2e Division

1869-70

Résumé

du

Cours d'Analyse de Mr Hermite.

Les éléments des Mathématiques présentent deux divisions bien tranchées; d'une part, l'Arithmétique et l'Algèbre, de l'autre, la Géométrie. Rien de plus différent, à leur début, que les considérations et les méthodes propres à ces deux parties d'une même science, et bien qu'associées dans la Géométrie analytique, elles restent essentiellement distinctes si loin qu'on les poursuive, et paraissent se rapporter à des aptitudes et des tendances intellectuelles spéciales. Ce double point de vue de l'Algèbre et de la Géométrie se retrouve dans le Calcul différentiel et le Calcul intégral; on peut dire en effet de ces nouvelles branches des mathématiques qu'elles sont comme une Algèbre plus vaste et plus féconde, appliquées à des questions de géométrie inaccessibles au calcul élémentaire, telles que la quadrature des courbes, la détermination des volumes limités par des surfaces quelconques, la rectification des courbes planes ou gauches &ca.

Cet aperçu ne justifie point au premier abord la dénomination souvent employée, de calcul infinitésimal, qui semble annoncer une étude et une science de l'infini, résultant d'un rôle plus étendu de cette notion que dans les éléments. En réalité, le rôle de l'infini, dans ces régions élevées des mathématiques, est en entier résumé dans un petit nombre de propositions du caractère le plus simple, et telles qu'on pourrait les énoncer et les démontrer dès le commencement de la Géométrie. C'est l'application répétée de ces mêmes propositions qui constitue ce qu'on nomme la méthode infinitésimale, méthode qui sera bientôt exposée, et dont il sera donné dans ce Cours de nombreux exemples. Mais, dès à présent, nous devons dire qu'en se montrant de plus en plus féconde, la notion de l'infini reste toujours simplement la notion d'une grandeur supérieure à toute grandeur donnée, et que les conditions de son emploi restent toujours celles des éléments de la géométrie. Autant que peut le donner un premier aperçu, l'objet de ces leçons est donc une continuation de l'Algèbre, en y joignant quelques principes très élémentaires sur l'infini, et qui donnent le moyen de résoudre par le calcul des questions de Géométrie dont il a été parlé précédemment. Avant d'entrer en matière, il est donc naturel de jeter un coup-d'œil sur l'Algèbre afin de ne laisser aucune solution de continuité entre ce Cours et l'enseignement qui l'a précédé.

Je rappellerai d'abord qu'on a commencé par étendre aux quantités littérales les opérations ordinaires de l'Arithmétique, addition, soustraction, multiplication et division. On traite ensuite de la résolution des équations et système d'équations du premier degré, et on aborde enfin les équations de degré quelconque. Or, à propos de la division algébrique, apparaît déjà la considération toute spéciale des polynômes ordonnés par rapport aux puissances d'une variable, dont l'étude plus approfondie constitue précisément ce qu'on nomme la théorie générale des équations. Les éléments d'Algèbre ont donc pour principal objet les propriétés des fonctions rationnelles et entières d'une variable, et ils conduisent ainsi à l'Analyse, c'est à dire à l'étude générale des fonctions. Ce qui concerne la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues se rattache d'ailleurs au même point de vue, car alors, on ne fait au fond qu'établir certaines propriétés d'un système de fonctions linéaires de plusieurs variables. Mais ici il importe de rendre parfaitement clair ce qu'on entend dire par étude générale des fonctions.

Il a été question tout à l'heure de polynômes; or, les éléments conduisent encore à d'autres expressions qu'on nomme transcendantes, par exemple l'exponentielle et le logarithme, et en second lieu, le sinus, le cosinus, la tangente d'un arc. Les premières sont étudiées en Algèbre même, et les autres sont le sujet de la Trigonométrie, qui n'est visiblement qu'un chapitre spécial d'Algèbre, donnant, parmi bien d'autres conséquences, la résolution numérique des triangles. Maintenant on peut poser cette question: N'existe-t-il de fonctions que celles dont nous venons de parler, et leurs combinaisons? Si la réponse était affirmative, l'analyse laisserait apercevoir ses bornes, son champ serait fini et limité, mais il est bien loin d'en être ainsi, le calcul différentiel et le calcul intégral étendent indéfiniment son domaine en fournissant l'origine et posant la base de l'étude d'un nombre infini de fonctions nouvelles. Ainsi on comprend que Lagrange ait donné à l'un de ses ouvrages, qui est précisément consacré à une exposition des principes du calcul différentiel et du calcul intégral ~~de~~ le titre Leçons sur le Calcul des fonctions. En suivant la pensée de ce grand géomètre, nous allons présenter sur les fonctions connues par les éléments quelques considérations qui serviront d'introduction à ce cours, et dont il sera souvent fait usage par la suite.

Préliminaires.

Les fonctions se divisent en deux catégories, suivant qu'elles sont algébriques ou transcendantes, et voici d'abord la définition des premières. Une quantité y sera dite, dans le sens le plus général, fonction algébrique de x, quand elle satisfera à une équation :

$$F(x, y) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme rationnel et entier par rapport à l'inconnue y et à la variable indépendante x. Les fonctions transcendantes sont toutes celles qui ne peuvent satisfaire à la condition précédente, comme : $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, et une infinité d'autres. Nous allons d'abord nous occuper des premières. Lorsque l'équation ci-dessus : $F(x, y) = 0$ est du premier degré, elle donne pour y le quotient de deux polynômes ; c'est le cas des fonctions rationnelles, ou simplement un polynôme, c'est le cas des fonctions entières, dont les propriétés sont établies dans les éléments de l'Algèbre. A l'égard des fonctions rationnelles, le fait le plus important, et qui joue dans l'analyse un grand rôle, consiste en ce qu'elles sont décomposables en une somme de termes de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$ qu'on nomme fractions simples. Nous allons le rappeler succinctement pour en indiquer ensuite quelques conséquences.

Fonctions rationnelles.

I. Soient $F(x)$ et $F_1(x)$ deux polynômes entiers de degrés quelconques et sans facteurs linéaires communs. En posant :

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots\ldots (x-l)^{\lambda}$$

de sorte que les exposants $\alpha, \beta, \ldots \lambda$, soient respectivement les degrés de multiplicité des facteurs $x-a$, $x-b$, ... $x-l$, la formule de décomposition de la fonction : $f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)}$ consiste dans cette égalité :

$$f(x) = P + \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}$$
$$+ \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^\beta}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{L}{x-l} + \frac{L_1}{(x-l)^2} + \cdots\cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)^\lambda}$$

où P est la partie entière du quotient de $F_1(x)$ par $F(x)$ ce qui donne une détermination immédiate et directe de ce polynôme. Pour obtenir les numérateurs des fractions simples, écrivons la fonction proposée de cette manière, savoir :

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

le terme $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ étant formé de la réunion de la partie entière P avec toutes les fractions qui ne contiennent pas $x-a$ en dénominateur. Il s'ensuit que ce binome n'entre pas en facteur dans $\varphi(x)$, de sorte qu'en posant : $x = a + h$, ce qui donnera :

$$f(a+h) = \frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

le terme indépendant de h dans l'expression :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h}{1}\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \cdots\cdots$$

sera différent de zéro. En divisant $\varphi_1(a+h)$ par $\varphi(a+h)$ après avoir ordonné les deux polynomes suivant les puissances croissantes de h, le quotient obtenu d'après les règles de l'Algèbre ne contiendra donc que des puissances positives de cette quantité. Ainsi les termes :

$$\frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{h^\alpha}$$

représenteront précisément la portion du développement suivant les puissances ascendantes de $f(a+h)$ qui contient les puissances négatives de h.

Soit, par exemple, la fonction $\frac{1}{(x^2-1)^\alpha}$, dont la décomposition en fractions simples sera utilisée dans le calcul intégral, et écrivons :

$$\frac{1}{(x^2-1)^\alpha} = \frac{A}{x-1} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-1)^\alpha}$$

$$+ \frac{B}{x+1} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_{\alpha-1}}{(x+1)^\alpha}$$

En posant d'abord $x = 1+h$, d'où :

$$\frac{1}{(x^2-1)^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha(2+h)^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha}(2+h)^{-\alpha}$$

on voit que le développement à effectuer dépend de la formule du binôme dans le cas de l'exposant négatif. Or, nous parviendrons bientôt à cette extension si importante de la formule obtenue pour un exposant entier et positif, et qui permettra d'écrire la suite infinie :

$$(2+h)^{-\alpha} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{1}\frac{h}{2^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{h^2}{2^{\alpha+2}} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3.}\frac{h^3}{2^{\alpha+3}} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + (-1)^i \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+1-i)}{1.2\cdots\cdots i}\frac{h^i}{2^{\alpha+i}}$$

d'où :

$$\frac{1}{h^\alpha}(2+h)^{-\alpha} = \frac{1}{2^\alpha h^\alpha} - \frac{\alpha}{1}\frac{1}{2^{\alpha+1}h^{\alpha-1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{1}{2^{\alpha+2}h^{\alpha-2}} - \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + (-1)^{\alpha-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(2\alpha-2)}{1.2\cdots\cdots\alpha-1}\frac{1}{2^{2\alpha-1}h} + \cdots\cdots\cdots$$

et par conséquent ces valeurs :

$$A_{\alpha-1} = +\frac{1}{2^\alpha}$$

$$A_{\alpha-2} = -\frac{\alpha}{1}\frac{1}{2^{\alpha+1}}$$

$$A_{\alpha-3} = +\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{1}{2^{\alpha+2}}$$

$$\vdots$$

$$A = (-1)^{\alpha-1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(2\alpha-2)}{1.2\cdots\cdots\alpha-1}\frac{1}{2^{2\alpha-1}}$$

Quant aux numérateurs B, B_1, &^{ca} ils se déduiront immédiatement des précédents par la relation

$$B_{i-1} = (-1)^i A_{i-1}.$$

II. Dans l'ensemble des fractions simples, telles que $\frac{A_{m-1}}{(x-a)^m}$, on doit distinguer tout particulièrement celles où l'exposant m est égal à l'unité. Le numérateur A de ces fractions a reçu de Cauchy un nom particulier ; l'illustre géomètre l'appelle le résidu de la fonction considérée $f(x)$, relatif à la quantité a, et de ce qui précède résulte qu'on peut le définir sous un autre point de vue, comme le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de $f(a+h)$ suivant les puissances ascendantes de h. C'est seulement dans le calcul intégral qu'on pourra apprécier l'importance de cette notion analytique des résidus ; en ce moment, je me bornerai à indiquer l'application qu'elle reçoit dans ce théorème de Lagrange. Reprenant la fonction rationnelle générale : $f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)}$, je dis que le groupe des fractions simples :

$$\frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}$$

est le résidu de l'expression :

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h}$$

où l'on considère comme variable la quantité h, relativement à la valeur $h=0$.

En effet, le développement de $f(a+h)$ résulte comme on l'a vu plus haut de l'équation :

$$f(a+h) = \frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

on a d'ailleurs par la simple division :

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \cdots\cdots \frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha} + \cdots\cdots$$

de sorte qu'il reste seulement à chercher le coefficient de $\frac{1}{h}$, dans le produit de ces deux séries, ordonné suivant les puissances croissantes de cette quantité. Or, on peut, dans la première, faire abstraction du terme

$\frac{\varphi_1(a+h)}{\varphi(a+h)}$ dont le développement ne fournit que des puissances positives, et on trouve bien pour le coefficient cherché la valeur :

$$\frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}$$

Ce théorème est remarquable comme donnant pour la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples, une expression analytique qui conserve le même énoncé dans le cas des facteurs linéaires simples ou multiples du dénominateur.

III. Comme dernière remarque sur les fonctions rationnelles, j'observerai que la décomposition en fractions simples, permet de former immédiatement leurs dérivées d'ordre quelconque. La question se réduit en effet à obtenir la dérivée n^e de la quantité

$$y = \frac{1}{(x-a)^K}$$

qu'on trouve en l'écrivant sous cette forme :

$$y = (x-a)^{-K}$$

car, il vient ainsi successivement :

$$y' = -K(x-a)^{-K-1}$$

$$y'' = +K(K+1)(x-a)^{-K-2}$$

$$y''' = -K(K+1)(K+2)(x-a)^{-K-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et en général :

$$y^{(n)} = (-1)^n K(K+1)\ldots(K+n-1)(x-K)^{-K-n}$$

Prenons comme exemple :

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2-a^2}$$

la règle ordinaire donnerait ces expressions :

$$f'(x) = -\frac{Ax^2+2Bx+Aa^2}{(x^2-a^2)^2}$$

$$f''(x) = 2\,\frac{Ax^3+3Bx^2+3Aa^2x+Ba^2}{(x^2-a^2)^3}$$

dont la loi n'est point manifeste, tandis qu'en posant :

$$f(x) = \frac{1}{2a}\left[\frac{Aa+B}{x-a} + \frac{Aa+B}{x+a}\right]$$

on obtiendra de suite :

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^n}{2a}\left[\frac{Aa+B}{(x-a)^{n+1}} + \frac{Aa-B}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

Soit en particulier $a=\sqrt{-1}$, $A=0$, $B=1$, on sera amené à l'expression :

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}}\right]$$

qui prend une forme très-simple, si l'on pose : $x = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Nous aurons en effet :

$$\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\sin^{n+1}\varphi}{(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1}} = \sin^{n+1}\varphi\left[\cos(n+1)\varphi+\sqrt{-1}\sin(n+1)\varphi\right]$$

$$\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{\sin^{n+1}\varphi}{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1}} = \sin^{n+1}\varphi\left[\cos(n+1)\varphi-\sqrt{-1}\sin(n+1)\varphi\right]$$

et par conséquent :

$$\frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = (-1)^n\sin^{n+1}\varphi.\sin(n+1).\varphi.$$

En remarquant que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est la dérivée de arc tang x, on voit qu'on a ainsi obtenu la dérivée d'ordre $n+1$ de cette fonction[1].

---

(1) Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral de M. Bertrand, Tome I, page 143.

Fonctions algébriques.

L'étude des fonctions algébriques non rationnelles, définies comme racines de l'équation $F(x, y) = 0$, conduit à un grand nombre de beaux résultats appartenant à la fois à l'Algèbre et au Calcul intégral, et qui mettent ainsi en évidence une étroite liaison entre ces deux parties au premier abord, si éloignées de l'Analyse. Quelques-uns de ces résultats, dont nous aurons plus tard à faire usage, s'obtiennent très-facilement, et nous allons les donner en présentant d'abord quelques remarques préliminaires.

I. Soit : $F(x) = 0$

une équation de degré n, je dis qu'en désignant par $f(x)$ une fonction rationnelle quelconque, et posant :

$$y = f(x)$$

cette nouvelle quantité y appartiendra encore à une équation de degré n.

Soient en effet : $a, b, c, \ldots\ldots l$, les diverses racines de l'équation considérée, toutes les déterminations de y, seront évidemment :

$$f(a), f(b), f(c) \ldots\ldots f(l)$$

c'est à dire, précisément au nombre de n, ainsi l'équation transformée en y sera bien du même degré que la proposée. De cette observation si simple suit une conséquence importante. Considérons d'abord, pour fixer les idées, l'ensemble des équations d'un degré donné dont les coefficients sont des nombres entiers. Leur nombre est infiniment grand, mais elles ne se trouvent point dans une complète indépendance les unes par rapport aux autres ; ce qu'on vient d'établir conduit en effet à réunir dans une même classe, toutes celles qui se déduisent d'une d'entre elles, $F(x) = 0$ par la substitution $y = f(x)$. Le degré sera d'abord le même, et leurs coefficients encore entiers, si les polynomes en x qui entrent au numérateur et au dénominateur de $f(x)$ sont à coefficients entiers. On voit qu'ainsi, la résolution de l'équation $F(x) = 0$ entraînera la résolution de toutes celles de la classe, et sous un point de vue plus général, on pourra dire qu'on a, de la sorte, réuni les équations dont les racines sont de même nature et contiennent les mêmes irrationalités. C'est à la théorie des nombres ou à l'Arithmétique supérieure qu'appartient le développement de cette idée, indiquée ici en quelques mots, et l'on donne plus particulièrement le nom de théorie des formes à l'ensemble des recherches qui se rapportent à ce beau et vaste sujet.

A l'égard des équations entre deux variable $F(x,y)=0$, il existe une considération analogue mais plus difficile et plus profonde, et je me bornerai à établir la notion de classe, en énonçant seulement, d'après Riemann, la condition suivante :

Deux équations : $F(x,y)=0$ $F_1(u,v)=0$ appartiendront à la même classe lorsqu'on pourra passer de la première à la seconde en posant :

$$u=f(x,y) \qquad v=f_1(x,y)$$

les fonctions f et f_1 étant rationnelles en x et y, et telles qu'inversement on puisse exprimer x et y en fonction rationnelle de u et v.(1)

II. Je dis que toute fonction rationnelle : $f(x)$ d'une racine d'une équation de degré n : $F(x)=0$ est réductible à la forme d'un polynome de degré $n-1$, savoir :

$$f(x)=\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+\dots\dots\dots+\lambda$$

Supposons d'abord que $f(x)$ soit simplement une fonction entière, de sorte qu'on ait :

$$f(x)=A\,x^{\mu}+B\,x^{\mu-1}+\text{etc} \dots$$

et divisons ce polynome par $F(x)$, de manière à obtenir l'égalité :

$$f(x)=F(x)\times Q+R$$

ou Q désigne le quotient et R le reste. On en conclura pour toutes les racines de l'équation proposée $F(x)=0$

$$f(x)=R$$

C'est le résultat annoncé, attendu que le reste R est un polynome en x de degré moindre que le diviseur et au plus égal à $n-1$.

Supposons ensuite que $f(x)$ soit le quotient de deux polynomes, c'est à dire de la forme : $f(x)=\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$, et pour plus de simplicité, admettons que l'équation soit seulement du troisième degré. Si l'on désigne par a, b, c, ses racines, il s'agit alors de prouver qu'on peut déterminer les trois coefficients α, β, γ, de manière que l'égalité suivante :

(1) Riemann, Théorie des fonctions Abeliennes, § 12. Journal de Crelle 1857.

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

soit satisfaite en supposant successivement : $x = a$, $x = b$, $x = c$. Or, les équations :

$$f(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma$$

$$f(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma$$

$$f(c) = \alpha c^2 + \beta c + \gamma$$

ne présenteront jamais, ni impossibilité, ni indétermination, car le dénominateur commun des valeurs des inconnues est le déterminant du système :

$$\begin{Bmatrix} a^2, & a, & 1 \\ b^2, & b, & 1 \\ c^2, & c, & 1 \end{Bmatrix}$$

c'est à dire, au signe près, le produit $(a-b)(a-c)(b-c)$, et ne s'évanouira que dans le cas de deux racines égales. Excluant ce cas, nous observerons que le système des trois équations ne change point, de quelque manière qu'on permute a, b, c ; par conséquent, les coefficients α, β, γ, sont des fonctions symétriques des racines, et s'exprimeront rationnellement au moyen des coefficients de l'équation proposée.

Le même raisonnement subsistera quel que soit le degré de cette équation, et la proposition est ainsi complètement démontrée.

III. Il ne sera pas inutile de donner, avant d'aller plus loin, quelques applications simples des considérations précédentes.

Soit donc l'équation :

$$x^3 - 5x^3 + 6x - 1 = 0$$

et posons :

$$y = x^2 - 4x + 4.$$

la transformée en y, que nous savons a priori devoir être du 3^e degré s'obtiendra en effet comme il suit.

Déduisons ces deux relations de la proposée, en multipliant successivement par x et x^2 les deux membres, savoir :

$$xy = x^3 - 4x^3 + 4x$$

$$x^2y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

puis, en employant la proposition du § précédent, ramenons les seconds membres à des trinômes du second degré, qui seront les restes obtenus en les divisant par $x^3 - 5x^3 + 6x + 1$. On parviendra ainsi aux 3 relations :

$$y = x^2 - 4x + 4$$
$$xy = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 y = 3x^2 - 5x + 1.$$

et en les écrivant de cette manière :

$$x^2 - 4x + 2 - y = 0$$
$$x^2 - x(2+y) + 1 = 0$$
$$x^2(3-y) - 5x + 1 = 0$$

on voit que l'équation cherchée s'obtiendra en égalant à zéro le détermi-nant du système :

$$\begin{Bmatrix} 1, & -4, & 4-y \\ 1, & -2-y, & 1 \\ 3-y & -5, & 1 \end{Bmatrix}$$

Or, on reproduit ainsi l'équation proposée, savoir :

$$y^3 - 5y^2 + 6y - 1 = 0.$$

d'où résulte que si a désigne une de ses racines, la quantité $a^2 - 4a + 4$ sera pareillement une racine, mais non la même, car l'égalité

$$a^2 - 4a + 4 = a$$

donnerait les valeurs inadmissibles l'une et l'autre $a = 1$, $a = 4$. Main-tenant on obtient par la formule connue :

$$3a = 5 + \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{21}{2}\sqrt{-3}}$$

et on en déduit :

$$9(a^2 - 4a + 4) = 8 - 2\sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{-3}} - 2\sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{21}{2}\sqrt{-3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\left[\frac{7}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{-3}\right]^2} + \sqrt[3]{\left[\frac{7}{2} - \frac{21}{2}\sqrt{-3}\right]^2}$$

ce qui doit le ramener à $9b$, en désignant par b une des deux autres ra-cines, savoir :

$$9\,b = 15 + 3\,\varepsilon\sqrt[3]{\tfrac{7}{2}+\tfrac{21}{2}\sqrt{-3}} + 3\,\varepsilon^2\sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\tfrac{21}{2}\sqrt{-3}}$$

ε étant l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité. C'est là un exemple de transformation où un système de quatre radicaux cubiques se réduit à deux seulement, qui échappe tout à fait aux règles du calcul élémentaire.

IV. La proposition démontrée au § II fait voir que toute fonction rationnelle $f(x,y)$ de la variable indépendante et d'une racine de l'équation de degré n : $F(x,y)=0$, est toujours réduite à la forme :

$$f(x,y) = \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} + \text{etc} \ldots\ldots$$

dont les coefficients sont rationnels en x. Mais c'est encore une autre forme, conséquence immédiate de la précédente, qu'on emploie dans une théorie importante du calcul intégral. Multiplions et divisons $f(x,y)$ par la dérivée prise par rapport à y du premier membre de l'équation proposée, il viendra :

$$f(x,y) = \frac{(\alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} + \ldots)\, F'_y(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

Or, en effectuant au numérateur la multiplication indiquée, on trouvera un polynome entier en y, qui se ramènera, comme on l'a déjà vu, au degré $n-1$. Par suite, il viendra :

$$f(x,y) = \frac{G y^{n-1} + H y^{n-2} + \ldots\ldots}{F'_y(x,y)}$$

G, H, etc, étant rationnels en x, c'est la forme employée pour la première fois par Abel, et qui figure dans les travaux de Riemann, de MM. Clebsh et Gordan. En l'appliquant au cas simple de l'équation :

$$y^2 = X$$

nous en déduirons l'expression suivante :

$$f(x,y) = \frac{G\sqrt{X} + H}{\sqrt{X}} = G + \frac{H}{\sqrt{X}}$$

et nous observons que la fonction rationnelle H étant décomposable en une partie entière, c'est à dire en termes tels que $a x^k$ et en fractions simples $\dfrac{A}{(x-a)^\alpha}$, il s'en suit que la partie irrationnelle de la fonction $f(x,y)$ se trouve pareillement décomposé en éléments qui seront de ces deux espèces savoir :

$$\frac{a x^K}{\sqrt{X}}, \quad \frac{A}{(x-a)^\alpha \sqrt{X}}$$

Ce résultat nous sera utile par la suite.

V. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que la forme extérieure en quelque sorte des fonctions algébriques irrationnelles, nous allons maintenant faire un pas de plus, en nous limitant d'ailleurs à cette même expression :

$$f(x, \sqrt{X})$$

où je supposerai X un polynôme entier de degré pair $2m$.

Soit alors en décomposant en facteurs linéaires :

$$X = A(x-a)(x-b)\dots\dots(x-l)$$

nous tirerons de cette transformation bien simple, savoir :

$$X = A(x-a)^{2m}\left(\frac{x-b}{x-a}\right)\left(\frac{x-c}{x-a}\right)\dots\dots\left(\frac{x-l}{x-a}\right)$$

une conséquence importante.

Posons en effet, en introduisant une nouvelle variable :

$$\frac{x-b}{x-a} = t$$

ce qui donne : $\qquad x = \dfrac{b-at}{1-t}$

nous en conclurons aisément :

$$\sqrt{X} = \frac{(b-a)^{\frac{m+2}{2}}}{(1-t)^m}\sqrt{A\,t\left[b-c-(a-c)t\right]\dots\dots\left[b-l-(a-l)t\right]}$$

et on voit que le nouveau radical carré fonction de t, ne renferme plus cette variable qu'au degré $2m-1$. Posons donc pour un instant :

$$T = A\,t\left[b-c-(a-c)t\right]\dots\dots\left[b-l-(a-l)t\right]$$

l'expression $f(x, \sqrt{X})$ se transformant en celle-ci :

$$f\left(\frac{b-at}{1-t}, \ \frac{(b-a)^{\frac{m+2}{2}}}{(1-t)^m}\sqrt{T}\right)$$

pourra se représenter simplement par :

$$\varphi\left(t, \sqrt{T}\right)$$

φ désignant encore une fonction rationnelle de la nouvelle variable et du radical $\sqrt{T}$. La substitution que nous venons d'employer a ainsi pour conséquence de ramener une catégorie d'irrationnelles algébriques à une autre de même espèce, mais plus simple. Soit par exemple, $m = 1$ et $X = A(x-a)(x-b)$; alors T se réduira à At, et l'on voit de suite qu'il suffira de poser $t = \theta^2$ pour faire disparaître le radical et obtenir une fonction rationnelle par rapport à θ. D'où ce résultat important que les irrationnelles dépendant de la racine carré d'un trinome du second degré, deviennent de simples fonctions rationnelles par la substitution:

$$x = \frac{b - a\theta^2}{1-\theta^2}.$$

VI. — Ce qui précède donne le premier exemple du procédé analytique le plus fécond pour l'étude des fonctions, et qui consiste dans la substitution d'une variable à une autre. Ce procédé ouvre en quelque sorte immédiatement un vaste champ de recherches intéressantes, car on demandera si la substitution employée tout à l'heure est seule propre à ramener l'expression considérée aux fonctions rationnelles, s'il n'existe pas de substitutions donnant le même résultat pour la racine carrée de polynomes de degré supérieur, ou permettant de ramener l'une à l'autre les racines carrées de polynomes de degrés différents. Je pose d'autant plus volontiers ces questions qu'elles peuvent servir à donner de l'étude des fonctions algébriques une idée plus précise et plus complète, et la première offrant l'occasion de montrer, jusqu'à un certain point, comment ce sujet est lié à un autre plus élevé, à la théorie des fonctions circulaires. Je vais y répondre succinctement. A cet effet, j'envisage le radical $\sqrt{x^2+1}$, qui exigerait, pour être rendu rationnel, la substitution imaginaire

$$x = \sqrt{-1}\ \frac{\theta^2-1}{\theta^2+1}$$

Posons: $\theta = \operatorname{tang}\varphi$ et: $x = \operatorname{tang} n\varphi$; on sait par la Trigonométrie que x sera exprimable rationnellement en θ si n est un nombre entier; j'ajoute que, si ce nombre est pair, le radical $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\cos n\varphi}$ sera également rationnel par rapport à θ. Car alors, $\cos n\varphi$ est un polynome entier en $\cos\varphi$ et ne renfermant que des puissances paires de cette quantité. Or, $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\theta^2}$, de sorte que $\cos n\varphi$ est bien alors rationnel en θ. Soit pour fixer les idées, $n = 2$; on aura: $x = \dfrac{2\theta}{1+\theta^2}$ et: $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \dfrac{1-\theta^2}{1+\theta^2}$

d'où : $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1+\theta^2}{1-\theta^2}$. De cette manière, on est donc parvenu à des substitutions débarrassées d'imaginaires, et en nombre infini.

VII. Mais complétons ce qui précède en voyant ce que donnerait l'hypothèse de n impair dans la substitution

$$x = \operatorname{tang}\left[n \operatorname{arc} \operatorname{tang} \theta\right]$$

Alors on sait que $\cos n\varphi$ ne contiendra que des puissances impaires de $\cos\varphi$,(1) de sorte qu'on peut écrire, en désignant par F, un polynome entier

$$\cos n\varphi = \cos\varphi \, F\left(\cos^2\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \; F\left(\frac{1}{1+\theta^2}\right)$$

Par conséquent : $\dfrac{1}{\cos n\varphi} = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\theta^2} \cdot f(\theta)$

$f(\theta)$ étant une fonction rationnelle, de sorte que la substitution employée reproduit en θ précisément la même irrationnelle algébrique qu'on avait en x. Soit par exemple $n = 3$, alors :

$$\cos 3\varphi = \cos\varphi \left(4\cos^2\varphi - 3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \left(\frac{4}{1+\theta^2} - 3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta}} \left(\frac{1-3\theta^2}{1+\theta^2}\right)$$

et la formule de substitution étant

$$x = \operatorname{tang}\left[3 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \theta\right] = \frac{3\theta - \theta^3}{1-3\theta^2}$$

on aura : $$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos 3\varphi} = \sqrt{1+\theta^2} \cdot \frac{1+\theta^2}{1-3\theta^2}$$

---

(1) On a en général (Lagrange, Leçons sur le Calcul des Fonctions, page 119.)

$$2\cos n\varphi = (2\cos\varphi)^n - \frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{n-2} + \frac{n.\,n-3}{1.\,2.}(2\cos\varphi)^{n-4} - \dots\dots$$

$$+ (-1)^i \, \frac{n(n-i-1)\,(n-i-2)\dots(n-2i+1)}{1.\,2\dots\dots\, i} (2\cos\varphi)^{n-2i} + \dots\dots$$

Ce résultat met en évidence un caractère algébrique remarquable des formules relatives à la multiplication des arcs, dans la théorie des fonctions circulaires ; en voici un autre de même nature. Posons : $\theta = \sin \varphi$ et $x = \sin n\varphi$, on sait que n étant encore un nombre entier impair, x sera un polynôme entier en θ du degré n. (1) Or, l'égalité employée tout à l'heure, savoir : $\cos n\varphi = \cos\varphi \, F(\cos^2\varphi)$ conduit à cette conséquence

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\theta^2}\, F(1-\theta^2)$$

Pour $n = 3$, par exemple, la relation entre x et θ, savoir :

$$x = 3\theta - 4\theta^3$$

donnera

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\theta^2}\,(1-4\theta^2)$$

La question suivante, qu'on est maintenant conduit à se poser, fera pleinement ressortir les rapports des questions algébriques concernant l'étude des radicaux carrés, avec la théorie des transcendantes.

VIII. Soit proposé d'exprimer x par un polynome en θ, de manière à avoir :

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\theta^2}\; T$$

T étant de même rationnel et entier en θ.

Je dis en premier lieu que les polynomes X et T sont premiers entre eux, c'est à dire qu'ils ne peuvent s'annuler à la fois pour une même valeur de θ. En effet, l'équation proposée montre que pour $T = 0$, on a $x^2 = 1$.

Désignons en second lieu les degrés de x et T par n et m, de sorte qu'en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de θ, on ait :

$$x = A\,\theta^n + \ldots\ldots, \quad T = B\,\theta^m + \ldots\ldots$$

on trouvera, en substituant dans l'équation proposée, élevant au carré et égalant dans les deux membres les termes du degré le plus élevé

$$A^2\,\theta^{2n} = B^2\,\theta^{2m+2}$$

et on en conclut :

$$m = n - 1$$
$$B = \pm A.$$

---

(1) Le polynome s'obtient en changeant φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$, dans la formule de la note précédente.

Cela posé, prenons par rapport à θ, les dérivées des deux membres de notre équation:

$$1 - x^2 = (1-\theta^2)\,T^2\,;$$

il viendra, en supprimant le facteur 2 :

$$-x\,x'_\theta = (1-\theta^2)\,T\,T' - \theta\,T^2$$
$$= T\left[(1-\theta^2)\,T' - \theta\,T\right]$$

d'où l'on voit que le polynôme T divise le produit $x\,x'_\theta$. Mais on a établi qu'il est premier avec x; donc, il divise l'autre facteur x'_θ. On a aussi établi qu'il est du même degré que x'_θ ; par conséquent, le quotient est une constante K, et si l'on égale dans la relation

$$x' = K\,T$$

les termes du degré le plus élevé en θ, on trouvera

$$n\,A\,\theta^{n-1} = K\,A\,\theta^{n-1}$$

donc : $K = \pm n$, et la relation proposée devient en conséquence celle-ci :

$$\sqrt{1-x^2} = \pm\sqrt{1-\theta^2}\;\frac{x'_\theta}{n}$$

Il n'y figure plus, comme on voit, que le seul polynôme x, avec sa dérivée par rapport à θ, et alors on peut l'obtenir comme il suit : Écrivons l'équation précédente sous cette forme :

$$\frac{x'_\theta}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pm\,n}{\sqrt{1-\theta^2}}$$

et on reconnaîtra dans chaque membre les dérivées des deux fonctions connues de θ ; si l'on choisit d'abord le signe $+$ dans le second membre, il viendra :

$$\text{arc sin } x = n \text{ arc sin } \theta + C$$

Si l'on prend le signe $-$, on aura :

$$\text{arc sin } x = n \text{ arc cos } \theta + C$$

, C étant une constante, de sorte que tous les polynomes entiers en θ satisfaisant à la question, sont compris dans l'une ou dans l'autre de ces formes :

$$x = \sin\left[n \text{ arc } \sin \theta + C\right]$$

$$x = \sin\left[n \text{ arc } \cos \theta + C\right]$$

et une discussion facile montre que toutes les expressions entières qu'on peut obtenir seront renfermées dans celle-ci :

$\cos\left[n \text{ arc } \cos \theta\right]$, n étant un entier quelconque. (1)

Cette expression, suivant que n est pair ou impair, conduit aux deux suivantes : $\cos n\left[\text{arc } \sin \theta\right]$ et $\sin\left[n \text{ arc } \sin \theta\right]$, d'où l'on voit que les polynomes auxquels nous conduit la solution de la question algébrique, en y posant $\theta = \frac{x}{n}$, donnent pour n infini les fonctions de la trigonométrie élémentaire, $\cos x$ et $\sin x$; car l'on sait que $\lim\limits_{n=\infty}\left(n \text{ arc } \sin \frac{x}{n}\right) = x$.

※ IX. Je terminerai ce que je me suis proposé de dire sur la nature et le but des études relatives aux fonctions algébriques, en ajoutant encore quelques mots sur les racines carrées des polynomes du 4e degré. Il n'existe plus alors de substitutions qui puissent, comme précédemment, les ramener aux simples fonctions rationnelles ; et le point de départ des recherches si importantes auxquelles donnent lieu ces expressions, consiste dans l'étude des substitutions rationnelles de la forme

$x = \frac{U}{V}$, où U et V sont deux polynomes en θ,

qu'on peut supposer sans facteurs communs, savoir :

$$U = \alpha + \alpha' \theta + \alpha'' \theta^2 + \ldots\ldots + \alpha^{(p)} \theta^{(p)}$$

$$V = \beta + \beta' \theta + \beta'' \theta^2 + \ldots\ldots + \beta^{(p)} \theta^{(p)}$$

---

(1) Ces polynomes en θ que l'on a rencontrés en trigonométrie, s'offrent dans un grand nombre de questions d'Analyse, et possèdent beaucoup de propriétés très-remarquables : l'une de ces propriétés les plus singulières, et que je ne puis indiquer ici à cause de son caractère élémentaire, consiste en ce que $\cos\left[n \text{ arc } \cos \theta\right]$ représente parmi tous les polynômes en θ de degré n, celui qui est le plus voisin possible de zéro, entre les limites -1 et $+1$ de la variable θ. (M. Bertrand, Traité de Calcul différentiel et intégral, tome 1er, page 519.)

et tels que $\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}$ reproduit un radical semblable $\sqrt{a\theta^4+b\theta^3+c\theta^2+d\theta+e}$ multiplié par une fonction rationnelle de θ. Cette condition exige que l'on ait :

$$AU^4+BU^3V+CU^2V^2+DUV^3+EV^4=(a\theta^4+b\theta^3+c\theta^2+d\theta+e)T^2$$

T désignant un polynome entier ; or on va voir que de là résulte la relation suivante, où K est une constante, savoir :

$$UV'-VU'=KT$$

Observons d'abord que T est le produit de tous les facteurs en θ qui sont élevés au carré dans le premier membre de l'équation précédente. J'ajoute qu'en faisant pour un instant :

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

d'où : $$AU^4+BU^3V+CU^2V^2+DUV^3+EV^4=A(U-\alpha V)(U-\beta V)(U-\gamma V)(U-\delta V)$$

tous les facteurs doubles des divers polynomes : $U-\alpha V$, $U-\beta V$, etc, appartiennent à l'expression : $UV'-VU'$, car on a identiquement par exemple :

$$(U-\alpha V)V'-(U-\alpha V)'V=UV'-VU'$$

et comme un facteur élevé au carré dans $U-\alpha V$ divise ce polynome et sa dérivée $(U-\alpha V)'$, il divise bien en effet : $UV'-VU'$. Or, T est précisément formé du produit de ces facteurs doubles, son degré en θ est $2p-2$, et le degré de $UV'-VU'$ ne peut surpasser cette limite, de sorte que le quotient $\frac{UV'-VU'}{T}$ qui est entier, est nécessairement une constante K. Ayant ainsi

$$\frac{U'V-UV'}{T}=K$$

on en conclura : $$\frac{T}{V^2}=\frac{1}{K}\ \frac{U'V-UV'}{V^2}=\frac{1}{K}\ x'_\theta$$

et par conséquent : $$\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}=\sqrt{a\theta^4+b\theta^3+c\theta^2+d\theta+e}\ \frac{x'_\theta}{K}$$

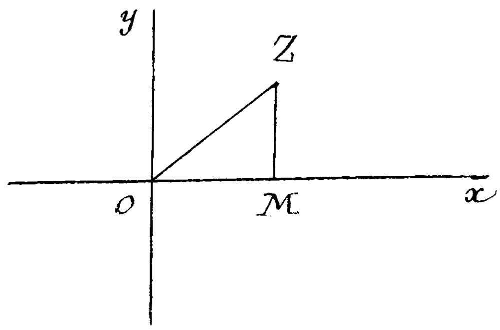
ou bien encore : $$\frac{x'}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}}=\frac{K}{\sqrt{a\theta^4+b\theta^3+c\theta^2+d\theta+e}}$$

forme analytique semblable à celle qui a été obtenue précédemment et qui lie le problème algébrique aux propriétés d'une fonction transcendante analogue aux lignes trigonométriques, mais d'un ordre plus élevé. La proposition sur les racines carrées des polynomes du 4.e degré que je viens d'établir d'après Jacobi, est en effet le principe sur les découvertes relatives à la théorie des fonctions elliptiques, qu'ont illustré le nom de ce grand géomètre.
(Voyez l'ouvrage intitulé : Fundamenta nova, theoriæ Functionum Ellipticarum, page 3)

Des variables imaginaires dans l'étude des fonctions.

Je ne rappellerai point l'origine des expressions de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, ni les conventions qui ont été faites pour les soumettre aux diverses opérations du calcul élémentaire. On sait les propositions auxquelles elles donnent lieu dans la théorie des équations algébriques, et en trigonométrie, où elles figurent comme l'élément même de la formule de Moivre. Mais il est indispensable de faire connaître comment on les introduit dans l'Analyse générale où leur rôle a encore plus d'importance et d'étendue. Nous commencerons à cet égard par la considération géométrique suivante.

I. Ayant tracé dans un plan deux axes rectangulaires Ox et Oy on fait correspondre à toute expression imaginaire



$$z = x + y\sqrt{-1}$$

un point Z dont l'abscisse est la partie réelle x et l'ordonnée le coefficient y de $\sqrt{-1}$. De là résulte que toute loi de succession de quantités de cette nature sera donnée par une suite de points, et par conséquent, par un lieu géométrique si les quantités x et y varient d'une manière continue.

Cela posé, soit u une fonction de la variable z, un polynome entier par exemple, qu'on pourra pour toute valeur de z, mettre sous la forme :

$$u = X + Y\sqrt{-1}$$

Nous appliquerons la même mode de représentation à u et à la variable indépendante, de sorte qu'à un lieu, à une ligne quelconque, déterminant la loi des valeurs de z, répondre une autre ligne donnant la loi de succession des valeurs de la fonction. Nous pourrons aussi employer, au lieu des coordonnées rectangulaires, les coordonnées polaires ρ et ω en faisant :

$$x = \rho\cos\omega \qquad y = \rho\sin\omega$$

ρ étant la distance OZ toujours prise positivement, et ω l'angle ZOx. Alors on nomme ρ le module, l'angle ω l'argument de z, et à l'égard de u, nous poserons semblablement :

$$X = R\cos\varphi \qquad Y = R\sin\varphi$$

Ces principes posés, notre but est maintenant de montrer comment la dépendance de ces éléments analytiques, ou celle des deux figures construites avec les quantités z et u manifeste les propriétés caractéristiques les plus importantes de la fonction.

II. Je chercherai en premier lieu, comment l'argument du binome $z-a$ varie avec l'argument de z, la constante a étant de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. Ayant donc fait d'une part :

$$z = \rho\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right)$$

et de l'autre :

$$z - a = R\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

nous aurons :

$$\rho\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right) - \alpha - \beta\sqrt{-1} = R\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

d'où ces équations :

$$\rho\cos\omega - \alpha = R\cos\varphi$$
$$\rho\sin\omega - \beta = R\sin\varphi$$

qui déterminent avec la condition de R positif, un seul angle φ compris entre zéro et 2π. C'est cet angle que je vais considérer en supposant ρ constant, comme fonction de la variable ω. Partant à cet effet de la valeur

$$\tan\varphi = \frac{\rho\sin\omega - \beta}{\rho\cos\omega - \alpha}$$

et prenant la dérivée de l'expression :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\omega - \beta}{\rho\cos\omega - \alpha}$$

savoir :

$$\varphi' = \rho\,\frac{\rho - \alpha\cos\omega - \beta\sin\omega}{(\rho\cos\omega - \alpha)^2 + (\rho\sin\omega - \beta)^2}$$

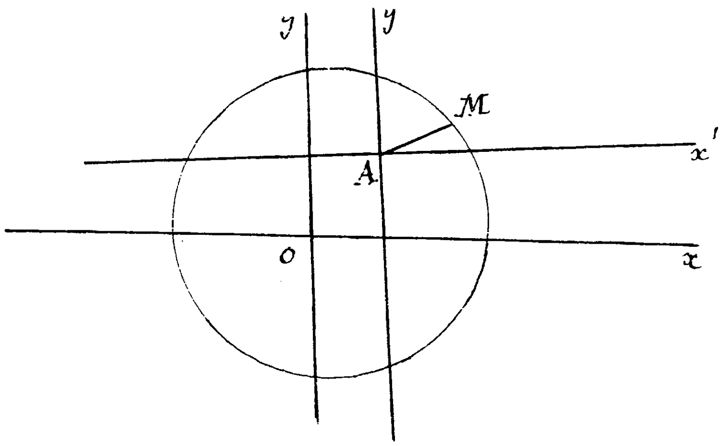
j'observe que le numérateur, en introduisant un angle auxiliaire ω_0, peut s'écrire ainsi :

$$\rho - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos(\omega - \omega_0)$$

Or, de là résultent deux modes d'existence bien distincts pour la fonction φ, suivant qu'on aura : $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} < \rho$ ou $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > \rho$. Dans le premier cas, la dérivée étant toujours positive, φ croît indéfiniment avec ω. Dans le second, cette dérivée s'annule en posant :

$$\frac{\rho}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos(\omega-\omega_0)$$

elle offre, comme on le reconnaît aisément, une série périodique de valeurs alternativement positives et négatives, et l'angle φ reste compris entre un maximum et un minimum. Ce résultat important peut s'obtenir par la géométrie d'une manière très-facile.



Remarquant que la variable z est représentée par un point M du cercle : $x^2+y^2=\rho^2$, je considère deux nouveaux axes coordonnés parallèles aux premiers, et dont l'origine ayant α et β pour abscisse et ordonnée, représenterait la constante $a=\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

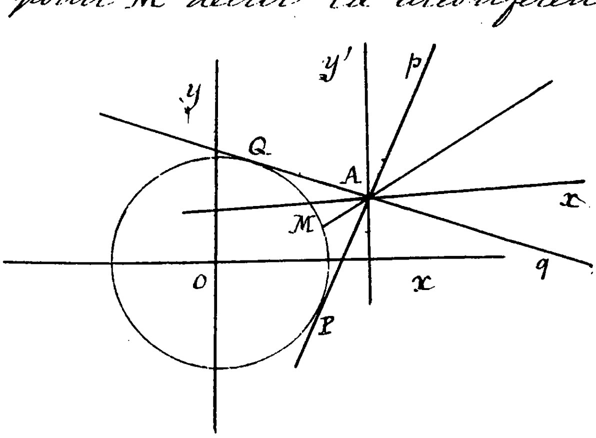
Cela posé, entre les coordonnées x', y' du point M et les anciennes, on aura les relations :

$$x'=x-\alpha \qquad y'=y-\beta.$$

d'où :

$$x'+y'\sqrt{-1}=z-a.$$

Le module et l'argument de $z-a$ sont donc la longueur AM, et l'angle MAx'. Or, la condition : $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}<\rho$ revient à supposer le point A dans l'intérieur du cercle de rayon ρ, et alors en effet, quand le point M décrit la circonférence, cet angle va toujours en croissant et a repris sa valeur initiale augmentée de 2π quand le rayon AM est revenu à sa première position.



Mais qu'on place en second lieu le point A en dehors du cercle, et l'on voit que la direction MA oscille entre les limites PAp, QAq, déterminées par les tangentes AP et AQ, de sorte que le point M, revenant à la position initiale après avoir décrit la circonférence entière, l'angle φ, après avoir été tour à tour en décroissant et en augmentant, finit par reprendre sa valeur primitive.

III. — La construction géométrique qu'on vient d'employer, conduit facilement à reconnaître qu'on peut substituer au cercle une courbe fermée quelconque, et parvenir à la même conclusion, car on n'a eu recours à aucune propriété caractéristique de la circonférence, si ce n'est d'être une courbe fermée. (1) Considérons maintenant, en nous plaçant à ce point de vue plus général, le module et l'argument du produit d'un nombre quelconque de facteurs binômes :

$$u = (z-a)(z-b)\ldots\ldots\ldots(z-l)$$

et supposons que la variable imaginaire $z = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ décrive un contour fermé quelconque S. Si l'on fait :

$$z-a = R(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

$$z-b = R_1(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z-l = R_n(\cos\varphi_n + \sqrt{-1}\sin\varphi_n)$$

et $$u = \mathcal{R}(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi)$$

l'équation : $\mathcal{R}(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi) = RR_1\ldots R_n(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1)\ldots(\cos\varphi_n + \sqrt{-1}\sin\varphi_n)$

donnera : $$\mathcal{R} = RR_1\ldots\ldots R_n$$

et $$\Phi = \varphi + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$$

Cela posé, lorsque la variable z partira d'un point du contour pour

---

(1) En supposant ρ fonction de ω dans l'expression :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{\rho\sin\omega - \beta}{\rho\cos\omega - \alpha}.$$

on trouverait pour la dérivée de φ :

$$\varphi' = \frac{\rho^2 - \rho(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega) - \rho'(\alpha\sin\omega - \beta\cos\omega)}{(\rho\sin\omega - \beta)^2 + (\rho\cos\omega - \alpha)^2}$$

D'où résulte que la fonction de ω placée au numérateur, ne pourra s'évanouir et changer de signe qu'autant que le point α, β sera extérieur à la courbe déterminée par l'équation entre ρ et ω.

y revenir après l'avoir décrit entièrement et une seule fois, les arguments φ, qui correspondent à des constantes $a, b \ldots l$, renfermées à l'intérieur de S, auront crû de 2π, et ceux qui correspondent à des constantes placées à l'extérieur reprendront au contraire la même valeur. On a donc le théorème suivant :

Lorsque la variable z décrit un contour fermé, l'argument du polynôme entier

$$u = (z-a)(z-b)\ldots(z-l)$$

varie d'un multiple entier $2\mu\pi$ de la circonférence, égal au nombre μ des racines de l'équation $u=0$, qui sont contenues dans l'intérieur de ce contour.

Remarquons qu'en faisant :

$$u = X + Y\sqrt{-1}$$

on a : $X = R\cos\Phi \qquad Y = R\sin\Phi$

d'où : $\dfrac{X}{Y} = \cot g\,\Phi$.

Cela étant, il est aisé d'établir que la variable z décrivant une fois le contour fermé, le rapport $\dfrac{X}{Y}$ s'évanouit pour différents points de ce contour, en passant du positif au négatif 2μ fois de plus que du négatif au positif, et on aura ainsi la démonstration donnée par Sturm, du théorème célèbre de Cauchy sur les racines imaginaires des équations algébriques. (Journal de Mr Liouville, tome I, page 290)

III. Les considérations précédentes montrent déjà l'importance de l'emploi des variables imaginaires dans l'étude des fonctions entières, en conduisant presque sans calcul au principe même du théorème mémorable donné par Cauchy pour déterminer le nombre des racines de toute équation algébrique qui sont renfermées dans un contour donné. A la vérité, nous ne donnons point encore complètement cette belle découverte du grand géomètre, qui sera exposée dans le Calcul intégral, et sans en rien omettre, en suivant la voie même de l'inventeur ; mais il suffit d'en avoir obtenu le point essentiel dont nous allons dans un instant trouver une application importante.

Considérons, après les fonctions entières, les fonctions algébriques définies comme racines de l'équation :

$$F(z,u) = 0$$

et suivons les conséquences de la représentation géométrique simultanée de la variable indépendante z et de u. A un lieu déterminé, figurant la loi des valeurs imaginaires de z, correspondra un autre lieu, représentant de même, et pour les diverses racines de l'équation proposée, la loi de succession de leurs valeurs. Cela posé, et en désignant son degré par n, il est naturel de penser que le système de ces racines sera représenté par n courbes distinctes, ce qui reviendrait à envisager chaque racine comme une fonction bien déterminée de z. Par exemple, l'équation :

$$u^2 = F(z) = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l)$$

donnerait ces deux expressions, $u = +\sqrt{F(z)}$ et $u = -\sqrt{F(z)}$. Mais ici vient s'offrir à l'égard des irrationnelles algébriques quelque chose de remarquable et d'entièrement caractéristique, que l'étude de cette équation va mettre en pleine lumière.

IV. Soit, comme plus haut :

$$z = x + y\sqrt{-1} = \rho\left(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega\right)$$

ρ étant déterminé en fonction de ω, de manière à donner une courbe fermée S décrite en entier et une seule fois en faisant croître ω de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$. Si l'on pose :

$$F(z) = \mathcal{R}\left(\cos\Phi + \sqrt{-1}\sin\Phi\right)$$

l'une des racines, $u = +\sqrt{F(z)}$ s'obtiendra immédiatement sous la forme :

$$X + Y\sqrt{-1} = \sqrt{\mathcal{R}}\left(\cos\tfrac{1}{2}\Phi + \sqrt{-1}\sin\tfrac{1}{2}\Phi\right)$$

et les équations :

$$X = \sqrt{\mathcal{R}}\cos\tfrac{1}{2}\Phi \qquad Y = \sqrt{\mathcal{R}}\sin\tfrac{1}{2}\Phi$$

nous permettront de construire la courbe qui correspond à S.

Je suppose donc qu'on ait $\Phi = \Phi_0$ pour $\omega = \omega_0$; tous les points de cette courbe s'obtiendront en faisant croître ω jusqu'à la valeur $\omega_0 + 2\pi$, et l'argument Φ parviendra ainsi, comme nous l'avons vu, en variant d'une manière continue, à la valeur $\Phi_0 + 2\mu\pi$. Or, les relations

$$\cos\tfrac{1}{2}\left(\Phi_0 + 2\mu\pi\right) = (-1)^{\mu}\cos\tfrac{1}{2}\Phi_0$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\left(\Phi_0 + 2\mu\pi\right) = (-1)^{\mu}\sin\tfrac{1}{2}\Phi_0$$

montrent que μ étant un nombre impair, les coordonnées X et Y ne reprennent point leurs valeurs initiales, de sorte que le lieu géométrique relatif à u n'est point une courbe fermée, et qu'il l'est au contraire, si μ est supposé un nombre pair, attendu que le module R fonction entière de $\sin\omega$ et $\cos\omega$, conserve toujours la même valeur pour $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0 + 2\pi$.

Ce qu'on vient d'établir à l'égard de la racine $u = +\sqrt{F(z)}$ a lieu également pour la seconde racine $u = -\sqrt{F(z)}$, et si l'on construit en même temps les deux courbes figurant la loi de succession de ces quantités, on conclut que dans le premier cas, le point de départ de l'une d'elles, coïncidant avec le point d'arrivée de l'autre, on obtient, en construisant le double système de points, non à deux courbes qui, l'une et l'autre, soient interrompues et s'arrêtent brusquement, mais à une courbe fermée unique. Dans le second cas, au contraire, chacune des racines reprenant sa valeur initiale, la construction effectuée donne pour résultat deux courbes fermées et distinctes. La signification du nombre μ conduit donc à ce théorème :

La variable indépendante, décrivant un contour fermé, le système des racines de l'équation

$$u^2 = F(z)$$

est figuré par une seule courbe ou par deux courbes fermées distinctes, suivant qu'il y a un nombre impair ou un nombre pair de racines de l'équation $F(z) = 0$, renfermées dans l'intérieur de ce contour.

Nous terminerons ce sujet par les indications suivantes. Relativement à l'équation $F(z, u) = 0$, les valeurs de la variable qui lui feront acquérir deux ou plusieurs racines égales joueront le même rôle que les quantités $a, b, \ldots\ldots l$ dans la question précé=dente. Ainsi, en faisant décrire à z un contour fermé ne renfermant aucun point qui corresponde à ces quantités, le système des valeurs des n racines u est figuré par n chemins fermés, comme si ces racines étaient chacune des fonctions uniformes. Mais quand le contour relatif à la variable indépendante comprend un ou plusieurs de ces points, les racines qui, le long de ce contour sont fonctions continues de z (Théorème de M. Cauchy, Nouveaux Exercices de Mathématiques, Tome II, page 109) n'ont plus les mêmes valeurs au point de départ et au point d'arrivée. Elles s'échan=gent alors entre elles d'une certaine manière que M. Puiseux a donné le moyen de déterminer en se fondant sur la règle célèbre du parallélogramme analytique de Newton,[1] dans son beau et important travail intitulé : Recherches sur les fonctions algébriques, (Journal de M. Liouville, Tome XV, 1850). Il en résulte pour le système des quantités u un nombre moindre de courbes fermées, et souvent même une seule. Ajoutons que ces modes de permutations des racines suivant les divers chemins suivis par la variable z pour revenir à sa valeur initiale, tiennent à leurs propriétés les plus importantes, et permettent de reconnaître dans des cas très-étendus, par exemple, quand le degré de l'équation $F(z,u)=0$ est un nombre premier, si elle est résoluble par radicaux. Les points figurant ces valeurs si importantes de z pour lesquelles deux ou plusieurs racines de la proposée deviennent égales, ont reçu, en raison même de cette circonstance, la dénomination de points d'embranchement, de ramification, ou encore de points critiques. Ils constituent, pour les fonctions algébriques irrationnelles, un genre de discontinuité spécial, d'une autre nature que le passage par l'infini pour une valeur particulière de la variable. Quant aux points répondant à ces valeurs qui rendent ainsi une fonction infinie, ils ont reçu la dénomination de pôles sous la double condition que l'inverse de la fonction s'annule pour la même valeur et qu'elle ne puisse acquérir plusieurs déterminations par suite d'une révolution de la variable autour de ce point. Par exemple, la fonction $\frac{1}{z-a}$ a un pôle $z=a$, celle-ci $\frac{1}{z-a}\sqrt{z-b}$ a un pôle $z=a$ et un point d'embranchement $z=b$. La fonction $e^{\frac{1}{z-a}}$, qui devient encore infinie pour $z=a$, présente une discontinuité d'une nature entièrement différente, attendu que son inverse, à savoir $e^{-\frac{1}{z-a}}$ est également infinie pour $z=a$. Ce point $z=a$ ne sera donc point un pôle à l'égard de cette fonction. Enfin, en un point d'embranchement, une fonction peut devenir infiniment grande, sans que ce point soit pour cela un pôle, le caractère essentiel d'un pôle étant, comme nous l'avons dit, que la fonction soit uniforme dans son voisinage.

---

(1) L'objet de cette règle donnée par Newton, sous forme géométrique, dans le court traité intitulé : Artis analyticæ specimina vel Geometria analytica, et réduite à un calcul arithmétique simple par Lagrange, est d'obtenir l'exposant du premier terme de chacune des racines de l'équation $F(z,u)=0$ développée suivant les puissances ascendantes de z.

De l'Exponentielle et des fonctions circulaires.

I. C'est à l'introduction des exposants fractionnaires imaginés par Descartes qu'est due la notion de la fonction exponentielle limitée ainsi au cas où la variable est réelle. Pour l'étendre à des valeurs imaginaires, il a fallu tirer de cette première notion, un développement en série suivant les puissances ascendantes de la variable, ou encore cette expression remarquable de e^x comme limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ pour m infini et voici comment on a procédé :

En partant du développement démontré seulement pour des valeurs réelles :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots\cdots + \frac{x^m}{1.2.3\ldots m} + \cdots\cdots$$

nous ferons cette remarque, que la série du second membre conduit à un résultat fini et déterminé lorsqu'on y remplace x par $a + b\sqrt{-1}$. Soit pour cela : $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$, il est facile alors, au moyen de la formule de Moivre : $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi$, d'obtenir sous la forme $A + B\sqrt{-1}$, le résultat de la substitution :

$$x = a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$ et on trouve en effet :

$$A = 1 + \frac{\rho}{1}\cos\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\cos 2\varphi + \cdots\cdots + \frac{\rho^m}{1.2\ldots m}\cos m\varphi + \cdots\cdots$$

$$B = \frac{\rho}{1}\sin\varphi + \frac{\rho^2}{1.2}\sin 2\varphi + \cdots\cdots + \frac{\rho^m}{1.2\ldots m}\sin m\varphi + \cdots\cdots$$

Or, on voit que ces développements ordonnés par rapport aux puissances de ρ sont toujours convergentes, et on en conclut que la série :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \cdots\cdots$$

définit bien une fonction dans toute l'étendue des valeurs réelles et ima=ginaires de la variable.

Un second point consiste en ce que la fonction conserve à l'égard de ces valeurs quelconques, réelles ou imaginaires, la propriété caractéristique des exposants, savoir :

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

A cet effet, je remplace dans cette égalité x et y par αx et αy, ce qui donne :

$$e^{\alpha x} + e^{\alpha y} = e^{\alpha(x+y)}$$

et j'observe qu'en supposant x, y et α réels, je suis assuré que les coefficients des mêmes puissances de α sont égaux dans les deux membres, c'est-à-dire d'une part dans le produit ordonné par rapport à α des deux séries.

$$1+\frac{\alpha x}{1}+\frac{\alpha^2x^2}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha^m x^m}{1.2\ldots\ldots m}$$

$$1+\frac{\alpha y}{1}+\frac{\alpha^2y^2}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{\alpha^m y^m}{1.2\ldots m}$$

et de l'autre dans le développement. En égalant ainsi les coefficients de α^m et multipliant par $1.2\ldots m$, on obtiendrait, si on ne la connaissait déjà, la formule du binome, savoir :

$$x^m+\frac{m}{1}x^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2+\cdots\cdots+y^m=(x+y)^m$$

Mais ce n'est pas cette conclusion qui nous importe en ce moment; il suffit en effet, d'avoir entre des polynomes en x et en y une égalité démontrée pour toutes les valeurs réelles de ces quantités, pour être en droit d'en conclure qu'elle a lieu pareillement pour des valeurs imaginaires. A la vérité, nous admettons ainsi que le degré de ces polynômes, le nombre m, soit fini et limité; mais la convergence des séries permettant de les borner à un nombre fini de termes, le reste pouvant devenir moindre que toute quantité donnée, la conclusion est établie, comme on voit, en toute rigueur.

II. On vient de connaître combien il y a d'avantage à définir par la série : $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+$ &c., la fonction exponentielle e^x. Telle propriété toutefois, comme celle d'être essentiellement positive pour toute valeur réelle de x, pourra sembler moins facile à voir dans la série que dans la première définition de la fonction où elle est manifeste. Je vais m'y arrêter un moment. Désignons par $\varphi(x)$ l'ensemble des $m+1$ premiers termes en posant : $\varphi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{x^m}{1.2\ldots m}$. On trouvera aisément la relation :

$\varphi'(x)=\varphi(x)-\frac{x^m}{1.2\ldots m}$. Or, elle suffit pour prouver que l'équation $\varphi(x)=0$ n'a jamais plus d'une racine réelle. Admettons pour un instant qu'il n'en soit pas ainsi, et nommons α et β deux racines réelles de cette équation. On trouvera : $\varphi'(\alpha)=-\frac{\alpha^m}{1.2\ldots m}$ $\varphi'(\beta)=-\frac{\beta^m}{1.2\ldots m}$, résultats de même signe, car l'équation proposée ayant tous ses coefficients positifs, les racines α et β

si elles existent, sont l'une et l'autre négatives. Or, on se trouve ainsi en contradiction avec le théorème de Rolle, de sorte que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle si son degré est impair, et elle n'en a aucune si son degré est pair. On pourrait certainement faire voir que pour des valeurs croissantes de n, la racine unique augmente indéfiniment en valeur négative, mais je m'en tiendrai à la conclusion relative au cas de n pair, qui met en évidence la propriété annoncée, puisqu'un polynome qui n'a point de racines réelles garde le même signe pour toute valeur de la variable.

III. L'une des conséquences les plus importantes et les plus remarquables de la notion de l'exponentielle étendue aux quantités imaginaires, consiste à rattacher à cette fonction les quantités $\sin x$ et $\cos x$, à l'égard desquelles j'admettrai les développements en série :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.} + \cdots\cdots$$

que donnent aisément leurs propriétés les plus élémentaires.

Il suffit à cet effet, de changer x en $x\sqrt{-1}$ dans la série qui représente e^x, ce qui conduit à la relation :

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\cdots$$
$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\cdots\right)$$

c'est à dire : $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$

On aurait de même : $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x$

et on en tire ces formules importantes, savoir :

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}$$

C'est à Euler qu'est due la relation si importante :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$$

et qui va nous donner la définition de la fonction logarithmique pour des valeurs imaginaires quelconques : $a + b\sqrt{-1}$. Nous allons, à cet effet, déterminer toutes les solutions de l'équation : $e^z = a + b\sqrt{-1}$, en supposant $z = x + y\sqrt{-1}$, ce qui conduira, en vertu de la formule

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$$

aux deux équations suivantes :

$$e^x \cos y = a \qquad e^x \sin y = b$$

dont il faut avoir toutes les solutions réelles. Or, en élevant au carré et ajoutant, il vient

$$e^{2x} = a^2 + b^2$$

et par suite : $e^x = \sqrt{a^2 + b^2}$

en excluant la valeur négative du radical, afin de rejeter les valeurs non réelles de x, qui sera, par conséquent, le logarithme népérien arithmétique de $\sqrt{a^2+b^2}$. De là suit que l'angle y sera déterminé à la fois par ces deux équations

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Elles donnent un seul et unique angle α (1) entre les limites zéro et 2π, et pour solution générale :

$$y = \alpha + 2K\pi$$

K étant un nombre entier quelconque. C'est la présence de cet entier indéterminé qui conduit à attribuer à la fonction logarithmique, considérée sous le point de vue général auquel nous sommes placés, son véritable caractère analytique de fonction susceptible d'une infinité de

---

(1) On doit à M. Winckler la remarque suivante : Soit $a = \varepsilon A$, $b = \varepsilon_0 B$, ε et ε_0 étant égaux à $+1$ ou -1, de sorte que A et B représentent les valeurs numériques absolues de a et b, l'angle α sera déterminé par l'équation : $\pi - \alpha = \varepsilon\frac{\pi}{2} + \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{arc\,tang}\frac{A}{B}$, l'arc dont la tangente est $\frac{A}{B}$, étant positif et moindre que $\frac{\pi}{2}$, dans le cas de a ou b nul, ε ou ε_0 devra être pris égal à l'unité. (Über einige Gegenstände der elementaren analysis, Acad. des Sciences de Vienne, 1869.)

de déterminations. Et on observe que ce caractère se présente même à l'égard des logarithmes des quantités réelles, car en supposant dans l'équation que nous venons d'obtenir

$$\log\left(a+b\sqrt{-1}\right) = \log\sqrt{a^2+b^2} + (\alpha + 2K\pi)\sqrt{-1}$$

$b=0$ et a positif, ce qui donne $\alpha = 0$; on obtient encore une infinité de valeurs. $\log a + 2K\pi\sqrt{-1}$, dont une seule réelle pour $K=0$. Ainsi s'explique l'impossibilité d'avoir pour $\log x$ un développement en série toujours convergent, quel que soit x, ainsi qu'on l'a obtenu pour $\sin x$, $\cos x$, e^x. Un tel développement ne pourrait convenir qu'à une fonction uniforme, et bientôt, en effet, en établissant l'équation :

$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{\&}^{ca}$$

nous verrons qu'il faut le restreindre aux valeurs de la variable dont le module est moindre que l'unité.

IV. Les équations

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

conduisent à transformer l'expression $z = \sin^a x \cos^b x$, en une fonction linéaire des sinus ou cosinus des arcs multiples de x, lorsque les exposants a et b sont entiers. Pour obtenir ce résultat qui sera employé dans le calcul intégral, je pose pour un instant $t = e^{x\sqrt{-1}}$ et $a+b=n$, ce qui donnera :

$$z = \left(\frac{t-t^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^a \left(\frac{t+t^{-1}}{2}\right)^b$$

et en chassant le dénominateur

$$2^n\left(\sqrt{-1}\right)^a t^n z = \left(t^2-1\right)^a\left(t^2+1\right)^b$$

Or, le second membre ne contenant que le carré de t pour être développé sous cette forme :

$$\left(t^2-1\right)^a\left(t^2-1\right)^b = \alpha_0 t^{2n} + \alpha_1 t^{2(n-1)} + \ldots\ldots + \alpha_i t^{2(n-i)} + \ldots\ldots + \alpha_n$$

les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots.$ étant des nombres satisfaisant, comme je vais le montrer, à la condition suivante.

$$\alpha_i = (-1)^a \alpha_{n-i}$$

Écrivons en effet, pour abréger

$$(t^2-1)^a (t^2+1)^b = \sum \alpha_i t^{2(n-i)}$$

puis changeons t en $\frac{1}{t}$, et chassons le dénominateur, il viendra :

$$(1-t^2)^a (1+t^2)^b = \sum \alpha_i t^{2i}$$

ce qui reproduit dans le premier membre l'expression proposée multipliée par le facteur $(-1)^a$; or, l'identité

$$(-1)^a \sum \alpha_i t^{2(n-i)} = \sum \alpha_i t^{2i}$$

donne bien, en égalant les coefficients de t^{2i} de part et d'autre, la relation annoncée. Revenons maintenant à l'expression de Z, qu'on trouvera en divisant le polynome $(t^2-1)^a (t^2+1)^b$ par t^n, sous cette forme :

$$2^n (\sqrt{-1})^a Z = \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{t^{n-2}} + \frac{\alpha_n}{t^n}$$

et considérant d'abord le cas où le nombre a est pair, ce qui donnera :

$$\alpha_i = \alpha_{n-i}$$

je l'écrirai ainsi : $2^n (-1)^{\frac{1}{2}a} Z = \alpha_0 \left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) + \alpha_1 \left(t^{n-2} + \frac{1}{t^{n-2}}\right) + \text{etc} \dots\dots$

en laissant dans le second membre, quand n est un nombre pair, le seul terme $\alpha_{\frac{1}{2}n}$ indépendant de t. J'observerai ensuite qu'on a généralement :

$$t^\mu = e^{\mu x\sqrt{-1}} = \cos \mu x + \sqrt{-1} \sin \mu x$$

$$\frac{1}{t^\mu} = e^{-\mu x\sqrt{-1}} = \cos \mu x - \sqrt{-1} \sin \mu x$$

d'où : $$t^\mu + \frac{1}{t^\mu} = 2 \cos \mu x$$

de sorte qu'on en conclut immédiatement la valeur de Z sous la forme annoncée, savoir :

$$2^n (-1)^{\frac{1}{2}a} Z = 2\alpha_0 \cos n x + 2\alpha_1 \cos (n-2) x + \dots$$

le second membre contenant, comme il a été remarqué plus haut, le terme $\alpha_{\frac{1}{2}n}$ indépendant de x, quand n est pair.

En second lieu, si l'exposant a du sinus est impair, ce qui donnera :

$$\alpha_i = -\alpha_{n-i}$$

on écrira : $2^n (\sqrt{-1})^a Z = \alpha_0 \left(t^n - \frac{1}{t^n}\right) + \alpha_1 \left(t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}}\right) + \text{\&}^{\text{ca}} \dots\dots$

le second membre ne renfermant plus comme précédemment pour n pair de terme indépendant de t, car la condition à laquelle satisfont les coefficients donne pour $i = \frac{n}{2}$, $\alpha_{\frac{n}{2}} = -\alpha_{\frac{n}{2}}$, c'est à dire : $\alpha_{\frac{n}{2}} = 0$. On en conclut encore immédiatement, en employant la relation :

$$t^{p} - \frac{1}{t^{p}} = 2\sqrt{-1}\ \sin px.$$

et divisant par $\sqrt{-1}$ $\qquad 2^{n}(-1)^{\frac{a-1}{2}} z = 2\alpha_0 \sin nx + 2\alpha_1 \sin(n-2)x + \&^{ca} \ldots$

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients de $\alpha_0, \alpha_1, \&^{ca}$; or, un premier moyen serait d'effectuer la multiplication algébrique des puissances $(x-1)^a$ et $(x+1)^b$; mais en voici un autre :

Soit : $\quad y = (x-1)^a (x+1)^b = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \&^{ca}$

on aura : $\quad \log y = a \log(x-1) + b \log(x+1)$

et en prenant les dérivées par rapport à x :

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

d'où : $\quad y'(x^2-1) = y\left[(a+b)x + a - b\right]$

substituant dans cette relation les deux développements :

$$y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \&^{ca}$$

$$y' = n\alpha_0 x^{n-1} + (n-1)\alpha_1 x^{n-2} + \&^{ca}$$

et faisant de suite $\alpha_0 = 1$, on en conclura, en posant pour abréger : $b - a = \nu$, les relations qui suivent :

$$\alpha_1 = \nu$$

$$2\alpha_2 = \nu\alpha_1 - n$$

$$3\alpha_3 = \nu\alpha_2 - (n-1)\alpha_1$$

$$4\alpha_4 = \nu\alpha_3 - (n-2)\alpha_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont la loi est évidente.

Soit par exemple : $a = 2$, $b = 5$, d'où $n = 7$, $\nu = 3$, ces relations deviendront :

$$\alpha_1 = 3$$

$$2\alpha_2 = 3\alpha_1 - 7$$
$$3\alpha_3 = 3\alpha_2 - 6\alpha$$

d'où : $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -5$, et on en conclura la relation

$$2^6 \sin^2 x \cos^5 x = -\cos 7x - 3\cos 5x - \cos 3x + 5\cos x$$

on trouverait de même :

$$2^7 \sin^3 x \cos^5 x = -\sin 8x - 2\sin 6x + 2\sin 4x + 6\sin 2x$$

$$2^9 \sin^4 x \cos^6 x = \cos 10x + 2\cos 8x - 3\cos 6x - 8\cos 4x + 2\cos 2x + 6.$$

L'expression générale des coefficients α_i n'est connue que dans le cas où l'un des exposants a ou b est nul, ou bien s'ils sont égaux entre eux ; toutefois, en supposant que a et b soient des nombres pairs quelconques, on a pour celui de ces coefficients qu'il importe particulièrement de considérer, l'expression simple que voici :

$$\alpha_{\frac{1}{2}n} = 2^{\frac{1}{2}n} \frac{1.3.5\ldots\ldots a-1 . 1.3.5\ldots\ldots b-1}{1.2.3\ldots\ldots \frac{1}{2}n}$$

De la périodicité dans les fonctions circulaires.

I. Cette propriété importante manifeste d'une manière toute particulière la différence de nature des fonctions qui la possèdent, avec les fonctions rationnelles et algébriques dont nous nous sommes occupés précédemment, et leur imprime leur caractère le plus apparent en quelque sorte, de fonctions transcendantes. C'est d'ailleurs par la périodicité que les sinus et cosinus interviennent dans presque toutes les questions de l'analyse, depuis les études qui ont pour objet les propriétés abstraites des nombres entiers, jusqu'aux applications du calcul à la physique et à l'astronomie. Tel est en effet, le caractère d'universalité de ces fonctions, que dans l'ouvrage intitulé : Disquisitiones Arithmeticæ, Gauss s'exprime dans les termes suivants : « ...... Cui mirabili quantitatum generi, ad quod in disquisitionibus maxime heterogeneis sæpissime deferimur, cujusque subsidio nulla Matheseos pars carere potest...... » Mais si la définition géométrique des fonctions circulaires met immédiatement en évidence tout ce qui concerne leur périodicité, cette propriété semble beaucoup plus cachée dans les développements en série tels que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

Aussi n'est-il pas inutile d'indiquer d'autres expressions analytiques où elle se reconnaîtra tout aussi facilement que par la considération du cercle. Tel est par exemple ce développement en produit infini :

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\cdots$$

qu'on prenne en effet le polynome :

$$F(x) = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

ou encore en désignant par A un facteur numérique :

$$F(x) = A\,x\,(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

$$\times\ (x+1)(x+2)\cdots(x+n)$$

et on verra bien aisément que :

$$F(x+1) = F(x)\,\frac{x+n+1}{x-n}$$

d'où pour n infini : $\quad F(x+1) = -F(x)$

et par conséquent : $\quad F(x+2) = +F(x)$

Tel est encore le développement qu'on trouve en prenant la dérivée logarithmique de $\sin \pi x$, savoir :

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} + \frac{2x}{x^2-9} + \cdots$$

car en l'écrivant ainsi :

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \cdots$$

le second membre devient si l'on change x en $x+1$:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \cdots$$

et par conséquent, la suite infinie des fractions simples se reproduit, car elles n'ont fait que changer de place en s'avançant chacune d'un rang.

Ce résultat suggère par une généralisation facile, le mode suivant :

de représentation d'une fonction $\Phi(x)$ ayant pour période une quantité quelconque à savoir :

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \varphi(x-a) + \varphi(x-2a) + \varphi(x-3a) + \ldots\ldots$$
$$+ \varphi(x+a) + \varphi(x+2a) + \varphi(x+3a) + \ldots$$

ou bien : $$\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x + na)$$

la condition de convergence de la série étant seule à remplir à l'égard de $\varphi(x)$. Et si on alterne les signes en supposant :

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varphi(x+na)$$

on trouvera tout aussi aisément la relation :

$$\psi(x+a) = -\psi(x)$$

De là résulte un nombre infini de fonctions périodiques, mais qui se ramènent aux sinus et cosinus. On démontre effectivement qu'on peut faire :

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{4\pi x}{a} + \ldots + A_n \cos\frac{2n\pi x}{a} + \ldots\ldots$$
$$+ B_1 \sin\frac{2\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{4\pi x}{a} + \ldots + B_n \sin\frac{2n\pi x}{a} + \ldots$$

et : $$\psi(x) = A_1 \cos\frac{\pi x}{a} + A_2 \cos\frac{3\pi x}{a} + \ldots + A_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{a} + \ldots\ldots$$
$$+ B_1 \sin\frac{\pi x}{a} + B_2 \sin\frac{3\pi x}{a} + \ldots + B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{a} + \ldots\ldots$$

la principale propriété de ces séries consistant en ce que les coefficients A_n, B_n décroissent quand n augmente de manière qu'elles sont toujours convergentes, du moment que les fonctions restent elles-mêmes finies. Le fait peut déjà s'observer sur les expressions de cette nature, qu'on tire de la méthode du § précédent, et qui ne renferment qu'un nombre fini de termes savoir :

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$
$$8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x$$
$$32\cos^6 x = 10 + 15\cos 2x + 6\cos 4x + \cos 6x$$
$$128\cos^8 x = 35 + 56\cos 2x + 28\cos 4x + 8\cos 6x + \cos 8x$$

. . . .

$$4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

$$16\cos^5 x = 10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x$$

$$64\cos^7 x = 35\cos x + 21\cos 3x + 7\cos 5x + \cos 7x$$

. . . .

Toutefois, il peut y avoir avantage à se servir des expressions précédentes; en voici un exemple remarquable et important.

II. Soit, pour abréger l'écriture $i = \sqrt{-1}$, et nommons a et b deux constantes telles qu'en faisant :

$$\frac{a}{b} = \alpha + i\beta$$

la quantité β soit positive et différente de zéro. Si l'on suppose :

$$\varphi(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}}$$

on obtiendra les développements indiqués par :

$$\theta(x) = \sum (-1)^n e^{\frac{i\pi}{ab}(x+na)^2}$$

$$\theta_1(x) = \sum e^{\frac{i\pi}{ab}(x+na)^2}$$

qui seront convergentes sous cette condition, non seulement pour des valeurs réelles, mais aussi pour des valeurs imaginaires de la variable, comme l'exponentielle e^x. Or, ces fonctions périodiques, $\theta(x)$ et $\theta_1(x)$ sont les transcendantes qui, s'offrant immédiatement après les fonctions circulaires, constituent le sujet d'une branche d'analyse qu'on nomme la théorie des fonctions elliptiques. Ces quantités se lient par leurs propriétés fondamentales aux sinus et aux cosinus, et conduisent immédiatement aux fonctions doublement périodiques. Chacune d'elles ayant pour période $2a$, je dis que leur quotient :

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)}$$

possède de plus la période b.

En développant l'exponentielle et faisant pour abréger : $q = e^{i\pi\frac{a}{b}}$, on peut écrire en effet :

$$\theta_1(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum q^{n^2} e^{2n\frac{i\pi x}{b}}$$

ou encore : $$\theta_1(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum q^{n^2}\left(\cos 2n\frac{\pi x}{b} + i\sin 2n\frac{\pi x}{b}\right)$$

et plus simplement : $\theta_1(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b}$.

Si l'on observe que le nombre n prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les sinus se détruisent comme égaux deux à deux et de signes contraires. Or, on aurait tout à fait de même :

$$\theta(x) = e^{\frac{i\pi x^2}{ab}} \sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2n \frac{i\pi x}{b}$$

de sorte qu'en supprimant au numérateur et au dénominateur le facteur $e^{\frac{i\pi x^2}{ab}}$, on parvient à cette expression :

$$\frac{\theta_1(x)}{\theta(x)} = \frac{\sum q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b}}{\sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2n \frac{\pi x}{b}}$$

où la seconde période b se trouve mise en évidence.

La définition de ces nouveaux éléments du calcul, qui étendent le champ de l'analyse envisagée dans son objet le plus général, l'étude des fonctions, terminera les considérations préliminaires que nous avions à présenter avant d'aborder le calcul différentiel, dont nous allons maintenant exposer les principes.

Calcul différentiel.

Série de Taylor.

I. La notion de la dérivée se présente en algèbre à l'égard d'un polynome entier $F(x)$ au commencement de la théorie générale des équations, lorsqu'on recherche le développement de $F(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h et l'on obtient ainsi, n désignant le degré du polynôme, l'équation :

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \cdots\cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} F^{(n)}(x)$$

La série de Taylor n'est autre chose que ce résultat étendu à une fonction quelconque, et voici les considérations qui y conduisent.

En premier, l'équation précédente mise sous la forme

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2} F''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2..n} F^{(n)}(x)$$

montre que la dérivée $F'(x)$ peut être définie comme la limite du premier membre, quand l'accroissement h tend vers zéro. Or, cette remarque conduit à considérer une pareille limite à l'égard d'une fonction quelconque $f(x)$, et par suite sans recourir à aucun développement en série, à étendre à toute fonction la notion de la dérivée, en la définissant encore comme la limite du rapport : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, pour $h=0$. Cette définition se justifie comme on sait, par les conséquences importantes qu'on en tire pour toutes les fonctions continues ; je rappellerai particulièrement les suivantes :

Une fonction dont la dérivée est nulle pour toutes les valeurs comprises de $x = x_0$ à $x = X$, est constante dans le même intervalle.

Si la dérivée d'une fonction est toujours positive depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, la fonction dans le même intervalle est continuellement croissante avec x.

Lorsqu'une fonction continue est nulle pour deux valeurs x_0 et X, la dérivée, si elle est elle-même continue, s'annule pour une valeur comprise entre x_0 et X.

C'est cette dernière proposition, c'est à dire le théorème de Rolle, jointe aux règles de calcul établies si facilement en algèbre pour la formation des dérivées de sommes de produits et de puissances de fonctions, qui nous suffira pour établir la série de Taylor.

Je considère, en effet, l'expression :

$$R = f(X) - f(x) - \frac{X-x}{1} f'(x) - \frac{(X-x)^2}{1.2} f''(x) \ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n-1)}(x)$$

qui s'annule identiquement quand $f(x)$ est un polynome entier du degré $n-1$, comme on le voit en développant $f(X)$ écrit sous cette forme : $f[x+(X-x)]$ et cherchons à le déterminer, lorsque $f(x)$ est une fonction quelconque. Soit pour cela : $R = \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots\ldots n} P$, de sorte que l'on ait :

$$f(X) - f(x) - \frac{(X-x)}{1} f'(x) \ldots\ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n-1)}(x) - \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots\ldots n} P = 0$$

En remplaçant x par z dans tous les termes du premier membre de cette équation, excepté dans P, je serai conduit à l'expression suivante :

$$f(X) - f(z) - \frac{(X-z)}{1} f'(z) \ldots\ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n-1)} x - \frac{(X-z)^n}{1.2\ldots n} P$$

qui s'annulera d'abord pour $z = x$, et en second lieu évidemment pour $z = X$, de sorte que sa dérivée par rapport à z sera nulle pour une certaine valeur de cette quantité comprise entre x et X. Or, cette dérivée se réduit à

$$-\frac{(X-z)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n)}(x) + \frac{(X-z)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} P.$$

et la valeur de z, pour laquelle elle s'annule étant comprise entre x et X, peut être représentée par $x+\theta(X-x)$, θ étant moindre que l'unité. On a donc :

$$P = f^n\left[x+\theta(X-x)\right]$$

et par suite :

$$R = \frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n} f^n\left[x+\theta(X-x)\right]$$

En posant enfin $X-x=h$, on a le résultat auquel nous nous sommes proposé de parvenir, savoir :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) \frac{h^2}{1.2} f''(z) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n-1)} + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x+\theta h)$$

II. Si on limite à ses deux premiers termes la série précédente, elle donne :

$$f(X) = f(x) + (X-x) f'\left[x+\theta(X-x)\right]$$

ou :

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x+\theta h)$$

et ce résultat, qu'on peut immédiatement établir par la géométrie, en le mettant sous la forme suivante :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h)$$

conduit à une seconde démonstration et à une seconde forme de terme complémentaire que je vais indiquer.

Reprenons à cet effet l'égalité dont nous sommes partis précédemment :

$$R = f(X) - f(x) - \frac{(X-x)}{1} f'(x) - \ldots - \frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n-1)}(x)$$

et formons la dérivée de R considéré comme fonction de x. On trouvera pour valeur

$$R' = -\frac{(X-x)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^n(x)$$

Cela posé, écrivons, pour plus de clarté, $R(x)$ au lieu de R, et employons la relation :

$$R(X) = R(x) + (X-x) R'\left[x+\theta(X-x)\right]$$

comme on a évidemment $R(X)=0$, on en conclura:

$$R(x) = -(X-x)\,R'\left[x+\theta(X-x)\right]$$

et par conséquent, d'après la valeur ci-dessus de R':

$$R(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(X-x)^n}{1.2\ldots n-1} f^n\left[x+\theta(X-x)\right]$$

Cette seconde démonstration de la série de Taylor conduit à l'égalité suivante, où figure une nouvelle forme du reste, savoir:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n-1)}(x) + \frac{(1-\theta)^{n-1}h^n}{1.2\ldots n-1} f^n(x+\theta h)$$

On pourrait encore en obtenir d'autres, mais c'est la seconde qui nous servira surtout dans les applications.

III. Les résultats qui viennent d'être établis, en se plaçant essentiellement au point de vue des fonctions réelles et des variables réelles,[1] supposent que la fonction $f(x)$ et ses $n+1$ premières dérivées soient continues pour les valeurs de la variable comprises entre x et $x+h$. En supposant $x=0$ et remplaçant h par x, on en déduit:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{n-1}(0) + R$$

le terme complémentaire désigné par R étant susceptible de deux formes différentes, savoir:

$$R = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(\theta x)$$

$$R = \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2\ldots n-1} f^n(\theta x)$$

C'est ce qu'on nomme la formule de Maclaurin, identique au fond avec celle de Taylor, car elle donne le développement d'une fonction de x suivant les puissances de x, et la série de Taylor, le développement d'une fonction de h suivant les puissances de h. Il n'y a qu'un petit nombre de fonctions auxquelles la formule de Maclaurin s'applique

---

(1) C'est seulement dans le calcul intégral qu'on traitera du développement des fonctions en série dans le cas plus général des variables imaginaires quelconques.

avec simplicité ; ce sont celles-ci : a^x, $\sin x$, $\cos x$, $l(1+x)$ et $(1+x)^a$; nous allons les considérer successivement.

Développement de a^x.

En posant $f(x) = a^x$

on obtient immédiatement :

$$f'(x) = a^x \log a \qquad f''(x) = a^x \log^2 a, \text{ etc} \ldots$$

et généralement : $f^n(x) = a^x \log^n a$.

On en conclut : $f^n(0) = \log^n(a)$

d'où la série connue :

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1} \log^{n-1} a}{1.2\ldots.n-1} + R$$

et en employant la première forme du reste, on aura :

$$R = \frac{x^n \log^n a}{1.2\ldots\ldots n}\, a^{\theta x}$$

La convergence de la série ayant été déjà établie, il suffit de reconnaître que R décroît indéfiniment quand n augmente. Or, cela est évident, car le facteur $a^{\theta x}$ ne dépend de n que par la quantité θ dont le maximum est l'unité, de sorte qu'il a pour limite supérieure a^x, et quant à l'autre facteur, $\frac{x^n \log^n a}{1.2\ldots n}$, on sait qu'il décroît indéfiniment, quel que soit x.

Développement de sin x et cos x.

Posons, pour obtenir la dérivée d'ordre n de $\sin x$:

$$f(x) = \sin(x + \alpha)$$

α étant une constante, on aura :

$$f'(x) = \cos(x+\alpha) = \sin\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte qu'on passe de $\sin(x+\alpha)$ à sa dérivée, en changeant simplement α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$. On conclut de là, quel que soit n :

$$f^n(x) = \sin\left(x + \alpha + \frac{n\pi}{2}\right)$$

et par conséquent, pour $\alpha = 0$

$$f^n(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Or, l'expression $f^n(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$, donne pour $n = 0, 1, 2,$ &^{ca}, une suite périodique dont la période est : $0, 1, 0, -1$, et on retrouve le développement

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{1.2\dots 2m-1} + R$$

en posant : $R = \frac{x^{2m+1}}{1.2\dots 2m+1}\sin\left[\theta x + \frac{(2m+1)\pi}{2}\right]$

Le reste est moindre que : $\frac{x^{2m+1}}{1.2\dots 2m+1}$, et a donc encore zéro pour limite quand m augmente indéfiniment.

Relativement à $\cos x$, on obtiendra semblablement pour sa n^e dérivée, l'expression $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ donnant de même pour $x = 0$ une suite périodique dont la période est : $1, 0, -1, 0$, ce qui reproduira le développement connu :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{1.2\dots 2m} + \dots\dots$$

qu'on aurait pu conclure du précédent, en en prenant la dérivée par rapport à x.

Développement de $\log(1+x)$.

Pour obtenir la dérivée n^e de $f(x) = \log(1+x)$ il convient de poser : $f'(x) = (1+x)^{-1}$, afin d'appliquer la règle relative à la dérivée des puissances d'un binôme. De cette manière, on trouve immédiatement :

$$f''(x) = -1(1+x)^{-2} \qquad f'''(x) = 1.2(1+x)^{-3} \qquad f''''(x) = -1.2.3.(1+x)^{-4}$$

et par suite : $f^n(x) = (-1)^{n-1}1.2\dots n-1(1+x)^{-n}$

On en conclut : $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \dots\dots f^n(0) = (-1)^{n}\dots 1.2\dots n-1$

d'où : $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R$

Mais la série contenue dans cette formule n'est pas convergente lorsque la valeur absolue de x est supérieure à 1, car le rapport du $(n+1)^e$ terme au précédent, savoir : $\frac{x}{1+\frac{x}{n}}$, a pour limite x, n étant infini, de sorte que le développement donné par la formule de Mac-Laurin ne peut subsister que pour les valeurs de la variable comprise entre -1 et $+1$. Et il sera alors effectivement applicable si $R=0$ pour n infini. Considérons pour le voir la seconde forme du reste.

$$R = (-1)^{n-1}\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}$$

que j'écrirai ainsi:
$$R = \frac{(-1)^{n-1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} x^n$$

La plus petite valeur de $1+\theta x$ s'obtient pour $x=-1$, de sorte que $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ a l'unité pour maximum, mais dans l'hypothèse admise, le facteur x^n décroît indéfiniment, de sorte qu'en définitive $R=0$ pour n infini. La série proposée

$$\mathrm{Log}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{\&c.} \ldots$$

a donc lieu pour les valeurs de la variable comprises entre -1 et $+1$.

J'ajoute, afin de donner un exemple de l'emploi de la première forme du reste de la série de Mac-Laurin: $R = \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^n(\theta x)$, que la convergence subsiste même dans le cas limite de $x=1$. On a en effet:

$$R = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

et en supposant $x=1$:
$$R = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta)^n}$$

quantité qui s'annule évidemment quand n devient infini.

La série ainsi obtenue, étant écrite de cette manière:

$$\log 2 = \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots\right]$$

se présente comme la limite de la différence des deux quantités:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\,, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

qui croissent indéfiniment avec n. C'est le type des séries nommées par Dirichlet semi-convergentes, et dont la valeur dépend de l'ordre dans lequel on ajoute les termes. Soit en général S_n et S'_m les sommes de n et m premiers termes de deux suites supposées infinies avec n et m, et faisons pour un instant :

$$S_n = \log \sum_n , \quad S'_m = \log \sum'_m$$

la différence $S_n - S'_m = \log \frac{\Sigma_n}{\Sigma'_m}$ s'exprimera ainsi par le rapport $\frac{\Sigma_n}{\Sigma'_m}$. Or, on ne peut obtenir une valeur déterminée pour une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, qu'autant que les deux termes ne contiennent qu'une seule et unique variable, à laquelle on attribue la valeur particulière conduisant à la forme de l'indétermination.

Prendre autant de termes positifs que de termes négatifs dans la série obtenue pour $\log 2$, c'est supposer $n = m$, et l'emploi du reste :

$$R = \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta)^n}$$

répond précisément à cette supposition. Mais la différence entre la somme des n premiers termes positifs et des n premiers termes négatifs tend, lorsque n et m augmentent vers la quantité :

$$\log 2 + \log \frac{n}{n}$$

entièrement indéterminée, comme dépendant du rapport arbitraire $\frac{n}{m}$ qu'on peut établir entre ces deux nombres, en les faisant croître indéfiniment.

Développement de $(1+x)^a$.

Les dérivées successives de $f(x) = (1+x)^a$ s'obtiennent immédiatement, et l'on a :

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

$$\text{d'où} \quad f^{n}(0) = a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1)$$

et par conséquent :

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1.2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{a(a-1)\ldots.(a-n+1)}{1.2\ldots\ldots n-1}x^{n-1} + R$$

J'adopterai encore la seconde forme à l'égard du reste en posant :

$$R = \frac{a(a-1)\ldots.(a-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{a-n}$$

Cela posé, le rapport du $(n+1)^{\text{ème}}$ terme au n^e terme de la série étant : $\frac{a-n+1}{n}x$, dont la limite est $-x$ pour n infini, la formule ne peut subsister que si x est compris entre -1 et $+1$, comme dans le cas précédent. En nous plaçant dans cette hypothèse, écrivons la valeur de R de cette manière : (M. Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral, tome 1, page 176)

$$\frac{(1+\theta x)^{a-1}}{ax} R = \left[\frac{(a-1)x}{1} \; \frac{(a-2)x}{2} \cdots\cdots \frac{(a-n+1)x}{n}\right] \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n}$$

Il est aisé de voir que la quantité entre crochets tend vers zéro quand n augmente ; en effet, quand n croît de l'unité, elle acquiert le facteur $-x\left(1-\frac{a+1}{n}\right)$ qui a $-x$ pour limite. Cette quantité est donc un produit dans lequel les facteurs plus grands que m, en valeur absolue sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux dont la valeur absolue est inférieure à une quantité donnée comprise entre x et 1, augmente indéfiniment. D'ailleurs, l'expression $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ a pour maximum l'unité, de sorte que la limite de R est bien égale à zéro, et la formule du binôme subsiste, quel que soit l'exposant, pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

Quant à ces valeurs limites à l'égard desquelles on ne peut rien conclure de ce qui précède, je me borne à énoncer que pour a positif la formule subsiste en faisant $x = \pm 1$, et seulement pour $x = 1$, l'exposant étant compris entre zéro et -1. Dans les autres cas, la série est divergente.

IV. La série de Taylor s'étend aux fonctions de deux variables, de manière à donner, par exemple, le développement suivant les puissances de h et de k, de $f(x+h, y+k)$.

Voici, à ce sujet, la méthode employée par Lagrange dans les Leçons sur le calcul des Fonctions. Représentant par $f^{n}_{x^n}(x,y)$ la n^e dérivée de $f(x,y)$, prise par rapport à la variable x, on pourra écrire :

$$f(x+h,y) = f(x,y) + \frac{h}{1} f'_x(x,y) + \frac{h^2}{1.2} f''_{x^2}(x,y) + \cdots\cdots$$
$$= \sum \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{n}_{x^n}(x,y).$$

Cela posé, changeons dans les deux membres y en $y+k$, et désignons par $f^{(n+p)}_{x^n y^p}(x,y)$ la dérivée d'ordre p par rapport à y, de la dérivée n^e prise par rapport à x, on aura :

$$f^{(n)}_{x^n}(x, y+k) = \sum \frac{k^p}{1.2\ldots p} f^{(n+p)}_{x^n y^p}(x,y)$$

et par conséquent :

$$f(x+h, y+K) = \sum \sum \frac{h^n K^p}{1.2 \ldots n \times 1.2 \ldots p} f^{(n+p)}_{x^n y^p} x, y$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives des nombres n et p. L'illustre géomètre ajoute qu'on aurait identiquement le même résultat, si on commençait l'opération par la substitution de $y+K$ à la place de y, le développement suivant les puissances croissantes de K, et qu'on fît ensuite la substitution de $x+h$ pour x, et le développement suivant les puissances de h. Mais de cette seconde manière, on obtiendra, pour terme général de la série, l'expression :

$$\frac{h^n K^p}{1.2 \ldots n \times 1.2 \ldots p} f^{(n+p)}_{y^p x^n}(x, y)$$

de sorte qu'on doit nécessairement avoir :

$$f^{(n+p)}_{x^n y^p}(x, y) = f^{(n+p)}_{y^p x^n}(x, y)$$

relation d'une grande importance, et montrant qu'à l'égard des fonctions de deux variables, l'ordre des dérivations par rapport à l'une et à l'autre variable, peut être interverti sans changer la valeur du résultat.

Mais je reviens à la série précédente, pour la présenter sous une autre forme. En groupant les termes du même degré en h et en K, on peut l'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+K) = f(x,y) + h f'_x(x,y) &+ h^2 f''_{x^2}(x,y) \\ + K f'_y(x,y) &+ 2hK f''_{xy}(x,y) \\ &+ K^2 f''_{y^2}(x,y) \end{aligned} \Bigg| \frac{1}{1.2} + \&^{ca} \ldots$$

et l'ensemble des termes du n^e ordre sera :

$$\left[h^n f^n_{x^n}(x,y) + \frac{n}{1} h^{n-1} K f^{(n)}_{x^{n-1} y}(x,y) + \cdots + \frac{n}{1} h K^n f^n_{x, y^{n-1}}(x,y) + K^n f^n_{y^n}(x,y)\right] \frac{1}{1.2 \ldots n}$$

les coefficients numériques étant évidemment ceux de la puissance n^e du binome ; c'est à ce résultat qu'on parvient, d'une autre manière, en posant :

$$F(t) = f(x+ht, y+Kt)$$

développant $F(t)$, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances de t, et enfin, posant dans le résultat : $t = 1$. L'avantage de cette méthode consiste à pouvoir donner une expression du reste de la série, bornée à un nombre fini de termes, mais cette expression compliquée paraît peu utile, et n'a jamais reçu une seule application.

Remarques sur le développement des fonctions par la formule de Maclaurin.

I. Parmi les fonctions simples auxquelles on a précédemment appliqué le théorème de Maclaurin, les unes, comme e^x, $\sin x$, $\cos x$, et $(1+x)^m$, quand l'exposant est entier et positif, conduisent à des séries subsistant dans toute l'étendue des valeurs réelles ou imaginaires de la variable. Celles-ci, au contraire, $\log(1+x)$ et $(1+x)^a$, a n'étant plus entier et positif, ne se développent qu'en supposant la variable, en valeur absolue inférieure à l'unité. Ce fait analytique tient à une différence de nature entre les deux groupes de fonctions, que la considération des variables imaginaires rendra manifeste.

J'observe d'abord qu'en faisant :

$$x = \rho\,(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$

dans une série : $\qquad \sum A_n x^n$

où les exposants de la variable sont des nombres entiers positifs ou négatifs, on obtient pour résultat cette expression :

$$\sum A_n \rho^n \cos n\omega + \sqrt{-1}\sum A_n \rho^n \sin n\omega$$

dont les deux termes reprennent la même valeur quand on y change ω en $\omega + 2\pi$ si le module ρ par exemple est constant. Or, en écrivant :

$$1 + x = R\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

on a vu plus haut que l'angle φ devient $\varphi + 2\pi$, quand on remplace ω par $\omega + 2\pi$ lorsqu'on suppose ρ supérieur au module de -1, c'est à dire à l'unité. Par conséquent, il est alors impossible que les quantités

$$\log(1+x) = \log R + \varphi\sqrt{-1}$$

$$(1+x)^a = R^a(\cos a\varphi + \sqrt{-1}\sin a\varphi)$$

soient développables sous la forme $\Sigma A_n x^n$, puisqu'en changeant ω en $\omega + 2\pi$, ni l'une ni l'autre ne se reproduisent. La première s'augmente effectivement de $2\pi\sqrt{-1}$, la seconde devient :

$$R^a\left[\cos a(\varphi+2\pi)+\sqrt{-1}\sin a(\varphi+2\pi)\right] = \mathcal{E}\,R^a(\cos a\varphi+\sqrt{-1}\sin a\varphi)$$

et se trouve multipliée par le facteur :

$$\mathcal{E} = \cos 2a\pi + \sqrt{-1}\sin 2a\pi$$

qui est différent de l'unité si l'exposant a, n'est point entier.

Au contraire, en supposant $\rho < 1$, on a vu que φ ne change pas quand ω augmente de la circonférence ; rien alors ne s'oppose plus à ce que les fonctions soient représentées par les séries que donne le théorème de Maclaurin. En effet c'est ce qui a lieu, mais c'est seulement dans le calcul intégral que ce théorème sera étendu aux valeurs imaginaires de la variable.

* II. Le petit nombre d'applications qui ont été faites de la série de Maclaurin, tient à la difficulté d'obtenir l'expression générale d'une dérivée d'ordre quelconque de la fonction qu'on veut développer, et qu'il est nécessaire de connaître pour former le reste. Cette série n'en est pas moins d'un usage continuel dans toutes les circonstances où l'on n'a besoin que des premiers termes, en négligeant la discussion du reste. Elle peut servir aussi dans des questions d'analyse pure, et j'en donnerai un exemple en recherchant la dérivée d'ordre n d'une fonction de fonction $f[\varphi(x)]$, ou bien $f(u)$ en supposant, pour abréger, $u = \varphi(x)$. Cette dérivée étant le coefficient de $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$ dans le développement de :

$$f\left[\varphi(x+h)\right]$$

je partirai de la relation :

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \ldots\ldots$$

et faisant :

$$\delta = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \ldots$$

ou plutôt :

$$\delta = \frac{h}{1}u' + \frac{h^2}{1.2}u'' + \frac{h^3}{1.2.3}u''' + \ldots\ldots$$

je mettrai le développement cherché sous cette première forme :

$$f\left[\varphi(x+h)\right] = f(u+\delta) = f(u) + \frac{\delta}{1} f'(u) + \frac{\delta^2}{1.2.} f''(u) + \dots\dots$$
$$+ \frac{\delta^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(u) + \dots\dots\dots$$

Cela étant, il restera à calculer les puissances successives de δ, afin d'obtenir dans chacune d'elles le coefficient de h^n, mais h étant en facteur dans δ, on n'aura point à considérer les puissances δ^{n+1}, δ^{n+2} etc, d'où l'on voit déjà que la dérivée cherchée sera de la forme :

$$1.2\dots n\left[A_1 f'(u) + \frac{A_2}{1.2} f''(u) + \dots + \frac{A_i}{1.2\dots i} f^{(i)}(u) + \dots\dots + \frac{A_n}{1.2\dots n} f^{(n)}(u)\right]$$

A_i étant le coefficient de h^n dans δ^i.

Soit, par exemple, $u = x^2$, on aura :

$$\delta = 2hx + h^2 = h(2x+h)$$

et $$\delta^i = h^i\left[(2x)^i + \frac{i}{1}(2x)^{i-1}h + \frac{i(i-1)}{1.2}(2x)^{i-2}h + \dots\dots + \frac{i(i-1)\dots(i-K+1)}{1.2\dots\dots K}(2x)^{i-K}h^K + \dots\right]$$

Nous obtiendrons donc le coefficient A_i en faisant $i+K=n$, c'est-à-dire $K=n-i$, ce qui donnera :

$$A_i = \frac{i(i-1)(i-2)\dots(2i-n+1)}{1.2\dots\dots n-i}(2x)^{2i-n}$$

quantité qui s'annule tant qu'on ne supposera point : $i > \frac{n-1}{2}$

Soit encore : $u = \frac{1}{x}$, d'où : $\delta = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = -\frac{h}{x(x+h)}$, et par suite :

$$\delta^i = (-1)^i \frac{h^i (x+h)^i}{x^i} = \frac{(-1)^i h^i}{x^i}\left[\frac{1}{x^i} - \frac{i}{1}\frac{h}{x^{i+1}} + \frac{i(i+1)}{1.2}\frac{h^2}{x^{i+2}} \dots\dots\right]$$

on obtiendra semblablement :(1)

$$A_i = \frac{(-1)^n}{x^{n+i}} \cdot \frac{i(i+1)(i+2)\dots\dots(n-1)}{1.2\dots\dots n-i}$$

Revenant au cas général, nous remarquerons qu'en vertu du théorème de Maclaurin, le coefficient de $\frac{h^n}{1.2\dots n}$ dans le développement de la fonction :

$$\delta^i = \left[\varphi(x+h) - \varphi(x)\right]^i$$

---

(1) M. Schlömilch, Journal de Crelle, tome 30.

est la dérivée n^e de cette quantité, prise par rapport à h quand on y aura fait $h=0$. Cette dérivée, d'ordre n, se tire immédiatement du développement de la puissance

$$\delta^i = \varphi^i(x+h) - \frac{i}{1}\varphi^{i-1}(x+h)\varphi(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\varphi^{i-2}(x+h)\varphi^2(x)\ldots\ldots$$

et a pour valeur :

$$\left[\varphi^i(x+h)\right]^{(n)} - \frac{i}{1}\left[\varphi^{i-1}(x+h)\right]^{(n)}\varphi(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\left[\varphi^{i-2}(x+h)\right]^{(n)}\varphi^2(x) - \ldots\ldots$$

Or, en y faisant $h=0$, elle se réduit à :

$$\left[\varphi^i(x)\right]^{(n)} - \frac{i}{1}\left[\varphi^{i-1}(x)\right]^{(n)}\varphi(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\left[\varphi^{i-2}(x)\right]^{(n)}\varphi^2(x) - \ldots\ldots$$

de sorte qu'il vient, en remplaçant, pour abréger l'écriture, $\varphi(x)$ par u :(1)

$$A_i = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[(u^i)^{(n)} - \frac{i}{1}(u^{i-1})^{(n)}u + \frac{i(i-1)}{1.2}(u^{i-2})^{(n)}u^2 - \ldots\ldots\right]$$

le dernier terme de la quantité entre parenthèse étant : $(-1)^i\, i\,(u)^n u^{i-1}$.

* III. Je terminerai ces remarques par quelques exemples de dévelop=pements en série de fonctions de deux variables, savoir :

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}} + (1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1.3.5\ldots.2a-1\,.\,1.3.5\ldots.2b-1}{2.4.6\ldots\ldots2(a+b)}\,x^a y^b$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2.4}(3x^2+xy+3y^2) + \ldots\ldots$$

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y} = \sum \frac{1.2.3\ldots.a\,.\,1.2.3\ldots.b}{1.2.3\ldots.a+b+1}\,x^a y^b$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2.3}(2x^2+xy+2y^2) + \ldots\ldots$$

$$\frac{\arccos\sqrt{\frac{1-x}{1-y}}}{\sqrt{(1-x)(x-y)}} = 1 + \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}y\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(x^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1.3}{2.4}y^2\right)$$

$$+ \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(x^3+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1.3}{2.4}xy^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3\right) + \ldots\ldots$$

---

(1) Voyez une autre démonstration de ce résultat dans le Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral de M. Bertrand, Tome I, page 139.

$$\frac{\arc\cos\left[\dfrac{(1-y)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{-\frac{1}{2}}}\right]}{\sqrt{y(1-x)(x-y)}}=\frac{1}{2}+\frac{1.3.}{2.4}\left(x+\frac{2}{3}y\right)$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+\frac{2.4}{3.5}y^2\right)$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(x^3+\frac{2}{3}x^2y+\frac{2.4}{3.5}xy^2+\frac{2.4.6}{3.5.7}y^3\right)$$
$$+\cdots\cdots$$

Enfin, j'indiquerai comme trouvant une application géométrique importante, ce résultat, que le groupe homogène des termes du second degré dans le développement du radical :

$$\sqrt{1+2(\alpha x+\alpha' y)+(\beta x^2+\beta' xy+\beta'' y^2)}=1+(\alpha x+\alpha' y)$$
$$+\frac{1}{2}\left[(\beta x^2+\beta' xy+\beta'' y^2)-(\alpha x+\alpha' y)^2\right]$$
$$+\cdots\cdots$$

entre comme facteur dans le groupe homogène du 3e degré et des degrés plus élevés.

Différentielles des fonctions d'une variable.

Différentielle du premier ordre.

I. — On a fait usage, en établissant les propriétés fondamentales des fonctions dérivées de l'équation suivante :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon$$

où ε désigne une quantité qui s'évanouit avec h. Cette équation donnant

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h\,f'(x)}=1+\frac{\varepsilon}{f'(x)}$$

montre que la limite du rapport de la différence $f(x+h)-f(x)$ au produit $h\,f'(x)$ est l'unité lorsque h tend vers zéro. C'est à ce produit qu'on a donné le nom de différentielle de $f(x)$, et on le désigne par la caractéristique d écrite devant la fonction, de sorte que l'on a :

$$df(x) = hf'(x)$$

Dans le cas particulier de $f(x) = x$, cette équation devient :

$$dx = h$$

et la relation précédente s'écrit ainsi :

$$df(x) = f'(x)\, dx$$

La définition de la différentielle ainsi posée, voici la première proposition à établir : Soit $u = \varphi(x)$ et $y = f(u)$ je dis que la différentielle de y reste la même ; soit qu'on exprime y en fonction de u par l'équation $y = f(u)$, ou en fonction de x par celle-ci :

$$y = f\left[\varphi(x)\right]$$

En effet, la différentielle de y, en considérant y comme fonction de x, est le produit de dx par la dérivée de y ; on a donc, d'après la règle relative à la dérivée des fonctions de fonctions :

$$dy = f'(u)\,\varphi'(x)\, dx.$$

Or, la différentielle de y considérée comme fonction de u, est :

$$dy = f'(u)\, du.$$

ce qui est précisément le résultat précédent, en observant que la différentielle $\underline{du}$ a pour valeur $\varphi'(x)\, dx$.

Soit par exemple : $y = x^m$, et $y = u^m$ au lieu des deux expressions établies en algèbre : $y' = mx^{m-1}$, $y' = mu^{m-1}u'$, on aura ces résultats de même forme : $dy = mx^{m-1}dx$, et $dy = mu^{m-1}du$.

Nous avons maintenant à donner l'expression de la différentielle de toute fonction d'une variable, c'est à dire simplement à appliquer la notation différentielle aux expressions des dérivées des diverses fonctions considérées en algèbre, et que nous allons ainsi passer en revue.

Soient à cet effet, $u, v, w, \ldots$ diverses fonctions de x ; les relations suivantes :

$$y = u + v + w + \ldots\ldots$$

$$y = uv$$

$$y = \frac{u}{v}$$

donnent :

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = u'v' + v'u$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{u^2}$$

Multiplions donc les deux nombres par dx, et remplaçant : $u'dx$, $v'dx$, $w'dx$, ... par du, dv, dw, il viendra :

$$dy = du + dv + dw + \ldots\ldots$$

$$dy = vdu + udv$$

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

En opérant de même sur l'équation qui donne la dérivée d'une fonction composée de plusieurs autres, $y = f(u, v, w, \ldots\ldots)$ savoir :

$$y' = f'_u\, u' + f'_v\, v' + f'_w\, w' + \ldots\ldots$$

on trouvera : $$dy = f'_u\, du + f'_v\, dv + f'_w\, dw + \ldots\ldots$$

Et si à ces résultats on joint les suivants :

$$dx^m = mx^{m-1}\,dx \qquad d \log x = \frac{1}{x}\,dx$$

$$da^x = a^x \log a\, dx \qquad d \operatorname{arc} \sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$d \sin x = \cos x\, dx \qquad d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$d \cos x = \sin x\, dx \qquad d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$d \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$$

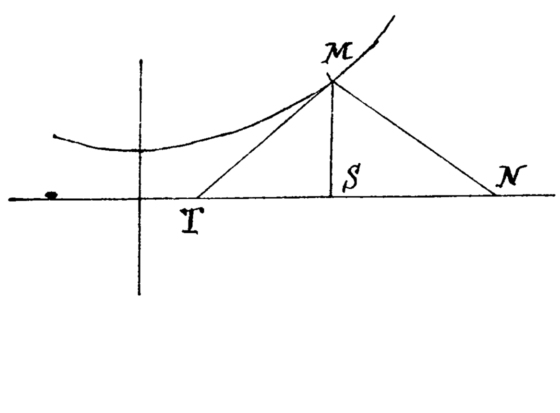
on aura réuni tout ce qui concerne la différentiation des fonctions explicites ; quant aux fonctions implicites données par une équation entre x et y $f(x, y) = 0$; la valeur $y' = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$ conduit à : $dy = -\dfrac{f'_x}{f'_y}\,dx$.

II. L'introduction de la notion de différentielle nous ayant ainsi amenés à présenter l'ensemble des résultats obtenus en algèbre relativement à la formation des fonctions dérivées, je résumerai succinctement les procédés qui y conduisent. La dérivée de $y = f(u)$, en supposant $u = \varphi(x)$ savoir $y' = f'(u)\,\varphi'(x)$, sera le premier point à établir, et on sait qu'on y parvient bien facilement. Le second point sera la dérivée de $\log x$; il exige plus de développement, mais on peut le considérer comme fondamental car, en employant cette proposition évidente que la dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des dérivées de chacune d'elles, on en déduit immédiatement la dérivée d'un produit de deux ou d'un nombre quelconque de facteurs, d'un quotient, d'une puissance, l'exposant étant quelconque, enfin de l'exponentielle. Soit, par exemple, $y = u^m$, on aura $\log y = m \log u$, puis: $\frac{y'}{y} = \frac{m u'}{u}$; d'où: $y' = m \frac{y}{u} u' = m u^{m-1} u'$. Soit encore $y = a^x$, on aura: $x \log a = \log y$; et on en conclura: $\log a = \frac{y'}{y}$, d'où: $y' = y \log a = a^x \log a$. — Viennent après les fonctions circulaires, dont la dérivée se déduirait encore de l'exponentielle, en admettant les formules d'Euler:

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

mais qu'on établit directement d'une manière plus élémentaire. Obtenu par une voie ou par l'autre, le résultat conduit, en posant $\sin y = x$, $\cos y = x$, aux dérivées de arc sin x, arc cos x, et il ne reste plus qu'à chercher celles des fonctions implicites. Ici se place un théorème important, donnant l'expression de la dérivée d'une fonction $f(u,v)$, composée de deux autres, et dont la démonstration est encore très facile. Appliqué à l'équation $f(x,y) = 0$, il conduit immédiatement à l'expression cherchée, et qui complète l'ensemble des résultats précédemment énumérés, et servant de base au calcul différentiel.

III. Avant d'aller plus loin, je vais considérer, afin de familiariser avec la notation différentielle, quelques questions qui dépendent d'éléments géométriques relatifs à la tangente à une courbe $y = f(x)$.



En un point quelconque M, menons la tangente MT, la normale MN, et l'ordonnée MS, et désignons par φ l'angle MTS. On aura immédiatement:

$$SN = y \operatorname{tang} \varphi$$

$$ST = y \operatorname{cotg} \varphi$$

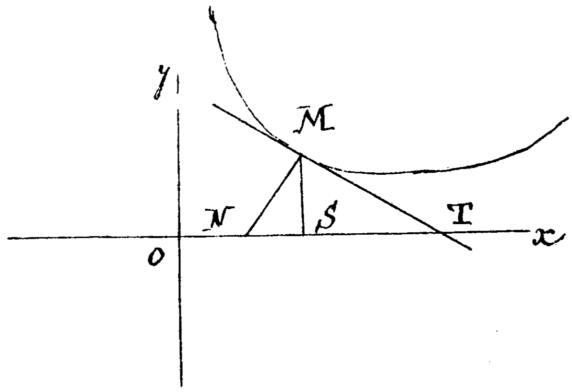
$$MN = \frac{y}{\cos \varphi}$$

$$MT = \frac{y}{\sin \varphi}$$

ce sont les longueurs auxquelles on donne les noms de sous-normale et de sous-tangente, de normale et de tangente. Considérant en particulier les deux premières, je remarque que si l'angle φ est obtus, comme l'indique cette nouvelle figure, on aurait :

$$SN = -y \operatorname{tang} \varphi$$

$$ST = -y \operatorname{cotg} \varphi.$$



Mais alors les longueurs ne sont plus comptées dans le même sens par rapport à la projection du point de contact sur l'axe Ox, de sorte qu'on peut se borner aux premières formules : $SN = y \operatorname{tang} \varphi$, $ST = y \operatorname{cotg} \varphi$, en faisant la convention suivante :

La sous normale sera portée à droite du point S si elle est positive, et à gauche si elle est négative. Cela posé, je me propose de déterminer toutes les courbes :

$$Y = f(x)$$

ayant au signe près, même sous-normale, et même sous-tangente qu'une courbe donnée quelconque : $y = \varphi(x)$.

Employant à cet effet l'expression : $\operatorname{tang} \varphi = \frac{dy}{dx}$, qui permet d'écrire :

$$SN = \frac{y\,dy}{dx}, \qquad ST = \frac{y\,dx}{dy}$$

je suis amené aux relations :

$$\frac{Y\,dY}{dx} = \pm \frac{y\,dy}{dx}$$

$$\frac{Y\,dx}{dY} = \pm \frac{y\,dx}{dy}$$

Or, la première, en multipliant les deux membres par $2\,dx$, donne immédiatement :

$$2Y\,dY = \pm 2y\,dy$$

ou bien : $$dY^2 = d(\pm y^2)$$

et en désignant par A une constante arbitraire, on en conclut :

$$Y^2 = \pm y^2 + A.$$

A l'égard de la seconde, envisageant d'abord le signe +, on aura :

$$\frac{Y\,dx}{dY} = \frac{y\,dx}{dy}$$

ou, sous une autre forme :

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dy}{y}$$

et on reconnaît ainsi dans les deux membres les différentielles de $\log Y$ et $\log y$, de sorte que nous en conclurons, en désignant par $\log A$ une constante arbitraire :

$$\log Y = \log y + \log A$$

et enfin : $$Y = Ay.$$

Si l'on considère en second lieu le signe −, c'est à dire la relation :

$$\frac{Y\,dx}{dY} = -\frac{y\,dx}{dy}$$

on en déduira : $Y\,dy + Y\,dy = 0$

et le premier membre mettant en évidence la différentielle du produit Yy, nous sommes amenés à cette conclusion :

$$Yy = A$$

d'où : $$Y = \frac{A}{y}.$$

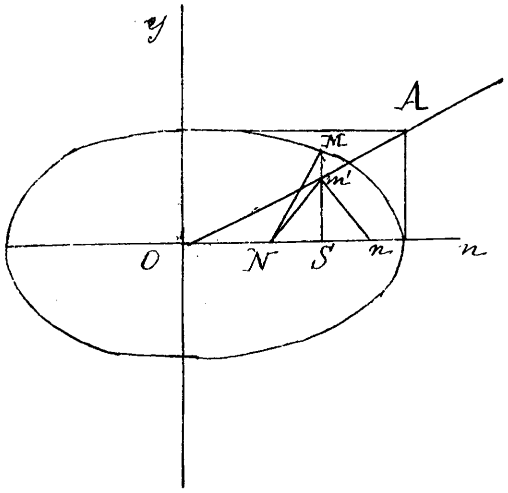
On voit donc qu'étant donnée la tangente à la courbe $y = \varphi(x)$ on en déduit par une construction géométrique immédiate, la tangente aux diverses courbes :

$$\begin{cases} y^2 = \pm\varphi^2(x) + A \\ y = A\,\varphi(x) \\ y = \dfrac{A}{\varphi(x)} \end{cases}$$

Toutes les courbes du second degré, sous ce point de vue, dépendront de la ligne droite, qui est à elle-même sa propre tangente, et en considérant pour seul exemple l'ellipse :

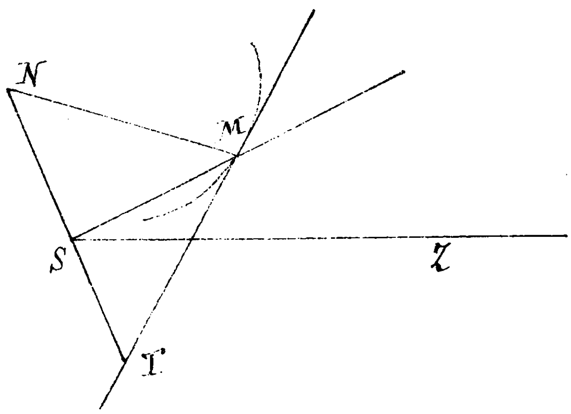
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$$

nous opérerons ainsi : Ayant tracé la droite $y = \frac{b}{a}x$, qui est la diagonale



OA du rectangle des axes, et mené l'ordonnée MS, d'un point quelconque M de la courbe, nous obtiendrons sur cette diagonale le point m, auquel correspond la même sous-normale sauf le signe. Soit mn conduit perpendiculairement à Om, afin d'obtenir Sn ; nous porterons cette distance à gauche du point S, en SN = Sn, et MN sera précisément la normale au point M de l'ellipse.

IV. – Afin d'appliquer encore la notation différentielle, voici les questions analogues aux précédentes à l'égard des courbes rapportées à des coordonnées polaires, ou l'on emploie encore ces mêmes dénominations de sous-normale, sous-tangente, &c.…, mais en les définissant d'une autre manière, comme il suit :



Élevons au pôle S une perpendiculaire au rayon vecteur $SM = \rho$; soient T et N les points de rencontre de cette perpendiculaire avec la tangente et la normale à la courbe en M ; on aura, si l'on désigne par V l'angle SMT :

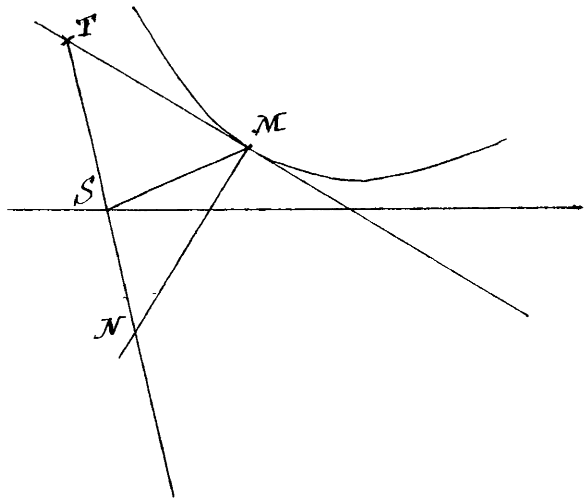
la sous-normale : $SN = \rho \cot g . V$

la sous-tangente : $ST = \rho \operatorname{tang} V$

la normale : $MN = \dfrac{\rho}{\sin V}$

la tangente : $MT = \dfrac{\rho}{\cos V}$

Les diverses expressions, sauf celle de la normale MN, sont affectées du signe – dans le cas de l'angle V obtus, comme on le verrait par cette seconde figure. (Voir à la page suivante.) – Mais, sans m'y arrêter, je remarque qu'en désignant par ρ' la dérivée de ρ par rapport à l'angle polaire ω, on a :



$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}$$

et on en conclut, en employant la notation différentielle :

$$SN = \frac{d\rho}{d\omega}$$

$$ST = \frac{\rho^2 d\omega}{d\rho}$$

$$MN = \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega}}{d\omega}$$

$$MT = \frac{\rho\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}{d\rho}$$

Soit donc $\rho = f(\omega)$ l'équation d'une courbe quelconque, nous obtiendrons toutes les autres lignes $\rho_1 = \varphi(\omega)$ ayant même sous-normale, en posant :

$$\frac{d\rho_1}{d\omega} = \frac{d\rho}{d\omega}$$

d'où :
$$\rho_1 = \rho + A$$

Cette seconde courbe a reçu le nom de conchoïde de la première. En égalant les sous-tangentes, nous trouverons :

$$\rho_1^2 \frac{d\omega}{d\rho_1} = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}$$

ou bien :
$$\frac{d\rho_1}{\rho_1^2} = \frac{d\rho}{\rho^2}$$

et par conséquent :
$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} + A$$

ce qui établit entre les inverses des rayons vecteurs la même relation que précédemment.

Un résultat plus important s'obtient enfin en cherchant sous quelle condition les angles des tangentes avec les rayons vecteurs correspondant au même angle polaire ω sont supplémentaires. En posant en conséquence :

$$\frac{\rho_1\, d\omega}{d\rho_1} = -\frac{\rho\, d\omega}{d\rho}$$

ce qui peut s'écrire : $\rho_1\, d\rho + \rho\, d\rho_1 = 0$

on en conclut : $\rho\rho_1 = A$

et on voit que la seconde courbe est la transformée de la première, par rayons vecteurs réciproques.

Différentielles d'un ordre quelconque.

I. En posant : $y = f(x)$ l'équation

$$dy = f'(x)\, dx$$

sert, comme on l'a vu, de définition à la différentielle première de y. Or, cette différentielle étant une fonction de x, a elle-même une différentielle qu'on désigne par $d(dy)$, ou plus simplement d^2y, et dont l'expression, en supposant dx constant, s'obtient immédiatement au moyen de $f''(x)$. Effectivement, la différentielle de $f'(x)\,dx$, sera le produit de dx par sa dérivée relative à x, c'est à dire $f''(x)\,dx$, puisque dx est constant, de sorte que l'on aura :

$$d^2y = f''(x)\, dx^2$$

On obtiendra de même

$$d^3y = f'''(x)\, dx^3$$

et généralement : $$d^ny = f^n(x)\, dx^n.$$

Il est à peine nécessaire d'observer que n indique dans d^ny l'opération n fois répétée de différentiation, tandisque dans dx^n, c'est un véritable exposant algébrique.

Cette notion de différentielles d'ordre quelconque, étant en analyse d'une grande importance, nous allons la présenter sous un nouveau point de vue.

II. A cet effet, je considère la suite des fonctions $f_1(x), f_2(x)\ldots$ $\ldots f_n(x)$ auxquelles je donne le nom de différences successives de $f(x)$, savoir :

$$f_1(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$f_2(x) = f_1(x+h) - f_1(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x+h) - f_{n-1}(x)$$

et je vais prouver qu'on a : $f_n(x) = h^n \left[f^{(n)}(x) + \varepsilon_n \right]$

ε_n s'évanouissant avec h.

Pour cela, j'observerai d'abord qu'on obtient successivement :

$$f_2(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$f_3(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(2+h) - f(x)$$

et généralement : $f_n(x) = f\left[x+nh\right] - n_1 f\left[x+(n-1)h\right] + n_2 f\left[x+(n-2)h\right] - \text{etc.} \ldots$

les quantités $n_1, n_2 \ldots$ désignant les coefficients des puissances de x, dans le développement de $(1+x)^n$. Cette formule importante se vérifie par le procédé élémentaire qui consiste à la supposer vraie pour un nombre quelconque n, et à démontrer qu'elle subsiste pour le nombre $n+1$. Cela posé, développons $f_n(x)$ suivant les puissances croissantes de h, en appliquant la série de Taylor à chacun des termes qui entrent dans son expression, savoir :

$$f\left[x+nh\right] = f(x) + \frac{nh}{1} f'(x) + \frac{n^2h^2}{1.2.} f''(x) + \ldots\ldots$$

$$f\left[x+(n-1h)\right] = f(x) + \frac{(n-1)h}{1} f'(x) + \frac{(n-1)^2h^2}{1.2.} f''(x) + \ldots\ldots$$

Ces développements, substitués dans $f_n(x)$ donnent pour résultat :

$$f_n(x) = N_0 f(x) + N_1 h f'(x) + N_2 h^2 f''(x) + \&^{ca} \ldots$$

les coefficients désignés par $N_0, N_1, N_2, \&^{ca}$, dépendant uniquement du nombre n. En particulier, on trouvera :

$$N_0 = 1 - n_1 + n_2 - \ldots\ldots = (1-1)^n = 0$$

mais les suivants demandent, pour être déterminés, un procédé parti=culier, souvent employé dans d'importantes questions d'analyse. Il consiste à mettre à profit cette circonstance, que les valeurs cherchées sont les mêmes pour toute fonction $f(x)$, et à faire la supposition de $f(x) = e^x$, d'où résultent les conséquences qu'on va voir. En premier lieu, on trouve :

$$f_1(x) = e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$$

$$f_2(x) = e^x(e^h-1)^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x) = e^x(e^h - 1)^n$$

Toutes les dérivées de $f(x)$ reproduisent d'ailleurs e^x, de sorte que la formule de développement de $f(x)$ donne immédiatement, en supprimant dans les deux membres le facteur e^x :

$$(e^h-1)^n = N_0 + N_1 h + N_2 h^2 + \ldots\ldots$$

c'est à dire : $\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right)^n = N_0 + N_1 h + N_2 h^2 + \ldots\ldots$

Or, le premier membre contient en facteur h^n ; donc, tous les membres $N_0, N_1, N_2, \ldots\ldots$ jusqu'à N_{n-1} sont nuls, et l'on a :

$$N_n = 1,\ N_{n+1} = \frac{n}{2},\ N_{n+2} = \frac{n(3n+1)}{24},\ N_{n+3} = \frac{n^2(n+1)}{48}, \text{\&}^{ca} \ldots\ldots$$

Nous obtenons donc, pour le développement cherché :

$$f_n(x) = h^n\left[f^{(n)}(x) + \varepsilon_n\right]$$

en posant : $\varepsilon_n = \frac{nh}{2} f^{(n+1)}(x) + \frac{n(3n+1)h^2}{24} f^{(n+2)}x, \text{\&}^{ca} \ldots\ldots$

quantité qui s'évanouit avec h. Il en résulte que la limite du rapport de la différence finie $f_n(x)$ au terme $h^n f^n(x)$ est l'unité lorsque h tend vers zéro ; or, ce terme, en faisant $h = dx$, est précisément la différentielle d'ordre n de $f(x)$ à l'égard de laquelle on trouve, par cette nouvelle voie la définition et la propriété caractéristique, donnée pour la différentielle du premier ordre.

III. — J'ai considéré, pour plus de simplicité, la série de Taylor comme indéfinie dans ce qui précède ; mais si l'on veut raisonner plus rigoureusement, et envisager un nombre fini de termes, on observera qu'en arrêtant à la puissance h^{n+1} les développements de $f(x+nh), f[x+(n-1)h]$, on obtient :

$$f_n(x) = N_0 f(x) + N_1 h f'(x) + \ldots\ldots + N_n h^n f^n(x) + \frac{h^{n+1} R}{1.2\ldots n+1}$$

si l'on fait, pour abréger :

$$R = n^{n+1} f^{(n+1)}(x_n) - n_1(n-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x_{n-1}) + n_2(n-2)^{n+1} f^{(n+1)}(x_{n-2}) - \ldots \pm n_1 f^{(n+1)}(x_1)$$

x_i désignant une valeur comprise entre les limites x et $x + ih$. Cela étant, la conclusion ressortira des propriétés purement numériques des coefficients $N_0, N_1, N_2, \ldots\ldots$ dont les $n-1$ premiers s'évanouissent, les suivants étant :

$N_n = 1$, $N_{n+1} = \frac{n}{2}$, &c^{ca} ; propriétés qu'on peut supposer établies a priori. Nous trouvons ainsi non-seulement :

$$f_n(x) = h^n \left[f^{(n)}(x) + \mathcal{E}_n \right]$$

mais encore $\mathcal{E}_n$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_n = \frac{h R}{1.2\ldots n+1}$$

Différentielles partielles et différentielles totales.

I. – Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ peut être différentiée m fois par rapport à x, et ensuite p fois par rapport à y ; c'est au résultat de ces opérations qu'on donne le nom de différentielle partielle. D'après ce qui précède, la différentielle d'ordre m par rapport à x, s'exprimera par le produit de la dérivée m^e $f_{x^m}^{(m)}(x, y)$, multipliée par dx^m, et si en considérant x comme constant, on différentie l'expression :

$$f_{x^m}^{m}(x, y)\, dx^m$$

p fois par rapport à y, le résultat sera :

$$f_{x^m y^p}^{(m+p)}(x, y)\, dx^m\, dy^p$$

On l'écrit plus simplement encore de cette manière :

$$\frac{d^{m+p} z}{dx^m\, dy^p}\, dx^m\, dy^p$$

car en premier lieu, $\frac{d^m z}{dx^m}$ est la dérivée d'ordre m de z, par rapport à x, et on convient ensuite de poser :

$$\frac{d^p}{dy^p}\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right) = \frac{d^{m+p} z}{dx^m\, dy^p}$$

Comme on a déjà démontré qu'on peut, à l'égard des fonctions de deux variables, intervertir l'ordre des dérivations par rapport à l'une et l'autre variable, il en résulte que :

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{d^p z}{dy^p}\right) = \frac{d^p}{dy^p}\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right)$$

et c'est ce qui justifie la notation adoptée, $\frac{d^{m+p} z}{dx^m dy^p}$, où figure en dénominateur le produit algébrique $dx^m dy^p$.

Soit proposé, comme exemple, de déterminer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ d'une fonction de x et y définie par l'équation:

$$F(x, y, z) = 0$$

Nous différentierons d'abord cette équation par rapport à x, en appliquant la règle des fonctions composées, et il viendra, en faisant, suivant l'usage $\frac{dz}{dx} = p$,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} p = 0$$

Pour avoir ensuite $\frac{dz}{dy}$ qu'on représente par q, nous différentierons de même par rapport à y, ce qui donnera:

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} q = 0$$

Si l'on désirait en outre les trois dérivées partielles du second ordre, à savoir:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r \qquad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = s \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} = t$$

on opérerait ainsi.

Différentiant par rapport à x l'équation:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} p = 0.$$

nous observerons que les quantités $\frac{dF}{dx}$ et $\frac{dF}{dz}$ contiennent x et z, et donneront chacune deux termes; nous appliquerons ensuite le théorème qui permet de remplacer $\frac{d^2 F}{dz\,dx}$ par $\frac{d^2 F}{dx\,dz}$, et enfin remarquant que $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} = r$, on trouve:

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + 2\frac{d^2 F}{dx\,dz} p + \frac{d^2 F}{dz^2} p^2 + \frac{dF}{dz} r = 0.$$

Pour avoir s, nous pouvons partir de la même relation différentiée par rapport à y, ou de celle-ci:

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} q = 0$$

différentiée par rapport à x, et il vient ainsi :

$$\frac{dF^2}{dx\,dy} + \frac{d^2F}{dy\,dz}p + \frac{d^2F}{dx\,dz}q + \frac{d^2F}{dz^2}pq + \frac{dF}{dz}s = 0$$

Enfin t résultera de la dernière différentiée par rapport à y, ce qui donnera :

$$\frac{d^2F}{dy^2} + 2\frac{d^2F}{dy\,dz}q + \frac{d^2F}{dz^2}q^2 + \frac{dF}{dz}t = 0$$

connaissant donc p et q en fonction de x, y et z, on en déduira, par la substitution, les valeurs de r, s et t.

II. La différentielle totale d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ est la somme des différentielles partielles par rapport à x, et par rapport à y, c'est à dire :

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy.$$

et on la désigne par dz, le symbole d'opération d ayant, comme on le voit, des significations bien différentes dans les deux membres.

La différentielle totale seconde d^2z sera pareillement la somme des différentielles totales de deux termes $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$, et si l'on suppose dx et dy constants, cette somme sera :

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}dy\right)dx + \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy\right)dy$$

c'est à dire : $$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2.$$

En général, on aura, pour la différentielle totale d'ordre n :

$$d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + n_1\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + n_2\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy}dx^{n-2}dy^2 + \dots + \frac{d^nz}{dy^n}dy^n.$$

et je vais établir qu'en supposant cette formule vraie pour le nombre n, elle le sera encore pour le nombre $n+1$. Effectivement, la différentielle totale d'un terme quelconque :

$\frac{d^nz}{dx^\alpha dy^\beta}dx^\alpha dy^\beta$, sera : $\frac{d^{n+1}z}{dx^{\alpha+1}dy^\beta}dx^{\alpha+1}dy^\beta + \frac{d^{n+1}z}{dx^\alpha dy^{\beta+1}}dx^\alpha dy^{\beta+1}$; de sorte qu'on aura :

$$d^{n+1}z = \frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}\, dx^{n+1} + (1+n_1)\frac{d^{n+1}z}{dx^n dy}\, dx^n dy + (n_1+n_2)\frac{d^{n+1}z}{dx^{n-1}dy^2}\, dx^{n-1}dy^2 + \&^{ca} \ldots$$

Or, on reconnaît, d'après une propriété élémentaire des coefficients du binome, que ce résultat se déduit du précédent, en y changeant n en $n+1$; et je me bornerai à énoncer à leur égard, sans la démontrer, la proposition suivante, analogue à celle qui concerne les différentielles des fonctions d'une seule variable.

Soit :

$$f_1(x,y) = f(x+h, y+K) - f(x,y)$$
$$f_2(x,y) = f_1(x+h, y+K) - f_1(x,y)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n(x,y) = f_{n-1}(x+h, y+K) - f_{n-1}(x,y)$$

Si l'on développe $f_n(x,y)$ par la formule de Taylor suivant les puissances ascendantes de h et de K sous cette forme :

$$f_n(x,y) = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_i + \&^{ca},$$

où V_i désigne l'ensemble homogène des termes de degré i en h et K, on aura identiquement : $V_i = 0$ pour $i < n$, et si l'on fait : $h = dx$, $K = dy$, l'expression générale de V_i sera : $N_i\, d^i f(x,y)$ N_i désignant comme ci-dessus le coefficient de h^i dans le développement de $\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right)^i$ — Le premier terme de la série qui représente $f_n(x,y)$ sera donc la différentielle totale $d^n z$.

Changement de la variable indépendante.

On a vu précédemment que l'étude des fonctions algébriques et spécialement des racines carrées des polynomes entiers en x, reposait surtout sur l'emploi des substitutions rationnelles de la variable x en une autre θ. C'est ainsi, par exemple, qu'ont été ramenées aux fonctions rationnelles les expressions de la forme $f\left(x, \sqrt{A(x-a)(x-b)}\right)$. (1) Or, le même procédé analytique joue un rôle très-important dans l'étude des fonctions définies par une relation telle que :

$$f\left(x, y\ \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$

(1) Voyez, page 5.

ce qui est l'un des principaux objets du calcul intégral. Les relations ont reçu la dénomination d'équations différentielles, à cause de l'expression des dérivées de y, qui y figurent, par le rapport des différentielles $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{d^2x}$, &ca.
L'analyse envisage de même des conditions plus complexes, telles que :

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots\ldots \frac{d^m z}{dx^\alpha dy^\beta}, \ldots\ldots\right) = 0$$

où il s'agit d'une fonction z, de deux ou d'un plus grand nombre de variables indépendantes, et qu'on nomme pour le même motif, équations aux différentielles partielles. Les opérations relatives au changement de variables, dans ces diverses circonstances, constituent une question importante dont nous allons nous occuper dans les cas les plus simples.

I. Voici le premier : Supposons, comme on en a des exemples en géométrie analytique, que les coordonnées x et y d'une courbe soient exprimées à l'aide d'une troisième variable, qu'on ait, par exemple :

$$x = a\,(t - \sin t)$$

$$y = a\,(1 - \cos t)$$

On ne pourra pas alors obtenir y en fonction de x, ni par conséquent le coefficient angulaire de la tangente dont la connaissance est nécessaire à la discussion de la courbe. Mais on peut chercher à l'exprimer en fonction de t, et on y parvient comme il suit.

A cet effet, soit en général :

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

la première équation donnant t en x, on peut regarder y comme une fonction de fonction, ce qui donnera par conséquent :

$$y' = \psi'(t)\, t'_x$$

ou avec la notation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(t)\,\frac{dt}{dx}$$

Cela posé, et en considérant toujours t comme fonction de x, on a :

$$1 = \varphi'(t)\,\frac{dt}{dx}$$

on obtient donc le résultat cherché en éliminant $\frac{dt}{dx}$, ce qui donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Par là, on voit que le coefficient angulaire de la tangente à la courbe proposée, s'exprime facilement, comme les coordonnées x et y par le moyen de t ; ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on trouvera :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overset{\sin t}{\cancel{1-\cos t}}}{\underset{1-\cos t}{\cancel{\sin t}}} = \cot g \, \frac{1}{2}\, t$$

J'ajoute qu'on obtiendra par le même procédé la dérivée d'un ordre quelconque de y par rapport à x. Qu'on suppose en effet :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Phi(t)$$

on regardera encore t comme une fonction de x déterminée par l'équation :

$$x = \varphi\,(t)$$

et la règle de la dérivée des fonctions de fonctions donnant

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \Phi'(t)\,\frac{dt}{dx}$$

on en conclura :

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{\Phi'(t)}{\varphi'(t)}$$

C'est ainsi qu'on obtient successivement ces valeurs :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(3)}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\varphi'(t)\left[\varphi'(t)\psi'''(t) - \psi'(t)\varphi'''(t)\right] - 3\,\varphi''(t)\left[\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)\right]}{\varphi'^{5}(t)}$$

. . . .

qu'on écrit de cette manière :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dx\,dx^2 - dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{dx\,(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

les différentielles se rapportant dans les seconds membres à la variable t, qui reste quelconque. Pour faire une application, je supposerai :

$$y = t.$$

alors, on aura les dérivées de y prises par rapport à x, exprimées par les dérivées de x prises par rapport à y sous cette forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = -\frac{\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

II. Soit proposé en second lieu de changer de variable dans l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + ay = 0$$

en faisant $x = \sin t$, on aura ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\cos t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dt}\,\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{1}{\cos^2 t}$$

d'où ce résultat :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0$$

Soit encore : $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + ay = 0.$$

Posons : $x = e^t$. d'où : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$

et on aura encore pour transformée :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0$$

Je considère en dernier lieu l'équation différentielle suivante, qui est d'une grande importance en analyse, savoir :

$$(x - x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + (1 - 3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

je fais : $$x = \sqrt{1-t^2}.$$

ce qui donnera : $\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{dt}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1-t^2}{t^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{t^3}$

de sorte qu'en substituant, on obtiendra entre y et t l'équation :

$$(t-t^3)\frac{d^2y}{dt^2} + (1-3t^2)\frac{dy}{dt} - ty = 0$$

qui reproduit la proposée entre y et x. On en conclut que $y = \varphi(x)$ étant une solution, on y satisfera encore en prenant $y = \varphi(\sqrt{1-x^2})$; cet exemple montre comment le procédé analytique du changement de variable dans une équation différentielle peut servir à l'étude des fonctions qu'elles définissent.

III. Dans le second cas, nous considérerons une fonction de deux variables indépendantes : $z = \varphi(x,y)$, et en posant :

$$x' = \alpha x + \beta y$$
$$y' = \gamma x + \delta y$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sont des constantes, nous déterminerons les dérivées partielles du premier et du second ordre de z par rapport à x et y au moyen des dérivées partielles prises par rapport à x' et y'.

Concevons à cet effet, qu'on ait remplacé dans la fonction proposée, les variables x et y par leurs valeurs en x', y', et qu'on ait ainsi obtenu

$$z = \Phi(x', y')$$

Alors, la règle relative à la dérivée d'une fonction composée de deux autres donnera immédiatement

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\Phi}{dx'}\,\frac{dx'}{dx} + \frac{d\Phi}{dy'}\,\frac{dy'}{dx}$$

ou simplement : $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx'}\alpha + \frac{dz}{dy'}\gamma$

et on trouvera de même :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx'}\beta + \frac{dz}{dy'}\delta$$

Pour obtenir ensuite les dérivées du second ordre, on observera que $\frac{dz}{dx}$, par exemple, est une fonction de x' et y' dont les dérivées par rapport à x et à y seront respectivement :

$$\frac{d^2z}{dx'^2}\,\frac{dx'}{dx} + \frac{d^2z}{dx'dy'}\,\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2z}{dx'^2}\alpha + \frac{d^2z}{dx'dy'}\gamma$$

$$\frac{d^2z}{dx'^2}\,\frac{dx'}{dy}+\frac{d^2z}{dx'dy'}\,\frac{dy'}{dy}=\frac{d^2z}{dx'^2}\,\beta+\frac{d^2z}{dx'dy}\,\delta$$

En traitant de même $\frac{dz}{dy'}$ on trouvera les expressions suivantes :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d^2z}{dx'^2}\,\alpha^2+2\,\frac{d^2z}{dx'dy'}\,\alpha\gamma+\frac{d^2z}{dy'^2}\,\gamma^2$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{d^2z}{dx'^2}\,\alpha\beta+\frac{d^2z}{dx'dy'}\,(\alpha\delta+\beta\gamma)+\frac{d^2z}{dy'^2}\,\gamma\delta$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=\frac{d^2z}{dx'^2}\,\beta^2+2\,\frac{d^2z}{dx'dy}\,\beta\delta+\frac{d^2z}{dy'^2}\,\delta^2$$

Soit, pour en donner une application, l'équation aux différences partielles à coefficients constants.

$$a\,\frac{d^2z}{dx^2}+2b\,\frac{d^2z}{dx\,dy}+c\,\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

la transformée en x' et y' sera :

$$A\,\frac{d^2z}{dx'^2}+2B\,\frac{d^2z}{dx'dy'}+C\,\frac{d^2z}{dy'^2}=0$$

où l'on a fait :

$$A=a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2$$

$$B=a\alpha\gamma+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\beta\delta$$

$$C=a\gamma^2+2b\gamma\delta+c\delta^2$$

En particulier, si l'on considère l'équation :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=m^2\,\frac{d^2z}{dy^2}=0$$

et qu'on pose :

$$x'=mx+y$$

$$y'=mx-y$$

On obtiendra simplement : $\frac{d^2z}{dx'dy'}=0$ résultat dont il sera fait usage plus tard dans une circonstance importante.

* **IV.** Je terminerai ce sujet par un exemple de transformations non linéaires en considérant l'équation suivante :

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2xy^2\,\frac{dz}{dx}+2(y-y^3)\,\frac{dz}{dy}+x^2y^2z=0$$

et prenant pour variables, au lieu de x et y, les quantités suivantes :

$$x' = xy \qquad y' = \frac{1}{y}$$

Dans ce cas, y ne contient pas x, et il vient immédiatement :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx'}\, y$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}\, y^2$$

On trouve ensuite :

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx'}\, x - \frac{dz}{dy'}\, \frac{1}{y^2}$$

et par conséquent, en remplaçant x et y par leurs valeurs en x' et y'

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx'}\, \frac{1}{y'}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx'^2}\, \frac{1}{y'^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx'}\, x'y' - \frac{dz}{dy'}\, y'^2$$

Cela fait, et en substituant, il arrive que par rapport aux nouvelles variables on retrouve exactement l'équation proposée, savoir :

$$\frac{d^2z}{dx'^2} + 2x'y'^2\frac{dz}{dx'} + 2(y' - y'^3)\frac{dz}{dy'} + x'y'^2 z = 0$$

On a par suite ce résultat que si l'on satisfait à l'équation proposée en prenant : $z = f(x, y)$, on aura encore une solution en posant : $z = f\left(x, y, \frac{1}{y}\right)$. Cette équation aux différences partielles du second ordre qui vient de nous donner un exemple du calcul du changement des variables, est en analyse d'une grande importance. Elle donne en effet le développement en série d'une fonction uniforme analogue à l'exponentielle aux lignes trigonométriques, et qui sert de base à la théorie des fonctions elliptiques. Je renverrai, pour les changements de variable dans les équations, aux différences partielles de la théorie de la chaleur et de l'attraction, et qui donnent lieu à des calculs plus longs, au Traité de calcul différentiel et intégral de M. Bertrand (Tome I, page 179) et au Cours de M. Serret, Tome I, page 122.

Applications géométriques du Calcul différentiel.

Préliminaires.

Les questions de géométrie dans lesquelles figure la considération des infiniment petits appartiennent essentiellement au calcul infinitésimal. Elles s'offrent néanmoins dès les éléments, dans la mesure de la circonférence et du cercle, de la surface et du volume du cylindre du cône et de la sphère, et plus tard, en géométrie analytique, pour la détermination de la tangente aux courbes données par leurs équations. On voit par là combien doivent être simples et élémentaires certains principes que nous attribuons cependant au calcul différentiel et au calcul intégral. Ils se résument effectivement dans la notion d'infiniment petit qu'on sait déjà avoir pour définition, une quantité variable dont la limite est zéro, et dans ces deux propositions :

1° La limite du rapport de deux infiniment petits α et β n'est pas changée quand on les remplace par d'autres, α' et β' sous les conditions :

$$\lim. \frac{\alpha'}{\alpha} = 1 \qquad \lim. \frac{\beta'}{\beta} = 1.$$

2° La limite de la somme d'un nombre infiniment grand de quantités infiniment petites, n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité :

La première se démontre en divisant membre à membre les deux égalités posées, ce qui donne immédiatement :

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$$

Pour établir la seconde, considérons une somme d'infiniment petits :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n$$

dont le nombre n augmente indéfiniment, et nommons $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ d'autres infiniment petits, tels que :

$$\lim \frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 \qquad \lim \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1, \ldots\ldots \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1.$$

On sait que le rapport :

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots\cdots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n}$$

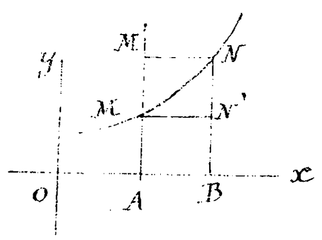
est compris entre la plus grande et la plus petite des fractions : $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ .... $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$; il a donc pour limite l'unité sous les conditions admises, et les deux sommes d'infiniment petits sont égales entre elles.

A ces propositions se joint une notion importante, celle des infiniment petits de divers ordres. Nous dirons qu'un infiniment petit β est du n^e ordre par rapport à α, lorsque β est une fonction de α telle que $\frac{\beta}{\alpha^n}$ soit fini pour $\alpha = 0$; ainsi, en supposant la première des constantes A, B, C.... différente de zéro, on pourra généralement poser :

$$\beta = \alpha^n (A + B\alpha + C\alpha^2 + \cdots\cdots)$$

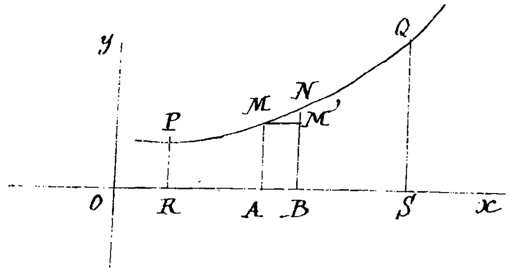
Tels sont ces principes de l'application du calcul infinitésimal à la géométrie, dont l'importance et l'étendue ne pourront être appréciées que plus tard. Mais afin de les rendre plus clairs, je vais de suite donner plusieurs exemples de leur usage.

I. Soient M et N deux points voisins d'une courbe $y = f(x)$ rapportées à des coordonnées rectangulaires, MA et NB leurs ordonnées. L'aire MNAB et le rectangle MN'AB obtenu en menant MN' parallèle à l'axe des abscisses, s'évanouissent en même temps quand M et N coïncident. Ce sont, par conséquent, des infiniment petits, et je vais prouver que la limite de leur rapport est l'unité.



Supposons à cet effet, les points M et N assez voisins pour que, dans leur intervalle, l'ordonnée de la courbe varie toujours dans le même sens, et soit, pour fixer les idées, continuellement croissante. En menant NM' parallèle à l'axe, on formera un rectangle M'NAB, comprenant l'aire MNAB, qui est elle-même inférieure au rectangle MN'AB, où le côté MN' est parallèle à M'N. Or, le rapport des deux rectangles ayant une dimension commune AB, est celui des lignes M'A et MA ; il a donc pour limite l'unité, et il en est de même, par conséquent, de la limite du rapport de l'aire MNAB à l'un d'entre eux.

II. Cet exemple de la substitution, sous la condition du premier principe, d'un infiniment petit à un autre, conduit immédiatement à une application du second principe concernant les limites des sommes.



Considérons à cet effet une portion comprise entre deux ordonnées PQ, RS de l'aire de la courbe $y = f(x)$ et divisons-la, par des parallèles à l'axe des y, en n parties telles que MNAB, égales ou inégales, mais toutes infiniment petites quand n devient infiniment grand. Cela étant, et ayant mené MM' parallèle à l'axe des x, on voit, d'après ce qui a été établi sur le rapport des infiniment petits MNAB, et MM'AB, que la même aire sera aussi bien la limite de la somme des rectangles MM'AB. Ce résultat s'exprime sous forme analytique de la manière suivante :

Désignons par $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n$, les abscisses des points de division, de sorte que $x_0 = OR$, $x_n = OS$, la somme :

$$(x_1 - x_0)\,f(x_0) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) + \cdots\cdots + (x_n - x_{n-1})\,f(x_{n-1})$$

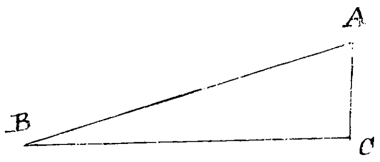
tend vers une limite finie et déterminée lorsqu'on fait décroître indéfiniment les différences : $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots\ldots$ $x_n - x_{n-1}$. Et si l'on écrit comme on le fait souvent : $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, cette limite, qui est l'aire PQRS, s'exprime de cette manière :

$$PQRS = \sum_{0}^{n-1}{}_i\, \Delta(x_i)$$

Renvoyant aux Éléments de Calcul infinitésimal de M. Duhamel, (Tome I, Chap. 8) pour les exemples de résultats obtenus par cette formule avant l'invention du calcul différentiel et intégral, je me bornerai, d'après l'éminent géomètre, à observer que toutes les mesures de la géométrie élémentaire sont des conséquences simples et immédiates de ce second principe sur les limites des sommes. Celle du cercle, par exemple, résulte d'une décomposition en secteurs égaux et de la substitution des triangles aux secteurs, celle de la pyramide triangulaire, d'une décomposition en troncs de pyramide de même hauteur, auxquels on substitue des prismes triangulaires, &c^{a}.

III. Voici maintenant des exemples d'infiniment petits du second ordre. L'un des plus simples et des plus importants s'offre en considérant, dans un triangle rectangle ABC, la différence entre l'hypoténuse

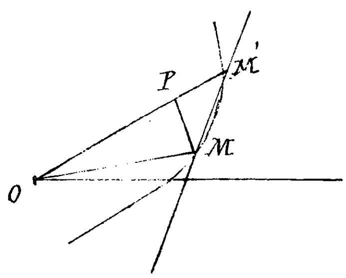
AB et sa projection BC lorsqu'on suppose infiniment petit l'angle B que je désignerai par α. Ayant en effet $BC = AB \cos\alpha$, on en conclut :



$$AB - BC = AB(1-\cos\alpha) = AB\left(\frac{\alpha^2}{1.2} - \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \dots\dots\right)$$

fonction de α dont le développement commence au terme en α^2, de sorte que cette différence est un infiniment petit du second ordre.

Ce résultat, qu'il est si facile d'obtenir, est d'un emploi continuel, et comme exemple, je vais en tirer la détermination de la tangente aux courbes définies par une équation en coordonnées polaires, déjà connue par les éléments.



Soient OM et OM' deux rayons vecteurs qui correspondent aux angles ω et $\omega + d\omega$, de sorte qu'on ait : $OM = \rho$. $OM' = \rho + d\rho$. En projetant le point M sur OM' en P, aux infiniment petits près du second ordre, OP sera égal à ρ, et par conséquent PM' à $d\rho$. Le triangle rectangle $M'MP$ donnera donc :

$$\operatorname{tang} M' = \frac{MP}{M'P} = \frac{\rho \sin d\omega}{d\rho} = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho},$$ et en nommant

V l'angle formé par le rayon vecteur avec la portion de la direction limite $M'M$, dirigée du côté vers lequel l'angle ω décroît, nous obtiendrons immédiatement :

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang} M' = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}.$$

Je considère encore la distance à la tangente d'un point d'une courbe $y = f(x)$ infiniment voisin du point de contact dont les coordonnées seront supposées x et y. En désignant par X et Y les coordonnées courantes, la tangente aura pour équation :

$$Y - y = f'(x)(X - x)$$

et la distance à cette droite du point $X' = x + h$ $Y' = f(x+h)$ sera :

$$\frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

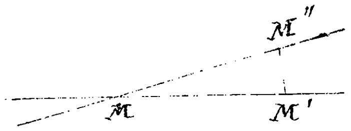
ou bien, en développant $f(x+h)$ par la série de Taylor :

$$\frac{\frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots\ldots}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

Cette distance est donc par rapport à h, infiniment petite du second ordre ; elle le serait du troisième en un point d'inflexion dont l'abcisse annule, comme on sait

$$f''(x).$$

Je vais appliquer ce résultat à quelques déterminations de tangentes par des considérations géométriques simples, et qui offrent des exemples intéressants de l'emploi des infiniment petits. (Traité de calcul différentiel et de calcul intégral de M. Bertrand, tome I, page 10)



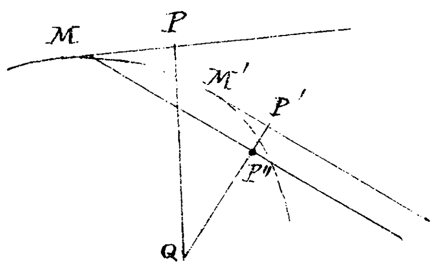
Je me fonderai sur le lemme suivant :

La limite de la direction déterminée par deux points infiniment voisins M et M', n'est pas altérée, si l'on substitue au point M' un autre point M'', tel que $M'M''$ soit infiniment petit par rapport à MM'.

Effectivement, le triangle $MM'M''$ donnant la relation

$$\frac{M'M''}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin M''}$$

le premier membre a zéro pour limite sous la condition admise ; il en est donc de même de $\sin M$, par conséquent de l'angle M, d'où résulte bien que les directions MM'', MM' se confondent à la limite.

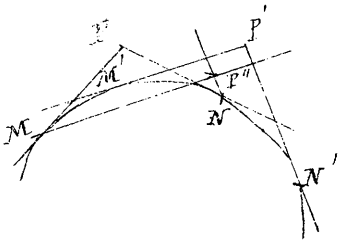


J'appliquerai à deux questions le lemme qu'on vient d'établir :

1° Trouver la tangente à la courbe lieu des projections d'un point fixe O, sur toutes les tangentes à une courbe donnée.

Traçons la tangente à cette courbe aux deux points infiniment voisins M et M', et menons par le point M une parallèle à la tangente en M'. Soient P et P' les projections du point O sur les deux tangentes, et considérons en même temps le point P'' où la perpendiculaire OP' coupe la parallèle à la tangente en M'. La distance du point M à la tangente en M', que nous savons infiniment petite du second ordre, par rapport à MM', étant représentée par $P'P''$, nous substituerons le point P'' à P', de sorte que P et P'' appartenant au cercle décrit sur OM comme diamètre, la direction PP'' a pour limite la tangente à ce cercle. On a donc ainsi une construction facile de la tangente cherchée, et surtout de la normale qui s'obtiendra en joignant le point P au milieu de OM.

2°. Trouver la tangente à la courbe lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe donnée.



Soit P un des points du lieu, M et N les points de contact des deux tangentes qui le déterminent, P' un second point infiniment voisin, M' et N' les points de contact qui y correspondent.

Menons par les points M et N des parallèles aux tangentes en M' et N', nous obtiendrons par les intersections de ces quatre droites un parallélogramme dont les côtés sont infiniment petits du second ordre, d'où l'on conclut que la distance $P'P''$ est infiniment petite du second ordre. Cherchant donc, au lieu de la direction PP' la limite de la direction PP'', on voit que ces deux points appartiennent à un segment capable de l'angle donné décrit sur MN comme corde, et l'on en conclut que la tangente au point P à ce segment est la droite cherchée.

Je n'ai pas besoin de faire remarquer l'élégance de ces résultats et la simplicité de la méthode géométrique qui les a donnés; j'observe toutefois qu'ils s'obtiennent par la voie du calcul d'une manière également facile (1), et, qu'à y regarder de près, la voie purement géométrique est moins rapide qu'elle ne le semble tout d'abord. A l'égard du premier problème, par exemple, on a admis implicitement que PP' est infiniment petit du même ordre que MM', et il y aurait en toute rigueur lieu de le démontrer, ce qui se fait du reste aisément. En effet, il suit de la construction du point P que les coordonnées X et Y sont des fonctions entièrement déterminées de celles du point M, ou seulement de son abscisse. Soit donc: $X = \varphi(x)$, $Y = \psi(x)$; en changeant x en $x+h$, on passera à la fin de M à M' et de P à P', dont les coordonnées seront: $X' = \varphi(x+h)$ et $Y' = \psi(x+h)$, et on en conclut que la distance PP' est donnée par un développement commençant à la 1ère puissance de h, exactement comme MM'. On a en effet:

$$PP' = \sqrt{(X'-X)^2+(Y'-Y)^2} = \sqrt{\left\{h\varphi'x+\tfrac{1}{2}h^2\varphi''x+\ldots\right\}^2+\left\{h\psi'x+\tfrac{1}{2}h^2\psi''(x)+\ldots\right\}^2}$$
$$= h\sqrt{\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)+h\left\{\varphi'(x)\varphi''(x)+\psi'(x)\psi''(x)+\ldots\right\}+\ldots}$$

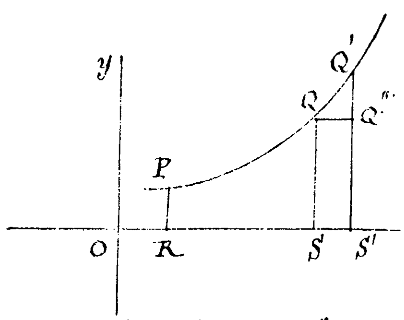
(1) Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral de M. Bertrand, Tome I, page 79.

IV. Je terminerai ces préliminaires en remarquant qu'un exemple important d'un infiniment petit du 3e ordre est donné par la différence entre l'arc infiniment petit α, d'un cercle de rayon R et sa corde $2R\sin\frac{\alpha}{2R}$; cette différence étant en effet :

$$\alpha - 2R\sin\frac{\alpha}{2R} = \frac{\alpha^3}{24R^2} + \&^{ca}\ldots$$

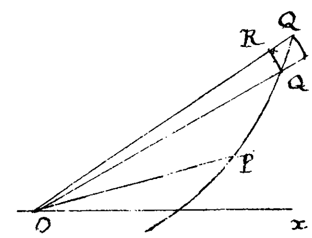
J'observerai enfin qu'il revient au même de dire que deux infiniment petits α et β ont l'unité pour limite de leur rapport, ou un infiniment petit du second ordre pour différence. Si l'on a en effet : $\beta - \alpha = A\alpha^2 + \&^{ca}$, on en tire : $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + A\alpha + \ldots\ldots$ et $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$. De même, en posant : $\frac{\beta}{\alpha} = 1 + A\alpha + \ldots\ldots$, on en conclut : $\beta - \alpha = A\alpha^2 + \&^{ca}$.

Dérivée de l'aire d'une courbe plane.



L'espace compris entre les ordonnées PR, QS et l'arc d'une courbe $y = f(x)$ est déterminé par les abscisses OR et OS ; en supposant la première constante, l'aire dont il s'agit est donc une fonction de l'abscisse $OS = x$, et nous allons en chercher la dérivée.

Or, on voit, par la figure, qu'il faut pour cela obtenir la limite du rapport de la surface $QSQ'S'$ à SS', mais ici l'élément infinitésimal peut être remplacé par le rectangle $QSQ''S'$ comme on l'a vu précédemment, et le rapport cherché devient immédiatement l'ordonnée $QS = f(x)$ qui représente ainsi la dérivée de l'aire.



Considérons en second lieu à l'égard d'une courbe en coordonnées polaires, le secteur OPQ où OP est supposé fixe, comme une fonction de l'angle $Qox = \omega$ qui détermine le rayon variable $OQ = \rho$, voici alors la substitution d'infiniment petits qui donne la dérivée. Décrivons du pôle comme centre OQ pour rayon un arc de cercle coupant OQ' en R, je dis que le rapport des surfaces infiniment petites OQQ' et OQR a pour limite l'unité. Considérant en effet le secteur circulaire semblable $OQ'R'$, on aura à la fois :

$$OQR < OQQ' < OQ'R'$$

ou bien $\quad 1 < \frac{OQQ'}{OQR} < \frac{OQ'R'}{OQR}$

et ensuite $\frac{OQ'R'}{OQR} = \frac{\overline{OQ'}^2}{\overline{OQ}^2}$; la limite de ce rapport étant l'unité, il en est de même de $\frac{OQQ'}{OQR}$. Remplaçant donc OQQ' par OQR dans l'expression du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de l'angle que je représenterai par $d\omega$, la dérivée cherchée sera $\frac{\frac{1}{2}\rho^2 d\omega}{d\omega} = \frac{1}{2}\rho^2$.

Les deux fonctions dont nous venons de déterminer successivement les dérivées étant désignées par A et S, on en conclut pour leurs différentielles, les expressions suivantes :

$$dA = y\, dx \qquad dS = \frac{1}{2}\rho^2\, d\omega.$$

et si l'on veut obtenir dS en coordonnées rectangulaires, il suffit de tirer des relations $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, cette valeur : $\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}$, qui donne par la différentiation, $\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$, et l'on en conclut : $\rho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx$, et par suite : $dS = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$.

Notion de l'intégrale définie.

J'indiquerai immédiatement cette conséquence importante de la relation qui vient d'être obtenue : $dA = f(x)\,dx$. Cette relation prouve géométriquement l'existence d'une fonction dont la dérivée est la fonction quelconque $f(x)$ et en raison de l'origine arbitraire du segment A, on voit qu'il y entre une constante arbitraire, conformément à cette proposition, que deux fonctions ayant même dérivée ne diffèrent que par une quantité constante. Enfin, il y a plus, et de l'équation

$$PQRS = \sum \Delta x_i\, f(x_i)$$

nous allons déduire une définition analytique de la fonction primitive de $f(x)$. Considérons à cet effet, parmi les divers modes de décomposition du segment en éléments rectangulaires, et qui tous conduisent à la même limite, le plus simple, où l'on diviserait en n parties égales à dx la base du segment. Dans ce cas, les quantités infiniment petites Δx_i sont égales à dx, les abscisses des points de division sont : $x_1 = x_0 + dx$, $x_2 = x_0 + 2dx$ ...... et la dernière $x_n = x_0 + n\,dx$ représente x, de sorte que A devient la limite de la somme :

$$dx\left[f(x_0) + f(x_0 + dx) + f(x_0 + 2\,dx) + \dots + f\{x_0 + (n-1)\,dx\}\right]$$

Telle est donc maintenant, au point de vue du calcul, la définition de toutes les fonctions ayant pour différentielle $f(x)\,dx$. C'est en raison de ce mode d'expression par la somme des valeurs de $f(x)\,dx$, que ces fonc=tions ont reçu le nom d'intégrales, et l'on introduit cette dénomination dans le calcul en employant la lettre $\int$ initiale de somme, de sorte qu'on pose :

$$\int f(x)\,dx = dx\left[f(x_0)+f(x_0+dx)+f(x_0+2dx)+\dots\dots+f\left\{x_0+(n-1)\,dx\right\}\right]$$

et je rappelle que le nombre n, croissant indéfiniment, est lié à la variable x et à l'élément infiniment petit dx par la relation :

$$x = x_0 + n\,dx.$$

Ajoutons enfin que pour indiquer dans l'expression générale de l'intégrale de $f(x)\,dx$ la quantité x_0, à partir de laquelle on fait commencer la somme, on l'écrit en indice, de cette manière : $\int f(x)\,dx$. On a donc ainsi : $A = \int_{x_0} f(x)\,dx$, et $dA = f(x)\,dx$. De là résulte la nota=tion d'une fonction de la variable x entièrement déterminée, et dont les valeurs pour $x = x_1$, par exemple, seront représentées par $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$. C'est alors ce qu'on nomme une <u>intégrale définie</u>, et il est évident, d'après ce qui précède, qu'on exprime par là l'aire du segment de la courbe $y = f(x)$ compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscis=ses $x = x_0$, $x = x_1$.

Dérivée d'un arc de courbe.

I. Considérons dans l'espace une courbe quelconque rappor=tée à trois axes rectangulaires et ayant pour équations :

$$y = \varphi(x) \qquad z = \psi(x)$$

La longueur d'un arc compris entre deux points dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0, et x, y, z, sera définie comme la limite du périmètre d'un polygone inscrit lorsqu'on fera décroître indéfi=niment chacun des côtés. Prenant à cet effet n points sur l'arc consi=déré à partir de l'origine x_0, y_0, z_0, et désignant les coordonnées de l'un quelconque d'entre eux par x_i, y_i, z_i, de sorte que x_n, y_n, z_n re=présentent les coordonnées x, y, z, de l'extrémité, on aura évidemment pour la longueur du périmètre du polygone inscrit :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2+(z_{i+1}-z_i)^2}$$

ou plus simplement : $\sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$

en posant : $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \quad y_{i+1} - y_i = \Delta y_i \quad z_{i+1} - z_i = \Delta z_i$

Or, il faut maintenant supposer n croissant infiniment, et par conséquent, faire tendre vers zéro la quantité Δx_i, Δy_i, Δz_i, ce qui va nous conduire à une nouvelle et intéressante application des principes précédents, sur les limites des sommes.

Je dis en premier lieu que la limite du rapport suivant :

$$\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta x \sqrt{1 + \varphi'^2(x) + \psi'^2(x)}}$$

est l'unité pour $\Delta x = 0$. C'est ce qu'on rend évident en le mettant sous la forme :

$$\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x) + \psi'^2(x)}}$$

car, ayant $y = \varphi(x) \quad z = \psi(x)$, les quantités $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, sont respectivement égales à $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ pour $\Delta x = 0$. En vertu du principe sur la substitution des infiniment petits dans les limites des sommes, et en posant pour un instant :

$$f(x) = \sqrt{1 + \varphi'^2(x) + \psi'^2(x)}$$

la longueur du périmètre deviendra donc :

$$\sum \Delta x_i f(x_i)$$

Or, on retrouve l'expression analytique considérée précédemment, et il en résulte que, dans tous les modes d'inscription, les quantités Δx_i tendant vers zéro, la limite de la somme sera toujours la même, et a pour valeur l'intégrale définie

$$s = \int_{x_0}^{x} dx\, f(x) = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \varphi'^2(x) + \psi'^2(x)}$$

Il en résulte ensuite que la différentielle ds a pour valeur :

$$ds = dx \sqrt{1 + \varphi'^2(x) + \psi'^2(x)}$$

et on a enfin cette conclusion que, dans une courbe quelconque, la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est l'unité. Ce n'est effectivement que l'interprétation géométrique de la valeur obtenue pour ds, si on écrit :

$$ds = dx\sqrt{1+\varphi'^2(x)+\psi'^2(x)} = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

car s étant une fonction déterminée de x, ds représente, aux infiniment petits près du 2e ordre, l'accroissement de s, et $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ la distance rectiligne des deux extrémités de l'arc, auxquelles correspondent les coordonnées x, y, z, et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$.

II. Le cas des courbes planes rapportées dans le plan des xy à des coordonnées rectangulaires, et qu'il est important de remarquer, est donné par ce qui précède, en supposant la fonction $\psi(x)$ nulle, quel que soit x. On a alors pour la différentielle de l'arc de la courbe $y = \varphi(x)$,

$$ds = dx\sqrt{1+\varphi'^2(x)} = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

et de là il est aisé de conclure, en posant :

$$x = \rho\cos\omega \qquad y = \rho\sin\omega$$

l'expression relative aux coordonnées polaires.

$$ds = \sqrt{d\rho^2+\rho^2 d\omega^2}$$

Effectivement, si l'on part de la relation :

$$x+y\sqrt{-1} = \rho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega) = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$$

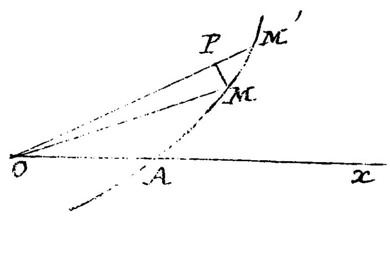
on obtiendra en différentiant :

$$dx+dy\sqrt{-1} = d\rho\, e^{\omega\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}\,\rho\, d\omega\, e^{\omega\sqrt{-1}} = e^{\omega\sqrt{-1}}(d\rho+\sqrt{-1}\,\rho\, d\omega)$$

et par suite en égalant les modules :

$$dx^2+dy^2 = d\rho^2+\rho^2 d\omega^2$$

Le résultat peut être directement établi comme il suit : Supposons, pour plus de simplicité, un rayon vecteur fixe, dirigé suivant l'axe polaire, et un autre $OM = \rho$ correspondant à l'angle ω. La dérivée par rapport à ω de l'arc $AM = s$, s'obtiendra, si l'on mène le rayon vecteur $OM' = \rho + d\rho$ faisant avec OM l'angle infiniment petit $d\omega$, comme limite du rapport $\frac{\text{arc } MM'}{d\omega}$. Or, en remplaçant d'après ce qui a été tout



à l'heure établi, l'arc MM' par sa corde, on transforme le rapport proposé en un autre dont l'évaluation est facile. Effectivement, en menant MP perpendiculaire sur OM, on aura, comme on l'a dit (page _), aux infiniment petits près du 2^e ordre, $OP = OM$, par conséquent, PM' sera $d\rho$; d'ailleurs $MP = \rho \sin d\omega = \rho\, d\omega$, par une nouvelle substitution d'infiniment petits, de sorte qu'ayant :

$$MM' = \sqrt{\overline{PM'}^2 + \overline{MP}^2}, \text{ on en conclut : } \frac{MM'}{d\omega} = \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}{d\omega}$$

Du contact géométrique.

Les notions élémentaires de la tangente aux courbes et du plan tangent aux surfaces, ont été l'origine d'une théorie dont le principe est dû à Lagrange, et où l'on envisage successivement le contact de deux courbes planes, de deux courbes dans l'espace, d'une courbe et d'une surface, et enfin de deux surfaces quelconques. Cette étude géométrique repose en entier sur la série de Taylor dont on aura ainsi une application remarquable par sa généralité et son importance. Nous en exposerons l'idée essentielle en considérant d'abord le cas le plus simple, celui de deux courbes planes.

Contact des courbes planes.

I. Etant données deux courbes rapportées à des axes rectangulaires, nous concevrons que tous les points de l'une d'elles ayant pour coordonnées X et Y, se déduisent par une construction déterminée quelconque, des divers points de l'autre dont nous désignerons les coordonnées par x et y. Cela posé, notre objet est d'étudier, à ce point de vue général, la distance de deux points correspondants, c'est à dire la quantité δ donnée par la formule

$$\delta^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2$$

En premier lieu, je vais montrer que δ est fonction d'une seule variable. Soient en effet :

$$y = \varphi(x), \qquad Y = f(X)$$

les équations des deux courbes; dire que X et Y sont déterminés quand on donne x et y, c'est supposer entre ces quantités une relation telle que :

$$F(x, y, X, Y) = 0$$

d'où se déduira : $$F\left[x, \varphi(x), X, f(X)\right] = 0$$

et par conséquent X en fonction de x, de sorte que δ s'exprime bien au moyen de la seule variable x.

On peut aussi, en se donnant les deux courbes par les relations :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t)$$

$$X = f(T) \qquad Y = f_1(T)$$

conclure que T est fonction de t. Par conséquent, si l'on garde cette seule variable en écrivant :

$$X = \Phi(t) \qquad Y = \Phi_1(t)$$

la condition proposée qu'à tout point de la première courbe corresponde un point de la seconde, sera satisfaite d'elle-même. Ceci posé, je dirai qu'en un point déterminé par la valeur $t = a$, les courbes présentent un contact d'ordre n, lorsque la distance :

$$\delta = \left[(X-x)^2 + (Y-y)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left\{\Phi(t)-\varphi(t)\right\}^2 + \left\{\Phi_1(t)-\varphi_1(t)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

deviendra pour $t = a + h$ un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à h.

II. – La première conséquence à tirer de cette définition, c'est que les différences $X - x$ et $Y - y$ sont infiniment petites l'une et l'autre d'ordre $n+1$. Soit en effet pour un instant :

$$\Phi(a+h) - \varphi(a+h) = P + P'h + P''h^2 + \dots\dots + P^n h^n + \dots\dots$$

$$\Phi_1(a+h) - \varphi_1(a+h) = Q + Q'h + Q''h^2 + \dots\dots + Q^n h^n + \dots\dots$$

la quantité :

$$\delta = \left[(P + P'h + P''h^2 + \dots\dots)^2 + (Q + Q'h + Q''h^2 + \dots\dots)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ne sera infiniment petite qu'en s'évanouissant pour $h = 0$, ce qui donne : $P^2 + Q^2 = 0$, et par conséquent : $P = 0$, $Q = 0$. On aura donc :

$$\delta = h\left[(P' + P''h + \dots\dots)^2 + (Q' + Q''h + \dots\dots)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

expression qui ne sera infiniment petite du second ordre qu'autant que le facteur compris entre parenthèses sera infiniment petit du premier, ce qui donne comme tout à l'heure : $P'^2 + Q'^2 = 0$, ou bien $P' = 0$ $Q' = 0$. Continuant ainsi de proche en proche, nous obtiendrons pour le contact d'ordre n, les $2(n+1)$ conditions :

$$P = 0 \qquad P' = 0 \qquad P'' = 0 \; \dots\dots \; P^n = 0$$

$$Q = 0 \qquad Q' = 0 \qquad Q'' = 0 \ \ldots\ldots \qquad Q^{(n)} = 0$$

exprimant en effet que les différences $X - x$, $Y - y$ sont infiniment petites d'ordre $n+1$. Il s'en suit que si l'on change d'axes coordonnés, ces mêmes conditions se reproduisent. Faisant en effet :

$$x' = g + x \cos\alpha - y \sin\alpha \qquad y' = h + x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

$$X' = g + X \cos\alpha - Y \sin\alpha \qquad Y' = h + X \sin\alpha + Y \cos\alpha .$$

on en conclura ces nouvelles expressions :

$$X' - x' = (X - x)\cos\alpha - (Y - y)\sin\alpha$$

$$Y - y' = (X - x)\sin\alpha \ (Y - y)\sin\alpha$$

qui sont infiniment petites d'ordre $n+1$ avec $X - x$ et $Y - y$.

III. — Ce premier point établi, faisons un pas de plus et au lieu de changer les axes coordonnés, remplaçons la variable t par une autre θ en posant :

$$t = f(\theta) .$$

de sorte que l'expression de δ étant en premier lieu :

$$\delta = F(t)$$

devienne : $\qquad \delta = F\left[f(\theta)\right]$

Admettant qu'on ait $\theta = \alpha$ pour $t = a$, je dis que si $F(a+h)$ est infiniment petit du $(n+1)^e$ ordre par rapport à h, $F\left[f(\alpha+i)\right]$ sera un infiniment petit du même ordre par rapport à i. En effet, par hypothèse :

$$F(a+h) = A\,h^{n+1} + B\,h^{n+2} + \ldots$$

et la relation :

$$a + h = f(\alpha + i)$$

donne, en développant le second membre :

$$h = \frac{i}{1} f'(\alpha) + \frac{i^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots\ldots$$

ainsi, on a :

$$F\left[f(\alpha+i)\right] = A\left[\frac{i}{1} f'(\alpha) + \frac{i^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots\right]^{n+1} +$$
$$+ B\left[\frac{i}{1} f'(\alpha) + \frac{1^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots\right]^{n+2} .$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

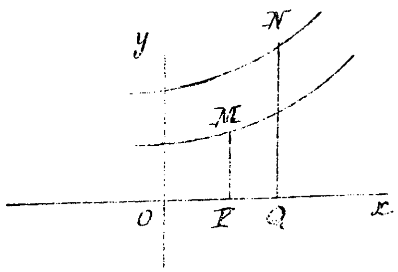
ce qui est bien un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à i.

De cette remarque si facile à établir, vont résulter, par le choix conve=
=nable d'une nouvelle variable, nos conclusions définitives. Les équations des courbes étant :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t)$$
$$X = \Phi(t) \qquad Y = \Phi_1(t)$$

nous poserons : $\varphi(t) = \theta$ d'où $\theta = x$, et on pourra les écrire de cette manière en prenant x pour variable :

$$1^o \quad y = f(x)$$
$$2^o \quad X = \mathcal{F}(x), \quad Y = F(x)$$



Figurons-les toutes deux, et soit $OP = x$, $MP = y$ les coordonnées d'un point M de la première. L'abscisse $OQ = X$, qui déter=
=mine le point N correspondant à M dans la seconde, s'obtiendra d'après la relation $X = \mathcal{F}(x)$ par conséquent, la fonction $\mathcal{F}(x)$ a cette signification précise de définir le mode de construction des points que nous avons nommés correspondants. Du nombre total des conditions obtenues pour le contact des deux courbes, la moitié se rapporte donc uniquement à ce mode de construction ; ce sont celles qui expriment que pour $x = a + h$, la différence :

$$X - x = \mathcal{F}(a+h) - (a+h)$$

est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à h. Les autres exprimant que :

$$Y - y = F(a+h) - f(a+h)$$

est un infiniment petit du même ordre, concernent essentiellement les deux courbes, puisqu'elles ne changent point comme on l'a vu quand on change d'axes coordonnés. Elles donnent les équations suivantes :

$$F(a) = f(a)$$
$$F'(a) = f'(a)$$
$$f''(a) = f''(a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(a) = f^{n}(a)$$

sous la condition que $F(a+h)$ et $f(a+h)$ puissent se développer par la série de Taylor, h étant infiniment petit. C'est ce qui aura lieu si les n premières dérivées des fonctions $F(x)$ et $f(x)$ sont toutes finies pour $x = a$.

IV. — Revenons encore un instant afin de l'éclaircir par des exemples sur la considération des points correspondants. Si l'on pose simplement :

$$X = \mathcal{F}(x) = x$$

la différence $X - x$ sera identiquement nulle, et les conditions du contact ne concernent que les courbes. Les points se trouvent alors deux à deux sur les mêmes ordonnées, et c'est ainsi que Lagrange traite du contact dans la théorie des fonctions analytiques (Seconde partie, application à la Géométrie.) Nous pouvons encore, en envisageant les normales aux divers points de la courbe $y = f(x)$, définir comme correspondants, les points où ces normales rencontrent l'autre ligne; la quantité δ sera alors un minimum et on aura entre les coordonnées x et y d'une part, X et Y de l'autre, l'équation :

$$(Y - y)\, f'(x) + X - x = 0.$$

Dans ce cas, la différence $X - x$ n'est plus identiquement nulle, mais on reconnaît qu'elle est nécessairement un infiniment petit du même ordre que $Y - y$, de sorte que les conditions du contact se réduisent comme précédemment à celles qui concernent les deux courbes, et toutes les relations de la forme :

$$(Y - y)\, \varphi(x) + X - x = 0$$

conduiraient, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ à la même conclusion.

V. — Nous allons passer maintenant aux applications, et nous nous proposerons de déterminer la droite et le cercle dont le contact avec la ligne donnée $y = f(x)$ soit de l'ordre le plus élevé possible. A l'égard de la droite

$$Y = aX + b$$

on peut disposer des deux quantités a et b, et par conséquent obtenir en un point quelconque $X = x$, un contact du premier ordre qui exige les deux conditions

$$F(x) = f(x)\,, \qquad F'(x) = f'(x)$$

Or ayant $F(x) = ax + b$, d'où $F'(x) = a$, elles donnent immédiatement :

$$a = f'(x) \qquad b = f(x) - x\, f'(x)$$

et l'on en conclut :

$$Y = X f'(x) + f(x) - x f'(x)$$

ce qui reproduit, si l'on remplace $f(x)$ par y et $f'(x)$ par $\frac{dy}{dx}$, l'équation de la tangente :

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

A l'égard du cercle, on peut, avec les coordonnées du centre et le rayon, remplir les conditions :

$$F(x) = f(x) \qquad F'(x) = f'(x) \qquad F''(x) = f''(x)$$

et obtenir un contact du second ordre. D'ailleurs, l'équation étant :

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

on en conclut :

$$F(x) = b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}, \quad F'(x) = \frac{a - x}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}}, \quad F''(x) = \frac{R^2}{\sqrt{\{R^2 - (x-a)^2\}^3}}$$

d'où ces égalités :

$$b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2} = f(x)$$

$$\frac{a - x}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}} = f'(x)$$

$$\frac{R^2}{\sqrt{\{R^2 - (x-a)^2\}^3}} = f''(x)$$

qui donneraient sans difficulté a, b, R. Mais la considération suivante mène à un calcul plus simple. Traitant l'expression $Y = F(x)$ comme une fonction implicite définie par l'égalité :

$$(x - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

j'observe que $\frac{dY}{dx}$ et $\frac{d^2Y}{dx^2}$ s'obtiendront en la différentiant deux fois de suite, et qu'on aura ainsi :

$$x - a + (Y - b)\frac{dY}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (Y - b)\frac{d^2Y}{dx^2} = 0$$

Les conditions du contact seront donc exprimées en remplaçant dans ces relations : Y, $\frac{dY}{dx}$, $\frac{d^2Y}{dx^2}$, par $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ou bien :

$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, ce qui nous donne :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

d'où enfin :

$$a=x-\frac{dy}{dx}\,\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$b=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Ce cercle dont l'étude se présentera bientôt, à un autre point de vue, dans la théorie de la courbure, a reçu le nom de cercle osculateur de la ligne $y=f(x)$. Et en général, toute courbe sera dite osculatrice à la même ligne, lorsque les diverses constantes qui déterminent sa nature et sa position par rapport aux axes coordonnés auront été calculées de manière à obtenir un contact de l'ordre le plus élevé possible. Une section conique, par exemple, contenant cinq coefficients, sera osculatrice lorsqu'elle aura un contact du quatrième ordre. Ici se place une remarque importante, c'est qu'on peut élever l'ordre d'une unité en disposant de l'abscisse du point de contact. Par conséquent, sur une courbe donnée, $y=f(x)$, il existe en général un nombre fini et limité de points remarquables tels qu'en ces points la tangente ait un contact du second ordre, le cercle osculateur du 3^e, une section conique du 5^e, &^{ca}. La condition qui les détermine s'obtient comme il suit dans le cas de la droite et du cercle.

VI. — A l'égard de la droite, elle est connue par les éléments et on sait déjà qu'on en tire une notion géométrique importante, celle des points d'inflexion. Au point de vue de la théorie que nous exposons, elle s'obtient en joignant aux deux équations : $F(x)=f(x)$, $F'(x)=f'(x)$, dans lesquelles : $F(x)=ax+b$, celle-ci : $F''(x)=f''(x)$, qui se réduit immédiatement à $f''(x) = 0$

Relativement au cercle, je reprends les équations :

$$(x-a)^2 + (Y-b)^2 = R^2$$

$$(x-a) + (Y-b)\frac{dY}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (Y-b)\,\frac{d^2Y}{dx^2} = 0$$

dont la dernière différentiée par rapport à x fournira la troisième dérivée $\frac{d^3Y}{dx^3}$. Or, en la mettant d'abord sous la forme :

$$\frac{1+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2}{\frac{d^2Y}{dx^2}} + Y - b = 0$$

la différentiation fera disparaître la constante b, et donne pour résultat :

$$3\,\frac{dY}{dx}\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 - \left[1+\left(\frac{dY}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3Y}{dx^3} = 0.$$

Si l'on remplace maintenant l'ordonnée Y du cercle par celle de la courbe proposée $y = f(x)$, on a immédiatement la condition cherchée :

$$3\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

c'est à dire l'équation propre à déterminer les valeurs de x, pour lesquelles il y a égalité entre les ordonnées et les trois premières dérivées des ordonnées de la courbe et du cercle.

Soit, par exemple, l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, nous trouverons facilement :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5},$$

et par suite, l'égalité suivante :

$$(a^2-b^2)(x^2-a^2)\,x = 0$$

qui conduit aux sommets de la courbe, comme on pouvait le préciser.

VII. Je terminerai l'exposé de cette théorie par la remarque suivante, qui est souvent utile. Lorsqu'une courbe est donnée par deux relations

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t)$$

on peut directement calculer les coefficients de l'équation :

$$F(X, Y) = 0$$

de manière à obtenir en un point quelconque $t = a$, un contact d'ordre n entre les deux lignes. Soit à cet effet :

$$\mathcal{F}(t) = F\left[\varphi(t), \Phi_1(t)\right]$$

il suffira de poser $t = a$ dans ces équations :

$$\mathcal{F} = 0, \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\mathcal{F}}{dt^2} = 0 \ldots\ldots \quad \frac{d^n\mathcal{F}}{dt^n} = 0$$

que je vais tirer directement des principes mêmes de la théorie du contact. Reprenant les relations :

$$x = \varphi(t) \qquad\qquad y = \varphi_1(t)$$

$$X = \Phi(t) \qquad\qquad Y = \Phi_1(t)$$

je rappelle que pour $t = a + h$, les différences $X - x$ et $Y - y$ doivent être infiniment petites du $(n+1)^e$ ordre par rapport à h, de sorte qu'on peut faire :

$$X - x = \Phi(a+h) - \varphi(a+h) = \alpha h^{n+1} + \beta h^{n+2} + \ldots\ldots$$

$$Y - y = \Phi_1(a+h) - \varphi_1(a+h) = \alpha_1 h^{n+1} + \beta_1 h^{n+2} + \ldots\ldots$$

Cela posé, soit :

$$F(X, Y) = 0$$

l'équation qui résulte de l'élimination de t. Nous aurons identiquement :

$$F(x, y) = F\left[X + (x - X), Y + (y - Y)\right]$$

et en développant par la série de Taylor étendue à deux variables :

$$\begin{aligned} F(x,y) = F(X,Y) &+ \frac{x-X}{1}\frac{dF}{dX} + \frac{(x-X)^2}{1.2}\frac{d^2F}{dX^2} \quad \ldots\ldots + \\ &+ \frac{y-Y}{1}\frac{dF}{dY} + \frac{(x-X)(y-Y)}{1}\frac{d^2F}{dX\,dY} \\ &+ \frac{(y-Y)^2}{1.2}\frac{d^2F}{dY^2} \end{aligned}$$

Faisons maintenant :

$$x = \varphi(a+h) \qquad\qquad y = \varphi_1(a+h)$$

$$X = \Phi(a+h) \qquad\qquad Y = \Phi_1(a+h)$$

le premier membre devient ainsi : $\mathcal{F}(\alpha+h)$. Quant au second, le premier terme $F(X,Y)$ disparaît, l'expression : $F[\Phi(t),\Phi_1(t)]$ étant identiquement nulle ; on a d'ailleurs :

$$X - x = \alpha h^{n+1} + \beta h^{n+2} + \ldots\ldots$$

$$Y - y = \alpha_1 h^{n+1} + \beta_1 h^{n+2} + \ldots\ldots$$

et il s'ensuit immédiatement qu'il est infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à h. Par conséquent, tous les coefficients des diverses puissances de h jusqu'à la n^e disparaissent dans le développement de $\mathcal{F}(\alpha+h)$, ce qui donne bien, pour $t=a$, la relation :

$$\mathcal{F}=0 \quad \frac{d\mathcal{F}}{dt}=0 \quad \frac{d^2\mathcal{F}}{dt^2}=0 \ldots\ldots \quad \frac{d^n\mathcal{F}}{dt^n}=0$$

qu'il fallait démontrer. Comme l'équation $\mathcal{F}(t)=0$ détermine les points communs aux deux courbes, on voit que la racine $t=\alpha$ est multiple d'ordre $n+1$ lorsqu'elles ont en ce point un contact d'ordre n mais sans m'arrêter à cette remarque, je vais appliquer ce qui précède au calcul du cercle osculateur $(X-\alpha)^2+(Y-\beta^2)=R^2$ à l'ellipse représentée par les équations

$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

On a alors : $\mathcal{F}(t) = (a\cos t-\alpha)^2+(b\sin t-\beta)^2 - R^2$

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{F}'(t) = -a\sin t(a\cos t-\alpha)+b\cos t(b\cos t-\beta)$$

$$= -(a^2-b^2)\sin t\cos t + a\alpha\sin t - b\beta\cos t$$

$$\tfrac{1}{2}\mathcal{F}''(t) = -(a^2-b^2)(\cos^2 t-\sin^2 t) - a\alpha\cos t + b\beta\sin t.$$

et les équations : $\mathcal{F}'(t)=0 \qquad \mathcal{F}''(t)=0$

ne renfermant que les coordonnées du centre α et β donnent facilement :

$$\alpha = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \qquad \beta = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$$

Nous en déduirons : $R^2 = \left(a\cos t - \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t\right)^2 + \left(b\sin t - \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t\right)^2$

ce qu'on peut simplifier en observant qu'on a :

$$a\cos t - \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t = \frac{\cos t}{a}(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)$$

$$b\sin t - \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t = \frac{\sin t}{b}(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)$$

de sorte qu'il vient en définitive : $R^2 = \dfrac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}{a^2b^2}.$

Contact des courbes dans l'espace.

I. — Deux lignes quelconques dans l'espace, et telles que tous les points de l'une se déduisent par une construction déterminée des points de l'autre, sont représentées par ces deux systèmes d'équations, savoir :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

$$X = \Phi(t) \qquad Y = \Phi_1(t) \qquad Z = \Phi_2(t)$$

et la distance de deux points correspondants sera la fonction suivante de la variable t :

$$\delta = \left[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left\{\Phi(t) - \varphi(t)\right\}^2 + \left\{\Phi_1(t) - \varphi_1(t)\right\}^2 + \left\{\Phi_2(t) - \varphi_2(t)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ceci posé, nous dirons comme précédemment, qu'au point donné par la valeur $t = a$, ces lignes présentent un contact du n^e ordre, lorsqu'en posant $t = a + h$, la distance δ est infiniment petite d'ordre $n+1$ par rapport à h. De cette définition découlent les conséquences suivantes déjà obtenues pour les courbes planes, et qui se démontreraient exactement de même :

1° Les trois différences :

$$X - x \qquad Y - y \qquad Z - z$$

doivent être chacune infiniment petites de l'ordre $n+1$.

2° Les conditions restent les mêmes si l'on change les axes coordonnés.

3° Elles subsistent encore si l'on change de variable indépendante en posant $t = f(\theta)$. Ainsi, en supposant qu'à la valeur $t = a$ réponde $\theta = \alpha$, et qu'on ait :

$$a + h = f(\alpha + i)$$

si les quantités $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ et δ sont infiniment petites d'ordre $n+1$ par rapport à h pour $t = a + h$, elles sont infiniment petites du même ordre par rapport à i pour $\theta = \alpha + i$.

4° Prenant la coordonnée z pour variable indépendante, de sorte que les équations des deux courbes soient :

$$x = f(z) \qquad y = f_1(z)$$

$$X = F(z) \qquad Y = F_1(z) \qquad Z = \mathcal{F}(z)$$

la fonction $\mathcal{F}(z)$ définit la loi de correspondance de leurs points, et les conditions de contact en ce qui concerne les lignes elles-mêmes se réduisent lorsqu'on suppose $F(z)=z$ à celles-ci :

$$F(a) = f(a) \qquad F_1(a) = f_1(a)$$

$$F'(a) = f'(a) \qquad F_1'(a) = f_1'(a)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$F^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad F_1^{(n)}(a) = f_1^{n}(a)$$

et sont au nombre de $2(n+1)$.

Si ces principes de la théorie actuelle sont les mêmes que pour les courbes planes, les applications en sont beaucoup moins étendues et nous aurons seulement à considérer la ligne droite.

II. - Les équations :

$$X = aZ + p \qquad Y = bZ + q$$

contenant quatre constantes, on peut en disposer de manière à établir en un point quelconque $Z = z$ un contact du premier ordre avec la courbe :

$$x = f(z) \qquad y = f_1(z)$$

ce qui exige les quatre conditions :

$$F(z) = f(z) \qquad F_1(z) = f_1(z)$$

$$F'(z) = f'(z) \qquad F_1'(z) = f_1'(z).$$

Or, ayant : $F(z) = az + p$, $F_1(z) = bz + q$, elles donnent immédiatement :

$$a = f'(z) = \frac{dx}{dz}$$

$$b = f_1'(z) = \frac{dy}{dz}$$

$$p = f(z) - zf'(z) = x - z\frac{dx}{dz}$$

$$q = f_1(z) - zf_1'(z) = y - z\frac{dy}{dz}$$

et nous en concluons les équations :

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z)$$

$$Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z)$$

qui sont celles de la tangente en un point quelconque de la courbe proposée.

III. — Après la ligne droite intersection de deux plans, la courbe qu'il semblerait le plus naturel de considérer serait l'intersection de deux surfaces du second degré :

$$F(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + \ldots\ldots\ldots = 0$$

$$F_1(X, Y, Z) = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + \ldots\ldots\ldots = 0$$

Chacune de ces équations renfermant neuf coefficients arbitraires, au premier abord on pourrait croire possible, en supposant $Z = z$, de les déterminer par ces 18 conditions :

$$X = f(z), \quad \frac{dX}{dz} = f'(z), \quad \frac{d^2X}{dz^2} = f''(z), \ldots \frac{d^8X}{dz^8} = f^8(z)$$

$$Y = f_1(z), \quad \frac{dY}{dz} = f_1'(z), \quad \frac{d^2Y}{dz^2} = f_1''(z), \ldots \frac{d^8Y}{dz^8} = f_1^8(z)$$

d'où résulterait un contact du 8e ordre. Mais on peut atteindre seulement au 7e, en raison des mêmes circonstances qui ne permettent point d'obtenir pour la ligne droite un contact du second ordre, bien qu'elle puisse être représentée par les équations :

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

$$AX + BY + CZ + D = 0.$$

renfermant six coefficients indéterminés. Avant d'éclaircir ce point, voici d'abord comment il convient de modifier la forme des conditions du contact, pour le cas où au lieu des valeurs explicites de X et Y en fonction de Z, on a les deux équations :

$$F(X, Y, Z) = 0 \qquad\qquad F_1(X, Y, Z) = 0$$

Nous observerons à cet effet, qu'en différentiant chacune d'elles n fois de suite par rapport à Z, on formera un système de $2(n+1)$ relations entre cette variable et les quantités :

$$X, \frac{dX}{dZ}, \frac{d^2X}{dZ^2}, \ldots\ldots \frac{d^nX}{dZ^n}$$

$$Y, \frac{dY}{dZ}, \frac{d^2Y}{dZ^2}, \ldots\ldots \frac{d^nY}{dZ^n}$$

de sorte qu'on obtiendra précisément les conditions voulues, en faisant dans ces équations : $Z = z$, puis :

$$X = x \qquad\qquad Y = y$$

$$\frac{dX}{dZ} = \frac{dx}{dz} \qquad\qquad \frac{dY}{dZ} = \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2X}{dZ^2}=\frac{d^2x}{dz^2} \qquad \frac{d^2Y}{dZ^2}=\frac{d^2y}{dz^2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^nX}{dZ^n}=\frac{d^nx}{dz^n} \qquad \frac{d^nY}{dZ^n}=\frac{d^ny}{dz^n}$$

Or, en posant pour un instant :

$$\mathcal{F}(z)=F\left[f(z),\ f_1(z),\ z\right]$$
$$\mathcal{F}_1(z)=F_1\left[f(z),\ f_1(z),\ z\right]$$

cela revient à écrire :

$$\mathcal{F}(z)=0,\quad \mathcal{F}'(z)=0,\quad \mathcal{F}''(z)=0,\ldots\ldots\quad \mathcal{F}^{(n)}(z)=0$$
$$\mathcal{F}_1(z)=0,\quad \mathcal{F}_1'(z)=0\quad \mathcal{F}_1''(z)=0,\ldots\ldots\quad \mathcal{F}_1^{(n)}(z)=0$$

J'appliquerai ce résultat à la question proposée, et supposant d'abord $n=8$, je remarque que les neuf équations qui se rapportent à la fonction $\mathcal{F}(z)$, détermineront séparément les rapports, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, &c.ª, et que les neuf autres ayant absolument les mêmes coefficients pour les inconnues, obligeront de prendre $\frac{B}{A}=\frac{b}{a}$, $\frac{C}{A}=\frac{c}{a}$, &c.ª ce qui fera coïncider les équations $F(X,Y,Z)=0$ $F_1(X,Y,Z)=0$. En conséquence, nous poserons seulement 16 conditions savoir :

$$\mathcal{F}=0,\quad \mathcal{F}'=0,\quad \mathcal{F}''=0,\ldots\ldots\quad \mathcal{F}^{(7)}=0$$
$$\mathcal{F}_1=0,\quad \mathcal{F}_1'=0,\quad \mathcal{F}_1''=0,\ldots\ldots\quad \mathcal{F}_1^{(7)}=0$$

Les premières donnant $a, b, c\ldots\ldots$ en fonction linéaire homogène de deux indéterminées λ, μ, on en déduira cette expression :

$$F(X,Y,Z)=\lambda\,\Phi+\mu\,\Phi_1$$

où Φ et Φ_1 sont des polynômes entièrement déterminés. Le second groupe conduira pareillement à écrire avec deux autres constantes arbitraires λ', μ' :

$$F_1(X,Y,Z)=\lambda'\,\Phi+\mu'\,\Phi_1$$

or, le système des deux équations :

$$\lambda\,\Phi+\mu\,\Phi_1=0 \qquad \lambda'\,\Phi+\mu'\,\Phi_1=0$$

se réduit immédiatement à celui-ci :

$$\Phi=0 \qquad \Phi_1=0.$$

qui donne une courbe ayant un contact du 7.e ordre avec la proposée.

Mais revenons à la tangente pour montrer comment on peut l'obtenir d'une manière élémentaire en partant des équations d'une droite passant par deux points de la courbe. Si l'on désigne en effet par x, y, z, les coordonnées du premier point, par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, celles du second, les équations sont :

$$X - x = \frac{\Delta x}{\Delta z}(Z - z) \qquad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta z}(Z - z)$$

et les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta z}$, $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, ayant pour limites $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ lorsqu'on rapproche indéfiniment les deux points, on retrouve sur-le-champ les équations de la tangente. Mais cette méthode plus élémentaire ne met point en évidence que la distance à la tangente d'un point de la courbe infiniment voisin du point de contact, est infiniment petit du second ordre, ce qu'on démontre comme il suit. Quelle que soit la dépendance entre les points des deux lignes, la distance δ d'un point de la courbe infiniment voisin du point de contact à son correspondant de la droite, est, par définition, un infiniment petit du second ordre ; par conséquent la plus courte distance est-elle a fortiori du même ordre. En voici d'ailleurs le calcul.

※ IV. — En désignant par α, β, γ les angles de la direction de la tangente avec les axes des x, des y et des z, on aura :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

ou, en se rappelant l'expression de la différentielle de l'arc :

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

Cela posé, je choisis pour variable indépendante l'arc s de la courbe, de sorte que les coordonnées soient exprimées de cette manière :

$$x = \varphi(s) \qquad y = \varphi_1(s) \qquad z = \varphi_2(s)$$

et qu'on ait par conséquent :

$$\cos\alpha = \varphi'(s) \qquad \cos\beta = \varphi_1'(s) \qquad \cos\gamma = \varphi_2'(s)$$

Nommant donc $x+h$, $y+k$, $z+l$, les coordonnées qui correspondent à la valeur infiniment voisine $s+ds$, la plus courte distance de ce second à la tangente sera :

$$\delta = \left[(h\cos\beta - k\cos\alpha)^2 + (k\cos\gamma - l\cos\beta)^2 + (l\cos\alpha - h\cos\gamma)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Or, ayant : $x+h = \varphi(s+ds)$, $y+k = \varphi_1(s+ds)$ $z+l = \varphi_2(s+ds)$ on en déduit en développant par la série de Taylor :

$$h = \varphi'(s)\,ds + \varphi''(s)\,\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$k = \varphi_1'(s)\,ds + \varphi_1''(s)\,\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$l = \varphi_2'(s)\,ds + \varphi_2''(s)\,\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

et par suite :

$$h\varphi_1'(s) - k\varphi'(s) = \left[\varphi_1'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\varphi_1''(s)\right]\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$k\varphi_2'(s) - l\varphi_1'(s) = \left[\varphi_2'(s)\varphi_1''(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2''(s)\right]\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

$$l\varphi'(s) - h\varphi_2''(s) = \left[\varphi'(s)\varphi_2''(s) - \varphi_2'(s)\varphi''(s)\right]\frac{ds^2}{2} + \cdots\cdots$$

d'où résulte bien cette expression infiniment petite du second ordre :

$$\delta = \frac{ds^2}{2}\sqrt{\left[\varphi_1'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\varphi_1''(s)\right]^2 + \left[\varphi_2'(s)\varphi_1''(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2''(s)\right] + \left[\varphi'(s)\varphi_2''(s) - \varphi_2'(s)\varphi''(s)\right]^2}$$

Mais nous remarquerons surtout la simplification dont est susceptible la quantité placée sur le radical, et qu'on déduit aisément de cette identité bien connue :

$$\left(\varphi_1'\varphi'' - \varphi'\varphi_1''\right)^2 + \left(\varphi_2'\varphi_1'' - \varphi_1'\varphi_2''\right) + \left(\varphi'\varphi_2'' - \varphi_2'\varphi''\right)^2$$
$$= \left(\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2\right)\left(\varphi''^2 + \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2\right) - \left(\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2''\right)^2$$

Ayant en effet :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

ou bien : $\quad \varphi'^2(s) + \varphi_1'^2(s) + \varphi_2'^2(s) = 1$

on en tire, en différentiant par rapport à s :

$$\varphi'(s)\,\varphi''(s) + \varphi_1'(s)\,\varphi_1''(s) + \varphi_2'(s)\,\varphi_2''(s) = 0$$

de sorte que δ devient :

$$\delta = \frac{ds^2}{2}\sqrt{\varphi''^2(s) + \varphi_1''^2(s) + \varphi_2''^2(s)}$$

Bientôt nous verrons dans la théorie de la courbure, l'importante signification de ce résultat.

V. — Revenons aux équations de la tangente pour considérer le cas où la courbe serait défini par deux relations entre les coordonnées :

$$f(x, y, z) = 0 \qquad f_1(x, y, z) = 0.$$

Envisageant alors x et y comme des fonctions de la variable z, on obtiendra les dérivées $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, par les équations suivantes que donne la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{df}{dz} = 0$$

$$\frac{df_1}{dx}\frac{dx}{dz} + \frac{df_1}{dy}\frac{dy}{dz} + \frac{df_1}{dz} = 0$$

On en tire :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz}}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dx}}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}}$$

ce qui donne pour les équations de la tangente :

$$\frac{X - x}{\frac{df}{dz}\frac{df_1}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{df_1}{dz}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{dx}\frac{df_1}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{df_1}{dx}} = \frac{Z - z}{\frac{df}{dy}\frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{df_1}{dy}}$$

Enfin, remarquons que le calcul précédent revient à éliminer les rapports $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ou plutôt les différentielles dx, dy, dz entre les équations homogènes :

$$\frac{dx}{X - x} = \frac{dy}{Y - y} = \frac{dz}{Z - z}$$

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0$$

$$\frac{df_1}{dx}\,dx + \frac{df_1}{dy}\,dy + \frac{df_1}{dz}\,dz = 0$$

de sorte qu'en tirant des premières équations ces différentielles pour les porter dans les deux autres, on sera amené à définir la tangente par ces deux relations, savoir :

$$(X - x)\frac{df}{dx} + (Y - y)\frac{df}{dy} + (Z - z)\frac{df}{dz} = 0$$
$$(X - x)\frac{df_1}{dx} + (Y - y)\frac{df_1}{dy} + (Z - z)\frac{df_1}{dz} = 0$$

Elles mettent en évidence une conséquence importante, car le plan donné par la première, par exemple, restant le même quand on change la seconde équation de la courbe, doit contenir toutes les tangentes au même point x, y, z aux courbes d'intersection de la surface

$$f(x, y, z) = 0$$

par une autre surface absolument arbitraire :

$$f_1(x, y, z) = 0$$

c'est l'équation générale du plan tangent que nous retrouverons bientôt sous un autre point de vue et par une autre méthode.

Je terminerai ce qui concerne les tangentes aux courbes dans l'espace par la définition du **plan normal**. On nomme ainsi un plan perpendiculaire à la tangente et passant par le point de contact. Les formules de la géométrie analytique donnent d'après cela pour son équation :

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0$$

et comme on a les relations :

$$\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{dz}\,dz = 0$$

$$\frac{df_1}{dx}\,dx + \frac{df_1}{dy}\,dy + \frac{df_1}{dz}\,dz = 0$$

ce plan est représenté par le déterminant à trois colonnes :

$$\left\{\begin{matrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{df}{dz} \\ \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \end{matrix}\right\}$$

égalé à zéro.

Contact d'une courbe et d'une surface.

I. Cette théorie n'est qu'un corollaire de la précédente; elle s'en déduit par une considération extrêmement simple, amenée par la remarque suivante.

Soit dans l'espace deux courbes représentées par les équations:

$$x = f(z) \qquad y = f_1(z)$$

$$X = F(z) \qquad Y = F_1(Z)$$

les conditions pour qu'elles aient en un point $Z = z$ un contact d'ordre n, se sont offertes en premier sous cette forme:

$$\begin{array}{ll} F(z) = f(z) & F_1(z) = f(z) \\ F'(z) = f'(z) & F_1'(z) = f_1'(z) \\ \vdots & \vdots \\ F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) & F_1^{(n)}(z) = f_1^{(n)}(z) \end{array}$$

Il a été ensuite établi qu'en se donnant la seconde courbe par les équations:

$$F(X, Y, Z) = 0 \quad , \quad F_1(X, Y, Z) = 0$$

et faisant:

$$\mathcal{F}(z) = F\left[f(z), f_1(z), z\right]$$

on devait poser: $\quad \mathcal{F}_1(z) = F_1\left[f(z), f_1(z), z\right]$

$$\mathcal{F}(z) = 0 \quad \mathcal{F}'(z) = 0 \quad \mathcal{F}''(z) = 0 \ldots\ldots \mathcal{F}^{(n)}(z) = 0$$

$$\mathcal{F}_1(z) = 0 \quad \mathcal{F}_1'(z) = 0 \quad \mathcal{F}_1''(z) = 0 \ldots\ldots \mathcal{F}_1^{(n)}(z) = 0$$

J'ajoute qu'en considérant une variable quelconque à la place de la coordonnée z, de sorte que nous ayons:

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

les conditions précédentes conserveront la même forme. On démontrerait en effet, comme pour les courbes planes, qu'en faisant:

$$\mathcal{F}(t) = F\left[\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)\right]$$

$$\mathcal{F}_1(t) = F_1\left[\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)\right]$$

elles deviennent: $\quad \mathcal{F}(t) = 0, \quad \mathcal{F}'(t) = 0, \ldots\ldots \mathcal{F}^{(n)}(t) = 0.$

$$\mathcal{F}_1(t) = 0 \qquad \mathcal{F}_1'(t) = 0 \;\ldots\ldots\; \mathcal{F}_1^{(n)}(t) = 0$$

Cette observation faite, imaginons qu'en conservant l'équation :

$$F(X, Y, Z) = 0$$

on change l'autre : $\qquad F_1(X, Y, Z) = 0$

d'une manière quelconque, mais en remplissant toujours les conditions du contact d'ordre n. Il est clair que nous pourrons envisager la première surface comme le lieu d'une infinité de courbes présentant au point $Z = z$ un contact d'ordre n avec la ligne proposée :

$$x = f(z) \qquad y = f_1(z)$$

De là se tire la notion géométrique à laquelle nous voulions parvenir ; nous dirons en effet que l'équation $F(X, Y, Z) = 0$ représente une surface ayant avec la courbe un contact de cet ordre, et nous ajouterons immédiatement à sa définition analytique la remarque suivante :

Considérant sur cette courbe un point infiniment voisin du point de contact, et donné par la valeur $z + h$ de cette variable indépendante ; on sait que sa distance au point correspondant de la ligne représentée par les équations :

$$F(X, Y, Z) = 0$$

$$F_1(X, Y, Z) = 0$$

est infiniment petite d'ordre $n+1$ par rapport à h d'après sa définition, par conséquent, et à fortiori la plus courte distance de ce point à la surface $F(X, Y, Z) = 0$ est elle infiniment petite de cet ordre.

II. La théorie qui vient d'être exposée reçoit deux applications principales. La première concerne le plan dont l'équation renferme trois constantes, de sorte qu'on peut établir un contact du second ordre entre cette surface et une courbe quelconque :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

Posons à cet effet :

$$F(X, Y, Z) = aX + bY + cZ + d$$

on aura : $\qquad \mathcal{F}(t) = a\varphi(t) + b\varphi_1(t) + c\varphi_2(t) + d$

et en écrivant pour abréger :

$$\mathcal{F}(t) = a\varphi + b\varphi_1 + c\varphi_2 + d$$

nous déterminerons les coefficients par les équations suivantes :

$$\mathcal{F}(t) = a\varphi + b\varphi_1 + c\varphi_2 + d = 0$$
$$\mathcal{F}'(t) = a\varphi' + b\varphi_1' + c\varphi_2' = 0$$
$$\mathcal{F}''(t) = a\varphi'' + b\varphi_1'' + c\varphi_2'' = 0$$

Il s'ensuit que l'équation cherchée est donnée immédiatement sous forme d'un déterminant égalé à zéro, savoir :

$$\left\{\begin{matrix} X-\varphi, & \varphi', & \varphi'' \\ Y-\varphi_1, & \varphi_1', & \varphi_1'' \\ Z-\varphi_2, & \varphi_2', & \varphi_2'' \end{matrix}\right\} = (X-\varphi)(\varphi_1'\varphi_2''-\varphi_2'\varphi_1'') + (Y-\varphi_1)(\varphi_2'\varphi''-\varphi'\varphi_2'') + (Z-\varphi_2)(\varphi'\varphi_1''-\varphi_1'\varphi'') = 0$$

Ce plan a été nommé osculateur, l'ordre du contact étant aussi élevé qu'il est possible, d'après le nombre des coefficients qui entrent dans l'équation générale.

Il s'augmentera toutefois d'une unité si l'on a :

$$\mathcal{F}'''(t) = a\varphi''' + b\varphi_1''' + c\varphi_2''' = 0$$

et pour que cette nouvelle condition s'accorde avec les précédentes, il faudra que le déterminant :

$$\Delta = \left\{\begin{matrix} \varphi', & \varphi'', & \varphi''' \\ \varphi_1', & \varphi_1'', & \varphi_1''' \\ \varphi_2', & \varphi_2'', & \varphi_2''' \end{matrix}\right\}$$

soit nul. L'équation $\Delta = 0$ permet donc d'obtenir sur la courbe un nombre fini et limité de points, pour lesquels le plan osculateur a un contact du 3e ordre. Il reçoit alors la dénomination particulière de stationnaire, qui lui a été donnée par Mr Cayley. En posant enfin $\Delta = 0$, quel que soit t, on a la condition pour que tous les points de la courbe soient dans un seul et même plan.

La seconde application concerne la sphère osculatrice.

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = R^2$$

dont le contact sera généralement du 3e ordre. Pour obtenir avec plus de simplicité l'expression des coordonnées du centre et du rayon, nous supposerons que la variable indépendante soit l'arc s de la courbe, de sorte qu'en écrivant :

$$x = \varphi(s) \qquad y = \varphi_1(s) \qquad z = \varphi_2(s)$$

on ait la relation :

$$\varphi'^2(s) + \varphi_1'^2(s) + \varphi_2'^2(s) = 1$$

Cela posé, soit encore :

$$\mathcal{F}(s) = \left[\left\{\varphi(s)-a\right\}^2 + \left\{\varphi_1(s)-b\right\}^2 + \left\{\varphi_2(s)-c\right\}^2\right]^2 - R^2$$

ou, plus simplement :

$$\mathcal{F}(s) = \left[(\varphi-a)^2 + (\varphi-b)^2 + (\varphi_2-c)^2\right]^2 - R^2.$$

on aura : $\frac{1}{2}\mathcal{F}'(s) = (\varphi-a)\varphi' + (\varphi_1-b)\varphi_1' + (\varphi_2-c)\varphi_2'$

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}''(s) = (\varphi-a)\varphi'' + (\varphi_1-b)\varphi_1'' + (\varphi_2-c)\varphi_2'' + \varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2$$

et d'après la supposition faite sur le choix de la variable indépendante :

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}'' = (\varphi-a)\varphi'' + (\varphi_1-b)\varphi_1'' + (\varphi_2-c)\varphi_2'' + 1$$

Il en résulte pour la dérivée suivante, en remarquant que la condition admise :

$$\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = 1$$

donne par la différentiation :

$$\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'' = 0$$

cette valeur : $\frac{1}{2}\mathcal{F}'''(s) = (\varphi-a)\varphi''' + (\varphi_1-b)\varphi_1''' + (\varphi_2-c)\varphi_2'''$

Or, des équations :

$$(\varphi-a)\varphi' + (\varphi_1-b)\varphi_1' + (\varphi_2-c)\varphi_2' = 0$$

$$(\varphi-a)\varphi'' + (\varphi_1-b)\varphi_1'' + (\varphi_2-c)\varphi_2'' = -1$$

$$(\varphi-a)\varphi''' + (\varphi_1-b)\varphi_1''' + (\varphi_2-c)\varphi_2''' = 0$$

on tirera en employant le déterminant Δ considéré plus haut :

$$(\varphi-a)\,\Delta = \varphi_2'\varphi_1''' - \varphi_1'\varphi_2'''$$

$$(\varphi_1-b)\,\Delta = \varphi'\varphi_2''' - \varphi_2'\varphi'''$$

$$(\varphi_2-c)\,\Delta = \varphi_1'\varphi''' - \varphi'\varphi_1'''$$

ce qui donne les coordonnées du centre a, b, c. Nous obtiendrions ensuite le rayon par l'égalité :

$$\mathcal{F}(s) = (\varphi - a)^2 + (\varphi_1 - b)^2 + (\varphi_2 - c)^2 - R^2 = 0$$

car ayant ainsi : $\quad R^2 = (\varphi - a)^2 + (\varphi_1 - b)^2 + (\varphi_2 - c)^2$

nous en conclurons immédiatement :

$$R^2 \Delta^2 = (\varphi_2' \varphi_1''' - \varphi_1' \varphi_2''')^2 + (\varphi' \varphi_2''' - \varphi_2' \varphi''')^2 + (\varphi_1' \varphi''' - \varphi' \varphi_1''')^2$$

ou encore d'après une identité bien connue :

$$R^2 \Delta^2 = (\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi'''^2 + \varphi_1'''^2 + \varphi_2'''^2) - (\varphi' \varphi''' + \varphi_1' \varphi_1''' + \varphi_2' \varphi_2''')^2$$

Nous ferons bientôt usage de ce résultat dans la théorie de la courbure

III. — Je terminerai la théorie du contact d'une courbe et d'une surface, en faisant une application de cette notion géométrique nouvelle du plan osculateur. Considérant une courbe donnée par les équations :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

je me propose, en plaçant l'origine des coordonnées en un point quelconque correspondant à la valeur $t = \alpha$, de la rapporter au plan osculateur en ce point, comme nouveau plan des XY, puis à la tangente et à la normale pour axes des X et des Y. Mettons à cet effet $\alpha + t$, au lieu de t, de sorte qu'on ait, par la série de Taylor :

$$x = \varphi(\alpha + t) = \varphi(\alpha) + \frac{t}{1} \varphi'(\alpha) + \frac{t^2}{1.2} \varphi''(\alpha) + \ldots\ldots$$

$$y = \varphi_1(\alpha + t) = \varphi_1(\alpha) + \frac{t}{1} \varphi_1'(\alpha) + \frac{t^2}{1.2} \varphi_1''(\alpha) + \ldots\ldots$$

$$z = \varphi_2(\alpha + t) = \varphi_2(\alpha) + \frac{t}{1} \varphi_2'(\alpha) + \frac{t^2}{1.2} \varphi_2''(\alpha) + \ldots\ldots$$

le déplacement d'origine s'effectuera d'abord en posant :

$$x = \varphi(\alpha) + x_1 \qquad y = \varphi_1(\alpha) + y_1 \qquad z = \varphi_2(\alpha) + z_1$$

cela fait, j'emploierai les trois transformations successives que voici, d'axes rectangulaires en d'autres axes rectangulaires situés dans le même plan.

1° Dans le plan des $y_1 z_1$ en faisant :

$$y_2 = y_1 \cos\lambda - z_1 \sin\lambda$$

$$z_2 = y_1 \sin\lambda + z_1 \cos\lambda.$$

et disposant de l'angle λ de manière à faire disparaître le coefficient de t dans l'expression de z_2.

2° En faisant dans le plan des $x_1 y_2$:

$$x_2 = x_1 \cos\mu - y_2 \sin\mu$$
$$y_3 = x_1 \sin\mu + y_2 \cos\mu$$

et disposant de μ de manière à faire encore disparaître le terme en t dans y_3

3°. En faisant enfin dans le plan des $y_3\, z_2$

$$y_4 = y_3 \cos\nu - z_2 \sin\nu$$
$$z_3 = y_3 \sin\nu + z_2 \cos\nu$$

et déterminant l'angle ν de sorte que z_3 déjà privé du terme du premier degré en t perde le suivant en t^2.

Cela fait, si l'on désigne pour plus de simplicité par X, Y, Z, les nouvelles coordonnées, x_2, y_4 et z_3 leurs expressions développées suivant les puissances de t, auront évidemment cette forme :

$$X = At + A't^2 + A''t^3 + \ldots\ldots$$
$$Y = Bt^2 + B't^3 + \ldots\ldots$$
$$Z = Ct^3 + \ldots\ldots$$

Par conséquent, à une distance infiniment petite de l'origine correspondant à une valeur infiniment petite du premier ordre de t ou X on voit que Y sera du second ordre et Z du troisième, donc l'axe des X est bien une tangente et le plan des XY le plan osculateur.

Si l'on suppose de plus, comme il y a lieu de le faire dans plusieurs circonstances importantes que t soit l'arc de la courbe compté à partir de l'origine, et qu'on fasse comme précédemment : $t = s$, on aura :

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 = 1$$

ou bien : $\left(A + 2A's + 3A''s^2 + \ldots\right)^2 + \left(2Bs + 3B's^2 + \ldots\right)^2 + \left(3Cs^2 + \ldots\ldots\right)^2 = 1.$

et on en conclut :

$$A^2 = 1 \qquad A' = 0 \qquad \cancel{4A'^2} + 6AA'' + 4B^2 = 0, \text{ etc.}$$

par conséquent : $A = 1$, car on peut changer X en $-X$; $A' = 0$, $A'' = -\frac{2}{3}B^2$ résultats que nous emploierons bientôt.

※ Soit comme exemple, l'hélice qui a pour équations :

$$x = a \sin\frac{ls}{a} \qquad y = a \cos\frac{ls}{a} \qquad z = s\sqrt{1 - l^2}$$

la variable s étant bien l'arc de la courbe, car on a identiquement :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

En faisant $y = a + Y$, et développant en série, nous aurons :

$$x = ls - \frac{l^3 s^3}{6a^2} + \cdots\cdots$$

$$Y = -\frac{l^2 s}{2a} + \frac{l^4 s^4}{24a^3} - \cdots\cdots$$

$$z = \sqrt{1 - l^2}\; s$$

de sorte qu'une seule transformation d'axes conduira au résultat. Soit $l = \sin\lambda$, nous poserons :

$$X = x \sin\lambda + z \cos\lambda$$

$$Z = x \cos\lambda - z \sin\lambda$$

ce qui donnera en effet :

$$X = s - \frac{\sin^4\lambda}{6a^2} s^3 + \cdots\cdots$$

$$Y = -\frac{\sin^2\lambda}{2a} s^2 + \frac{\sin^4\lambda}{24a^3} s^4 - \cdots\cdots$$

$$Z = -\frac{\cos\lambda \sin^3\lambda}{6a^2} s^3 + \cdots\cdots$$

Ces expressions rapprochées de celles qui viennent d'être données pour une courbe quelconque, savoir :

$$x = s - \frac{2}{3} B^2 s^3 + \cdots\cdots$$

$$y = B s^2 + B' s^3 + \cdots\cdots$$

$$z = C s^3 + \cdots\cdots$$

montrent qu'en posant :

$$B = -\frac{\sin^2\lambda}{2a}$$

l'hélice aura à l'origine un contact du second ordre avec la courbe. Et si le coefficient B' s'évanouit, ce qui généralement aura lieu en un nombre fini et limité de points d'une ligne donnée, on pourra pour chacun de ces points obtenir une hélice osculatrice ayant avec la courbe un contact du 3e ordre. En effet, si l'on détermine a et λ par les conditions :

$$B = -\frac{\sin^2\lambda}{2a} \qquad C = -\frac{\cos\lambda \sin^3\lambda}{6a^2}$$

les développements en série des trois différences $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, suivant les puissances croissantes de la variable S, commenceront seulement aux termes du 4e degré. Or, on a vu que ce sont là précisément les conditions du contact du 3e ordre à l'égard de deux lignes dans l'espace.

Note. — La condition $\Delta = 0$ obtenue précédemment pour que la courbe

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

soit tout entière dans un même plan, donne lieu à la remarque suivante. Supposons pour plus de simplicité $\varphi_2(t) = t$, de sorte que z devenant la variable indépendante on ait : $x = \varphi(z)$ $\quad y = \varphi_1(z)$. Nous trouverons alors :

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \varphi' & \varphi'' & \varphi''' \\ \varphi_1' & \varphi_1'' & \varphi_1''' \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \varphi'' \varphi_1''' - \varphi''' \varphi_1''$$

et la condition $\Delta = 0$, en divisant par $\varphi_1''^2$ prend cette forme : $\left(\frac{\varphi''}{\varphi_1''}\right)' = 0$ d'où l'on conclut : $\varphi'' = a\,\varphi_1''$, a désignant une constante arbitraire. Il en résulte ensuite bien aisément : $\varphi' = a\,\varphi_1' + b$; puis enfin : $\varphi = a\,\varphi_1 + bz + c$ c'est à dire : $x = ay + bz + c$, de sorte que la courbe proposée est tout entière en effet dans un même plan.

Contact des surfaces.

I. Une surface étant définie par l'équation $f(x,y,z)=0$, les coordonnées d'un quelconque de ses points seront des fonctions de deux variables différentes, et devront s'exprimer de cette manière :

$$x=\varphi(t,u) \qquad y=\varphi_1(t,u) \qquad z=\varphi_2(t,u)$$

Et si nous considérons une seconde surface dont tous les points se déduisent par une construction déterminée de ceux de la première, leurs coordonnées seront représentées pareillement par ces expressions où figurent les mêmes variables indépendantes t et u :

$$X=\Phi(t,u) \qquad Y=\Phi_1(t,u) \qquad Z=\Phi_2(t,u)$$

Cela étant, la théorie du contact repose encore sur la considération de la fonction $\delta=f(t,u)$ qui donne la distance de deux points correspondants savoir :

$$\delta=\left[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\left\{\Phi(t,u)-\varphi(t,u)\right\}^2+\left\{\Phi_1(t,u)-\varphi_1(t,u)\right\}^2+\left\{\Phi_2(t,u)-\varphi_2(t,u)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

et nous dirons qu'en un point donné par les valeurs $t=a$, $u=b$, les surfaces ont un contact du n.e ordre, lorsqu'en posant : $t=a+h$, $u=b+k$, la distance δ est infiniment petite d'ordre $n+1$ par rapport à h et k. Mais il faut tout d'abord préciser ce qu'on entend par l'ordre d'un infiniment petit par rapport à deux autres. Nous imaginerons à cet effet que h et k dépendent d'une seule variable, en faisant par exemple $k=\omega h$, et supposant ω fini. Cela posé, la quantité :

$$\delta=f(a+h,\ b+\omega h)$$

pourra se développer en série suivant les puissances croissantes de h, et il sera désormais entendu qu'elle est infiniment petite d'ordre $n+1$, lorsqu'indépendamment de toute valeur attribuée à ω, les coefficients des puissances de h jusqu'à la n.e seront tous nuls. En admettant ce principe, on déduira sur le champ de la définition de l'ordre du contact à l'égard de deux surfaces, ces conséquences qu'il suffit d'énoncer :

1.° Les trois différences, $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, doivent être chacune infiniment petites de l'ordre $n+1$.

2.° Ces conditions restent les mêmes en changeant les axes coordonnés.

3.° Elles subsistent si l'on change de variables indépendantes en posant.

$$t = f(\theta, v) \qquad u = f_1(\theta, v)$$

Ainsi, en admettant qu'à : $t = a$, $u = b$, réponde : $\theta = \alpha$, $v = \beta$, et qu'on ait :

$$a + h = f(\alpha + i, \beta + j) \qquad b + K = f_1(\alpha + i, \beta + j)$$

si les quantités $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ sont infiniment petites d'ordre $n+1$ par rapport à h et K, elles seront infiniment petites du même ordre par rapport à i et j.

4° Prenant d'après cela pour variables indépendantes les coordonnées x et y, de sorte que les équations des surfaces deviennent :

$$1^{\circ} \qquad z = f(x, y)$$

$$2^{\circ} \qquad X = \mathcal{F}(x, y) \qquad Y = \mathcal{F}_1(x, y) \qquad Z = F(x, y)$$

les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ déterminent la loi de correspondance de leurs points, et les conditions relatives aux différences : $X - x$, $Y - y$, caractérisent les lois de correspondance compatibles avec la définition du contact. Quant aux conditions concernant les surfaces elles-mêmes, elles se déduisent des développements que donne la série de Taylor étendue à deux variables, savoir :

$$F(a+h, b+\omega h) = F(a, b) + \left[\frac{dF}{da} + \omega\frac{dF}{db}\right]\frac{h}{1} + \left[\frac{d^2F}{da^2} + 2\omega\frac{d^2F}{da\,db} + \omega^2\frac{d^2F}{db^2}\right]\frac{h^2}{1.2} + \dots\dots$$

$$f(a+h, b+\omega h) = f(a, b)\left[\frac{df}{da} + \omega\frac{df}{db}\right]\frac{h}{1} + \left[\frac{d^2f}{da^2} + 2\omega\frac{d^2f}{da\,db} + \omega^2\frac{d^2f}{db^2}\right]\frac{h^2}{1.2} + \dots\dots$$

et on exprime en effet que la différence $Z - z$ est infiniment petite d'ordre $n+1$, en posant :

$$F(a, b) = f(a, b)$$

$$\frac{dF}{da} + \omega\frac{dF}{db} = \frac{df}{da} + \omega\frac{df}{db}$$

$$\frac{d^2F}{da^2} + 2\omega\frac{d^2F}{da\,db} = \frac{d^2f}{da^2} + 2\omega\frac{d^2f}{da\,db} + \omega^2\frac{d^2f}{db^2}$$

. . . .

$$\frac{d^nF}{da^n} + \frac{n}{1}\omega\frac{d^nF}{da^{n-1}db} + \dots + \frac{n}{1}\omega^{n-1}\frac{d^nF}{da\,db^{n-1}} + \omega^n\frac{d^nF}{db^n} = \frac{d^nf}{da^n} + \frac{n}{1}\omega\frac{d^nf}{da^{n-1}db} + \dots + \frac{n}{1}\omega^{n-1}\frac{d^nf}{da\,db^{n-1}} + \omega^n\frac{d^nf}{db^n}$$

et considérant ω dans ce système de relations comme une indéterminée. Il en résulte que le contact du premier ordre exige trois équations :

$$F(a, b) = f(a, b) \qquad \frac{dF}{da} = \frac{df}{da} \qquad \frac{dF}{db} = \frac{df}{db},$$

le contact du second ordre six, car aux précédentes il faudra joindre celles-ci :

$$\frac{d^2F}{da^2} = \frac{d^2f}{da^2} \qquad \frac{d^2F}{da\,db} = \frac{d^2f}{da\,db} \qquad \frac{d^2F}{db^2} = \frac{d^2f}{db^2}$$

et en général le contact d'ordre n, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations. C'est ce nombre qui donne à la théorie dont nous nous occupons son caractère propre, et éloigne, sauf un seul cas, toute analogie avec celle du contact des deux courbes, ou d'une courbe et d'une surface, comme on va le voir par les applications suivantes.

II. — En premier lieu, nous envisagerons le plan :

$$Z = aX + bY + c$$

dont l'équation renferme trois coefficients, de sorte qu'on peut, comme pour la ligne droite à l'égard d'une courbe, obtenir en un point quelconque : $X = x$, $Y = y$, un contact du premier ordre avec toute surface $z = f(x,y)$. Ayant en effet : $F(X,Y) = aX + bY + c$, les conditions :

$$F(x,y) = f(x,y) \quad \frac{dF}{dx} = \frac{df}{dx} \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{df}{dy}$$

donnent immédiatement :

$$z = ax + by + c \qquad a = \frac{dz}{dx} \qquad b = \frac{dz}{dy}$$

et l'on retrouve ainsi l'équation déjà obtenue du plan tangent sous la forme :

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y)$$

Nous remarquerons, avant de faire les applications de ce résultat qu'en supposant parallèle au plan coordonné des XY, le plan tangent en x, y, z, à la surface $z = f(x, y)$ on a nécessairement

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{df}{dy} = 0$$

Et si le plan des xy est lui-même tangent à l'origine des coordonnées, la fonction $f(x,y)$ et les dérivées partielles du premier ordre s'annuleront pour $x = 0$, $y = 0$, de sorte que le développement par la série de Mac-Laurin de l'ordonnée Z suivant les puissances croissantes de x et y, commencera seulement aux termes du second degré et sera de la forme :

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dy^3 + ex^2y + \ldots\ldots$$

De là se déduirait que la distance au plan tangent d'un point d'une surface infiniment voisin d'un point de contact est un infiniment petit du second ordre. Mais d'une manière plus générale, comme par définition la distance δ de deux points correspondants A et B de deux surfaces, infiniment voisins de leur point de contact, est infiniment petite d'ordre $n+1$ lorsqu'elles ont un contact du n^e ordre il en résulte a fortiori que la plus courte distance du point A de la première surface à la seconde est aussi infiniment petite du même ordre.

Observons enfin qu'en supposant z une fonction implicite, déterminée par la relation :

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation :

$$Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x) + \frac{dz}{dy}(Y - y)$$

reprend la forme sous laquelle nous l'aurions primitivement obtenue. On a en effet :

$$\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{df}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{df}{dy} = 0$$

en y substituant la valeur :

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}} \qquad\qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}$$

$$(X - x)\frac{df}{dx} + (Y - y)\frac{df}{dy} + (Z - z)\frac{df}{dz} = 0$$

Nous en conclurons pour la normale à la surface, c'est à dire la perpendiculaire élevée en x, y, z au plan tangent, les équations :

$$\frac{X - x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z - z}{\frac{df}{dz}}$$

en supposant que les axes coordonnés soient rectangulaires.

II. Soit pour première application les surfaces données par l'équation :

$$f(x - az, y - bz) = 0$$

ou plus simplement : $f(\alpha, \beta) = 0$

en posant : $\alpha = x - az \qquad \beta = y - bz$. On tirera de là :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\alpha} \qquad \frac{df}{dy} = \frac{df}{d\beta} \qquad \frac{df}{dz} = -a\frac{df}{d\alpha} - b\frac{df}{d\beta}$$

de sorte qu'en réunissant les termes en $\frac{df}{d\alpha}$ et $\frac{df}{d\beta}$, l'équation du plan tangent devient :

$$\frac{df}{d\alpha}\left[X - x - a(Z - z)\right] + \frac{df}{d\beta}\left[Y - y - a(Z - z)\right] = 0$$

Ce résultat fait voir que quelle que soit la fonction $f(\alpha,\beta)$ le plan contient la droite :

$$X - x = a(Z - z) \qquad\qquad Y - y = b(Z - z)$$

Effectivement, l'équation proposée est celle des surfaces cylindriques, et le calcul met en évidence cette propriété du plan tangent, de contenir la génératrice qui passe par le point de contact.

Nous considérerons en second lieu les surfaces coniques, qui sont données par l'équation :

$$f(\alpha,\beta) = 0$$

en posant : $\alpha = \frac{x - a}{z - c}$ $\qquad\qquad \beta = \frac{y - b}{z - c}$

On aura alors :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{z-c}\,\frac{df}{d\alpha}, \quad \frac{df}{dy} = \frac{1}{z-c}\,\frac{df}{d\beta}, \quad \frac{df}{dz} = -\frac{x-a}{(z-c)^2}\,\frac{df}{d\alpha} - \frac{y-b}{(z-c)^2}\,\frac{df}{d\beta}$$

et par suite pour l'équation du plan tangent, après avoir supprimé le facteur $\frac{1}{z-c}$:

$$\frac{df}{d\alpha}\left[X - x - (Z - z)\frac{x-a}{z-c}\right] + \frac{df}{d\beta}\left[Y - y - (Z - z)\frac{y - b}{z - c}\right] = 0$$

Il contient donc la génératrice qui passe par le point de contact.

En dernier lieu, les équations de la normale aux surfaces de révolution :

$$f(\alpha,\beta) = 0$$

en faisant : $\alpha = x^2 + y^2$ $\qquad \beta = z$, seront :

$$\frac{X - x}{2xf'(\alpha)} = \frac{Y - y}{2yf'(\alpha)} = \frac{Z - z}{f'(\beta)}$$

et les deux premières se réduisant à : $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$, il en résulte que cette droite est dans le plan déterminé par le point x, y, z, et l'axe des z, qui est l'axe de révolution de la surface.

III. — Une surface reçoit le nom d'osculatrice, lorsqu'on a disposé de toutes les constantes qui fixent sa position et déterminent sa nature, de manière à obtenir avec une surface donnée le contact de l'ordre le plus élevé possible. C'est là, comme on voit, l'extension naturelle de la notion qui s'est offerte dans la théorie du contact des courbes planes, et qui a reçu dans le cas du cercle une application d'une grande importance. Mais toute surface ne peut point devenir osculatrice d'une autre, comme toute courbe, quelle qu'elle soit, d'une ligne donnée. Il faut en effet que le nombre des constantes à déterminer soit un terme de la série :

$$3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \&^{ca} \ldots \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

de sorte qu'il n'y a ni sphère ni surface du second degré osculatrices, puisque leurs équations générales renferment respectivement 4 et 9 coefficients. En général une surface du m^e degré en contient : $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$, ce qui conduit à poser l'équation :

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1$$

dont il y aurait lieu ainsi de rechercher toutes les solutions en nombres entiers et positifs pour m et n. Mais l'arithmétique supérieure ne donne à cet égard aucune méthode, et je me bornerai à remarquer qu'on y satisfait par les moindres nombres en prenant : $m = 5$ et $n = 9$. Il n'y a donc aucune surface de degré inférieur à cinq, pouvant être osculatrice, de sorte que la théorie actuelle ne semble pas applicable au-delà du plan et du contact du premier ordre. La considération suivante permettra cependant d'aller plus loin. En disposant des deux coordonnées d'un point d'une surface, on peut en effet ajouter deux constantes à celles qui déterminent une sphère et par conséquent la rendre en ces points osculatrice du second ordre, puisqu'on aura le nombre voulu de six quantités arbitraires. En disposant d'une seule des coordonnées, on ajoute une arbitraire aux neuf coefficients d'une surface du second degré, ce qui permettra de la rendre osculatrice du troisième ordre, non plus alors en un certain nombre de points, mais comme il le semble au premier abord, tout le long d'une ligne déterminée d'une surface quelconque. Nous allons traiter ces deux questions.

IV. — L'équation de la sphère étant :

$$(X-a)^2+(Y-b)+(Z-c)^2=R^2$$

on obtiendra les dérivées de premier ordre : $P=\dfrac{dZ}{dX}$ $Q=\dfrac{dZ}{dY}$ par les relations :

$$X-a+P(Z-c)=0$$
$$Y-b+Q(Z-c)=0$$

et celle du second : $R=\dfrac{d^2Z}{dX^2}$ $S=\dfrac{d^2Z}{dXdY}$ $T=\dfrac{d^2Z}{dY^2}$.

par celles-ci qui s'en déduisent en différentiant successivement par rapport à X et Y :

$$1+P^2+R(Z-c)=0$$
$$PQ+S(Z-c)=0$$
$$1+Q^2+T(Z-c)=0$$

Or, les conditions du contact du second ordre avec une surface quelconque $z=f(x,y)$ au point $X=x$ $Y=y$ sont :

$$Z=z \qquad P=\frac{dz}{dx} \qquad Q=\frac{dz}{dy}$$
$$R=\frac{d^2z}{dx^2} \qquad S=\frac{d^2z}{dx\,dy} \qquad T=\frac{d^2z}{dy}$$

de sorte qu'en faisant suivant l'usage :

$$p=\frac{dz}{dx} \qquad q=\frac{dz}{dy} \qquad r=\frac{d^2z}{dx^2} \qquad s\,\frac{d^2z}{dx\,dy} \qquad t=\frac{d^2z}{dy^2}$$

nous les obtiendrons en remplaçant dans les relations précédentes : X, Y, Z, P, Q, R, S, T par x, y, z, p, q, r, s, t, ce qui donnera :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$
$$x-a+p(z-c)=0$$
$$y-b+q(z-c)=0$$
$$1+p^2+r(z-c)=0$$
$$pq+s(z-c)=0$$
$$1+q^2+t(z-c)=0$$

Or, les trois dernières conduisent immédiatement par l'élimination de c ou plutôt de $z-c$ aux deux équations de condition cherchées entre x et y, savoir :

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$$

et en chassant les dénominateurs :

$$(1+p^2)\,s - pqr = 0$$

$$(1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r = 0$$

On donne le nom d'ombilics aux points de la surface $z=f(x,y)$ que déterminent ces relations et que bientôt nous verrons s'offrir sous un autre point de vue. Je me bornerai en ce moment à les obtenir à l'égard de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

où ils ont un rôle extrêmement important dans l'étude géométrique des courbes tracées sur cette surface. En formant à cet effet les valeurs des quantités p, q, r, s, t, on trouve :

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z} \qquad q = -\frac{c^2y}{b^2z}$$

$$r = -\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3} \qquad s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3} \qquad t = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$$

et après quelques réductions, il viendra simplement :

$$b^2(a^2-c^2)\,xy = 0 \qquad b^2(a^2-c^2)\,x^2 - a^2(b^2-c^2)\,y^2 - a^2b^2(a^2-b^2) = 0$$

Ces relations sont identiques dans le cas où l'ellipsoïde se réduit à une sphère, comme on pouvait le prévoir, mais si les axes sont inégaux, et qu'on suppose :

$$a > b > c$$

nous parviendrons très-aisément à ces solutions, les seules réelles, savoir :

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad y=0 \qquad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

On en conclut que les ombilics sont les quatre points où les plans des sections circulaires deviennent tangents à la surface.

* V. Dans la seconde question, il s'agit de l'équation générale du 2^e^ degré :

$$F(X,Y,Z) = aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'XZ + 2b''XY$$
$$+ 2cX + 2c'Y + 2c''Z + d = 0$$

et des conditions du contact du 3e ordre avec la surface quelconque $z = f(x,y)$. Alors, il est nécessaire d'introduire en outre des dérivées partielles du premier et du second ordre p, q, r, s, t, celles du troisième que je désignerai ainsi :

$$g = \frac{d^3 z}{dx^3} \qquad h = \frac{d^3 z}{dx^2 dy} \qquad k = \frac{d^3 z}{dx\,dy^2} \qquad l = \frac{d^3 z}{dy^3}$$

Cela étant, et sans répéter ce qui a été dit tout à l'heure à propos de la sphère, j'écrirai immédiatement ces relations :

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + \dots\dots\dots = 0$$

$$(b'x + by + a''z + c'')\,p + ax + b''y + b'z + c = 0$$
$$(b'x + by + a''z + c'')\,q + b''x + a'y + bz + c' = 0$$

puis celles-ci qui contiennent les dérivées du second ordre, et où je fais pour abréger :

$$\omega = \frac{1}{2}\,\frac{dF}{dz} = b'x + by + a''z + c''$$

Savoir :

$$\omega r + cp^2 + 2b'p + a = 0$$

$$\omega s + cpq + a'p + b'q + c' = 0$$
$$\omega t + cq^2 + 2a'q + b = 0$$

On en tire par la différentiation ces quatre dernières équations où entrent les dérivées partielles du 3e ordre, et qui ne contiennent plus que les coefficients a'', b, b', c'' sous forme homogène :

$$\omega g + 3\,(a''p + b')\,r = 0$$

$$\omega h + (a''q + b)\,r + 2\,(a''p + b')\,s = 0$$
$$\omega k + (a''p + b')\,t + 2\,(a''q + b)\,s = 0$$

$$\omega k + 3\,(a''q + b)\,t = 0.$$

Voici la conséquence remarquable à laquelle elles conduisent ; deux d'entre elles donnent :

$$a''p + b' = -\frac{\omega g}{3r} \qquad a''q + b = -\frac{\omega k}{3t}$$

et en substituant dans les deux autres, la quantité ω disparaîtra comme facteur commun, de sorte qu'au lieu d'une seule équation de condition entre x et y, nous obtenons les deux suivantes :

$$3hrt - Kr^2 - 2gst = 0$$

$$3Krt - gt^2 - 2Ksr = 0$$

Mais en même temps, les inconnues a'', b, b', c'', et par suite tous les coefficients $F(X, Y, Z)$ s'exprimeront en fonction linéaire et homogène de deux indéterminées λ et μ, de sorte qu'on doit poser :

$$F(X, Y, Z) = \lambda\,\Phi + \mu\,\Phi_1,$$

où Φ et Φ_1 sont des polynomes entièrement déterminés. Il s'en suit qu'en un nombre fini de points de la surface $z = f(x, y)$ et non le long d'une ligne comme on l'aurait d'abord présumé, nous obtenons un faisceau de surfaces, au lieu d'une surface osculatrice unique du second degré.

De la courbure.

Cette théorie, qui se lie naturellement à celle du contact géométrique, a une portée beaucoup plus étendue, et nous nous bornerons ici à en donner les principes les plus simples, sans entrer dans les résultats si importants obtenus depuis Euler, sur la courbure des surfaces et des lignes tracées sur la sphère ou sur une surface quelconque. Je renverrai, pour l'étude de ces belles questions, au premier volume du Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral de M. Bertrand, et en me limitant à un petit nombre de points fondamentaux, je considérerai successivement les courbes planes, les courbes dans l'espace et en premier lieu, les surfaces.

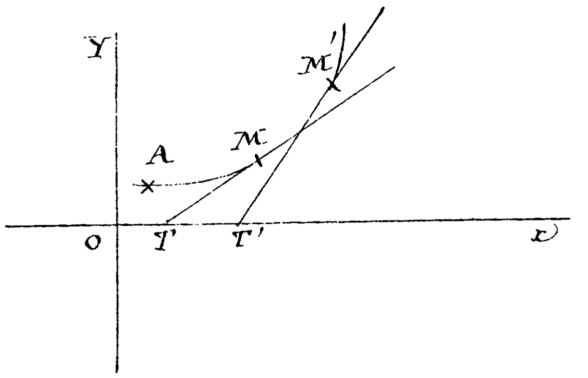
---

(1) Elles expriment, comme on le vérifie aisément, que le polynôme du 3^e^ degré, $g\lambda^3 + 3h\lambda^2 + 3K\lambda + l$, est exactement divisible par : $r\lambda^2 + 2s\lambda + t$.

(2) Il est remarquable qu'on trouve des lignes en appliquant cette théorie aux surfaces du troisième degré ; ces lignes sont les 27 droites situées sur les surfaces.

Courbes planes.

I. La courbure que l'on regarde comme une notion géométrique première et irréductible, s'offre sous son aspect le plus simple en considérant le cercle ; on dit en effet que pour cette ligne, la courbure est uniforme et la même en tous ses points. Mais elle varie d'un cercle à un autre, et si l'on envisage, pour fixer les idées, les cercles tangents à une même droite en un point, on observera qu'ils tendent, dans le voisinage de leur point de contact, à se rapprocher de cette droite quand le rayon augmente ; on dit alors que la courbure diminue, et c'est ce qui amène à introduire dans le calcul la notion dont il s'agit, en lui donnant pour mesure dans le cercle, l'inverse du rayon, c'est à dire la plus simple des fonctions qui décroisse quand la variable augmente. Or, on peut représenter l'inverse du rayon par l'angle de deux tangentes quelconques divisé par l'arc compris entre leurs points de contact, ce qui est une combinaison d'éléments géométriques susceptible d'être considérée à l'égard d'une courbe de nature quelconque. Nous nommerons ainsi courbure moyenne d'un arc le quotient obtenu en divisant par la longueur de cet arc l'angle des tangentes menées à ses extrémités, et la limite de ce rapport en supposant l'arc infiniment petit deviendra en un point donné la courbure, dont nous allons chercher l'expression au moyen des coordonnées rectangulaires x et y de ce point.



Soit l'équation de la courbe proposée $y = f(x)$, s la longueur de l'arc comptée d'une origine quelconque A, jusqu'au point M, dont les coordonnées sont x et y, et α l'angle que fait en ce point la tangente MT avec l'axe des abscisses. En faisant croître x de sa différentielle, on passe du point M au point infiniment voisin M', l'angle $\alpha = MTx$ deviendra par suite $M'T'x = \alpha + d\alpha$, l'arc $AM = s$ croîtra de $MM' = ds$; or, l'angle des deux tangentes MT et M'T', qu'on appelle l'angle de contingence, sera évidemment : $M'T'x - MTx = d\alpha$, et la courbure se trouvera ainsi représentée par $\frac{d\alpha}{ds}$, qu'il s'agit maintenant d'obtenir en fonction de x et de y. De l'équation $\operatorname{tang} \alpha = \frac{dy}{dx}$; tirons à cet effet :

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{dy}{dx}$$

On en déduira :

$$d\alpha = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

et par suite, en prenant d'abord x pour variable indépendante :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Telle sera donc la courbure cherchée au point M ; or, en concevant un cercle ayant son centre situé sur la normale à la courbe en ce point, et dont le rayon soit déterminé par la condition :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$$

sa courbure sera précisément celle de la courbe, et l'expression de R en x et y, savoir :

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

nous montre qu'on retrouve, sous un nouveau point de vue, le cercle osculateur.

C'est ce qu'on a déduit en effet, (page 93), en posant : $(X-a)^2+(Y-b)^2=R^2$ des conditions :

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R$$

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

dont la seconde montre que les coordonnées du centre satisfont à l'équation de la normale : $(X-x)+(Y-y)\frac{dy}{dx}=0$ à la courbe proposée : $y=f(x)$

Je vais maintenant donner les diverses formes analytiques de R qu'il y a lieu d'employer suivant les circonstances.

II Supposons d'abord les coordonnées exprimées en fonction d'une variable auxiliaire ω, de sorte que l'on ait :

$$x = \varphi(\omega) \qquad y = \psi(\omega)$$

La théorie du changement de la variable donnant, (page 70)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(\omega)}{\varphi'(\omega)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(\omega)\varphi'(\omega) - \psi'(\omega)\varphi''(\omega)}{\varphi'^3(\omega)}$$

on obtiendra l'expression suivante, où, pour abréger, j'écris φ', ψ', &c., au lieu de $\varphi'(\omega)$, $\psi'(\omega)$ &c.

$$R = \frac{[\varphi'^2 + \psi'^2]^{\frac{3}{2}}}{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}$$

Soit par exemple :

$$x = \rho \cos \omega \qquad y = \rho \sin \omega$$

afin d'obtenir le rayon de courbure au moyen des coordonnées polaires et des dérivées du rayon vecteur ρ par rapport à ω ; nous appliquerons la formule en partant de la relation :

$$x + y\sqrt{-1} = \varphi + \psi\sqrt{-1} = \rho e^{\omega\sqrt{-1}}$$

qui donnera en prenant les dérivées par rapport à ω :

$$\varphi' + \sqrt{-1}\,\psi' = \left(\frac{d\rho}{d\omega} + \sqrt{-1}\,\rho\right) e^{\omega\sqrt{-1}}$$

$$\varphi'' + \sqrt{-1}\,\psi'' = \left(\frac{d^2\rho}{d\omega^2} + 2\sqrt{-1}\,\frac{d\rho}{d\omega} - \rho\right) e^{\omega\sqrt{-1}}$$

J'y changerai ensuite le signe de $\sqrt{-1}$, de manière à obtenir :

$$\varphi' - \sqrt{-1}\,\psi' = \left(\frac{d\rho}{d\omega} - \sqrt{-1}\,\rho\right) e^{-\omega\sqrt{-1}}$$

et je multiplierai membre à membre avec la seconde égalité. En formant alors de part et d'autre les coefficients de $\sqrt{-1}$, j'obtiendrai :

$$\psi''\varphi' - \psi'\varphi'' = \rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

et par conséquent :

$$R = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}$$

Une autre forme analytique très-importante du rayon de courbure, se rapportant au cas où les coordonnées x et y sont données en fonction de l'arc s, s'obtiendrait de même par la théorie du changement de la variable indépendante ; mais on y parvient plus aisément en tirant par la différentiation de l'équation

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

ou de celles-ci qui en découlent :

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds} \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

les deux relations : $\cos\alpha \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d^2y}{ds^2}, \; -\sin\alpha \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{d^2x}{ds^2}$

Elles donnent en effet :

$$\frac{\cos^2\alpha}{R} = \frac{d^2y}{ds^2} \qquad \frac{\sin^2\alpha}{R} = -\frac{d^2x}{ds^2}$$

ou encore : $\dfrac{1}{R}\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{d^2y}{ds^2}, \; \dfrac{1}{R}\dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{d^2x}{ds^2}$

et par suite, en ajoutant membre à membre les carrés :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2$$

Comme application de cette formule, je considère les équations :

$$x = \varphi(s) \qquad y = \psi(s)$$

dans le cas où l'origine est au point de la courbe, correspondant à $s=0$, l'axe des x étant de plus une tangente, et l'axe des y une normale, ce qui suppose :

$$\frac{dx}{ds} = \varphi'(s) = 1 \text{ et } \frac{dy}{ds} = \psi'(s) = 0$$

pour $s = 0$. Les développements par la série de Maclaurin des fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ seront donc de ces formes :

$$\varphi(s) = s + as^2 + a's^3 + \ldots\ldots$$

$$\psi(s) = bs^2 + b's^3 + \ldots\ldots$$

et la condition : $\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) = 1$

c'est à dire $(1 + 2as + 3a's^2 + \ldots\ldots)^2 + (2bs + 3b's^2 + \ldots\ldots)^2 = 1$

donnera, comme à la page 110 : $a = 0$, $a' = -\frac{2}{3}b^2$, de sorte que pour $s = 0$

on aura : $\varphi''^2(s) + \psi''^2(s) = 4b^2$

Nous pouvons donc poser, en désignant par R le rayon de courbure à l'origine :

$$\frac{1}{R^2} = 4b^2$$

il en résulte pour la distance de cette origine à un point de la courbe :

$$\sqrt{x^2+y^2} = \left[\left(s - \frac{1}{6R^2}s^3 + a''s^4 + \dots\right)^2 + \left(\frac{1}{2R}s^2 + b's^3 + \dots\dots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(s^2 - \frac{1}{12R^2}s^4 + \dots\dots\right)^{\frac{1}{2}} = s - \frac{1}{24R^2}s^3 + \&^{ca}$$

et en supposant s infiniment petit, on a ce théorème :

La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est un infiniment petit du 3^e ordre, à savoir le cube de l'arc divisé par 24 fois le carré de son rayon de courbure.

※ IV. – Observons que cette différence, lorsque $\frac{1}{R} = 0$, ce qui est le cas d'un point d'inflexion, ne serait plus du troisième, ni même du quatrième ordre, mais du cinquième. Plus généralement admettons que l'axe des abscisses ait avec la courbe proposée un contact d'ordre n ; il faudra, d'après la théorie connue, que la différence entre l'ordonnée de la droite, qui est nulle actuellement, et celle de la courbe, c'est à dire précisément cette ordonnée $y = \psi(s)$ soit infiniment petite d'ordre $n+1$, par rapport à s. On doit donc poser :

$$\psi(s) = Ks^{n+1} + K's^{n+2} + \dots\dots$$

d'où : $$\varphi'(s) = \left[1 - \psi'^2(s)\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{(n+1)^2K^2}{2}s^{2n} + \dots\dots$$

et par conséquent : $$\varphi(s) = s - \frac{(n+1)^2K^2}{2(2n+1)}s^{2n+1} + \dots\dots$$

sans ajouter de constante, d'après la condition admise, que l'origine des coordonnées correspond à la valeur $s = 0$. Il en résulte pour la corde $\sqrt{x^2+y^2}$ l'expression suivante :

$$\sqrt{x^2+y^2} = \left[\left(s - \frac{(n+1)^2K^2}{2(2n+1)}s^{2n+1} + \dots\dots\right)^2 + \left(Ks^{n+1} + K's^{n+2} + \dots\dots\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[s^2 - \frac{n^2K^2}{2n+1}s^{2n+2} + \dots\dots\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= s - \frac{n^2K^2}{2(2n+1)}s^{2n+1} + \dots\dots$$

de sorte que la différence entre l'arc infiniment petit et sa corde est dans le cas actuel un infiniment petit d'ordre $2n+1$.

V. – A la théorie de la courbure se rattache l'étude du lieu des centres de courbure aux divers points d'une ligne donnée $y = f(x)$ qui a reçu le nom de développée de cette courbe. Cette étude repose en entier sur les équations :

$$x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

qui déterminent en fonction de l'abscisse x les coordonnées α et β du centre de courbure, et d'où l'on tirerait, par l'élimination de cette variable, l'équation de la développée. La première propriété que nous en déduirons consiste en ce que la tangente à la développée est normale à la courbe proposée.

A cet effet, je considère α et β, en vertu des deux relations ci-dessus, comme des fonctions de la variable indépendante x, et j'indique la première, pour abréger, par :

$$F(x, y, \alpha, \beta)=0$$

En différentiant par rapport à x, on aura :

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\;\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{d\alpha}\;\frac{d\alpha}{dx}+\frac{dF}{d\beta}\;\frac{d\beta}{dx}=0$$

Or, la somme des deux premiers termes étant précisément la dérivée dans l'hypothèse de α et β constants est nulle à cause de la seconde relation. En les supprimant, on obtient, pour la détermination du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$.

$$\frac{dF}{d\alpha}+\frac{dF}{d\beta}\;\frac{d\beta}{d\alpha}=0$$

ou bien : $$1+\frac{dy}{dx}\;\frac{d\beta}{d\alpha}=0$$

d'où résulte, comme on voit, la proposition annoncée.

La seconde propriété concerne la rectification de la développée. Ce qui s'offrirait alors naturellement serait d'exprimer en fonction de x les différentielles $d\alpha$ et $d\beta$, en partant des valeurs :

$$\alpha=x-\frac{dy}{dx}\;\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\beta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

afin d'en déduire la différentielle de l'arc : $\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}$. Mais on opère différemment : on introduit le rayon du cercle osculateur en tirant $d\alpha$ et $d\beta$ de l'équation :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

différentiée par rapport à x, et de la relation précédente, $1 + \frac{dy}{dx}\ \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ qui, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{x-\alpha}{y-\beta}$, devient :

$$(y-\beta)\,d\alpha - (x-\alpha)\,d\beta = 0$$

En effet, si l'on supprime dans la différentielle de l'équation du cercle, les termes qui se détruisent, comme provenant de la variation de x et y seuls, les autres quantités α, β, R étant supposées constantes, il restera simplement :

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta = -R\,dR$$

et on tirera des deux relations en $d\alpha$ et $d\beta$ ces expressions très-simples :

$$d\alpha = \frac{\alpha - x}{R}\,dR$$

$$d\beta = \frac{\beta - y}{R}\,dR$$

et par conséquent : $\quad d\alpha^2 + d\beta^2 = dR^2.$

On pourrait même opérer plus rapidement, en élevant au carré et ajoutant membre à membre les deux relations :

$$(y-\beta)\,d\alpha - (x-\alpha)\,d\beta = 0$$

$$(x-\alpha)\,d\alpha + (y-\beta)\,d\beta = R\,dR$$

Nommant donc S l'arc de la développée compté à partir d'une origine fixe, on aura :

$$dS = \pm\, dR$$

Cela étant, supposons que S croissant à partir de cette origine jusqu'à une certaine limite, R varie toujours dans le même sens, et augmente par exemple, on devra prendre : $ds = dR$; d'où : $S = R + C$; Soit donc S_0 et R_0 deux valeurs simultanées quelconques de ces quantités, on aura : $S_0 = R_0 + C$, et par conséquent :

$$S - S_0 = R - R_0$$

Mais si, dans une autre portion de la courbe, R variant dans un autre sens, va au contraire en diminuant, on devra prendre $ds = -dR$, et on trouvera :

$$S - S_0 = R_0 - R$$

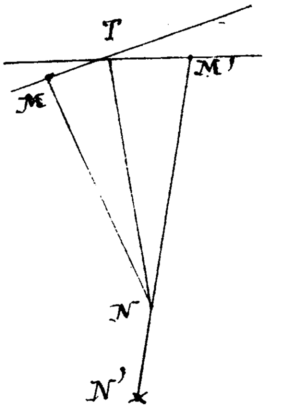
Ainsi la longueur d'un arc de développée, lorsqu'on suppose le rayon du cercle osculateur, variant dans le même sens, d'une de ses extrémités à l'autre, est égal à la différence des rayons qui correspon=
=dent à ces extrémités.

Cet énoncé se modifie dans le cas, par exemple, où le rayon passe par un maximum ρ, soient alors R_0 et R, les valeurs extrêmes, l'arc de développée se décomposant en deux parties représentées par : $\rho - R_0$, et $\rho - R$, aura pour expression :

$$S = 2\rho - R_0 - R,$$

Enfin, s'il s'agit d'une courbe fermée n'ayant aucun point d'inflexion, et dont la développée soit finie (1) et fermée, son périmètre total sera le double de la différence entre la somme des rayons maxima des cercles osculateurs et la somme des rayons minima, pour tous les points de la courbe proposée.

La relation $ds = dR$ peut être immédiatement établie par la géométrie.



Considérons, en effet, deux tangentes infi=
=niment voisines, MT, $M'T$ à la courbe $y = f(x)$ et soient M et M' les points de contact, MN et $M'N$ les normales dont l'intersection en N détermine un point de la développée. L'hy=
=poténuse NT, commune aux triangles rec=
=tangles NMT, $NM'T$, est, aux infiniment pe=
=tits près du second ordre, égale aux côtés NM et NM', car les angles en N sont infiniment petits. Donc ces lignes ne diffèrent elles-mêmes que d'un infiniment petit du second ordre ; par conséquent, en passant de M à M', l'accrois=
=sement de $MN = R$ sera précisément la distance du point N de la développée au point infiniment voisin N' distance qui est l'élément dS ; on a donc bien $ds = dR$, quand R augmente avec S.

VI. — Nous ferons deux applications des résultats qui précèdent en considérant l'ellipse et la cycloïde dont la définition sera donnée tout à l'heure. A l'égard de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, il suffit de rappeler

---

(1) Le rayon du cercle osculateur devient infini en un point d'inflexion, parce que l'on a dans ce cas : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

qu'en posant : $x = a \cos t \qquad y = b \sin t$

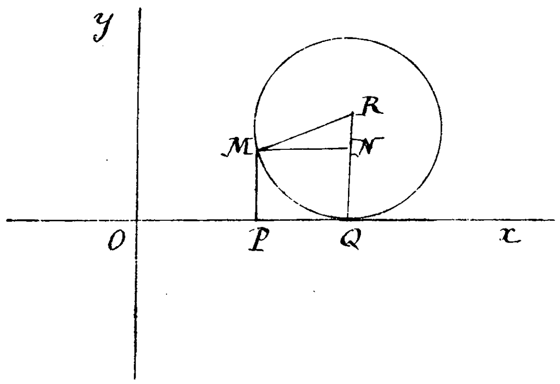
on a obtenu dans la théorie du contact, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur, les expressions :

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t \qquad \beta = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$$

Elles donnent immédiatement en éliminant t, l'équation de la développée sous la forme :

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

La cycloïde est le lieu des positions d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. Prenons cette droite pour axe des abscisses, pour origine le point O, où se trouvait, au commencement du mouvement, le point générateur du cercle mobile, que je considère ensuite dans une position quelconque en M, de sorte que les coordonnées d'un point du lieu soient MP et OP. La distance de l'origine au point de contact Q sera égale à l'arc MQ par définition, et en désignant l'angle MRQ par t, par a le rayon du cercle, on aura : $OQ = at$. Cela posé, si l'on mène MN parallèlement à PQ, on obtiendra évidemment :



$$MN = PQ = a \sin t \qquad RN = a \cos t$$

d'où résulte :

$$x = OQ - PQ = a(t - \sin t)$$

$$y = RQ - RN = a(1 - \cos t)$$

Ces expressions de x et y, au moyen de l'angle t, permettent de discuter la courbe qu'on reconnaît facilement se composer d'une suite d'arcs identiques à celui qui est donné par les valeurs de t, comprises de zéro à π. Elles conduisent aussi à une détermination facile des coordonnées du centre et du rayon du cercle osculateur. Soit à cet effet :

$$F(t) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2$$

on devra poser, d'après ce qui a été établi dans la théorie du contact :

$$F(t) = 0 \qquad F'(t) = 0 \qquad F''(t) = 0$$

Or, les équations :

$$\frac{1}{2a}\,\mathcal{F}'(t) = (x-\alpha)(1-\cos t) + (y-\beta)\sin t = 0$$

$$\frac{1}{2a}\,\mathcal{F}''(t) = (x-\alpha)\sin t + (y-\beta)\cos t + a(1-\cos t)^2 + a\sin^2 t.$$
$$= (x-\alpha)\sin t + (y-\beta)\cos t - 2a(\cos t - 1) = 0$$

donnent sur-le-champ :

$$x - \alpha = -2a\sin t$$

$$y - \beta = 2a(1-\cos t)$$

et par suite :

$$\alpha = a(t+\sin t)$$

$$\beta = a(-1+\cos t)$$

Je dis maintenant que ces relations représentent la même cycloïde rapportée à d'autres axes. Changeant d'abord t en $t+\pi$, ce qui n'altère point la nature de la courbe, il vient :

$$\alpha = a\pi + a(t-\sin t)$$
$$\beta = -a(1+\cos t).$$

et si nous posons ensuite :

$$\alpha = x + a\pi \qquad\qquad \beta = y - 2a$$

on trouvera par rapport aux nouveaux axes :

$$x = a(t-\sin t) \qquad\qquad y = a(1-\cos t)$$

c'est à dire précisément les équations de la cycloïde proposée. On a donc ce théorème :

La développée de la cycloïde s'obtient en construisant une cycloïde égale, par rapport à des axes coordonnés parallèles, dont l'origine est le point : $\alpha = a\pi$, $\beta = -2a$.

VII. J'ajouterai encore quelques remarques sur les rayons de courbure de ces deux lignes. En rapprochant d'abord la formule relative à l'ellipse :

$$R = \frac{1}{ab}\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}$$

de l'expression de la normale, savoir :

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}} = \frac{b}{a}\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{\frac{1}{2}}$$

on obtient la relation remarquable :

$$R = \frac{a^2 N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2}$$

où je fais suivant l'usage : $\frac{b^2}{a} = p$. D'autre part, introduisons à la place de t l'angle θ déterminé par la formule :

$$\tang \theta = \frac{c}{b} \sin t$$

nous aurons ces expressions plus simples :

$$N = \frac{p}{\cos\theta} \qquad R = \frac{p}{\cos^3\theta}$$

En joignant au foyer le point de l'ellipse dont les coordonnées sont $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, et considérant la normale au même point, θ est précisément l'angle de ces deux droites, car le coefficient angulaire de la première est : $\frac{b\sin t}{a\cos t - c}$; le coefficient angulaire de la normale a pour valeur $-\frac{dx}{dy} = \frac{a\sin t}{b\cos t}$, et de là résulte bien :

$$tg\,\theta = \frac{\frac{b\sin t}{a\cos t - c} - \frac{a\sin t}{b\cos t}}{1 + \frac{ab\sin^2 t}{(a\cos t - c)b\cos t}} = \sin t\,\frac{ac - c^2\cos t}{ab - bc\cos t} = \frac{c}{b}\sin t.$$

A l'égard de la cycloïde, l'expression de la normale : $N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ conduit à ce résultat très-simple :

$$N = a(1 - \cos t)\sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}} = 2a\sin\frac{t}{2}$$

Si l'on calcule ensuite le rayon de courbure : $R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ d'après les valeurs précédemment trouvées, savoir :

$$x - \alpha = -2a\sin t$$

$$y - \beta = 2a(1 - \cos t)$$

on obtient $R = 4a\sin\frac{t}{2}$, d'où, par conséquent : $R = 2N$. Nous remarquerons enfin l'expression de la sous-normale $SN = y\frac{dy}{dx} = a(1-\cos t)\frac{\sin t}{1-\cos t} = a\sin t$. Ayant $x = a(t - \sin t)$, on peut l'écrire de cette manière :

$$SN = at - x.$$

et la figure qui a servi à trouver l'équation de la courbe montre que :

$$SN = OQ - OP = PQ$$

de sorte que la normale à la cycloïde s'obtient en joignant le point décri=
=vant du cercle mobile à son point de contact sur l'axe.

Courbes dans l'espace.

I. On nomme encore angle de contingence en un point d'une courbe dans l'espace, l'angle ω que font entre elles les deux tangentes menées aux extrémités d'un arc infiniment petit ds, et courbure la limite du rapport $\frac{\omega}{ds}$. L'inverse de cette quantité : $\frac{ds}{d\omega}$ représentera, en suivant la même analogie, le rayon de courbure ; nous allons en don=
=ner l'expression.

Supposons que la courbe proposée soit donnée par les relations :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

la variable t étant quelconque. Les cosinus des angles que fait avec les axes coordonnés la tangente au point x, y, z, sont, comme on sait :

$$a = \frac{dx}{ds} \qquad b = \frac{dy}{ds} \qquad c = \frac{dz}{ds}$$

Or, en faisant croître de sa différentielle la variable t, on passe du point considéré de la courbe au point infiniment voisin, et les cosi=
=nus des angles de la tangente avec les axes en ce même point, sont évidemment :

$$a' = a + da \qquad b' = b + db \qquad c' = c + dc$$

L'angle de contingence qui a été nommé ω, sera donc déterminé par la formule :

$$\cos\omega = aa' + bb' + cc'$$

ou plutôt par celle-ci qu'il est préférable d'employer :

$$\sin\omega = \left[(ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left[(adb - bda)^2 + (bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

et comme le sinus est égal à l'arc aux infiniment petits près du troisième ordre, nous aurons :

$$\omega = \left[(adb - bda)^2 + (bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Or, en différentiant a et b par rapport à t, on obtient ces valeurs :

$$da = \frac{d^2x\,ds - dx\,d^2s}{ds^2}$$

$$db = \frac{d^2y\,ds - dy\,d^2s}{ds^2}$$

et nous en conclurons, après une réduction facile :

$$adb - bda = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^2}$$

Nous aurons de même :

$$bdc - cdb = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^2}$$

$$cda - adc = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^2}$$

et par conséquent :

$$\frac{\omega}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{1}{ds^3}\left[(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

C'est le résultat qu'on s'était proposé d'obtenir, et qui donne le rayon de courbure en fonction de la variable t. Il devient plus simple, si nous supposons que t soit l'arc s de la courbe, de sorte qu'on ait les relations :

$$\varphi'^2(s) + \varphi_1'^2(s) + \varphi_2'^2(s) = 1$$

$$\varphi'(s)\,\varphi''(s) + \varphi_1'(s)\,\varphi_1''(s) + \varphi_2'(s)\,\varphi_2''(s) = 0$$

En employant en effet l'identité dont nous avons déjà fait usage :

$$(\varphi'\varphi_1'' - \varphi_1'\varphi'')^2 + (\varphi_1'\varphi_2'' - \varphi_2'\varphi_1'')^2 + (\varphi_2'\varphi'' - \varphi'\varphi_2'')^2 = (\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)(\varphi''^2 + \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2)$$
$$- (\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'')^2$$

on trouvera immédiatement :

$$\frac{1}{R} = \left[\varphi''^2(s) + \varphi_1''^2(s) + \varphi_2''^2(s)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Cette expérience montre que la distance à la tangente d'un point d'une courbe infiniment voisin du point de contact, correspondant à la valeur $s+h$ de la variable obtenue précédemment sous cette forme :

$$\delta = \frac{h^2}{2}\sqrt{\varphi''^2(s)+\varphi_1''^2(s)+\varphi_2''^2(s)}$$

a pour valeur :

$$\delta = \frac{h^2}{2R}$$

ce qu'on peut aisément démontrer par la géométrie.

Une autre conséquence importante s'en déduira encore, en employant les expressions des coordonnées établies page —— :

$$x = s - \frac{2}{3}B^2 s^3 + \cdots\cdots$$

$$y = Bs^2 + B's^3 + \cdots\cdots$$
$$z = Cs^3 + \cdots\cdots$$

l'origine étant un point de la courbe qui correspond à $s=0$, le plan des xy étant le plan osculateur, les axes des x et y la tangente et la normale. Effectivement, on obtient immédiatement pour $s=0$:

$$\varphi''^2 + \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 = \frac{1}{R^2} = 4B^2$$

de sorte qu'à l'origine, le rayon de courbure de la courbe dans l'espace n'est autre que celui de sa projection sur le plan osculateur. Enfin, nous aurons, aux infiniment petits près d'un ordre supérieur au troisième

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2} = s - \frac{1}{6}B^2 s^3 + \cdots\cdots$$
$$= s - \frac{s^3}{24R^2} + \cdots\cdots$$

comme pour les courbes planes.

* II. Un cercle considéré dans l'espace est déterminé par six conditions, trois se rapportant au plan qui le contient, deux autres à la position de son centre dans ce plan, et la dernière enfin à son rayon. Or, dans l'espace le contact du second ordre de deux lignes exigeant précisément six conditions, on peut se proposer de déterminer le cercle osculateur à la courbe :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

afin de reconnaître si le calcul du rayon conduira, comme pour les courbes planes, au rayon que nous venons d'obtenir. Prenant à cet effet les équations générales d'un plan et d'une sphère :

$$AX+BY+CZ+D=0$$

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=\rho^2$$

et posant :

$$F(t)=A\varphi+B\varphi_1+C\varphi_2+D$$

$$F_1(t)=(\varphi-a)^2+(\varphi_1-b)^2+(\varphi_2-c)^2-\rho^2$$

nous aurons, comme on l'a établi dans la théorie du contact, les équations suivantes :

$$F(t)=0 \qquad F'(t)=0 \qquad F''(t)=0$$

$$F_1(t)=0 \qquad F_1'(t)=0 \qquad F_1''(t)=0$$

Les trois premières conduisent précisément au plan osculateur :

$$A(X-\varphi)+B(Y-\varphi_1)+C(Z-\varphi_2)=0$$

les coefficients ayant ces valeurs :

$$A=\varphi_1'\varphi_2''-\varphi_1'\varphi_2''$$

$$B=\varphi_2'\varphi''-\varphi'\varphi_2''$$

$$C=\varphi'\varphi_1''-\varphi_1'\varphi''$$

Formons ensuite les conditions : $F_1'=0$ $F_1''=0$; elles donnent les equations suivantes :

$$(\varphi-a)\varphi'+(\varphi_1-b)\varphi_1'+(\varphi_2-c)\varphi_2'=0$$

$$(\varphi-a)\varphi''+(\varphi_1-b)\varphi_1''+(\varphi_2-c)\varphi_2''=-\varphi'^2-\varphi_1'^2-\varphi_2'^2$$

entre lesquelles j'élimine seulement $\varphi-a$, φ_1-b, φ_2-c ; si l'on pose pour abréger :

$$\mathfrak{A}=(\varphi_2-c)B-(\varphi_1-b)C$$

$$\mathfrak{B}=(\varphi-a)C-(\varphi_2-c)A$$

$$\mathfrak{C}=(\varphi_1-b)A-(\varphi-a)B$$

on trouvera, pour résultats de ce calcul :

$$\mathfrak{A}=(\varphi'^2+\varphi_1'^2+\varphi_2'^2)\varphi'$$

$$\mathfrak{B}=(\varphi'^2+\varphi_1'^2+\varphi_2'^2)\varphi_1'$$

$$\mathfrak{C}=(\varphi'^2+\varphi_1'^2+\varphi_2'^2)\varphi_2'$$

Or, de là peut déjà se conclure le rayon R du cercle osculateur en employant la relation évidente :

$$R^2 = \rho^2 - \delta^2$$

où δ désigne la distance du centre de la sphère au plan du cercle. Nous avons en effet :

$$\rho^2 = (\varphi - a)^2 + (\varphi_1 - b)^2 + (\varphi_2 - c)^2$$
$$\delta^2 = \frac{\left[A(\varphi - a) + B(\varphi_1 - b) + C(\varphi_2 - c)\right]^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

et par conséquent :

$$R^2 = \frac{\left[(\varphi - a)^2 + (\varphi_1 - b)^2 + (\varphi - c)^2\right](A^2 + B^2 + C^2) - \left[A(\varphi - a) + B(\varphi_1 - b) + C(\varphi_2 - c)\right]^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Mais en décomposant le numérateur en trois carrés et d'après les expressions de $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; on voit immédiatement qu'on peut écrire :

$$R^2 = \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{A^2 + B^2 + C^2}$$

ce qui coïncide bien avec le rayon de courbure, car en remplaçant A, B, C, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, par leurs valeurs, et prenant l'inverse, nous obtenons la formule déjà trouvée, sauf la notation :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(\varphi_1' \varphi_2'' - \varphi_2' \varphi_1'')^2 + (\varphi_2' \varphi'' - \varphi' \varphi_2'')^2 + (\varphi' \varphi_1'' - \varphi_1' \varphi'')^2}{(\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2)^3}$$

Déterminons ensuite les coordonnées α, β, γ, du centre du cercle osculateur, qui est la projection du centre de la sphère sur le plan :

$$A(X - \varphi) + B(Y - \varphi_1) + C(Z - \varphi_2) = 0.$$

En faisant pour un instant :

$$\Delta = \frac{A(\varphi - a) + B(\varphi_1 - b) + C(\varphi_2 - c)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

les formules connues donneront d'abord :

$$\alpha - a = A\,\Delta$$
$$\beta - b = B\,\Delta$$
$$\gamma - c = C\,\Delta$$

et en considérant, pour fixer les idées, la première de ces relations, on en tire par une transformation facile :

$$\alpha - \varphi = A\Delta - (\varphi - a) = \frac{[(\varphi_1 - b)A - (\varphi - a)B] - [(\varphi - a)C - (\varphi_2 - c)A]C}{A^2 + B^2 + C^2}$$

c'est à dire :

$$\alpha - \varphi = \frac{CB - \mathcal{B}C}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2''^2}{A^2 + B^2 + C^2}\left[\varphi''(\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2''^2) - \varphi'(\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'')\right]$$

Or, nous obtiendrons de même :

$$\beta - \varphi_1 = \frac{\varphi'^2 + \varphi'^2 + \varphi'^2}{A^2 + B^2 + C^2}\left[\varphi_1''(\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \varphi_1'(\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'')\right]$$

$$\gamma - \varphi_2 = \frac{\varphi'^2 + \varphi'^2 + \varphi'^2}{A^2 + B^2 + C^2}\left[\varphi_2''(\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) - \varphi_2'(\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'')\right]$$

ce qui donne les expressions des quantités cherchées. Ces expressions se simplifient si l'on suppose que la variable indépendante soit l'arc de la courbe ; on parvient alors en effet aux valeurs suivantes :

$$\alpha = \varphi(s) + \frac{\varphi''(s)}{\varphi''^2(s) + \varphi_1''^2(s) + \varphi_2''^2(s)} = \varphi(s) + R^2\varphi''(s)$$

$$\beta = \varphi_1(s) + \frac{\varphi_1''(s)}{\varphi''^2(s) + \varphi_1''^2(s) + \varphi_2''^2(s)} = \varphi_1(s) + R^2\varphi_1''(s)$$

$$\gamma = \varphi_2(s) + \frac{\varphi_2''(s)}{\varphi''^2(s) + \varphi_1''^2(s) + \varphi_2''^2(s)} = \varphi_2(s) + R^2\varphi_2''(s)$$

Elles définissent dans l'espace le lieu des centres des cercles osculateurs de la courbe proposée :

$$x = \varphi(s) \qquad y = \varphi_1(s) \qquad z = \varphi_2(s)$$

mais je ne m'occuperai pas ici de cette ligne qui serait précisément la développée, si la courbe était plane. J'observerai seulement que l'élément de l'arc :

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

s'exprime par cette formule très-simple :

$$d\sigma = ds\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2}$$

ou figure une quantité r, qu'on nomme le rayon de torsion, et qui va maintenant nous occuper.

III. — L'angle de torsion en un point d'une courbe dans l'espace, est l'angle ε que font entre eux deux plans osculateurs menés aux extrémités d'un arc infiniment petit ds, la limite du rapport $\frac{ds}{\varepsilon} = r$, est le rayon de torsion, que nous allons calculer en supposant la courbe définie par les relations :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \varphi_1(t) \qquad z = \varphi_2(t)$$

Je pars à cet effet de l'équation du plan osculateur :

$$A(X - \varphi) + B(Y - \varphi_1) + C(Z - \varphi_2) = 0$$

où je fais comme précédemment :

$$A = \varphi_1' \varphi_2'' - \varphi_2' \varphi_1''$$

$$B = \varphi_2' \varphi'' - \varphi' \varphi_2''$$

$$C = \varphi' \varphi_1'' - \varphi_1' \varphi''$$

Cela étant, je conçois que la variable indépendante t croisse de sa différentielle. Nous passerons ainsi du point x, y, z, au point infiniment voisin, l'arc s de la courbe compté depuis une certaine origine jusqu'à ce point, croîtra de ds, les coefficients du plan osculateur deviendront :

$$A' = A + dA, \qquad B' = B + dB, \qquad C' = C + dC$$

où les différentielles sont prises par rapport à t, et l'angle infiniment petit nommé $\mathcal{E}$ sera donné par la formule :

$$\cos \mathcal{E} = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Mais comme à l'occasion de l'angle de contingence je ferai usage de celle-ci :

$$\sin \mathcal{E} = \frac{\left[(AB' - BA')^2 + (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

et il viendra, en substituant l'arc infiniment petit au sinus, divisant par ds et remplaçant au dénominateur A', B', C' par A, B, C, comme on peut le faire :

$$\frac{\mathcal{E}}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{\left[(A\,dB - B\,dA)^2 + (B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{(A^2 + B^2 + C^2)\, ds}$$

Cela posé, nommons Δ le déterminant du système :

$$\begin{Bmatrix} \varphi' & \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi'' & \varphi_1'' & \varphi_2'' \\ \varphi''' & \varphi_1''' & \varphi_2''' \end{Bmatrix}$$

et employons ces identités connues par la théorie des déterminants, et qui se vérifient d'ailleurs immédiatement, savoir :

$$A\,dB - B\,dA = \Delta\,\varphi_2'\,dt$$

$$B\,dC - C\,dB = \Delta\,\varphi'\,dt$$

$$C\,dA - A\,dC = \Delta\,\varphi_1'\,dt$$

on en conclura immédiatement :

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta\sqrt{\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2}\,.\,dt}{(A^2+B^2+C^2)\,ds} = \frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}.$$

C'est le résultat cherché, et qui donne en fonction de la variable t le rayon de torsion. En le rapprochant du rayon de courbure, savoir :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{A^2+B^2+C^2}{(\varphi'^2+\varphi_1'^2+\varphi_2'^2)^3}$$

nous en tirerons la relation :

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{\Delta}{(\varphi'^2+\varphi_1'^2+\varphi_2''^2)^3}$$

prenant donc pour la variable t laissée quelconque jusqu'ici l'arc de la courbe, de sorte que : $\varphi'^2+\varphi_1'^2+\varphi_2''^2 = 1$, R_2^2 sera le déterminant du système :

$$\begin{Bmatrix} \varphi'(s) & \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \\ \varphi''(s) & \varphi_1''(s) & \varphi_2''(s) \\ \varphi'''(s) & \varphi_1'''(s) & \varphi_2'''(s) \end{Bmatrix}$$

déjà considéré à propos de la sphère osculatrice, et qu'il convient de transformer de la manière suivante.

IV. — Posons pour un instant :

$$G = \varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 \qquad H = \varphi''\varphi''' + \varphi_1''\varphi_1''' + \varphi_2''\varphi_2'''$$

$$G' = \varphi''^2 + \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 \qquad H' = \varphi'\varphi''' + \varphi_1'\varphi_1''' + \varphi_2'\varphi_2'''$$

$$G'' = \varphi'''^2 + \varphi_1'''^2 + \varphi_2'''^2 \qquad H'' = \varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2''$$

on sait que le déterminant symétrique par rapport à la diagonale :

$$\begin{Bmatrix} G & H'' & H' \\ H'' & G' & H \\ H' & H & G'' \end{Bmatrix} = GG'G'' + 2HH'H'' - GH^2\,G'H'^2 - G''H''^2$$

sera précisément le carré de Δ. Or on a d'abord : $\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 = G = 1$, d'où, en différentiant par rapport à S : $\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'' = H'' = 0$. En second lieu : $\varphi''^2 + \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 = G' = \frac{1}{R^2}$, et en différentiant de nouveau, on obtient :
$\varphi''\varphi''' + \varphi_1''\varphi_1''' + \varphi_2''\varphi_2''' = H = -\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds}$. On tire enfin de l'équation :

$$\varphi'\varphi'' + \varphi_1'\varphi_1'' + \varphi_2'\varphi_2'' = 0$$

et il en résulte :

$$\varphi''^2 + \varphi_1''^2 + \varphi_2''^2 + \varphi'\varphi''' + \varphi_1'\varphi_1''' + \varphi_2'\varphi_2''' = 0$$
$$\varphi'\varphi''' + \varphi_1'\varphi_1''' + \varphi_2'\varphi_2''' = H' = -\frac{1}{R^2}.$$

De là, suit la relation que nous voulions obtenir, savoir :

$$\Delta^2 = \frac{1}{R^4 r^2} = \frac{\varphi'''^2 + \varphi_1'''^2 + \varphi_2'''^2}{R^2} - \frac{1}{R^6} - \frac{1}{R^6}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

et qui nous donne deux conséquences importantes. La première c'est que le rayon de torsion se trouve exprimé au moyen du rayon de courbure et de la somme : $\varphi'''^2(s) + \varphi_1'''^2(s) + \varphi_2'''^2(s)$ par la formule :

$$\frac{1}{r^2} = R^2\left(\varphi'''^2 + \varphi_1'''^2 + \varphi_2'''^2\right) - \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

de sorte que les coordonnées d'une courbe quelconque dans l'espace, étant en fonction de l'arc :

$$x = \varphi(s) \qquad y = \varphi_1(s) \qquad z = \varphi_2(s)$$

on a les trois équations :

$$\varphi'^2(s) + \varphi_1'^2(s) + \varphi_2'^2(s) = 1$$
$$\varphi''^2(s) + \varphi_1''^2(s) + \varphi_2''^2(s) = \frac{1}{R^2}$$
$$\varphi'''^2(s) + \varphi_1'''^2(s) + \varphi_2'''^2(s) = \frac{1}{R^2 r^2} + \frac{1}{R^4} + \frac{1}{R^4}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

La seconde conséquence concerne le rayon de la sphère osculatrice à cette courbe. En la désignant par ρ, nous avons obtenu page 109, l'expression :

$$\rho^2\Delta^2 = \left(\varphi'^2 + \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2\right)\left(\varphi'''^2 + \varphi_1'''^2 + \varphi_2'''^2\right) - \left(\varphi'\varphi''' + \varphi_1'\varphi_1''' + \varphi_2'\varphi_2'''\right)^2$$

or, il suffit d'y remplacer Δ par $\frac{1}{R^2 r}$, et les quantités $\varphi'''^2 + \varphi_1'''^2 + \varphi_2'''^2$, $\varphi'\varphi''' + \varphi_1'\varphi_1''' + \varphi_2'\varphi_2'''$ par les valeurs qui viennent d'être obtenues pour en conclure cette relation simple et remarquable, savoir :

$$\rho^2 = R^2 + r^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

V. — Pour donner une application des résultats précédents, je vais, en employant encore les expressions des coordonnées d'une courbe quelconque en fonction de l'arc, établies page 110, savoir :

$$x = s - \frac{2}{3} B^2 s^3 + \dots\dots$$

$$y = Bs^2 + B' s^3 + \dots\dots$$

$$z = Cs^3 + \dots\dots$$

déterminer la valeur du rayon de torsion à l'origine des coordonnées, c'est à dire, pour $s = 0$. Ayant déjà, comme on l'a vu : $B = \frac{1}{2R}$, il suffira de calculer le déterminant Δ. Or, on trouve pour $s = 0$:

$$\varphi' = 1 \qquad \varphi'' = 0 \qquad \varphi''' = 0$$

$$\varphi'_1 = 0 \qquad \varphi''_1 = 2B \qquad \varphi'''_1 = 6B'$$

$$\varphi'_2 = 0 \qquad \varphi''_2 = 0 \qquad \varphi'''_2 = 6C$$

ce qui donne immédiatement : $\Delta = 12BC$, et par conséquent :

$$\frac{4}{R^2 r} = 12BC = \frac{6C}{R}$$

De là résulte : $$C = \frac{1}{6Rr}$$

et par conséquent, pour la valeur de la coordonnée z :

$$z = \frac{s^3}{6Rr}$$

en négligeant les puissances de l'arc d'un degré supérieur au troisième. Cette formule, en se rappelant que le plan des xy est le plan osculateur de la courbe à l'origine, démontre le théorème suivant de M. Ossian Bonnet.

« La distance d'une des extrémités d'un arc infiniment petit au « plan osculateur correspondant à l'autre extrémité, a pour valeur le cube « de l'arc divisé par six fois le produit des rayons des deux courbures de « cet arc. (1)

Considérons en second lieu l'hélice, c'est à dire la courbe obtenue lorsqu'on enroule le plan d'un angle sur un cylindre droit : $x^2 + y^2 = a^2$, de manière que l'un des côtés s'applique exactement sur la circonférence de base.

---

(1) Voyez, pour la démonstration géométrique, le Traité de Calcul différentiel et intégral de M. Bertrand, Tome I, page 638.

Il est clair que l'ordonnée z d'un point quelconque sera proportionnelle à l'arc σ de la base du cylindre, compté à partir du point de départ de l'hélice. On obtiendra donc ses équations, en joignant à la relation $z = m\sigma$, les expressions de x et y en fonction de σ

$$x = a \cos \frac{\sigma}{a} \qquad y = a \sin \frac{\sigma}{a}$$

Mais au lieu de l'arc de cercle, nous introduirons l'arc S de la courbe qui lui est proportionnel, attendu que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1+m^2)\, d\sigma^2$$

Faisant donc : $S = \sqrt{1+m^2}\cdot\sigma$ j'aurai les équations :

$$x = a \cos\left(\frac{S}{a\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad y = a \sin\left(\frac{S}{a\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad z = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\, s$$

et je me propose de déterminer en un point quelconque correspondant à la valeur $S = \alpha$, les rayons de courbure et de torsion de l'hélice.

Mettant à cet effet $\alpha + S$, au lieu de S dans ces équations qui deviendront ainsi :

$$x = a \cos\left(\frac{\alpha + s}{a\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad y = a \sin\left(\frac{\alpha + s}{a\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad z = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}(\alpha + s)$$

j'effectuerai le changement de coordonnées qui placera l'origine au point $S = 0$, le plan des XY étant le plan osculateur, les axes des X et des Y la tangente et la normale, de manière à obtenir les expressions analytiques employées tout à l'heure. Soit pour un instant :

$$\varphi = \frac{\alpha}{a\sqrt{1+m^2}}$$

j'observe tout d'abord que cette première transformation d'axes, savoir :

$$x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi$$

$$y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi$$

$$z' = -am\,\varphi + z$$

aura pour effet de faire disparaître l'angle φ, car elle donnera :

$$x' = a \cos\left(\frac{S}{a\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad y' = a \sin\left(\frac{S}{a\sqrt{1+m^2}}\right) \qquad z' = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\, s$$

Retrouvant ainsi les équations proposées, nous sommes déjà assurés que l'hélice est toujours identique à elle même, de sorte qu'il suffit de calculer R et r pour $s = 0$.

Soit encore :

$$X = a - x'$$

$$Y = \frac{y' + m z'}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$Z = \frac{m y' - z'}{\sqrt{1+m^2}}$$

cette seconde transformation de coordonnées conduira aux développements en série :

$$X = a - a\cos\left(\frac{s}{a\sqrt{1+m^2}}\right) = \frac{s^2}{2a(1+m^2)} - \frac{s^4}{24a^3(1+m^2)^2} + \cdots\cdots$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[a\sin\left(\frac{s}{a\sqrt{1+m^2}}\right) + \frac{m^2 s}{\sqrt{1+m^2}}\right] = s - \frac{s^3}{6a^2(1+m^2)^2} + \cdots\cdots$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[m a \sin\left(\frac{s}{a\sqrt{1+m^2}}\right) - \frac{m s}{\sqrt{1+m^2}}\right] = \frac{m s^3}{6a^2(1+m^2)^2} + \cdots\cdots\cdots$$

et il suffit de changer, comme on voit, X en Y et Y en X pour parvenir au résultat cherché. Les coefficients désignés par B et par C ont donc respectivement pour valeur : $\frac{1}{2a(1+m)^2}$ et $\frac{m}{6a^2(1+m^2)^2}$. On en conclut les relations :

$$R = \frac{1}{2B} = a(1+m^2)$$

$$Rr = \frac{1}{6C} = \frac{a^2(1+m^2)^2}{m}$$

et par conséquent :

$$r = \frac{a(1+m^2)}{m}$$

On verra dans le calcul intégral que l'hélice est la seule courbe jouissant de cette propriété.

Surfaces.

I. En considérant sur une surface, les sections obtenues par les plans passant par la normale en un point donné, leurs rayons de courbure en ce point varient suivant des lois simples dont la découverte, due à Euler, a servi de fondement à la théorie qui va nous occuper. Pour les établir, nous rapporterons à cette normale comme axe des z, et à des droites rectangulaires situées dans le plan tangent au point considéré, l'équation de la surface proposée.

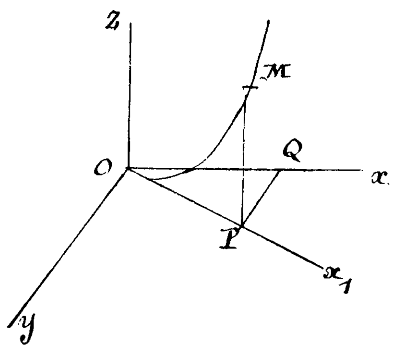
De ce choix de coordonnées résulte, comme la remarque en a déjà été faite que l'ordonnée z développée suivant les puissances de x et de y par la série de Maclaurin avec cette forme :

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dy^3 + ex^2y + fxy^2 + gy^3 + \dots\dots$$

Les théorèmes que nous allons démontrer supposent donc la possibilité d'un tel développement, au moins pour des valeurs infiniment petites de x et y et se trouveraient complètement en défaut en considérant par exemple la surface donnée par l'équation : $z = (x^2+y^2)\, f\left(\frac{x}{y}\right)$, l'ordonnée z ne pouvant alors s'exprimer sous cette forme. (M. Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral, Tome I, page 472.) Cette remarque faite, nous procéderons comme il suit :

Coupons la surface par un plan normal quelconque

$$y = x \operatorname{tang} \alpha$$



et rapportons la courbe d'intersection à deux axes situés dans son plan, l'un étant la trace Ox_1 du plan sécant sur le plan des xy, et l'autre l'axe des z. On aura évidemment, en nommant x_1 l'abscisse OP d'un point quelconque M de cette courbe :

$$OQ = x = x_1 \cos \alpha$$

$$PQ = y = x_1 \sin \alpha$$

Quant à l'ordonnée MP, ce sera précisément le z de la surface, de sorte que la section aura pour équation dans son plan :

$$z = (a\cos^2\alpha + b\cos\alpha\sin\alpha + c\sin^2\alpha)\,x_1^2 + d\cos^3\alpha\, x_1^3 + \dots\dots$$

les termes non écrits contenant des puissances de x_1 dont l'exposant est supérieur à deux.

Or, il est aisé de voir que le rayon de courbure à l'origine a pour valeur :

$$R = \frac{1}{2(a\cos^2\alpha + b\cos\alpha\sin\alpha + c\sin^2\alpha)}$$

car, en supposant en général : $y = Ax^2 + Bx^3 + \dots\dots$ la formule :

$R = \dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ donne bien : $R = \dfrac{1}{2A}$ pour $x=0$.

et voici les importantes conséquences qui résultent de cette expression.

Considérons l'équation :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

qui appartient à une courbe du second degré rapportée à son centre ; en prenant ce centre pour origine des coordonnées polaires, et faisant :

$$x = \rho \cos\alpha \qquad y = \rho \sin\alpha$$

on aura : $\rho^2 (a\cos^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha + c\sin^2\alpha) = 1$

et par conséquent : $\rho^2 = 2R$.

Les rayons de courbure des sections normales correspondant aux directions du plan sécant déterminées par l'angle α varient donc proportionnellement aux carrés des rayons vecteurs de cette courbe, qui a reçu le nom d'indicatrice. Il en résulte qu'en un point d'une surface quelconque, il existe toujours deux plans normaux rectangulaires dirigés suivant les axes de l'indicatrice, et donnant des sections dont la courbure est la plus grande et la plus petite possible. On les nomme sections principales de la surface au point considéré. Faisant ensuite application des propriétés élémentaires, des rayons vecteurs menés du centre à un point d'une courbe de second degré, on a ce théorème : La somme des inverses des rayons de courbure de deux sections rectangulaires quelconques, est constante, et égale à la somme des inverses des rayons de courbure des sections principales.

La notion de l'indicatrice qui donne si aisément ces résultats, découverts par Euler, est due à M. Charles Dupin, et a été présentée par ce savant illustre de la manière suivante :

Considérons la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent $z = h$, en supposant h infiniment petit, section qui se projettera en véritable grandeur sur le plan des xy, et aura pour équation :

$$h = ax^2 + bxy + cy^2 + dx^3 + \ldots\ldots$$

En remplaçant les coordonnées x et y par $x\sqrt{h}$, $y\sqrt{h}$, on obtiendra une courbe semblable :

$$h = (ax^2 + bxy + cy^2)\,h + (dx^3 + ex^2y + \ldots)\,h\sqrt{h} + \ldots\ldots$$

ou bien : $$1 = ax^2 + bxy + cy^2 + dy^3\sqrt{h} + \ldots\ldots$$
dont la limite, pour h infiniment petit, donne précisément :
$$1 = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Je n'exposerai point ici les beaux résultats déduits de la considération de l'indicatrice par M. Charles Dupin, et je remarquerai seulement que si l'on eût opéré de même à l'égard de la section par le plan $z = -h$, en remplaçant encore x et y par $x\sqrt{h}$ et $y\sqrt{h}$, le résultat eût été évidemment
$$-1 = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Par conséquent, lorsque l'indicatrice est une ellipse, l'une des deux équations représentant une courbe réelle, et l'autre une courbe imaginaire, on a cette conclusion, que la surface est tout entière au-dessus ou au-dessous du plan tangent, dans le voisinage du point de contact. Si l'indicatrice est une hyperbole, les deux courbes sont réelles, et la surface située en partie au-dessus et en partie au-dessous du plan tangent le traverse nécessairement.

La théorie de la courbure des surfaces comprend encore la détermination de la courbure d'une section oblique ; mais je me bornerai à cet égard à énoncer le théorème suivant dû à Meunier : que le rayon de courbure d'une section oblique est égal au rayon de courbure à la section normale qui a même tangente, multiplié par le cosinus de l'angle compris entre les plans des deux sections.

II. On nomme ligne de courbure d'une surface le lieu des points tels que les normales infiniment voisines se rencontrent, condition qui s'exprime par le calcul de la manière suivante : Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface proposée : en faisant :

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}$$

on aura pour la normale au point : x, y, z,

$$X - x + p(Z - z) = 0 \qquad Y - y + q(Z - z) = 0$$

ou, pour abréger : $$P = 0 \qquad Q = 0$$

Cela étant, la normale infiniment voisine, au point dont les coordonnées sont : $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, aura pour équations :

$$P + dP = 0 \qquad Q + dQ = 0$$

dP et dQ désignant par rapport aux variables indépendantes x et y, des différentielles totales qui se présentent en cette circonstance pour la première fois. Cela posé, la condition d'intersection s'obtiendra en exprimant que les équations :

$$P = 0 \qquad Q = 0$$

$$dP = 0 \qquad dQ = 0$$

ont une solution commune en X, Y, Z ; mais les deux dernières, savoir :

$$dx + p\,dz - dp\,(Z - z) = 0$$

$$dy + q\,dz - dq\,(Z - z) = 0$$

ne contenant que Z, donnent immédiatement par l'élimination :

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

Et si l'on remplace les différentielles totales dz, dp, dq, par leurs valeurs :

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = p\,dx + q\,dy$$

$$dp = \frac{dp}{dx}\,dx + \frac{dp}{dy}\,dy = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = \frac{dq}{dx}\,dx + \frac{dq}{dy}\,dy = s\,dx + t\,dy$$

la condition ne contenant plus que x, y et $\frac{dy}{dx}$, savoir :

$$\frac{1 + p^2 + pq\,\frac{dy}{dx}}{r + s\,\frac{dy}{dx}} = \frac{pq + (1 + q^2)\,\frac{dy}{dx}}{s + t\,\frac{dy}{dx}}$$

donne l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des $x\,y$. Cette équation est du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$; il s'ensuit qu'ayant mené une normale par un point quelconque d'une surface, on peut toujours, dans deux directions différentes, passer de ce point à un autre infiniment voisin, pour lequel la normale soit dans un même plan que la première. Je vais maintenant prouver que ces directions coïncident avec celles des sections principales au point considéré. Supposons en effet que les axes coordonnés dont la position est restée arbitraire soient ceux dont il a été fait usage tout à l'heure, à savoir la normale en un point de la surface, et deux droites rectangulaires dans le plan tangent en ce point. Le développement en série suivant les puissances de x et y de l'ordonnée sera donc :

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + \&^{ca}$$

de sorte qu'on aura, pour $x=0$, et $y=0$

$$\frac{dz}{dx} = p = 0 \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = r = 2a$$

$$\frac{dz}{dy} = q = 0 \qquad \frac{d^2z}{dxdy} = s = b$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = t = 2c$$

Il en résulte qu'à l'origine des coordonnées, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ dépendent de l'équation :

$$\frac{1}{2a + b\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{b + 2c\frac{dy}{dx}}$$

ou bien : $$b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(a-c)\frac{dy}{dx} - b = 0$$

qui a précisément pour racines les tangentes des angles des axes de l'indicatrice :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1.$$

avec l'axe des abscisses. Tout point de la surface, pouvant devenir par un changement d'axes, l'origine des coordonnées, on voit que la conclusion précédente est générale, et que la proposition annoncée est démontrée.

Ce qui précède conduit encore à cette importante conclusion, que l'équation du second degré en $\frac{dy}{dx}$ a toujours ses racines réelles et ne peut les avoir égales sans être identique, de sorte qu'alors la direction des lignes de courbure devient indéterminée. Pour le reconnaître directement, posons, en introduisant une inconnue auxiliaire ρ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + p^2 + pq\frac{dy}{dx}}{r + s\frac{dy}{dx}} = \frac{pq + (1+q^2)\frac{dy}{dx}}{s + t\frac{dy}{dx}}$$

d'où : $$\frac{dy}{dx}(\rho pq - s) + [\rho(1+p^2) - r] = 0$$

$$\frac{dy}{dx}[\rho(1+q^2) - t](\rho pq - s) = 0$$

et par conséquent : $\left[\rho(1+p^2)-r\right]\left[\rho(1+q^2)-t\right]-(\rho pq-s)^2=0$

pour l'équation relative à ρ. Or, le premier membre est négatif quand on fait :

$$\rho=\frac{r}{1+p^2} \qquad \text{et} \quad \rho=\frac{t}{1+q^2}$$

d'ailleurs le coefficient de ρ^2 étant $(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2=1+p^2+q^2$, il est positif pour $\rho=\pm\infty$, de sorte que les racines de l'équation du second degré sont réelles et séparées par les expressions : $\frac{r}{1+p^2}, \frac{t}{1+q^2}$. Elles ne peuvent donc devenir égales entre elles, qu'en prenant pour valeur commune :

$\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}$, d'où la double égalité :

$$\frac{s}{pq}=\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}$$

qui rend en effet identique, l'équation en $\frac{dy}{dx}$. Les points de la surface proposée, dont les coordonnées vérifient ces relations, se nomment ombilics et on les caractérise encore en disant que l'indicatrice qui leur correspond, se réduit à un cercle. Or, on a déjà rencontré ces mêmes conditions dans la théorie du contact, et nous savons par cette théorie qu'on peut en chacun de ces points obtenir une sphère osculatrice ayant, avec la surface, un contact du second ordre. Pour compléter ce rapprochement, revenons un instant aux axes coordonnés par lesquels on a cette expression de z, savoir :

$z=ax^2+bxy+cy^2+dy^3+ex^2y+\ldots\ldots$ En supposant l'origine un ombilic, l'équation de la sphère osculatrice par rapport à ce système d'axes sera évidemment : $X^2+Y^2+(Z-R)^2=R^2$, et l'on aura pour : $X=x$, $Y=y$, cette valeur $Z=R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ où je prends le radical avec le signe $-$ afin qu'on ait $Z=0$ en supposant x et y nuls. Cela posé, les conditions du contact du second ordre à l'origine sont que les développements des deux ordonnées Z et z suivant les puissances de x et y, aient le même terme constant et les mêmes termes du premier et du second degré. Or, ayant : $\sqrt{R^2-x^2-y^2}=R-\frac{x^2+y^2}{2R}-\frac{(x^2+y^2)^2}{8R^2}-\ldots$ et par conséquent : $Z=\frac{x^2+y^2}{2R}+\ldots\ldots$ on doit poser : $ax^2+bxy+cy^2=\frac{1}{2R}(x^2+y^2)$.

Nous retrouvons donc la conclusion obtenue par des considérations d'origine si différente, que l'indicatrice relative aux ombilics est un cercle. Maintenant on reconnaît de suite qu'ils existent sur l'ellipsoïde et sont les points de contact des plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires, car les sections des surfaces du second ordre par des plans parallèles étant des courbes semblables, l'indicatrice en chaque point est l'une quelconque des sections parallèles au plan tangent en ce point.

※ III. Monge a découvert le premier que les projections des lignes de courbure de l'ellipsoïde sont des ellipses ou des hyperboles, par l'analyse que voici. Considérant l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

on en tire d'abord :

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z} \qquad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z} \qquad r = \frac{c^4 (y^2 - b^2)}{a^2 b^2 z^3} \qquad s = -\frac{c^4 x y}{a^2 b^2 z^2} ;$$

$t = \dfrac{c^4 (x^2 - a^2)}{a^2 b^2 z^3}$, de sorte qu'en faisant pour abréger :

$$A = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} \qquad B = \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} .$$

il vient pour l'équation différentielle de la projection :

$$A x y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - A y^2 - B) \frac{dy}{dx} - x y = 0$$

On en déduit par la différentiation, ce résultat :

$$\left(2 A x y \frac{dy}{dx} + x^2 - A y^2 - B\right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[A \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right] . \left[x \frac{dy}{dx} - y\right] = 0$$

et en éliminant entre les deux relations, la quantité $x^2 - A y^2 - B$, on arrive à cette relation très-simple :

$$x y \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} - y\right) = 0$$

Divisant par $x y \dfrac{dy}{dx}$, elle devient :

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0$$

Les trois termes étant des dérivées exactes, on en tire immédiatement :

$$\log \frac{1}{c} \frac{dy}{dx} + \log y - lx = 0$$

ou :

$$y\, dy + c x\, dx$$

et l'on en conclut par-conséquent :

$$y^2 = Cx^2 + C'$$

Telle est donc la forme dans laquelle est contenue la relation cherchée : et, en effet, si l'on substitue dans l'équation proposée la valeur de y, on voit qu'elle est identiquement vérifiée en posant : $C' = -\frac{BC}{1+AC}$. La combinaison analytique qui a conduit au résultat n'est justifiée que par le succès ; il semble en effet difficile de voir de quelle manière Monge y a été conduit, l'exposition de sa méthode commençant par ces mots, singulièrement obscurs : « Cette équation étant élevée, on doit la regarder comme résultant de rapports non linéaires établis entre les constantes qui complétaient les intégrales de premier ordre, d'une équation différentielle d'un ordre supérieur. (Application de l'Analyse à la Géométrie, page 142.)

Courbes et surfaces enveloppes.

I. — Une courbe étant donnée par une équation renfermant un paramètre a, savoir :

$$f(x, y, a) = 0$$

le lieu des intersections successives de chacune de ces courbes avec celle qui correspond à une valeur infiniment voisine du paramètre, est nommé l'enveloppe de la proposée.

Son équation s'obtiendra donc en éliminant la variable a entre les deux relations :

$$f(x, y, a) = 0$$

$$f(x, y, a + da) = 0$$

Mais on commencera par introduire la supposition de da infiniment petit, avant d'effectuer l'élimination en remplaçant le système de relations proposées par celles-ci :

$$f(x, y, a) = 0$$

$$\frac{f(x, y, a+da) - f(x, y, a)}{da}$$

dont la seconde donne immédiatement, dans la supposition faite :

$$\frac{df(x,y,a)}{da} = 0$$

Cela posé, concevons qu'on en tire :

$$a = \varphi(x,y)$$

l'équation de l'enveloppe se trouvera représentée par

$$f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$$

et il sera facile de conclure de là que l'enveloppe est tangente à chacune des enveloppées, en nommant ainsi les courbes $f(x,y,a) = 0$.

En effet, on trouve en différentiant :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{df}{d\varphi}\left[\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

mais $\frac{df}{d\varphi}$ ne diffère de $\frac{df}{da}$ qu'en ce que $\varphi(x,y)$ y remplace a, et $\varphi(x,y)$ est précisément la valeur de a, qui annule $\frac{df}{da}$; donc, $\frac{df}{d\varphi}$ est identiquement nulle ; il reste simplement :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

C'est précisément la relation qui déterminerait le coefficient angulaire de la tangente à la courbe enveloppée ; on en conclut que les deux courbes ayant même tangente en leur point commun, sont tangentes entre elles.

II. — La règle précédemment donnée pour la détermination des courbes enveloppes, conduit à un paradoxe, si on l'applique à l'équation résolue par rapport au paramètre a, car la dérivée égalée à zéro donne la relation absurde : $1 = 0$. Soit pour fixer les idées, le cercle (1)

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

d'où l'on tire : $a = x \pm \sqrt{R^2 - y^2}$

En prenant pour courbes infiniment voisines :

$$a = x + \sqrt{R^2 - y^2}$$

---

(1) — M. Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral. Tome I, page 308.

$$a + da = x + \sqrt{R^2 - y^2}$$

on voit effectivement qu'elles ne peuvent se rencontrer, d'où l'équation contradictoire $1 = 0$; mais la conclusion à tirer de là, c'est qu'on doit chercher le point de rencontre de ces deux autres courbes :

$$a = x + \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$a + da = x - \sqrt{R^2 - y^2}$$

qui correspondent à deux déterminations différentes du radical. Or, on obtient ainsi pour résultat $y^2 - R^2 = 0$, comme par l'application de la règle à l'équation non résolue : $(x - a)^2 + y^2 = R^2$.

III. – Cherchons comme application, l'enveloppe de la droite :

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = f(\alpha)$$

où le paramètre variable est l'angle α que fait cette droite avec l'axe des abscisses. La dérivée par rapport à α donne :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = f'(\alpha)$$

et en résolvant ces deux équations par rapport à x et y, on exprimera en fonctions du paramètre variable les coordonnées d'un point de l'enveloppe qui seront :

$$x = f'(\alpha)\cos\alpha + f(\alpha)\sin\alpha$$

$$y = f'(\alpha)\sin\alpha - f(\alpha)\cos\alpha$$

Ces valeurs conduisent à une conséquence remarquable pour l'arc de l'enveloppe. On trouve en effet :

$$dx = \left[f''(\alpha) + f(\alpha)\right]\cos\alpha \, d\alpha$$

$$dy = \left[f''(\alpha) + f(\alpha)\right]\sin\alpha \, d\alpha.$$

ce qui donne d'abord, pour le coefficient angulaire de la tangente :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$$

Comme on devait s'y attendre, la droite mobile que nous savons être tangente à son enveloppe, faisant avec l'axe des abscisses l'angle α. Mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est qu'en faisant la somme des carrés, on trouve :

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = \left[f''(\alpha) + f(\alpha)\right]^2 d\alpha^2$$

d'où, par conséquent :

$$ds = \pm \left[f''(\alpha) + f(\alpha) \right] d\alpha$$

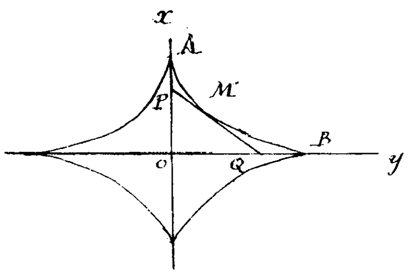
le double signe devant être déterminé de manière que ds soit positif ou négatif, suivant que s croît ou décroît avec α. On voit ainsi qu'on obtient pour ds une expression sans radical, et conduisant à une infinité de courbes rectifiables, puisqu'en prenant pour $f(\alpha)$ la dérivée d'une fonction connue, on aura immédiatement l'expression de l'arc s, en α;

Soit par exemple $f(\alpha) = -a \sin\alpha \cos\alpha$; l'équation de la droite,

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = -a \sin\alpha \cos\alpha$$

écrite ainsi : $$\frac{x}{a\cos\alpha} - \frac{y}{a \sin\alpha} = -1.$$

montre que les segments interceptés sur les axes coordonnés sont les projections sur ces axes de la constante a. La courbe que nous allons rectifier est donc l'enveloppe d'une droite de grandeur a qui se meut en s'appuyant sur les axes coordonnés, et l'on aura d'abord pour les coordonnées d'un point M;



$$x = -a \cos^3\alpha$$

$$y = a \sin^3\alpha$$

d'où pour les longueurs des segments MP, MQ, interceptés par les axes sur la tangente en ce point

$$MP = a\cos^2\alpha \qquad MQ = a \sin^2\alpha$$

et enfin pour l'équation en coordonnées rectangulaires

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Quant à la différentielle de l'arc, on obtient :

$$ds = \pm 3a \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha$$

et en considérant la portion de courbe commençant au point A pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et qui s'étend dans l'angle des coordonnées positives, jusqu'à la limite $\alpha = \pi$, nous choisirons le signe $-$, puisque $\cos\alpha$ est négatif dans cet intervalle. De cette manière, s croîtra avec α, depuis la valeur zéro, relative au point A, et l'on aura, d'après la notion déjà acquise de l'intégrale définie

$$s = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} 3a \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha \, ;$$

Mais l'expression $-\frac{3a}{2}\sin^2\alpha + C$ a pour dérivée $-3a\sin\alpha\cos\alpha$, et en prenant $C = \frac{3a}{2}$, on voit qu'elle s'évanouira pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$; de sorte qu'elle représentera bien la somme des valeurs de la différentielle $-3a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$ à partir de $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ainsi on a :

$$S = \frac{3a}{2}(1-\sin^2\alpha) = \frac{3a}{2}\cos^2\alpha$$

résultat qui s'interprète géométriquement, car d'après l'expression donnée plus haut, du segment de tangente MP, on voit qu'on obtient simplement :

$$S = \frac{3}{2} MP.$$

III. — Je me bornerai à quelques mots sur les surfaces enveloppes. On en distingue deux espèces ; dans les unes, la surface enveloppée est définie par une équation :

$$f(x, y, z, a) = 0$$

renfermant un seul paramètre variable, et la courbe d'intersection de deux surfaces infiniment voisines, correspondant aux valeurs a et $a + da$ est représentée par les deux équations :

$$f(x, y, z, a) = 0$$

$$f(x, y, z, a+da) = 0$$

ou, en opérant comme plus haut, par celles-ci :

$$f(x, y, z, a) = 0$$

$$\frac{df(x, y, z, a)}{da} = 0$$

Or, on démontrera, par un calcul tout semblable, qu'en tirant de la seconde équation : $a = \varphi(x, y, z)$ la surface enveloppe représentée par :

$$f(x\, y\, z\ \ \varphi(x, y, z)) = 0$$

est tangente à toutes les enveloppées. Effectivement, les deux coefficients $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ de l'équation du plan tangent sont donnés par les relations :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{df}{d\varphi}\left[\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx}\right] = 0$$

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dz}\,\frac{dz}{dy} + \frac{df_1}{d\varphi}\left[\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\,\frac{dz}{dy}\right] = 0$$

qui se réduisent, à cause de $\frac{df_1}{d\varphi} = 0$ à :

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dz}\,\frac{dz}{dy} = 0$$

Ces coefficients sont donc ceux qu'on obtiendrait en cherchant le plan tangent à la surface enveloppée $f(x, y, z, \alpha) = 0$, le paramètre α ayant la valeur numérique que prend $\varphi(x, y, z)$ au point considéré.

Soit par exemple le plan.

$$z = \alpha x + \varphi(\alpha)\,y + \psi(\alpha) \qquad 0 = x + \varphi'(\alpha)y + \psi'\alpha$$

la surface enveloppé résulte de l'élimination du paramètre variable entre cette équation et la suivante :

elle porte le nom de surface développable, et en identifiant l'équation générale du plan tangent en un point quelconque x, y, z.

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

avec celle-ci : $\quad Z = \alpha X + \varphi(\alpha) Y + \psi(\alpha)$

nous aurons : $\quad \alpha = p$

$$\varphi(\alpha) = q$$
$$\psi(\alpha) = z - px - qy$$

On en tire immédiatement entre les dérivées partielles du premier ordre, la relation :

$$q = \varphi(p)$$

qui est d'une grande importance dans la théorie de ces surfaces ; il vient ensuite en différentiant successivement par ce rapport à x et y :

$$\frac{dq}{dx} = \varphi'(p)\frac{dp}{dx} \qquad \frac{dq}{dy} = \varphi'(p)\frac{dp}{dy}$$

ou, plus simplement :

$$s = \varphi'(p)r \qquad t = \varphi'(p)\,s$$

et par suite : $\quad rt - s^2 = 0$

si l'on élimine $\varphi'(p)$. C'est ce qu'on nomme l'équation aux différences partielles des surfaces développables ; elle montre qu'en chacun de ses points, l'indicatrice :

$$\frac{1}{2}rX^2 + sXY + \frac{1}{2}tY^2 = 1.$$

est un système de deux droites parallèles, et il en résulte aisément que l'une des deux sections principales a un rayon de courbure infini.

La seconde espèce de surfaces enveloppes se rapporte à l'équation:

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

renfermant deux paramètres variables a et b, et s'obtient en éliminant a et b entre les trois équations

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$
$$\frac{df}{da} = 0 \qquad \frac{df}{db} = 0$$

Alors la surface obtenue par ce calcul touche encore toutes les surfaces proposées, mais chacune en un seul point, ou en un nombre fini et limité de points, car pour des valeurs données des constantes a et b, les trois équations ci-dessus ne donnent pour x, y, z, qu'un nombre fini de valeurs, tandis qu'on avait, dans le cas précédent, une courbe de contact.

Applications analytiques du calcul différentiel.

Formes indéterminées de certaines fonctions pour des valeurs particulières de la variable.

Soit $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ une fraction se réduisant à $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, de sorte que l'on ait:

$$f(a) = 0 \qquad \varphi(a) = 0$$

La série de Taylor limitée à ses deux premiers termes, donnant dans ce cas:

$$f(a+h) = h f'(a + \theta h)$$
$$\varphi(a+h) = h\,\varphi'(a + \theta_1 h)$$

où θ et θ_1 sont des quantités comprises entre zéro et l'unité; on en conclut en faisant tendre h vers zéro:

$$\lim \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

La valeur cherchée est donc le rapport des dérivées des deux termes de la fonction proposée.

La démonstration précédente suppose évidemment la quantité a finie ; mais on va voir que le résultat n'est point soumis à cette restriction.

Faisons en effet : $x = \frac{1}{y}$; la fraction proposée devient :

$\dfrac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}$, et prend la forme indéterminée pour $y = 0$, ce qui permet de lui appliquer la règle relative aux valeurs finies de la variable. Or, on obtient de la sorte :

$$\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{-\frac{1}{y^2}\, f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2}\, \varphi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}$$

ce qui ramène précisément à :

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x}$$

Il pourrait arriver que cette nouvelle fraction se présentât de nouveau sous la forme $\frac{0}{0}$; alors, on serait conduit, en appliquant la même règle, au quotient des dérivées secondes : $\frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$, et en continuant ainsi, de proche en proche, s'il y a lieu, on obtiendra la valeur cherchée par le quotient des dérivées d'ordre n : $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$.

Considérons maintenant le cas où les deux termes de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sont infinis pour $x = a$; on les ramène immédiatement au précédent, en écrivant :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

Appliquant donc la règle, et désignant par A la limite cherchée, on trouve :

$$A = \lim \frac{\frac{-\varphi'(x)}{\varphi^{(2)}(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^{2}(x)}} = \lim : \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\ \frac{f^2(x)}{\varphi^2(x)}$$

ce qui conduit à l'égalité :

$$A = A^2 \text{ limite } \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$$

d'où on conclut, quand A n'est ni nul, ni infini :

$$A = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

C'est donc encore le rapport des dérivées qui donne la valeur cherchée, et on va voir que la conclusion subsiste, si l'on suppose $A = 0$. Considérant en effet l'expression :

$$\frac{f(x) + a\,\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

qui se présente aussi sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, et a évidemment pour limite la constante a, on trouvera, en appliquant la règle :

$$\text{limite : } \frac{f'(x) + a\,\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = a$$

et par conséquent :

$$\text{limite } \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 0.$$

En dernier lieu, si $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ devient infini pour $x = a$, la fraction inverse $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ a pour limite zéro ; de sorte qu'on a, d'après ce qui précède :

$$\frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = 0$$

et par conséquent :

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \infty$$

J'omettrai la considération de la forme indéterminée $0 \times \infty$, comme se ramenant d'elle-même au cas précédent de $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$; de la forme $\infty - \infty$, qu'on peut rattacher à : $\log \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \log f(x) - \log \varphi(x)$ et enfin de celles-ci : $0^0, 1^\infty, 0^0$; car en posant : $y = f(x)^{\varphi(x)}$ on en conclura :

$$\log y = \varphi(x) \log f(x)$$

de sorte qu'il n'y aurait, dans aucun de ces cas, de question nouvelle. Voici maintenant l'application la plus intéressante à envisager ; elle concerne l'expression.

$$x^n \log x$$

qui, en supposant n positif, donne pour $x=0$, la forme $0 \times \infty$. Or, en l'écrivant de cette manière : $\frac{\log x}{x^{-n}}$, on sera ramené aux quotients $\frac{\infty}{\infty}$, et en prenant le rapport des dérivées, on trouvera : $\frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = -\frac{x^n}{n}$, ce qui est nul pour $x=0$.

Considérons encore pour $x=0$, l'expression : $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, qui devient alors $\frac{0}{0}$. En posant $e^{-\frac{1}{x^2}} = t$, d'où : $x = (-\log t)^{-\frac{1}{2}}$, elle se ramène à celle-ci :

$$\frac{t}{(-\log t)^{-\frac{n}{2}}} = t(-\log t)^{\frac{n}{2}} = (-t^{\frac{2}{n}} \log t)^{\frac{n}{2}}$$

Or, on a $t=0$, pour $x=0$, ce qui ramène au cas précédent, de sorte que la limite est encore zéro. Je cite cet exemple à cause de la remarque suivante de Cauchy. Formons les dérivées successives de la fonction :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

On trouvera : $$f'(x) = -\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} + \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6}$$

. . . .

d'où il est aisé de conclure qu'en général $f^{(p)}(x)$ se compose d'une somme de termes de la forme $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, n étant positif ; de sorte que pour $x=0$, la fonction proposée s'annule, ainsi que ses dérivées des divers ordres. Il en résulte qu'en appliquant à cette fonction la formule de développement en série de Maclaurin, le reste seul paraîtra dans les résultats. En n'ayant donc pas égard au reste, les deux expressions : $F(x)$ et $F(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont données exactement par la même série ; d'où l'on voit combien la condition de convergence est loin d'être suffisante, comme le croyait Lagrange, pour que la série $F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x}{1.2} F''(0) + \ldots$ représente $F(x)$.

En dernier lieu, nous observerons qu'une fraction $\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}$, qui, pour $x=a$, $y=b$, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, est essentiellement indéterminée ; car la limite pour $h=0$ et $K=0$ de l'expression :

$$\frac{f(a+h,b+k)}{\varphi(a+h),b+k)} = \frac{h\frac{df}{dx}+k\frac{df}{dy}+\cdots}{h\frac{d\varphi}{dx}+k\frac{d\varphi}{dy}+\cdots}$$

lorsqu'on aura remplacé x et y par a et b dans les coefficients de h et k, et en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, dépendra essentiellement du rapport $\frac{k}{h}$. Il est toutefois un cas d'exception à cette conséquence; c'est lorsqu'on suppose:

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{d\varphi}{dy}}, \text{ ou bien: } \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}$$

condition qui s'interprète immédiatement en considérant les deux courbes $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$. En effet, ces courbes sont alors tangentes entre elles au point représenté par le système des valeurs considérées $x=a$, $y=b$.

Maxima et minima.

I. – On dit qu'une fonction $f(x)$ est maximum ou minimum pour une valeur de la variable $x=a$, lorsque la différence $f(a+h)-f(a)$ garde le même signe, h variant entre les limites $-\varepsilon+\varepsilon$, où ε est une quantité déterminée, aussi petite d'ailleurs qu'on voudra. Le maximum correspond au cas où cette différence est négative, et le minimum au cas où elle est positive. Cela posé, on a, par la formule de Taylor:

$$f(x+h)-f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\theta h)$$

Or, on peut prendre h assez petit pour que le terme $hf'(x)$ donne son signe au second membre; ce terme changeant de signe avec h, il en résulte que dans le cas du maximum et du minimum, on doit avoir:

$$f'(x)=0$$

En désignant donc par $x=a$ l'une des racines de cette équation, il viendra:

$$f(a+h)-f(a) = \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a+\theta h)$$

et si l'on suppose encore h suffisamment petit, le signe de la différence considérée sera donné par $f''(a)$; ainsi, à la valeur $x=a$, correspondra un maximum ou un minimum, suivant qu'on aura $f''(a) < 0$, ou $f''(a) > 0$.

Dans le cas où l'on aurait à la fois $f'(a)=0$ et $f''(a)=0$, la formule de Taylor donnant :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^3}{6} f'''(a) + \&^{ca}$$

on voit qu'on n'aura ni maximum ni minimum, à moins que la nouvelle condition $f'''(a)=0$ ne soit remplie, et alors le signe de la dérivée quatrième servira, comme précédemment celui de la dérivée seconde, à distinguer le cas du maximum de celui du minimum. En continuant ainsi, on arrivera à une conclusion qu'on peut énoncer sous forme géométrique, comme il suit :

Les points de la courbe $y=f(x)$ auxquels correspondent des maxima ou minima de l'ordonnée, sont ceux où, la tangente étant parallèle à l'axe des abscisses, a un contact d'ordre impair avec la courbe.

II. Il peut arriver qu'on ait à déterminer les maxima et minima d'une fonction $f(x,y)$, y étant lié à x par une équation $\varphi(x,y)=0$; on posera alors :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

et on tirera $\frac{dy}{dx}$ de la condition :

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Or, une conséquence analytique à remarquer, c'est qu'en éliminant $\frac{dy}{dx}$ par la méthode du multiplicateur, on déduira de la combinaison :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} - \lambda\left[\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

les équations : $\quad \frac{df}{dx} - \lambda\frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad \frac{df}{dy} - \lambda\frac{d\varphi}{dy} = 0$

d'où l'énoncé suivant :

Les valeurs de x et y, propres au maximum et au minimum de $f(x,y)$ sous la condition $\varphi(x,y)=0$, s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées partielles, par rapport à x et y, de la quantité : $f(x,y) - \lambda\,\varphi(x,y)$.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du carré de la distance à l'origine des coordonnées, d'un point de la courbe du second degré :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1.$$

on formera les dérivées partielles de :

$$x^2 + y^2 - \lambda\left(ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1\right)$$

ce qui donnera :
$$x - \lambda(ax + by) = 0$$
$$y - \lambda(bx + cy) = 0$$

Multipliant maintenant la première égalité par x, la seconde par y et ajoutant, nous trouverons :
$$x^2 + y^2 - \lambda(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0$$

Or, on voit, d'après l'équation de la courbe, qu'on a précisément : $x^2 + y^2 = \lambda$; et cette quantité s'obtiendra évidemment en égalant à zéro le déterminant du système
$$\begin{Bmatrix} 1 - a\lambda, & -b\lambda \\ -b\lambda, & 1 - c\lambda \end{Bmatrix}$$

Si l'on fait : $\lambda = \frac{1}{s}$, on retrouve ainsi l'équation : $(s-a)(s-c) - b^2 = 0$ comme par la géométrie analytique.

III. — Les maxima et minima d'une fonction de deux variables indépendantes $f(x, y)$ se définissent encore par la condition que la différence :
$$f(x+h\ \ y+K) - f(x, y)$$
garde le même signe, quelles que soient les valeurs positives ou négatives des quantités h et K, supposées suffisamment petites. Cela posé, on a par le théorème de Taylor :
$$\begin{aligned} f(x+h, y+K) - f(x,y) = {} & h\frac{df}{dx} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2f}{dx^2} + \&^{ca} \\ & + K\frac{df}{dy} + hK\frac{d^2f}{dx\,dy} \\ & + \frac{1}{2}K^2\frac{d^2f}{dy^2} \end{aligned}$$
de sorte que pour h et K très-petits, le signe du premier membre est donné par l'expression :
$$h\frac{df}{dx} + K\frac{df}{dy}$$

La différence ne peut donc avoir un signe invariable qu'en posant :
$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{df}{dy} = 0$$

Mais en supposant ces conditions remplies, le signe étant donné par le trinome homogène du second degré :

$$\frac{1}{2}\left[h^2\frac{d^2f}{dx^2}+2hk\frac{d^2f}{dx\,dy}+k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right]=\frac{1}{2}h^2\left[\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{k}{h}\frac{d^2f}{dx\,dy}+\frac{k^2}{h}\frac{d^2f}{dy^2}\right].$$

il sera nécessaire qu'il ne puisse, en faisant varier $\frac{k}{h}$, passer du positif au négatif. Telle est l'origine d'une condition qui n'a point son analogue dans la théorie des maxima et minima des fonctions d'une variable, savoir :

$$\frac{d^2f}{dx^2}\,\frac{d^2f}{dy^2}-\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2>0$$

En la supposant remplie, la fonction sera un maximum ou un minimum, suivant que le coefficient de h^2 ou k^2, par exemple, le premier $\frac{d^2f}{dx^2}$, sera négatif ou positif.

Ces résultats pourront être énoncés sous forme géométrique, en considérant la surface représentée par l'équation $z=f(x,y)$; on peut dire en effet que les maxima et minima de l'ordonnée z correspondent aux points de la surface où le plan tangent est parallèle au plan des xy, et pour lesquels l'indicatrice est du genre ellipse.

Formation des équations différentielles.

I. — Des fonctions d'une forme compliquée conduisent souvent entre leurs dérivées à des relations simples qu'il est utile d'obtenir dans beaucoup de questions, et surtout s'il s'agit de les développer en série. Sous ce premier point de vue, nous nous occuperons de la formation des équations différentielles en considérant d'abord l'expression suivante :

$$y=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m$$

au sujet de laquelle Lagrange fait cette remarque : « qu'un des principaux avantages des fonctions dérivées est de pouvoir faire disparaître « dans les équations les puissances et les radicaux(1). » Effectivement, on trouve, en prenant la dérivée logarithmique :

$$\frac{y'}{y}=\frac{m}{\sqrt{x^2-1}}$$

d'où :

$$y'^2(x^2-1)=m^2y^2$$

et, en différentiant de nouveau, il vient, après avoir supprimé le facteur y' :

(1) Leçons sur le Calcul des fonctions, page 130.

$$y''(x^2-1)+xy'-m^2y=0.$$

Cette relation ne changeant point quand on y remplace m par $-m$, aura encore lieu si l'on pose :

$$y=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-m}=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{m}$$

et c'est de là que Lagrange a tiré une démonstration simple et facile des formules célèbres de Jean Bernouilli pour le développement de $\sin m\varphi$ et $\cos m\varphi$, suivant les puissances croissantes ou décroissantes de $\sin\varphi$ ou $\cos\varphi$. Si nous faisons d'abord en effet $x=\cos\varphi$, on aura :

$$2\cos m\varphi=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{m}$$

$$2\sqrt{-1}\sin m\varphi=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m}-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{m}$$

et en posant en second lieu : $x=\sin\varphi$, nous obtiendrons :

$$2\cos m\varphi=\left(-\sqrt{-1}\right)^{m}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m}+\left(\sqrt{-1}\right)^{m}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{m}$$

$$2\sqrt{-1}\sin m\varphi=\left(-\sqrt{-1}\right)^{m}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{m}-\left(\sqrt{-1}\right)^{m}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{m}$$

d'où l'on voit que ces diverses questions si importantes dans la théorie des fonctions circulaires dépendent toutes du développement suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable, de la quantité qui satisfait à la relation :

$$y''(x^2-1)+xy'-m^2y=0$$

Pour abréger, je n'entrerai pas dans le calcul de ce développement et je me bornerai à donner les résultats suivants qui peuvent être souvent utiles.

I.

$$2\cos m\varphi=(2\cos\varphi)^{m}-\frac{m}{1}(2\cos\varphi)^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1.2.}(2\cos\varphi)^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{m-6}$$
$$+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4.}(2\cos\varphi)^{m-8}-\ldots\ldots$$

II.

$$\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}=(2\cos\varphi)^{m-1}-\frac{m-2}{1}(2\cos\varphi)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}(2\cos\varphi)^{m-5}$$
$$-\frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}(2\cos\varphi)^{m-7}+\ldots\ldots$$

III, m étant un nombre pair.

$$\cos m\varphi = (-1)^{\frac{m}{2}}\left[1 - \frac{m^2}{2}\cos^2\varphi + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\cos^4\varphi - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5.6}\cos^6\varphi + \dots\dots\right]$$

IV, *m impair* :

$$\cos m\varphi = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[m\cos\varphi - \frac{m(m^2-1)}{2.3}\cos^3\varphi + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}\cos^5\varphi - \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2.3.4.5.6.7}\cos^7\varphi + \right.$$

V, *m pair*

$$\cos m\varphi = 1 - \frac{m^2}{2}\sin^2\varphi + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\sin^4\varphi - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.4.5.6}\sin^6\varphi + \dots\dots$$

VI, *m impair*

$$\sin m\varphi = m\sin\varphi - \frac{m(m^2-1)}{2.3}\sin^3\varphi + \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4.5}\sin^5\varphi - \dots\dots$$

VII, *m pair*

$$\sin m\varphi = \cos\varphi\left[m\sin\varphi - \frac{m(m^2-2^2)}{2.3.}\sin^3\varphi + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5}\sin^5\varphi - \dots\right]$$

VIII, *m impair*

$$\cos m\varphi = \cos\varphi\left[1 - \frac{m^2-1}{2}\sin^2\varphi + \frac{(m^2-1)(m^2-3^2)}{2.3.4}\sin^4\varphi - \dots\dots\right]$$

II. — Je considérerai en second lieu l'expression :

$$y = \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$$

où le nombre n est nécessairement entier, et qui représente évidemment un polynome du n^e degré, à l'égard duquel je vais établir la relation :

$$y''(x^2-1) + 2xy' - n(n+1)y = 0$$

Soit pour un instant :

$$z = (1-x^2)^n$$

la dérivée logarithmique donnera d'abord l'équation :

$$\frac{z'}{z} = \frac{2n.x}{x^2-1}$$

ou bien : $\quad z'(x^2-1) = 2nzx$

Je prends maintenant les dérivées d'ordre $n+1$ des deux membres et à cette occasion, j'observe que les dérivées successives d'un produit $u.v.$ de deux fonctions conduisent aux valeurs suivantes :

$$\frac{d.(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d^2(uv)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} v + 2 \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} + u \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\frac{d^3(uv)}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3} v + 3 \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dv}{dx} + 3 \frac{du}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} + u \frac{d^3v}{dx^3}$$

. . . .

d'où l'on voit qu'on peut écrire en général :

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^nu}{dx^n} v + \frac{n}{1} \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \frac{d^2v}{dx^2} + \dots + u \frac{d^nv}{dx^n}.$$

les coefficients numériques étant ceux du développement de la puissance n^e d'un binôme.(1) Or, à l'aide de cette formule, on trouve d'abord pour résultat :

$$\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}(x^2-1) + (n+1)\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} 2x + n(n+1)\frac{d^nu}{dx^n} = 2n \left\{ \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} x (n+1) \frac{d^nu}{dx^n} \right\}$$

et il suffit de réduire, en posant : $y = \frac{d^nz}{dx^n}$ pour obtenir la relation annoncée :

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x^2-1) + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)y = 0.$$

L'expression de forme semblable :

$$y = \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$

traitée de même, conduirait à l'équation différentielle précédemment obtenue, savoir :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - n^2y = 0$$

---

(1) En posant avec des coefficients numériques indéterminés, n_0, n_1, n_2, etc...

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = n_0 \frac{d^nu}{dx^n} v + n_1 \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} \frac{dv}{dx} + n_2 \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} \frac{d^2v}{dx^2} + \dots\dots$$

on les obtiendra immédiatement par cette hypothèse : $u = e^{ax}$, $v = e^{bx}$, car il vient de la sorte après avoir supprimé dans les deux membres le facteur $e^{(a+b)x}$:

$$(a+b)^n = n_0 a^n + n_1 a^{n-1}b + n_2 a^{n-2}b^2 + \dots\dots$$

et M.r Liouville[1] a tiré de là une démonstration simple de cette relation découverte par Jacobi, savoir :

$$\frac{(-1)^n n}{1.3.5\ldots 2n-1} \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} = \sin\left[n \arc\cos x\right]$$

III. – La formation des équations différentielles s'offre sous un nouveau point de vue dans la question suivante : Étant donnée une fonction contenant n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots c_n$, obtenir une équation de différentielle à laquelle elle satisfasse, quelles que soient ces constantes.

Posons :
$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n)$$
puis :
$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n)$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_2(x, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = f_n(x, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n)$$

l'élimination de $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$ entre ces $n+1$ équations, donnera une condition de la forme suivante :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots\ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Ce sera l'équation différentielle cherchée, et nous dirons qu'elle est du n.e ordre pour rappeler l'exposant le plus élevé des diverses dérivées de y qui y figurent. L'étude de ces relations est un des principaux objets du calcul intégral, et plus tard, on établira qu'entre certaines limites des valeurs de la variable indépendante, toute équation d'ordre n admet une solution dont l'expression la plus générale renferme n constantes arbitraire. Cette proposition donne ainsi le moyen de former à priori des équations différentielles dont on a la solution complète, et en voici un exemple aussi simple qu'important. Je considère cette expression, où a et b sont des constantes déterminées, savoir :

$$y = C e^{ax} + C' e^{bx}$$

on en déduira, en différentiant deux fois de suite :

---

(1) Journal de Mathématiques pures et appliquées, Tome VI, page 69.

$$\frac{dy}{dx} = C a e^{ax} + C' b e^{bx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C a^2 e^{ax} + C' b^2 e^{bx}$$

Or, l'élimination de C et C' s'effectue immédiatement en multipliant la première équation par ab, la seconde par $-(a+b)$, la troisième par l'unité, et ajoutant membre à membre, de sorte qu'il vient ainsi :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + a\,b\,y = 0$$

Et en considérant à l'égard de l'expression analogue :

$$y = C e^{ax} + C' e^{bx} + C'' e^{cx}$$

les trois premières dérivées :

$$\frac{dy}{dx} = C\,a\,e^{an} + C' b^2 e^{bn} + C'' c^2 e^{cx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C a^3 e^{ax} + C' b^3 e^{bx} + C'' c^3 e^{cx}$$

on obtiendrait semblablement pour résultat :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - (a+b+c)\frac{d^2y}{dx^2} + (ab+bc+ca)\frac{dy}{dx} - abc\,y = 0$$

D'autres formes analytiques se prêtent également à un calcul facile et je citerai comme exemple les expressions :

$$y = C(x-a)^n + C'(x-b)^n$$

$$y = C(x-a)^n + C(x-b)^n + C''(x-c)^n$$

mais je ne m'y arrêterai point, et je terminerai ce sujet par quelques mots sur l'élimination des fonctions arbitraires.

IV. – On sait que l'équation générale des surfaces cylindriques est donnée par la relation suivante :

$$y - bz = f(x - az)$$

où figure une fonction arbitraire $f(x-az)$ et qu'on a pareillement pour les surfaces coniques :

$$\frac{x-a}{z-c} = f\left(\frac{y-b}{z-c}\right)$$

et pour les surfaces de révolution, autour de l'axe des z:

$$z = f(x^2+y^2)$$

Or, le calcul différentiel donne le moyen d'obtenir entre la fonction z et ses dérivées partielles $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, des relations qui subsistent quelle que soit la fonction arbitraire désignée dans ces trois cas par f.

En différentiant en effet l'équation:

$$y - bz = f(x - az)$$

par rapport à x, puis par rapport à y, on a:

$$-bp = f'(x-az)(1-ap)$$

$$1 - bq = -f'(x-az)\,aq$$

et l'élimination de $f'(x-az)$ donne facilement:

$$ap + bq = 1.$$

Opérons de même sur l'équation des surfaces coniques:

$$\frac{x-a}{z-c} = f\left(\frac{y-b}{z-c}\right)$$

nous obtiendrons d'abord:

$$\frac{z-c-p(x-a)}{(z-c)^2} = -f'\left(\frac{y-b}{z-c}\right)\frac{p(y-b)}{(z-c)^2}.$$

$$-\frac{q(x-a)}{(z-c)^2} = f'\left(\frac{y-b}{z-c}\right)\frac{z-c-q(y-b)}{(z-c)^2}$$

puis en divisant membre à membre et simplifiant:

$$p(x-a) + q(y-b) = z - c.$$

Enfin, l'équation des surfaces de révolution donne immédiatement:

$$p = 2xf'(x^2+y^2)$$

$$q = 2yf'(x^2+y^2)$$

d'où: $$py - qx = 0.$$

On nomme équations aux différences partielles ces relations entre une fonction z de deux ou d'un plus grand nombre de variables indépendantes x, y, etc., ces variables et les dérivées partielles des divers ordres, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, &c.ª Les calculs précédents donnent pour origine à ces équations l'élimination d'une fonction arbitraire qui entre d'une certaine manière dans l'expression d'une fonction de plusieurs variables; or les diverses relations considérées sont comprises dans celle-ci :

$$u = f(v)$$

où u et v sont deux fonctions déterminées de x, y, et z, et dans ce cas plus général, l'élimination de la fonction s'effectue encore de la même manière. On a en effet successivement :

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = f'(v)\left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = f'(v)\left(\frac{dv}{dy} + q\frac{dv}{dz}\right)$$

par conséquent : $\left(\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dy} + q\frac{dv}{dz}\right) = \left(\frac{dv}{dx} + p\frac{dv}{dz}\right)\left(\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz}\right)$

et si l'on simplifie :

$$\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dx}\,\frac{du}{dy} + p\left(\frac{du}{dz}\,\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dz}\,\frac{du}{dy}\right) + q\left(\frac{dv}{dz}\,\frac{du}{dx} - \frac{du}{dz}\,\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

Je donnerai enfin l'exemple d'une relation où entrent deux fonctions arbitraires différentes, savoir :

$$z = f(x + ay) + f_1\,(x + by)$$

a et b étant deux constantes. Faisant pour abréger

$$x + ay = \alpha \qquad\qquad x + by = \beta$$

ce qui donnera plus simplement :

$$z = f(\alpha) + f_1\,(\beta)$$

nous en déduirons le système suivant de valeurs des dérivées partielles du premier et du second ordre, savoir :

$$p = f'(\alpha) + f_1'(\beta)$$

$$q = af'(\alpha) + bf_1'(\beta)$$

$$r = f''(\alpha) + f_1''(\beta)$$

$$s = af''(\alpha) + bf_1''(\beta)$$

$$t = a^2f''(\alpha) + b^2f_1''(\beta)$$

Or, les trois dernières relations contiennent seulement $f''(\alpha)$ et $f_1''(\beta)$

qu'on peut ainsi éliminer, et un calcul facile donne pour résultat l'équation :

$$t - (a+b)s + abr = 0.$$

qui s'offre dans les applications du calcul à des questions importantes de physique.

Calcul intégral. _ Préliminaires.

Nous avons précédemment établi que l'aire de la courbe $y = f(x)$, rapportée à des coordonnées rectangulaires, et comprise entre l'axe des x, deux ordonnées correspondant aux abscisses x_0, x, et l'arc de la courbe est la limite de la somme :

$$dx \left[f(x_0) + f(x_0 + dx) + \dots\dots + f\left\{ x_0 + (n-1)dx \right\} \right]$$

lorsqu'en supposant : $x = x_0 + n\,dx$, on fait tendre dx vers zéro, en augmentant indéfiniment le nombre entier n. Cette limite, représentée par la notation $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, et constituant ainsi une quantité entièrement déterminée lorsqu'on donne x_0 et x, a reçu comme on l'a dit, le nom d'intégrale définie de $f(x)\,dx$, prise depuis x_0 jusqu'à x, et sa propriété fondamentale est d'avoir pour dérivée, par rapport à x, la fonction $f(x)$. Cette notion d'intégrale définie obtenue si rapidement, et par les considérations les plus élémentaires, sert de fondement au calcul intégral, qui est la partie la plus importante et la plus élevée de l'Analyse. Nous allons la compléter par les remarques suivantes :

I. Rappelant d'abord qu'on a essentiellement supposé la fonction $f(x)$ réelle, continue et même positive entre les limites x_0, x, nous allons considérer maintenant le cas plus général de plusieurs alternatives de signes, de sorte que par exemple $f(x)$ ait le signe $+$ de x_0 à x_1, le signe $-$ de x_1 à x_2, et le signe $+$ de x_2 à x_0. On conviendra alors de poser :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x} f(x)\,dx$$

et il est évident qu'en étendant de cette manière la première signification de l'intégrale définie, elle restera toujours la limite de la somme :

$$dx\left[f(x_0)+f(x+dx)+\cdots\cdots+f\left\{x_0+(n-1)\,dx\right\}\right]$$

D'autre part, on a aussi admis que la limite supérieure x surpassait la limite inférieure, la considération de la somme des éléments permettra encore de supprimer cette restriction. Ayant en effet :

$$x = x_0 + n\,dx$$

d'où :

$$dx = \frac{x - x_0}{n}$$

on peut, en lui ajoutant le terme évanouissant : $dx\,f(x)$, l'écrire ainsi :

$$\frac{x-x_0}{n}\left[f(x_0)+f\left(x_0+\frac{x-x_0}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(x_0+i\,\frac{x-x_0}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+f\,(x)\right]$$

ou bien :

$$\frac{x-x_0}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\left(x_0+i\,\frac{x-x_0}{n}\right)=\frac{x-x_0}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\left[\frac{(n-i)x_0+i\,x}{n}\right]$$

Permettant dans cette expression les quantités x et x_0, elle deviendra :

$$-\frac{x-x_0}{n}\sum_{i=0}^{i=n} f\left[\frac{(n-i)\,x+i\,x_0}{n}\right]$$

or, en posant $i' = n - i$, de sorte que le nombre entier i' prenne aussi les valeurs $0, 1, 2, \ldots\ldots n$, on aura :

$$\sum_{i=0}^{i=n} f\left[\frac{(n-i)\,x+i\,x_0}{n}\right]=\sum_{i'=0}^{i'=n} f\left[\frac{(n-i')\,x_0+i'\,x}{n}\right]$$

De là résulte que la permutation de x et x_0 change simplement le signe du facteur $\frac{x-x_0}{n}$, et nous en conclurons, en faisant croître n indéfiniment, la relation :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = -\int_{x}^{x_0} f(x)\,dx$$

qui étend la notion de l'intégrale définie au cas de $x < x_0$.

Dans le cas où l'on connaîtrait sous forme explicite une fonction $\varphi(x)$ ayant $f(x)$ pour dérivée, ce résultat serait évident. Sachant en effet que deux fonctions dont les dérivées sont égales ne peuvent différer que d'une constante, on pourra écrire :

$$\int_{x_0}^{x} f\,(x)\,dx = \varphi\,(x) + C.$$

Faisant dans cette égalité qui a lieu quel que soit x, $x = x_0$, le premier membre d'après sa signification même sera nul, et l'on aura : $0 = \varphi(x_0) + C$, d'où : $C = -\varphi(x_0)$, et par suite :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

expression de l'intégrale définie, qui change évidemment de signe quand on permute les limites.

Nous remarquerons enfin qu'en supposant $f(x)$ imaginaire et réductible à la forme : $f_0(x) + \sqrt{-1}\, f_1(x)$, où les fonctions $f_0(x)$ et $f_1(x)$ sont réelles, on adoptera l'égalité :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f_0(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx$$

et si l'on connaît une fonction $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sqrt{-1}\,\varphi_1(x)$, telle qu'on ait : $\varphi'(x) = f(x)$ et par conséquent : $\varphi_0'(x) = f_0(x)$, $\varphi_1'(x) = f_1(x)$, on en conclura :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} \varphi_0'(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x} \varphi_1'(x)\,dx = \left[\varphi_0 x - \varphi_0(x_0)\right] + \sqrt{-1}\left[\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0)\right]$$

et par suite : $$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

comme pour les fonctions réelles.

II. Pour donner une application de la remarque précédente, soit : $f(x) = (x-a)^m$ et $\varphi(x) = \dfrac{(x-a)^{m+1}}{m+1}$, on aura, non seulement pour des valeurs réelles de la constante a, mais en supposant $a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$.

$$\varphi'(x) = f(a)$$

On en conclut par suite :

$$\int (x-a)^m\,dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + C$$

Cette relation présente pour $m = -1$ un cas d'exception donnant lieu à une remarque importante, lorsque a est imaginaire comme on l'a admis, car autrement, on sait déjà qu'on a :

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + C.$$

Considérons en effet, l'expression générale des logarithmes des quantités imaginaires, obtenue précédemment (page 17), et qui donne, en supposant x réel :

$$\log\left(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}\right) = \log\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (\varphi + 2K\pi)\sqrt{-1}$$

l'angle φ étant déterminé par les deux conditions :

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}} = \cos\varphi$$

$$\frac{-\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}} = \sin\varphi$$

et par suite, renfermé dans l'expression :

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{-\beta}{x-\alpha}$$

ou encore dans celle-ci :

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

on tirera de cette égalité :

$$\frac{d\log(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})}{dx} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{d\varphi}{dx}\sqrt{-1}$$

$$= \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\beta\sqrt{-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= \frac{1}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}$$

L'expression des logarithmes des quantités imaginaires, telles que nous venons de la rappeler, permet donc de poser :

$$\int\frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} = \log\left(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}\right) + C$$

or, ce résultat, joint au précédent, dans lequel je change m en $-m$, savoir :

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C$$

suffit pour obtenir l'intégrale de toute fonction rationnelle de x. Une telle fonction est en effet la somme de termes entiers tels que Ax^n, et de fractions simples de l'une ou l'autre de ces deux formes : $\frac{G}{(x-a)^m}$, $\frac{H}{x-a}$, la quantité a étant réelle ou imaginaire. Employant donc cette proposition évidente d'elle-même que l'intégrale d'une somme de fonctions est la somme des intégrales de chacune d'elles, on en conclut que l'intégrale d'une fraction rationnelle quelconque sera composée d'un nombre fini de termes, tels que : $\int A x^n dx = \frac{A x^{n+1}}{n+1}$,

$$\int \frac{G\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{G}{(m-1)(x-a)^{m-1}} \quad \text{et} \quad \int \frac{H\,dx}{x-a} = H \log (x-a)$$

Devant bientôt revenir sur cette question pour l'approfondir davantage, je passe à une nouvelle observation relative aux intégrales définies en général.

III. — Introduisons dans la différentielle $f(x)\,dx$ une nouvelle variable en posant : $x = F(\theta)$, elle prendra la nouvelle forme : $f[F(\theta)]F'(\theta)\,d\theta$, et je dis qu'on aura :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} f[F(\theta)]F'(\theta)\,d\theta = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

la limite inférieure θ_0 vérifiant la condition : $x_0 = F(\theta_0)$. Cette nouvelle intégrale représente encore en effet l'aire de la courbe $y = f(x)$, considérée comme limite de la somme des rectangles qu'on obtiendrait en prenant pour abscisses des points de division de la base du segment, les quantités : $x_0 = F(\theta_0)$, $x_1 = F(\theta_0 + d\theta)$, $x_2 = F(\theta_0 + 2d\theta)$, &c., au lieu des abscisses équidistantes, et on sait que tous les modes de décomposition donnent la même limite. Cette remarque, si facile, relative aux changements de variable, nous met en possession d'un des procédés les plus féconds pour la détermination des intégrales, et nous allons en donner un exemple, en traitant l'expression :

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$$

où la fonction f est supposée contenir rationnellement x et le radical $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Rappelons à cet effet que dans le cas où le trinome $ax^2 + bx + c$ est décomposable en facteurs réels : $a(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, on ramène la fonction proposée à être simplement rationnelle par rapport à une nouvelle variable θ, en posant :

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = \theta^2.$$

Or, cette relation donne :

$$dx = \frac{2(\alpha-\beta)\theta}{(1-\theta^2)^2}$$

de sorte qu'en substituant on effectue le calcul par l'intégration d'une fonction rationnelle en θ. Ajoutons que dans le cas des racines imaginaires où le radical serait de la forme :

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \beta\sqrt{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

la même conclusion serait donnée par la substitution réelle, in=diquée (page 6), savoir :

$$\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{2\theta}{1-\theta^2}$$

car on aurait : $\sqrt{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{1+\theta^2}{1-\theta^2}$ et : $dx = \frac{2(1+\theta^2)}{(1-\theta^2)^2}\,d\theta$

Je citerai encore, comme exemple du même procédé, ces deux expressions :

$$\int f(e^{ax})\,dx, \quad \int f(\sin x, \cos x)\,dx$$

la fonction f étant toujours rationnelle, par rapport à la quantité unique, ou aux quantités qui y entrent. En faisant d'abord : $e^{ax} = \theta$, d'où : $x = \frac{1}{a}\log\theta$, et : $dx = \frac{d\theta}{d\theta}$, on aura

$$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int f(\theta)\frac{d\theta}{\theta}$$

ce qui ramène l'intégrale de la fonction transcendante à celle d'une fraction rationnelle. La même conclusion s'obtient dans le second cas en posant : $\operatorname{tang}.\frac{1}{2}x = \theta$, car on en déduit : $\sin x = \frac{2\theta}{1+\theta^2}$, $\cos x = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}$, $dx = \frac{2d\theta}{1+\theta^2}$, et par conséquent :

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx = \int f\left(\frac{2\theta}{1+\theta^2}, \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right)\frac{2d\theta}{1+\theta^2}$$

On aurait pu remarquer encore qu'ayant :

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

l'expression $f(\sin x, \cos x)$ est une fonction rationnelle de l'expo=

=nentielle

imaginaire $e^{x\sqrt{-1}}$, de sorte qu'en posant : $e^{x\sqrt{-1}} = t$, d'où :

$$\sin x = \frac{t^2-1}{2t\sqrt{-1}} \qquad \cos x = \frac{t^2+1}{2t}$$

on aurait transformé $f(\sin x, \cos x)$ en fonction rationnelle de t. Mais ce procédé aurait l'inconvénient d'établir une relation imaginaire entre les variables, et il est préférable de poser, comme on l'a fait : $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = \theta$; on voit d'ailleurs immédiatement que t et θ sont liés par cette relation très-simple :

$$t = \frac{1+\theta\sqrt{-1}}{1-\theta\sqrt{-1}}$$

III. – Après le changement de variables, le procédé analytique le plus important pour la détermination des intégrales consiste dans ce qu'on nomme l'intégration par parties, et voici en quoi il consiste : En désignant par U et V deux fonctions quelconques de x, on tire de l'identité :

$$\frac{d.UV}{dx} = U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx}$$

la formule :

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU$$

qui ramène l'intégrale $\int U\,dV$ à une autre $\int V\,dU$. On trouve ainsi, par exemple :

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= x\log x - \int x\,d\log x \\ &= x\log x - \int dx \\ &= x(\log x - 1) + C.\end{aligned}$$

Mais pour présenter dans son acception la plus générale et la plus féconde le procédé de l'intégration par parties, nous établirons la formule suivante. Posons, pour abréger :

$$\Theta = U\frac{d^nV}{dx^n} - \frac{dU}{dx}\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} + \frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^{n-2}V}{dx^{n-2}} - \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + (-1)^n \frac{d^nU}{dx^n} V.$$

je dis qu'on aura :

$$\int U \frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}}\,dx = \Theta - (-1)^n \int V \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}\,dx.$$

Effectivement, si l'on différentie cette équation, il vient :

$$v\,\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} = \frac{d\Theta}{dx} - (-1)^n V\,\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}$$

d'où : $$\frac{d\Theta}{dx} = v\,\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} + (-1)^n V\,\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}$$

ce qui se vérifie immédiatement, car on a :

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{dv}{dx}\,\frac{d^nV}{dx^n} - \frac{d^2v}{dx^2}\,\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}\,V$$

$$+ v\,\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} - \frac{dv}{dx}\,\frac{d^nV}{dx^n} + \cdots + (-1)^n\frac{d^nv}{dx^n}\,\frac{dV}{dx}$$

égalité où tous les termes se détruisent, sauf le dernier de la première ligne, et le premier de la seconde ligne, ce qui donne bien le résultat annoncé.

Comme application, nous allons considérer l'intégrale $\int e^{ax}F(x)\,dx$ où $F(x)$ sera supposé un polynome entier en x et du degré n. Prenant donc, d'une part, $v = F(x)$ et de l'autre $V = \frac{e^{ax}}{a^{n+1}}$, ce qui donne

$$\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}} = e^{ax}, \qquad \frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}} = 0$$

on en conclut immédiatement :

$$\int e^{ax}F(x)\,dx = \Theta + C$$

et on a d'ailleurs :

$$\Theta = F(x)\,\frac{e^{ax}}{a} - F'(x)\,\frac{e^{ax}}{a^2} + \cdots\cdots + (-1)^n F^{(n)}(x)\,\frac{e^{ax}}{a^{n+1}}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\left[F(x) - \frac{F'(x)}{a} + \cdots\cdots + (-1)^n\,\frac{F^{(n)}(x)}{a^n}\right]$$

Ce résultat conduit à un autre plus général, concernant l'intégrale :

$$\int F\left(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots\ldots e^{Kx}\right)dx$$

dans laquelle on suppose la fonction F entière par rapport à x et aux exponentielles $e^{ax}, e^{bx}, \ldots\ldots e^{Kx}$. Car cette fonction se composant alors d'une somme de produits de puissances entières et positives des quan=tités $x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots\ldots e^{Kx}$, sera de la forme .....

$$F = \sum A\,x^m\left(e^{ax}\right)^n\left(e^{bx}\right)^p\ldots\ldots\left(e^{Kx}\right)^s$$

$$= \sum A\,x^m\,e^{(na+pb+\ldots\ldots sK)x}$$

de sorte que chaque terme s'intègre comme on vient de le voir. Ajoutons que les constantes $a, b, \ldots. K$, peuvent être réelles ou imaginaires, car en supposant par exemple : $a = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on aura : $e^{ax} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)$, ce qui, permettant de mettre la fonction sous le signe $\int$ sous la forme :

$$F = F_0(x) + \sqrt{-1}\, F_1(x)$$

nous placera dans la condition du § I. C'est ainsi, par exemple, que de l'intégrale :

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

on tirera :

$$\int e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x)(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Semblablement, si l'on change la constante a en $a\sqrt{-1}$, dans l'expression obtenue plus haut :

$$\int e^{ax}F(x)\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left[F(x) - \frac{F'(x)}{a} + \ldots\ldots + (-1)^n\frac{F^n(x)}{a^n}\right] + C$$

on en conclura ces deux résultats faciles à obtenir directement, savoir :

$$\int \cos ax\, F(x)\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[F(x) - \frac{F''(x)}{a^2} + \frac{F^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4} - \ldots\ldots\right]$$

$$+ \frac{\cos ax}{a}\left[\frac{F'(x)}{a} - \frac{F'''(x)}{a^3} + \frac{F^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \ldots\ldots\right] + C$$

$$\int \sin ax\, F(x)\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[\frac{F'(x)}{a} - \frac{F'''(x)}{a^3} + \frac{F^{\mathrm{V}}(x)}{a^5} - \ldots\ldots\right]$$

$$- \frac{\cos ax}{a}\left[F(x) - \frac{F''(x)}{a^2} + \frac{F^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4}\ldots\ldots\right] + C$$

IV. — Nous résumerons en peu de mots, avant d'aller plus loin, les résultats qui précèdent. Convenons de représenter par f une fonction rationnelle, et par F une fonction entière relativement aux diverses quantités qui y figurent ; les intégrales obtenues sous forme finie explicite sont les suivantes :

I $\int f(x)\,dx$ II $\int f(x\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ III $\int f(e^{ax})\,dx$

$$\text{IV} \int f(\sin x, \cos x)\,dx \qquad \text{V} \int F(x, e^{ax}, e^{bx}, \dots e^{Kx})\,dx$$

Aux intégrales de fonctions algébriques de la variable, nous joindrons celle-ci :

$$\int f(x^a, x^b, \dots\dots x^K)\,dx$$

dans le cas où $a, b, \dots K$ sont commensurables, car en les supposant exprimés par des fractions de même dénominateur n, il suffira de poser : $x = z^n$ pour être ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle. Aux intégrales des fonctions transcendantes, nous ajouterons enfin :

$$\int F(x, \log x)\,dx \qquad \int F(x, \text{arc}\sin x)\,dx \qquad \int F(x, \text{arc}\cos x)\,dx$$

en faisant en effet tour à tour :

$$\log x = z \qquad \text{arc}\sin x = z \qquad \text{arc}\cos x = z$$

elles deviennent :

$$\int F(e^z, z)\, e^z dz \qquad \int F(\sin z, z) \cos z\, dz \qquad \int F(\cos z, z) \sin z\, dz.$$

et rentrent par conséquent dans la formule V pour les valeurs réelles ou imaginaires des constantes $a, b \dots K$. Tels sont donc jusqu'ici les divers types de formules pour lesquels on possède une méthode sûre d'intégration sous forme finie explicite. Ce n'est pas toutefois à un si petit nombre de résultats que se limite le calcul intégral, et bientôt, nous allons voir le champ s'agrandir, en même temps que nous approfondirons les méthodes de calcul dont nous avons donné seulement une première esquisse. A cet égard, nous commencerons par le cas le plus simple, celui des fractions rationnelles, en nous occupant de l'expression : $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$, que nous allons traiter avec quelques développements.

De l'Intégrale $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{n+1}}$

I. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples donne la relation suivante :

$$\frac{1}{(x^2 - a^2)^{n+1}} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{A_2}{(x-a)^3} + \dots\dots + \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}}$$

$$+\frac{A'}{x+a}+\frac{A'_1}{(x+a)^2}+\frac{A'_2}{(x+a)^3}+\cdots\cdots+\frac{A'_n}{(x+a)^{n+1}}$$

et nous en conclurons immédiatement :

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}=A\log(x-a)-\frac{A_1}{(x-a)^1}-\frac{1}{2}\frac{A_2}{(x-a)^2}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}\frac{A_n}{(x-a)^n}$$
$$+A'\log(x+a)-\frac{A'_1}{(x+a)^1}-\frac{1}{2}\frac{A'_2}{(x+a)^2}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}\frac{A'_n}{(x+a)^n}$$

Ce résultat, où figure une partie transcendante :

$$A\log(x-a)+A'\log(x+a)$$

et une partie rationnelle réductible à la forme : $\frac{F(x)}{(x^2-a^2)^n}$ le numérateur étant un polynôme de degré $2n-1$, puisqu'elle s'évanouit par une valeur infinie de la variable, donne lieu aux remarques suivantes.

Je dis d'abord que l'on a : $A=-A'$, car la fraction : $\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ ne changeant point quand on y remplace x par $-x$, nous pouvons écrire :

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^{n+1}}+\frac{A'}{x+a}+\frac{A'_1}{(x+a)^2}+\cdots\cdots+\frac{A'_n}{(x+a)^{n+1}}$$
$$=-\frac{A}{x+a}+\frac{A_1}{(x+a)^2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{A_n}{(x+a)^{n+1}}-\frac{A'}{x-a}+\frac{A'_1}{(x-a)^2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{A'_n}{(x-a)^{n+1}}$$

et ces deux modes de décomposition en fractions simples devant coïncider, il en résulte les égalités :

$$A=-A',\qquad A_1=A'_1,\ \cdots\cdots\ \text{\&}^{ca}$$

J'observe ensuite que A est donné pour le coefficient de $\frac{1}{z}$, dans le développement suivant les puissances croissantes de cette quantité, de la fraction $\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ lorsqu'on y a fait $x=a+z$. Or, ayant :

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}}=\frac{1}{z^{n+1}}(2a+z)^{-n-1}$$

nous sommes amenés à chercher le coefficient de z^n dans le développement de $(2a+z)^{-n-1}$. Partant à cet effet de la formule du binôme :

$$(\alpha+z)^m=\alpha^m+\frac{m}{1}\alpha^{m-1}z+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\cdots\cdots n}z^n+\cdots\cdots$$

il suffira de supposer dans le terme général :

$$\alpha = 2a \qquad\qquad m = -n-1.$$

pour obtenir la valeur :

$$A = \frac{(-1)^n}{(2a)^{2n+1}}\ \frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots 2n}{1.2\ldots\ldots n}$$

Après avoir avoir ainsi trouvé pour la partie transcendante de l'intégrale, l'expression : $A\left[\log(x-a)-\log(x+a)\right]$ ou plus simplement : $A \log\frac{x-a}{x+a}$, nous allons en déduire immédiatement le polynôme $F(x)$ c'est à dire la partie rationnelle.

II. Reprenant à cet effet l'égalité :

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = A\log\frac{x-a}{x+a} + \frac{F(x)}{(x^2-a^2)^n} + \text{Const}^{e}$$

j'observe qu'on peut supprimer la constante arbitraire en supposant que l'intégrale s'évanouisse pour x infini, car les deux quantités $\log\frac{x-a}{x+a}$ et $\frac{F(x)}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ sont nulles dans cette hypothèse. Cela admis on aura :

$$F(x) = -A(x^2-a^2)^n\log\frac{x-a}{x+a} + (x^2-a^2)^n\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$$

de sorte qu'on est conduit, pour déterminer ce polynôme à chercher le développement du second membre suivant les puissances décroissantes de x. Or, le terme $(x^2-a^2)^n\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ ne pourra donner aucune puissance positive, en ayant :

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2n+2}} + \frac{(n+1)a^2}{x^{2n+4}} + \ldots\ldots$$

nous en conclurons :

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} - \frac{(n+1)a^2}{(2n+3)x^{2n+3}} - \ldots\ldots$$

sans ajouter de constante, afin que l'intégrale d'après ce qui a été supposé s'évanouisse pour x infini, et le produit de cette série, multipliée par $(x^2-a^2)^n$ commencera par un terme en $\frac{1}{x}$. Le polynôme $F(x)$ est donc la partie entière en x de l'expression :

$$-A(x^2-a^2)^n\log\frac{x-a}{x+a} = A(x^2-a^2)^n\log\frac{x+a}{x-a}$$

développée suivant les puissances décroissantes de la variable.

Pour l'obtenir, j'observe que :

$$\log \frac{x+a}{x-a} = \log\left(1+\frac{a}{x}\right) - \log\left(1-\frac{a}{x}\right)$$

d'où résulte d'abord :

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+a}{x-a} = \frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{a^5}{x^5} + \cdots\cdots$$

Ayant ensuite :

$$(x^2-a^2)^n = x^{2n} - n a^2 x^{2n-2} + \frac{n(n+1)}{2} a^4 x^{2n-4} - \cdots$$

il est clair que les termes entiers en x de : $(x^2-a^2)^n \cdot \frac{1}{2}\log\frac{x+a}{x-a}$, seront :

$$x^{2n}\left[\frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\frac{a^{2n-1}}{x^{2n-1}}\right]$$

$$- n a^2 x^{2n-2}\left[\frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \cdots + \frac{1}{2n-3}\frac{a^{2n-3}}{x^{2n-3}}\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} a^4 x^{2n-4}\left[\frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \cdots + \frac{1}{2n-5}\frac{a^{2n-5}}{x^{2n-5}}\right]$$

Mais on a un résultat plus simple, en employant à la place de la série :

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{a^5}{x^5} + \cdots$$

celle-ci qu'on démontre bien facilement en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x, savoir :

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = x\left[\frac{a}{x^2-a^2} - \frac{2}{3}\frac{a^3}{(x^2-a^2)^2} + \frac{2.4}{3.5.}\frac{a^5}{(x^2-a^2)^3} - \frac{2.4.6.}{3.5.7}\frac{a^7}{(x^2-a^2)^4} + \cdots\right.$$

La partie entière qui résulte de la multiplication par $(x^2-a^2)^n$ se présente en effet sous la forme :

$$x\left[a(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^3(x^2-a^2)^{n-2} + \frac{2.4}{3.5}a^5(x^2-a^2)^{n-3} - \cdots\cdots - (-1)^n\frac{2.4\ldots.2n-2}{3.5\ldots.2n-1}a^{2n-1}\right]$$

et il vient en définitive d'après la valeur : $A = \frac{(-1)^n}{(2a)^{2n+1}}\frac{(n+1)(n+2)\ldots.2n}{1.2\ldots..n}$

$$F(x) = \frac{(-1)^n}{(2a)^{2n}}\frac{n+1.n+2\ldots 2n}{1.2\ldots..n}x\left[(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^2(x^2-a^2)^{n-2} + \frac{2.4}{3.5}a^4(x^2-a^2)^{n-3} - \cdots - (-1)^n\frac{2.4\ldots.2n-2}{3.5\ldots.2n-1}a^{2n-2}\right]$$

La décomposition en fractions simples n'a donc servi qu'à donner la forme analytique du résultat, et cette forme une fois connue, on a pu en conclure pour les quantités qui y figurent, une détermination simple et facile. C'est un premier exemple d'une méthode dont on verra bientôt d'autres applications.

III. — L'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ peut encore s'obtenir au moyen d'un changement de variables en posant :

$$\frac{x-a}{x+a} = y$$

Cette substitution donne en effet :

$$x = a\,\frac{1+y}{1-y}\ , \qquad dx = \frac{2a\,dy}{(1-y)^2}$$

d'où par conséquent :

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{(2a)^{2n+1}} \int \frac{(y-1)^{2n}\,dy}{y^{n+1}}$$

et l'intégration relative à la nouvelle variable s'effectue aisément comme il suit. Soit en désignant, pour abréger les coefficients numériques, par a_1, a_2, a_3, &c^{ca}...

$$(y-1)^{2n} = y^{2n} + a_1 y^{2n-1} + a_2 y^{2n-2} + \ldots\ldots + a_1 y + 1$$

nous écrirons en rapprochant les termes équidistants des extrêmes, et isolant le terme du milieu y^n.

$$(y-1)^{2n} = (y^{2n}+1) + a_1(y^{2n-1}+y) + a_2(y^{2n-2}+y^3) + \ldots\ldots + a y^n$$

de sorte qu'il viendra :

$$\frac{(y-1)^{2n}}{y^{n+1}} = \left(y^{n-1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) + a_1\left(y^{n-2} + \frac{1}{y^n}\right) + a_2\left(y^{n-3} + \frac{1}{y^{n-1}}\right) + \ldots + \frac{a_n}{y}$$

et par suite :

$$\int \frac{(y-1)^{2n}dy}{y^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(y^n - \frac{1}{y^n}\right) + \frac{a_1}{n-1}\left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n-1}}\right) + \frac{a_2}{n-2}\left(y^{n-2} - \frac{1}{y^{n-2}}\right) + \ldots + a_n \log y$$

Cette formule doit coïncider en y remplaçant y par la valeur $\frac{x-a}{x+a}$ avec celle que donne la première méthode, et en effet, la partie logarithmique est la même, car le coefficient moyen a_n de la puissance $(y-1)^{2n}$ a précisément pour valeur : $(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots\ldots n}$. Mais l'égalité des parties rationnelles paraît difficile à reconnaître; sans m'y arrêter, j'arrive à un troisième procédé entièrement différent des précédents, et qui servira de transition pour arriver aux méthodes propres essentiellement à l'intégration des fonctions algébriques.

Soit: $u = (x^2-a^2)^m$ l'exposant m étant quelconque, on aura, en différentiant deux fois de suite:

$$\frac{1}{2m}\,\frac{du}{dx} = x\,(x^2-a^2)^{m-1}$$

$$\frac{1}{2m}\,\frac{d^2u}{dx^2} = (x^2-a^2)^{m-1} + (2m-2)\,x^2(x^2-a^2)^{m-2}$$

Or, on peut écrire:

$$\frac{1}{2m}\,\frac{d^2u}{dx^2} = (x^2-a^2)^{m-1} + (2m-2)(x^2-a^2+a^2)(x^2-a^2)^{m-2}$$

$$= (2m-1)(x^2-a^2)^{m-1} + a^2(2m-2)(x^2-a^2)^{m-2}$$

de sorte qu'il vient, en multipliant les deux membres par dx et intégrant:

$$\frac{1}{2m}\,\frac{du}{dx} = x(x^2-a^2)^{m-1} = (2m-1)\int(x^2-a^2)^{m-1}dx + a^2(2m-2)\int(x^2-a^2)^{m-2}dx$$

Faisons maintenant: $m = 1-n$, et on obtiendra:

$$\frac{x}{(x^2-a^2)^n} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - 2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$$

ou bien:

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{x}{(x^2-a^2)^n}$$

et par conséquent, pour $n = 1, 2, 3,$ &ca ...

$$2a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = -\int\frac{dx}{(x^2-a^2)} - \frac{x}{x^2-a^2}$$

$$4a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^3} = -3\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$6a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^4} = -5\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^3} - \frac{x}{(x^2-a^2)^3}$$

. . . .

Ces relations successives conduisent évidemment à exprimer l'intégrale relative à un exposant quelconque $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$, au moyen de celle-ci $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$, et d'une fonction rationnelle de x, et un calcul facile donne pour résultat:

$$a^{2n}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = (-1)^n\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2}+f(x)\right]$$

en posant :

$$f(x)=x\left[\frac{1}{x^2-a^2}-\frac{2}{3}\frac{a^2}{(x^2-a^2)^2}+\frac{2.4}{3.5}\frac{a^4}{(x^2-a^2)^3}-\ldots\ldots-(-1)^n\frac{2.4\ldots 2n-2}{3.5\ldots 2n-1}\frac{a^{2n-2}}{(x^2-a^2)^n}\right]$$

Et si on veut le démontrer, on observera qu'en changeant n et $n-1$, il vient :

$$a^{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}=(-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots 2n-3}{2.4\ldots 2n-2}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2}+f_{n-1}(x)\right]$$

de sorte qu'en substituant dans la relation générale :

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}=-(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n}-\frac{x}{(x^2-a^2)^n}$$

nous obtenons la condition :

$$f_n=f_{n-1}-(-1)^n\frac{2.4\ldots.2n-2}{3.5\ldots 2n-1}\frac{a^{2n-2}}{(x^2-a^2)^n}$$

qui est satisfaite d'elle-même.

La fonction $f_n(x)$ donne pour la partie rationnelle de l'intégrale proposée l'expression :

$$\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\frac{1.3.5..2n-1}{2.4.6\ldots.2n}\frac{x}{(x^2a^2)^n}\left[(x^2-a^2)^{n-1}-\frac{2}{3}a^2(x^2-a^2)^{n-2}+\frac{2.4}{3.5}a^4(x^2-a^2)^{n-3}-\ldots\right]$$

que nous ferons aisément coïncider avec celle qui a été obtenue précédemment sous la forme : $\frac{F(x)}{(x^2-a^2)^n}$, car on a évidemment :

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{2^{2n}1.2\ldots\ n}=\frac{1.2.3\ldots.2n}{(2^n1.2\ldots n)^2}=\frac{1.2.3\ldots\ldots 2n}{(2.4.6\ldots\ldots 2n)^2}$$

et si l'on supprime au numérateur et au dénominateur le produit des facteurs $2.4.6\ldots 2n$ nous trouvons précisément la quantité : $\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n}$. Quant à la partie transcendante, l'identité $\frac{2a}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$, donne sur le champ : $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$.

IV. — Les expressions diverses que nous venons d'obtenir pour l'intégrale $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ subsistent quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de la constante a. Mais le cas où l'on suppose $a=\alpha\sqrt{-1}$ mérite d'être remarqué, comme exigeant la réduction à une quantité réelle de l'expression $\frac{1}{2\alpha\sqrt{-1}}\log\frac{x-\alpha\sqrt{-1}}{x+\alpha\sqrt{-1}}$, qui se trouve seule alors sous forme

imaginaire. Or, les formules relatives aux logarithmes de quantités ima=
=ginaires donnent, en supposant x et α réels :

$$\log(x-\alpha\sqrt{-1}) = \log\sqrt{x^2+\alpha^2} + (\varphi + 2K\pi)\sqrt{-1}$$

$$\log(x+\alpha\sqrt{-1}) = \log\sqrt{x^2+\alpha^2} + (-\varphi + 2K'\pi)\sqrt{-1}$$

l'angle φ étant l'un de ceux qui ont pour tangente : $\frac{x}{\alpha}$, et on en conclut par conséquent :

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{-1}}\log\frac{x-\alpha\sqrt{-1}}{x+\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha} + (K-K')\pi$$

Le même résultat aurait pu aussi se tirer de l'intégrale $\int\frac{dx}{x^2+\alpha^2}$; en faisant en effet $x = \alpha z$, on obtient :

$$\int\frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\int\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}$$

et nous allons l'employer à l'évaluation d'une intégrale définie importante. Concevons que l'expression $\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\alpha}$ désignant le plus petit arc ayant pour tangente $\frac{x}{\alpha}$, on fasse croître la variable depuis zéro jusqu'à l'infini. Cet arc partira de zéro et atteindra la limite $\frac{\pi}{2}$, si α est positif, de sorte qu'on aura :

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

La limite serait évidemment $-\frac{\pi}{2}$ dans le cas de α négatif et alors on devrait prendre :

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+\alpha^2} = -\frac{\pi}{2\alpha}$$

de manière que dans les deux cas ~~les~~ valeur de l'intégrale, dont tous les éléments sont positifs, soit elle-même aussi positive.

Ce résultat établi, la relation obtenue plus haut, savoir :

$$a^{2n}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = (-1)^n\frac{1.3.5\ldots.2n-1}{2.4.6\ldots.2n}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2} + f_n(x)\right]$$

nous en donne un autre plus général. En faisant en effet : $a = \alpha\sqrt{-1}$, et remarquant que la fonction $f_n(x)$ s'évanouit en supposant la variable nulle et infinie, on aura :

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}} = \frac{1}{\alpha^{2n+1}}\,\frac{1.3.5\ldots\ldots2n-1}{2.4.6\ldots\ldots2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

V. – La détermination du polynome $F(x)$ dans l'équation :

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = A \log \frac{x-a}{x+a} + \frac{F(x)}{(x^2-a^2)^n}$$

a été obtenue par cette remarque très-simple qu'en l'écrivant ainsi :

$$F(x) = A(x^2-a^2)^n \log \frac{x+a}{x+a} + (x^2-a^2)^n \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$$

le développement suivant les puissances descendantes de la variable de l'expression : $(x^2-a^2)^n \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ est de la forme $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \dots\dots$ sans contenir aucune partie entière en x. Or, il résulte encore de cette remarque une conséquence importante que voici. Faisons, pour plus de simplicité $a = 1$, et prenons les dérivées d'ordre n des deux membres dans la relation

$$F(x) = A(x^2-1)^n \log \frac{x+1}{x-1} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \dots\dots$$

A l'égard du produit $(x^2-1)^n \log \frac{x+1}{x-1}$, il faudra, en prenant $U = (x^2-1)^n$ $\quad V = \log \frac{x+1}{x-1}$, appliquer la formule :

$$\frac{d^n UV}{dx^n} = \frac{d^n U}{dx^n} V + \frac{n}{1} \frac{d^{n-1} U}{dx^{n-1}} \frac{dV}{dx} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^{n-2} U}{dx^{n-2}} \frac{d^2 V}{dx^2} + \dots$$

dont le premier terme : $\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \log \frac{x+1}{x-1}$ sera seul à dépendre du logarithme, les autres étant tous rationnels et même entiers. On a effectivement

$$\frac{d^\alpha \log \frac{x+1}{x-1}}{dx^\alpha} = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left\{ \log(x+1) - \log(x-1) \right\}$$
$$= (-1)^{\alpha-1} 1.2 \dots \alpha-1 \left\{ \frac{1}{(x+1)^\alpha} - \frac{1}{(x-1)^\alpha} \right\}$$

et comme $\frac{d^{n-\alpha}(x^2-1)^n}{dx^{n-\alpha}}$ contient en facteur $(x^2-1)^\alpha$, le produit est entier en x. Réunissant ces termes au polynôme $\frac{d^n F(x)}{dx^n}$ en les faisant passer dans le premier membre, que je désignerai alors par $F_n(x)$ nous parviendrons à cette relation :

$$F_n(x) = A \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \log \frac{x+1}{x-1} + 1.2 \dots n (-1)^n \left[\frac{\alpha}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)\beta}{x^{n+2}} + \dots\dots \right]$$

à laquelle je m'arrêterai un moment. Elle montre qu'en multipliant par le polynôme de n^e degré $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ la série infinie :

$$\log\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{x^5} + \cdots\cdots\right)$$

le produit manque des puissances $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots \frac{1}{x^n}$, et il en résulte qu'en divisant $F_n(x)$ par $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, le quotient ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable, coïncide avec cette série aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{2n+1}}$. Cet exemple de l'approximation d'une transcendante par une fonction rationnelle, qui est intéressant en lui-même, recevra plus tard une application importante. Il met en évidence une propriété entièrement caractéristique des expressions $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ auxquelles on donne le nom de polynômes de Legendre et qu'on désigne par X_n en posant :

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\;\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

Ces fonctions, introduites en analyse par l'illustre géomètre à l'occasion de ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes, sont d'une grande importance, et donnent lieu à plusieurs théorèmes remarquables, dont l'un nous servira de nouvelle application du procédé de l'intégration par partie, fondé sur la formule :

$$\int U\,\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}}\,dx = \Theta - (-1)^n \int V\,\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}\,dx$$

où

$$\Theta = U\,\frac{d^nV}{dx^n} - \frac{dU}{dx}\,\frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} + \frac{d^2U}{dx^2}\,\frac{d^{n-2}V}{dx^{n-2}} - \cdots$$

Soit en effet $V = (x^2-1)^{n+1}$, en supposant que U soit un polynôme arbitraire de degré n, l'intégrale du second membre disparaîtra, et nous obtiendrons d'abord :

$$\int U\,\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = \Theta$$

J'observe ensuite que les dérivées successives de $(x^2-1)^{n+1}$ jusqu'à celle d'ordre n, contenant en facteur x^2-1, Θ s'évanouit pour $x = 1$ et $x = -1$, et il en résulte que l'intégrale définie :

$$\int_{-1}^{+1} v \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}$$

différence des valeurs de Θ pour $x = 1$ et $x = -1$ est nulle.

Le théorème exprimé par l'équation

$$\int_{-1}^{+1} v X_{n+1}\, dx = 0$$

appartient exclusivement aux polynômes de Legendre, car en désignant un moment par $\varphi(x)$ une autre fonction entière de degré $n+1$, telle qu'on ait aussi :

$$\int_{-1}^{+1} v\, \varphi(x)\, dx = 0$$

on en conclurait, quelle que soit la constante K :

$$\int_{-1}^{+1} v\, \varphi(x) - K \int_{-1}^{+1} v X_{n+1}\, dx = 0$$

ou bien :

$$\int_{-1}^{+1} v \left[\varphi(x) - K X_{n+1}\right] dx = 0$$

Or, en prenant K de manière que $\varphi(x) - K X_{n+1}$ s'abaisse au n^e degré, et posant alors

$$v = \varphi(x) - K X_{n+1}$$

nous trouverons la condition suivante :

$$\int_{-1}^{+1} v^2\, dx = 0$$

Elle exige évidemment que v s'évanouisse identiquement, car autrement l'intégrale ne serait jamais nulle, tous les éléments étant positifs, et il en résulte :

$$\varphi(x) = K X_{n+1}$$

De l'intégrale.

De l'intégrale $\int f(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$.

La réduction à une fonction rationnelle par une substitution convenable, de l'expression $f(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})$ composée rationnellement avec la variable et la racine carrée d'un trinôme du second degré, donne, pour obtenir l'intégrale proposée, une méthode déjà indiquée dans les préliminaires. Mais elle peut être traitée à un autre point de vue, si on l'envisage comme appartenant à ces expressions générales :

$$\int f(x, \sqrt{X})\,dx$$

où X est un polynôme de degré quelconque. C'est ce que nous allons faire afin d'exposer dans le cas le plus simple des principes importants que nous étendrons ensuite, par une généralisation facile, aux intégrales elliptiques et abéliennes. En rappelant d'abord ce résultat obtenu dans une des premières leçons (page 13), que la partie irrationnelle de l'expression $f(x, \sqrt{X})$ est une somme de termes de ces deux formes, savoir :

$$\frac{x^n}{\sqrt{X}}, \quad \frac{1}{(x-a)^n\sqrt{X}}$$

on se trouve immédiatement amené aux intégrales

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{X}}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{X}}$$

où n est un nombre entier quelconque, et nous commencerons par établir qu'en supposant :

$$X = Ax^2 + 2Bx + C$$

l'une et l'autre se ramènent au seul cas de $n = 1$.

I. — Différentions l'expression : $x^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, nous obtenons pour résultat :

$$d\left(x^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right) = \left[n x^{n-1}(Ax^2+2Bx+C) + x^n(Ax+B)\right]\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

d'où l'on tire en intégrant :

$$x^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = (n+1)A\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + (2n+1)B\int\frac{x^n dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + nC\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

Or, en faisant $n=0$, l'intégrale $\int\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ disparaît, et nous obtenons :

$$A\int\frac{x\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-B\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}+\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

Si nous supposons ensuite successivement $n=1,2,3$, etc... les relations

$$x\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=2A\int\frac{x^2dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}+3B\int\frac{x\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}+C\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$x^2\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=3A\int\frac{x^3dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}+5B\int\frac{x^2dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}+2C\int\frac{x\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

. . . .

conduiront de proche en proche aux valeurs des intégrales $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, et en général $\int\frac{x^ndx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ exprimées linéairement par la première $\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, et une partie algébrique de la forme $F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, $F(x)$ étant un polynôme entier de degré $n-1$. Considérons en second lieu l'identité :

$$d\left[\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^n}\right]=\left[-n\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^{n+1}}+\frac{Ax+B}{(x-a)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}\right]dx$$

dont le second membre devra être transformé comme il suit. Après l'avoir écrit de cette manière :

$$\frac{-n(Ax^2+2Bx+C)+(x-a)(Ax+B)}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

nous ordonnerons le numérateur par rapport à $x-a$, en employant, si on le désigne par $\varphi(x)$ la formule :

$$\varphi(x)=\varphi(a)+(x-a)\varphi'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2\varphi''(a)$$

Or, on trouve ainsi :

$$\varphi(x)=-n(Aa^2+2Ba+C)-(2n-1)(Aa+B)(x-a)-(n-1)A(x-a)^2$$

d'où la relation suivante :

$$\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^n}=-n(Aa^2+2Ba+C)\int\frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$-(2n-1)(A\alpha+B)\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$-(n-1)A\int\frac{dx}{(x-a)^{n-1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

dont voici les conséquences. En faisant d'abord $n=1$, l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, qui tout à l'heure a figuré seule dans le résultat, disparaît, et nous obtenons :

$$\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-\alpha}=-(A\alpha^2+2B\alpha+C)\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$-(A\alpha+B)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

Ici je remarquerai le cas particulier où l'on aurait : $A\alpha^2+2B\alpha+C=0$; cette condition donnant en effet :

$$(A\alpha+B)\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-\alpha}$$

D'ailleurs, la relation précédente devient alors :

$$\frac{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{(x-a)^n}=-(2n-1)(A\alpha+B)\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$-(n-1)A\int\frac{dx}{(x-a)^{n-1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

on en conclura donc de proche en proche, en faisant $n=2,3,4,$ &c., une valeur purement algébrique pour l'intégrale (1) $\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$. En revenant au cas général, il est clair que nous obtiendrons de proche en proche les expressions sous forme linéaire de :

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},\ \int\frac{dx}{(x-\alpha)^3\sqrt{Ax^2+2Bx+C}},\ \ldots\ \int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

par la seule intégrale : $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, et une partie algébrique de la

---

(1) Cette valeur s'obtient aisément par la substitution $x=\frac{at^2+A\alpha+B}{t^2-A}$, qui ramène l'intégrale à celle d'un polynôme entier en t.

forme $\dfrac{F(x)}{(x-\alpha)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, $F(x)$ étant un polynome entier du degré $n-1$

Nous pouvons maintenant énoncer la conclusion suivante :
Soit, en faisant abstraction d'une fonction rationnelle :

$$f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}) = \sum \frac{g x^n}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} + \sum \frac{h}{(x-a)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

les signes $\sum$ se rapportent à diverses valeurs du nombre entier n et des constantes a, g, h, l'intégrale :

$$\int f(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$$

comprendra un terme algébrique $\theta(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, $\theta(x)$ étant une fraction rationnelle dont la détermination ne contient que les facteurs $x-a$:

et une partie transcendante où entrent sous forme linéaire les diverses intégrales $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ et $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$. Or voici comment on obtient leurs valeurs.

II. — La transformation du trinome homogène du second degré

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

par la substitution :

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

donne l'identité bien connue :

$$\left[A\alpha\beta + B(\alpha\delta+\beta\gamma) + C\gamma\delta\right]^2 - (A\alpha^2+2B\alpha\gamma+C\gamma^2)(A\beta^2+2B\beta\delta+C\delta) = (\alpha\delta-\beta\gamma)^2(B^2-AC)$$

Comme cas particulier, j'en tire la suivante, savoir :

$$\left[A\,ax + B(a+x) + C\right]^2 - (Aa^2+2Ba+C)(Ax^2+2Bx+C) = (x-a)^2(B^2-AC)$$

elle montre qu'en posant :

$$A\,ax + B(a+x) + C - \sqrt{Aa^2+2Ba+C}\,.\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = (x-a)\,t$$

on aura :

$$A\,ax + B(a+x) + C + \sqrt{Aa^2+2Ba+C}\,.\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = (x-a)\frac{B^2-AC}{t}$$

et par suite, en ajoutant et retranchant membre à membre ;

$$2\left[Aax+B(a+x)+C\right]=(x-a)\left(t+\frac{B^2-AC}{t}\right)$$
$$2\sqrt{Aa^2+2Ba+C}\,.\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=(x-a)\left(-t+\frac{B^2-AC}{t}\right)$$

de sorte que la variable x et le radical $\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ pourront s'exprimer en fonction rationnelle de t. Or, en écrivant :

$$\frac{Aax+B(a+x)+C}{x-a}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{B^2-AC}{t}\right)$$

et différentiant, il vient, après avoir changé les signes :

$$\frac{Aa^2+2Ba+C}{(x-a)^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{B^2-AC}{t^2}\right)dt.$$
$$=\frac{1}{2}\left(-t+\frac{B^2-AC}{t}\right)\frac{dt}{t}\;.$$

et si l'on divise membre à membre avec l'équation :

$$2\sqrt{Aa^2+2Ba+C}\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}=(x-a)\left(-t+\frac{B^2-AC}{t}\right)$$

on trouve sur le champ :

$$\frac{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}\,dx=\frac{dt}{t}$$

et par conséquent le résultat cherché, savoir :

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}\;\log t$$
$$=\frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}\;\log\frac{Aax+B(a+x)+C-\sqrt{Aa^2+2Ba+C}\,.\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}{x-a}$$

On en déduit ensuite, en multipliant par a et supposant a infini :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\frac{1}{\sqrt{A}}\;\log\frac{Ax+B-\sqrt{A}\,\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{-1}$$

c'est à dire sauf une constante :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=-\frac{1}{\sqrt{A}}\;\log\left(Ax+B-\sqrt{A}\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)$$

ou encore, après avoir multiplié et divisé par $Ax+B+\sqrt{A}\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, la quantité placée sous le signe logarithmique :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(Ax+B+\sqrt{A}\,\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)$$

Nous avons donc obtenu sous forme finie explicite, les deux éléments analytiques non algébriques auxquels a été ramenée l'intégrale

$\int f(x, \sqrt{Ax^2+2Bx+C})\,dx$. Remarquons seulement que la substitution employée ne sera réelle qu'autant qu'on aura : $Aa^2+2Ba+C > 0$, toutefois la condition contraire : $Aa^2+2Ba+C < 0$ ne fait point exception, car la dérivée du logarithme reproduit identiquement : $\frac{1}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ et l'on est dès-lors autorisé comme dans le cas de $\int \frac{dx}{x-a}$, à conserver l'expression de l'intégrale quel que soit a (Préliminaires page 175).

III. – Un second point important dans l'étude de l'intégrale qui nous occupe est de déterminer les cas où les parties transcendantes disparaissent de sorte que sa valeur soit algébrique. Je considérerai d'abord à cet égard l'intégrale : $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$; elle donne la relation suivante :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = A_1 \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + \frac{\theta(x)}{(x-a)^n}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

où A est une constante, $\theta(x)$ un polynôme entier, et sera par conséquent simplement algébrique quand on aura $A = 0$. Il importe donc d'obtenir l'expression de cette constante et on y parvient comme il suit. Soit $x = a + z$, et développons les deux membres suivant les puissances croissantes de z, en posant pour abréger :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{Aa^2+2Ba+C}}$$

nous ferons dans ce but, d'après la série de Taylor :

$$\frac{1}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \omega + \frac{z}{1}\frac{d\omega}{da} + \frac{z^2}{1.2}\frac{d^2\omega}{da^2} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n\omega}{da^n} + \cdots\cdots$$

et il en résultera pour le premier membre, la quantité :

$$\int \frac{dz}{z^{n+1}}\left(\omega + \frac{z}{1}\frac{d\omega}{da} + \frac{z^2}{1.2}\frac{d^2\omega}{da^2} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n\omega}{da^n} + \cdots\cdots\right)$$

où l'intégration donne une série infinie dont tous les termes sont algébriques, un seul excepté, à savoir :

$$\int \frac{dz}{z^{n+1}}\cdot\frac{z^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n\omega}{da^n} = \frac{\log z}{1.2\ldots n}\frac{d^n\omega}{da^n}$$

Or, dans le second membre, l'intégrale : $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$ donne aussi la quantité analogue $\omega \log z$, et comme aucun terme transcendant ne peut provenir du développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^n}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$, on aura :

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\quad\frac{d^n\omega}{da^n} = A\omega.$$

L'équation : $\frac{d^n\omega}{da^n} = \frac{d^n \frac{1}{\sqrt{Aa^2+Ba+C}}}{da^n} = 0$ détermine donc les valeurs de la constante a, qui rendent algébrique l'intégrale unique $\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, et à l'égard de la somme :

$$G\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{Ax^2+2Ba+C}}$$

$$+\, G_1 \int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\, G_n \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

on aura la condition :

$$\frac{G}{1.2..n}\quad\frac{d^n\omega}{da^n} + \frac{G_1}{1.2..n-1}\quad\frac{d^{n-1}\omega}{da^{n-1}} + \ldots\ldots + G_n\omega = 0$$

Passant maintenant aux intégrales $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, je considère immédiatement l'expression générale :

$$g\int \frac{x^n dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + g_1\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + \ldots + g_n\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \int \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

où $\varphi(x)$ représentera un polynome entier quelconque du degré n, et qui donne la relation suivante :

$$\int \frac{\varphi(x)\, dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \mathcal{E}\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} + F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

où $\mathcal{E}$ est une constante et $F(x)$ un polynome de degré $n-1$. La condition cherchée étant donc $\mathcal{E} = 0$, cette quantité se calculera comme il suit : Nous développerons les deux membres suivant les puissances descendantes de la variable, et considérant le premier d'abord, nous ferons dans ce but :

$$\frac{1}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^2} + \frac{\alpha''}{x^3} + \ldots\ldots\ldots$$

puis nous ordonnerons par rapport aux puissances décroissantes de x le produit :

$$\varphi(x)\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha'}{x^2}+\frac{\alpha''}{x^3}+\cdots\cdots\right)$$

qui se composera ainsi d'une partie entière et d'une série infinie :

$$\frac{a}{x}+\frac{a'}{x^2}+\frac{a''}{x^3}+\cdots\cdots$$

On aura donc pour l'intégrale : $\displaystyle\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$, un développement dont tous les termes seront algébriques, sauf un seul $\displaystyle\int\frac{a\,dx}{x}=a\log x$. Or l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\int dx\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha'}{x^2}+\frac{\alpha''}{x^3}+\cdots\cdots\right)$$

donnera aussi dans le second membre, un terme de même nature, $\alpha\log x$, tandis que la partie $F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$ conduira évidemment à une série entièrement algébrique. On aura ainsi l'égalité $a=\alpha\mathcal{E}$ d'où $\mathcal{E}=\dfrac{a}{\alpha}$, a étant, d'après ce qu'on a vu, le coefficient du terme en $\dfrac{1}{x}$ dans la quantité : $\displaystyle\frac{\varphi(x)}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\varphi(x)\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha'}{x^2}+\frac{\alpha''}{x^3}+\cdots\cdots\right)$

* — Remarquons enfin qu'en désignant pour un moment par $\Phi(x)$ l'intégrale de la partie entière de ce produit, si l'on forme de nouveau la partie entière de l'expression

$$\Phi(x)\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha'}{x^2}+\frac{\alpha''}{x^3}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

on obtiendra ainsi le polynome $F(x)$ qui figure dans la relation :

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}=\mathcal{E}\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}+F(x)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

IV. — Le cas où le trinome $Ax^2+2Bx+C$ se réduit à la forme $1-x^2$ mérite une attention particulière, et nous allons nous y arrêter un moment. Considérant d'abord la détermination de $\mathcal{E}$ dans la relation.

$$\int\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\mathcal{E}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+F(x)\sqrt{1-x^2}$$

j'observe qu'on aura :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{1.4}\,\frac{1}{x^5}+\cdots\cdots+\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\,\frac{1}{x^{2n+1}}+\cdots\cdots\right)$$

et par conséquent $\alpha = \frac{1}{\sqrt{-1}}$; il en résulte ensuite :

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\;\varphi(x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{x^5}+\cdots\cdots+\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{1}{x^{2n+1}}+\cdots\right)$$

ainsi la constante désignée par a contient le même facteur $\frac{1}{\sqrt{-1}}$; la formule $\varepsilon = \frac{a}{\alpha}$ montre donc que ε est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le produit :

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{x^5}+\cdots\cdots\right)$$

Mais voici une nouvelle expression de cette constante ; prenant l'intégrale du premier membre entre les limites $x=-1$, $x=+1$, la partie algébrique disparaîtra à cause du facteur $\sqrt{1-x^2}$, et nous obtiendrons :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale proposée soit simplement algébrique, c'est qu'elle s'évanouisse étant prise entre les limites -1 et $+1$. Je donnerai un exemple de l'emploi de cette condition en supposant que $\varphi(x)$ ne contienne que des puissances impaires de la variable, de sorte que si l'on fait un moment :

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

on ait : $$f(-x) = -f(x)$$

Cela étant, faisons : $x = -x'$ dans l'intégrale $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$, on aura :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = +\int_{+1}^{-1} f(x')\,dx'$$

ou en intervertissant les limites et par conséquent, changeant le signe :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \cancel{-\int_{-1}^{+1} f(-x')}\,dx' = -\int_{-1}^{+1} f(x')\,dx'$$

Or, en remplaçant x' par x, nous obtenons :

$$2\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 0$$

de sorte que l'intégrale sous la condition admise est algébrique.

※ V. Cette conclusion serait encore donnée par l'équation :

$$(n+1)\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = n\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} - x^n\sqrt{1-x^2}$$

à laquelle conduit la relation générale du § II, car en y faisant successivement : $n = 0, 2, 4, 6 \ldots\ldots$ elle donne :

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{5}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2}$$

. . . .

et on en tire par des substitutions successives cette valeur :

$$\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots 2n+1}\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots+\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}x^{2n}\right]\sqrt{1-x^2}$$

de sorte qu'en attribuant diverses valeurs à l'exposant impair, multipliant par des constantes, et ajoutant, la somme aura une valeur algébrique. On remarquera dans cette relation que le coefficient de $\sqrt{1-x^2}$ est formé des $2n+1$ premiers termes du développement déjà employé de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, et j'ajoute encore qu'on obtient, en faisant $x=0$, $x=1$, cette intégrale définie :

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{3.5.7\ldots 2n+1}$$

Si nous posons, en second lieu, dans la même relation, $n=1,3,5\ldots$ nous serons conduits aux égalités :

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{4}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{4}x^3\sqrt{1-x^2}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{6}x^5\sqrt{1-x^2}$$

. . . .

et un calcul tout semblable donnera pour résultat :

$$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \varepsilon \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$- \varepsilon \left[x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \ldots\ldots + \frac{2.4\ldots\ldots 2n-2}{3.5\ldots\ldots 2n-1}x^{2n-1} \right] \sqrt{1-x^2}$$

Ici, le polynôme facteur de $\sqrt{1-x^2}$ représente les $2n$ premiers termes du développement suivant les puissances croissantes de x, de l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Effectivement, si l'on prend les intégrales depuis $x=0$ dans la relation considérée, on peut écrire sans constante arbitraire :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \ldots\ldots + \frac{2.4\ldots\ldots 2n-2}{3.5\ldots\ldots 2n-1}x^{2n-1}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Or, ayant :

$$\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} = x^{2n}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots\ldots\right)$$

nous en conclurons :

$$\int_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2(2n+3)} + \ldots\ldots$$

et par conséquent :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots\ldots\right)\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2(2n+3)} + \ldots\ldots\right]$$
$$= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(2n+2)\,x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} + \ldots\ldots$$

Ainsi le polynôme $\quad x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \ldots\ldots + \frac{2.4\ldots\ldots 2n-2}{3.5\ldots\ldots 2n-1}x^{2n-1}$

représente bien aux termes près de l'ordre $2n+1$, l'expression :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} := \frac{\text{arc sin. } x}{\sqrt{1-x^2}}$$

VI. – Nous allons maintenant nous occuper de ces deux intégrales :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{1-x^2}}$$

qui servent à composer la partie transcendante dans la valeur générale de $\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$. La première, qu'on sait déjà être la fonction arc sin x, s'offre d'après l'équation :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)$$

sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(-x+\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$$

Or, en appliquant la formule :

$$\log\left(a+b\sqrt{-1}\right) = \log\sqrt{a^2+b^2} + (\varphi+2K\pi)\sqrt{-1}$$

on posera : $a = -x \qquad b = \sqrt{1-x^2}$

d'où : $a^2 + b^2 = 1$

et par suite : $\cos\varphi = -x, \qquad \sin\varphi = \sqrt{1-x^2}$

Nous en conclurons :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \text{arc sin } x .$$

et par conséquent :

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(-x+\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\right) = \text{arc sin } x + \text{const.}^e$$

ce qui ramène bien à la première valeur. En l'adoptant désormais, voici sur la relation qui en résulte :

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } b - \text{arc sin } a$$

une remarque importante. La valeur unique et entièrement déterminée du premier membre est exprimée dans le second par des arc sinus, susceptibles chacun d'une infinité de déterminations différentes, et à l'égard des intégrales de fonctions rationnelles, l'équation :

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } b - \text{arc tang } a$$

présenterait une difficulté de même nature. Elle se lève comme il suit. Soit, pour fixer les idées, l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, prise à partir de zéro, le radical $\sqrt{1-x^2}$ étant supposé positif. Cette quantité est une fonction continue de x, qui s'évanouit avec la variable; or, des déterminations multiples de arc sin x, une seule, à savoir le plus petit des arcs positifs ayant x pour sinus, remplit les mêmes conditions. Si l'on convient donc de la représenter exclusivement à tous les autres par la notation arc sin x, on aura sans aucune ambiguïté :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x.$$

On tire de là :

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \text{arc sin } a, \quad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } b$$

et en retranchant membre à membre :

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } b - \text{arc sin } a$$

En particulier, on obtiendra :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

et la relation employée au § IV, savoir : $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathcal{E} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, devenant ainsi : $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x}} = \mathcal{E}\pi$, nous donne l'expression d'une intégrale définie très-générale, au moyen du nombre π.

$$1 - ax - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2} = (x-a)\,t$$

$$1 - ax + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2} = (x-a)\frac{1}{t}.$$

ce qui donnera :

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\;\frac{dt}{t}$$

Cela posé, nous admettrons qu'on ait en valeur absolue $a > 1$, et écrivant pour plus de clarté :

$$\sqrt{1-a^2} = i\sqrt{a^2-1}$$

il est clair que la variable t sera imaginaire. Soit donc :

$$t = \cos\varphi - i \sin\varphi .$$

l'angle φ alors sera réel et déterminé par ces deux relations qui concordent, savoir :

$$1 - ax = (x-a)\cos\varphi$$

$$\sqrt{a^2-1}\ \sqrt{1-x^2} = (x-a)\sin\varphi$$

on aura d'ailleurs : $\frac{dt}{t} = -i\,d\varphi$ et par conséquent :

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\ \frac{dt}{t} = -\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ou plutôt : $$\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Cela posé, soit $a > 0$, $d\varphi$ sera positif, attendu que x est moindre que l'unité, et l'angle φ ira en croissant quand x variera de -1 à $+1$. Or, on trouve pour $x = -1$.

$$\cos\varphi = -1 \qquad \sin\varphi = 0$$

Donc : $$\varphi = (2K+1)\pi$$

et si l'on fait $x = 1$, il vient :

$$\cos\varphi = 1 \qquad\qquad \sin\varphi = 0$$

D'où : $$\varphi = 2K'\pi$$

Mais φ doit croître d'une manière continue quand x varie de -1 à $+1$; ainsi il faut prendre pour $x = 1$, le multiple pair de π, immédiatement supérieur à la valeur : $(2K+1)\pi$ qui correspond à $x = -1$, c'est à dire : $(2K+2)\pi$, de sorte qu'il vient :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \int_{(2K+1)\pi}^{(2K+2)\pi} d\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Et en second lieu si l'on suppose que a, supérieur en valeur absolue à l'unité, soit négatif, décroissant quand x augmente de -1 à $+1$, nous obtiendrons alors : (1)

---

(1) Lorsque la constante a est imaginaire, et de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, la valeur de l'intégrale définie subsiste, si l'on détermine le radical carré $\sqrt{a^2-1}$, de manière qu'en posant : $\sqrt{a^2-1} = A + B\sqrt{-1}$, A et B soient respectivement de même signe que α et β, l'une de ces conditions entraînant l'autre.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(\alpha-x)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

VII. — Afin de donner quelques exemples des méthodes et des résultats qui précèdent, je vais déterminer la valeur de ces deux intégrales définies où α et β sont des constantes qu'on supposera inférieures à l'unité, savoir :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}, \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

A l'égard de la première, je partirai de la formule :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right)$$

en faisant, $\quad Ax^2+2Bx+C = (1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)$

ce qui donnera, si l'on égale les dérivées des deux membres :

$$Ax+B = -\alpha(1-2\beta x+\beta^2) - \beta(1-2\alpha x+\alpha^2)$$

On en conclut que la fontion :

$$Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}$$

prend pour $x=1$, la valeur :

$$-\alpha(1-\beta)^2-\beta(1-\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}(1-\alpha)(1-\beta) = -\left[\sqrt{\alpha}(1-\beta)-\sqrt{\beta}(1-\alpha)\right]^2$$
$$= -\left((\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1+\sqrt{\alpha\beta}\right)^2$$

et pour $x=-1$, celle-ci :

$$-\alpha(1+\beta)^2-\beta(1+\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}(1+\alpha)(1+\beta) = -\left[\sqrt{\alpha}(1+\beta)-\sqrt{\beta}(1+\alpha)\right]^2$$
$$= -(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(1-\sqrt{\alpha\beta})^2$$

sorte que l'intégrale définie, entre les limites -1, $+1$, se réduit à cette forme très-simple :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$$

Passant maintenant à la seconde, il faudra, d'après la méthode générale, décomposer d'abord en fractions simples, la fonction rationnelle :

$$\frac{(1-\alpha x)(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}$$

dans laquelle le numérateur et le dénominateur étant du second degré, la partie entière sera simplement une constante, et nous ferons en conséquence :

$$\frac{(1-\alpha x)\,(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)\,(1-2\beta x+\beta^2)} = m + \frac{A}{1-2\alpha x+\alpha^2} + \frac{B}{1-2\beta x+\beta^2}$$

Cette constante s'obtient en faisant x infini, et a pour valeur $\frac{1}{4}$, on trouve ensuite aisément :

$$A = \frac{1}{4}\,\frac{(1-\alpha^2)(2\alpha-\beta-\beta\alpha^2)}{(\alpha-\beta)\,(1-\alpha\beta)}$$

$$B = \frac{1}{4}\,\frac{(1-\beta^2)(2\beta-\alpha-\alpha\beta^2)}{(\beta-\alpha)\,(1-\alpha\beta)}$$

Cela étant, la formule :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

ou plutôt celle-ci, en remplaçant a par $\frac{a}{a'}$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-a'x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-a'^2}}$$

donne sur le champ :

$$A\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\alpha x+\alpha^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2\alpha-\beta-\beta\alpha^2}{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}$$

$$B\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2\beta-\alpha-\alpha\beta^2}{(\beta-\alpha)(1-\alpha\beta)}$$

et en ajoutant membre :

$$A\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\alpha x^2)\sqrt{1-x^2}} + B\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\beta x+\beta^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\,\frac{3-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}$$

Nous obtenons donc cette valeur très simple

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\alpha x)\,(1-\beta x)}{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{3-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \frac{2 - \alpha\beta}{1 - \alpha\beta} .$$

VIII. – Les deux résultats que nous venons d'obtenir dépendent seulement du produit $\alpha\beta$; c'est là un fait analytique important dont je vais en quelques mots indiquer les conséquences ; mais en considérant seulement la relation :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$$

Soit à cet effet, en développant suivant les puissances croissantes de α

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1 + \alpha x + \alpha^2 \frac{3x^2-1}{2} + \ldots\ldots + \alpha^n \varphi_n(x) + \ldots\ldots$$

je remarque que le coefficient de α^n est un polynôme entier du n^e degré en x, car en changeant α en $\frac{\alpha}{x}$ pour y supposer ensuite x infini, le premier membre se réduit à :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}} = 1 + \alpha + \frac{1.3}{1.2}\alpha^2 + \ldots\ldots + \frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n}\alpha^n + \ldots\ldots$$

d'où résulte que $\frac{\varphi_n(x)}{x^n}$ prenant pour x infini, la valeur finie : $\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n}$ est bien du degré n en x. Cela posé, on aura de même :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = 1 + \beta x + \beta^2 \frac{3x^2-1}{2} + \ldots\ldots + \beta^{n'} \varphi_{n'}(x) + \ldots\ldots$$

et si, après avoir développé $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \log \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$, on égale les coefficients des mêmes termes dans la relation :

$$\int_{-1}^{+1} dx \left[1 + \alpha x + \ldots\ldots + \alpha^n \varphi_n(x) + \ldots\right]\left[1 + \beta x + \ldots\ldots + \beta^{n'} \varphi_{n'}(x) + \ldots\ldots\right]$$
$$= 2\left[1 + \frac{1}{3}\alpha\beta + \frac{1}{5}\alpha^2\beta^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2n+1}\alpha^n\beta^n + \ldots\ldots\ldots\right]$$

on trouve pour n et n' différents :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n(x)\,\varphi_{n'}(x)\; dx = 0$$

et pour $n = n'$:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

Or, en ajoutant membre à membre les diverses égalités :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\,\varphi_{n-1}(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\,\varphi_{n-2}(x)\,dx = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\,\varphi_0(x)\,dx = 0$$

après les avoir multipliées par des constantes $A_0, A_1, \ldots\ldots A_n$, on trouve la condition :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{n+1}(x)\left[A_0\varphi_n(x) + A_1\varphi_{n-1}(x) + A_2\varphi_{n-2}(x) + \cdots\cdots + A_n\varphi_0(x)\right]dx = 0$$

où le facteur : $A_0\varphi_n(x) + A_1\varphi_{n-1}(x) + \cdots\cdots + A_n\varphi_0(x)$ peut représenter un poly=nôme quelconque du n^e degré, et cette condition, comme on l'a déjà établi, a pour conséquence que $\varphi_{n+1}(x)$ ne diffère du polynome de Legendre X_{n+1} que par un facteur constant. On a en effet, l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \cdots\cdots\cdots + \alpha^n X_n + \cdots\cdots$$

qui a servi de définition et de point de départ pour la théorie de ces fonctions, la démonstration que nous venons de donner des deux théorèmes :

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'}\,dx = 0\,, \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

étant celle de Legendre. (Exercices de Calcul intégral, Tome II, page 247.)

⁎ IX. – Je me proposerai enfin, comme dernière application, d'obtenir cette belle formule d'Euler, où $n_2, n_4, n_6, \ldots$ désignent les coefficients de $x^2, x^4, x^6, \ldots\ldots$ dans $(1+x)^n$, savoir :

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\ \frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}=\frac{a^n+\frac{1}{2}n_2a^{n-2}+\frac{1.3.}{2.4}n_4a^{n-4}+\frac{1.3.5.}{2.4.6}n_6a^{n-6}+\ldots}{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Soit à cet effet : $\quad \frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}=\frac{A_n}{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$

De sorte qu'on ait en vertu de la série de Taylor :

$$\left[1+(a+z)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum\frac{A_n}{(1-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}\ \frac{z^n}{1.2\ldots n}$$

puis, en changeant z en $z(1-a^2)$ et multipliant par $(1-a^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\left[1-2az-(1-a^2)z^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum\frac{A_n z^n}{1.2\ldots n}$$

Cela posé, je pars de la relation :

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$$

en y remplaçant a par :

$$\frac{1-az}{z}$$

ce qui donnera, après une réduction facile :

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-2az-(1-a^2)z^2}}=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\left[1-(a+x)z\right]\sqrt{1-x^2}}$$

Or, en développant $\frac{1}{1-(a+x)z}$ sous la forme : $1+(a+z)z+(a+x)^2z^2+\ldots$ et égalant dans les deux membres les coefficients de z^n, on obtiendra :

$$\frac{\pi A_n}{1.2\ldots n}=\int_{-1}^{+1}\frac{(a+x)^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mais nous savons que dans le second membre l'intégrale a pour valeur $\pi\varepsilon$, ε désignant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le produit :

$$(a+x)^n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ \frac{1}{x^3}+\frac{1.3.}{2.4}\ \frac{1}{x^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\ \frac{1}{x^7}+\ldots\ldots\right)$$

ainsi en posant :

$$(a+x)^n=a^n+n_1a^{n-1}x+n_2a^{n-2}x^2+\ldots\ldots)$$

on obtient sur le champ l'expression du polynôme A_n découverte par Euler :

$$\frac{A_n}{1.2\ldots n} = a^n + \frac{1}{2}\, n_2\, a^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\, n_4\, a^{n-4} + \ldots\ldots$$

Revenons un instant à cette égalité :

$$\left[1 - 2az - (1-a^2)z^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{A_n z^n}{1.2\ldots n}$$

en y posant : $\qquad z = \dfrac{\alpha}{\sqrt{a^2-1}}$

elle prend cette nouvelle forme :

$$\left[1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}\,\alpha + \alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{z_n}{1.2\ldots n}\ \frac{A_n}{(a^n-1)^n}$$

dont le premier membre coïncide avec l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ si l'on fait : $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}} = x$, d'où ce théorème :

Le polynome de Legendre : $X_n = \dfrac{1}{2.4.6\ldots 2n}\ \dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ devient : $\dfrac{1}{1.2\ldots\ldots n}\ \dfrac{A_n}{(a^2-1)^{\frac{1}{2}n}}$ par la substitution : $x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$, et sous une autre forme on peut encore dire qu'on obtient par ce changement de varia=
=bles la relation :

$$\frac{1}{2^n}\ \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = (\alpha^2-1)^{\frac{n+1}{2}}\ \frac{d^n(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}$$

De l'intégrale $\int f(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$.

On a déjà vu que cette intégrale se ramène à celle d'une fonction rationnelle en posant $\tang \frac{1}{2}\varphi = x$, car ayant :

$$d\varphi = \frac{2\,dx}{1+x^2}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{2x}{1+x^2}\,, \qquad \cos\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

on obtient ainsi pour transformée :

$$2\int f\left(\frac{2x}{1+x^2}\,,\ \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{dx}{1+x^2}$$

Mais ce procédé général donne lieu souvent à des calculs trop compliqués, et en faisant $\sin\varphi = x$, ce qui conduit à l'expression précédemment traitée :

$$\int f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

les opérations pourront être plus faciles ; enfin, on peut n'employer aucun changement de variables, et c'est le cas que nous considérerons en premier lieu.

I. Supposons que $f(\sin\varphi, \cos\varphi)$ soit un polynome entier en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$; si l'on introduit, au lieu des lignes trigonométriques, leurs expressions en exponentielles imaginaires, savoir :

$$\sin\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \cos\varphi = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}$$

on le transforme évidemment en une somme de puissances de l'exponentielle, telles que :

$$A e^{n\varphi\sqrt{-1}}$$

et l'intégrale

$$\int f(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$$

est dès lors ramenée simplement à celles-ci :

$$\int e^{n\varphi\sqrt{-1}} d\varphi = \frac{e^{n\varphi\sqrt{-1}}}{n\sqrt{-1}} = \frac{1}{n\sqrt{-1}}\left(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi\right)$$

Nous avons déjà considéré cette transformation à l'égard de l'expression :

$$\sin^a\varphi \cdot \cos^b\varphi$$

et il a été établi qu'elle pouvait se mettre sous l'une ou l'autre de ces deux formes en faisant : $a+b=n$, savoir :

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}a}\sin^a\varphi\cos^b\varphi = \alpha_0\cos n\varphi + \alpha_1\cos(n-2)\varphi + \alpha_2\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots$$

quand $\underline{a}$ est pair :

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{a-1}{2}}\sin^a\varphi\cos^b\varphi = \alpha_0\sin n\varphi + \alpha_1\sin(n-2)\varphi + \alpha_2\sin(n-4)\varphi + \ldots\ldots$$

si $\underline{a}$ est impair, les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ se déduisant dans les deux cas de l'identité :

$$(x-1)^a(x+1)^b = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots$$

On en conclut pour $\underline{a}$ pair :

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}a}\int\sin^a\varphi\cos^b\varphi\, d\varphi = \alpha_0\frac{\sin n\varphi}{n} + \alpha_1\frac{\sin(n-2)\varphi}{n-2} + \alpha_2\frac{\sin(n-4)\varphi}{n-4} + \ldots\ldots$$

et pour a impair ;

$$2^{n-1}(-1)^{\frac{a-1}{2}}\int\sin^a\varphi\cos^b\varphi\, d\varphi = -\alpha_0\frac{\cos n\varphi}{n} - \alpha_1\frac{\cos(n-2)\varphi}{n-2} - \alpha_2\frac{\cos(n-4)\varphi}{n-4} - \ldots\ldots$$

Nous déduirons en particulier des formules suivantes :

$$2\cos^2\varphi = \cos 2\varphi + 1$$

$$4\cos^3\varphi = \cos 3\varphi + 3\cos\varphi$$

$$8\cos^4\varphi = \cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 2$$

. . . .

$$2\sin^2\varphi = \cos 2\varphi + 1$$

$$4\sin^3\varphi = -\sin 3\varphi + 3\sin\varphi$$

$$8\sin^4\varphi = \cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3$$

. . . .

ces intégrales dont l'usage est fréquent, savoir :

$$4\int\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\sin 3\varphi + 3\sin\varphi$$

$$8\int\cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\sin 4\varphi + 2\sin 2\varphi + 3\varphi$$

. . . .

$$2\int\sin^2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{2}\sin 2\varphi + \varphi$$

$$4\int\sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{3}\cos 3\varphi - 3\cos\varphi$$

$$8\int\sin^4\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\sin 4\varphi - 2\sin 2\varphi + 3\varphi$$

. . . .

On les obtiendrait d'une autre manière et sous une autre forme en partant de ces relations :

$$(n+1)\int\cos^{n+1}\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\cos^n\varphi + n\int\cos^{n-1}\varphi\, d\varphi$$

$$(n+1)\int\sin^{n+1}\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi\sin^n\varphi + n\int\sin^{n-1}\varphi\, d\varphi$$

conséquences immédiates de celle-ci, que nous avons précédemment obtenue, savoir :

$$(n+1)\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^n\sqrt{1-x^2} + n\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

lorsqu'on y fait $x = \cos\varphi$ ou $x = \sin\varphi$, mais nous ne nous arrêtons pas à cette méthode.

II. — Le procédé d'intégration qui repose sur la substitution : $\tang \frac{1}{2}\varphi = x$ est, dans quelques circonstances, comme on va le voir, la plus simple et la plus rapide. Ce ne serait pas toutefois à l'expression précédente : $\int \sin^a\varphi \cos^b\varphi \, d\varphi$ qu'il conviendrait de l'appliquer, car elle donnerait pour transformée : $2^a \int \frac{x^a(1-x^2)^b}{(1+x^2)^{a+b+1}} dx$, et la décomposition en fractions simples de la quantité sous le signe $\int$ exigerait beaucoup de calculs. Mais l'intégrale $\int \frac{d\varphi}{\sin^{n+1}\varphi}$ ayant pour transformée : $\frac{1}{2^n}\int \frac{(1+x^2)^n dx}{x^{n+1}}$ s'obtiendra très facilement. Soit en effet :

$$(x^2+1)^n = x^{2n} + n_1 x^{2n-2} + n_2 x^{2n-4} + \ldots\ldots + 1$$

ou, en rapprochant les termes équidistants des extrêmes :

$$(x^2+1)^n = (x^{2n}+1) + n_1(x^{2n-2}+x^2) + n_2(x^{2n-4}+x^4) + \ldots\ldots$$

on en conclura :

$$\int \frac{(x^2+1)^n dx}{x^{n+1}} = \int \frac{(x^{2n}+1)\,dx}{x^{n+1}} + n_1 \int \frac{(x^{2n-2}+x^2)\,dx}{x^{n+1}} + n_2 \int \frac{(x^{2n-4}+x^4)\,dx}{x^{n+1}} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{n}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) + \frac{n_1}{n-2}\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \frac{n_2}{n-4}\left(x^{n-4} - \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \ldots\ldots$$

Si l'exposant n est impair, cette valeur est simplement algébrique, et l'on aura ainsi :

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = \tang \tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\tang \frac{1}{2}\varphi} = -\frac{1}{2\tang\varphi}$$

$$\frac{1}{8}\int \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi} = \frac{1}{3}\left(\tang^3 \tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\tang^3\frac{1}{2}\varphi}\right) + 3\left(\tang \tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\tang\frac{1}{2}\varphi}\right)$$

. . . .

Mais en supposant n pair, le terme du milieu en x^n dans le développement de la puissance $(x^2+1)^n$, donne naissance à l'expression logarithmique :

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1.\,2\ldots\ldots\frac{n}{2}} \int \frac{dx}{x} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1.\,2\ldots\ldots\frac{n}{2}} \log.\tang \tfrac{1}{2}\varphi$$

et nous obtiendrons par exemple

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \tang \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}\right)+2\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$$

. . . .

Le simple changement de φ en $\frac{\pi}{2}-\varphi$ donnera ensuite des résultats entièrement semblables à l'égard de l'intégrale $\int\frac{d\varphi}{\cos^{n+1}\varphi}$.

Considérons encore l'intégrale :

$$\int\frac{d\varphi}{a\sin\varphi+b\cos\varphi+c}$$

à laquelle la même substitution : $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi=x$ s'applique avec succès, car elle conduit à cette transformée :

$$2\int\frac{dx}{2ax+b(1-x^2)+c(1+x^2)}$$

qu'on obtient immédiatement par l'une ou l'autre de ces deux formules :

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{\sqrt{B^2-AC}}\,\frac{1}{2}\log\frac{Ax+B+\sqrt{B^2-AC}}{Ax+B-\sqrt{B^2-AC}}$$

$$\int\frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\operatorname{arc\,tang.}\frac{Ax+B}{\sqrt{AC-B^2}}$$

la première se rapportant au cas de $B^2-AC>0$ et la seconde à celui de $B^2-AC<0$.

III. — Une remarque souvent utile, consiste en ce qu'on peut obtenir une transformée de l'intégrale $\int f(\sin\varphi,\cos\varphi)\,d\varphi$, entièrement rationnelle par rapport à une nouvelle variable en posant $\operatorname{tang}\varphi=x$, au lieu de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi=x$, lorsque $f(\sin\varphi,\cos\varphi)$ ne change point en mettant $\varphi+\pi$ au lieu de φ, c'est à dire lorsqu'on a identiquement :

$$f(\sin\varphi,\cos\varphi)=f(-\sin\varphi,-\cos\varphi)$$

Effectivement, on a pour transformée :

$$\int f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{dx}{1+x^2}$$

et comme on peut poser généralement :

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=G+\frac{H}{\sqrt{1+x^2}}$$

où G et H désignent des fonctions rationnelles, on en conclura en changeant le signe du radical $\sqrt{1+x^2}$, et observant que sous la condition admise, le premier membre ne change point :

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = G - \frac{H}{\sqrt{1+x^2}}$$

et, en ajoutant membre à membre, il vient comme on voit :

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = G$$

Soit, comme application, $\int \frac{d\varphi}{\cos^{2n+2}\varphi}$, qui donnera pour transformée $\int (1+x^2)^n dx$ l'intégration s'effectuera en développant la puissance, et on aura, si l'on nomme comme précédemment n_1, n_2, n_3, &c^a, les coefficients binomiaux :

$$\int (1+x^2)^n dx = x + \frac{n_1}{3} x^3 + \frac{n_2}{5} x^5 + \dots + \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

Il en résulte ces formes simples et nouvelles des intégrales données plus haut :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^{2n+2}\varphi} = \operatorname{tang}\varphi + \frac{n_1}{3}\operatorname{tang}^3\varphi + \frac{n_2}{5}\operatorname{tang}^5\varphi + \dots + \frac{1}{2n+1}\operatorname{tang}^{2n+1}\varphi$$

et en changeant φ en $\frac{\pi}{2} - \varphi$:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^{2n+2}\varphi} = -\operatorname{cotg}\varphi - \frac{n_1}{3}\operatorname{cotg}^3\varphi - \frac{n_2}{5}\operatorname{cotg}^5\varphi - \dots - \frac{1}{2n+1}\operatorname{cotg}^{2n+1}\varphi$$

Soit en second lieu : $\int \frac{d\varphi}{\sin^a\varphi\cos^b\varphi}$; sous la condition de $a+b$ pair, la transformée $\int \frac{(1+x^2)^{\frac{a+b}{2}-1}}{x^a} dx$ s'obtiendra encore en développant la puissance, et intégrant de simples monomes. Considérons aussi l'expression : $\int \operatorname{tang}^m\varphi\, d\varphi = \int \frac{x^m}{x^2+1} dx$; on divisera x^m par x^2+1, d'où, pour m pair :

$$\frac{x^m}{x^2+1} = x^{m-2} - x^{m-4} + x^{m-6} - \dots + (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{x^2+1}$$

et pour m impair : $$\frac{x^m}{x^2+1} = x^{m-2} - x^{m-4} + x^{m-6} - \dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{x}{x^2+1}$$

Dans le premier cas, nous aurons donc :

$$\int \frac{x^m}{x^2+1} dx = \frac{x^{m-1}}{m-1} - \frac{x^{m-3}}{m-3} + \frac{x^{m-5}}{m-5} - \dots + (-1)^{\frac{1}{2}m} \operatorname{arc\,tang} x.$$

et par suite : $$\int \operatorname{tang}^m\varphi\, d\varphi = \frac{\operatorname{tang}^{m-1}\varphi}{m-1} - \frac{\operatorname{tang}^{m-3}\varphi}{m-3} + \frac{\operatorname{tang}^{m-5}\varphi}{m-5} - \dots + (-1)^{\frac{1}{2}m}\varphi$$

Dans le second, nous obtiendrons :

$$\int \operatorname{tang}^m\varphi\, d\varphi = \frac{\operatorname{tang}^{m-1}\varphi}{m-1} - \frac{\operatorname{tang}^{m-3}\varphi}{m-3} + \frac{\operatorname{tang}^{m-5}\varphi}{m-5} - \dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \log \frac{1}{\cos\varphi}$$

Soit enfin l'intégrale : $\int \frac{d\varphi}{A\sin^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi}$ donnant pour transformée : $\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C}$, on en conclura qu'elle a pour valeur : $\frac{1}{\sqrt{B^2-AC}} \log \frac{A\operatorname{tang}\varphi + B + \sqrt{B^2-AC}}{A\operatorname{tang}\varphi + B - \sqrt{B^2-AC}}$ ou bien : $\frac{1}{2\sqrt{AC-B^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{A\operatorname{tang}\varphi + B}{\sqrt{AC-B^2}}$, suivant qu'on suppose B^2-AC positif ou négatif.

Ces divers résultats montrent combien il a été utile d'intégrer dans le type général représenté par $\int f(\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$, le cas où la fonction sous le signe $\int$ ne change pas quand on change φ en $\varphi + \pi$. Or, on pourrait à ce cas ajouter ceux dans lesquels $f(\sin\varphi, \cos\varphi)$ se reproduit sauf le signe, quand on change φ en $-\varphi$, et φ en $\pi - \varphi$. On obtient encore en effet une transformée rationnelle, si l'on fait en premier lieu $\cos\varphi = x$, et ensuite $\sin\varphi = x$, mais je me bornerai, pour abréger, à cette simple remarque, qui se vérifie sans peine.

IV. — En indiquant dans les préliminaires de ce Cours, p. 21, le rôle important que jouent, dans toutes les branches de l'Analyse, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, j'ai énoncé ce théorème, qu'une fonction quelconque $\varphi(x)$ assujettie à la seule condition de ne jamais devenir infinie, entre les limites $x = a$, et $x = a + 2\pi$ de la variable pouvait se représenter de la manière suivante :

$$\varphi(x) = A + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots\ldots + A_m \cos mx + \ldots\ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots\ldots + B_m \sin mx + \ldots\ldots$$

Sans en faire la démonstration complète et rigoureuse, nous pouvons, comme application facile de ce qui précède, donner la méthode découverte par Euler pour obtenir la valeur des coefficients A_m et B_m. Elle se fonde sur la valeur des intégrales définies suivantes :

$$\int_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx, \quad \int_a^{a+2\pi} \cos mx \sin nx\, dx \quad \int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx\, dx$$

que nous allons déterminer. Partant à cet effet des identités :

$$2\cos mx \cos nx = \cos(m+n)x + \cos(m-n)x$$
$$2\cos mx \sin nx = \sin(m+n)x - \sin(m-n)x$$
$$2\sin mx \sin nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x$$

nous déduirons immédiatement de la première, par exemple :

$$2\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}$$

Or, en supposant m et n des nombres entiers inégaux, et prenant pour limites a et $a+2\pi$, on aura évidemment :

$$\int_a^{a+2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$$

mais dans le cas de $m = n$, l'intégrale indéfinie étant : $\quad 2\int \cos^2 mx\, dx = \frac{\sin^2 mx}{2m} + x$

on en conclut : $\quad \int_a^{a+2\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi$

La seconde égalité donnera dans tous les cas : $\int_a^{a+2\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0$

et la 3e enfin : $\quad \int_a^{a+2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0.$

quand m est différent de n et : $\int_a^{a+2\pi} \sin^2 mx\, dx = \pi$ pour $m = n$.

A l'aide de ces résultats, nous obtiendrons immédiatement la valeur de A_m, en multipliant les deux membres de l'équation proposée par $\cos mx\, dx$ et intégrant entre les limites a et $a + 2\pi$. Tous les coefficients, excepté A_m disparaissent en effet par cette opération, qui donne :

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} \varphi(x) \cos mx\, dx.$$

Le cas de $m = 0$ fait seul exception, et conduit à la valeur :

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx$$

En multipliant par $\sin. mx\,dx$, et intégrant entre les mêmes limites, on trouvera semblablement :

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}\varphi(x)\sin mx\,dx.$$

Maintenant on peut reconnaître facilement par les expressions des coefficients A_m et B_m qu'ils diminuent lorsque le nombre entier m augmente. Effectivement, si la variable x croît de la quantité $\frac{2\pi}{m}$, indéfiniment décroissante, $\varphi(x)$ ne varie pas sensiblement, pendant que les facteurs $\sin mx$ et $\cos mx$ passent par toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$. L'effet de ces facteurs est donc de détruire à très-peu près tous les éléments des intégrales représentant A_m et B_m; on voit par là à quoi tient en général la convergence de ce genre nouveau de série par lequel on est conduit à exprimer les fonctions dans la plupart des applications de l'Analyse à la Mécanique et à la Physique.

Sur l'intégrale $\int x^m(a+bx^n)^p dx$.

Elle s'obtient immédiatement lorsque l'exposant p est un nombre entier positif, on en développant la puissance $(a+bx^n)^p$, on n'a plus à intégrer que de simples monomes. Mais s'il n'est en pas ainsi, soit : $a+bx^n = z$, d'où :

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz$$

et par suite : $$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int z^p(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

La transformée ainsi obtenue pourra être déterminée si l'exposant de $z-a$ est un entier positif, c'est à dire si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier plus grand que zéro. Il en est donc de même dans ce cas de l'intégrale proposée. Mais ce cas n'est pas le seul ; on a identiquement en effet :

$$x^m(a+bx^n)^p = x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p$$

et en appliquant la condition qui vient d'être trouvée à l'intégrale :

$$\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx$$

on trouve qu'elle sera susceptible d'être déterminée si : $\frac{m+np+1}{-n}$ est positif et entier, condition nouvelle d'intégrabilité de l'intégrale proposée. On doit à M. Tchebichew d'avoir démontré que les conditions ainsi obtenues comme suffisantes sont nécessaires pour que l'intégrale $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ soit exprimable sous forme finie explicite par les fonctions algébriques et logarithmiques, en supposant m et n entiers. Le cas de m et n fractionnaires, et de la forme $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, se ramènerait d'ailleurs au précédent en changeant de variable et posant $x = t^\alpha$.

De l'intégrale $\int e^x f(x)dx$.

Nous supposerons que $f(x)$ soit une fonction rationnelle de sorte qu'on puisse poser, en représentant la partie entière par $F(x)$:

$$f(x) = F(x) + \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}}$$
$$+ \frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_p}{(x-b)^{p+1}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{L}{x-l} + \frac{L_1}{(x-l)^2} + \cdots\cdots + \frac{L_s}{(x-l)^{s+1}}$$

Cela étant, nous avons déjà obtenu l'expression suivante, savoir :

$$\int e^x F(x)\,dx = e^x\left[F(x) - F'(x) + F''(x) - \cdots\cdots\right]$$

de sorte qu'en faisant pour un instant :

$$\theta(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}}$$

nous avons à traiter l'intégrale $\int e^x \theta(x)\,dx$; et nous allons démontrer qu'elle conduit à cette relation :

$$\int e^x \theta(x)\,dx = \mathfrak{A} \int \frac{e^x dx}{x-a} + \frac{e^x F(x)}{(x-a)^n}$$

où $F(x)$ est un polynome entier et $\mathfrak{A}$ une constante, savoir :

$$\mathfrak{A} = A + \frac{A_1}{1} + \frac{A_2}{1.2.} + \cdots\cdots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}$$

J'emploie à cet effet la formule :

$$\alpha \int \frac{e^x dx}{(x-a)^{\alpha+1}} = \int \frac{e^x dx}{(x-a)^\alpha} - \frac{e^x}{(x-a)^\alpha}$$

qu'on vérifie immédiatement en différentiant,(1) et d'où on tire successivement :

$$\int \frac{e^x dx}{(x-a)^2} = \int \frac{e^x dx}{x-a} - \frac{e^x}{x-a}$$

$$2 \int \frac{e^x dx}{(x-a)^3} = \int \frac{e^x dx}{(x-a)^2} - \frac{e^x}{(x-a)^2}$$

$$3 \int \frac{e^x dx}{(x-a)^4} = \int \frac{e^x dx}{(x-a)^3} - \frac{e^x}{(x-a)^3}$$

. . . .

Nous en concluons d'abord en substituant de proche l'équation :

$$1.2\ldots\alpha \int \frac{e^x dx}{(x-a)^{\alpha+1}} = \int \frac{e^x dx}{(x-a)^\alpha} - e^x \left[\frac{1}{x-a} + \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1.2}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{1.2\ldots(\alpha-1)}{(x-a)^\alpha} \right]$$

il suffit ensuite de faire $\alpha = 1, 2, \ldots\ldots n$. et d'ajouter les relations qui en résultent après les avoir respectivement multipliées par les constantes :

$$\frac{A_1}{1},\ \frac{A_2}{1.2},\ \ldots\ldots\ \frac{A_n}{1.2\ldots n}$$

pour obtenir la relation annoncée. Or, en raisonnant de même sur les autres groupes de fractions simples :

$$\frac{B}{x-b} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_p}{(x-b)^{p+1}}$$

. . . .

(1) $\frac{e^x}{(x-a)^\alpha}$

$$\frac{L}{x-l}+\frac{L_1}{(x-l)^2}+\ldots\ldots+\frac{L_s}{(x-l)^{s+1}}$$

il est clair que si l'on pose :

$$\mathcal{B}=B+\frac{B_1}{1}+\frac{B_2}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{B_p}{1.2\ldots p}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{L}=L+\frac{L_1}{1}+\frac{L_2}{1.2}+\ldots\ldots+\frac{L_s}{1.2\ldots s}$$

on aura en général :

$$\int e^x f(x)\,dx=\mathcal{A}\int\frac{e^x dx}{x-a}+\mathcal{B}\int\frac{e^x dx}{x-b}+\ldots+\mathcal{L}\int\frac{e^x dx}{x-l}+e^x\Theta(x)$$

$\Theta(x)$ désignant une fonction rationnelle entièrement déterminée de la variable. Nous voyons ainsi que l'intégrale proposée s'obtiendra sous forme finie explicite quand on aura :

$$\mathcal{A}=0,\quad \mathcal{B}=0,\ldots\ldots\ \mathcal{L}=0.$$

et en effet, les quantités telles que : $\int\frac{e^x dx}{x-a}$ constituent des transcendantes qu'on a prouvé ne pouvoir être exprimées sous forme finie au moyen des fonctions élémentaires qui nous sont connues. Nous nous bornerons à leur égard, à remarquer qu'en posant $x-a=z$, elles se réduisent à la forme unique : $\int\frac{e^z dz}{z}$, de sorte qu'en faisant un instant :

$$\varphi z=\int\frac{e^z dz}{z}$$

l'équation précédente deviendra :

$$\int e^x f(x)\,dx=\mathcal{A}e^a\varphi(x-a)+\mathcal{B}e^b\varphi(x-b)+\ldots\ldots$$
$$+\mathcal{L}e^l\varphi(x-l)+\ e^x\Theta(x)$$

Le plus souvent encore, on pose $e^x=\theta$, ce qui donne pour transformée $\int\frac{d\theta}{\log\theta}$; cette transcendante nommée quelquefois le logarithme intégral de θ a été le sujet d'un grand nombre de travaux ; elle possède cette propriété singulière de représenter approximativement la totalité des nombres premiers de l'unité à θ, de sorte qu'en désignant par $\Pi(\theta)$ ce nombre exact, le rapport :

$$\frac{\displaystyle\int \frac{d\theta}{\log \theta}}{\varpi(\theta)}$$

aura l'unité pour limite, lorsque θ deviendra infiniment grand.

Intégration des fonctions algébriques qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme.

Nous savons qu'en désignant par $F(x)$ un polynome entier, l'expression la plus générale d'une fonction rationnelle du radical $\sqrt{F(x)}$ et de la variable est de la forme :

$$G + \frac{H}{\sqrt{F(x)}}$$

G et H représentent des fonctions rationnelles. Par conséquent, l'intégrale de cette espèce de fonctions algébriques dépend essentiellement de la quantité : $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{F(x)}}$, et notre objet est maintenant de donner le moyen d'obtenir cette intégrale dans les cas où elle est exprimable algébrique=ment, sinon de reconnaitre qu'elle est impossible sous cette forme.

I. – En partant de la remarque faite que $\frac{H}{\sqrt{F(x)}}$ se décompose en termes de ces deux espèces : $\frac{x^n}{\sqrt{F(x)}}$, $\frac{1}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$ où les exposants sont entiers et positifs, j'établirai d'abord qu'on a :

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{F(dx}} = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} + Q\sqrt{F(x)}$$

P étant un polynome entier dont le degré est de deux unités inférieur à celui de $F(x)$, et Q également un polynome entier.

Posons à cet effet :

$$F(x) = A\,x^K + A_1\,x^{K-1} + \ldots\ldots + A_K$$

et considérons l'identité suivante :

$$\frac{d\left[x^n\sqrt{F(x)}\right]}{dx} = n x^{n-1}\sqrt{F(x)} + x^n \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}}$$

$$= \frac{x^{n-1}\left[2nF(x) + xF'(x)\right]}{2\sqrt{F(x)}}$$

Comme on a :

$$2nF(x) + xF'(x) = (2n+K)Ax^K + (2n+K-1)A_1x^{K-1} + \dots\dots$$
$$+ (2n+1)A_{K-1}x + 2nA_K$$

il en résulte, en intégrant, la relation générale :

$$2x^n\sqrt{F(x)} = (2n+K)A\int\frac{x^{n+K-1}dx}{\sqrt{F(x)}}$$
$$+ (2n+K-1)A_1\int\frac{x^{n+K-2}dx}{\sqrt{F(x)}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ (2n+1)A_{K-1}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{F(x}}$$
$$+ 2nA_K\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{F dx}}$$

dont voici les conséquences.

Soit en premier lieu $n = 0$, on remarquera que l'intégrale $\int\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{F(x)}}$ disparaît, ce qui permet de réduire $\int\frac{x^{K-1}dx}{\sqrt{F(x)}}$ à la forme annoncée. Faisant ensuite $n=1$, on obtiendra à l'aide de ce résultat la même conclusion pour $\int\frac{x^K dx}{\sqrt{F(x)}}$, et il est clair qu'en continuant de proche en proche les mêmes opérations, on parviendra à l'équation :

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{F(x)}} = \int\frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} + Q\sqrt{F(x)}$$

où les polynomes entiers P et Q sont respectivement du degré $K-2$ et et $n-K+1$.

Je pars maintenant de l'identité obtenue en différentiant $\frac{\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n}$ savoir :

$$2\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n}\right] = \frac{(x-a)F'(x) - 2nF(x)}{(x-a)^{n+1}\sqrt{F(x)}}$$

et j'observe qu'en faisant un moment :

$$\varphi(x) = (x-a)\,F'(x) - 2n\,F(x)$$

nous aurons pour une dérivée d'ordre quelconque $\varphi^{(i)}(x)$ cette expression :

$$\varphi^{(i)}(x) = (x-a)\,F^{(i+1)}(x) + (i-2n)\,F^{(i)}x$$

ce qui permettra d'écrire :

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1}\,\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}\,\varphi''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^K}{1.2\ldots K}\,\varphi^K(a)$$

$$= -2n\,F(a) + \frac{x-a}{1}\,(1-2n)\,F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}(2-2n)\,F''(a) +$$

$$\cdots\cdots + \frac{(x-a)^K}{1.2\ldots K}\,(K-2n)\,F^K(a)$$

En remplaçant le polynôme $\varphi(x)$ par ce développement, l'intégration donne donc la relation générale que voici :

$$\frac{2\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n} = -2n\,F(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{F(x)}}$$

$$+ (1-2n)\,F'(a)\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\,(2-2n)\,F''(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-1}\sqrt{F(x)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{1.2..K}\,(K-2n)\,F^K(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-K+1}\sqrt{F(x)}}$$

Or, on en tire pour $n = 1$, l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{F(x)}}$ exprimée par un terme algébrique et celle-ci :

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}} \qquad \int\frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}}$$

où le polynome P est de degré $K-2$. Faisant ensuite $n = 2$, et employant le résultat précédent, nous ramènerons à la même forme : $\int\frac{dx}{(x-a)^3\sqrt{F(x)}}$, et il est visible qu'en continuant ainsi de proche en proche, on parviendra à l'équation générale :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{F(x)}} = \mathfrak{A} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}} + \int \frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}} + \frac{Q\sqrt{F(x)}}{(x-a)^2}$$

$\mathfrak{A}$ étant une constante, P un polynome entier de degré $K-2$, et Q un polynôme entier de degré $n-1$. Une exception remarquable s'offre toutefois, si l'on suppose $F(a)=0$, et les mêmes raisonnements appliqués à la relation :

$$\frac{2\sqrt{F(x)}}{(x-a)^n} = (1-2n)\,F'(a)\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$$

$$+\frac{1}{1.2}(2-2n)F''(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-1}\sqrt{F(x)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{1.2\ldots K}(K-2n)F^{K}(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-K+1}\sqrt{F(x)}}$$

montrent que l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$ se réduit alors à : $\int\frac{P\,dx}{\sqrt{F(x)}}$ et à un terme algébrique. Ces résultats établis, voici maintenant les conséquences à en tirer pour la question que nous avons en vue.

II. — Une substitution simple, donnée page 14, permet de ramener les quantités de la forme : $f(x.\sqrt{X})$ où X est un polynome de degré pair, à une expression semblable, mais dans laquelle le degré du polynome placé sous le radical est diminué d'une unité, et par suite impair. Nous admettrons qu'on ait effectué cette substitution dans l'intégrale proposée, de sorte que le nombre K, resté quelconque jusqu'ici, sera dorénavant supposé impair. Cela posé, l'intégrale d'une fonction rationnelle de la variable et du radical $\sqrt{F(x)}$ mise en premier lieu sous la forme :

$$\int\left(G+\frac{H}{\sqrt{F(x)}}\right)dx$$

puis réduite à sa partie essentielle : $\int\frac{H\,dx}{\sqrt{F(x)}}$, a été représentée par une combinaison linéaire des éléments :

$$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{F(x)}} \quad \text{et} \quad \int\frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{F(x)}}$$

Enfin, les éléments ont été ramenés eux-mêmes aux suivants :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{F(x)}},\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{F(x)}},\ldots\int\frac{x^{K-2}\,dx}{\sqrt{F(x)}},\ \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$$

de sorte qu'on a cette expression générale, savoir :

$$\int \frac{H\,dx}{\sqrt{E(x)}} = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{E(x)}} + \sum \mathfrak{A} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}} + \Theta(x)\sqrt{E(x)}$$

dans laquelle P est un polynome de degré $K-2$, $\Theta(x)$ une fonction rationnelle, et le signe Σ comprend un nombre fini de termes relatifs à diverses valeurs des constantes $\mathfrak{A}$ et a, ces dernières se trouvant toutes parmi les racines de l'équation $\frac{1}{H} = 0$. Or, on voit que $\int \frac{H\,dx}{\sqrt{E(x)}}$ sera la quantité algébrique $\Theta(x)\sqrt{E(x)}$, lorsque les termes :

$\int \frac{P\,dx}{\sqrt{E(x)}}$ et $\mathfrak{A} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{F(x)}}$ disparaîtront tous de l'équation, et cette condition, qui est suffisante, est, de plus nécessaire, comme M. Liouville l'a démontré le premier. (1) La détermination sous forme algébrique de l'intégrale proposée, ou la démonstration de l'impossibilité de l'obtenir sous une telle forme, dépend donc uniquement du calcul de réduction à ces éléments simples, à savoir : $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{F(x)}}$, l'exposant n ayant pour limite supérieure $K-2$ et $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{E(x)}}$. On nomme fonctions de première espèce les intégrales :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{E(x)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{E(x)}}, \ \ldots\ldots \int \frac{x^{\frac{K-3}{2}}\,dx}{\sqrt{E(x)}}$$

et fonctions de la seconde espèce celles-ci :

$$\int \frac{x^{\frac{K-1}{2}}dx}{\sqrt{F(x)}} \quad \int \frac{x^{\frac{K+1}{2}}\,dx}{\sqrt{E(x)}}, \quad \int \frac{x^{\frac{K+3}{2}}\,dx}{\sqrt{E(x)}}, \ \ldots\ldots \int \frac{x^{K-2}\,dx}{\sqrt{E(x)}}$$

qui sont en même nombre $\frac{K-1}{2}$ que les précédentes. Les développements suivant les puissances descendantes de la variable, des fonctions de première espèce, ont pour premier terme une puissance négative, et ceux des fonctions de seconde espèce commencent par une puissance positive. Les constantes représentant les racines de l'équation $E(x) = 0$ ont reçu la dénomination de modules; enfin, l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{E(x)}}$ a été nommée

(1) Voyez trois Mémoires de M. Liouville sur cette question dans les 23e et 24e Cahiers du Journal de l'Ecole Polytechnique, et dans le Journal de Mathématiques de M. Liouville, un travail de M. Tchebichew, intitulé : Sur l'intégration des différentielles irrationnelles, Tome XVIII, page 87.

fonction de troisième espèce, et la constante a, le paramètre. Aucune combinaison linéaire des fonctions de première et de seconde espèce ne peut s'exprimer explicitement, par des quantités algébriques, logarithmiques ou exponentielles, en nombre fini. Au contraire, à l'égard des fonctions de troisième espèce, il existe de telles combinaisons dont la valeur est le logarithme d'une fonction rationnelle de x et $\sqrt{F(x)}$. L'étude de ces diverses expressions est l'objet de la théorie des fonctions Abéliennes, qui a donné lieu aux plus grandes découvertes faites en Analyse depuis Lagrange et Legendre, et on doit citer après Abel et Jacobi, les premiers fondateurs, MM. Göpel, Rosenhain, Weierstrass et Riemann, dont les travaux sont l'admiration des géomètres de notre époque.

*III. — Pour donner une application de ce qui précède, je considérerai l'arc d'ellipse, représenté par l'intégrale $\int\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{(a^2-e^2x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-e^2x^2)}}$ où figure la racine carrée d'un polynome du 4ᵉ degré. Nous abaisserons en premier lieu d'une unité le degré de la quantité placée sous le radical, par un changement de variable qui consiste à poser:

$$\frac{a-x}{a+x} = t$$

D'où:

$$x = a\,\frac{1-t}{1+t}$$

et par conséquent:

$$\int\frac{a^2-e^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-e^2x^2)}}\,dx = -a\int\frac{(1-e^2)+2(1+e^2)t+(1-e^2)t^2}{(1+t)^2\sqrt{(1-e^2)t+2(1+e^2)t^2+(1-e^2)t^3}}\,dt.$$

Cela étant, la première opération à faire est de décomposer en fractions simples la fraction rationnelle qui multiplie le radical. Or, on trouve aisément:

$$\frac{1-e^2+2(1+e^2)t+(1-e^2)t^2}{(1+t)^2} = 1-e^2+\frac{4e^2}{1+t}-\frac{4e^2}{(1+t)^2}$$

et il en résultera pour l'intégrale proposée, en faisant abstraction du facteur constant $-a$, et écrivant pour abréger:

$$F(t) = (1-e^2)t+2(1+e^2)t^2+(1-e^2)t^3$$

cette nouvelle forme:

$$(1-e^2)\int\frac{dt}{\sqrt{F(t)}}+4e^2\int\frac{dt}{(1+t)\sqrt{F(t)}}-4e^2\int\frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{F(t)}}$$

Nous allons maintenant réduire aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce, l'intégrale $\int \frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{F(t)}}$, et à cet effet, nous partirons de l'identité :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{F(t)}}{1+t}\right] = -\frac{4e^2}{(1+t)^2\sqrt{F(t)}} + \frac{4e^2}{(1+t)\sqrt{F(t)}} + \frac{(1-e^2)(1+t)}{2\sqrt{F(t)}}$$

On en tire en intégrant :

$$\frac{\sqrt{F(t)}}{1+t} = -4e^2\int\frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{F(t)}} + 4e^2\int\frac{dt}{(1+t)\sqrt{F(t)}} + \frac{1-e^2}{2}\int\frac{(1+t)\,dt}{\sqrt{F(t)}}$$

et par conséquent :

$$4e^2\int\frac{dt}{(1+t)^2\sqrt{F(t)}} - 4e^2\int\frac{dt}{(1+t)\sqrt{F(t)}} = \frac{\sqrt{F(t)}}{1+t} - \frac{1-e^2}{2}\int\frac{(1+t)\,dt}{\sqrt{F(t)}}$$

Il en résulte cette conséquence que la fonction de troisième espèce disparaît dans l'expression de l'intégrale proposée, qui devient ainsi :

$$\frac{\sqrt{F(t)}}{1+t} + \frac{1-e^2}{2}\int\frac{(1+t)\,dt}{\sqrt{F(t)}}$$

et ne contient plus que les fonctions de première et de seconde espèce.

Applications géométriques du calcul intégral.

Quadrature des courbes planes.

I. Etant donnée une courbe plane $y = \varphi(x)$, on a vu que l'intégrale :

$$A = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx.$$

représente le segment compris entre l'axe des abscisses, l'arc de la courbe et deux ordonnées parallèles correspondant aux abscisses x_0 et x. Nous allons d'abord appliquer cette formule à l'ellipse :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

ce qui conduira à l'expression :

$$A = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

mais je remarquerai, avant d'effectuer le calcul, qu'en posant pour un instant :

$$A' = \int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

il vient :

$$A = \frac{b}{a}\, A'$$

Or, A' est précisément la valeur de A lorsqu'on suppose $b = a$, c'ést donc l'aire du segment du cercle :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

circonscrit à l'ellipse et compris entre les ordonnées qui correspondent aux mêmes abscisses x_0 et x. Appliquons maintenant à A' les méthodes relatives à l'intégration des radicaux du second degré en écrivant :

$$A' = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Nous réduirons ensuite l'intégrale $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, en partant de l'identité :

$$d\left[x\sqrt{a^2 - x^2}\right] = \left[\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] dx$$

$$= \frac{a^2 - 2x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

qui donne :

$$x\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 2\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

et par conséquent :

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2 - x^2}$$

On en conclut :

$$A' = \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2 - x^2}$$

Mais on a :

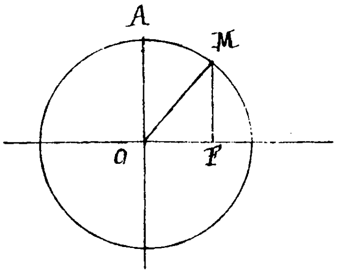
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}$$

et si l'on suppose pour plus de simplicité $x_0 = 0$, il viendra :

$$A' = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2 - x^2}$$

sans ajouter de constante, les deux membres s'évanouissent pour $x = 0$.

Le terme algébrique de cette formule : $\frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2 - x^2}$ est l'aire du triangle OMP ou $OP = x$, $MP = \sqrt{a^2 - x^2}$, et par conséquent le



le terme transcendant $\frac{a^2}{2}$ arc sin $\frac{x}{a}$ l'aire du secteur circulaire AOM.

Pour parvenir d'une autre manière au même résultat, soit : $x = a \sin \varphi$, ce qui donnera :

$$A' = a^2 \int \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

on appliquera le procédé de transformation de la puissance d'un cosinus, en fonction linéaire des cosinus des arcs multiples, en écrivant :

$$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} = \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2}$$

d'où : $A' = \frac{a^2}{2}(\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + C$.

En faisant commencer l'aire à la valeur $\varphi = 0$, qui donne $x = 0$, la constante C sera nulle, et l'on obtiendra bien pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ le quart du cercle, savoir : $A' = \frac{\pi a^2}{4}$.

Soit en second lieu l'hyperbole :

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2.$$

on aura : $$A = \frac{b}{a} \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{b}{a} A'$$

en appelant encore A' le segment relatif à l'hyperbole équilatère où $b = a$, savoir :

$$A' = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

Opérant comme tout à l'heure, en écrivant :

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

je ferai usage de la formule de réduction :

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}$$

ce qui donnera : $$A' = -\frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}$$

et je déterminerai l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ par la formule générale
$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left(Ax+B+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+2Bx+C}\right.$ qui donne immédiatement : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$ et si l'on dispose de la constante arbitraire de sorte que l'intégrale soit prise depuis $x=a$, on trouvera : $\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$. Nous obtiendrons ce résultat d'une autre manière en faisant disparaître le radical $\sqrt{x^2-a^2}$ par un changement de variable.

Soit pour cela : $\frac{x-a}{x+a} = \theta^2$, nous en déduirons successivement :

$$x-a = (x+a)\theta^2$$
$$dx = 2(x+a)\theta\, d\theta + \theta\; dx$$
$$\frac{dx}{(x+a)\theta} = \frac{2\, d\theta}{1-\theta^2}$$

Or, on a : $\theta(x+a) = \sqrt{x^2-a^2}$, par conséquent :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{2\,d\theta}{1-\theta^2} = \int d\theta \left[\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{1+\theta}\right]$$

et nous en conclurons, pour l'intégrale cherchée :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log \frac{1+\theta}{1-\theta} = \log \frac{1+\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}{1-\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}$$

expression qui coïncide avec la précédente, en observant que :

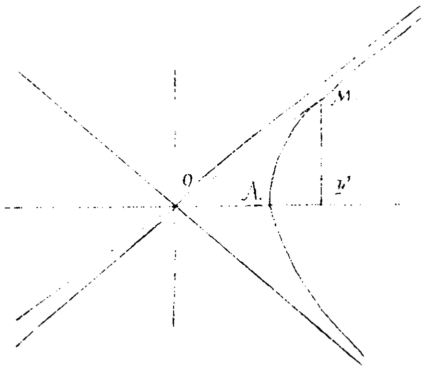
$$\frac{1+\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}}{1-\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}} = \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}} = \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Il vient donc pour l'aire de l'hyperbole :

$$A = \frac{b}{a} A' = -\frac{ab}{2} \log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{b}{2a} x\sqrt{x^2-a^2}$$

Supposons cette aire comptée à partir du sommet ; on devra avoir $A=0$ pour $x=a$, il en résulte $C=0$, et par suite :

$$AMP = -\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}+\frac{b}{2a}\,x\sqrt{x^2-a^2}$$



Ici, comme pour le cercle, la figure donnera la signification de la partie transcendante ; ayant en effet :

$$OMP = \frac{1}{2}\,xy = \frac{b}{2a}\,x\sqrt{x^2-a^2}\,,$$ on obtiendra pour le secteur AOM la valeur :

$$AOM = OMP - AMP = \frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Remarquons enfin que l'équation de l'hyperbole

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

donnant celle de l'ellipse en changeant b en $\frac{b}{\sqrt{-1}}$ et le radical $\sqrt{x^2-a^2}$ en $\sqrt{-1}\,\sqrt{a^2-x^2}$, on obtiendra l'aire de l'ellipse en effectuant le même changement dans celle de l'hyperbole. Effectivement, le terme algébrique $\frac{b}{2a}\,x\sqrt{x^2-a^2}$ devient : $\frac{b}{2a}\,x\sqrt{a^2-x^2}$ et le terme logarithmique se transforme ainsi :

$$-\frac{ab}{2\sqrt{-1}}\log\frac{x+\sqrt{-1}\,\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

Mais on sait qu'en général :

$$\log.(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \log\rho + \sqrt{-1}\,(\varphi+2K\pi)$$

en faisant : $$\rho = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\rho}$$

$$\sin\varphi = \frac{\beta}{\rho}$$

Appliquant cette formule, on en conclura : $\rho = 1$, $\cos\varphi = \frac{x}{a}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ de sorte qu'en posant pour un instant : $\psi = \frac{\pi}{2}-\varphi$, de manière à avoir : $\sin\psi = \frac{x}{a}$, on obtiendra :

$$-\frac{ab}{2\sqrt{-1}}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} = -\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi+2K\pi\right)$$

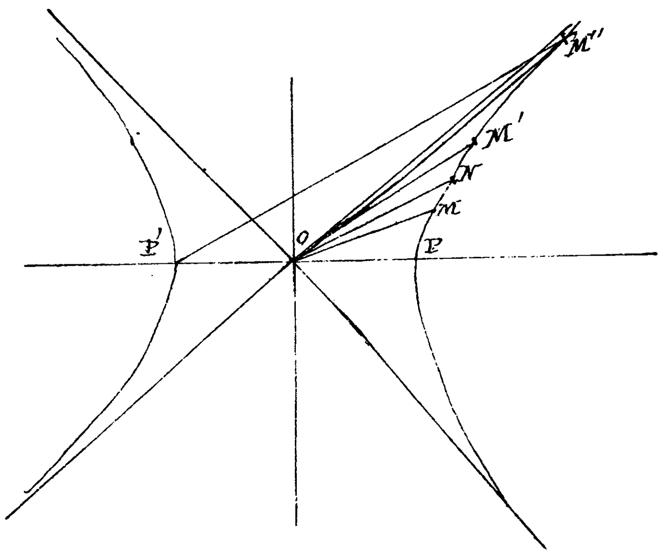
$$= \frac{ab}{2}\psi + \text{const}^e.$$

Ainsi, l'aire de l'hyperbole devient :

$$\frac{ab}{2} \text{arc sin} \frac{x}{a} + \frac{b}{2a} x \sqrt{a^2 - x^2} + \text{const}^e$$

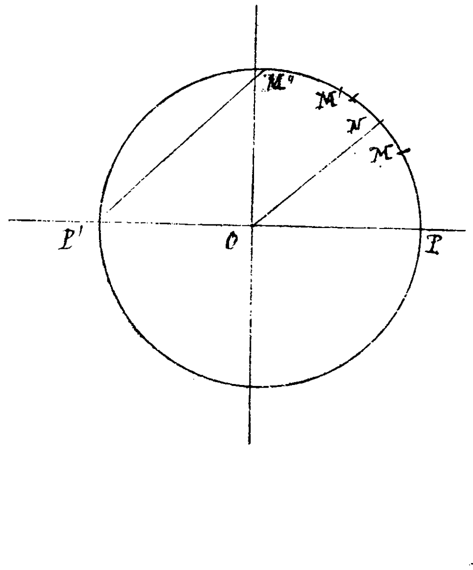
ce qui est en effet l'expression obtenue par l'aire de l'ellipse.

Cette correspondance analytique se retrouve en géométrie à l'égard du cercle et de l'hyperbole équilatère. Considérons dans cette dernière courbe rapportée à son centre et à ses axes, les secteurs OMP, $OM'P$, et désignons par N le milieu de la corde MM'. Une parallèle à la direction ON, menée par le sommet de gauche P' rencontrera l'hyperbole en un point M'' tel que les deux secteurs $OM'M''$ et OMP soient égaux en surface, ce qui donnera la relation :



$$OM''P = OMP + OM'P$$

Or, en faisant la même construction dans le cercle rapporté à son centre, c'est à dire en menant par l'extrémité P' du diamètre une parallèle $P'M''$ à la direction ON perpendiculaire sur le milieu N d'une corde quelconque MM' on reconnaît immédiatement l'égalité des arcs PM, MM'', et par conséquent des secteurs auxquels ils servent de mesure.



II. Les coordonnées polaires donnent une détermination facile de l'aire des courbes du second degré, rapportées à leur centre, et ayant pour équation :

$$A y^2 + 2Bxy + Cx^2 = 1$$

Faisant en effet : $x = \rho \cos\omega$ $\quad y = \rho \sin\omega$

d'où : $$\rho^2 = \frac{1}{A \sin^2\omega + 2B \sin\omega \cos\omega + C \sin^2\omega}$$

on aura à intégrer :

$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{A \sin^2\omega + 2B \sin\omega \cos\omega + C \sin^2\omega}$$

et la fonction sous le signe $\int$ ne changeant point lorsqu'on met $\varphi + \pi$ à la place de ω, nous poserons : $\operatorname{tang} \omega = z$, ce qui donne pour transformée :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dz}{Az^2 + 2Bz + C} = \frac{1}{2}\int \frac{A\,dz}{(Az+B)^2 + AC - B^2}$$

Considérons en particulier le cas de l'ellipse où $AC - B^2$ est positif ; nous achèverons l'intégration par cette nouvelle substitution :

$$Az + B = \sqrt{AC - B^2}\,\operatorname{tang}\psi$$

d'où : $$\int \frac{A\,dz}{(Az+B)^2 + AC - B^2} = \frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}\int d\psi = \frac{\psi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

et par l'aire du secteur elliptique :

$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{1}{2\sqrt{AC-B^2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{A \operatorname{tang}\omega + B}{\sqrt{AC - B^2}}$$

Pour obtenir l'aire totale de l'ellipse, on remarquera qu'en vertu de la relation :

$$A \operatorname{tang}\omega + B = \sqrt{AC-B^2}\,\operatorname{tang}\psi$$

Si l'on suppose A positif ainsi que $\sqrt{AC - B^2}$, les angles φ et ψ varieront dans le même sens, de sorte qu'aux valeurs ω et $\omega + \pi$ de l'angle polaire, qui donnent la même tangente, correspondront nécessairement ψ et $\psi + \pi$. Par conséquent, aux valeurs ω et $\omega + 2\pi$ répondront ψ et $\psi + 2\pi$, de sorte qu'on aura pour la surface de l'ellipse :

$$\frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega+2\pi} \frac{d\omega}{A\sin^2\omega + 2B\sin\omega\cos\omega + C\cos^2\omega} = \frac{1}{2\sqrt{AC-B^2}}\int_{\psi}^{\psi+2\pi} d\psi = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

Cette valeur est surtout remarquable en ce qu'elle donne au moyen d'une intégrale définie une expression rationnelle en A, B, C, du radical $\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$, dont on fait usage dans plusieurs questions importantes d'Analyse.

III. — On parvient à un résultat beaucoup plus important en considérant les courbes de second degré rapportées à un de leurs foyers pour pôle. L'aire du secteur déterminé par deux rayons vecteurs et l'arc de la courbe, donne en effet, d'après la première loi de Képler, l'expression du temps employé à décrire cet arc dans le mouvement d'une planète ou d'une comète autour du soleil. Pour en faire le calcul dans le cas de l'ellipse, je rappellerai d'abord qu'en partant de l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on a cette valeur du rayon vecteur issu du foyer de droite :

$$\rho = a - \frac{cx}{a}$$

de sorte qu'en faisant : $x = c + \rho \cos \omega$, on obtient l'équation en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{b^2}{a + c\cos\omega}$$

et par suite, l'aire du secteur :

$$S = \frac{1}{2}\int \rho^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega}^{\omega'} \frac{b^4 d\omega}{(a + c\cos\omega)^2}$$

Soit d'abord : $\cos\omega = x$, on sera amené à l'intégrale : $\int \frac{b^4\,dx}{(a+cx)^2\sqrt{1-x^2}}$, et les méthodes qui la concernent, (voyez p. 195) conduisent à cette expression :

$$\int \frac{b^4\,dx}{(a+cx)^2\sqrt{1-x^2}} = \frac{b^2 c\sqrt{1-x^2}}{a+cx} - b \operatorname{arc\,tang} \frac{b\sqrt{1-x^2}}{c+ax}$$

Mais on aura un calcul plus simple en substituant à la variable ω l'angle φ (1) qui donne pour x et y ces valeurs :

$$x = a\cos\varphi \qquad y = b\sin\varphi$$

Ayant en effet : $\rho = a - \frac{cx}{a} = a - c\cos\varphi$

nous en conclurons la relation :

$$\frac{b^2}{a + c\cos\omega} = a - c\cos\varphi$$

---

(1) C'est l'anomalie excentrique ; on remarquera qu'en faisant $\cos\omega = x$, la relation entre x et φ a déjà été considérée et employée pour la détermination de l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$, (Voyez, page 207)

D'où :

$$\cos\omega = \frac{a\cos\varphi - c}{a - c\cos\varphi}$$

$$\sin\omega = \frac{b\sin\varphi}{a - c\cos\varphi}$$

et par conséquent :

$$d\omega = \frac{b\,d\varphi}{a - c\cos\varphi}$$

Si l'on désigne par φ et φ' les valeurs qui correspondent aux angles ω et ω', on aura ainsi :

$$S = \frac{1}{2}ab\int_{\varphi}^{\varphi'}\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right)d\varphi$$

Cette intégrale, qui s'obtient immédiatement, donne lieu à une remarque utile pour l'Astronomie, c'est qu'en changeant les limites, elle peut se ramener au cas particulier de $\frac{c}{a} = 1$, c'est à dire de $b = 0$. Soit en effet :

$$\int_{\varphi}^{\varphi'}\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right)d\varphi = \int_{\theta}^{\theta'}\left(1 - \cos\theta\right)d\theta$$

c'est à dire :

$$\varphi' - \varphi - \frac{c}{a}\left(\sin\varphi' - \sin\varphi\right) = \theta' - \theta - \left(\sin\theta' - \sin\theta\right)$$

il suffira de poser les deux égalités :

$$\varphi' - \varphi = \theta' - \theta$$

$$\frac{c}{a}\left(\sin\varphi' - \sin\varphi\right) = \sin\theta' - \sin\theta$$

Or, en écrivant la seconde sous la forme :

$$\frac{c}{a}\sin\frac{\varphi' - \varphi}{2}\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2} = \sin\frac{\theta' - \theta}{2}\cos\frac{\theta' + \theta}{2}$$

elle se réduit d'après la première à :

$$\frac{c}{a}\cos\frac{\varphi' + \varphi}{2} = \cos\frac{\theta' + \theta}{2}$$

Cela étant, au lieu de calculer θ et θ' au moyen de φ et φ', nous opérerons comme il suit :

Considérons la corde du secteur, que j'appellerai δ ; les coordonnées rectangulaires des extrémités de l'arc étant $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ et $a\cos\varphi'$ $b\sin\varphi'$, on aura :

$$\delta^2 = a^2(\cos\varphi' - \cos\varphi)^2 + b^2(\sin\varphi' - \sin\varphi)$$

et en transformant en produits les différences de sinus et de cosinus :

$$\delta^2 = 4\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}\left[a^2\sin^2\frac{\varphi'+\varphi}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right]$$

$$= 4\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}\left[a^2 - c^2\cos^2\frac{\varphi'+\varphi}{2}\right]$$

ce qui s'exprime immédiatement à l'aide de θ et θ' et donne :

$$\delta^2 = 4a^2\sin^2\frac{\theta'-\theta}{2}\sin^2\frac{\theta'+\theta}{2}$$

d'où, en supposant : $\theta' > \theta$

$$\delta = 2a\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\sin\frac{\theta'+\theta}{2}$$

Considérons encore les deux rayons vecteurs ρ et ρ' qui correspondent aux angles φ et φ', savoir :

$$\rho = a - c\cos\varphi$$

$$\rho' = a - c'\cos\varphi'$$

En ajoutant, il viendra :

$$\rho + \rho' = 2a - c(\cos\varphi + \cos\varphi')$$

$$= 2a - 2c\cos\frac{\varphi'+\varphi}{2}\cos\frac{\varphi'-\varphi}{2}$$

$$= 2a - 2a\cos\frac{\theta'+\theta}{2}\cos\frac{\theta'-\theta}{2}$$

et nous aurons, par conséquent :

$$2a - \rho - \rho' = 2a\cos\frac{\theta'+\theta}{2}\cos\frac{\theta'-\theta}{2}$$

Cette relation jointe à la précédente :

$$\delta = 2a\sin\frac{\theta'+\theta}{2}\sin\frac{\theta'-\theta}{2}$$

donne immédiatement, en ajoutant et retranchant membre à membre :

$$\cos\theta = \frac{\rho + \rho' + \delta}{2a} - 1$$

$$\cos\theta' = \frac{\rho+\rho'+\delta}{2a} - 1.$$

Ces valeurs, que nous venons d'établir d'après Lagrange (Méca=nique analytique, Tome II, Note V) conduisent à une proposition célèbre et importante de Mécanique Céleste, connue sous le nom de Théorème de Lambert.

IV. _ Considérons maintenant la cycloïde définie par les deux équations :

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = a(1 - \cos\varphi)$$

l'aire exprimée par l'angle φ sera :

$$\int y\,dx = a^2\int(1-\cos\varphi)^2 d\varphi$$

ce qui s'intégrera en observant que :

$$\begin{aligned}(1-\cos\varphi)^2 &= 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi \\ &= 1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \\ &= \frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\end{aligned}$$

Il en résulte en effet :

$$\int(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi + C.$$

et l'on obtient, pour la portion du cycloïde comprise entre deux points consécutifs de rencontre avec l'axe des abscisses, et déterminée par consé=quent par la valeur de φ croissant de zéro à 2π, cette expression :

$$a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = 3\pi a^2$$

c'est à dire, comme Galilée l'a découvert le premier, trois fois l'aire du cercle générateur.

En rapportant la cycloïde à son sommet, ce qui se fait en changeant y en $2a-y$, on aurait eu un calcul plus simple, car les équations devenant :

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = a(1 + \cos\varphi)$$

On obtient ainsi immédiatement :

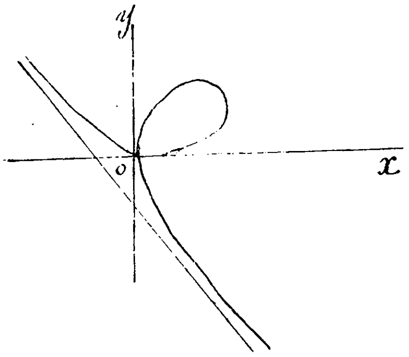
$$\int y\,dx = a^2\int \sin^2\varphi\,d\varphi = a^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right)$$

Une dernière application aura pour objet le folium de Descartes, dont l'équation en coordonnées rectangulaires est :

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Cette courbe est formée d'une boucle et de deux branches infinies se coupant à l'origine des coordonnées, et ayant pour asymptote la droite.

$$x + y + a = 0$$



comme on le reconnaît aisément. La détermination de l'intégrale $\int y\,dx$, qui est, dans ce cas, possible sous forme finie algébrique, résulterait sans difficulté de méthodes toutes semblables à celles qui ont été exposées pour l'intégration des irrationnelles composées avec la racine carrée d'un polynôme. Mais on peut y parvenir par une autre voie en substituant aux coordonnées rectilignes les coordonnées polaires, et faisant

$$x = \rho \cdot \cos\omega \qquad y = \rho \sin\omega$$

L'équation de la courbe devient alors :

$$\rho = \frac{3a \sin\omega \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega}$$

et l'aire dépend de l'intégrale :

$$\frac{1}{2}\int \rho^2 d\varphi = \frac{9a^3}{2}\int \frac{\sin^2\omega \cos^2\omega}{(\cos^3\omega + \sin^3\omega)}\, d\omega$$

qui porte sur une fonction rationnelle de $\sin\omega$ et $\cos\omega$. On observera que cette fonction ne change point en mettant $\omega + \pi$ au lieu de ω, de sorte qu'il suffira de poser $\operatorname{tang}\omega = z$ pour la ramener à être rationnelle en z; il vient ainsi :

$$\frac{9a^2}{2}\int \frac{\sin^2\omega \cos^2\omega}{(\cos^3\omega + \sin^3\omega}\, d\omega = \frac{3a^2}{2}\int \frac{3z^2 dz}{(1+z^3)^2}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int \frac{d\,(1+z^3)}{(1+z^3)^2}$$

$$= -\frac{3a^2}{2(1+z^3)}$$

l'aire de la boucle correspondra aux limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ou bien : $z = 0$, $z = \infty$, et sera simplement : $\frac{3a^2}{2}$

Rectification des courbes planes.

On a obtenu pour la longueur d'un arc de courbe plane rapportée à des coordonnées rectangulaires, la formule

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

où les limites x_0 et x désignent les abscisses des extrémités de l'arc. C'est à la parabole $y^2 = 2px$ que nous en ferons la première application, et comme on a rationnellement : $x = \frac{y^2}{2p}$, $dx = \frac{y\,dy}{p}$, nous prendrons y pour variable indépendante en écrivant :

$$s = \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p} \int_{y_0}^{y} \sqrt{y^2 + p^2}\, dy$$

Or, on peut immédiatement conclure cette intégrale, de celle qui exprime l'aire de l'hyperbole, savoir :

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \log\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \text{const}^{e}$$

en faisant $a^2 = -p^2$, et en écrivant y au lieu de x, il vient ainsi :

$$\int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2} + \frac{1}{2}\, p^2 \log\left(y + \sqrt{y^2 + p^2}\right) + \text{const}^{e}$$

Si l'arc est compté à partir du sommet, on déterminera la constante de manière que le premier membre s'annule pour $y = 0$, et on trouvera :

$$s = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{1}{2}\, p \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}$$

Le terme algébrique dans cette expression, représente la portion de la tangente à l'extrémité de l'arc, comprise entre le point de contact et l'axe des y. Comme exercice de calcul, j'indiquerai encore le procédé suivant pour y parvenir :

Soit $y = \frac{pz}{\sqrt{1 - z^2}}$, d'où : $dy = \frac{p\,dz}{(1 - z^2)\sqrt{1 - z^2}}$, on aura :

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = p \int \frac{dz}{(1 - z^2)^2}$$ et pour intégrer cette fraction rationnelle en z, il suffira de la décomposer en fractions simples, ce qui donne :

$$\frac{1}{(1 - z^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1 - z)^2} + \frac{1}{(1 + z)^2} + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 + z}\right]$$

Nous en conclurons :

$$\int \frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right] + \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z}$$
$$= \frac{1}{2(1-z^2)} + \frac{1}{4}\log\frac{1+z}{1-z}$$

et en remplaçant z par sa valeur en y : $z = \frac{y}{\sqrt{y^2+p^2}}$, on retrouvera bien le résultat précédemment obtenu, si l'on remarque, à l'égard du terme logarithmique, que :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{\sqrt{y^2+p^2}+y}{\sqrt{y^2+p^2}-y} = \frac{(\sqrt{y^2+p^2}+y)^2}{p^2}$$

Comme seconde application de la formule de rectification, nous allons considérer l'ellipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

d'où l'on tire : $\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$

et par conséquent :

$$S = \int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx$$

Si l'on pose, suivant l'usage :

$$a^2-b^2 = a^2e^2$$

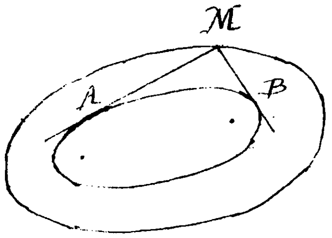
on aura plus simplement :

$$S = \int\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{a^2-e^2x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)(a^2-e^2x^2)}}\,dx$$

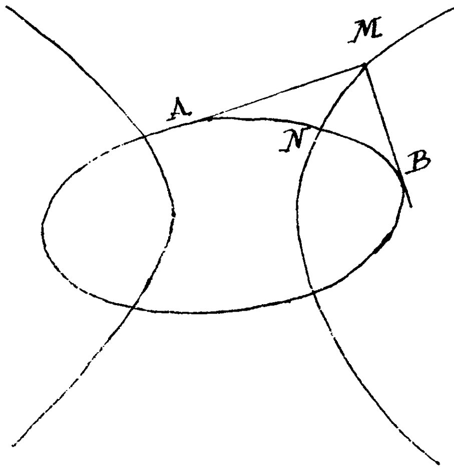
Cette intégrale, où figure la racine carrée d'un polynôme du 4^e degré, nous a précédemment servi d'application de la substitution générale qui permet d'abaisser d'une unité le degré supposé pair de la fonction placée sous le radical. Un autre moyen d'obtenir cet abaissement consiste à faire $x^2 = t$, la transformée est en effet :

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{a^2-e^2t}{a^2-t}}\,\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\frac{(a^2-e^2t)\,dt}{\sqrt{t(a^2-t)(a^2-e^2t)}}$$

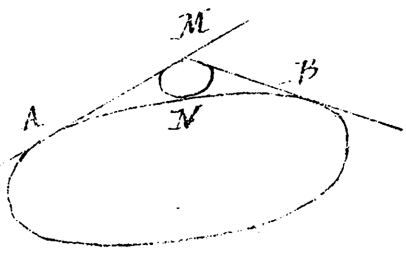
et représente par conséquent une fonction de seconde espèce. Or M^r Liouville a démontré à l'égard de ces intégrales qu'elles ne peuvent être exprimées sous forme finie, à l'aide des signes algébriques, logarithmiques, et exponentiels. Les arcs de sections coniques représentent donc un tout autre genre de grandeur que les arcs de cercle ; ainsi on ne peut ni les ajouter, ni les multiplier par des constructions où l'on emploierait des courbes algébriques de degré quelconque. Ils donnent lieu toutefois à de belles et importantes propositions de géométrie, telles que celle-ci :



1° Considérant deux ellipses décrites des mêmes foyers, si d'un point quelconque M de l'une d'elles on mène des tangentes MA, MB à l'autre, l'arc AB compris entre les points de contact diminué de la somme AM + BM est une quantité constante.



2° Faisons la même construction en supposant le point M sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, qui la rencontre en N ; alors la différence des arcs NA et NB sera égale à la différence des tangentes MA et MB.

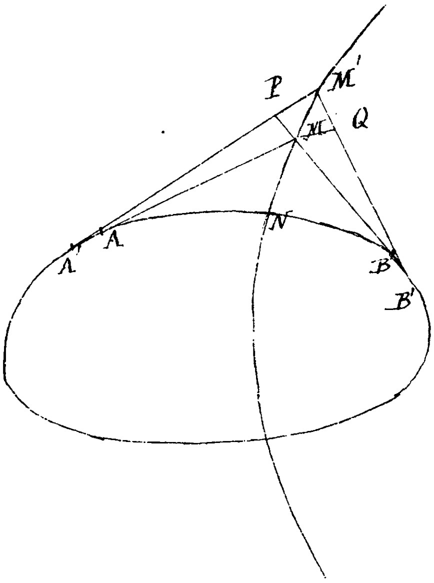


3° Considérons enfin deux tangentes MA et MB menées à l'ellipse par un point quelconque ; si l'on construit un cercle tangent aux deux droites et à la courbe en N, la différence des arcs NA et NB sera encore égale à MA − MB.

Le premier de ces théorèmes a été démontré par un géomètre anglais, M. Graves, qui l'a étendu aux coniques sphériques ; les suivants sont dus à M. Chasles (1) ainsi que plusieurs autres propositions du plus grand intérêt sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques homofocales. Voici la démonstration du second théorème d'après l'illustre géomètre.

Soit AM la portion de tangente à l'ellipse comprise entre le point de contact A et l'hyperbole homofocale. J'envisage comme fonction d'une même variable λ cette quantité que j'appelle t ainsi

(1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Année 1844.
Voyez aussi le Traité des sections coniques de Mr Salmon, 2e édition page 297.



que l'arc de la courbe $NA = s$. Cela étant si en faisant croître λ de sa différentielle on passe du point A au point infiniment voisin A', la distance AA' représentera ds aux infiniment petits près du 3^e ordre, et la direction $A'A$ prolongée jusqu'au point de rencontre en M' avec l'hyperbole donnera : $A'M' = t + dt$. Or, en projetant le point M en P sur $A'M'$, nous aurons aux infiniment petits près du second ordre : $AP = AM = t$, ce qui permet d'écrire :

$$A'M' = t + dt = ds + t + PM'$$

et par conséquent :

$$dt = ds + PM'.$$

Construisons de même les tangentes infiniment voisines MB, $M'B'$ et projetons le point M en Q sur $M'B'$, on obtiendra semblablement si l'on considère la longueur $MB = T$ et l'arc $NB = S$ comme fonction de λ :

$$dT = dS + M'Q.$$

Mais d'après la propriété de l'hyperbole homofocale, les angles de la tangente MM' avec les tangentes à l'ellipse $M'A$ et $M'B$ sont égaux ; on a donc $M'P = M'Q$ et par suite :

$$dt - dT = ds - dS.$$

On en conclut :

$$t - T = s - S + C$$

et j'ajoute que la constante est nulle, car les deux arcs et les deux segments de la tangente s'évanouissent en même temps quand on fait les points M et N.

Me bornant à ce théorème, je vais maintenant donner le développement en série du quadrant de l'ellipse, c'est à dire de l'intégrale $\int_0^a \frac{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$, ou plutôt de celle-ci : $\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - e^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ en supposant égal à l'unité le grand axe. Je remarque à cet effet qu'entre les limites de l'intégration, x ne surpasse pas l'unité, et que l'excentricité e est une quantité constante moindre que un, de sorte qu'on aura en série convergente :

$$(1-e^2x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1}{2.4}e^4x^4 - \frac{1.3.}{2.4.6}e^6x^6 - \dots\dots$$

Nous en conclurons :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}e^2\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2.4}e^4\int_0^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} - \dots\dots$$

et comme nous avons obtenu généralement :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\dots\dots 2n-1}{2.4.6\dots\dots 2n}\pi$$

d'où :

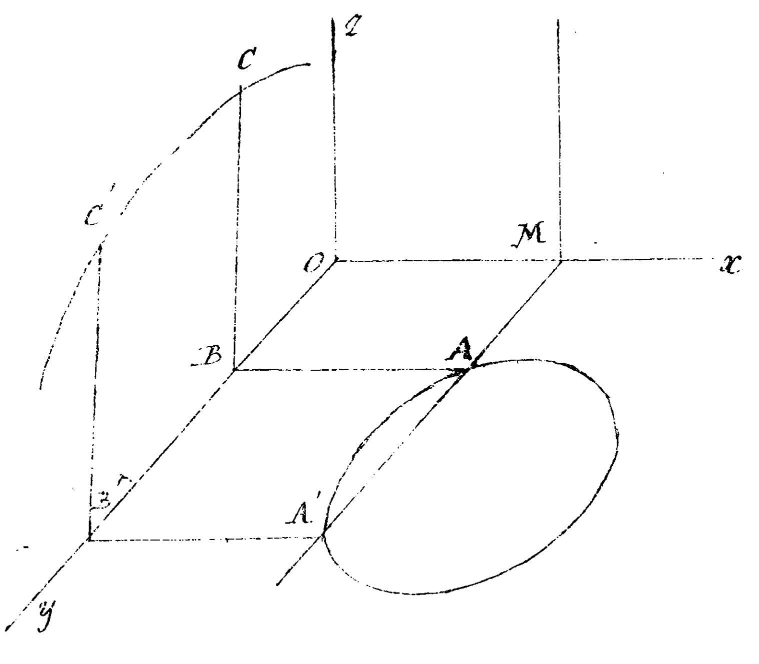
$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\dots\dots 2n-1}{2.4.6\dots\dots 2n}\frac{\pi}{2}$$

il vient, pour le développement cherché :

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3e^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5e^6 - \dots\right]$$

Volumes des corps limités par des surfaces quelconques.

I. — Soit par rapport à trois axes coordonnés rectangulaires $z = f(x,y)$ l'équation d'une surface quelconque ; nous nous proposons d'évaluer le volume entre le plan des xy, cette surface et un cylindre parallèle à l'axe des z, dont



la trace $\varphi(x,y) = 0$ soit une courbe fermée.

A cet effet, coupons le solide par le plan $x = OM$; figurons sur le plan des xy en $BCC'B'$ l'intersection ainsi obtenue qui s'y projette en véritable grandeur et traçons aussi la courbe $\varphi(x,y) = 0$. En supposant à son égard qu'à toute valeur $x = OM$ de l'abscisse, correspondent seulement deux ordonnées :

$$y = AM \qquad y_1 = A'M$$

nous commencerons par évaluer l'aire de la courbe,

$$z = f(OM, y)$$

comprise entre ces deux ordonnées, et qui est représentée sur la figure par $BB'CC'$, les points BB' étant les projections sur Oy de A et A'. On obtiendra ainsi l'intégrale définie

$$\int_{AM}^{A'M} f(OM, y)\, dy$$

où il importe d'observer que la variable x qui entre dans OM, AM, $A'M$ est supposée constante, faisant pour plus de clarté

$$y = AM = \theta(x)$$

$$y_1 = A'M = \theta_1(x)$$

nous poserons :

$$BB'CC' = \int_{AM}^{A'M} f(OM, y)\, dy = \int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} f(x, y)\, dy = \Theta(x)$$

Cela étant, si l'on partage le volume proposé en éléments infiniment petits par des plans perpendiculaires à l'axe Ox et dont la distance constante soit dx, on pourra à ces éléments substituer des cylindres ayant pour bases les sections faites par ces plans, pour hauteur commune dx, et dont les volumes seront représentés par $\Theta(x)\, dx$. La somme de ces éléments entre deux limites $x = a$ $x = b$, c'est à dire l'intégrale $\int_a^b \Theta(x)\, dx$ donnera ainsi la portion du solide proposé qui est comprise entre les plans $x = a$, $x = b$, et nous obtiendrons le volume entier V, en faisant correspondre les abscisses a et b aux points extrêmes de la courbe $\varphi(x, y) = 0$ où la tangente est parallèle à l'axe des y, ce qui donne les deux équations :

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \frac{d\varphi'(x, y)}{dy} = 0$$

En conduisant ainsi à l'expression :

$$V = \int_0^b \Theta(x)\, dx = \int_a^b dx \int_{\theta(x)}^{\theta_1(x)} f(x, y)\, dy$$

la géométrie donne une notion analytique nouvelle, extension de la notion fondamentale de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\, dx$, c'est celle de l'intégrale double d'une fonction de deux variables $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, calculée en supposant que ces variables x et y représentent tous les points de l'intérieur d'une courbe fermée $\theta(x, y) = 0$. Mais nous ne nous occuperons point dans ce Cours de l'étude des intégrales doubles, qui est d'une grande importance en Analyse, et je me bornerai à éclaircir par deux applications principales les considérations précédentes.

II. Soit l'Ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et pour base du cylindre $\varphi(x,y)=0$ l'ellipse quelconque : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ce qui donnera :

$$y = f(x) = -\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

$$y_1 = f_1(x) = +\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

Nous aurons pour déterminer $\Theta(x)$ en considérant seulement la valeur positive de z, l'expression :

$$\Theta(x) = c\int_{-\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}}^{+\beta\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

qu'il est possible d'obtenir sous une forme assez compliquée à l'aide de termes algébriques et transcendants. Mais si les limites de l'intégrale sont précisément les valeurs de y qui annulent la quantité sous le radical, la formule relative à l'aire du cercle :

$$\int_{-A}^{+A}\sqrt{A^2-y^2} = \pi A^2$$

donne la valeur purement algébrique :

$$\Theta(x) = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

La base du cylindre dans cette supposition n'est autre que la trace de la surface sur le plan des xy, de sorte que l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x}\Theta(x)\,dx = \pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}-x_0+\frac{x_0^3}{3a^2}\right)$$

représentera le volume de la portion d'Ellipsoïde située au-dessus du plan des xy et comprise entre deux plans conduits perpendiculairement à l'axe des x aux distances x_0 et x de l'origine. Or les valeurs extrêmes de l'abscisse sont évidemment $x=-a$ et $x=+a$, et nous aurons pour la moitié du volume total :

$$V = \pi bc \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{2\pi abc}{3}$$

III. – En général, pour déterminer le volume limité par une surface fermée :

$$F(x, y, z) = 0$$

que nous supposerons donner seulement deux valeurs de z en fonction de x et de y, on prendra au lieu du cylindre quelconque $\varphi(x, y) = 0$, le cylindre circonscrit à cette surface, et la différence des volumes qui se rapportent à la plus grande et à la plus grande valeur de z, fournira le résultat cherché. Or, la condition pour que le plan tangent :

$$(X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} = 0$$

Soit parallèle à l'axe des z étant : $\frac{dF}{dz} = 0$, le lieu des points de contact de tous ces plans, et par conséquent la courbe de contact du cylindre circonscrit sera représenté par :

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \frac{dF(x, y, z)}{dz} = 0$$

et l'élimination de z donne par conséquent l'équation cherchée : $\varphi(x, y) = 0$. Il restera enfin à calculer les valeurs limites de x, qui correspondent aux points où la tangente à cette courbe est parallèle à l'axe des y d'après les équations :

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = 0$$

Mais on aura un procédé plus simple, si l'on observe qu'en ces points le plan tangent est perpendiculaire à l'axe des x, on les obtiendra en effet par les relations :

$$F(x, y, z) = 0 \qquad \frac{dF}{dz} = 0 \qquad \frac{dF}{dy} = 0$$

IV. – Pour seconde application, je donnerai d'après M. Catalan (1) l'évaluation du volume de la portion du cylindre circulaire :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

---

(1) Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples ; Journal de M. Liouville, Tome IV page 323.

comprise au-dessus du plan des xy, et limité par la surface :

$$z = \sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}$$

On ne peut plus alors obtenir sous forme finie la fonction $\Theta(x)$ l'intégrale $\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,dy = \int\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{\sqrt{(1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2)(1-x^2-y^2)}}\,dy$ dépendant des fonctions elliptiques, puisque la variable y entre au quatrième degré sous le radical carré ; nous procéderons comme il suit. Supposant les constantes α et β moindres que l'unité, j'observe d'abord que toute section de la surface

$$z = \sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2x^2}{1-x^2-y^2}}$$

par un plan perpendiculaire à l'axe des z est une ellipse. C'est ce que montre l'équation écrite de cette manière :

$$(z^2-\alpha^2)x^2+(z^2-\beta^2)y^2=z^2-1.$$

et on reconnaît que pour $z<1$ la section est imaginaire, qu'elle donne un seul point, l'origine des coordonnées pour $z=1$, puis une suite d'ellipses grandissant avec z, et ayant pour limite le cercle $x^2+y^2=1$ quand on suppose cette quantité infinie. D'après cela, nous modifierons la méthode générale en décomposant le solide, non plus en tranches parallèles au plan des yz, mais en couronnes cylindriques parallèles à l'axe des z, et dont voici l'expression :

Soit : $S = \pi\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$ l'aire de l'ellipse :

$$(z^2-\alpha^2)x^2+(z^2-\beta^2)y^2=z^2-1$$

si l'on fait croître de z de dz, S croîtra pareillement de sa différentielle dS, et le volume compris entre les deux cylindres concentriques infiniment voisins, dont les bases sont les ellipses qui correspondent aux valeurs z et $z+dz$ sera $z\,dS$, à un infiniment petit près du second ordre. La somme de tous ces éléments lorsque z croît de l'unité à l'infini, donne donc pour le volume cherché l'intégrale :

$$V = \int_1^\infty z\,dS = \pi\int_1^\infty z\,d\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right]$$

On remarquera combien est simple un pareil résultat, eu égard à l'extrême complication qui s'était offerte en traitant par la méthode générale l'intégrale double proposée. Pour le réduire encore, nous considérerons, au lieu de l'intégrale prise depuis $z=1$ jusqu'à $z=\infty$, l'intégrale indéfinie, et nous écrirons :

$$\int z\, d\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right] = \frac{z(z^2-1)}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \int \frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\, dz$$

C'est le second membre de cette égalité qui exige une transformation que nous allons faire, car il donnerait pour $z=\infty$ la différence indéterminée de deux quantités infinies. Je partirai à cet effet de l'identité :

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}{z}\right] = \frac{z^4-\alpha^2\beta^2}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} = \frac{z^2}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \frac{\alpha^2\beta^2}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

d'où on tire par l'intégration :

$$\frac{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}{z} = \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \int \frac{\alpha^2\beta^2\, dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

Eliminant donc au moyen de cette relation l'intégrale $\int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$ qui devient infinie avec z, nous trouvons pour résultat :

$$\int z\, d\left[\frac{z^2-1}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right] = \frac{z(z^2-1)}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \frac{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}{z}$$

$$+ \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \int \frac{\alpha^2\beta^2\, dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

$$= \frac{z^2(\alpha^2+\beta^2-1)-\alpha^2\beta^2}{z\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} + \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \int \frac{\alpha^2\beta^2\, dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}$$

et aucun des termes de cette équation ne devenant plus infini aux limites, on en conclut la valeur :

$$V = \pi\left[\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} + \int_1^\infty \frac{dz}{\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}} - \int_1^\infty \frac{\alpha^2\beta^2\, dz}{z^2\sqrt{(z^2-\alpha^2)(z^2-\beta^2)}}\right]$$

Bientôt nous en verrons l'application à une question importante.

Quadrature des surfaces courbes quelconques

L'aire d'une portion de surface courbe comprise dans l'intérieur d'un contour fermé quelconque, se définit comme la limite vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite, dont toutes les faces diminuent indéfiniment, et terminée par un contour polygonal, ayant le contour donné pour limite. En partant de cette définition, analogue à celle qui a été employée pour la longueur d'une ligne courbe, il faut démontrer que la limite de la surface polyédrale existe, et a une valeur indépendante de la loi de décroissement de ses faces. Mais la démonstration est longue, et afin d'abréger, je traiterai la question en me plaçant à un point de vue différent. Soit $z = f(x,y)$ l'équation de la surface proposée, rapportée à des coordonnées rectangulaires. Je considère d'une part deux plans menés perpendiculairement à l'axe des x, aux distances x et $x+dx$ de l'origine, et de l'autre deux plans perpendiculaires à l'axe des y et aux distances y et $y+dy$. Les quatre plans détermineront sur la surface un quadrilatère ω dont la projection sur le plan des xy sera un rectangle ayant pour côtés dx et dy. Cela posé, j'admettrai qu'on puisse remplacer ω par la portion du plan tangent en un quelconque de ses points qui se projette sur le même rectangle. C'est donc prendre, en nommant λ l'angle du plan tangent considéré avec le plan des xy : $\omega = \dfrac{dx\,dy}{\cos\lambda}$, et comme une variation infiniment petite dans cet angle n'altèrera ω que d'une quantité infiniment petite par rapport à elle-même, on peut considérer le plan tangent au point x, y, z, qui est l'un des sommets du quadrilatère, ce qui donnera :

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{df}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{df}{dy}\right)^2}}$$

On a ainsi, en posant suivant l'usage : $p = \dfrac{df}{dx}$, $q = \dfrac{df}{dy}$,

$$\omega = dx\,dy\sqrt{1+p^2+q^2}$$

Soit maintenant : $\varphi(x,y) = 0$ la projection du contour limite de l'aire ; il s'agira d'effectuer la somme de tous les éléments ω correspondant aux points contenus à l'intérieur de cette courbe, question d'Analyse identique à celle que l'on vient de traiter ; d'où l'on voit qu'on peut assimiler en général l'expression analytique de l'aire d'une surface, à celle du volume d'un cylindre ayant pour trace $\varphi(x,y) =$ et limité par la surface $z = \sqrt{1+p^2+q^2}$. L'application la plus importante concerne l'ellipsoïde : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$; on a alors : $p = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}$ et $q = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$, et la moitié de l'aire totale, sera l'intégrale :

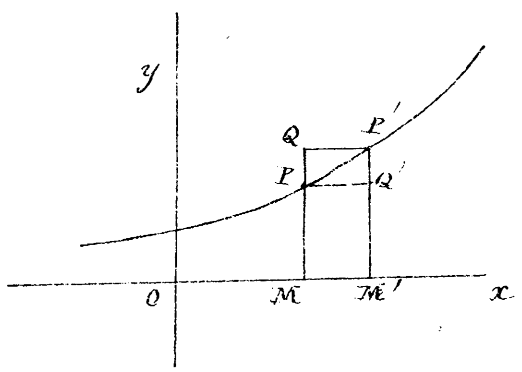
$$\iint \sqrt{\frac{1-\frac{a^2-c^2}{a^4}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^4}y^2}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy$$

Si l'on prend pour la courbe limite, la trace de l'ellipsoïde sur le plan des xy : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. Or en faisant : $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{y}{b} = y'$, ce qui donnera $x'^2+y'^2 = 1$, cette intégrale prendra la forme :

$$\iint \sqrt{\frac{1-\alpha^2x'^2-\beta^2y'^2}{1-x'^2-y'^2}}\,dx'\,dy'$$

où l'on a posé : $\alpha^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}$, $\beta^2 = \frac{b^2-c^2}{b^2}$, quantités qui sont l'une et l'autre inférieures à l'unité lorsqu'on suppose : $a > b > c$. C'est l'expression déterminée précédemment en l'assimilant à un volume, et que Legendre a réussi le premier, par une méthode savante et plus difficile, à réduire aux intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Volume et surface des corps de révolution.



Soit $y=f(x)$ l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires ; je dis que le volume engendré par le segment $MM'PP'$ tournant autour de l'axe des x, et dont la base $MM' = dx$ est égale $\pi\overline{MP}^2dx$ aux infiniment petits près du second ordre. Menons en effet par les points P et P' des parallèles à l'axe, de manière à comprendre le segment entre les rectangles : $MPM'Q'$, $MQM'P'$. Le volume engendré par le segment sera donc compris entre les deux cylindres engendrés par les rectangles, qui, étant de même base, sont entre eux dans le rapport

$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{MQ}^2}$ Or, ce rapport est à la limite égal à l'unité, ce qui démontre la proposition annoncée. On en conclut pour le volume engendré par le segment compris entre deux ordonnées qui correspondent aux abscisses quelconques $x = a$, $x = b$, cette expression :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Pour obtenir l'aire de la surface engendrée par la même courbe, je la considérerai comme la limite de la somme des aires des troncs de cône, décrits par les côtés d'un polygone infinitésimal inscrit. Soit PP' l'un de ces côtés, l'expression de l'aire engendrée sera :

$$\frac{1}{2}\left(\text{circonf. } MP + \text{circonf. } M'P'\right) PP' = 2\pi\left(y + \frac{1}{2}\,dy\right) ds.$$

ou simplement $2\pi y\, ds$ aux infiniment petits près du second ordre. La somme des éléments ainsi déterminés, entre la limite $x = a$ et $x = b$, c'est à dire l'intégrale

$$S = 2\pi \int_a^b y\, ds$$

sera donc l'aire de la surface engendrée par la révolution du segment de la courbe $y = f(x)$ autour de l'axe des abscisses.

Soit, comme exemple, l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on aura :

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \cdot \frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2 y}$$

donc : $$y\, ds = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} \cdot dx$$

Si l'on suppose $a > b$, de sorte que l'ellipse ait tourné autour de son grand axe, on écrira :

$$S = \frac{2\pi b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}} \int \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2}\; dx$$

et l'intégrale à obtenir sera celle qu'on a déterminée (page 232) pour l'aire d'un segment de cercle. En prenant pour limite inférieure zéro, on trouvera donc :

$$S = \frac{\pi b x \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}$$

Si l'on suppose en second lieu $b > a$, l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe, et en écrivant :

$$s = \frac{2\pi b}{a^2\sqrt{b^2-a^2}} \int \sqrt{\frac{a^4}{b^2-a^2} + x^2}\, dx$$

on est ramené à l'intégrale dont dépend la rectification de la parabole, de sorte qu'il vient, en prenant encore zéro pour limite inférieure :

$$s = \frac{\pi b x\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}}{a^2} + \frac{\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{x\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}}{a^2}$$

Evaluation approchée des intégrales.

Les méthodes d'approximation sont de la plus grande importance dans le calcul intégral, à cause du petit nombre de fonctions qu'on peut intégrer sous forme finie explicite. En abordant l'étude de ces méthodes, j'établirai en premier lieu la remarque suivante :

I. — Supposons qu'entre les limites x_0 et X, une fonction $f(x)$ soit développable en série de cette manière :

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + r_n.$$

les termes u_0 u_1 &ᶜᵃ, étant des fonctions continues de x et le reste r_n s'annulant pour n infini, je dis qu'on aura pour toute valeur de la variable comprise entre x_0 et X, le développement en série infinie :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2\,dx + \&^{ca}$$

Effectivement, l'expression proposée de $f(x)$ donnant :

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x} u_1\,dx + \cdots\cdots + \int_{x_0}^{x} u_n\,dx + \int_{x_0}^{x} r_n\,dx$$

il suffit de prouver que $\int_{x_0}^{x} r_n\,dx = 0$ pour n infini. On y parvient à l'aide d'une formule importante que je vais établir. Partant de la relation :

$$f(x) = f(x_0) + (x + x_0) f'\left[x_0 + \theta (x - x_0)\right]$$

donnée par la série de Taylor limitée à ses deux premiers termes, j'observe qu'on peut écrire :

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(x)\, dx$$

de sorte qu'il vient :

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\, dx = (x - x_0) f'\left[x_0 + \theta (x - x_0)\right]$$

ou, en mettant $f(x)$ au lieu de la fonction quelconque $f'(x)$ et posant $\xi = x_0 + \theta (x - x_0)$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = (x - x_0) f(\xi)$$

cette quantité ξ est intermédiaire, comme on voit, entre x_0 et x, de sorte qu'en appliquant ce résultat à l'intégrale de $r_n\, dx$, nous aurons :

$$\int_{x_0}^{x} r_n\, dx = (x - x_0) \rho_n$$

ρ_n désignant ce que devient r_n pour $x = \xi$; mais on a admis que $r_n = 0$ pour n infini ; on a donc également $\rho_n = 0$, ce qui démontre la propriété annoncée. Ajoutons que si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \&^{ca}$$

convergente pour les valeurs de x comprises entre x_0 et X devient divergente pour $x = X$, l'équation :

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} u_0\, dx + \int_{x_0}^{x} u_1\, dx + \&^{ca}$$

aura lieu pour $x = X - \varepsilon$, si petit que soit ε. Or, les deux membres sont des fonctions continues de x, ayant constamment la même valeur, leurs limites pour $\varepsilon = 0$, seront donc égales, pourvu que la série du second membre soit convergente.

J'appliquerai ce qui précède aux développements :

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3.}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \ldots\ldots$$

qu'on tire de la formule du binome, et qui seront convergentes pour x compris entre zéro et l'unité. En intégrant les deux membres et prenant pour limite inférieure des intégrales zéro, nous en conclurons:

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3.}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

la variable étant inférieure à l'unité. Pour $x = 1$, les développements de $\frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ cessent d'avoir lieu, mais les séries obtenues pour arc tang x et arc sin x étant alors convergentes, on trouve que:[1]

$$\text{arc tang } 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&^{ca} \cdots\cdots$$

$$\text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7} + \&^{ca} \cdots\cdots$$

※ Considérons encore l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$ qui est la fonction elliptique de première espèce. En supposant la constante $K < 1$, et x non supérieur à l'unité, on aura:

$$\frac{1}{\sqrt{1-K^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}K^2x^2 + \frac{1.3}{2.4}K^4x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}K^6x^6 + \cdots\cdots$$

et par suite:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{K^2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{K^4x^4}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{K^6x^6}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots$$

Nous en conclurons:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}K^2\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}K^4\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \&^{ca} \cdots\cdots$$

et ce développement subsistant pour $x = 1$, donnera la formule suivante employée en Mécanique dans l'étude du pendule, savoir:

---

(1) La série de Maclaurin donnerait difficilement les développements de arc tang x et arc sin x, que nous tirons immédiatement du calcul intégral, à cause de l'expression compliquée des dérivées d'un ordre quelconque de ces fonctions. (Voir sur ces dérivées le Traité du Calcul différentiel et de Calcul intégral de M. Bertrand, Tome I.)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 K^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 K^6 + \cdots\cdots\right]$$

Si on la rapproche de celle qu'on a établie pour la longueur du quart de l'ellipse :

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-K^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3K^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5K^6 - \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 K^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{K^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{K^6}{5} \cdots\cdots\right]$$

on voit que la première intégrale étant désignée par F et la seconde par E suivant la notation de Legendre, on aura :

$$K^2 \frac{d}{dK}\left(\frac{E}{K}\right) = -F$$

ou bien : $$K \frac{dE}{dK} = E - F$$

relation qui joue un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques.

III. – La méthode d'évaluation approchée des intégrales reposant sur le développement en série convergente de la fonction à intégrer, est donc restreinte au cas où l'on possède un tel développement. Or, le théorème de Maclaurin, qui donne une formule générale de développement, exige la formation des dérivées successives de la fonction et entraîne le plus souvent dans de longs et pénibles calculs, même dans ces cas si élémentaires des expressions arc sin x, arc tang x. A la vérité, on peut, à l'égard du reste, s'affranchir des discussions que nous avons faites, en considérant les fonctions $(1+x)^m$, $\log(1+x)$ par ce beau théorème de Cauchy, savoir :

« Toute fonction sera développable en série convergente, suivant les puissances entières « et croissantes de la variable, si le module de cette variable est inférieur au plus petit module « des valeurs qui rendent la fonction discontinue. » (Cours de Calcul différentiel et intégral de M. Serret, Tome I, page 580.)

Mais le calcul des coefficients subsiste avec toutes ses difficultés, et nous allons maintenant montrer de quelle manière, en admettant seulement la possibilité du développement, on a entièrement réussi à l'éviter.

Soit l'intégrale proposée :

$$u = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

les limites étant finies, et la fonction $\varphi(x)$ étant développable en série convergente depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$, de sorte que l'on ait :

$$\varphi(x) = K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \dots\dots + K_n x^n + \dots\dots$$

Je désignerai par a b ..... l, n - quantités arbitraires comprises entre α et β, et je vais prouver qu'on peut obtenir pour les coefficients A, B ..... I, des valeurs indépendantes de la nature de la fonction $\varphi(x)$ et telles qu'on ait :

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = A\,\varphi(a) + B\,\varphi(b) + \dots + I\,\varphi(l) + R \dots$$

R devenant nul, lorsqu'on néglige les quantités K_n, K_{n+1}, &c., dont l'indice est égal ou supérieur à n.

Effectivement, on a d'une part :

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = (\beta - \alpha) K_0 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} K_1 + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} K_2 + \dots\dots$$

et de l'autre :

$$\begin{aligned} & A\,\varphi(a) + B\,\varphi(b) + \dots\dots + I\,\varphi(l) \\ = \; & K_0 (A + B + \dots\dots + I) - \\ + \; & K_1 (Aa + Bb \dots\dots + Il) \\ + \; & K_2 (Aa^2 + Bb \dots\dots + Il^2) \\ + \; & \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

de sorte qu'on réduira R à contenir seulement K_n K_{n+1} &c., en posant les n équations linéaires :

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= A + B + \dots\dots\dots\dots + I \\ \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} &= A\,a + B\,b + \dots\dots\dots\dots + I\,l \\ \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} &= A\,a^2 + B\,b^2 + \dots\dots\dots\dots + I\,l^2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\beta^n - \alpha^n}{n} &= A\,a^{n-1} + B\,b^{n-1} + \dots\dots\dots\, I\,l^{n-1} \end{aligned}$$

Ces relations, où n'entre rien de relatif à la fonction $\varphi(x)$ déterminent donc $A, B, \dots I$ en fonction de $a, b \dots\dots l$, des limites α, β, et la valeur approchée de l'intégrale se calculera, au moyen des n valeurs de cette fonction, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, ... $\varphi(l)$, sans employer son développement en série. Voici maintenant une importante remarque de Gauss :

III. Multiplions la première égalité par $\frac{1}{x}$, la seconde par

$\frac{1}{x^n}$ &c^{a} et ajoutons membre à membre, il viendra :

$$\frac{\beta}{x}+\frac{\beta^2}{2x^2}+\cdots\cdots+\frac{\beta^n}{nx^n}-\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha^2}{2x^2}-\cdots\cdots-\frac{\alpha^n}{nx^n}$$

$$=A\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{a^{n-1}}{x^n}\right)+B\left(\frac{1}{x}+\frac{b}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{b^{n-1}}{x^n}\right)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+I_1\left(\frac{1}{x}+\frac{l}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{l^{n-1}}{x^n}\right)$$

On reconnaît dans le premier membre le développement de $\log\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)-\log\left(1-\frac{\beta}{x}\right)$ en négligeant $\frac{1}{x^{n+1}}$, $\frac{1}{x^{n+2}}$ &c^{a}, et dans le second, les expressions telles que : $\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{a^{n-1}}{x^n}$ donnent $\frac{1}{x-a}$, en négligeant de même les puissances de $\frac{1}{x}$ supérieures à la n^e. Il en résulte une détermination sous un nouveau point de vue des coefficients $A, B, \ldots I$ par cette condition que la fonction rationnelle

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots\cdots+\frac{I}{x-l}=\sum\frac{A}{x-a}$$

et la quantité transcendante $\log\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)-\log\left(1-\frac{\beta}{x}\right)=\log\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)$ aient aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{n+1}}$ le même développement suivant les puissances décroissantes de x. Je dis de plus, qu'en partant de cette égalité :

$$\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}=\sum\frac{A}{x-a}+\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon'}{x^{n+2}}+\cdots\cdots$$

où ε, ε_1 &c^{a} sont des constantes, on peut retrouver l'expression de l'intégrale définie proposée $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$, et calculer la valeur de R qui donne la mesure de l'approximation. Représentant à cet effet $\log\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ par $\int_\alpha^\beta\frac{dz}{x-z}$, j'observe qu'on aura, en développant suivant les puissances descendantes de x,

$$\int_\alpha^\beta dz\left(\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2}+\frac{z^2}{x^3}+\cdots\right)=\sum A\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\cdots\right)+\frac{\varepsilon}{x^{n+1}}+\frac{\varepsilon'}{x^{n+2}}+\cdots$$

Cela posé, je multiplie par $\varphi(x)$ et j'égale dans les deux membres les termes en $\frac{1}{x}$. Dans le produit :

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\cdots\right)\left(K_0+K_1x+K_2x^2+\cdots\cdots\right)$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ est : $K_0 + K_1 a + K_2 a^2 + \ldots = \varphi(a)$, le même calcul donne : $\varphi(z)$ sous le signe $\int$, et la partie $\frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon_1}{x^{n+2}}$ conduit à la quantité :

$$\varepsilon K_n + \varepsilon' K_{n+1} + \varepsilon'' K_{n+2} + \ldots\ldots \text{ de sorte qu'il vient :}$$

$$\int_\alpha^\beta \varphi(z)\,dz = \sum A\,\varphi(a) + \varepsilon K_n + \varepsilon' K_{n+1} + \ldots$$

ce qui est le résultat qu'il s'agissait d'obtenir :

IV. – Jusqu'ici nous avons laissé entièrement arbitraires les quantités $a, b \ldots\ldots l$; or, l'objet essentiel de l'analyse de Gauss est de les déterminer de manière à ne laisser subsister dans la valeur de R que les coefficients de $\varphi(x)$ de l'ordre le plus élevé qu'il sera possible. Ayant, comme on l'a vu :

$$R = \varepsilon K_n + \varepsilon' K_{n+1} + \varepsilon'' K_{n+2} + \ldots\ldots$$

on disposera donc de ces quantités, qui sont au nombre de n, de manière à avoir : $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0, \ldots\ldots \varepsilon^{n-1} = 0$, et il en résultera cette expression :

$$R = \varepsilon^n K_{2n} + \varepsilon^{(n+1)} K_{2n+1} + \varepsilon^{(n+2)} K_{2n+2} + \ldots\ldots$$

où figurent seulement des termes d'indice égal et supérieur à $2n$. En se fondant sur la théorie des fractions continues, Gauss conclut alors immédiatement de la relation :

$$\log \frac{x-\alpha}{x-\beta} = \sum \frac{A}{x-a} + \frac{\varepsilon^{(n)}}{x^{2n+1}} + \frac{\varepsilon^{(n+1)}}{x^{2n+2}} + \ldots\ldots$$

que les fractions rationnelles. $\sum \frac{A}{x-a}$ pour $n = 1, 2, 3$, &^{ca} sont les réduites successives du développement de $\log \frac{x-\alpha}{x-\beta}$, dont la loi générale est aisée à obtenir. Ne devant rien emprunter à cette théorie, je vais parvenir aux résultats de l'illustre géomètre par une autre voie, en les déduisant des propriétés les plus simples des polynômes X_n de Legendre, dont j'ai précédemment donné déjà la définition

Je suppose en effet qu'en désignant par N une constante, on a cette expression :

$$X_n = N \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

d'où résulte d'abord que toutes les racines de l'équation $X_n = 0$ sont réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. Nous en avons ensuite tiré l'équation différentielle du second ordre (page 168) :

$$(x^2-1)\frac{d^2X_n}{dx^2}+2x\frac{dX_n}{dx}-n(n+1)X_n=0$$

Enfin, l'étude de l'intégrale : $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ nous a donné un polynôme entier $F_n(x)$, page 192, tel que le quotient $\frac{F_n(x)}{X_n}$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable, coincide avec la série :

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots\cdots\right)$$

aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{2n+1}}$. En supposant : $\alpha=-1$, $\beta=1$, on voit que la fraction rationnelle : $\sum\frac{A}{x-a}$ sera précisément : $\frac{F_n(x)}{X_n}$; par conséquent nous devons prendre pour les quantités $a, b, \ldots l$ les racines de l'équation $X_n=0$, et la théorie de la décomposition en fractions simples donnera pour les constantes $A, B \ldots L$, en posant $X_n=F(x)$ les valeurs suivantes

$$A=\frac{F_n(a)}{F'(a)}\qquad B=\frac{F_n(b)}{F'(b)},\ldots\ldots\qquad L=\frac{F_n(l)}{F'(l)}.$$

Elles dépendent du polynôme $F_n(x)$ dont nous avons donné l'origine, et qu'on obtiendrait d'une manière plus simple et plus directe, en remarquant qu'il constitue la partie entière en x dans le produit :

$$X_n\log\frac{x+1}{x-1}=2X_n\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\cdots\cdots\right)$$

mais nous allons en donner l'expression au moyen de la dérivée de X_n.

IV. – Déterminons la constante N dans l'équation :

$$X_n=N\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

par la condition $X_n=1$ pour $x=1$, et en posant $X_n=F(x)$ considérons pour la décomposer en fractions simples, la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(1-x^2)F^2(x)}$$

Les seules racines du dénominateur qui ne soient pas doubles étant 1 et -1, je poserai :

$$\frac{1}{(1-x^2)F^2(x)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1}+\frac{A}{(x-a)^2}+\frac{B}{(x-b)^2}+\cdots\cdots+\frac{L}{(x-l)^2}$$
$$+\frac{A'}{x-a}+\frac{B'}{x-b}+\cdots\cdots+\frac{L'}{x-l}$$

ou pour abréger :

$$\frac{1}{(1-x^2)F^2(x)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \sum\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{A'}{x-a}\right]$$

Cela étant, on a d'abord: $\alpha = -\frac{1}{2F^2(1)}$; $\beta = \frac{1}{2F^2(-1)}$ et par suite:
$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, car on a supposé $F(1) = 1$, et $F(x)$ renfermant seulement des puissances de x de même parité, $F^2(-x)$ a la même valeur que $F^2(x)$

Soit ensuite $x = a + h$, A et A' seront les coefficients des termes en $\frac{1}{h^2}$ et $\frac{1}{h}$, dans le développement du premier membre suivant les puissances croissantes de cette quantité. Or, on a:

$$\frac{1}{1-(a+h)^2} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{2a}{(1-a^2)^2}h + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{F^2(a+h)} = \frac{1}{F'^2(a)}\frac{1}{h^2} - \frac{F''(a)}{F'^3(a)}\frac{1}{h} + \ldots$$

et le produit des seconds membres donne immédiatement les valeurs:

$$A = \frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)} \qquad A'' = \frac{(a^2-1)F''(a) + 2aF'(a)}{(1-a^2)^2F'^3(a)}$$

Mais l'équation différentielle:

$$(x^2-1)F''(x) + 2xF'(x) - n(n+1)F(x) = 0$$

nous montre en y posant $x = a$, que $A'' = 0$, de sorte qu'on a l'égalité suivante:

$$\frac{1}{(1-x^2)F^2(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) + \sum\frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)(x-a)^2}.$$

En intégrant, elle donne:

$$\int_\infty^x \frac{dx}{(1-x^2)F^2(x)} = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} - \sum\frac{1}{(1-a^2)F'^2(a)(x-a)} + \ldots\ldots$$

puisque le second membre s'évanouit pour $x = \infty$.

Or, en développant suivant les puissances décroissantes de x l'intégrale, on aura, $F(x)$ étant du n^e degré, une série de la forme: $\frac{\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{\lambda'}{x^{2n+2}} + \ldots$ d'où la relation:

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \sum\frac{2}{(1-a^2)F'^2(a)(x-a)} + \frac{2\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{2\lambda'}{x^{2n+2}} + \ldots\ldots$$

et on en tire, comme nous avons vu:

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)\,dx = \sum\frac{2\varphi(a)}{(1-a^2)F'^2(a)} + R.$$

si l'on pose :

$$R = 2\left(\lambda K_{2n} + \lambda' K_{2n+1} + \ldots\ldots\right)$$

V. L'intégrale $\int_\alpha^\beta \varphi(z)\,dz$ prise entre deux limites quelconques que je supposerai finies, se transforme en posant

$$z = \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\,x$$

dans celle-ci :
$$\frac{\beta-\alpha}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\,x\right)dx$$

à laquelle s'applique donc la méthode d'approximation que nous venons d'exposer. Cette méthode exige la connaissance des racines $a, b, \ldots l$ des équations $X_n = 0$ et les valeurs des quantités correspondantes $A = \frac{2}{(1-a^2)F'^2(a)}$ $B = \frac{2}{(1-b^2)F'^2(b)}$ $\ldots\ldots$ $L = \frac{2}{(1-l^2)F'^2(l)}$. On les trouvera dans le Mémoire de Gauss, auquel je renverrai, calculées respectivement avec dix et quinze décimales, et je me bornerai à remarquer qu'ayant dans les cas de $n = 1, 2, 3$:

$$X_1 = x, \qquad X_2 = \frac{3x^2-1}{2} \qquad X_3 = \frac{5x^3-3x}{2}$$

on en déduit pour les expressions approchées correspondantes de l'intégrale :

1°

$$(\beta-\alpha)\,\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)$$

2°

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\left[\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

3°

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\left[\frac{5}{9}\,\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\,\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) + \frac{5}{9}\,\varphi\left(\frac{\beta+\alpha}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

Gauss a fait l'application de sa méthode au calcul du logarithme intégral $\int\frac{dz}{\log z}$ prise entre les limites $\alpha = 100,000$ $\beta = 200,000$ et trouve ainsi : pour $n = 2$, $8405,954599$

$n = 3$, $8406,236775$

$$\begin{array}{lll} \text{pour} & n=4, & 8406,242\,970 \\ & n=5, & 8406,243\,117 \\ & n=6, & 8406,243\,121 \\ & n=7 & 8406,243\,121. \end{array}$$

A cette occasion, j'observerai que la partie entière de la valeur numérique de cette intégrale donne très-approximativement le nombre des nombres premiers compris entre les deux limites, car d'après les tables, il y a 9592 nombres premiers de 1 à 100 000, et 17984 de 1 à 200 000; or, la différence est: 8392; c'est, à 14 unités près, le nombre 8406 qui est donné par le logarithme intégral.

VI. Les intégrales définies de cette forme:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

qui s'offrent souvent, donnent lieu à une méthode spéciale d'approximation qu'il convient d'indiquer pour sa simplicité, et aussi afin de donner un second exemple des considérations précédentes.

Soit $F(x)$ le polynôme entier de degré n défini par l'égalité:

$$F(x) = \cos n (\operatorname{arc} \cos x)$$

on aura:
$$F'(x) = n \sin n (\operatorname{arc} \cos x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et par conséquent:
$$F'(x) = n \frac{\sqrt{1-F^2(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$$

Or, de là résulte une approximation du radical $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ par une fraction rationnelle, car on peut écrire:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{F'(x)}{nF(x)} \left[1 - \frac{1}{F^2(x)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{F'(x)}{nF'(x)} \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{F^2(x)} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{F^4(x)} + \cdots\cdots\right]$$

et en observant que le développement suivant les puissances décroissantes de x, de la quantité:

$$\frac{F'(x)}{nF(x)} \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{F^2(x)} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{F^4(x)} + \cdots\cdots\right]$$

est évidemment de la forme:

$$\frac{\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{\lambda'}{x^{2n+2}} + \frac{\lambda''}{x^{2n+3}} + \cdots\cdots$$

nous poserons en conséquence :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{F'(x)}{nF(x)} + \frac{\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{\lambda'}{x^{2n+2}} + \cdots\cdots$$

Cela établi, je rappelle que l'on a :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

de sorte que l'égalité précédente devient :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{F'(x)}{nF(x)} + \frac{\lambda}{x^{2n+1}} + \frac{\lambda'}{x^{2n+2}} + \cdots$$

on aura, en décomposant en fractions simples $\frac{F'(x)}{F(x)}$ et désignant à cet effet par $a, b, \ldots\ldots l$ les n racines de l'équation $F(x) = 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{x-a} + \left(\frac{\lambda}{x^{n+1}} + \frac{\lambda'}{x^{2n+2}} + \cdots\cdots\right)$$

Or, il suffit maintenant de multiplier les deux membres par la fonction :

$$\varphi(x) = K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + \cdots\cdots + K_n x^n + \cdots\cdots$$

et d'égaler ensuite les termes en $\frac{1}{x}$ pour en conclure :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{n}\sum \varphi(a) + R$$

Si l'on pose :

$$R = \lambda K_{2n} + \lambda' K_{2n+1} + \cdots\cdots$$

C'est la formule d'approximation pour l'intégrale que nous avions en vue ; elle prend une autre forme qu'il importe de remarquer, en changeant de variable et faisant $x = \cos\theta$. Effectivement, on a alors $F(x) = \cos n\theta$, d'où l'on voit que les racines $a, b, \ldots\ldots l$ sont données par l'expression : $\cos\frac{(2K+1)\pi}{2n}$ pour $K = 0, 1, 2 \ldots\ldots n-1$, nous obtiendrons en conséquence :

$$\int_0^{\pi} \varphi(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{n}\sum_{0\,K}^{n-1} \varphi\left[\cos\frac{(2K+1)\pi}{2n}\right] + \pi R$$

Soit comme application, l'intégrale $\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\,d\theta$, que représente la moitié de la circonférence de l'ellipse $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$. En désignant la longueur du demi-diamètre $\sqrt{x^2 + y^2}$ par $f(\theta)$, on obtient facilement cette conséquence que le périmètre de l'ellipse est donné approximativement par une circonférence de cercle, dont le rayon sera,

si $n = 2$ $\qquad \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$n = 3$ $\qquad \frac{1}{3}\left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$n = 4$ $\qquad \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + f\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right.$

et ainsi de suite, l'erreur étant en général de l'ordre d'une puissance de l'excentricité égale à $2n$

Table des Matières.

2e Division 1869–70. Analyse, 68e feuille.

(x) Il y a ds cette région des erreurs de numérotage.