2+2m} \sin 2x}{1 - 2q^{2m}\cos 2x + q^{4m}} \right].$$

66. Si l'on développe ces quatre fonctions suivant les sinus et cosinus des multiples de x, il vient

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)} = \theta \left[\frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{m^2+m(2\mu-1)} \sin(2\mu-1)x \right]$$

$$+ 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m+\mu} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \sin(2\mu-1)x,$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = 4\theta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu} \sin 2\mu x$$

$$+ \eta \left[\tang x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m+\mu-1} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x \right],$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)} = \theta \left[\frac{1}{\cos x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{m^2+m(2\mu-1)} \cos(2\mu-1)x \right]$$

$$+ 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m-1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu-1)x,$$

$$\theta_1^2 \eta \theta \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)} = 4\theta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu} \sin 2\mu x$$

$$+ \eta \left[\cot x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x \right].$$

Si dans la troisième de ces quatre dernières formules on fait $x = 0$, on obtient

$$\theta_1^3 = \theta \left[1 + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{m^2+m(2\mu-1)} \right] + 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m-1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU TROISIÈME GROUPE.

67. Ce groupe comprend les quatre fonctions

$$\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)},$$

dont les développements, sous les trois formes indiquées plus haut, sont

$$\theta_1\theta^2\eta\,\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\ \operatorname{séc}(x-2m\omega) - \eta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\ \operatorname{séc}[x-(2m-1)\omega],$$

$$\theta_1\theta^2\eta\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)} = \eta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\ \operatorname{tang}(x-2m\omega) - \theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\ \operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega],$$

$$\theta_1\theta^2\eta\,\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)} = \theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\operatorname{coséc}(x-2m\omega) - \eta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\operatorname{coséc}[x-(2m-1)\omega],$$

$$\theta_1\theta^2\eta\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta(z)} = \eta\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\ \cot(x-2m\omega) - \theta_1\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\ \cot[x-(2m-1)\omega].$$

68. Ou bien

$$\theta_1\theta^2\eta\,\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \theta_1\left[\frac{1}{\cos x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2+m}\,\frac{(1+q^{2m})\cos x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right]$$
$$-\eta\sum_{m=1}^{m=\infty} 4q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{2m-1}{2}}\,\frac{(1+q^{2m-1})\cos x}{1+2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}},$$

$$\theta_1\theta^2\eta\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)} = \eta\left[\operatorname{tang} x + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2+2m}\,\frac{\sin 2x}{1+2q^{2m}\cos 2x+q^{4m}}\right]$$
$$-\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty} 4q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+2m-1}\,\frac{\sin 2x}{1+2q^{2m-1}\cos 2x+q^{4m-2}},$$

$$\theta_1 \theta^2 \eta \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)\,\mathbf{H}(z)} = \theta_1 \left[\frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2+m} \frac{(1+q^{2m}) \sin x}{1 - 2q^{2m} \cos 2x + q^{4m}} \right]$$
$$- \eta \sum_{m=1}^{m=\infty} 4 q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + \frac{2m-1}{2}} \frac{(1+q^{2m-1}) \sin x}{1 - 2q^{2m-1} \cos 2x + q^{4m-2}},$$

$$\theta_1 \theta^2 \eta \frac{\mathbf{H}_1(z)}{\mathbf{H}(z)\,\Theta(z)} = \eta \left[\cot x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2+2m} \frac{\sin 2x}{1 - 2q^{2m} \cos 2x + q^{4m}} \right]$$
$$- \theta_1 \sum_{m=1}^{m=\infty} 4 q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + 2m-1} \frac{\sin 2x}{1 - 2q^{2m-1} \cos 2x + q^{4m-2}}.$$

69. Ces formules peuvent prendre encore cette troisième forme

$$\theta_1 \theta^2 \eta \frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)\,\mathbf{H}(z)} = \theta_1 \left[\frac{1}{\cos x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{m^2+m(2\mu-1)} \cos(2\mu-1)x \right]$$
$$- 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu-1)x,$$

$$\theta_1 \theta^2 \eta \frac{\mathbf{H}(z)}{\mathbf{H}_1(z)\,\Theta_1(z)} = \eta \left[\operatorname{tang} x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x \right]$$
$$- 4\theta_1 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu} q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + (2m-1)\mu} \sin 2\mu x,$$

$$\theta_1 \theta^2 \eta \frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)\,\mathbf{H}(z)} = \theta_1 \left[\frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{m^2+m(2\mu-1)} \sin(2\mu-1)x \right]$$
$$- 4\eta \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \sin(2\mu-1)x,$$

$$\theta_1 \theta^2 \eta \frac{\mathbf{H}_1(z)}{\mathbf{H}(z)\,\Theta(z)} = \eta \left[\cot x + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x \right]$$
$$+ 4\theta_1 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4} + (2m-1)\mu} \sin 2\mu x.$$

Si dans la première formule on fait $z = 0$, il vient

$$\theta^3 = \theta_1\left[1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{m^2+m(2\mu-1)}\right] - 4\eta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

70. Les formules précédentes fournissent donc les cubes des trois fonctions

$$\eta = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}, \quad \theta_1 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}, \quad \theta = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{m^2},$$

$$\eta^3 = 4\theta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} + 4\theta_1\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}},$$

$$\theta_1^3 = \theta\left[1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{m^2+m(2\mu-1)}\right] + 4\eta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

$$\theta^3 = \theta_1\left[1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{m^2+m(2\mu-1)}\right] - 4\eta\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

DÉVELOPPEMENTS DES INVERSES DES FONCTIONS DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE.

71. Ces fonctions, au nombre de douze, peuvent être groupées de la manière suivante :

Premier groupe...... $\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta^2(z)}$, $\dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)}$;

Deuxième groupe.... $\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)}$, $\dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)}$;

Troisième groupe.... $\dfrac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}$, $\dfrac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}$, $\dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)}$.

Nous allons effectuer le développement de la première de ces fonctions avec quelque détail, et nous présenterons simplement les résultats pour les autres.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU PREMIER GROUPE.

72. Considérons la fonction $\frac{\Theta(z)}{H^2(z)}$; elle admet la période $2K$ et les infinis doubles

$$z = 2m'K + 2miK'.$$

Dans le parallélogramme envisagé précédemment, cette fonction n'admet que les infinis doubles

$$z = 2K + 2miK'.$$

La fonction

$$\frac{\Theta(z)}{H^2(z)} : \operatorname{tang} \frac{\pi}{2K}(z - t)$$

admet la période $2K$, et dans le même parallélogramme, outre les infinis $z = 2K + 2miK'$, elle admet encore l'infini $z = t$. La somme des résidus de cette fonction est nulle lorsqu'on étend le parallélogramme jusqu'à l'infini dans la direction iK'. Il suffit donc, pour effectuer le développement, de chercher la somme des résidus de la fonction.

73. Soit, pour abréger, $F(z) = \frac{\Theta(z)}{H^2(z)}$, et soit α_m un zéro de la fonction $H(z)$, situé dans le parallélogramme

$$F(\alpha_m + \varepsilon) = \frac{A_m}{\varepsilon^2} + \frac{A'_m}{\varepsilon} + \ldots,$$

$$\cot \frac{\pi}{2K}(\alpha_m + \varepsilon - t) = \cot \frac{\pi}{2K}(\alpha_m - t) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon}\left[\cot \frac{\pi}{2K}(\alpha_m + \varepsilon - t)\right]_{\varepsilon=0} + \ldots.$$

Le résidu de la fonction $\dfrac{F(z)}{\operatorname{tang} \frac{\pi}{2K}(z - t)}$ relatif au pôle α_m de la fonction $F(z)$ est le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le produit

$$F(\alpha_m + \varepsilon) \cot \frac{\pi}{2K}(\alpha_m + \varepsilon - t),$$

c'est-à-dire

$$-\mathrm{A}_m \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)} + \mathrm{A}'_m \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t).$$

Il nous reste à calculer A_m et A'_m; or,

$$\alpha_m = 2\mathrm{K} + 2mi\mathrm{K}';$$

par suite,

$$\mathrm{F}(2\mathrm{K} + 2mi\mathrm{K}' + \varepsilon) = (-1)^m q^{m^2} e^{\frac{mi\pi\varepsilon}{\mathrm{K}}} \frac{\Theta(\varepsilon)}{\mathrm{H}^2(\varepsilon)},$$

$$\mathrm{F}(\alpha_m + \varepsilon) = (-1)^m q^{m^2} e^{\frac{mi\pi\varepsilon}{\mathrm{K}}} \mathrm{F}(\varepsilon).$$

Or,

$$\mathrm{F}(\varepsilon) = \frac{\mathrm{A}}{\varepsilon^2} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}''\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$e^{\frac{mi\pi\varepsilon}{\mathrm{K}}} = 1 + \frac{mi\pi\varepsilon}{\mathrm{K}} + \frac{1}{12}\frac{m^2 i^2 \pi^2 \varepsilon^2}{\mathrm{K}^2} + \ldots,$$

$$e^{\frac{mi\pi\varepsilon}{\mathrm{K}}} \mathrm{F}(\varepsilon) = \frac{\mathrm{A}}{\varepsilon^2} + \frac{m\mathrm{A}i\pi}{\mathrm{K}} \frac{1}{\varepsilon} + \ldots,$$

$$\mathrm{A}_m = (-1)^m q^{m^2} \mathrm{A}, \quad \mathrm{A}'_m = (-1)^m q^{m^2} \frac{mi\pi}{\mathrm{K}} \mathrm{A};$$

le résidu cherché est donc

$$(-1)^m q^{m^2} \mathrm{A} \frac{\pi}{2\mathrm{K}} \left[-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)} + 2mi \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t) \right].$$

On obtient donc l'équation

$$\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{A}} \mathrm{F}(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m 2mi q^{m^2} \cot \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t),$$

$$\mathrm{A} = \lim \varepsilon^2 \mathrm{F}(\varepsilon) \quad \text{pour } \varepsilon = 0,$$

$$\mathrm{A} = \frac{\Theta(0)}{\mathrm{H}'(0)^2} = \frac{\theta}{\theta^2 k}, \quad \frac{1}{\mathrm{A}} = \theta k,$$

ou bien

$$H_1'^2\,\theta_1^2\,\frac{\Theta(z)}{H^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m 2miq^{m^2} \cot(x-2m\omega).$$

74. Considérons, en second lieu, la fonction

$$\Phi(z) = \frac{H(z)}{\Theta^2(z)}.$$

$\dfrac{\Phi(z)}{\sin\frac{\pi}{2K}(z-t)}$ admet la période $2K$; ses infinis, dans le parallélogramme considéré, sont $z=t$, et les infinis doubles $z = 2K + (2m-1)iK'$. La somme des résidus de cette fonction est nulle quand on étend indéfiniment le parallélogramme dans la direction iK'.

Or, on a

$$H[z+(2m-1)iK'] = (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{-(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}} i\Theta(z),$$

$$\Theta[z+(2m-1)iK'] = (-1)^{m-1} q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{-(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}} iH(z);$$

par suite,

$$\Phi[z+(2m-1)iK'] = (-1)^m q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{(2m-1)\frac{i\pi z}{2K}} \frac{i\Theta(z)}{H^2(z)},$$

ou bien

$$\Phi(\alpha_m+\varepsilon) = (-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} e^{(2m-1)\frac{i\pi\varepsilon}{2K}} i\,\frac{\Theta(\varepsilon)}{H^2(\varepsilon)},$$

$$\Phi(\alpha_m+\varepsilon) = \frac{B_m}{\varepsilon^2} + \frac{B'_m}{\varepsilon} + \ldots,$$

$$e^{(2m-1)\frac{i\pi\varepsilon}{2K}} = 1 + (2m-1)\frac{i\pi\varepsilon}{2K} + \ldots,$$

$$\frac{\Theta(\varepsilon)}{H^2(\varepsilon)} = \frac{A}{\varepsilon^2} + A' + \ldots,$$

$$\Phi(\alpha_m+\varepsilon) = (-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} i\left[\frac{A}{\varepsilon^2} + (2m-1)\frac{i\pi\varepsilon}{2K}\frac{A}{\varepsilon} + \ldots\right],$$

$$B_m = (-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} iA,$$

$$B'_m = (-1)^m \quad q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} (2m-1)\frac{\pi}{2K} A.$$

Le résidu de la fonction $\dfrac{\Phi(z)}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(z-t)}$ relatif au pôle $z = \alpha_m$ est le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le produit

$$\Phi(\alpha_m + \varepsilon)\,\mathrm{cos\acute{e}c}\,\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t + \varepsilon),$$

c'est-à-dire

$$-\,\mathrm{B}_m \frac{\cos\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)}{\sin^2\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)}\,\frac{\pi}{2\mathrm{K}} + \frac{\mathrm{B}'_m}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)};$$

par suite,

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\Phi(t) = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}\mathrm{A}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)}{\sin^2\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)}(-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\, i$$

$$+ \frac{\pi}{2\mathrm{K}}\mathrm{A}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} \frac{(2m-1)}{\sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)},$$

$$\theta\eta_1^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\, i\,\frac{\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1}\frac{(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin[x-(2m-1)\omega]}.$$

75. En changeant x en $x + \frac{\pi}{2}$ dans ces formules, on obtient le groupe des quatre formules

$$\theta\eta_1^2\theta_1^2\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2}}{\sin^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m\, 2mi\,q^{m^2}\cot(x-2m\omega),$$

$$\theta\eta_1^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\, i\,\frac{\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1}\frac{(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\theta\eta_1^2\theta_1^2\,\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1}\, 2mi\,q^{m^2}\,\mathrm{tang}(x-2m\omega),$$

$$\theta\eta_1^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\, i\,\frac{\sin[x-(2m-1)\omega]}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)^{m+1}\frac{(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\cos[x-(2m-1)\omega]}.$$

76. Ces formules peuvent prendre une autre forme, savoir :

$$\theta\eta^2\theta_1^2 \frac{\Theta(z)}{H^2(z)} = \frac{1}{\sin^2 x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} m q^{m^2} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+1}(m+\mu)q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta\eta^2\theta_1^2 \frac{H(z)}{\Theta^2(z)} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+1}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{8}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\sin(2\mu-1)x,$$

$$\theta\eta^2\theta_1^2 \frac{\Theta_1(z)}{H_1^2(z)} = \frac{1}{\cos^2 x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} m q^{m^2} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(m+\mu)q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta\eta^2\theta_1^2 \frac{H_1(z)}{\Theta_1^2(z)} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x.$$

En faisant dans la troisième et la quatrième de ces formules $x=0$, il viendra

$$\theta\theta_1^3 = 1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} m q^{m^2} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-)^{m+\mu+1}(m+\mu)q^{m^2+2m\mu}$$

et

$$\theta\eta^3 = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}.$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU DEUXIÈME GROUPE.

77. Ces fonctions sont les suivantes :

$$\frac{\Theta(z)}{H_1^2(z)},\quad \frac{H(z)}{\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{H^2(z)},\quad \frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)}.$$

En appliquant la méthode précédente, on obtient

$$\theta_1\eta^2\theta^2 \frac{\Theta(z)}{H_1^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}(-1)\,q^{m^2}\,2mi\,\operatorname{tang}(x-2m\omega),$$

$$\theta_1\eta^2\theta^2 \frac{H(z)}{\Theta_1^2(z)} = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\frac{\sin[x-(2m-1)\omega]}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} iq^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\frac{(2m-1)}{\cos[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\theta_1\varkappa^2\theta^2\,\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}}{\sin^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\,2mi\cot(x-2m\omega),$$

$$\theta_1\varkappa^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)} = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\frac{\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} i\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\frac{(2m-1)}{\sin[x-(2m-1)\omega]}.$$

78. On peut encore écrire ces formules

$$\theta_1\varkappa^2\theta^2\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)} = \frac{1}{\cos^2 x} - 4\sum_{m=1}^{m=\infty} m q^{m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta_1\varkappa^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu+1}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\sin(2\mu-1)x,$$

$$\theta_1\varkappa^2\theta^2\,\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)} = \frac{1}{\sin^2 x} - 4\sum_{m=1}^{m=\infty} m q^{m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta_1\varkappa^2\theta^2\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x.$$

En faisant $x=0$ dans la première et la quatrième de ces formules, il viendra

$$\theta_1\theta^3 = 1 - 4\sum_{m=1}^{m=\infty} m q^{m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu},$$

$$\theta_1\varkappa^3 = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}$$

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DU TROISIÈME GROUPE.

79. Ce troisième groupe comprend les fonctions

$$\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)},$$

et l'on trouve, comme pour les deux premiers,

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)}=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(2m-1)i}{\cot[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}\sin(x-2m\omega)}{\cos^2(x-2m\omega)}-\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}2mi}{\cos(x-2m\omega)},$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(2m-1)i}{\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)}=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}\cos(x-2m\omega)}{\sin^2(x-2m\omega)}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}2mi}{\sin(x-2m\omega)}.$$

80. Ces développements prennent également la forme suivante :

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)}=2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1)q^{m^2+m(2\mu-1)}\sin(2\mu-1)x,$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)}=2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)}=\frac{\cos x}{\sin^2 x}-4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1)q^{m^2+m(2\mu-1)}\cos(2\mu-1)x.$$

Si l'on fait dans la première et la troisième de ces formules $x=0$, il viendra

$$\eta\theta^3=2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}$$

et

$$\eta\theta_1^3=2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}.$$

81. Nous allons passer maintenant aux développements des inverses des fonctions qui font l'objet de la seconde Partie. Nous diviserons les fonctions dont il s'agit en trois Catégories. La première comprend les quatre fonctions

$$\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1(z)\,\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)},\quad \frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)}.$$

La deuxième comprend les vingt-quatre fonctions

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta_1(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^2(z)\,\Theta_1(z)}.
\end{array}$$

La troisième comprend les douze fonctions

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^3(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta_1^3(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}^3(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^3(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\Theta_1^3(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\mathrm{H}_1^3(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\Theta^3(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\mathrm{H}^3(z)}, \\[2ex]
\dfrac{\Theta(z)}{\mathrm{H}^3(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}(z)}{\Theta^3(z)}, & \dfrac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^3(z)}, & \dfrac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^3(z)}.
\end{array}$$

Nous allons présenter les développements des fonctions qui appartiennent à la première Catégorie, et nous ne donnerons le développement que d'une seule fonction de chacun des groupes qui font partie de la deuxième Catégorie; nous choisirons celle qui ne devient ni nulle ni infinie quand on y fait $z = 0$.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS APPARTENANT A LA PREMIERE CATÉGORIE.

82. Les développements des fonctions de la première Catégorie sont :

$$\theta_1^2\theta^2\eta^2\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = -\eta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]$$

$$+\theta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{2m^2}\cot(x-2m\omega)+\theta_1^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{2m^2}\operatorname{tang}(x-2m\omega),$$

$$\theta_1^2\theta^2\eta^2\frac{\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \theta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\cot[x-(2m-1)\omega]$$

$$-\theta_1^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]+\eta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{2m^2}\operatorname{tang}(x-2m\omega),$$

$$\theta_1^2\theta^2\eta^2\frac{\Theta_1(z)}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\mathrm{H}(z)} = -\eta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\cot[x-(2m-1)\omega]$$

$$+\theta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{2m^2}\operatorname{tang}(x-2m\omega)+\theta_1^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{2m^2}\cot(x-2m\omega),$$

$$\theta_1^2\theta^2\eta^2\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1(z)\,\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)} = \theta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]$$

$$-\theta_1^2\sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\cot[x-(2m-1)\omega]+\eta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{2m^2}\cot(x-2m\omega).$$

Nous avons donné plus haut les expressions de

$$\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega],\ \cot(x-2m\omega),\ \operatorname{tang}(x-2m\omega),\ \cot[x-(2m-1)\omega]$$

développées de deux manières différentes; nous nous dispenserons de les reproduire et nous allons passer aux fonctions appartenant à la deuxième Catégorie.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE.

83. Les développements des fonctions de la deuxième Catégorie sont :

$$\eta^3\theta_1^2\theta\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}iq^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\sin[x-(2m-1)\omega]}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)}{\cos[x-(2m-1)\omega]}$$
$$+\,\theta_1^2\sum\frac{(-1)^m iq^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\sin[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\theta^3\theta_1^2\eta\,\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m iq^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\sin[x-(2m-1)\omega]}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]}$$
$$+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)}{\cos[x-(2m-1)\omega]} + \theta_1^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\cos(x-2m\omega)},$$

$$\theta_1^3\eta^2\theta\,\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}q^{2m^2}4mi}{\cot(x-2m\omega)} + \eta^2\sum_{m=-\infty}^{m=-\infty}\frac{(-1)^m iq^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\mathrm{tang}[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\theta^3\eta^2\theta_1\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta_1(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{2m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}q^{2m^2}4mi}{\cot(x-2m\omega)} + \eta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m iq^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\cot[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\eta^3\theta^2\theta_1\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)} = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)i}{\sin[x-(2m-1)\omega]}$$
$$+\,\theta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\cos[x-(2m-1)\omega]},$$

$$\theta_1^3\theta^2\eta\,\frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = -\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)i}{\sin[x-(2m-1)\omega]}$$
$$+\,\theta^2\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{2m^2}}{\cos(x-2m\omega)}.$$

84. Ces formules peuvent être mises sous la forme

$$\eta^3\theta_1^2\theta\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta_1^2(z)\,\Theta(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}(2\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x$$

$$+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x$$

$$+4\theta_1^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x,$$

$$\theta^3\theta_1^2\eta\,\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1(z)} = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(2\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x$$

$$+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+\frac{(2m-1)^2(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x$$

$$+\theta_1^2\left[\frac{1}{\cos x}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}\,q^{2m^2+m(2\mu-1)}\cos(2\mu-1)x\right],$$

$$\theta_1^3\eta^2\theta\,\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)} = \frac{1}{\cos^2 x}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}\mu\,q^{2m^2+2m\mu}\cos 2\mu x$$

$$+8\sum(-1)^{m+1}m\,q^{2m^2}+16\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}m\,q^{2m^2+2m\mu}\cos 2\mu x$$

$$+2\eta^2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+4\eta^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+1}\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta^3\eta^2\theta_1\,\frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta(z)} = \frac{1}{\cos^2 x}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}\mu\,q^{2m^2+2m\mu}\cos 2\mu x$$

$$+8\sum(-1)^{m+1}q^{2m^2}+16\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}m\,q^{2m^2+2m\mu}\cos 2\mu x$$

$$+2\eta^2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m}\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+4\eta^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}\,q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\eta^3 \theta^2 \theta_1 \frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1(z)} = 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (2\mu - 1) q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x$$

$$+ 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (2m - 1)\, q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x$$

$$+ 4\theta^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x,$$

$$\theta_1^3 \theta^2 \eta^3 \frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)\,H_1(z)} = 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (2\mu - 1)\, q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x$$

$$+ 8 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (2m - 1)\, q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x$$

$$+ \theta^2 \left[\frac{1}{\cos x} + 4 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu-1} q^{2m^2+m(2\mu-1)} \cos(2\mu - 1)x \right].$$

Ces formules fournissent sous deux formes différentes les quantités θ^4, θ_1^4, η^4.

DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DE LA TROISIÈME CATÉGORIE.

85. Nous nous bornerons à faire le développement de la fonction

$$\frac{\Theta(z)}{H^3(z)}.$$

Cette fonction change de signe quand on change z en $z + 2K$; par suite, $\frac{\Theta(z)}{H^3(z)} : \sin \frac{\pi}{2K}(z - t)$ admet la période $2K$.

Si l'on désigne par $F(z)$ la fonction $\frac{\Theta(z)}{H^3(z)}$,

$$F(z + 2miK') = q^{2m^2} e^{\frac{2mi\pi z}{K}} F(z),$$

$$F(2K + 2miK' + \varepsilon) = -q^{2m^2} e^{\frac{2mi\pi\varepsilon}{K}} \frac{\Theta(\varepsilon)}{H^3(\varepsilon)}.$$

Le résidu de la fonction $\dfrac{F(z)}{\sin\dfrac{\pi}{2K}(z-t)}$, relatif au pôle $\alpha_m = 2K + 2miK'$ de cette fonction, est le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le développement de $\dfrac{F(\alpha_m+\varepsilon)}{\sin\dfrac{\pi}{2K}(\alpha_m - t + \varepsilon)}$. Or

$$F(\alpha_m+\varepsilon) = -q^{2m^2} e^{\frac{2mi\pi\varepsilon}{K}} \Theta(\varepsilon)\, H^{-3}(\varepsilon),$$

$$e^{\frac{2mi\pi\varepsilon}{K}} = 1 + \frac{2mi\pi\varepsilon}{K} + \frac{1}{1.2}\frac{4m^2i^2\pi^2\varepsilon^2}{K^2} + \ldots,$$

$$\Theta(\varepsilon) = \Theta(o) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\Theta''(o) + \ldots,$$

$$H^{-3}(\varepsilon) = \frac{1}{\left[H'(o)\varepsilon + \dfrac{\varepsilon^3}{1.2.3}H'''(o) + \ldots\right]^3} = \left[H'(o)\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}H'''(o) + \ldots\right]^{-3},$$

$$H^{-3}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3 H'(o)^3}\left[1 - 3\frac{\varepsilon^2}{1.2.3}\frac{H'''(o)}{H'(o)} + \ldots\right],$$

$$H^{-3}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3 H'(o)^3} - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\frac{H'''(o)}{H'(o)^4}\frac{1}{\varepsilon^3} + \ldots,$$

$$H^{-3}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3 H'(o)^3} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1.2}\frac{H'''(o)}{H'(o)^4} + \ldots,$$

$$F(\alpha_m+\varepsilon) = -q^{2m^2}\left(1 + \frac{2mi\pi\varepsilon}{K} + \ldots\right)\left[\Theta(o) + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\Theta''(o) + \ldots\right]\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\frac{1}{H'(o)^3} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1.2}\frac{H'''(o)}{H'(o)^4} + \ldots\right],$$

$$F(\alpha_m+\varepsilon) = -q^{2m^2}\left\{\frac{\Theta(o)}{H'^3(o)}\frac{1}{\varepsilon^3} + \frac{2mi\pi}{K}\frac{\Theta(o)}{H'^3(o)}\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2H'^3(o)}\left[\Theta''(o) - \frac{4m^2\pi^2}{K^2} - \Theta(o)\frac{H'''(o)}{H'(o)}\right]\frac{1}{\varepsilon} + \ldots\right\}.$$

Le résidu cherché est donc

$$-q^{2m^2}\left\{\sin^{-1}\frac{\pi}{2K}(\alpha_m - t)\frac{1}{2H'^3(o)}\left[\Theta''(o) - \frac{4m^2\pi^2}{K^2} - \Theta(o)\frac{H'''(o)}{H'(o)}\right] - \frac{\pi}{2K}\frac{\cos\dfrac{\pi}{2K}(\alpha_m - t)}{\sin^2\dfrac{\pi}{2K}(\alpha_m - t)}\frac{2mi\pi}{K}\frac{\Theta(o)}{H'^3(o)}\right.$$
$$\left. + \left[\frac{2}{\sin^3\dfrac{\pi}{2K}(\alpha_m - t)} - \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2K}(\alpha_m - t)}\right]\frac{\pi^2}{4K^2}\frac{\Theta(o)}{H'^3(o)}\right\},$$

$$\theta_1^3 \eta^3 \theta^2 \mathbf{F}(t) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{2q^{2m^2}}{\sin^3 \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)} - 4\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} miq^{m^2} \frac{\cos \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)}{\sin^2 \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)}$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{\left[\left(\frac{\theta''}{2\theta} - \frac{\eta'''}{\eta'}\right)\theta_1^4 - (1+m^2)\right] q^{2m^2}}{\sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\alpha_m - t)},$$

ou bien

$$\theta_1^3 \eta^3 \theta^2 \frac{\Theta(z)}{\mathrm{H}^3(z)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{2q^{2m^2}}{\sin^3(x - 2m\omega)} - 4\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} miq^{2m^2} \frac{\cos(x - 2m\omega)}{\sin^2(x - 2m\omega)}$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{\left[\left(\frac{\theta''}{2\theta} - \frac{\eta'''}{\eta'}\right)\theta_1^4 - (1+m^2)\right] q^{2m^2}}{\sin(x - 2m\omega)},$$

en posant $\theta'' = \Theta''(0)$, $\eta' = \mathrm{H}'(0)$, $\eta''' = \mathrm{H}'''(0)$.

On obtiendrait de même les développements des autres fonctions de la troisième Catégorie.

86. Pour faire une étude complète des fonctions dans lesquelles il figure au dénominateur un ou plusieurs facteurs Θ de plus qu'au numérateur, il faudrait ajouter aux vingt-quatre premières fonctions qui figurent dans la troisième Partie les quatre fonctions $\frac{1}{\Theta(z)}$, $\frac{1}{\mathrm{H}(z)}$, $\frac{1}{\Theta_1(z)}$, $\frac{1}{\mathrm{H}_1(z)}$. Aux quarante suivantes, dans lesquelles il figure au dénominateur deux fonctions Θ de plus qu'au numérateur, il conviendrait d'ajouter

$$\frac{1}{\Theta(z)\,\mathrm{H}(z)},\quad \frac{1}{\Theta(z)\,\Theta_1(z)},\quad \frac{1}{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)},$$

$$\frac{1}{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)},\quad \frac{1}{\mathrm{H}(z)\,\mathrm{H}_1(z)},\quad \frac{1}{\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)},$$

$$\frac{1}{\Theta^2(z)},\quad \frac{1}{\mathrm{H}^2(z)},\quad \frac{1}{\mathrm{H}_1^2(z)},\quad \frac{1}{\Theta_1^2(z)}.$$

87. Ces développements s'effectuent comme ceux qui leur sont analogues. Nous ne les donnerons pas ici, et nous allons passer à un groupe de fonctions de la forme

$$\frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)};$$

et, parmi les fonctions de ce genre, qui sont au nombre de douze, nous prendrons les trois suivantes :

$$\frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,H_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)\,H_1^2(z)},$$

qui ne s'annulent pas pour $z=0$ et qui ne deviennent pas infinies pour $z=0$. Ces fonctions nous fourniront les expressions de η^5, θ^5, θ_1^5, puis nous développerons

$$\frac{H_1^2(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)}{\Theta_1^2(z)\,H_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)}{\Theta^2(z)\,H^2(z)},$$

qui appartiennent à un autre groupe de douze fonctions; elles nous donneront η^6, θ^6 et θ_1^6.

Enfin nous ferons le développement des trois fonctions

$$\frac{H_1^3(z)}{\Theta_1^2(z)\,\Theta^2(z)},\quad \frac{\Theta^3(z)}{\Theta_1^3(z)\,H_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1^3(z)}{H_1^2(z)\,\Theta^2(z)},$$

qui nous fourniront les septièmes puissances de η, θ, θ_1.

Développements des fonctions

$$\frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,H_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1(z)}{H_1^2(z)\,\Theta^2(z)}.$$

88. Ces développements sont les suivants :

$$\begin{aligned}\theta^2\theta_1^2\eta^1\frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)} &= \theta_1\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}3(2m-1)i}{\sin[x-(2m-1)\omega]}\right]\\ &+\theta\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}iq^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}\sin[x-(2m-1)\omega]}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}3(2m-1)}{\cos[x-(2m-1)\omega]}\right],\end{aligned}$$

$$\theta_1^2\eta^2\theta^4\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)}=\eta\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}3(2m-1)i}{\cot[x-(2m-1)\omega]}\right]$$
$$+\theta_1\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{3m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{3m^2}6mi}{\cot(x-2m\omega)}\right],$$

$$\eta^2\theta^2\theta_1^4\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)}=\theta\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{3m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}q^{3m^2}6mi}{\cot(x-2m\omega)}\right]$$
$$-\eta\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]}+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}3(2m-1)i}{\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]}\right].$$

89. Ces formules peuvent s'écrire

$$\theta^2\theta_1^2\eta^4\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)}=\theta_1\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}[3(2m-1)+2\mu-1]\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x\right]$$
$$+\theta\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}[3(2m-1)+2\mu-1]\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x\right],$$

$$\theta_1^2\eta^2\theta^4\frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)}=-\eta\left[6\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu[3(2m-1)+2\mu]\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos2\mu x\right]$$
$$+\theta_1\left[\frac{1}{\cos^2x}-12\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{3m^2}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(3m+\mu)\,q^{3m^2+2m\mu}\cos2\mu x\right],$$

$$\eta^2\theta^2\theta_1^4\frac{\Theta_1(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)}=\theta\left[\frac{1}{\cos^2x}+12\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}mq^{3m^2}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(3m+\mu)\,q^{3m^2+2m\mu}\cos2\mu x\right]$$
$$+\eta\left[6\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}[3(2m-1)+2\mu]\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos2\mu x\right].$$

En faisant dans la première de ces formules $x=0$, on obtient

$$\eta^5=\theta_1\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}[3(2m-1)+2\mu-1]\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\right]$$
$$+\theta\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}[3(2m-1)+2\mu-1]\,q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\right].$$

On obtient de même, au moyen de la seconde,

$$\theta^5 = -\eta\left[6\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}[3(2m-1)+2\mu]q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\right]$$

$$+\theta_1\left[1 - 12\sum_{m=1}^{m=\infty} mq^{3m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(3m+\mu)q^{3m^2+2m\mu}\right].$$

La dernière formule donne de même

$$\theta_1^5 = \theta\left[1 + 12\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}mq^{3m^2} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(3m+\mu)q^{3m^2+2m\mu}\right]$$

$$+\eta\left[6\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}[3(2m-1)+2\mu]q^{\frac{3(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\right].$$

90. Nous allons passer maintenant aux développements de

$$\frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\Theta^2(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1^2(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)}.$$

On trouve

$$\theta_1^2\theta^2\eta^4\frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)} = \theta_1^2\left[-\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)i}{\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]}\right]$$

$$+\theta^2\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)i}{\cot[x-(2m-1)\omega]}\right],$$

$$\theta_1^2\eta^2\theta^4\frac{\Theta^2(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)} = \eta^2\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)i}{\cot[x-(2m-1)\omega]}\right]$$

$$+\theta_1^2\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{2m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{2m^2}4mi}{\cot(x-2m\omega)}\right],$$

$$\theta^2\eta^2\theta_1^4\frac{\Theta_1^2(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)}=\theta^2\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{2m^2}}{\cos^2(x-2m\omega)}-\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{2m^2}4mi}{\cot(x-2m\omega)}\right]$$
$$+\eta^2\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]}-\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}2(2m-1)i}{\mathrm{tang}[x-(2m-1)\omega]}\right].$$

91. Ces formules peuvent s'écrire

$$\theta_1^2\theta^2\eta^4\frac{\mathrm{H}_1^2(z)}{\Theta_1^2(z)\,\Theta_1^2(z)}=\theta_1^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+1-\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x\right]$$
$$-\theta^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x\right],$$

$$\theta_1^2\eta^2\theta^4\frac{\Theta^2(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)}=-\eta^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x\right]$$
$$+\theta_1^2\left[\frac{1}{\cos^2 x}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{2m^2}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m+\mu)q^{2m^2+2m\mu}\cos 2\mu x\right],$$

$$\theta^2\eta^2\theta_1^4\frac{\Theta_1^2(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)}=\theta^2\left[\frac{1}{\cos^2 x}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{2m^2}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m+\mu)q^{2m^2+2m\mu}\cos 2\mu x\right]$$
$$+\eta^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x\right].$$

Si l'on fait $x=0$ dans ces formules, on obtient les expressions de η^6, θ^6, θ_1^6;

$$\eta^6=\theta_1^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\right]$$
$$-\theta^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\right],$$

$$\theta^6 = -\eta^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\right]$$
$$+\theta_1^2\left[1 - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{2m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m+\mu)q^{2m^2+2m\mu}\right],$$

$$\theta_1^6 = \quad \theta^2\left[1 - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{2m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^\mu(2m+\mu)q^{2m^2+2m\mu}\right]$$
$$+\eta^2\left[4\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m-1+\mu)q^{\frac{(2m-1)^2}{2}+(2m-1)\mu}\right].$$

Développements des fonctions

$$\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)},\quad \frac{\Theta^3(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)},\quad \frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)}.$$

92. En appliquant encore la même méthode, on trouve aisément

$$\theta_1^2\theta^2\eta^4\,\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)} = \theta_1^3\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{-q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\cos[x-(2m-1)\omega]}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(2m-1)i}{\sin[x-(2m-1)\omega]}\right]$$
$$+\theta^3\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m i q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}\sin[x-(2m-1)\omega]}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(2m-1)}{\cos[x-(2m-1)\omega]}\right],$$

$$\eta^2\theta_1^2\theta^4\,\frac{\Theta^3(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)} = \eta^3\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\cos^2[x-(2m-1)\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(2m-1)i}{\cot[x-(2m-1)\omega]}\right]$$
$$+\theta_1^3\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}}{\cos^2[x-2m\omega]} - \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{m^2}2mi}{\cot(x-2m\omega)}\right],$$

$$\eta^2\theta^2\theta_1^4\,\frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)} = \theta^3\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^m q^{m^2}}{\cos^2[x-2m\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{(-1)^{m+1}q^{m^2}2mi}{\cot(x-2m\omega)}\right]$$
$$-\eta^3\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}}{\sin^2[x-(2m-1)\omega]} + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}(2m-1)i}{\operatorname{tang}[x-(2m-1)\omega]}\right].$$

93. En développant tous les termes en série, il vient

$$\theta_1^2\theta^2\eta^4\frac{\mathrm{H}_1^3(z)}{\Theta^2(z)\,\Theta_1^2(z)} = \theta_1^3\left[8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x\right]$$
$$+\theta^3\left[8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu-1}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x\right],$$

$$\eta^2\theta_1^2\theta^4\frac{\Theta^3(z)}{\Theta_1^2(z)\,\mathrm{H}_1^2(z)} = -\eta^3\left[2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x\right]$$
$$+\theta_1^3\left[\frac{1}{\cos^2 x}-4\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{m^2}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x\right],$$

$$\eta^2\theta^2\theta_1^4\frac{\Theta_1^3(z)}{\mathrm{H}_1^2(z)\,\Theta^2(z)} = \theta^3\left[\frac{1}{\cos^2 x}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}mq^{m^2}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x\right]$$
$$+\eta^3\left[2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x\right].$$

En faisant dans ces formules $x=0$, on obtient les expressions de η^7, θ^7, θ_1^7:

$$\eta^7 = \theta_1^3\left[8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\right]$$
$$+\theta^3\left[8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu-1}(m+\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\right],$$

$$\theta^7 = -\eta^3\left[2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\right]$$
$$+\theta_1^3\left[1-4\sum_{m=1}^{m=\infty}mq^{m^2}-8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu}\right],$$

$$\theta_1^7 = \theta^3\left[1+4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}mq^{m^2}+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(m+\mu)\,q^{m^2+2m\mu}\right]$$
$$+\eta^3\left[2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}+4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1)\,q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\right].$$

94. Nous allons, en terminant, faire quelques applications des résultats obtenus à l'Arithmétique.

Dans sa Lettre à M. Liouville (1861), M. Hermite a indiqué la liaison qui existe entre la théorie des fonctions elliptiques dans ses applications à l'Arithmétique et les fonctions numériques qui ont fait l'objet des recherches de M. Liouville (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* années 1857 à 1866). Il a fait observer, à cet effet, que les formules

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}}\sin(2m+1)x,$$

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1+q^{2m+1}}\cos(2m+1)x,$$

$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\frac{1}{4}+\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos 2mx$$

peuvent prendre la forme suivante :

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum \mathrm{R}_n q^{\frac{1}{2}n},$$

$$\frac{k\mathrm{K}}{2\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{S}_n q^{\frac{1}{2}n},$$

$$\frac{\mathrm{K}}{2\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}=\frac{1}{4}+\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{T}_n q^n,$$

en posant

$$\mathrm{R}_n=\sum \sin\delta x,$$

$$\mathrm{S}_n=\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos\delta x,$$

les sommes s'étendant à tous les diviseurs δ du nombre impair n. A l'égard de la fonction T_n, si l'on pose $n=2^\nu\mathrm{N}$, N étant impair, et si l'on désigne par δ un diviseur de N, on aura

$$\mathrm{T}_n=\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos 2^{\nu+1}\delta x.$$

Ce sont les fonctions numériques qui se sont présentées fréquemment dans les recherches de M. Liouville.

95. Passant ensuite aux fonctions de troisième espèce formées par le produit de deux fonctions Θ divisé par une autre de ces fonctions, M. Hermite a établi qu'en posant

$$\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\ \frac{H(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)}=\sum U_n\, q^{\frac{1}{4}n},$$

$$\sqrt{\frac{k'K}{2\pi}}\ \frac{H_1(z)\,\Theta_1(z)}{\Theta(z)}=\sum V_n\, q^{\frac{1}{4}n},$$

$$\sqrt{\frac{kK}{2\pi}}\ \frac{H(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)}=\sum W_n\, q^{\frac{1}{4}n},$$

on a, en désignant par δ et δ' deux diviseurs conjugués de n, c'est-à-dire tels que $\delta\delta'=n$,

$$U_n=\frac{1}{2}\sum \sin\frac{\delta+\delta'}{2}\,x,$$

$$V_n=\frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{\delta+1}{2}}\cos\frac{\delta+\delta'}{2}\,x\,;$$

les sommes s'étendent à tous les diviseurs de n, lequel est $\equiv 1 \pmod{4}$. On a aussi

$$W_n=\sum \sin\frac{\delta+\delta'}{2}\,x,$$

où $n\equiv -1 \pmod{4}$.

On voit figurer dans ces développements, sous les signes sinus et cosinus, non plus les diviseurs de n, mais les combinaisons $\frac{\delta+\delta'}{2}$, et cette remarque s'applique aux douze premières fonctions de M. Hermite.

96. Si l'on considère les fonctions dont le numérateur est le carré d'une fonction Θ, on sait qu'il ne figure dans les développements des douze fonctions de cette seconde Catégorie que deux éléments analy-

tiques nouveaux, savoir :

$$Z(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1}q^{m^2}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\cos 2mx,$$

$$U(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[q^{-\frac{1}{4}} - q^{-\frac{9}{4}} + \ldots + (-1)^{m-1}q^{-\frac{(2m-1)^2}{4}}\right]\sin(2m+1)x.$$

M. Hermite a établi à l'égard de $Z(x)$ que, en posant

$$Z(x) = \sum S_n q^{\frac{1}{4}n},$$

on a

$$S_n = \sum(-1)^{\frac{\delta+1}{2}}\cos\frac{\delta+\delta'}{2}x,$$

$n \equiv -1 \pmod{4}$, $\delta < \delta'$ et la somme ne comprenant que les diviseurs δ inférieurs à $\sqrt{n}$.

On voit s'offrir des parties de fonctions, au lieu des fonctions complètes qu'on a rencontrées jusqu'ici, et la même remarque s'applique à la fonction $U(x)$.

Posant

$$U(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum T_n q^{\frac{n}{4}},$$

on a

$$T_n = \sum(-1)^{\frac{\delta+\delta'-2}{4}}\sin\frac{\delta+\delta'}{2},$$

$n \equiv 0 \pmod{8}$, $\delta < \delta'$; δ désigne tous les diviseurs de n supérieurs à $\sqrt{n}$.

97. Nous allons voir actuellement quelles sont les fonctions qui s'introduisent lorsqu'on considère les développements des fonctions plus complexes dans lesquelles il figure trois Θ au numérateur pour un seul au dénominateur. Nous avons trouvé

$$\frac{H(z)\,\Theta_1(z)\,H_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} a_{2m+1}\sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} a_{2m}\sin 4mx,$$

où

$$\mathrm{a}_{2m+1} = 1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{4m^2}{2}},$$

$$\mathrm{a}_{2m} = 2q^{-\frac{2}{1}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}.$$

Soient

$$f(x) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathrm{a}_{2m+1} \sin(4m+2)x,$$

$$\varphi(x) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathrm{a}_{2m} \sin 4mx.$$

Un terme quelconque de $f(x)$ est de la forme

$$4q^{\frac{(2m+1)^2}{2} - \frac{4\mu^2}{2}} \sin(4m+2)x,$$

μ variant de zéro à m. Si l'on introduit les valeurs de μ tant négatives que positives, $f(x)$ pourra s'écrire

$$f(x) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{(2m+1)^2}{2} - \frac{4\mu^2}{2}} \sin(4m+2)x.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} 2m+1)^2 - 4\mu^2 &= n, \\ 2m + 2\mu + 1 &= \delta, \\ 2m - 2\mu + 1 &= \delta', \end{aligned}$$

on aura

$$\delta\delta' = n, \quad 4m + 2 = \delta + \delta';$$

par suite, $f(x)$ pourra s'écrire

$$f(x) = 2\sum \mathrm{T}_n q^{\frac{n}{2}},$$

où

$$\mathrm{T}_n = \sum \sin(\delta + \delta')x;$$

dans cette formule, $n \equiv 1$ (mod. 4), et la somme s'étend à tous les diviseurs δ et δ' du nombre n. On voit s'offrir ici les combinaisons $\delta + \delta'$.

Considérons en second lieu la fonction $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} a_{2m} \sin 4mx,$$

ou

$$\varphi(x) = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{4m^2}{2} - \frac{(2\mu-1)^2}{2}} \sin 4mx\,;$$

$\varphi(x)$ pourra s'écrire

$$\varphi(x) = 2 \sum \mathrm{U}_n q^{\frac{n}{2}},$$

$$\mathrm{U}_n = \sum \sin(\delta + \delta')x\,;$$

dans cette formule, $n \equiv -1 \pmod{4}$, et la somme s'étend à tous les diviseurs δ et δ' de n sans exception. Les fonctions qui figurent dans ces formules sont donc des fonctions complètes.

La combinaison $\delta + \delta'$ caractérise les fonctions de seconde espèce qui sont formées de trois fonctions Θ divisées par une autre fonction Θ, car ce caractère persistera tant que le nombre des facteurs du numérateur surpasse de deux unités celui du dénominateur.

98. Les développements des fonctions analogues à $\frac{\mathrm{H}^2(z)\,\mathrm{H}(z)}{\Theta(z)}$ et à $\frac{\mathrm{H}^3(z)}{\Theta(z)}$ ont mis en évidence six fonctions distinctes que nous avons désignées par

$$\mathrm{Z}^{(1)}(x),\ \mathrm{U}^{(1)}(x),\ \mathrm{Z}^{(2)}(x),\ \mathrm{U}^{(2)}(x),\ \mathrm{Z}^{(3)}(x),\ \mathrm{U}^{(3)}(x).$$

Considérons la première :

$$\mathrm{Z}^{(1)}(x) = 4\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}} (-1)^{m+1} \left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^m \quad q^{-\frac{(4m+1)^2}{8}}\right] \cos(4m+3)x$$

$$+ 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(4m+1)^2}{8}} (-1)^m \quad \left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{\frac{49}{8}} \quad + \ldots + (-1)^{m-1} q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right] \cos(4m+1)x.$$

Soit

$$Z^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) + \varphi^{(1)}(x),$$

$$f^{(1)}(x) = 4\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\mu=0}^{\mu=m}(-1)^{m+\mu+1}q^{\frac{(4m+3)^2}{8}-\frac{(4\mu+1)^2}{8}}\cos(4m+3)x,$$

$$\varphi^{(1)}(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu-1}q^{\frac{(4m+1)^2}{8}-\frac{(4\mu-1)^2}{8}}\cos(4m+1)x;$$

en posant

$$f^{(1)}(x) = 4\sum T_n^{(1)}q^{\frac{n}{2}},$$

on a

$$T_n^{(1)} = \sum(-1)^{\frac{\delta}{2}}\cos(\delta+\delta')x;$$

dans cette formule, $n \equiv 2 \pmod{8}$, et le diviseur δ est plus grand que $\sqrt{n}$. On a de même

$$\varphi^{(2)}(x) = 4\sum U_n^{(1)}q^{\frac{n}{2}},$$

$$U_n^{(1)} = \sum(-1)^{\frac{\delta}{2}-1}\cos(\delta+\delta')x,$$

$n \equiv 0 \pmod{4}$, ou $n \equiv 2 \pmod{4}$; δ est plus grand que $\sqrt{n}$. On voit donc s'offrir de nouveau des parties de fonctions.

Considérons la fonction $U^{(1)}(x)$:

$$U^{(1)}(x) = \frac{1}{\sin x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(4m+3)^2}{8}}\left[q^{-\frac{9}{8}} - q^{\frac{49}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1}q^{-\frac{(4m-1)^2}{8}}\right]\sin(4m+3)x$$

$$+ 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(4m+1)^2}{8}}\left[q^{-\frac{1}{8}} - q^{-\frac{25}{8}} + \ldots + (-1)^{m-1}q^{-\frac{(4m-3)^2}{8}}\right]\sin(4m+1)x.$$

Soit

$$U^{(1)}(x) = \frac{1}{\sin x} + \psi^{(1)}(x) + \pi^{(1)}(x),$$

$$\psi^{(1)}(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu-1} q^{\frac{(4m+3)^2}{8}-\frac{(4\mu-1)^2}{8}} \sin(4m+3)x,$$

$$\pi^{(1)}(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=m}(-1)^{m+\mu-1} q^{\frac{(4m+1)^2}{8}-\frac{(4\mu-3)^2}{8}} \sin(4m+1)x.$$

Posant

$$\psi^{(1)}(x) = 4\sum V_n^{(1)}\, q^{\frac{n}{2}},$$

$$\pi^{(1)}(x) = 4\sum W_n^{(1)}\, q^{\frac{n}{2}},$$

on aura pour $V_n^{(1)}$ et $W_n^{(1)}$ les valeurs

$$V_n^{(1)} = \sum (-1)^{\frac{\delta+1}{2}} \sin(\delta+\delta')x,$$

$$W_n^{(1)} = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \sin(\delta+\delta')x;$$

dans les deux formules, $n \equiv 2 \pmod{4}$ ou à $0 \pmod{4}$, et δ est supérieur à $\sqrt{n}$.

99. En posant de même

$$Z^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) + \varphi^{(2)}(x),$$

$$U^{(2)}(x) = \frac{1}{\operatorname{tang} x} + \psi^{(2)}(x) + \pi^{(2)}(x),$$

$$f^{(2)}(x) = 2\sum T_n^{(2)} q^{\frac{n}{2}},$$

$$\varphi^{(2)}(x) = 2\sum U_n^{(2)} q^{\frac{n}{2}},$$

$$\psi^{(2)}(x) = 2\sum V_n^{(2)} q^{\frac{n}{2}},$$

$$\pi^{(2)}(x) = 2\sum W_n^{(2)} q^{\frac{n}{2}},$$

il viendra

$$T_n^{(2)} = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \cos(\delta+\delta')x, \quad n \equiv -1 \pmod{4},$$

$$U_n^{(2)} = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \cos(\delta+\delta')x, \quad n \equiv +1 \pmod{4},$$

$$V_n^{(2)} = \sum (-1)^{\frac{\delta}{2}+1} \sin(\delta+\delta')x, \quad n \equiv 0 \pmod{16} \text{ ou } n \equiv 4 \pmod{16},$$

$$W_n^{(2)} = \sum (-1)^{\frac{\delta}{2}+1} \sin(\delta+\delta')x, \quad n \equiv 0 \pmod{8};$$

les sommations s'étendent sur tous les diviseurs de n; dans les deux dernières formules, δ et δ' sont des diviseurs pairs quelconques de n. On a donc, pour les fonctions qui figurent dans $Z^{(2)}(x)$ et dans $U^{(2)}(x)$, des fonctions numériques complètes.

100. Enfin, posons encore

$$Z^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) + \varphi^{(3)}(x),$$

$$U^{(3)}(x) = \frac{1}{\sin x} + \psi^{(3)}(x) + \pi^{(3)}(x),$$

$$f^{(3)}(x) = 4 \sum T_n^{(3)} q^{\frac{n}{2}},$$

$$\varphi^{(3)}(x) = 4 \sum U_n^{(3)} q^{\frac{n}{2}},$$

$$\psi^{(3)}(x) = 4 \sum V_n^{(2)} q^{\frac{n}{2}},$$

$$\pi^{(3)}(x) = 4 \sum W_n^{(3)} q^{\frac{n}{2}};$$

il viendra

$$T_n^{(3)} = \sum \sin(\delta+\delta')x,$$

$$U_n^{(3)} = \sum \sin(\delta+\delta')x.$$

Dans la première formule, δ est un diviseur de la forme $4k$ ou $4k+2$ et δ' est de la forme $4k'+1$ ou $4k'-1$; dans la deuxième formule, δ

est de la forme $4k$ ou $4k+2$, et le diviseur conjugué correspondant est $4k'-1$ ou $4k'+1$.

On a également

$$V_n^{(3)} = \sum \sin(\delta + \delta')x,$$

$$W_n^{(3)} = \sum \sin(\delta + \delta')x,$$

et la remarque précédente s'applique à ces deux nouvelles formules; δ est un diviseur de n supérieur à $\sqrt{n}$. On a donc encore dans ce cas des parties de fonctions.

101. Passons actuellement aux fonctions dont les développements font l'objet de la troisième Partie, et considérons en premier lieu la fonction $\frac{1}{\Theta(z)}$.

Nous avons établi la formule suivante :

$$\frac{\theta\theta_1\eta}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x.$$

Posant

$$f(x) = 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m-1}q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

on aura

$$f(x) = 4\sum T_n q^{\frac{n}{4}},$$

où

$$T_n = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos\frac{\delta-\delta'}{2}x, \quad n \equiv 1 \pmod{4},$$

et δ, δ' sont les diviseurs conjugués de n; δ est supérieur à $\sqrt{n}$.

On voit s'offrir ici la combinaison $\frac{\delta-\delta'}{2}$ des diviseurs conjugués de n et nous verrons figurer la même combinaison dans les développements de la plupart des fonctions dans lesquelles il figure au dénominateur une fonction Θ de plus qu'au numérateur.

102. Les éléments qui figurent dans les développements des inverses des douze premières fonctions de M. Hermite sont les sommes

$$f_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x,$$

$$f_2(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x,$$

$$f_3(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x,$$

$$f_4(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m+\mu} q^{m^2+2m\mu} \sin 2\mu x,$$

$$\varphi_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu} \sin 2\mu x,$$

$$\varphi_2(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu} \sin 2\mu x,$$

$$\psi_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \sin(2\mu-1)x,$$

$$\psi_2(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{m+\mu} q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \sin(2\mu-1)x,$$

et d'autres analogues dans lesquelles les cosinus remplacent les sinus. Considérons les fonctions

$$f_1(x), \quad \varphi_1(x), \quad \psi_1(x);$$

elles peuvent s'écrire

1° $$f_1(x) = \sum T_n q^n,$$

où

$$T_n = \sum \sin(\delta - \delta')x;$$

$\delta > \sqrt{n}$;

2°

$$\varphi_1(x) = \sum U_n q^{\frac{n}{4}},$$

$$U_n \quad = \sum \sin\frac{\delta - \delta'}{2}x;$$

$n \equiv 1 \pmod{4}$; δ et δ' sont tous deux $\equiv 1 \pmod{4}$ ou à $-1 \pmod{4}$, et $\delta > \sqrt{n}$;

3°

$$\psi_1(x) = \sum V_n q^{\frac{n}{4}},$$

$$V_n \quad = \sum \sin\frac{\delta - \delta'}{2};$$

$n \equiv 1 \pmod{2}$; δ et δ' sont donc impairs, et $\delta > \sqrt{n}$.

103. Comme conséquences des formules

$$\theta\eta^2\theta_1^2 \frac{\Theta_1(z)}{H_1^2(z)} = \frac{1}{\cos^2 x} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} m q^{m^2} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(m+\mu)q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta\eta^2\theta_1^2 \frac{H_1(z)}{\Theta_1^2(z)} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x,$$

$$\theta_1\eta^2\theta^2 \frac{\Theta(z)}{H_1^2(z)} = \frac{1}{\cos^2 x} - 4\sum_{m=1}^{m=\infty} m q^{m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(m+\mu)q^{m^2+2m\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\theta_1\eta^2\theta^2 \frac{H_1(z)}{\Theta^2(z)} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}}\cos(2\mu-1)x,$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2 \frac{\Theta(z)}{\Theta_1^2(z)} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

$$\eta\theta^2\theta_1^2 \frac{\Theta_1(z)}{\Theta^2(z)} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1)q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}\cos 2\mu x,$$

nous avons trouvé

$$(1)\quad \theta\theta_1^3 = 1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} m q^{m^2} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu+1}(m+\mu) q^{m^2+2m\mu},$$

$$(2)\quad \theta\eta^3 = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{m+\mu}(m+\mu-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}},$$

$$(3)\quad \theta_1\theta^3 = 1 - 4\sum_{m=1}^{m=\infty} m q^{m^2} - 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(m+\mu) q^{m^2+2m\mu},$$

$$(4)\quad \theta_1\eta^3 = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(m+\mu-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+\frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}},$$

$$(5)\quad \eta\theta^3 = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu}(2m+2\mu-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu},$$

$$(6)\quad \eta\theta_1^3 = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(2m-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}(2m+2\mu-1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}+(2m-1)\mu}.$$

104. Si $m^2 + 2m\mu = n$ n'est pas un carré parfait, la formule (1) devient

$$\theta\theta_1^3 = 1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^{m+1} m q^{m^2} + 8\sum \mathrm{T}_n^{(1)} q^n,$$

$$\mathrm{T}_n^{(1)} = -\sum(-1)^{\frac{\delta+\delta'}{2}}\frac{\delta+\delta'}{2};$$

δ et δ' sont des diviseurs conjugués de n, et $\delta > \sqrt{n}$.

On a de même

$$\theta\eta^3 = 8\sum \mathrm{T}_n^{(2)} q^{\frac{n}{4}},$$

où

$$\mathrm{T}_n^{(1)} = -\sum(-1)^{\frac{\delta+\delta'}{4}}\frac{\delta+\delta'}{4},\quad n \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ 2),\ \delta > \sqrt{n},$$

$$\theta_1\theta^3 = 1 - 4\sum_{m=1}^{m=\infty} m q^{m^2} - 8\sum \mathrm{T}_n^{(3)} q^n,$$

où

$$T_n^{(3)} = \sum (-1)^{\frac{\delta - \delta'}{2}} \frac{\delta + \delta'}{4},$$

$$\theta_1 \eta_1^3 = 8 \sum T_n^{(4)} q^{\frac{n}{4}},$$

où

$$T_n^{(4)} = \sum \frac{\delta + \delta'}{4}, \quad n \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \ \delta > \sqrt{n};$$

$$\eta \vartheta^3 = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (2m - 1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4 \sum T_n^{(5)} q^{\frac{n}{4}},$$

où

$$T_n^{(5)} = + \sum (-1)^{\frac{\delta - \delta'}{4}} \frac{\delta + \delta'}{2}, \quad n \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \ \delta > \sqrt{n};$$

$$\eta \theta_1^3 = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} (2m - 1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}} + 4 \sum T_n^{(6)} q^{\frac{n}{4}},$$

où

$$T_n^{(6)} = \sum \frac{\delta + \delta'}{2}, \quad n \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \ \delta > \sqrt{n}.$$

105. Dans les développements des fonctions où figurent deux fonctions Θ de plus au dénominateur qu'au numérateur, on voit apparaître les éléments

$$F_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{2m^2 + 2m\mu} \cos 2\mu x,$$

$$F_2(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + (2m-1)\mu} \cos 2\mu x,$$

$$F_3(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{(2m-1)^2}{2} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x,$$

et d'autres analogues. Si l'on pose

$$\mathrm{F}_1(x) = \sum \mathrm{T}_n q^n, \quad \text{on a} \quad \mathrm{T}_n = \sum \cos(2\delta - \delta')x,$$

$$\mathrm{F}_2(x) = \sum \mathrm{U}_n q^{\frac{n}{2}}, \quad \text{on a} \quad \mathrm{U}_n = \sum \cos(\delta - \delta')x,$$

$$\mathrm{F}_3(x) = \sum \mathrm{V}_n q^{\frac{n}{2}}, \quad \text{on a} \quad \mathrm{V}_n = \sum \cos(\delta - \delta')x.$$

106. Si l'on considère les développements dans lesquels il figure trois fonctions Θ de plus au dénominateur qu'au numérateur, on voit se présenter les fonctions de la forme

$$\Phi_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{3m^2+2m\mu} \cos 2\mu x,$$

$$\Phi_2(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{3(2m-1)^2}{4} + (2m-1)\mu} \cos 2\mu x,$$

$$\Phi_3(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{\frac{3(2m-1)^2}{4} + \frac{(2m-1)(2\mu-1)}{2}} \cos(2\mu - 1)x,$$

et, en faisant

$$\Phi_1(x) = \sum \mathrm{T}_n q^n, \quad \text{on a} \quad \mathrm{T}_n = \sum \cos(\delta - 3\delta')x,$$

$$\Phi_2(x) = \sum \mathrm{U}_n q^{\frac{n}{4}}, \quad \text{on a} \quad \mathrm{U}_n = \sum \cos \frac{\delta - 3\delta'}{2} x,$$

$$\Phi_3(x) = \sum \mathrm{V}_n q^{\frac{n}{4}}, \quad \text{on a} \quad \mathrm{V}_n = \sum \cos \frac{\delta - 3\delta'}{2} x.$$

107. On voit donc apparaître des combinaisons très-diverses des diviseurs conjugués δ et δ' du nombre donné n, et il semble difficile de formuler une loi qui embrasse tous les cas; mais, si l'on s'astreint à n'introduire dans les formules que la seule forme $\frac{n}{4}$ de l'exposant, on voit se révéler une loi très-simple, à savoir :

Pour les fonctions qui renferment au numérateur m facteurs Θ *de plus* *qu'au dénominateur, on voit figurer sous les sinus et cosinus la seule combinaison* $\frac{\delta + m\delta'}{2}$ *des diviseurs* δ *et* δ' *conjugués de* n, n *étant le quadruple de l'exposant de* q.

Pour les fonctions qui renferment au dénominateur m *facteurs* Θ *de plus qu'au numérateur, c'est la combinaison* $\frac{\delta - m\delta'}{2}$ *des diviseurs conjugués de* n *qui se présente,* n *étant toujours le quadruple de l'exposant de* q.

Quant aux fonctions qui renferment au numérateur autant de facteurs Θ *qu'au dénominateur,* m *devra être pris égal à zéro.*

C'est donc la combinaison $\frac{\delta \pm m\delta'}{2}$ *qu'il convient d'adopter comme caractérisant chaque espèce de développements.*

108. Pour montrer que les fonctions où figurent au numérateur deux facteurs Θ de plus qu'au dénominateur rentrent dans la règle précédente, considérons le développement de $\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}$, à savoir :

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}-\frac{4\mu^2}{2}} \sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{4m^2}{2}-\frac{(2\mu-1)^2}{2}} \sin 4mx.$$

Si l'on pose

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}-\frac{4\mu^2}{2}} \sin(4m+2)x = \sum \mathrm{T}_n q^{\frac{n}{4}},$$

on aura

$$2[(2m+1)^2 - 4\mu^2] = n,$$

$$2(2m+2\mu+1)(2m-2\mu+1) = n;$$

posant

$$\delta = 4m + 4\mu + 2, \quad \delta' = 2m - 2\mu + 1,$$

on aura

$$\delta + 2\delta' = (4m+2)2, \quad \text{d'où} \quad \frac{\delta + 2\delta'}{2} = 4m + 2,$$

on a donc

$$\mathrm{T}_n = \sum \sin \frac{\delta + 2\delta'}{2} x, \quad n \equiv 2 \pmod{8},$$

et δ est un diviseur pair de n.

Posant de même

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{4m^2}{2} - \frac{(2\mu-1)^2}{2}} \sin 4mx = \sum \mathrm{U}_n q^{\frac{n}{4}},$$

on aura

$$2[4m^2 - (2\mu - 1)^2] = n,$$

$$2(2m + 2\mu - 1) = \delta,$$

$$2m - 2\mu + 1 = \delta',$$

$$4m = \frac{\delta + 2\delta'}{2},$$

et, par suite,

$$\mathrm{U}_n = \sum \sin \frac{\delta + 2\delta'}{2} x, \quad n \equiv -2 \pmod{8},$$

et δ est un diviseur pair de n.

Les fonctions $\mathrm{Z}^{(1)}(x)$, $\mathrm{U}^{(1)}(x)$, ... qui ont été étudiées fournissent la même combinaison $\frac{\delta + 2\delta'}{2}$.

109. Parmi celles qui semblaient faire exception à la règle se trouvent encore les fonctions

$$f_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{m^2 + 2m\mu} \cos 2\mu x,$$

$$\mathrm{F}_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{2m^2 + 2m\mu} \cos 2\mu x,$$

$$\Phi_1(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} q^{3m^2 + 2m\mu} \cos 2\mu x.$$

Posant

$$f_1(x) = \sum S_n q^{\frac{n}{4}}, \quad \text{on a} \quad S_n = \sum \cos \frac{\delta - \delta'}{2} x,$$

$$F_1(x) = \sum T_n q^{\frac{n}{4}}, \quad \text{on a} \quad T_n = \sum \cos \frac{\delta - 2\delta'}{2} x,$$

$$\Phi_1(x) = \sum U_n q^{\frac{n}{4}}, \quad \text{on a} \quad U_n = \sum \cos \frac{\delta - 3\delta'}{2} x.$$

En effet : 1° si $4(m^2 + 2m\mu) = n$, on aura $2m(2m + 4\mu) = n$,

$$\delta = 2m + 4\mu, \quad \delta' = 2m, \quad \delta - \delta' = 4\mu, \quad \frac{\delta - \delta'}{2} = 2\mu;$$

2° Si $4(2m^2 + 2m\mu) = n$, on aura $2m(4m + 4\mu) = n$,

$$\delta = 4m + 4\mu, \quad \delta' = 2m, \quad \delta - 2\delta' = 4\mu, \quad \frac{\delta - 2\delta'}{2} = 2\mu;$$

3° Si $4(3m^2 + 2m\mu) = n$, on aura $2m(6m + 4\mu) = n$,

$$\delta = 6m + 4\mu, \quad \delta' = 2m, \quad \delta - 3\delta' = 4\mu, \quad \frac{\delta - 3\delta'}{2} = 2\mu.$$

Ces exemples suffisent pour montrer comment on ferait voir que toutes les formes trouvées rentrent dans la loi générale énoncée plus haut.

110. M. Liouville, dans ses travaux sur les fonctions numériques, a été conduit à considérer des combinaisons de la forme $\delta + \delta'$, $\delta + 2\delta'$ des diviseurs conjugués d'un nombre, et ces quantités figurent dans des expressions analogues à celles que nous avons trouvées plus haut; elles interviennent sous la forme $\sum f(\delta + \delta')$, $\sum f(\delta + 2\delta')$, où f est une fonction arbitraire. Il n'est pas fait mention, dans les formules de M. Liouville, de combinaisons plus complexes, analogues aux précédentes et se rapportant à deux diviseurs conjugués d'un même nombre, telles que $\sum f\left(\frac{\delta \pm m\delta'}{2}\right)$ par exemple, que nous avons rencontrées. Notons encore que c'est précisément dans la décomposition du nombre en une somme de trois carrés que la combinaison $\sum f(\delta + \delta')$ s'offre dans les formules de M. Liouville.

111. Nous allons ajouter quelques autres applications des formules qui ont été établies.

Nous avons trouvé

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m+1} \sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin 4mx,$$

$$\frac{\Theta(z)\,\mathrm{H}_1(z)\,\Theta_1(z)}{\mathrm{H}(z)} = \frac{1}{\operatorname{tang} x} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin 4mx.$$

Si l'on fait dans ces formules $x = \frac{\pi}{4}$, ou $z = \frac{\mathrm{K}}{2}$, il viendra

$$\frac{\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m+1}(-1)^m,$$

$$\frac{\Theta\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right)} = 1 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m}(-1)^m,$$

où

$$\mathfrak{a}_{2m+1} = 1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{4m^2}{2}},$$

$$\mathfrak{a}_{2m} = 2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}.$$

On sait que

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}-z) = \mathrm{H}_1(z), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = \mathrm{H}_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right);$$

de même,

$$\Theta\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = \Theta_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right);$$

les formules précédentes deviennent donc

$$\mathrm{H}_1^2\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + 2q^{-\frac{4^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{4m^2}{2}}\right),$$

$$\Theta_1^2\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = 2\sum_{m=1}^{m=\infty}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left(2q^{-\frac{1}{2}} + 2q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right).$$

Or

$$\mathrm{H}_1(z) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\cos(2m+1)x,$$

d'où

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\cos\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Si m est pair et égal à 2μ,

$$\cos\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^\mu\cos\frac{\pi}{4} = (-1)^\mu\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si m est impair et égal à $2\mu+1$,

$$\cos\left(m\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^\mu\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{\mu+1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

d'où

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = \sqrt{2}\left[\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}(-1)^\mu q^{\frac{(4\mu+1)^2}{4}} + \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}(-1)^{\mu+1} q^{\frac{(4\mu+3)^2}{4}}\right].$$

On a aussi

$$\Theta_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\cos 2mx,$$

$$\Theta_1\left(\frac{\mathrm{K}}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}\cos m\frac{\pi}{2}.$$

Pour des valeurs impaires de m, $\cos m\frac{\pi}{2} = 0$; pour $m = 2\mu$,

$\cos m\frac{\pi}{2} = (-1)^\mu$; par suite,

$$\Theta_1\left(\frac{K}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{4\mu^2}(-1)^\mu.$$

On obtient donc les deux identités

$$(a)\quad \left[\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(4\mu+1)^2}{4}} + (-1)^{\mu+1} q^{\frac{(4\mu+3)^2}{4}}\right]^2 = \sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} (-1)^m \left(1 + 2q^{-\frac{2^2}{2}} + \ldots + 2q^{-\frac{4m^2}{2}}\right),$$

$$(b)\quad \left[\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{4\mu^2}\right]^2 = 1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} (-1)^m \left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{9}{2}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right).$$

112. Considérons la première (a). Un terme quelconque de $\left[H_1\left(\frac{K}{2}\right)\right]^2$ a l'une des trois formes

$$(-1)^{\mu+\mu'} q^{\frac{(4\mu+1)^2}{4} + \frac{(4\mu'+1)^2}{4}},$$

ou bien

$$(-1)^{\mu+\mu'} q^{\frac{(4\mu+3)^2}{4} + \frac{(4\mu'+3)^2}{4}},$$

ou enfin

$$2(-1)^{\mu+\mu'+1} q^{\frac{(4\mu+1)^2}{4} + \frac{(4\mu'+3)^2}{4}}.$$

Si donc on désigne par μ_1, μ'_1 une solution entière positive de l'équation

$$(4\mu+1)^2 + (4\mu'+1)^2 = 2N,$$

par μ_2, μ'_2 une solution entière et positive de l'équation

$$(4\mu+3)^2 + (4\mu'+3)^2 = 2N,$$

et enfin par μ_3, μ'_3 une solution entière et positive de l'équation

$$(4\mu+1)^2 + (4\mu'+3)^2 = 2N,$$

le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ dans le premier membre sera

$$\sum (-1)^{\mu_1+\mu'_1} + \sum (-1)^{\mu_2+\mu'_2} - 2\sum (-1)^{\mu_3+\mu'_3};$$

le second membre de l'égalité (a) est de la forme

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2} - 2m'^2},$$

m' variant de $-m$ à $+m$, et m de o à $+\infty$.

Si l'on pose

$$\frac{(2m+1)^2}{2} - 2m'^2 = \frac{N}{2},$$

$$(2m+1)^2 - 4m'^2 = N,$$

ou bien

$$(2m+1-2m')(2m+1+2m') = N,$$

N est $\equiv 1$ (mod. 4). Si l'on fait $N = \delta\delta'$, les facteurs δ et δ' seront $\equiv 1$ (mod. 4), ou les deux $\equiv -1$ (mod. 4); le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ sera donc

$$\sum (-1)^m, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum (-1)^{\frac{\delta+\delta'-2}{4}},$$

δ et δ' étant deux diviseurs conjugués de N.

Par suite, on aura l'équation

$$\sum (-1)^{\mu_1+\mu'_1} + \sum (-1)^{\mu_2+\mu'_2} - 2\sum (-1)^{\mu_3+\mu'_3} = \sum (-1)^{\frac{\delta+\delta'-2}{4}}.$$

113. Considérons en second lieu l'équation

$$\left[\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{4\mu^2}\right]^2 = 1 + 4\sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \left(q^{-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{3^2}{2}} + \ldots + q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right).$$

Un terme quelconque du carré qui figure dans le premier membre est

$$(-1)^{\mu+\mu'} q^{4\mu^2+4\mu'^2};$$

le coefficient de q^{4N} dans le premier membre est donc

$$\sum (-1)^{\mu_1+\mu'_1},$$

μ_1 et μ'_1 étant une solution entière quelconque de l'équation

$$\mu^2 + \mu'^2 = N.$$

Un terme quelconque du second membre est de la forme

$$(-1)^m 4 q^{\frac{(2m+1)^2}{2} - \frac{(2m'-1)^2}{2}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{(2m+1)^2}{2} - \frac{(2m'-1)^2}{2} = 4\mathrm{N},$$

il viendra successivement

$$\begin{aligned}
&(2m+1)^2 - (2m'-1)^2 = 8\mathrm{N},\\
&(2m+1+2m'-1)(2m+1-2m'+1) = 8\mathrm{N},\\
&(m+m')(m-m'+1) = 2\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Faisant

$$m + m' = \delta, \quad m - m' + 1 = \delta',$$

l'un des facteurs δ ou δ' est toujours pair, et l'on aura

$$m = \frac{\delta + \delta' - 1}{2};$$

par suite, le coefficient de $q^{4\mathrm{N}}$ dans le second membre sera

$$\sum 4(-1)^{\frac{\delta+\delta'-1}{2}},$$

et l'on aura

$$\sum (-1)^{\alpha_1+\alpha'_1} = 4 \sum (-1)^{\frac{\delta+\delta'-1}{2}}.$$

114. Revenons à l'équation

$$\frac{\mathrm{H}(z)\,\Theta_1(z)\,\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)} = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m+1} \sin(4m+2)x + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} q^{\frac{4m^2}{2}} \mathfrak{a}_{2m} \sin 4mx.$$

Divisons les deux membres de cette équation par x et faisons ensuite $x = 0$,

$$\frac{\mathrm{H}(z)}{x} = \frac{\mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)}{x} = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)}{\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}};$$

pour $x = o$, $\frac{\mathbf{H}(z)}{x}$ devient donc

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{H}'(o) \quad \text{ou} \quad \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\sqrt{k}\,\Theta(o);$$

le premier membre devient donc $\theta_1^2\eta^2$; par suite,

$$\theta_1^2\eta^2 = 2\sum_{m=0}^{m=\infty}(4m+2)q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\mathfrak{a}_{2m+1} + 8\sum_{m=1}^{m=\infty} mq^{\frac{4m^2}{2}}\mathfrak{a}_{2m}.$$

Comme l'on a

$$\theta_1 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2}, \quad \eta = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}},$$

le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ dans le premier membre est le nombre des solutions entières, tant positives que négatives, de l'équation

$$4m^2 + 4m'^2 + (2m_1+1)^2 + (2m'_1+1)^2 = 2\mathrm{N},$$

dont le premier membre est une somme de quatre carrés dont deux sont pairs et les deux autres impairs. Soit $\mathfrak{N}$ ce nombre de solutions. Un terme quelconque du développement de

$$2\sum_{m=0}^{m=\infty}(4m+2)q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\mathfrak{a}_{2m+1}$$

est de la forme

$$4(2m+1)q^{\frac{(2m+1)^2}{2}-2m'^2},$$

m' variant de $-m$ à $+m$.

Si l'on pose

$$\frac{(2m+1)^2}{2} - 2m'^2 = \frac{\mathrm{N}}{2},$$

il viendra successivement

$$(2m+1)^2 - 4m'^2 = \mathrm{N}, \quad (2m+2m'+1)(2m-2m'+1) = \mathrm{N},$$

ou

$$\delta\delta' = \mathrm{N},$$

en faisant

$$\delta = 2m+2m'+1, \quad \delta' = 2m-2m'+1.$$

N est un nombre impair $\equiv 1 \pmod{4}$, et les facteurs δ et δ' sont $\equiv 1 \pmod{4}$ tous les deux ou $\equiv -1 \pmod{4}$.

On en tire

$$4m + 2 = \delta + \delta';$$

par suite, le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ sera, dans le premier développement,

$$2\sum(\delta + \delta').$$

Considérons maintenant la seconde partie, savoir

$$8\sum_{m=1}^{m=\infty} mq^{\frac{4m^2}{2}} \mathrm{a}_{2m} = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=+m} q^{\frac{4m^2}{2} - \frac{(2\mu-1)^2}{2}};$$

le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ sera

$$2\sum(\delta_1 + \delta'_1),$$

δ_1 et δ'_1 étant deux diviseurs quelconques de $N \equiv -1 \pmod{4}$. On a donc, quel que soit N, qu'il soit $\equiv 1 \pmod{4}$ ou $\equiv -1 \pmod{4}$,

$$\mathfrak{N} = 2\sum(\delta + \delta') \quad \text{ou} \quad \mathfrak{N} = 4\sum\delta,$$

en excluant le cas où N serait carré parfait, ce qui donne un théorème connu.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 décembre 1878.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 21 décembre 1878.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

THÈSE D'ALGÈBRE[1].

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

Vu et approuvé :
Paris, le 20 décembre 1878.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :
Paris, le 21 décembre 1878.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

(1) Cette Thèse d'Algèbre est imprimée à part.

5084 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.