ÉLÉMENTS

DE

TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DES LYCÉES ET COLLÉGES

ET DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

Rédigés conformément aux programmes officiels

ET CONTENANT DE NOMBREUX EXERCICES

PAR

H. BOS

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES
AU LYCÉE SAINT-LOUIS

PARIS

LIBRAIRIE CLASSIQUE D'EUGÈNE BELIN

RUE DE VAUGIRARD, N° 52

1867

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

Eug. Belin

Imprimerie générale de Ch. Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.

ÉLÉMENTS
DE TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE.

CHAPITRE PREMIER.

DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

1. Il y a dans un triangle six éléments à considérer, trois côtés et trois angles, et l'on sait que trois de ces éléments suffisent pour déterminer le triangle, pourvu que, parmi les données, il y ait au moins un côté. La géométrie fournit des procédés simples pour construire le triangle dans les quatre cas différents que l'on peut considérer; mais les constructions graphiques n'ont pas une grande précision, et dans beaucoup d'applications il est impossible de s'en contenter. Il est alors nécessaire de remplacer les constructions géométriques par des méthodes qui permettent de *calculer*, avec l'approximation convenable, les éléments inconnus d'un triangle en fonction des données. L'objet essentiel de la *Trigonométrie rectiligne* est l'établissement des formules qui lient entre elles toutes les parties d'un triangle, et l'application de ces formules au calcul des côtés et des angles,

quand on donne assez d'éléments pour que le triangle soit déterminé.

La difficulté principale du problème consiste à trouver des relations entre les côtés et les angles ; on y est arrivé par la considération de certaines fonctions des angles qui portent le nom de *lignes trigonométriques* et que nous allons étudier.

Nous rappellerons d'abord, en les précisant et en les généralisant, les principes de la géométrie sur la mesure des angles au moyen des arcs de cercle.

Des angles et des arcs de cercle.

2. Le plus ordinairement, on prend pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité d'arc le quadrant, et alors on démontre que *la mesure d'un angle est exprimée par le même nombre que la mesure de l'arc décrit de son sommet comme centre et compris entre ses côtés*. Plus généralement, si l'on prend pour unité d'arc une portion quelconque de la circonférence, et pour unité d'angle, l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés l'unité d'arc, l'énoncé précédent sera encore exact. On sait aussi que, pour comparer entre eux les arcs d'une même circonférence, on a coutume de partager la circonférence en 360 parties égales appelées *degrés*, chaque degré en 60 parties égales appelées *minutes*, chaque minute en 60 parties égales appelées *secondes* ; en sorte qu'un arc qui contient un certain nombre de degrés, de minutes et de secondes est dans un rapport connu soit avec la circonférence entière, soit avec le quadrant. Par extension, on peut évaluer aussi les angles en degrés, minutes et secondes, si l'on appelle *angle d'un degré, d'une minute, d'une seconde*, l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés un arc d'un degré, d'une minute ou d'une seconde. C'est ainsi que les angles sont toujours mesurés dans la pratique.

3. Mais il est souvent plus commode de prendre pour unité d'arc, non plus une partie aliquote de la circonférence, mais un arc dont la *longueur* ait un rapport simple avec le rayon, par exemple, l'arc dont la longueur est égale au rayon; cette nouvelle unité d'arc est facile à exprimer en degrés, minutes et secondes; car dans le cercle de rayon R, la demi-circonférence dont la longueur est πR équivaut à 180^0, et l'arc dont la longueur est R vaut

$$\frac{180^0}{\pi} = 180^0 \times 0{,}318309886\ldots$$
$$= 57^0\ 17'\ 44'', 80\ldots$$

Cela posé, soit l la longueur d'un arc pris dans la circonférence de rayon R, et soit ω la longueur de l'arc semblable, pris dans le cercle de rayon 1; on aura par un principe de géométrie connu :

$$\frac{l}{R} = \frac{\omega}{1};$$

ou bien $$l = \omega R;$$

formule simple, qui sert à comparer les longueurs des arcs de rayons différents.

Voyons maintenant comment sera exprimée la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur l dans la circonférence du rayon R; il faut prendre pour unité d'angle l'angle qui intercepte entre ses côtés l'unité d'arc, c'est-à-dire l'angle de $57^0\ 17' 44'', 80\ldots$, et alors, en vertu du théorème de géométrie rappelé précédemment, la mesure de l'angle sera la même que celle de l'arc compris entre ses côtés, c'est-à-dire $\frac{l}{R}$ ou ω.

Donc, *lorsqu'on prend pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés un arc égal au rayon, la mesure d'un angle quelconque est exprimée par le même nombre que la* LONGUEUR *de l'arc décrit de son sommet comme centre avec l'unité pour rayon, et compris entre ses côtés.*

4. Les angles d'un triangle sont toujours inférieurs à 180°; de plus, ils sont essentiellement positifs; par conséquent, les arcs qui les mesurent sont positifs et moindres qu'une demi-circonférence. On pourrait donc, à la rigueur, se borner à considérer de pareils arcs; mais il est avantageux, en vue des applications ultérieures qu'on aura à faire des formules trigonométriques, de les établir avec toute la généralité possible, c'est-à-dire pour des arcs tout à fait quelconques; nous allons dans ce but généraliser la définition élémentaire de l'arc de cercle.

5. DÉFINITION DE L'ARC DE CERCLE. — Considérons un cercle quelconque O (fig. 1), et prenons un point fixe A sur la circonférence; si l'on imagine qu'un mobile, partant du point A, se meuve sur la circonférence dans le sens de la flèche, et s'arrête au point M, le chemin parcouru par ce mobile sera un *arc de cercle;* le point A est l'*origine* de cet arc, et le point M en est l'*extrémité*. Le point mobile peut d'ailleurs, dans son mouvement, faire un nombre quelconque de fois le tour de la circonférence, et par conséquent décrire un arc de cercle aussi grand qu'on voudra. On peut aller plus loin et considérer des arcs de cercle *négatifs :* il suffit, pour cela, de supposer que le point décrivant marche, à partir du point A, en sens inverse de la flèche. D'après

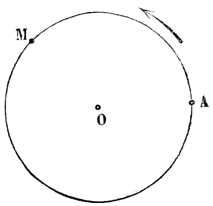

Fig. 1.

cette définition, un arc de cercle est une quantité qui peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ en passant par tous les états de grandeur.

La notion d'angle pourrait être généralisée de la même manière; nous ne nous y arrêterons pas.

6. Dans tout le cours de ce chapitre, nous supposerons que *le cercle dans lequel on considère les arcs a pour rayon l'unité;* la circonférence est alors égale à 2π, la demi-circonférence à π, et le quart de la circonférence ou le *quadrant*, à $\frac{\pi}{2}$. De plus, nous exprimerons ordinairement les arcs par leurs longueurs, ou plus exactement par leurs rapports au rayon; l'arc égal à 1 sera par conséquent l'arc qui est égal au rayon; sa valeur en degrés est, comme nous l'avons vu,

$$\frac{180^0}{\pi} = 57^0\,17'\,44'',80\ldots.$$

7. Relation entre deux arcs qui ont la même extrémité. — Lorsque deux arcs ont la même extrémité, leur différence *algébrique* est un nombre entier de circonférences positives ou négatives. Cela est de toute évidence quand les deux arcs ont le même signe, c'est-à-dire quand ils ont été parcourus dans le même sens par le point décrivant. Quand les deux arcs ont des signes contraires, les mobiles qui décrivent ces arcs partent tous les deux du point A (fig. 2), dans des sens opposés, et arrivent au même point M; il en résulte clairement que la somme des chemins parcourus, *considérés en valeur absolue*, est égale à un nombre entier de circonférences; or, si l'on donne à l'un de ces arcs le signe —, la somme de leurs valeurs absolues sera la différence de leurs valeurs relatives;

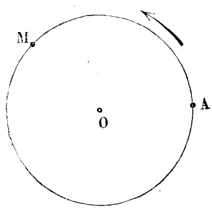

Fig. 2.

donc, encore dans ce cas, la différence des deux arcs pris avec leurs signes est égale à un nombre entier de circonférences positives ou négatives.

En désignant alors par α l'un des arcs terminés en M, tous les arcs ayant la même extrémité seront compris dans la formule

$$2k\pi + \alpha,$$

où k est un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif.

8. Arcs complémentaires. — On appelle *complément* d'un arc ce qu'il faut lui ajouter pour avoir un quadrant; d'après cette définition, le complément de l'arc x aura pour expression $\frac{\pi}{2} - x$; il est clair que le complément d'un arc peut être positif ou négatif, et avoir une grandeur tout à fait quelconque.

Quand on connaît l'extrémité M d'un arc dont l'origine est A (fig. 3), il est facile de construire le complément de cet arc. Je mène le diamètre AA′ qui passe par l'origine de l'arc donné, et le diamètre perpendiculaire BB′. Soit B celle des deux extrémités de ce diamètre, où serait terminé l'arc positif $\frac{\pi}{2}$, compté à partir du point A. Je prendrai le point B pour origine de l'arc complémentaire, et je supposerai de plus que le sens des arcs positifs qui ont pour origine le point B est inverse du sens des arcs positifs partant du point A. Ces conventions faites, et x désignant l'arc AM, pour construire l'arc $\frac{\pi}{2} - x$, j'imagine qu'un mobile parte du point B dans le sens de la flèche, et décrive d'abord l'arc $\frac{\pi}{2}$; il arrivera ainsi au

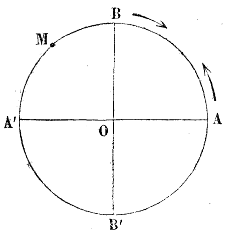

Fig. 3.

point A; il devra ensuite parcourir un arc égal à $(-x)$, c'est-à-dire faire précisément le même chemin que le mobile, qui a décrit l'arc x à partir du point A; il s'arrêtera donc au point M. Ainsi le complément de l'arc AM aura le point B pour origine et le point M pour extrémité.

En résumé, si l'on observe les conventions que nous avons faites, *deux arcs complémentaires auront toujours même extrémité; mais leurs origines seront distantes d'un quadrant, et, de plus, le sens dans lequel on compte les arcs positifs sera inverse pour les deux arcs.*

9. Arcs supplémentaires. — On appelle *supplément* d'un arc ce qu'il faut lui ajouter pour obtenir une demi-circonférence; ainsi le supplément de l'arc x aura pour expression $\pi - x$.

Soit A (fig. 4) l'origine de l'arc x, et M son extrémité; pour construire l'arc $\pi - x$, je ferai parcourir au point mobile un arc positif égal à π, à partir du point A; il arrivera ainsi en A'; si ensuite, à partir de ce point, il décrit l'arc $(-x)$, il arrivera en un point M', situé du même côté du diamètre AA'

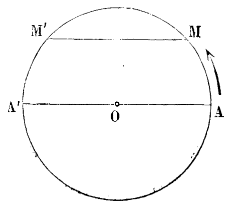

Fig. 4.

que le point M, et qui sera distant du point A' d'un arc égal à l'arc AM; en d'autres termes, *les extrémités* M *et* M' *des deux arcs supplémentaires sont sur une même parallèle au diamètre* AA', *qui passe par leur commune origine.*

Définition des lignes trigonométriques.

10. Considérons le cercle dont le rayon est égal à 1, cercle qu'on appelle quelquefois le cercle *trigonométrique;* soit A (fig. 5) l'origine des arcs, ABA'B' le sens des arcs positifs; je mène le diamètre AA′ qui passe par l'origine de l'arc, et le diamètre perpendiculaire BB′; ces deux diamètres partagent la circonférence en quatre parties égales, qui s'appellent le 1er, le 2e, le 3e et le 4e quadrant, quand on les parcourt successivement dans le sens ABA′B′.

Prenons un arc quelconque AM terminé en M, et de son extrémité, abaissons la perpendiculaire MP sur le diamètre AA′; le nombre qui mesure cette perpendiculaire s'appelle le *sinus* de l'arc AM; quand le point M tombe dans le 1er ou le 2e quadrant, la perpendicu-

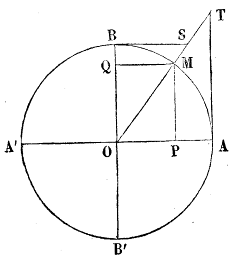

Fig. 5.

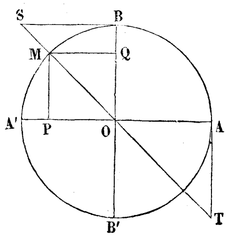

Fig. 6.

laire MP est située au-dessus du diamètre AA′ (fig. 5 et 6); elle est au-dessous du diamètre AA′, quand le point M

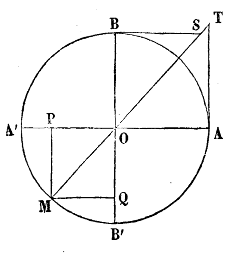

Fig. 7.

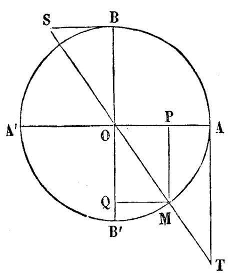

Fig. 8.

tombe dans l'un des deux derniers quadrants (fig. 7 et 8); on convient de regarder le sinus comme positif dans le premier cas et comme négatif dans le second. Ainsi, dans les figures 5 et 6, le sinus de l'arc AM est $+$MP, et dans les figures 7 et 8, le sinus de l'arc AM est $-$MP.

Par le point A, menons une tangente au cercle jusqu'à la rencontre du diamètre qui passe par l'extrémité M de l'arc. La longueur de la ligne AT, comprise entre le point A et le point de rencontre s'appelle la *tangente* de l'arc AM; elle est positive, quand elle est portée au-dessus du diamètre AA′, et négative quand elle est portée au-dessous. Ainsi dans les figures 5 et 7, la tangente de l'arc AM est égale à $+$AT, tandis que dans les figures 6 et 8, la tangente de l'arc AM est égale à $-$AT.

Enfin la distance du centre du cercle à l'extrémité de la tangente s'appelle la *sécante* de l'arc AM; on est convenu de la regarder comme positive, quand elle est portée dans le même sens que le rayon qui passe par l'extrémité de l'arc, et comme négative quand elle est portée en sens contraire de ce rayon. Par conséquent, dans les figures 5 et 8, la sécante de l'arc AM est $+$OT, et dans les figures 6 et 7, la sécante de l'arc AM est égale à $-$ OT.

On peut alors poser les définitions générales suivantes :

Dans un cercle, dont le rayon est égal à l'unité, le SINUS *d'un arc est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de l'arc sur le diamètre qui passe par l'origine; il est positif ou négatif, suivant qu'il est porté au-dessus ou au-dessous de ce diamètre.*

La TANGENTE *d'un arc est la portion de la tangente au cercle menée par l'origine de l'arc, comprise entre cette origine et le diamètre qui passe par l'extrémité de l'arc; elle est positive ou négative, suivant qu'elle est portée au-dessus ou au-dessous du diamètre qui passe par l'origine.*

La SÉCANTE *d'un arc est la distance du centre à l'extrémité de la tangente; elle est positive ou négative, suivant* *qu'elle est portée dans le même sens que le rayon qui passe par l'extrémité de l'arc ou en sens contraire.*

11. Il est très-important de remarquer que le sinus, la tangente et la sécante d'un arc sont des *nombres abstraits;* car ce sont des longueurs exprimées en nombres dans une figure où l'unité de longueur est supposée être le rayon. Si l'on supposait le rayon OA différent de l'unité, le sinus, la tangente et la sécante de l'arc ne seraient plus les longueurs MP, AT et OT, mais bien les rapports $\frac{MP}{OA}$, $\frac{AT}{OA}$, $\frac{OT}{OA}$, c'est-à-dire des nombres abstraits; c'est pour cette raison qu'on donne quelquefois le nom de *rapports trigonométriques* au sinus, à la tangente et à la sécante d'un arc.

12. On appelle *cosinus*, *cotangente* et *cosécante* d'un arc, le sinus, la tangente et la sécante de l'arc complémentaire.

Menons le diamètre BB′ perpendiculaire au diamètre AA′ : nous avons vu qu'en prenant le point B pour origine des arcs complémentaires, le complément de l'arc AM a même extrémité que cet arc; le complément

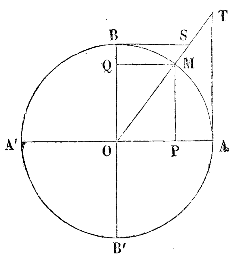

Fig. 9.

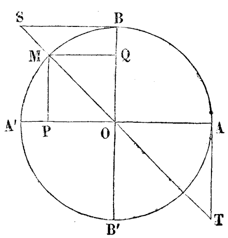

Fig. 10.

de l'arc AM est donc l'arc BM. Alors le sinus de l'arc BM ou le cosinus de l'arc AM sera la longueur de la perpendiculaire MQ abaissée du point M sur le diamètre BB′; en lui appliquant les conventions faites sur le signe du

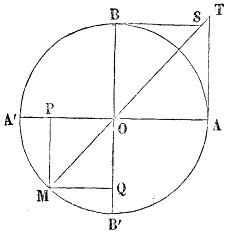

Fig. 11.

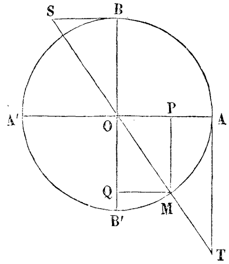

Fig. 12.

sinus, on voit qu'il sera positif, quand il sera porté à droite de ce diamètre, et négatif à gauche.

La tangente de l'arc BM, ou la cotangente de l'arc AM, sera la portion de la tangente au point B comprise entre ce point, et le diamètre qui passe par le point M; c'est-à-dire la ligne BS; elle sera positive ou négative, suivant qu'elle sera portée à droite ou à gauche du diamètre BB′.

Enfin la sécante de l'arc BM, ou la cosécante de l'arc AM sera la distance OS du centre à l'extrémité de la cotangente; comme la sécante, elle est positive ou négative, suivant qu'elle est portée dans le même sens que le rayon OM qui passe par l'extrémité de l'arc, ou en sens contraire de ce rayon. Il est bien clair que le cosinus, la cotangente et la cosécante sont des nombres abstraits, comme le sinus, la tangente et la sécante.

13. *Remarque.* Les conventions faites sur les signes des diverses lignes que nous venons de définir peuvent se déduire d'un principe unique qu'on a fréquemment occasion d'appliquer. Quand on porte sur une ligne $x'x$ différentes longueurs à partir d'une origine fixe O, on leur donne le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'elles sont portées à droite ou à gauche du point O, dans le sens Ox, ou dans le sens Ox'. La convention faite pour les signes de la tangente et de la cotangente n'est que l'application pure et simple de ce principe. Considérons maintenant le sinus MP (fig. 9); on peut le

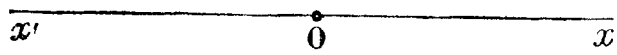

Fig. 13.

remplacer par la ligne OQ qui lui est égale, et convenir alors que cette ligne OQ sera positive ou négative, suivant qu'elle sera portée sur OB ou sur OB', ce qui revient à la convention donnée dans la définition du sinus. On verrait la même chose pour le cosinus. Je prends enfin la sécante et la cosécante; ces lignes peuvent être comptées sur les diamètres fixes OA et OB, au lieu d'être prises sur le diamètre variable OM. En effet, menons par le point M (fig. 14) une tangente au cercle, qui coupe le diamètre AA' au point H et le diamètre BB' au point V; il est évident que la sécante OT est égale à OH, et que la cosécante OS est égale à OV. En vertu du principe posé précédemment, nous conviendrons que la ligne OH sera positive ou négative, suivant qu'elle sera portée dans la direction OA, ou dans la direction opposée OA'; de même la ligne OV sera positive ou négative suivant qu'elle sera portée dans la direction OB ou dans la direction opposée OB'; et ces conventions reviennent évidemment au même que celles que nous avons faites primitivement sur les signes de la sécante et de la cosécante.

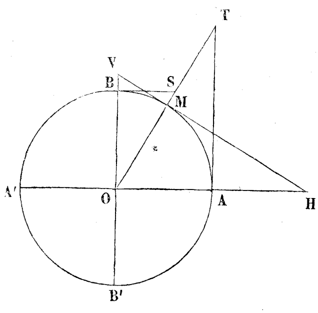

Fig. 14.

14. Le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante d'un arc x s'appellent les *lignes trigonométriques* de cet arc; on les désigne par les notations suivantes :

$$\sin x,\ \cos x,\ \text{tang}\ x,\ \cot x,\ \text{séc}\ x,\ \text{coséc}\ x.$$

Par une extension toute naturelle, on appelle sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante et cosécante *d'un angle,* le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante de l'arc qui a la même mesure que l'angle.

Variations des lignes trigonométriques.

15. Lorsque l'extrémité M de l'arc se déplace sur la circonférence, les lignes trigonométriques de cet arc subissent des variations de grandeur et de signe, qu'il est indispensable d'étudier avec attention. Je distinguerai quatre cas, suivant que le point M sera dans l'un ou dans l'autre des quatre quadrants déterminés par les deux diamètres perpendiculaires AA', BB'.

Premier cas. L'extrémité M de l'arc est dans le premier quadrant AB (fig. 15). Les six lignes trigonométriques sont alors positives.

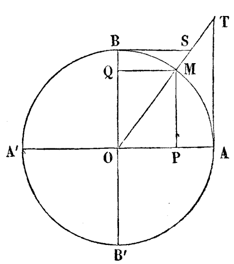

Fig. 15.

Si l'on suppose que le point M se rapproche de plus en plus du point A, c'est-à-dire que l'arc x tende vers zéro, le sinus MP, et la tangente AT tendent vers zéro, le cosinus et la sécante tendent vers OA, ou 1; la cotangente et la cosécante croissent indéfiniment; en désignant par ε un arc positif très-petit, la cotangente et la cosécante de cet arc, toutes les deux positives, croîtront indéfiniment, lorsque l'arc ε tendra vers zéro; on aura alors les formules :

$$\sin 0 = 0$$
$$\cos 0 = 1$$
$$\operatorname{tang} 0 = 0$$
$$\cot (\lim \varepsilon) = +\infty$$
$$\operatorname{séc} 0 = 1$$
$$\operatorname{coséc} (\lim \varepsilon) = +\infty .$$

Si le point M se meut en allant de A vers B, c'est-à-dire si l'arc croît, le sinus, la tangente et la sécante croissent; le cosinus, la cotangente et la cosécante décroissent. Si le point M se rapproche de plus en plus du point B, c'est-à-dire si l'arc tend vers $\frac{\pi}{2}$, le cosinus et la cotangente tendent vers zéro, le sinus et la cosécante vers 1; la tangente et la sécante croissent indéfiniment. En appelant ε un arc positif très-petit, on pourra écrire :

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\operatorname{tang} \lim \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty$$
$$\cot \frac{\pi}{2} = 0$$
$$\operatorname{séc} \lim \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty$$
$$\operatorname{coséc} \frac{\pi}{2} = 1 .$$

Deuxième cas. L'extrémité M de l'arc est dans le deuxième quadrant, BA′ (fig. 16).

On voit, à la seule inspection de la figure, que toutes les lignes trigonométriques sont négatives, à l'exception du sinus et de la cosécante qui sont positifs.

Si le point M est d'abord très-voisin du point B, la tangente et la sécante ont des valeurs absolues très-grandes, et qui augmentent indéfiniment, quand le point M se rapproche de plus en plus du point B; et comme elles sont négatives, nous pourrons écrire :

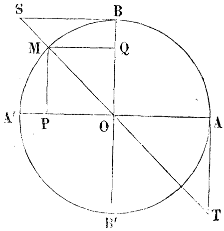

Fig. 16.

$$\operatorname{tang} \lim \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty$$

$$\operatorname{séc} \lim \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

ε étant toujours un arc positif très-petit qui a pour limite zéro.

Lorsque le point M se rapproche du point A', c'est-à-dire quand l'arc croît, la tangente, la sécante et la cosécante croissent, le sinus, le cosinus et la cotangente diminuent. Enfin, quand le point M se rapproche de plus en plus du point A', le sinus et la tangente tendent vers zéro, le cosinus et la sécante vers la valeur -1; la cotangente et la cosécante croissent indéfiniment en valeur absolue; on a donc :

$$\sin \pi = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\operatorname{tang} \pi = 0$$

$$\cot \lim (\pi - \varepsilon) = -\infty$$

$$\operatorname{séc} \pi = -1$$

$$\operatorname{coséc} \lim (\pi - \varepsilon) = +\infty.$$

Troisième cas. L'extrémité de l'arc M est dans le troisième quadrant A'B' (fig. 17).

La figure montre que, dans ce cas, les lignes trigonométriques sont négatives, à l'exception de la tangente et de la cotangente qui sont positives.

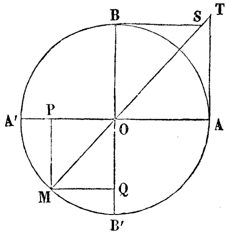

Fig. 17.

Si le point M est supposé très-voisin du point A', les valeurs absolues de la cotangente et de la cosécante sont très-grandes, et augmentent indéfiniment quand le point M se rapproche de plus en plus du point A'; de plus, la première est positive, la seconde est négative; on a donc :

$$\cot \lim (\pi + \varepsilon) = + \infty$$
$$\text{cosec} \lim (\pi + \varepsilon) = - \infty .$$

Quand le point M marche de A' vers B', c'est-à-dire quand l'arc croît, le cosinus, la tangente et la cosécante croissent, le sinus, la cotangente et la sécante diminuent. Enfin, si le point M se rapproche de plus en plus du point B', le cosinus et la cotangente tendent vers zéro, le sinus et la cosécante vers -1; et les valeurs absolues de la tangente et de la sécante augmentent indéfiniment; on a donc :

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$$
$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$
$$\text{tang} \lim \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = + \infty$$
$$\cot \frac{3\pi}{2} = 0$$
$$\text{séc} \lim \left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = - \infty$$
$$\text{coséc} \frac{3\pi}{2} = - 1.$$

Quatrième cas. L'extrémité M de l'arc est dans le quatrième quadrant B′A (fig. 18).

Les lignes trigonométriques sont négatives, à l'exception du cosinus et de la sécante qui sont positifs.

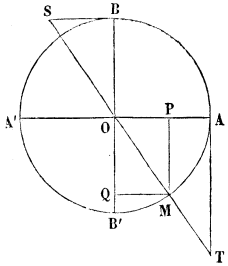

Fig. 18.

Si le point M est d'abord très-voisin du point B′ et s'en rapproche de plus en plus, la tangente et la sécante ont des valeurs absolues très-grandes, et qui croissent indéfiniment; on a donc :

$$\text{tang lim}\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right)=-\infty$$

$$\text{séc lim}\left(\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\right)=+\infty\,.$$

Si le point M marche de B′ vers A, c'est-à-dire si l'arc croît, le sinus, le cosinus et la tangente croissent, la cotangente, la sécante et la cosécante décroissent. Enfin, si le point M se rapproche de plus en plus du point A, le sinus et la tangente tendent vers zéro, le cosinus et la sécante vers 1, la cotangente et la cosécante augmentent indéfiniment en valeur absolue; on a donc :

$$\sin 2\pi = 0$$

$$\cos 2\pi = 1$$

$$\text{tang}\, 2\pi = 0$$

$$\text{cot lim}\,(2\pi - \varepsilon) = -\infty$$

$$\text{séc}\, 2\pi = 1$$

$$\text{coséc lim}\,(2\pi - \varepsilon) = -\infty\,.$$

Le tableau suivant résume toute cette discussion.

ARC.......	0	1er QUADR.	$\frac{\pi}{2}$	2e QUADR.	π	3e QUADR.	$\frac{3\pi}{2}$	4e QUADR.	2π
Sinus.......	0	positif croît	1	positif décroît.	0	negatif décroît.	-1	négatif croît.	0
Cosinus...	1	positif décroît.	0	négatif décroît.	-1	négatif croît.	0	positif croît.	1
Tangente..	0	positive croît.	$+\infty$ $-\infty$	négat. croît.	0	positive croît.	$+\infty$ $-\infty$	négat. croît.	0
Cotangente	$+\infty$	positive décroît.	0	négat. décroît.	$-\infty$ $+\infty$	positive décroît.	0	négat. décroît.	$-\infty$
Sécante ...	1	positive croît.	$+\infty$ $-\infty$	négat. croît.	-1	négat. décroît.	$-\infty$ $+\infty$	positive décroît.	1
Cosécante..	$+\infty$	positive décroît.	1	positive croît.	$+\infty$ $-\infty$	négat. croît.	-1	négat. décroît.	$-\infty$

16. L'étude que nous venons de faire nous conduit aux remarques suivantes :

1° Le sinus et la cosécante d'un arc sont toujours de même signe; il en est de même du cosinus et de la sécante, de la tangente et de la cotangente.

2° Chaque ligne trigonométrique est positive dans deux quadrants, négative dans les deux autres. Le sinus et la cosécante sont positifs dans les deux premiers quadrants, le cosinus et la sécante, dans le premier et dans le quatrième, la tangente et la cotangente, dans le premier et dans le troisième.

3° Le sinus et la cosécante varient toujours en sens inverse l'un de l'autre : quand le sinus croît, la cosécante décroît, et réciproquement. On a le même résultat en comparant le cosinus avec la sécante, ou la tangente avec la cotangente.

4° La tangente augmente constamment quand l'arc augmente; par suite, la cotangente diminue toujours, quand l'arc croît.

5° Le sinus et le cosinus restent toujours compris entre -1 et $+1$; la tangente et la cotangente peuvent prendre toutes les valeurs possibles, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; la sécante et la cosécante varient depuis $-\infty$ jusqu'à -1, et depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$.

6° La tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante passent brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, ou réciproquement ; ainsi quand l'arc passe de la valeur $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ à la valeur $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on voudra, la tangente et la sécante passent d'une valeur positive extrêmement grande à une valeur négative très-grande en valeur absolue.

Formules diverses.

17. Tous les arcs qui ont même extrémité ont évidemment les mêmes lignes trigonométriques; or, nous avons vu que, si l'on représente par x l'un de ces arcs, tous les autres sont compris dans la formule $2k\pi+x$; on aura donc :

$$\left.\begin{aligned} \sin(2k\pi+x) &= \sin x \\ \cos(2k\pi+x) &= \cos x \\ \operatorname{tang}(2k\pi+x) &= \operatorname{tang} x \\ \cot(2k\pi+x) &= \cot x \\ \operatorname{séc}(2k\pi+x) &= \operatorname{séc} x \\ \operatorname{cosée}(2k\pi+x) &= \operatorname{cosée} x. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Donc *deux arcs qui diffèrent d'un nombre entier de cir-*

conférences positives ou négatives ont les mêmes lignes trigonométriques.

18. Considérons maintenant deux arcs dont la différence soit une demi-circonférence; il est clair que leurs extrémités M et M′ seront diamétralement opposées. La seule inspection de la figure (fig. 19) montre que le sinus, le cosinus, la sécante et la cosécante des deux arcs sont égaux et de signes contraires, tandis que la tangente et la cotangente sont égales; on a donc :

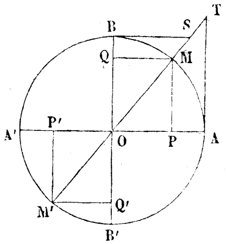

Fig. 19.

$$\left.\begin{aligned}\sin(\pi+x)&=-\sin x\\ \cos(\pi+x)&=-\cos x\\ \operatorname{tang}(\pi+x)&=\operatorname{tang} x\\ \cot(\pi+x)&=\cot x\\ \operatorname{séc}(\pi+x)&=-\operatorname{séc} x\\ \operatorname{cosséc}(\pi+x)&=-\operatorname{cosséc} x\end{aligned}\right\}\qquad[2]$$

Donc *deux arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence ont des lignes trigonométriques égales et de signes contraires, à l'exception de la tangente et de la cotangente, qui sont égales et de même signe.*

La même relation existe évidemment entre les lignes trigonométriques de deux arcs qui diffèrent d'un nombre impair de demi-circonférences positives ou négatives; car les extrémités de ces deux arcs seront diamétralement opposées; si x représente l'un de ces deux arcs, et k un nombre entier quelconque, l'autre sera $(2k+1)\pi+x$; on aura donc :

$$\sin[(2k+1)\pi+x]=-\sin x$$
$$\cos[(2k+1)\pi+x]=-\cos x$$

$$\begin{aligned}
\text{tang}\,[(2k+1)\pi+x] &= \text{tang}\,x \\
\cot\,[(2k+1)\pi+x] &= \cot x \\
\text{séc}\,[(2k+1)\pi+x] &= -\,\text{séc}\,x \\
\text{coséc}\,[(2k+1)\pi+x] &= -\,\text{coséc}\,x.
\end{aligned}$$

Ces formules se déduisent du reste facilement des formules [1] et [2] ; on a, par exemple :

$$\sin[(2k+1)\pi+x]=\sin(2k\pi+\pi+x)=\sin(\pi+x)$$
$$=-\sin x.$$

19. Prenons deux arcs égaux et de signes contraires : leurs extrémités M et M′ (fig. 20) sont évidemment sur une parallèle au diamètre BB′. En construisant les lignes trigonométriques de ces deux arcs, on voit que les cosinus et les sécantes ont les mêmes valeurs, tandis que les sinus, les tangentes, les cotangentes et les cosécantes ont des valeurs égales et de signes contraires. On a donc :

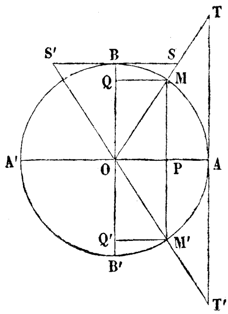

Fig. 20.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x \\
\cos(-x) &= \cos x \\
\text{tang}\,(-x) &= -\,\text{tang}\,x \\
\cot(-x) &= -\cot x \\
\text{séc}\,(-x) &= \text{séc}\,x \\
\text{coséc}\,(-x) &= -\,\text{coséc}\,x.
\end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Deux arcs égaux et de signes contraires ont des lignes trigonométriques égales et de signes contraires, à l'exception du cosinus et de la sécante, qui sont égaux et de même signe.

La même relation existe évidemment entre les lignes trigonométriques de deux arcs dont la somme est un nombre entier de circonférences positives ou négatives.

20. Considérons maintenant deux arcs supplémentaires : nous avons vu que les extrémités M et M′ de deux arcs supplémentaires sont sur une parallèle au diamètre AA′. Il suffit alors de construire les lignes trigonométriques de ces deux arcs pour voir qu'elles ont les mêmes valeurs absolues ; seulement le cosinus, la tangente, la cotangente et la sécante sont changés de signes ; c'est ce qu'expriment les formules suivantes :

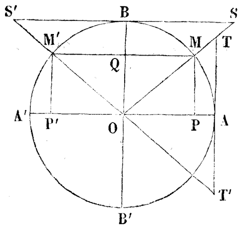

Fig. 21.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\pi-x) &= \sin x\\
\cos(\pi-x) &= -\cos x\\
\text{tang}(\pi-x) &= -\text{tang}\, x\\
\cot(\pi-x) &= -\cot x\\
\text{séc}(\pi-x) &= -\text{séc}\, x\\
\text{cosée}(\pi-x) &= \text{cosée}\, x.
\end{aligned}\right\}\qquad [4]$$

On pourrait encore démontrer ces formules en changeant x en $-x$ dans les formules [2], et tenant compte des équations [3] ; on aurait ainsi :

$$\begin{aligned}
\sin(\pi-x) &= -\sin(-x) = \sin x\\
\cos(\pi-x) &= -\cos(-x) = -\cos x\\
\text{tang}(\pi-x) &= \text{tang}(-x) = -\text{tang}\, x\\
\cot(\pi-x) &= \cot(-x) = -\cot x\\
\text{séc}(\pi-x) &= -\text{séc}(-x) = -\text{séc}\, x\\
\text{coséc}(\pi-x) &= -\text{coséc}(-x) = \text{coséc}\, x.
\end{aligned}$$

Les formules [4] peuvent s'énoncer comme il suit : *deux arcs supplémentaires ont des lignes trigonométriques égales et de signes contraires, à l'exception du sinus et de la cosécante, qui sont égaux et de même signe.*

On aurait la même relation entre les lignes trigonométriques de deux arcs dont la somme serait égale à un nombre impair de demi-circonférences positives ou négatives.

21. Réduction d'un arc au premier quadrant. — Quelle que soit la position de l'extrémité d'un arc sur la circonférence, il existe un autre arc ayant son extrémité dans le premier quadrant, et qui aura les mêmes lignes trigonométriques au signe près; c'est ce qui résulte clairement de l'étude que nous avons faite des lignes trigonométriques dans les différents quadrants, et aussi des formules précédentes. *Réduire un arc au premier quadrant*, c'est trouver un arc positif, moindre que $\frac{\pi}{2}$, et qui ait les mêmes lignes trigonométriques que l'arc donné en valeur absolue; voici comment on y arrive : on commence par retrancher de l'arc donné un nombre de circonférences positives ou négatives assez grand pour qu'il soit positif, et moindre qu'une circonférence; le nouvel arc aura les mêmes lignes trigonométriques que l'arc donné. Cela posé, si l'arc ainsi obtenu est compris dans le premier quadrant, le problème est résolu. S'il est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on prendra l'arc supplémentaire, qui sera alors dans le premier quadrant, et qui, en vertu des formules [4], aura même sinus et même cosécante que l'arc donné, tandis que ses autres lignes trigonométriques seront égales et de signes contraires à celles de l'arc donné. Si l'arc obtenu après la première opération est compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$, on lui retranchera une demi-circonférence, et l'arc du premier quadrant ainsi obtenu aura même tangente et même cotangente que l'arc donné, les autres lignes trigonométriques étant égales et de signes contraires, comme le prouvent les formules [2]. Enfin, si l'arc obtenu était compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, on le retrancherait de 2π, et on aurait un arc du premier quadrant ayant même cosinus et même sécante que l'arc donné, les autres lignes trigonométriques étant égales et de signes contraires.

Applications. — Réduire au premier quadrant l'arc de $17\,214^0$. On sait qu'une circonférence vaut 360^0; en divisant 17 214 par 360, je trouve que l'arc donné contient 47 fois la circonférence, et qu'il reste 294^0. L'arc de 294^0 est compris dans le quatrième quadrant; je le retranche alors de 360^0, ce qui donne 66^0, et j'ai :

$$
\begin{aligned}
\sin 17\,214^0 &= \sin 294^0 = -\sin 66^0\\
\cos 17\,214^0 &= \cos 294^0 = \cos 66^0\\
\text{tang}\ 17\,214^0 &= \text{tang}\ 294^0 = -\text{tang}\ 66^0\\
\cot 17\,214^0 &= \cot 294^0 = -\cot 66^0\\
\text{séc}\ 17\,214^0 &= \text{séc}\ 294^0 = \text{séc}\ 66^0\\
\text{coséc}\ 17\,214^0 &= \text{coséc}\ 294^0 = -\text{coséc}\ 66^0
\end{aligned}
$$

Réduire au premier quadrant l'arc négatif de -5972^0. En divisant 5972 par 360^0, on trouve que l'arc donné contient 16 circonférences négatives, et qu'il reste -212^0; ou ce qui revient au même, qu'il contient 17 circonférences négatives, plus l'arc positif $360^0-212^0 = 148^0$. Cet arc étant compris dans le deuxième quadrant, je prends l'arc supplémentaire 32^0, et j'ai :

$$\sin(-5972^0) = \sin 148^0 = \sin 32^0$$

$$\cos(-5972^0) = \cos 148^0 = -\cos 32^0$$
$$\operatorname{tang}(-5972^0) = \operatorname{tang} 148^0 = -\operatorname{tang} 32^0$$
$$\cot(-5972^0) = \cot 148^0 = -\cot 32^0$$
$$\text{séc}(-5972^0) = \text{séc } 148^0 = -\text{séc } 32^0$$
$$\text{coséc}(-5972^0) = \text{coséc } 148^0 = \text{coséc } 32^0.$$

Des arcs qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée.

22. Quand un arc est donné, toutes ses lignes trigonométriques sont déterminées; mais la proposition inverse est fausse; si on donne un sinus, un cosinus ou toute autre ligne trigonométrique, il y a une infinité d'arcs qui auront pour sinus ou pour cosinus la quantité donnée.

Nous allons d'abord chercher tous les arcs qui correspondent à un sinus donné. Soit O (fig. 22), le cercle trigonométrique, A, l'origine des arcs, AA′, le diamètre qui passe par l'origine, BB′, le diamètre perpendiculaire. Portons le sinus donné sur OB ou sur OB′, suivant qu'il est positif ou négatif; soit Q son extrémité; par le point Q, menons une corde MM′ parallèle au diamètre AA′ : il est clair que les arcs qui auront pour sinus le sinus donné seront tous les arcs terminés en M ou en M′. Or, si l'on appelle α l'un des arcs terminés en M, tous les arcs, qui auront la même extrémité, seront compris dans la formule

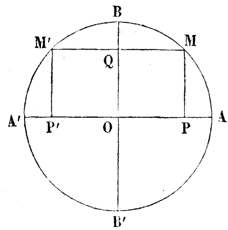

Fig. 22.

$$2k\pi + \alpha,$$

où k désigne un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif. D'autre part, l'un des arcs terminés en M′ est le supplément de l'arc α, et a pour expression $\pi - \alpha$;

tous les autres arcs ayant la même extrémité seront compris dans la formule

$$2k\pi + \pi - \alpha = (2k+1)\,\pi - \alpha.$$

En résumé, tous les arcs ayant le même sinus que l'arc α, sont compris dans les formules

$$2k\pi + \alpha,\ \ (2k+1)\,\pi - \alpha;$$

par conséquent, *pour que deux arcs aient même sinus, il faut et il suffit que leur différence soit un multiple pair de la demi-circonférence, ou que leur somme soit un multiple impair de la demi-circonférence.*

23. Cherchons maintenant les arcs qui correspondent à un cosinus donné. Je porte le cosinus donné sur OA ou sur OA′ (fig. 23), suivant qu'il est positif ou négatif; par l'extrémité P de ce cosinus, je mène une corde MM′ parallèle à BB′; les arcs correspondant au cosinus donné seront tous les arcs terminés en M ou en M′. Or, en appelant α l'un des arcs terminés en M, tous les arcs ayant la même extrémité seront donnés par la formule

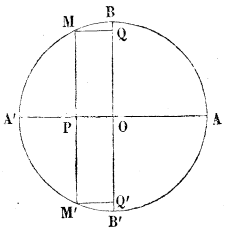

Fig. 23.

$$2k\pi + \alpha.$$

D'ailleurs, l'un des arcs terminés en M′ est évidemment égal à $-\alpha$; tous les autres seront compris dans la formule

$$2k\pi - \alpha.$$

Ces deux formules peuvent être réunies dans la formule unique

$$2k\pi \pm \alpha,$$

qui donnera alors tous les arcs ayant même cosinus que l'arc α; il résulte de là que, *pour que deux arcs aient* *même cosinus, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit égale à un nombre entier de circonférences.*

24. Supposons maintenant qu'on donne une tangente, et cherchons les arcs correspondants. Par l'origine des arcs, A (fig. 24), je mène une tangente au cercle, et sur cette ligne, à partir du point A, je porte la tangente donnée, au-dessus du point A si elle est positive, au-dessous, si elle est négative; enfin, je joins le centre à l'extrémité de la tangente AT ainsi obtenue : cette ligne coupe la circonférence en deux points M et M', et il est clair que tous les arcs qui ont pour tangente la tangente donnée sont terminés en M ou en M'. Or, en désignant par α l'un des arcs terminés en M, on sait que tous les arcs qui ont la même extrémité sont donnés par la formule

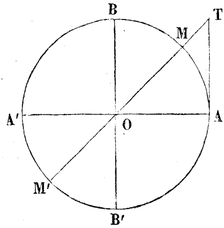

Fig. 24.

$$2k\pi + \alpha,$$

et que tous les arcs terminés en M' sont compris dans la formule

$$2k\pi + \pi + \alpha = (2k + 1)\pi + \alpha.$$

On peut comprendre tous ces arcs dans la seule formule

$$k\pi + \alpha;$$

donc, *pour que deux arcs aient même tangente, il faut et il suffit que leur différence soit égale à un nombre entier de demi-circonférences.*

Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

25. Je considère d'abord (fig. 25) un arc positif AM, moindre que $\frac{\pi}{2}$; je le désignerai par la lettre x. Je construis ses diverses lignes trigonométriques; on a :

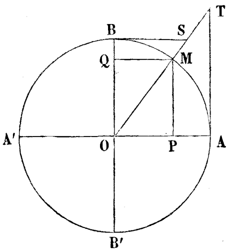

Fig. 25.

$\sin x = MP = OQ$; $\cos x = MQ = OP$;
$\text{tang}\, x = AT$; $\cot x = BS$;
$\text{séc}\, x = OT$; $\text{coséc}\, x = OS$.

Le triangle rectangle OMP donne d'abord

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

ou

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad [1]$$

Les triangles semblables OMP, OTA donnent ensuite

$$\frac{AT}{PM} = \frac{OT}{OM} = \frac{OA}{OP},$$

ou

$$\frac{\text{tang}\, x}{\sin x} = \frac{\text{séc}\, x}{1} = \frac{1}{\cos x},$$

d'où l'on tire :

$$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad [2]$$

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}, \qquad [3]$$

Enfin les triangles semblables OMQ, OSB donnent de même

$$\frac{BS}{QM} = \frac{OS}{OM} = \frac{OB}{OQ},$$

ou

$$\frac{\cot x}{\cos x} = \frac{\text{coséc}\, x}{1} = \frac{1}{\sin x};$$

d'où l'on tire :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad [4]$$

$$\text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}. \qquad [5]$$

Les cinq formules que nous venons d'établir ont été démontrées seulement pour le cas où l'extrémité M de l'arc se trouve dans le premier quadrant; mais nous allons voir qu'elles sont vraies pour un arc quelconque. Je considère d'abord les trois premières : on aura tou-

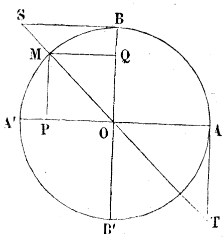

Fig. 26.

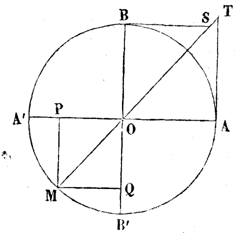

Fig. 27.

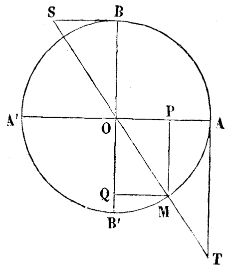

Fig. 28.

jours, quelle que soit la position du point M sur la circonférence (voir les fig. 26, 27 et 28),

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

$$\frac{AT}{PM} = \frac{OT}{OM} = \frac{OA}{OP},$$

d'où il résulte que, si l'on n'a égard qu'aux valeurs absolues des lignes trigonométriques, les équations [1], [2], [3] seront toujours vraies; il suffit donc de montrer que, dans les divers quadrants, les signes des deux membres sont bien les mêmes. Or la formule [1] ne contient que les carrés du sinus et du cosinus; elle subsistera donc, quels que soient les signes de ces deux lignes trigonométriques. Examinons maintenant la formule [2] : dans le premier et dans le troisième quadrant, le sinus et le cosinus ont le même signe, le quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ aura alors le signe $+$, et l'on sait qu'en effet la tangente est positive dans ces deux quadrants. Au contraire, dans le deuxième et dans le quatrième quadrant, le sinus et le cosinus ont des signes contraires, $\frac{\sin x}{\cos x}$ est donc négatif, et nous savons, qu'en effet, la tangente est négative dans le 2e et dans le 4e quadrant. La formule [2] donnera donc toujours la tangente avec le signe convenable. Enfin l'équation [3] donnera aussi la sécante avec le signe qui lui convient; car nous avons remarqué (n° 16), que le cosinus et la sécante ont toujours le même signe. Les formules [1], [2], [3] sont donc générales.

On pourrait démontrer de même la généralité des formules [4] et [5]; mais il est plus simple de les déduire des précédentes. A cet effet, changeons x en $\frac{\pi}{2}-x$ dans les équations [2] et [3]; elles deviennent:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)},$$

$$\operatorname{séc}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)},$$

ou, en remarquant que $\frac{\pi}{2}-x$ est le complément de l'arc x,

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{coséc} x=\frac{1}{\sin x};$$

et ce sont justement les formules [4] et [5]; puisqu'elles sont des conséquences des formules [2] et [3] qui sont générales, elles sont elles-mêmes générales.

Pour établir tout à fait rigoureusement les relations qui précèdent, il resterait à prouver qu'elles sont encore vraies, quand l'extrémité de l'arc est à l'un des quatre points A, B, A' ou B'; car pour ces points, les triangles que nous avons considérés n'existent plus; mais alors la vérification directe des formules n'offre aucune difficulté; nous laissons au lecteur le soin de la faire.

26. Les cinq relations qui viennent d'être établies entre les six lignes trigonométriques d'un même arc sont évidemment distinctes; je dis de plus qu'entre ces six quantités on ne saurait avoir un plus grand nombre de relations distinctes. S'il était possible en effet d'avoir une formule qui ne fût pas une conséquence des équations [1], [2], [3], [4], [5], entre les six quantités, sin x, cos x, tang x, séc x, cot x, cosèc x, on pourrait y remplacer cos x, tang x, séc x, cot x, cosèc x, par leurs valeurs en fonction de sin x, et on aurait une équation qui ferait connaître sin x, quel que fût d'ailleurs l'arc x, ce qui est impossible. Mais on peut déduire des formules qui précèdent d'autres relations qu'il est utile de connaître.

En multipliant membre à membre les équations [2] et [4], on a :

$$\text{tang}\, x \ \cot x = 1$$

ou

$$\cot x = \frac{1}{\text{tang}\, x} \qquad [6]$$

Des équations [2] et [4], on tire :

$$1 + \text{tang}^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x},$$

et si l'on tient compte des équations [3] et [5], les précédentes deviennent

$$\text{séc}^2 x = 1 + \text{tang}^2 x \qquad [7]$$

$$\text{cosèc}^2 x = 1 + \cot^2 x \qquad [8]$$

Ces trois nouvelles formules s'établiraient du reste aisément sur la figure.

27. Les équations [3], [5] et [6] donnent lieu à une remarque utile; elles expriment que la sécante est l'inverse du cosinus, que la cosécante est l'inverse du sinus, et enfin que la cotangente est l'inverse de la tangente. Il en résulte :

1° Que la sécante varie en raison inverse du cosinus; quand l'une croît, l'autre décroît, et il en est de même pour la cosécante et le sinus, et pour la tangente et la cotangente; ce qu'on a déjà remarqué.

2° Que tous les arcs qui ont même sécante ont même cosinus et réciproquement; d'où l'on conclut que la formule établie précédemment pour tous les arcs qui correspondent à un même cosinus, fournit aussi tous les arcs qui correspondent à une sécante donnée. La même chose a lieu pour le sinus et la cosécante, pour la tangente et la cotangente.

28. Les cinq relations fondamentales entre les lignes trigonométriques permettent d'exprimer cinq d'entre elles en fonction de la sixième.

Supposons, par exemple, qu'on donne $\sin x$, et qu'on demande les autres lignes trigonométriques, on trouve par un calcul facile :

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

$$\operatorname{séc} x = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

$$\cot x = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x},$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Dans toutes ces formules, le radical $\sqrt{1-\sin^2 x}$ doit être pris avec le même signe, parce qu'il représente partout la même quantité, $\cos x$.

On voit qu'à l'exception de la cosécante, toutes les lignes trigonométriques ont deux valeurs égales et de signes contraires; il est aisé d'en trouver la raison : comme on ne connaît pas l'arc x, mais son sinus, on doit trouver les valeurs des lignes trigonométriques de tous les arcs qui ont le même sinus que l'arc x; ces arcs sont compris dans les deux formules

$$2k\pi+x, \qquad (2k+1)\pi-x;$$

alors, pour le cosinus, par exemple, on devra trouver les cosinus de tous ces arcs, ou bien

$$\cos(2k\pi+x)=\cos x,$$

et $$\cos[(2k+1)\pi-x]=\cos(\pi-x)=-\cos x,$$

c'est-à-dire deux valeurs égales et de signes contraires; il en est de même pour les autres lignes trigonométriques.

La géométrie conduit simplement au même résultat. Supposons que $\sin x$ soit égal à OQ (fig. 29); l'arc x pourra avoir son extrémité soit en M soit en M′, et nous avons vu que deux arcs terminés l'un en M, l'autre en M′, ont toutes leurs lignes trigonométriques égales et de signes contraires, à l'exception du sinus et de la cosécante qui sont égaux et de même signe.

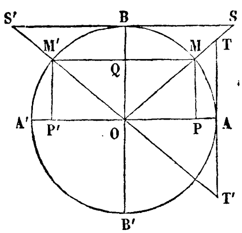

Fig. 29.

Cherchons encore les expressions des diverses lignes trigonométriques en fonction de la tangente. Les équations [1] et [2] permettent de calculer le sinus et le cosinus. Pour les résoudre, je tire $\sin x$ de la seconde, et je porte la valeur dans la première, ce qui donne

$$\cos^2 x \operatorname{tang}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

ou
$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 x},$$

d'où l'on tire :
$$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}, \qquad [9]$$

et par suite,
$$\sin x = \frac{\operatorname{tang} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}; \qquad [10]$$

l'équation [6] donne la cotangente :

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x},$$

et les équations [3] et [5] donnent pour la sécante et la cosécante :

$$\text{séc}\, x = \pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x},$$

$$\text{coséc}\, x = \frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}{\operatorname{tang} x}.$$

Dans ces formules, le radical $\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}$ doit être pris partout avec le même signe, parce qu'il représente toujours la même quantité $\frac{1}{\cos x}$.

Le double signe placé devant les valeurs du sinus, du cosinus, de la sécante et de la cosécante s'explique facilement, en remarquant qu'on ne connaît pas l'arc x, mais sa tangente, et que les formules doivent alors donner les lignes trigonométriques de tous les arcs qui ont même tangente que l'arc x. On sait que ces arcs sont compris dans la formule

$$k\pi + x;$$

on doit donc trouver, pour le sinus, par exemple, toutes les valeurs comprises dans la formule

$$\sin(k\pi + x);$$

or, si k est pair,

$$\sin(k\pi + x) = \sin x;$$

si k est impair,

$$\sin(k\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

Les valeurs du sinus se réduisent donc à deux, égales et de signes contraires. Il en est de même pour le cosinus, la sécante et la cosécante. L'emploi d'une figure conduirait au même résultat.

L'ambiguïté de ces formules et des précédentes disparaîtrait si l'arc x était donné; il suffirait, en effet, de voir dans quel quadrant tombe son extrémité, pour connaître immédiatement les signes de toutes ses lignes trigonométriques.

29. *Applications.* — Supposons que l'arc x soit égal à $\frac{\pi}{4}$, ou 45°; alors le triangle OAT (fig. 30) est isocèle, et l'on a :

$$\text{AT} = \text{OA}, \quad \text{ou} \quad \text{tang}\frac{\pi}{4} = 1;$$

les formules [9] et [10] donnent :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}; \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\pm\sqrt{2}};$$

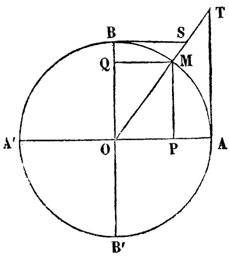

Fig. 30.

ici l'arc $\frac{\pi}{4}$ est contenu dans le premier quadrant; son sinus et son cosinus sont donc positifs; par conséquent, on aura simplement :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prenons encore l'arc égal à $\frac{\pi}{6}$ ou 30°; son sinus sera évidemment la moitié du côté de l'hexagone régulier inscrit, ou ce qui est la même chose, la moitié du rayon ; on aura donc :

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

et par suite :

$$\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Prenons enfin l'arc égal à $\frac{\pi}{10}$ ou 18^0 ; son sinus est la moitié du côté du décagone régulier inscrit ; or, on démontre en géométrie que le rapport de ce côté au rayon est égal à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; on aura donc :

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

on en déduit :

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Remarque. Il est bon de remarquer que dans le cercle de rayon 1, *le sinus d'un arc est la moitié de la corde de l'arc double.*

Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

30. Je vais d'abord chercher le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs, connaissant les sinus et les cosinus de ces deux arcs.

Soient a et b deux arcs positifs, dont la somme est inférieure à $\frac{\pi}{2}$, et supposons en outre que a soit supérieur à b. Portons ces deux arcs à la suite l'un de l'autre à partir du point A; soit

$$AM = a,$$

$$MN = b;$$

prenons encore à partir du point M sur l'arc MA, un arc MN′ égal à MN; nous aurons

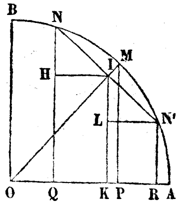

Fig. 31.

$$AN = a + b,$$

$$AN' = a - b.$$

Je construis les sinus et les cosinus de tous ces arcs; ce qui me donne:

$$MP = \sin a \qquad OP = \cos a$$

$$NI = \sin b \qquad OI = \cos b$$

$$NQ = \sin(a+b) \qquad OQ = \cos(a+b)$$

$$N'R = \sin(a-b) \qquad OR = \cos(a-b).$$

Par le point I, je mène la ligne IK perpendiculaire à OA, et par les points I et N′, les lignes IH et N′L parallèles à OA. Les deux triangles NIH, IN′L étant égaux, on a :

$$IL = NH; \; N'L = IH.$$

Cela posé, on a évidemment sur la figure :

$$NQ = \sin(a+b) = HQ + NH = IK + NH$$

$$OQ = \cos(a+b) = OK - KQ = OK - IH$$

$$N'R = \sin(a-b) = IK - IL = IK - NH$$

$$OR = \cos(a-b) = OK + KR = OK + N'L = OK + IH.$$

Exprimons maintenant les quatre lignes IK, NH, OK, IH, en fonction des lignes données, c'est-à-dire des sinus et des cosinus des arcs a et b. Les triangles semblables OIK, OMP donnent

$$\frac{\mathrm{IK}}{\mathrm{MP}} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OM}},$$

ou
$$\frac{\mathrm{IK}}{\sin a} = \frac{\mathrm{OK}}{\cos a} = \frac{\cos b}{1};$$

donc $\mathrm{IK} = \sin a \cos b$; $\mathrm{OK} = \cos a \cos b$

Les triangles NIH, OMP, sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires, et donnent alors

$$\frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{MP}} = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{OM}},$$

ou
$$\frac{\mathrm{NH}}{\cos a} = \frac{\mathrm{IH}}{\sin a} = \frac{\sin b}{1};$$

donc $\mathrm{NH} = \cos a \sin b$; $\mathrm{IH} = \sin a \sin b$.

Je porte ces valeurs dans les égalités précédentes, et j'ai les formules :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \qquad [1]$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad [2]$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \qquad [3]$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad [4]$$

31. Les formules [1] et [2] ont été démontrées dans l'hypothèse où a et b sont des arcs positifs dont la somme est inférieure à $\frac{\pi}{2}$; nous avons admis de plus, pour établir les formules [3] et [4], que l'arc a était supérieur à b. Nous allons montrer que ces formules sont générales, c'est-à-dire qu'elles s'appliquent à des arcs tout à fait quelconques. Je m'occuperai d'abord des deux premières.

Je dis en premier lieu que ces formules [1] et [2] sont vraies pour des arcs positifs a et b, tous les deux plus petits qu'un quadrant, mais dont la somme surpasse $\frac{\pi}{2}$. Appelons a' et b' les compléments de ces deux arcs; nous aurons :

$$a' = \frac{\pi}{2} - a,$$

$$b' = \frac{\pi}{2} - b,$$

d'où $$a' + b' = \pi - (a + b);$$

il résulte de l'hypothèse que a' et b' seront des arcs positifs, et que leur somme sera plus petite que $\frac{\pi}{2}$; on pourra donc appliquer les formules [1] et [2] à ces arcs, et on aura :

$$\sin(a' + b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos(a' + b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b';$$

remplaçons dans ces équations a' et b' par leurs valeurs, nous aurons ainsi :

$$\sin[\pi - (a + b)] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$
$$+ \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$
$$\cos[\pi - (a + b)] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$
$$- \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right);$$

et si l'on tient compte des relations connues entre les lignes trigonométriques de deux arcs supplémentaires ou de deux arcs complémentaires,

$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$
$$- \cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b,$$

formules identiques aux formules [1] et [2]. Ces dernières formules sont donc vraies pour deux arcs positifs moindres qu'un quadrant, quelle que soit du reste la somme de ces deux arcs.

Je dis en second lieu que l'on peut ajouter un quadrant à l'un quelconque des deux arcs, à l'arc a, par exemple, et que les formules s'appliqueront encore à ces nouveaux arcs. Posons en effet :

$$a = \frac{\pi}{2} + a',$$

a' étant moindre que $\frac{\pi}{2}$; on en tire :

$$a' = a - \frac{\pi}{2}.$$

Les formules [1] et [2] sont applicables aux arcs a' et b; si on y remplace a' par sa valeur $a - \frac{\pi}{2}$, on aura :

$$\sin\left(a + b - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\cos b + \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\sin b$$

$$\cos\left(a + b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\cos b - \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\sin b.$$

Or on a, quel que soit x :

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x;$$

les égalités précédentes deviennent alors :

$$-\cos(a + b) = -\cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;$$

et elles montrent que les formules [1] et [2] s'appliquent aux arcs a et b, Il résulte de ce qui précède que les formules [1] et [2] sont vraies pour des arcs positifs quelconques a et b. En effet, retranchons à chacun de ces arcs autant de quadrants que possible, et désignons par a' et b' les arcs qui restent ; on aura :

$$\sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b'$$
$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b';$$

ces formules resteront exactes si nous ajoutons successivement à chacun des deux arcs autant de quadrants qu'on voudra; elles s'appliquent donc aux arcs a et b.

Je dis enfin que les formules [1] et [2] s'appliquent aussi à des arcs négatifs. En effet, on peut toujours, en ajoutant aux arcs a et b un nombre suffisant de circonférences positives, obtenir des arcs positifs que j'appellerai a' et b' ; on aura alors :

$$a' = 2k\pi + a; \quad b' = 2n\pi + b;$$

mais les formules sont vraies pour ces arcs a' et b', c'est-à-dire qu'on a :

$$\sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b'$$
$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b';$$

ou bien

$$\sin(2k\pi + 2n\pi + a + b) = \sin(2k\pi + a)\cos(2n\pi + b)$$
$$+ \cos(2k\pi + a)\sin(2n\pi + b)$$
$$\cos(2k\pi + 2n\pi + a + b) = \cos(2k\pi + a)\cos(2n\pi + b)$$
$$- \sin(2k\pi + a)\sin(2n\pi + b);$$

on peut retrancher d'un arc un nombre quelconque de circonférences, sans que ses lignes trigonométriques changent; les équations précédentes peuvent donc s'écrire :

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b;$$

et ce sont précisément les formules [1] et [2]. Ces formules sont donc tout à fait générales.

Si dans les formules [1] et [2], qui sont vraies pour des arcs quelconques, nous changeons b en $-b$, nous aurons :

$$\sin(a-b)=\sin a\cos(-b)+\cos a\sin(-b)$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b);$$

et si l'on se rappelle que les cosinus de deux arcs égaux et de signes contraires sont égaux, tandis que leurs sinus sont égaux et de signes contraires, les égalités précédentes deviennent :

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b;$$

et ce sont précisément là les formules [3] et [4]; puisqu'on peut les déduire des premières qui sont vraies pour des arcs quelconques, elles sont elles-mêmes tout à fait générales.

Donc enfin les formules [1], [2], [3] et [4] sont toujours vraies, quels que soient les arcs a et b.

32. Proposons-nous maintenant de trouver la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs, connaissant les tangentes de ces deux arcs; nous avons d'abord :

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b-\sin a\sin b};$$

divisons les deux termes de cette fraction par $\cos a \cos b$, et rappelons-nous les formules

$$\frac{\sin a}{\cos a}=\operatorname{tang} a;\quad \frac{\sin b}{\cos b}=\operatorname{tang} b;$$

nous aurons :

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b} \qquad [5]$$

on aurait de même :

$$\operatorname{tang}(a-b)=\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}=\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(a-b)=\frac{\operatorname{tang} a-\operatorname{tang} b}{1+\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b} \qquad [6]$$

Ces formules [5] et [6], déduites de formules générales, ont aussi toute la généralité possible; de plus la dernière pourrait se tirer de la première en changeant b en $(-b)$.

On pourrait trouver de même les expressions de $\cot(a\pm b)$, $\text{séc}\,(a\pm b)$, $\text{coséc}\,(a\pm b)$; mais cette recherche n'offre pas grande utilité.

33. Nous venons de voir comment on calcule les lignes trigonométriques de la somme de deux arcs, quand on connaît les lignes trigonométriques de ces arcs; on peut se proposer la même question pour un nombre quelconque d'arcs, et on la résout sans peine à l'aide des formules précédentes. Je vais calculer, par exemple, $\sin(a+b+c)$ et $\operatorname{tang}(a+b+c)$, en fonction des lignes trigonométriques des arcs a, b, c.

On a :

$$\begin{aligned}\sin(a+b+c) &= \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c \\ &= \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos c \cos a \\ &\quad + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c.\end{aligned}$$

De même :

$$\operatorname{tang}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang}(a+b) + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang}(a+b)\operatorname{tang} c}$$

$$= \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a}.$$

Le même procédé pourrait servir à trouver le sinus, le cosinus ou la tangente de la somme d'un nombre quelconque d'arcs.

Formules pour la multiplication des arcs.

34. Si dans les formules [1], [2] et [5] des nos **30** et **32**, on fait $b=a$, on a :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad [1]$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad [2]$$

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a} \qquad [3]$$

formules qui font connaître le sinus, le cosinus et la tangente du double d'un arc.

35. Si dans la formule [2] on remplace $\sin^2 a$ par sa valeur en fonction de $\cos^2 a$, ou inversement, on obtient deux nouvelles valeurs de $\cos 2a$:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1,$$

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a;$$

on voit par là que $\cos 2a$ peut s'exprimer *rationnelle-*

ment, soit en fonction de $\cos a$, soit en fonction de $\sin a$. Mais il n'en est pas de même de $\sin 2a$: si on cherche à l'exprimer en fonction de $\sin a$ ou en fonction de $\cos a$, on obtient deux valeurs égales et de signes contraires :

$$\sin 2a = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

$$\sin 2a = \pm 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a},$$

On se rend compte bien aisément de toutes ces circonstances, si l'on se rappelle que l'arc a n'est pas déterminé quand on donne $\sin a$ ou $\cos a$, et qu'alors les lignes trigonométriques de l'arc $2a$ peuvent avoir plusieurs valeurs. Supposons, par exemple, qu'on donne $\sin a$: les arcs correspondants à ce sinus sont compris dans les formules :

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha;$$

donc on devra avoir pour l'arc double toutes les valeurs comprises dans les formules

$$4k\pi + 2\alpha, \quad (4k+2)\pi - 2\alpha,$$

ou, ce qui revient au même, dans la formule unique

$$2n\pi \pm 2\alpha;$$

alors $\sin 2a$ et $\cos 2a$ devront prendre toutes les valeurs comprises dans les formules :

$$\sin(2n\pi \pm 2\alpha) = \sin(\pm 2\alpha) = \pm \sin 2\alpha,$$

$$\cos(2n\pi \pm 2\alpha) = \cos(\pm 2\alpha) = \cos 2\alpha;$$

$\sin 2a$ aura donc deux valeurs égales et de signes contraires, et $\cos 2a$ n'aura qu'une seule valeur. On arriverait aux mêmes résultats, si on donnait $\cos a$ au lieu de $\sin a$.

36. Cherchons maintenant les lignes trigonométriques de l'arc $3a$: pour cela, faisons $b=2a$ dans les formules qui donnent $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, $\tang(a+b)$, et nous aurons :

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$

$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a,$$

$$\tang 3a = \frac{\tang a + \tang 2a}{1 - \tang a \tang 2a}.$$

Dans ces équations, remplaçons $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tang 2a$ par les valeurs obtenues précédemment, et nous trouverons, après avoir fait les réductions :

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a \qquad [4]$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \qquad [5]$$

$$\tang 3a = \frac{3 \tang a - \tang^3 a}{1 - 3 \tang^2 a} \qquad [6]$$

Une marche analogue conduirait aux valeurs de $\sin 4a$, $\cos 4a$, $\tang 4a$, $\sin 5a$, $\cos 5a$, $\tang 5a$, etc. ; nous ne nous y arrêterons pas.

Formules pour la division des arcs.

37. Je suppose en premier lieu qu'on donne $\cos a$, et je vais chercher $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\tang \frac{a}{2}$. Dans la formule [2] du n° **34**, je change a en $\frac{a}{2}$, elle devient :

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2};$$

d'autre part, on a :

$$1 = \cos^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2};$$

Si nous ajoutons et si nous retranchons successivement ces deux équations, nous aurons :

$$1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$$

$$1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$$

d'où l'on tire enfin :

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad [1]$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad [2]$$

On a ensuite :

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \qquad [3]$$

Ces formules donnent pour $\sin\frac{a}{2}$, pour $\cos\frac{a}{2}$ et pour $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$ deux valeurs égales et de signes contraires. En voici la raison : comme on donne $\cos a$, l'arc a n'est pas déterminé, et peut prendre toutes les valeurs comprises dans la formule

$$2k\pi \pm \alpha,$$

par suite l'arc $\frac{a}{2}$ peut recevoir toutes les valeurs comprises dans la formule

$$k\pi \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Alors, pour $\sin\frac{a}{2}$, on doit trouver les sinus de tous ces arcs : or, si k est pair, on peut retrancher $k\pi$, et on a :

$$\sin\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sin\frac{\alpha}{2},$$

si k est impair, on a :

$$\sin\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \mp \sin\frac{\alpha}{2},$$

on trouve donc en tout pour $\sin\frac{a}{2}$ deux valeurs égales et de signes contraires. Pour $\cos\frac{a}{2}$, on aura de même, suivant que k sera pair ou impair, les valeurs égales et de signes contraires :

$$\cos\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\left(\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Enfin pour $\text{tang}\frac{a}{2}$, on a

$$\text{tang}\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \text{tang}\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\,\text{tang}\frac{\alpha}{2},$$

c'est-à-dire encore deux valeurs égales et de signes contraires.

On arrive au même résultat en considérant une figure; soit OP le cosinus donné, MPM′ une corde parallèle au diamètre BB′; tous les arcs ayant leurs extrémités en M ou en M′ ont pour cosinus le cosinus donné. Prenons d'abord le plus petit arc positif terminé en M, et soit N le milieu de cet arc. Si à l'arc AM on ajoute une circonférence, sa moitié augmentera d'une demi-circonférence, et donnera ainsi un arc terminé en N′; si on augmente encore l'arc AM d'une circonférence, sa moitié augmentera encore d'une demi-circonférence, et se terminera alors en N. En continuant toujours de même, on voit que les moitiés de tous les arcs terminés en M sont elles-

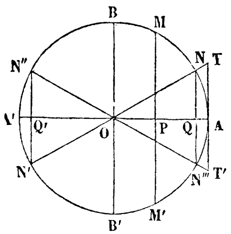

Fig. 32.

mêmes des arcs terminés en N ou en N'. Pareillement, si N''' est le milieu de l'arc AM', on verra que les moitiés de tous les arcs terminés en M' ont pour extrémités le point N'' ou le point N'''; de sorte que l'arc $\frac{a}{2}$ peut avoir pour extrémité l'un quelconque des quatre points N, N', N'',N'''. Or, la figure montre que le sinus, le cosinus et la tangente de tous ces arcs peuvent recevoir deux valeurs égales et de signes contraires.

Quand on donnera l'arc a lui-même, l'ambiguïté disparaîtra, parce qu'on connaîtra les signes de $\sin\frac{a}{2}$, de $\cos\frac{a}{2}$ et de $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$.

38. Proposons-nous maintenant de trouver les expressions de $\sin\frac{a}{2}$ et de $\cos\frac{a}{2}$ en fonction de $\sin a$. La formule [1] du nº **34** donne, quand on y change a en $\frac{a}{2}$,

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2};$$

mais on a aussi

$$1 = \sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2};$$

Si l'on ajoute et que l'on retranche ces deux égalités membre à membre, on a

$$1 + \sin a = \left(\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right)^2$$

$$1 - \sin a = \left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)^2$$

ou bien :

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin a},$$

$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin a};$$

4

enfin, en ajoutant et retranchant ces deux équations, on a :

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}\right] \qquad [4]$$

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}\right] \qquad [5]$$

On voit, par ces formules, que $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ admettent chacun quatre valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, et, de plus, que les quatre valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ sont les mêmes que celles de $\cos\frac{a}{2}$. On explique toutes ces circonstances en remarquant que $\sin a$ seul est connu; l'arc a peut donc recevoir une infinité de valeurs de la forme

$$2k\pi+\alpha, \text{ ou } (2k+1)\pi-\alpha;$$

et l'arc $\frac{a}{2}$ pourra prendre toutes les valeurs comprises dans les formules

$$k\pi+\frac{\alpha}{2}, \qquad k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2};$$

donc on doit obtenir pour $\sin\frac{a}{2}$ et pour $\cos\frac{a}{2}$ les valeurs des sinus et des cosinus de tous ces arcs; on aura donc pour le sinus, si k est pair,

$$\sin\left(k\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2};$$

si k est impair,

$$\sin\left(k\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)=-\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\frac{\alpha}{2},$$

et pour le cosinus, si k est pair,

$$\cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2};$$

si k est impair,

$$\cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Le sinus et le cosinus ont donc chacun quatre valeurs, deux à deux égales et de signes contraires; de plus, les quatre valeurs du sinus sont les mêmes que celles du cosinus; c'est précisément le résultat donné par les formules [4] et [5].

Il nous reste à faire voir comment il faudra choisir entre ces quatre valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ et de $\cos\frac{a}{2}$, quand on donnera l'arc a lui-même. Reprenons les deux équations

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin a},$$

$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin a}.$$

L'arc a étant connu, on calculera $\frac{a}{2}$, et on saura alors quels signes doivent avoir les inconnues $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$; on reconnaîtra de plus, en ramenant l'arc $\frac{a}{2}$ au premier quadrant, quelle est la plus grande de ces deux inconnues en valeur absolue, ce qui permettra de fixer le signe de la somme $\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$ et celui de la différence

$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}$; les signes des deux radicaux $\sqrt{1+\sin a}$ et $\sqrt{1-\sin a}$ seront alors déterminés, et il n'y aura plus d'ambiguïté sur les valeurs de $\sin\frac{a}{2}$ et de $\cos\frac{a}{2}$.

Application. — On donne $a = 3472^0$; alors $\frac{a}{2}$ est égal à 1736^0, et si l'on ramène cet arc au premier quadrant, ou trouve aisément que

$$\sin\frac{a}{2} = \sin 296^0 = -\sin 64^0,$$

$$\cos\frac{a}{2} = \cos 296^0 = \quad \cos 64^0.$$

On voit d'abord que la différence $\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}$ est négative; on a donc :

$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{1-\sin a}.$$

De plus, la valeur absolue de $\sin\frac{a}{2}$ est supérieure à celle de $\cos\frac{a}{2}$, parce que l'arc de 64^0 est plus grand que 45^0; donc la somme $\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$ est négative, et l'on a :

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{1+\sin a}.$$

Par conséquent,

$$\sin 1736^0 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin 3472^0} + \sqrt{1-\sin 3472^0}\right]$$

$$\cos 1736^0 = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin 3472^0} - \sqrt{1-\sin 3472^0}\right]$$

39. Je vais maintenant chercher $\tang\frac{a}{2}$, connaissant tang a. La formule [3] du n° **34** devient, quand on y change a en $\frac{a}{2}$,

$$\operatorname{tang} a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{a}{2}},$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tang}^2 \frac{a}{2} + \frac{2}{\operatorname{tang} a} \operatorname{tang} \frac{a}{2} - 1 = 0,$$

équation du second degré, qui fera connaître tang $\frac{a}{2}$; cette équation a ses deux racines réelles, puisque le dernier terme est négatif; de plus, leur produit est égal à -1. C'est ce qu'on aurait pu prévoir facilement : en effet, puisqu'on donne tang a, l'arc a peut recevoir toutes les valeurs comprises dans la formule

$$k\pi + \alpha,$$

et on doit trouver pour tang $\frac{a}{2}$ les tangentes des moitiés de tous ces arcs, c'est-à-dire toutes les valeurs que peut prendre l'expression

$$\operatorname{tang} \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right);$$

si k est pair, on peut retrancher à l'arc un nombre entier de demi-circonférences, et l'on a simplement tang $\frac{a}{2}$, si k est impair, on retranchera autant de demi-circonférences que possible, et on aura :

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cot \left(-\frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2};$$

on voit que l'on doit toujours trouver deux valeurs ; de plus, ces deux valeurs étant de la forme tang $\frac{\alpha}{2}$ et $-\cot \frac{\alpha}{2}$, donneront bien, si on les multiplie, un produit égal à -1.

Il sera d'ailleurs facile, quand on donnera l'arc a, de choisir la racine qui convient; car les deux racines étant de signes contraires, il suffira de chercher quel signe doit avoir $\tang \frac{a}{2}$*.

Formules qui servent à transformer en produit la somme ou la différence de deux lignes trigonométriques, sinus ou cosinus.

40. Reprenons les formules établies pour l'addition et la soustraction des arcs :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Ajoutons et retranchons les deux premières équations membre à membre, ainsi que les deux dernières; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned}
\sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2\sin a \cos b \\
\sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2\cos a \sin b \\
\cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b \\
\cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2\sin a \sin b
\end{aligned}\right\}\ [1]$$

Posons $$a+b=p,$$
$$a-b=q;$$

* Pour la division de l'arc en trois parties égales, voir la note I à la fin du volume.

on en tire
$$a = \frac{p+q}{2},$$
$$b = \frac{p-q}{2};$$

remplaçons a et b par ces valeurs dans les formules [1]; elles deviendront :

$$\left.\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}\\
\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}
\end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Ces formules, très-importantes, donnent le moyen de transformer en produit la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus; elles nous seront utiles surtout, lorsque nous voudrons appliquer les logarithmes au calcul des expressions trigonométriques.

Voici la traduction de ces formules en langage ordinaire :

La somme des sinus de deux arcs est égale au double du produit du sinus de la demi-somme des arcs par le cosinus de leur demi-différence.

La différence des sinus de deux arcs est égale au double du produit du sinus de la demi-différence des deux arcs par le cosinus de leur demi-somme.

La somme des cosinus de deux arcs est égale au double du produit du cosinus de la demi-somme de ces arcs par le cosinus de leur demi-différence.

La différence des cosinus de deux arcs est égale et de signe contraire au double du produit du sinus de la demi-somme de ces arcs par le sinus de leur demi-différence.

41. Les formules [2] permettent aussi de transformer en produit, et par conséquent de rendre calculable par logarithmes la somme ou la différence d'un sinus et d'un cosinus ; on a en effet :

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right),$$

$$\sin p - \cos q = \sin p - \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right).$$

En particulier,

$$\sin p + \cos p = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - p\right),$$

$$\sin p - \cos p = 2\sin\left(p - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(p - \frac{\pi}{4}\right).$$

42. On peut aussi rendre calculable par logarithmes la somme ou la différence de deux tangentes ; en effet :

$$\operatorname{tang} p \pm \operatorname{tang} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q}$$

$$= \frac{\sin p \cos q \pm \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q},$$

expression calculable par logarithmes.

43. Si l'on divise membre à membre les deux premières équations [2], on a :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}},$$

et si l'on remarque que

$$\frac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}} = \operatorname{tang}\frac{p+q}{2},$$

et que

$$\frac{\cos\frac{p-q}{2}}{\sin\frac{p-q}{2}} = \cot\frac{p-q}{2} = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{p-q}{2}},$$

la formule précédente deviendra :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang}\frac{p+q}{2}}{\operatorname{tang}\frac{p-q}{2}}, \qquad [3]$$

formule très-importante, qu'on peut énoncer ainsi : *Le rapport de la somme de deux sinus à leur différence est égal à la tangente de la demi-somme des arcs divisée par la tangente de leur demi-différence.*

Vérification des formules trigonométriques.

44. On a souvent besoin de vérifier l'exactitude d'une équation donnée entre des lignes trigonométriques; la méthode la plus naturelle pour résoudre cette question consiste à exprimer toutes les lignes trigonométriques qui entrent dans l'équation donnée, en fonction d'une seule; les deux membres doivent alors être identiques; toutefois l'habitude du calcul permet de simplifier le plus souvent cette méthode, comme nous allons le montrer par quelques exemples :

Exemple I. Démontrer la formule

$$\operatorname{tang}^2 a - \operatorname{tang}^2 b = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a \cos^2 b},$$

Les formules du (n° **42**) donnent

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b},$$

$$\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b};$$

en les multipliant membre à membre, on trouve la formule proposée.

EXEMPLE II. *Faire voir que si la somme de trois angles* a, b, c *est égale à* 180°, *on a :*

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c.$$

De l'équation $a+b+c=180^\circ$,

on tire : $a=180^\circ-(b+c)$,

et par suite,

$$\operatorname{tang} a = -\operatorname{tang}(b+c);$$

développons le second membre au moyen de la formule [5] du n° **32**, et nous avons,

$$\operatorname{tang} a = -\frac{\operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c};$$

ou, en chassant le dénominateur, et transposant les termes,

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c;$$

c. q. f. d.

Cette formule offre quelque utilité; elle permet de transformer en produit la somme des tangentes des trois angles d'un triangle. On pourrait aussi l'établir au moyen de la dernière formule du numéro **33**.

EXEMPLE III. *Démontrer la formule :*

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}$$
$$+\sin(a+b+c).$$

On a d'abord (n° **40**) :

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

on a ensuite (n° **30**) :

$$\sin (a+b+c) = \sin (a+b) \cos c + \cos (a+b) \sin c;$$

d'où l'on tire :

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin (a+b+c) =$$
$$2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \sin (a+b) \cos c + \sin c [1 - \cos (a+b)].$$

Or les formules des numéros **34** et **35** donnent :

$$\sin (a+b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$1 - \cos (a+b) = 2 \sin^2 \frac{a+b}{2};$$

en tenant compte de ces relations, nous aurons :

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin (a+b+c) =$$
$$2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a+b}{2} \cos c - \sin \frac{a+b}{2} \sin c \right];$$

mais la quantité entre crochets est égale (n° **30**) à

$$\cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right);$$

donc

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin (a+b+c) =$$
$$2 \sin \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a-b}{2} - \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \right];$$

enfin, si nous transformons en produit la différence de cosinus qui est entre crochets, à l'aide des formules (2) du numéro **40**, nous aurons :

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin (a+b+c) =$$
$$4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2};$$

c. q. f. d.

Remarque. Si la somme $a+b+c$ est égale à 180^0, $\sin(a+b+c)$ est nul, et de plus,

$$\sin\frac{a+b}{2}=\sin\left(90^0-\frac{c}{2}\right)=\cos\frac{c}{2},$$

$$\sin\frac{b+c}{2}=\cos\frac{a}{2},$$

$$\sin\frac{c+a}{2}=\cos\frac{b}{2},$$

et la formule devient alors,

$$\sin a+\sin b+\sin c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

formule remarquable, et qu'il est aisé d'ailleurs d'établir directement.

EXERCICES.

1. Trouver les relations qui existent entre les lignes trigonométriques de deux arcs qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$.

2. Trouver la relation qui doit exister entre deux arcs, pour qu'ils aient :
des sinus égaux et de signes contraires,
ou des cosinus égaux et de signes contraires,
ou des tangentes égales et de signes contraires.

3. Exprimer toutes les lignes trigonométriques d'un arc en fonction de la sécante de cet arc et expliquer pourquoi on a deux valeurs pour le sinus, la tangente, la cotangente et la cosécante de l'arc.

4. On appelle *sinus-verse* d'un arc la longueur comprise entre le pied du sinus et l'origine de l'arc, dans le cercle de rayon 1 ; et on appelle *cosinus-verse* d'un arc le sinus-verse de l'arc complémentaire. Trouver les relations qui existent entre ces deux nouvelles lignes trigonométriques et les six autres.

5. Exprimer la corde d'un arc en fonction du cosinus de cet arc.

6. Résoudre les équations :

$$\operatorname{tang} x = 2 \sin x$$
$$a \operatorname{tang} x = b \cot x$$
$$3 \operatorname{séc} x = 4 \cos x.$$

7. Éliminer x entre les deux équations

$$a \sin x + b \cos x = c$$
$$a' \sin x + b' \cos x = c' ;$$

8. Éliminer x entre les deux équations

$$\operatorname{coséc} x - \sin x = a$$
$$\operatorname{séc} x - \cos x = b ;$$

9. Éliminer x et y entre les trois équations

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = m$$
$$b \sin^2 y + a \cos^2 y = n$$
$$a \operatorname{tang} x = b \operatorname{tang} y.$$

10. Exprimer $\cot (a+b)$ et $\cot (a-b)$ en fonction de $\cot a$ et de $\cot b$.

11. Démontrer les formules :

$$\sin (a+b) \sin (a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$
$$\cos (a+b) \cos (a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$$
$$\sin (a-b) \sin c + \sin (b-c) \sin a + \sin (c-a) \sin b = 0.$$

12. Si l'on désigne par la notation arc sin a, arc cos a, arc tang a, l'arc dont le sinus, le cosinus ou la tangente a pour valeur a, faire voir qu'on a :

$$\operatorname{arc} \sin \frac{3}{5} + \operatorname{arc} \cancel{\cos}\,\sin \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x \cos \varphi}{1 - x \sin \varphi} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \varphi.$$

13. Démontrer les formules :

$$\operatorname{tang} a + \cot a = 2 \operatorname{coséc} 2a$$
$$\sin 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang}^2 a}$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \tang^2 a}{1 + \tang^2 a}$$

$$\cot 2a = \frac{1}{2} \cot a - \frac{1}{2} \tang a$$

$$\sin 3a = 4 \sin a \sin (60^0 - a) \sin (60^0 + a).$$

14. Si l'on pose,

$$\tang \theta = \frac{b}{a},$$

trouver la valeur de l'expression

$$a \cos 2\theta + b \sin 2\theta.$$

15. Démontrer les formules :

$$\tang \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

$$\tang \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{\sin a}.$$

16. Deux angles u et v sont liés entre eux par la relation

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u};$$

on demande d'exprimer $\tang \frac{1}{2} v$ en fonction de $\tang \frac{1}{2} u$.

17. Rendre calculables par logarithmes les expressions suivantes :

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c - \sin (a + b + c)}{\cos a + \cos b + \cos c + \cos (a + b + c)},$$

$$\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a},$$

$$\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a},$$

$$1 \pm \sin 2a,$$

$$1 \pm \tang a,$$

$$1 - \tang^2 a.$$

18. Démontrer géométriquement les formules [2] du numéro **40**, et la formule [3] du numéro **43**.

19. Résoudre l'équation :

$$\sin(x+\alpha)+\cos(x+\alpha)=\sin(x-\alpha)+\cos(x-\alpha).$$

20. Résoudre les équations :

$$\begin{cases} x \pm y = 2a \\ \sin x \pm \sin y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = 2a \\ \cos x \pm \cos y = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = 2a \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b. \end{cases}$$

21. Démontrer les formules suivantes :

$$\frac{\cos^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b} = \cot^2 a \cot^2 b - 1$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin a + \sin b} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos a + \cos b} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\cos b - \cos a} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2} - \cos(a+b+c)$$

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c + \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c}.$$

22. Si a, b, c, désignent trois arcs en progression arithmétique, h étant la raison de cette progression, on a :

$$\sin a + \sin c = 2 \sin b \cos h$$
$$\cos a + \cos c = 2 \cos b \cos h$$
$$\text{tang}\, a + \text{tang}\, c = \frac{2 \,\text{tang}\, b \,(1 + \text{tang}^2 h)}{1 - \text{tang}^2 b \,\text{tang}^2 h}.$$

23. Démontrer les formules :

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{7} + 2 \,\text{arc tang}\, \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$
$$4 \,\text{arc tang}\, \frac{1}{5} - \text{arc tang}\, \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$
$$\text{arc tang}\, \frac{1}{3} + \text{arc tang}\, \frac{1}{5} + \text{arc tang}\, \frac{1}{7} + \text{arc tang}\, \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

24. Si n désigne un nombre entier quelconque, on a les formules :

$$\sin (n+1)\, a = 2 \cos a \sin na - \sin (n-1)\, a$$
$$\cos (n+1)\, a = 2 \cos a \cos na - \cos (n-1)\, a$$

En déduire les valeurs successives de $\sin 2a$, $\sin 3a$, $\sin 4a$, $\cos 2a$, $\cos 3a$, $\cos 4a$, etc.

25. Démontrer les formules :

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\sin^3 a = \frac{3 \sin a - \sin 3a}{4}$$
$$\sin^4 a = \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{8}$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\cos^3 a = \frac{3 \cos a + \cos 3a}{4}$$
$$\cos^4 a = \frac{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a}{8}$$

26. Si a, b, c....... l sont des arcs en progression arithmé-

tique, h la raison de la progression, n le nombre des termes, on a :

$$\sin a + \sin b + \ldots\ldots + \sin l = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$\cos a + \cos b + \ldots\ldots + \cos l = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos \left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin \frac{h}{2}}$$

27. Trouver la somme des carrés des sinus ou des cosinus d'arcs en progression arithmétique.

28. Si la somme de trois arcs a, b, c, est égale à $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\operatorname{tang} b \operatorname{tang} c + \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b = 1$$

$$\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b \cot c$$

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c + \operatorname{séc} a \operatorname{séc} b \operatorname{séc} c.$$

29. Si la somme de trois arcs a, b, c est égale à π, on a les formules :

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

$$\sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

$$\cos a + \cos b - \cos c = -1 + 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c$$

$$\sin 2a + \sin 2b - \sin 2c = 4 \cos a \cos b \sin c$$

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -1 - 4 \cos a \cos b \cos c$$

$$\cos 2a + \cos 2b - \cos 2c = 1 \cancel{+} - 4 \sin a \sin b \cos c$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c.$$

CHAPITRE II.

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

45. Il n'existe pas de formules simples qui permettent de calculer les lignes trigonométriques d'un arc donné; on ne peut pas davantage trouver les arcs qui correspondent à un sinus, à un cosinus, à une tangente donnés. On remédie à cet inconvénient à l'aide de tables dites *tables trigonométriques,* qui fournissent les valeurs des sinus, cosinus, tangentes, etc., de tous les arcs, sinon exactement, du moins avec une approxi mation suffisante pour les applications. Nous allons d'abord voir comment on a pu construire ces tables; nous verrons ensuite comment on peut s'en servir.

Construction des tables.

46. La construction des tables repose sur quelques principes fort simples que nous allons exposer.

THÉORÈME. — *Un arc, moindre qu'un quadrant, est plus grand que son sinus et plus petit que sa tangente.*

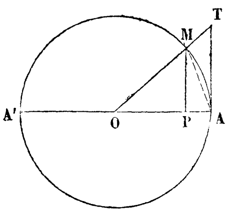

Fig. 33.

Soit AM un arc plus petit qu'un quadrant, MP, son sinus, AT, sa tangente; je dis que l'arc AM est compris entre MP et AT.

En effet, l'arc AM est plus grand que sa corde, et celle-ci est plus grande que MP, puisqu'elle est oblique à OA et que MP est perpendiculaire à cette ligne ; donc, à plus forte raison, l'arc AM est plus grand que MP.

L'aire du secteur AOM est plus petite que celle du triangle OAT ; or,

$$\text{secteur AOM} = \frac{1}{2}\text{OA} \times \text{arc AM}$$

$$\text{triangle OAT} = \frac{1}{2}\text{OA} \times \text{AT};$$

donc

$$\frac{1}{2}\text{OA} \times \text{arc AM} < \frac{1}{2}\text{OA} \times \text{AT},$$

ou

$$\text{arc AM} < \text{AT}$$

c. q. f. d.

47. Corollaire. *Lorsqu'un arc tend vers zéro, le rapport de cet arc à son sinus a pour limite l'unité.*

Si nous désignons par a l'arc AM, plus petit qu'un quadrant, le théorème précédent nous donne la double inégalité,

$$\sin a < a < \operatorname{tang} a,$$

ou bien en remplaçant tang a par $\frac{\sin a}{\cos a}$,

$$\sin a < a < \frac{\sin a}{\cos a};$$

divisons tous les termes de cette inégalité par sin a, qui est positif, elle devient :

$$1 < \frac{a}{\sin a} < \frac{1}{\cos a};$$

si l'on suppose que l'arc a diminue de plus en plus et tende vers zéro, cos a tend vers 1, et il en est de même de $\frac{1}{\cos a}$; le rapport $\frac{a}{\sin a}$ est donc compris entre la quantité fixe 1, et la quantité variable $\frac{1}{\cos a}$, qui a pour limite 1, quand l'arc a tend vers zéro; le rapport $\frac{a}{\sin a}$ a donc aussi pour limite 1.

Il résulte immédiatement de là que le rapport d'un arc à sa corde a pour limite l'unité, quand l'arc tend vers zéro.

48. Le corollaire précédent prouve que si l'arc a est très-petit, le rapport $\frac{a}{\sin a}$ différera très-peu de 1; en d'autres termes, le sinus différera très-peu de l'arc; le théorème suivant nous donne une limite supérieure de cette différence.

Théorème. — *Quand un arc est plus petit qu'un quadrant, la différence entre cet arc et son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc.*

On a en effet, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{a}{2} < \operatorname{tang} \frac{a}{2},$$

ou

$$\frac{a}{2} < \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}};$$

je multiplie les deux membres de cette inégalité par $2\cos^2 \frac{a}{2}$; elle devient :

$$a \cos^2 \frac{a}{2} < 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2};$$

je remplace $\cos^2 \frac{a}{2}$ par $1 - \sin^2 \frac{a}{2}$ (nº **28**) et $2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ par $\sin a$ (nº **39**); j'aurai ainsi :

$$a \left(1 - \sin^2 \frac{a}{2}\right) < \sin a,$$

ou bien,

$$a - \sin a < a \sin^2 \frac{a}{2};$$

cette inégalité aura lieu, *à fortiori*, si je mets, au lieu de $\sin\frac{a}{2}$, la quantité plus grande $\frac{a}{2}$, ce qui donne :

$$a - \sin a < a.\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ou enfin

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4};$$

c. q. f. d.

49. Corollaire I. Nous avons trouvé les deux inégalités

$$\sin a < a,$$

$$a - \sin a < \frac{a^3}{4};$$

on peut les écrire ainsi :

$$a > \sin a > a - \frac{a^3}{4};$$

et, sous cette forme, on voit que l'on a deux limites entre lesquelles est compris $\sin a$: l'une est l'arc a lui-même ; l'autre est l'arc a diminué du quart de son cube.

50. Corollaire II. On peut trouver des limites analogues pour le cosinus, en partant de la formule connue (n° **35**)

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2};$$

remplaçons $\sin\frac{a}{2}$ par la quantité plus grande $\frac{a}{2}$, nous diminuerons le second membre, et nous aurons :

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ou

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2};$$

si nous remplaçons au contraire $\sin\frac{a}{2}$ par la quantité plus petite $\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$, nous augmentons le second membre, et nous pouvons écrire l'inégalité :

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2,$$

ou bien,

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{2a^6}{32^2};$$

cette inégalité sera vraie, à plus forte raison, si nous augmentons le second membre de $\frac{2a^6}{32^2}$; et elle devient alors

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}.$$

On peut réunir ces deux inégalités en une double inégalité :

$$1 - \frac{a^2}{2} < \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16};$$

on voit par là que, si l'arc a est très-petit, $\cos a$ diffère peu de $1 - \frac{a^2}{2}$, et que la différence est moindre que $\frac{a^4}{16}$.

51. Calcul de sin 10″. Je calcule d'abord l'arc de 10″. La demi-circonférence, qui est égale à π, contient 64800 fois l'arc de 10″; on a donc :

$$\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0{,}00004\ 84813\ 68110\ldots$$

or sin 10″ est plus petit que cette valeur; mais la différence est moindre que $\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4}$; évaluons cette quantité, on a :

$$\text{arc } 10'' < 0{,}00005 = \frac{5}{10^5} = \frac{1}{2.10^4};$$

d'où $$\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4} < \frac{1}{32.10^{12}} < \frac{1}{2.10^{13}};$$

on a donc, en vertu du numéro **49**,

$$\text{arc}\,10'' > \sin 10'' > \text{arc}\,10'' - \frac{1}{2.10^{13}},$$

donc sin 10″ est compris entre les deux quantités

0,00004 84813 68110....

et 0,00004 84813 68060.... ;

les décimales communes à ces deux nombres appartiennent à la valeur de sin 10″, et par conséquent, nous aurons

$$\sin 10'' = 0{,}00004\,84813\,681,$$

à moins d'une demi-unité décimale du 13ᵉ ordre; l'approximation de ce résultat est suffisante dans tous les cas.

52. Calcul de cos 10″. Si l'on prend pour cos 10″ la valeur $1 - \frac{(\text{arc}\,10'')^2}{2}$, l'erreur commise est moindre que $\frac{(\text{arc}\,10'')^4}{16}$; or

$$\text{arc}\,10'' < \frac{1}{2.10^4};$$

d'où

$$\frac{(\text{arc}\,10'')^4}{16} < \frac{1}{256.10^{16}} < \frac{1}{2.10^{18}};$$

l'erreur commise sera donc moindre qu'une demi-unité du dix-huitième ordre décimal; en nous bornant aux treize premières décimales, comme pour le sinus, nous aurons :

$$\cos 10'' = 1 - \frac{(\text{arc}\,10'')^2}{2} = 0{,}99999\,99988\,248.$$

53. Calcul des sinus et des cosinus des arcs de 10″ en 10″. Les formules établies dans le chapitre précédent pour l'addition des arcs suffiraient, à la rigueur, pour calculer les sinus et les cosinus des arcs de 20″, de 30″, de $40''$, etc. ; mais il existe des formules plus simples, dues à Thomas Simpson, et que nous allons faire connaître.

Les formules,

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b,$$

donnent, en y faisant $a=mb$,

$$\sin(m+1)b+\sin(m-1)b=2\sin mb\cos b$$
$$\cos(m+1)b+\cos(m-1)b=2\cos mb\cos b;$$

supposons maintenant que b soit égal à l'arc de $10''$, $\cos b$ diffère alors très-peu de l'unité, et on peut poser

$$2\cos b=2-k,$$

k étant un nombre extrêmement petit; sa valeur est

$$2-2\cos 10''=0{,}00000\ 00023\ 504,$$

avec 13 décimales exactes. Si, dans les équations précédentes, on remplace $2\cos b$ par $2-k$, elles deviennent,

$$\sin(m+1)b+\sin(m-1)b=2\sin mb-k\sin mb,$$
$$\cos(m+1)b+\cos(m-1)b=2\cos mb-k\cos mb,$$

ou bien,

$$\sin(m+1)b-\sin mb=\sin mb-\sin(m-1)b-k\sin mb,$$
$$\cos(m+1)b-\cos mb=\cos mb-\cos(m-1)b-k\cos mb.$$

Ces formules font connaître les différences de deux sinus ou de deux cosinus consécutifs : chacune de ces différences est égale à la précédente diminuée du produit $k\sin mb$ ou $k\cos mb$. Ces produits se calculent du reste aisément, si l'on a soin de construire une table des multiples du nombre constant k. Connaissant les différences successives des sinus ou des cosinus, on a ces lignes trigonométriques elles-mêmes par des additions.

Donnons, par exemple, dans ces formules, à m les valeurs successives 1, 2, 3, 4, etc., nous aurons, en remplaçant b par $10''$,

$$\sin 20'' - \sin 10'' = \sin 10'' - k \sin 10'',$$
$$\sin 30'' - \sin 20'' = \sin 20'' - \sin 10'' - k \sin 20'',$$
$$\sin 40'' - \sin 30'' = \sin 30'' - \sin 20'' - k \sin 30'',$$
etc.

$$\cos 20'' - \cos 10'' = \cos 10'' - \quad 1 \quad - k \cos 10'',$$
$$\cos 30'' - \cos 20'' = \cos 20'' - \cos 10'' - k \cos 20'',$$
$$\cos 40'' - \cos 30'' = \cos 30'' - \cos 20'' - k \cos 30'',$$
etc.

54. Au moyen des formules qui précèdent, on pourra donc calculer les sinus et les cosinus de tous les arcs de $10''$ en $10''$, depuis 0^0 jusqu'à une limite quelconque; mais il est inutile d'aller au delà du premier quadrant, puisque tout arc peut y être ramené, c'est-à-dire qu'on peut toujours trouver dans le premier quadrant un arc ayant, en valeur absolue, les mêmes lignes trigonométriques qu'un arc donné quelconque. On peut même s'arrêter à 45^0, si l'on calcule à la fois le sinus et le cosinus de chaque arc; car le sinus d'un arc supérieur à 45^0 est égal au cosinus de son complément qui est inférieur à 45^0, et le cosinus d'un arc plus grand que 45^0 est égal au sinus d'un arc plus petit que 45^0; c'est ce qu'expriment les deux formules :

$$\sin(45^0 + x) = \cos(45^0 - x),$$
$$\cos(45^0 + x) = \sin(45^0 - x).$$

Enfin, au delà de 30^0, on peut simplifier notablement les calculs précédents en se servant des formules :

$$\sin(30^0+x)+\sin(30^0-x)=2\sin 30^0\cos x,$$

$$\cos(30^0-x)-\cos(30^0+x)=2\sin 30^0\sin x,$$

lesquelles donnent, en se rappelant que $\sin 30^0$ est égal à $\frac{1}{2}$,

$$\sin(30^0+x)=\cos x-\sin(30^0-x),$$

$$\cos(30^0+x)=\cos(30^0-x)-\sin x.$$

Remarque. Au lieu de partir de l'arc de $10''$ et de calculer les sinus et les cosinus des arcs de $10''$ en $10''$, on pourrait partir de l'arc de $1''$ ou de l'arc de $1'$, et calculer les sinus et les cosinus des arcs de seconde en seconde ou de minute en minute; la méthode serait toujours la même; les nombres seuls changeraient, ainsi que le degré d'approximation du sinus et du cosinus de l'arc choisi comme point de départ.

55. Vérification des tables de sinus et de cosinus. Quand on calcule les sinus et les cosinus de tous les arcs de 0^0 à 45^0, les opérations qu'il faut faire sont tellement multipliées qu'il peut s'y glisser des erreurs ; et ces erreurs se perpétueraient jusqu'à la fin des tables, puisque chaque sinus s'obtient au moyen des précédents, de même que chaque cosinus. De plus, quoique le degré d'approximation de $\sin 10''$ et de $\cos 10''$ soit très-considérable, il pourrait se faire que, vers la fin des tables, l'accumulation des petites erreurs de tous les nombres calculés rendît tout à fait fautives les valeurs du sinus et du cosinus obtenues par les formules de Thomas Simpson. Pour obvier à ces inconvénients, on calcule directement et avec une grande approximation les valeurs des sinus et des cosinus d'un certain nombre d'arcs équidistants, par exemple, de tous les arcs de 9^0 en 9^0; on forme ainsi d'avance une petite table qui peut servir à vérifier les résultats obtenus par l'autre méthode. Cette petite table aura un autre avantage : les nombres qui y sont contenus pouvant être calculés avec autant d'approximation qu'on veut, on pourra prendre chacun d'eux pour point de départ d'une série de calculs qu'on effectuera par les formules de Thomas Simpson, mais dans un intervalle de 9^0 seulement, ou même dans un intervalle moindre, si on le juge nécessaire.

Nous allons donner ici les formules qui font connaître les sinus et les cosinus de tous les arcs de 9^0 en 9^0 jusqu'à 45^0. On part de $\sin 18^0$ et $\cos 18^0$, dont nous avons donné les valeurs (**29**).

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos 18^0 = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

pour avoir $\sin 9^0$ et $\cos 9^0$, on se sert des formules :

$$\sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}\right],$$

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}\right];$$

en faisant dans ces formules $a = 18^0$, et choisissant convenablement les signes, on a :

$$\sin 9^0 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 9^0 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}.$$

Des valeurs de $\sin 18^0$ et $\cos 18^0$, nous tirerons aisément $\sin 36^0$ et $\cos 36^0$, en nous servant des formules

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1, \qquad \sin 2a = \sqrt{1-\cos^2 2a},$$

et nous aurons ainsi :

$$\cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Remarquons maintenant que 54^0 est le complément de 36^0; on a donc :

$$\sin 54^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

et de cette valeur on tirera celles de $\sin 27^0$ et de $\cos 27^0$,

$$\sin 27^0 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4},$$

$$\cos 27^0 = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{4}.$$

Enfin, on sait que

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a donc, en résumé,

$$\sin 9^0 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos 9^0 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right],$$

$$\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$$

$$\cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\sin 27^0 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos 27^0 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right],$$

$$\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$\cos 36^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1),$$

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Au moyen de ces valeurs, on pourrait calculer, si cela était nécessaire, les sinus et les cosinus des arcs de $4^0\,30'$, $13^0\,30'$, $22^0\,30'$, etc., jusqu'à 45^0; on emploierait, à cet effet, les formules qui servent à trouver le sinus et le cosinus de la moitié d'un arc, quand on connaît le sinus ou le cosinus de cet arc.

Usage des tables trigonométriques.

56. Comme l'emploi des logarithmes abrége considérablement les calculs, on a trouvé commode d'inscrire dans les tables trigonométriques, non pas les valeurs des sinus, cosinus, etc., mais les logarithmes de ces valeurs. Pour construire ces nouvelles tables, on commence par calculer les logarithmes des sinus et des cosinus de tous les arcs de $10''$ en $10''$. Pour avoir ensuite les logarithmes des tangentes et des cotangentes, on remarque que l'on a :

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

d'où l'on tire :

$$\log \operatorname{tang} x = \log \sin x - \log \cos x,$$

$$\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x;$$

et ces formules permettent d'avoir, par de simples soustractions les logarithmes des tangentes et des cotangentes. Quant aux logarithmes des sécantes et des cosécantes, on ne les trouve pas dans les tables, d'abord parce qu'ils sont peu employés, ensuite parce que ces logarithmes sont respectivement égaux et de signes contraires à ceux du cosinus et du sinus. On a, en effet :

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x},$$

d'où l'on tire :

$$\log \text{séc}\, x = -\log \cos x,$$

$$\log \text{coséc}\, x = -\log \sin x.$$

57. On emploie en France deux espèces de tables trigonométriques, les tables à cinq décimales et les tables à sept décimales. Les premières font connaître avec cinq décimales exactes les logarithmes des lignes trigonométriques de tous les arcs de minute en minute, de $0°$ à $90°$; les plus répandues sont celles de Lalande; les plus commodes sont celles de M. J. Hoüel *. Les tables à sept décimales donnent avec sept chiffres décimaux exacts les logarithmes des lignes trigonométriques des arcs de 10 en 10 secondes pour tout le premier quadrant; elles sont connues sous le nom de tables de Callet; M. J. Dupuis** et M. L. Schrön *** en ont donné récemment de nouvelles éditions plus commodes que l'ancienne. Nous allons expliquer la disposition et l'usage de ces tables, en commençant par les tables à 5 décimales.

58. TABLES A CINQ DÉCIMALES. — De $0°$ à $45°$, les degrés sont marqués au haut des pages, et les minutes dans la première colonne à gauche; on trouve les logarithmes

---

* Paris, Mallet-Bachelier, 1858.

** Paris, Hachette et Cie, 1862.

*** Paris, Gauthier-Villars, successeur de Mallet-Bachelier, 1866.

du sinus, de la tangente, de la cotangente et du cosinus dans les colonnes qui portent en haut les indications *sinus*, *tang.*, *cot.*, *cosin.* De 45° à 90°, les degrés sont marqués au bas des pages, les minutes sont inscrites dans la colonne de droite, et les logarithmes des diverses lignes trigonométriques sont dans les colonnes qui portent en bas les titres *sinus*, *tang.*, *cot.*, *cosin.* Cette disposition a permis de réduire de moitié le volume des tables; ou, ce qui revient au même, elle dispense le calculateur de chercher les compléments des arcs plus grands que 45°, pour avoir les logarithmes de leurs lignes trigonométriques. On a ainsi dans la table deux échelles marchant en sens inverse, l'une de 0° à 45°, l'autre de 45° à 90°.

A côté de la colonne des sinus et de celle des cosinus, on a inscrit dans deux colonnes marquées D les différences des logarithmes de deux sinus ou de deux cosinus consécutifs. Entre les deux colonnes des tangentes et des cotangentes, une petite colonne, intitulée *d. c.* dans les tables de Lalande et D dans celles de M. Hoüel donne de même les différences entre les logarithmes de deux tangentes ou de deux cotangentes consécutives. Ces différences sont évidemment les mêmes : car la cotangente est l'inverse de la tangente; donc le logarithme d'une cotangente est égal et de signe contraire au logarithme de la tangente correspondante; et par conséquent la différence des logarithmes de deux tangentes consécutives est égale et de signe contraire à la différence des logarithmes des deux cotangentes correspondantes. Toutes ces différences sont exprimées en unités décimales du 5e ordre, c'est-à-dire en cent-millièmes.

Les sinus et les cosinus de tous les arcs, ainsi que les tangentes des arcs plus petits que 45° et les cotangentes des arcs supérieurs à 45° sont plus petits que 1; donc leurs logarithmes ont des caractéristiques négatives. Les auteurs des tables ont voulu éviter les nombres négatifs, et, pour y arriver, ils ont augmenté de 10 tous les logarithmes-sinus, tous les logarithmes-cosinus, les logarithmes-tangentes des arcs inférieurs à 45°, et les logarithmes-cotangentes des arcs plus grands que 45°. Pour avoir la véritable valeur de ces logarithmes, on devra donc diminuer leurs caractéristiques de 10 unités.

Enfin les tables de M. Hoüel contiennent en outre les logarithmes des sécantes et des cosécantes ; nous ne nous en servirons pas.

Pour pouvoir faire usage des tables trigonométriques, il faut savoir résoudre les deux questions suivantes : 1° étant donné un arc, trouver le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques ; 2° étant donné le logarithme d'une ligne trigonométrique quelconque, trouver l'arc correspondant.

59. Problème I. — *Étant donné un arc, trouver le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques.*

Quand l'arc donné est dans la table, c'est-à-dire quand il ne contient que des degrés et des minutes, on trouve immédiatement le logarithme demandé :

Exemple : $\log \sin 53^\circ 17' = \bar{1},90396$

$\log \cos 28^\circ 35' = \bar{1},94355$

$\log \operatorname{tang} 39^\circ 24' = \bar{1},91456$

$\log \cot 65^\circ 12' = \bar{1},66470.$

Je suppose, en second lieu, que l'arc contienne des fractions de minute. On est obligé alors de faire une interpolation analogue à celle qu'on fait pour trouver le logarithme d'un nombre qui n'est pas dans la table. Avant d'exposer la marche qu'il faut suivre, je rappellerai que le sinus et la tangente croissent quand l'arc croît, au lieu que le cosinus et la cotangente décroissent ; de là résulte une petite différence dans la manière d'opérer, suivant qu'on cherche le logarithme d'un sinus et d'une tangente, ou celui d'un cosinus et d'une cotangente.

EXEMPLE I. Chercher le logarithme de sin $36^0\ 12'\ 43'',6$.

Je cherche d'abord dans la table log. sin $36^0\ 12'$; je trouve ainsi :

$$\log \sin 36^0\, 12' = \bar{1},77130\,;$$

la différence tabulaire étant 17, cela veut dire que quand l'arc augmente de $1'$ ou $60''$, le logarithme de son sinus augmente de 17 unités du 5^e ordre. Cela posé, nous admettrons que, *dans un intervalle d'une minute, les accroissements des logarithmes des lignes trigonométriques sont proportionnels aux accroissements des arcs*. Cette proportionnalité n'est pas exacte rigoureusement ; mais on démontre qu'en l'admettant dans un intervalle d'une minute, on commet en général une erreur moindre qu'une demi-unité du 5^e ordre décimal. On fera alors le raisonnement suivant : si pour un accroissement de $60''$ donné à l'arc, le logarithme-sinus augmente de 17, quand l'arc augmentera de $1''$, son logarithme-sinus augmentera de $\frac{17}{60}$, et quand l'arc augmentera de $43'',6$, son logarithme-sinus augmentera de

$$\frac{17 \times 43{,}6}{60} = 12 \text{ unités du } 5^{e} \text{ ordre}\,;$$

le logarithme-sinus demandé sera donc

$$\bar{1},77130 + 0,00012 = \bar{1},77142.$$

On dispose ordinairement les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{lr} \log \sin 36^0\, 12' & = \bar{1},77130 \\ \quad\text{pour}\quad 43'',6 & \underline{\qquad 12} \\ \log \sin 36^0\, 12'\, 43'',6 & = \bar{1},77142 \end{array}$$

Exemple II. Chercher log tang $61^\circ 51' 25'',8$.

Je cherche dans la table log tang $61^\circ 51'$; j'ai :

$$\log \operatorname{tang} 61^\circ 51' = 0,27159;$$

la différence tabulaire est 30. En raisonnant alors comme dans l'exemple précédent, on trouve qu'il faut ajouter au logarithme trouvé dans la table

$$\frac{30 \times 25,8}{60} = 13 \text{ unités du } 5^e \text{ ordre;}$$

on a donc

$$\begin{array}{lr} \log \operatorname{tang} 61^\circ 51' & = 0,27159 \\ \quad\text{pour} \quad 25'',8 & 13 \\ \hline \log \operatorname{tang} 61^\circ 51' 25'',8 & = 0,27172 \end{array}$$

Exemple III. Trouver log cos $24^\circ 29' 32'',4$.

Je cherche d'abord log cos $24^\circ 29'$; je trouve :

$$\log \cos 24^\circ 29' = \bar{1},95908;$$

la différence tabulaire est 6; donc, quand l'arc *augmente* de $60''$, le logarithme de son cosinus *diminue* de 6 unités du 5^e ordre, ou, pour employer le langage algébrique, le logarithme-cosinus *augmente de* — 6. Tout revient donc à considérer comme négatives les différences des logarithmes-cosinus et des logarithmes-cotangentes. En raisonnant alors comme dans les exemples précédents, nous voyons qu'il faut ajouter au logarithme trouvé dans la table la quantité négative

$$-\frac{6 \times 32,4}{60} = -3 \text{ unités du } 5^e \text{ ordre,}$$

ce qui revient, en définitive, à retrancher 3 unités du 5^e ordre à ce logarithme. On a ainsi :

$$\begin{array}{lr} \log \cos 24^\circ 29' & = \bar{1},95908 \\ \quad\text{pour} \quad 32'',4 & -3 \\ \hline \log \cos 24^\circ 29' 32'',4 & = \bar{1},95905 \end{array}$$

EXEMPLE IV. Trouver log cot $41^\circ\, 28'\, 17'',5$.

Je cherche d'abord log cot $41^\circ\, 28'$; j'ai :

$$\log \cot 41^\circ\, 28' = 0,05370,$$

et la différence tabulaire est 25, ou plutôt, — 25 ; donc la quantité à ajouter au logarithme précédent est

$$-\frac{25 \times 17,5}{60} = -7 \text{ unités du } 5^e \text{ ordre;}$$

on a donc :

$$\begin{array}{lr} \log \cot 41^\circ\, 28' & = 0,05370 \\ \text{pour } 17'',5 & -7 \\ \hline \log \cot 41^\circ\, 28'\, 17'',5 & = 0,05363 \end{array}$$

RÈGLE. *Quand un arc contient des secondes, pour avoir le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques, on supprime d'abord les secondes, et on cherche dans la table le logarithme correspondant à ce nouvel arc; on multiplie ensuite la différence tabulaire par le nombre des secondes qu'on a négligées, et on divise le produit par* 60 ; *la partie entière de ce quotient représente le nombre d'unités du* 5^e *ordre qu'il faut ajouter au logarithme trouvé dans la table. On aura soin de regarder la différence tabulaire comme positive, s'il s'agit d'un sinus ou d'une tangente, et comme négative, s'il s'agit d'un cosinus ou d'une cotangente.*

Les tables de M. Hoüel contiennent des tables de parties proportionnelles qui dispensent de faire cette multiplication et cette division ; l'usage en est trop facile à comprendre pour qu'il soit nécessaire de donner des exemples.

REMARQUE. L'interpolation par parties proportionnelles que nous avons faite dans les exemples précédents n'est pas suffisamment exacte, quand on veut avoir les logarithmes des sinus, des tangentes et des cotangentes des arcs inférieurs à $1^\circ\, 30'$, ou les logarithmes des cosinus, des tangentes et des cotangentes des arcs supérieurs à $88^0\ 30'$; il faut alors opérer autrement (voir la note II à la fin du volume); du reste, ce cas ne se présente jamais dans les applications usuelles de la trigonométrie.

60. Si l'arc donné était *approché*, il pourrait se faire que les logarithmes trouvés par la règle précédente fussent affectés d'une erreur plus grande qu'une unité du 5e ordre décimal; on peut avoir aisément une limite supérieure de cette erreur. Soit ε l'erreur de l'arc donné exprimée en secondes, δ la différence tabulaire; il résulte évidemment de ce qui précède que l'erreur du logarithme sera $\frac{\delta\varepsilon}{60}$, en supposant, bien entendu, les accroissements des logarithmes proportionnels à ceux des arcs; si n est le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{\delta\varepsilon}{60}$, l'erreur du logarithme sera inférieure à $n+1$ unités du 5e ordre.

Exemple. Un arc a est égal à $59^0\ 17'\ 18''$ environ, avec une erreur possible de $35''$ en plus ou en moins; trouver le logarithme du sinus de cet arc.

On a d'abord

$$\begin{array}{lr} \log\sin 59^0\,17' & = \bar{1},93435 \\ \text{pour}\qquad 18'' & 2 \\ \hline \log\sin 59^0\,17'\,18'' & = \bar{1},93437. \end{array}$$

Mais la différence tabulaire étant 7, l'erreur de ce logarithme est au plus égale à

$$\frac{7\times 35}{60} < 5 \text{ unités du } 5^{\text{e}} \text{ ordre};$$

donc $\log\sin a$ est compris entre

$$\bar{1},93432 \quad \text{et} \quad \bar{1},93442.$$

Cette remarque a une certaine importance, parce que, dans la pratique, on emploie souvent, pour mesurer les angles, des instruments très-imparfaits, qui ne font connaître les angles qu'à une demi-minute ou même à une minute près; on aurait tort, dans ce cas, de regarder toujours comme exacte la 5^e décimale du logarithme trouvé au moyen des tables.

61. Problème II. *Étant donné le logarithme d'une ligne trigonométrique, trouver l'arc correspondant.*

Si le logarithme donné se trouve exactement dans la table, il n'y a aucune difficulté: on lit l'arc immédiatement.

Exemple. $\log \sin x = \bar{1},81446 \quad x = 40^0\,43'$

$\log \text{tang}\, x = \bar{2},41321 \quad x = 1^0\,29'$

$\log \cos x = \bar{1},51117 \quad x = 71^0\,4'$

$\log \cot x = 1,65602 \quad x = 65^0\,38'$

Je suppose maintenant que le logarithme donné ne se trouve pas dans la table : je distinguerai deux cas : 1^o le logarithme donné est le logarithme d'un sinus ou d'une tangente; 2^o c'est le logarithme d'un cosinus ou d'une cotangente.

1er Cas. On donne un logarithme-sinus ou un logarithme-tangente.

Exemple I. $\log. \sin x = \bar{1},68182.$

Je cherche dans la table le logarithme-sinus immédiatement inférieur au logarithme donné; je trouve que

$$\log \sin 28^0\,43' = \bar{1},68167;$$

la différence des deux logarithmes est 15 unités du 5^e ordre, et la différence tabulaire est 23. On fait alors la règle de trois suivante : l'accroissement de l'arc est de $60''$, quand le logarithme-sinus augmente de 23; quel sera l'accroissement de l'arc, si le logarithme-sinus augmente de 15? On trouve aisément que l'arc s'accroît de

$$\frac{60'' \times 15}{23} = 39'',$$

à 1 seconde près. L'arc cherché sera donc $28^\circ\,43'\,39''$.

On dispose habituellement les calculs de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \bar{1},68182 = \log\sin x & \\ \underline{\bar{1},68167} = \log\sin 28^\circ\,43' & \\ \text{pour } 15 & \underline{\qquad\qquad 39''} \\ & x = 28^\circ\,43'\,39'' \end{array}$$

Exemple II. $\log \operatorname{tang} x = \bar{1},96571$

$$\begin{array}{lll} \bar{1},96571 = \log \operatorname{tang} x & & \\ \underline{\bar{1},96560} = \log \operatorname{tang}\ 42^\circ\,44' & & \text{diff. tab. } 26 \\ \text{pour } 11 & \underline{\qquad\qquad 25''} & \\ & x = 42^\circ\,44'\,25'' & \end{array}$$

2^e^ Cas. On donne le logarithme d'un cosinus ou d'une cotangente.

Exemple III. $\log\cos x = \bar{1},81569.$

Je cherche dans la table le logarithme-cosinus le plus rapproché *par excès* du logarithme donné; je trouve ainsi que :

$$\bar{1},81578 = \log\cos 49^\circ\,8';$$

la différence de ces deux logarithmes est 9, et la différence tabulaire est 15; donc, quand le logarithme-cosinus diminue de 15, l'arc augmente de 60'', et il faut chercher de combien de secondes augmentera l'arc, quand le logarithme-cosinus diminue de 9 ; on voit bien aisément que l'augmentation de l'arc sera :

$$\frac{60'' \times 9}{15} = 36'';$$

l'arc x est donc égal à $49^\circ\ 8'\ 36''$. Voici la disposition qu'il faut donner au calcul :

$$\begin{array}{ll} \bar{1},81569 = \log\cos x & \\ \underline{\bar{1},81578} = \log\cos 49^\circ 8' & \text{diff. tab. } 15. \\ \text{pour } 9 \ldots\ldots\ldots\ldots \ \underline{36''} & \\ x = 49^\circ 8' 36'' & \end{array}$$

On opère de même pour un logarithme de cotangente.

Exemple IV. $\log\cot x = \bar{1},06507$.

Voici le calcul :

$$\begin{array}{ll} \bar{1},06507 = \log\cot x & \\ \underline{\bar{1},06556} = \log\cot 83^\circ 22' & \text{diff. tab. } 111. \\ \text{pour } 49 \ldots\ldots\ldots\ldots \ \underline{26'',5} & \\ x = 83^\circ 22' 26'',5 & \end{array}$$

Règle. *On cherche dans la table le logarithme le plus rapproché du logarithme donné, par défaut, s'il s'agit d'un logarithme-sinus ou d'un logarithme-tangente, par excès, s'il s'agit d'un logarithme-cosinus ou d'un logarithme-cotangente ; l'arc correspondant donne les degrés et les minutes de l'arc inconnu. Pour avoir les secondes, on fait la différence du logarithme donné et du logarithme pris dans la table ; on multiplie cette différence par* 60 *et on divise le produit par la différence tabulaire ; la partie entière du quotient représente les secondes de l'arc cherché.*

62. Il nous reste à étudier une question fort importante sur ce second problème : *avec quelle approximation peut-on calculer un arc, quand on connaît le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques avec cinq décimales exactes, ou plus généralement, à moins de* n *unités du* 5^e^ *ordre ?*

Soit δ la différence tabulaire; quand le logarithme augmente de δ, l'arc augmente ou diminue de $60''$; donc, si le logarithme varie de n unités du 5ᵉ ordre, l'arc varie de $\frac{60'' \times n}{\delta}$; telle est la limite de l'erreur que l'on pourra commettre sur l'arc.

Supposons, en particulier, $n = 1$, c'est-à-dire le logarithme connu à moins d'une unité décimale du 5ᵉ ordre, l'erreur possible de l'arc correspondant sera $\frac{60''}{\delta}$. De là découlent des conséquences très-importantes pour le bon usage des tables. On voit d'abord, à l'inspection de la table, que les différences tabulaires des logarithmes-sinus vont constamment en décroissant quand l'arc croît de 0^0 à 90^0; donc un arc est d'autant mieux déterminé par son sinus, qu'il est plus petit. Au-dessous de 12^0, la différence étant supérieure ou égale à 60, l'arc pourra être déterminé à $1''$ près; à 22^0, l'approximation n'est plus que de $2''$, à 31^0, de $3''$, à 45^0, de $5''$ environ, à 64^0 de $10''$; enfin, vers 88^0, l'erreur peut aller à $3'$.

Pour le cosinus, les résultats sont inverses; un arc est d'autant mieux déterminé par son cosinus qu'il est plus voisin de 90^0.

Les tangentes n'offrent pas les mêmes inconvénients que les sinus et les cosinus. On peut voir, en effet, dans les tables que les différences tabulaires des logarithmes des tangentes sont toujours plus grandes que celles des logarithmes des sinus ou des cosinus situés sur la même ligne ; et il est facile de s'en rendre compte *à priori ;* on a en effet :

$$\log \operatorname{tang}(x+h)=\log \sin(x+h)-\log\cos(x+h)$$

$$\log \operatorname{tang} x=\log \sin x-\log \cos x,$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}&\log\operatorname{tang}(x+h)-\log\operatorname{tang} x=\\&[\log\sin(x+h)-\log\sin x]\\&+[\log\cos x-\log\cos(x+h)],\end{aligned}$$

égalité qui prouve que la différence de deux logarithmes-tangentes est la somme des valeurs absolues des différences des logarithmes-sinus et des logarithmes-cosinus correspondants. On conclut de là que l'erreur possible de l'arc, qui est représentée par la fraction $\frac{60''}{\delta}$, est plus petite, quand l'arc est déterminé par sa tangente que quand il est déterminé par son sinus ou par son cosinus. *Il vaut donc mieux, quand cela est possible, déterminer un arc au moyen de sa tangente qu'au moyen de son sinus ou de son cosinus.* Examinons maintenant les variations de la fraction $\frac{60''}{\delta}$, dans le cas de la tangente; on voit d'abord que la différence δ diminue de 0^0 à 45^0, et qu'elle augmente ensuite de 45^0 à 90^0 en repassant par les mêmes valeurs; au-dessous de 12^0, l'erreur de l'arc est moindre que $1''$; jusqu'à 28^0 environ, elle est inférieure à $2''$; enfin, à 45^0 où elle atteint sa plus grande valeur, elle est égale à $\frac{60''}{25}=2'',4$; elle reste donc toujours plus petite que $3''$.

Tout ce que nous venons de dire sur la tangente s'applique également à la cotangente.

63. Tables a sept décimales. La disposition des tables à sept décimales est la même que celle des tables à cinq décimales. Au-dessous de 45°, le nombre des degrés de l'arc se lit au haut de la page, les minutes et les dizaines de secondes dans les deux premières colonnes à gauche; pour les arcs supérieurs à 45°, on trouve les degrés au bas de la page, les minutes et les dizaines de secondes dans les deux colonnes extrêmes à droite. Les colonnes intitulées *sinus*, *co-sin*, *tang*, *cotang* contiennent les logarithmes des sinus, des cosinus, des tangentes et des cotangentes des arcs; chaque colonne a deux titres, le titre supérieur, qui correspond aux arcs plus petits que 45°, et le titre inférieur, qui se rapporte aux arcs plus grands que 45°. Les colonnes intitulées *dif* donnent les différences de deux logarithmes consécutifs.

Comme dans les tables de Lalande, on a augmenté de 10 unités tous les logarithmes des sinus et des cosinus, et de plus ceux des logarithmes des tangentes des arcs plus petits que 45° et des cotangentes des arcs plus grands que 45°.

Toutefois, M. Dupuis a rétabli les vraies caractéristiques dans l'édition qu'il a donnée.

On se sert des tables de Callet comme des petites tables à cinq décimales; seulement, l'interpolation par parties proportionnelles se fait un peu plus simplement; nous allons, au surplus, traiter successivement les deux problèmes qu'il faut savoir résoudre pour faire usage des tables.

64. Problème I. *Étant donné un arc, trouver le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques.*

Si l'arc donné ne renferme que des degrés, des minutes et des dizaines de secondes, on trouve sans calcul dans la table les logarithmes de toutes ses lignes trigonométriques. Ainsi,

$$\log \sin\ 52^\circ 17' 20'' = \bar{1},8982341$$

$$\log \operatorname{tang}\ 24^\circ 13' 40'' = \bar{1},6532132$$

$$\log \cos\ 28^\circ 23' 50'' = \bar{1},9443206$$

$$\log \cot\ 10^\circ 52' 10'' = 0,7166612$$

Lorsque l'arc donné renferme des secondes et des fractions de seconde, on a recours à une interpolation, qui repose sur le principe suivant :

Dans un intervalle de dix secondes, on peut regarder les variations d'un arc comme proportionnelles aux variations des logarithmes de ses lignes trigonométriques.

Prenons quelques exemples :

EXEMPLE I. Trouver log sin $39^\circ 17' 47'', 64$.

Je cherche dans la table log sin $39^\circ\ 17'\ 40''$; j'ai ainsi :

$$\log \sin\ 39^\circ 17' 40'' = \bar{1},8016135;$$

et la différence tabulaire est 257, ce qui veut dire que, lorsque l'arc augmente de 10 secondes, son logarithme-sinus augmente de 257 unités décimales du 7^e ordre. Nous en concluons, en vertu du principe qui précède, que si l'arc s'accroît de 1 seconde, son logarithme-sinus augmente de 25,7 ; et enfin, pour un accroissement de $7'', 64$ donné à l'arc, il faudra augmenter le logarithme-sinus de

$$25,7 \times 7,64 = 196 \text{ unités du } 7^e \text{ ordre};$$

le logarithme cherché sera alors

$$\bar{1},8016135 + 0,0000196 = \bar{1},8016331.$$

Voici la disposition que l'on donne habituellement à ce calcul :

$$\begin{array}{lrl} \log\sin 39^\circ 17' 40'' & =\bar{1},8016135 & \text{dif. tab. } 257. \\ \quad\text{pour } 7'',64\ldots\ldots & \underline{196} & 25,7\times 7,64 = 196 \\ \log\sin 39^\circ 17' 47'',64 & =\bar{1},8016331 & \end{array}$$

Les tables de M. Dupuis et celles de M. Schrön contiennent des tables de parties proportionnelles qui dispensent de faire la multiplication indiquée ci-dessus. Voici le calcul précédent, refait au moyen de ces tables :

$$\begin{array}{lr} \log\sin 39^\circ 17' 40'' & =\bar{1},8016135 \\ \quad\text{pour } 7'' \ldots\ldots & 179\ 9 \\ \quad\text{pour } 0'',6 \ldots\ldots & 15\ 4 \\ \quad\text{pour } 0'',04 \ldots\ldots & \underline{1\ 0} \\ \log\sin 39^\circ 17' 47'',64 & =\bar{1},8016331 \end{array}$$

EXEMPLE II. Trouver $\log\cos 57^\circ 18' 35'',19$.

Je cherche dans la table $\log\cos 57^\circ\ 18'\ 30''$; j'ai ainsi :

$$\log\cos 57^\circ 18' 30'' = \bar{1},7324886,$$

et la différence tabulaire est 328 ; c'est-à-dire que si l'arc *augmente* de $10''$, le logarithme de son cosinus *diminue* de 328 unités décimales du 7^e^ ordre; nous pouvons regarder alors la différence tabulaire comme négative, et dire que le logarithme-cosinus *s'accroît* de — 328, quand l'arc augmente de 10 secondes; donc, si l'arc augmente de $5'',19$, il faudra ajouter au logarithme de son cosinus

$$-32,8\times 5,19 = -170 \text{ unités du } 7^{e} \text{ ordre.}$$

On a alors les calculs suivants :

$\log\cos 57^0 18' 30'' \quad = \bar{1},7324886$		dif. tab. —328.
pour $\quad 5'',19$	—170	$-32,8 \times 5,19 = -170$
$\log\cos 57^0 18' 35'',19 = \bar{1},7324716.$		

Règle. *Quand un arc contient des secondes et des fractions de seconde, pour avoir le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques, on lit dans la table l'arc le plus rapproché de l'arc donné par défaut, et on prend le logarithme correspondant; on multiplie ensuite le dixième de la différence tabulaire par le nombre des secondes et des fractions de seconde qu'on a négligées; la partie entière de ce produit représente le nombre d'unités décimales du* 7^e^ *ordre qu'il faut ajouter au logarithme trouvé dans la table. On regardera la différence tabulaire comme positive pour les sinus et les tangentes, comme négative, pour les cosinus et les cotangentes.*

65. Remarque. Nous avons admis que les variations des arcs sont proportionnelles aux variations des logarithmes de leurs lignes trigonométriques : ce principe n'est pas exact; mais on démontre que l'erreur qui résulte de son application est toujours moindre qu'une demi-unité du 7^e ordre décimal, si l'arc donné est compris entre 5^0 et 85^0; la même chose a lieu pour les logarithmes des sinus des arcs compris entre 85^0 et 90^0, et pour ceux des cosinus des arcs inférieurs à 5^0. On peut d'ailleurs se rendre compte, par les tables elles-mêmes, de l'exactitude approximative du principe; car on voit que, dans presque toute l'étendue des tables, les différences tabulaires restent constantes dans un intervalle assez grand; ainsi, déjà à 10^0, les différences des logarithmes-sinus ne changent pas dans un intervalle de 20 à 40 secondes, ce qui montre que, pour des accroissements égaux donnés à l'arc, les logarithmes du sinus s'accroissent de quantités égales.

Pour les arcs compris entre 0^0 et 5^0 ou entre 85^0 et 90^0, on a construit des tables comprenant tous les arcs de seconde en seconde; on les trouve immédiatement avant les autres dans les tables de Callet et de M. Dupuis; en se servant de ces tables, on est ramené à faire l'interpolation par parties proportionnelles dans un intervalle 10 fois plus petit qu'avec les tables ordinaires, ce qui diminue considérablement l'erreur; toutefois, cette erreur peut excéder une unité décimale du 7e ordre, pour des arcs plus petits que 3^0. On recourt alors à un autre procédé que nous indiquerons plus tard. (V. la note II à la fin du volume.)

66. Si l'arc donné n'est qu'approché, et que l'on appelle ε l'erreur de cet arc exprimée en secondes, le logarithme trouvé par la règle précédente pourra être affecté d'une erreur plus grande qu'une unité du 7e ordre décimal; mais si n représente le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{\varepsilon\delta}{10}$, l'erreur du logarithme sera moindre que $n+1$ unités du 7e ordre décimal.

67. Problème II. *Étant donné le logarithme d'une ligne trigonométrique, trouver l'arc correspondant.*

Il n'y a pas de difficulté, quand le logarithme donné se trouve dans la table; je supposerai donc tout de suite qu'il ne s'y trouve pas et je distinguerai deux cas, suivant qu'on donne le logarithme d'une ligne trigonométrique croissante, sinus ou tangente, ou bien le logarithme d'une ligne trigonométrique décroissante, cosinus ou cotangente.

1er Cas. On donne un logarithme-sinus ou un logarithme-tangente.

Exemple. On donne $\log \operatorname{tang} x = 0{,}3524129$, et on demande l'arc x.

Je cherche dans la table le logarithme-tangente le plus rapproché du nombre donné *par défaut*, et je trouve que c'est $\log \operatorname{tang} 66^{0}\ 2'\ 50'' = 0{,}3523809$. La différence entre ce logarithme et le logarithme donné est 320, et la différence tabulaire est 567; nous avons alors à résoudre la règle de trois suivante : lorsqu'un arc augmente de 10 secondes, le logarithme de sa tangente augmente de 567; quel sera l'accroissement de l'arc, si le logarithme-tangente augmente de 320 ? Il est clair que l'arc devra s'accroître de

$$\frac{10'' \times 320}{567} = 5'',64,$$

à $0'',01$ près. L'arc x sera donc égal à $66^{0}\, 2'\, 55'',64$. Les calculs se disposent habituellement de la manière suivante :

$0{,}3524129 = \log \operatorname{tang} x$		
$0{,}3523809 = \log \operatorname{tang} 66^{0}\, 2'\, 50''$		diff. tab. 567
pour 320.	$5'',64$	$3200 : 567 = 5{,}64$
	$x = 66^{0}\, 2'\, 55'',64$	

Comme dans le premier problème, les tables de parties proportionnelles jointes aux tables de MM. Dupuis et Schrön permettent de simplifier ces calculs. On a alors :

	0,3524129	$= \log \operatorname{tang} x$	
	0,3523809	$= \log \operatorname{tang} 66^{0}\, 2'\, 50''$	
	320		
pour	283,5	. . . .	$5''$
	36,5		
pour	34,0	. . . .	$0'',6$
	2,5		
pour	2,3	. . . .	$0'',04$
			$x = 66^{0}\, 2'\, 55'',64$

On opérerait de même si on donnait un logarithme-sinus.

2e Cas. On donne un logarithme-cosinus ou un logarithme-cotangente.

Exemple. On donne $\log\cos x = \bar{1},5483417$, et on demande l'arc x.

Je cherche dans la table le logarithme-cosinus le plus rapproché du logarithme donné *par excès ;* je trouve ainsi que

$$\log\cos 69^{\circ}18'0'' = \bar{1},5483585 ;$$

ce logarithme surpasse le nombre donné de 168, et la différence tabulaire est 557. On a donc, comme dans le cas précédent, à résoudre une règle de trois dont voici l'énoncé : Quand le logarithme-cosinus diminue de 557, l'arc augmente de 10″ ; quel sera l'accroissement de l'arc, si le logarithme-cosinus diminue de 168 ? On trouve aisément que l'arc augmente de

$$\frac{10'' \times 168}{557} = 3'',01 ,$$

à 0″,01 près. L'arc x est donc égal à $69^{\circ}18'3'',01$.

Voici les calculs :

$$\begin{array}{llll}
\bar{1},5483417 = \log\cos x & & & \\
\underline{\bar{1},5483585} = \log\cos 69^{\circ}18'0'' & & \text{diff. tab.} \ldots & 557 \\
\quad \text{pour } 168 \ldots\ldots\ldots & \underline{\qquad 3'',01} & 1680 : 557 = 3,01 & \\
& x = 69^{\circ}18'3'',01 & &
\end{array}$$

On opérerait de même pour un logarithme de cotangente.

Règle. *Pour trouver un arc, quand on connaît le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques, on cherche dans la table le logarithme le plus voisin du logarithme donné, par défaut, si c'est un logarithme-sinus ou un loga-*

rithme-tangente, et par excès, si c'est un logarithme-cosinus ou un logarithme-cotangente; l'arc correspondant donnera les degrés, les minutes et les dizaines de secondes de l'arc cherché. Pour avoir les secondes et les fractions de seconde, on multiplie par 10 *la différence du logarithme donné et du logarithme pris dans la table, et on divise ce produit par la différence tabulaire.*

68. Cherchons maintenant *avec quelle approximation on peut calculer un arc, quand on connaît le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques, à moins de* n *unités du* 7^e *ordre décimal.*

Si δ est la différence tabulaire, quand le logarithme varie de δ unités du 7^e ordre, l'arc augmente ou diminue de $10''$; donc, à une variation de n unités du 7^e ordre dans le logarithme, correspond pour l'arc une variation de $\frac{10''\times n}{\delta}$; cette fraction est donc la limite de l'erreur qu'on peut commettre dans le calcul de l'arc.

En particulier, si $n=1$, cette fraction devient $\frac{10''}{\delta}$; c'est la limite de l'erreur que l'on peut avoir, quand on détermine un arc au moyen d'un logarithme trigonométrique supposé connu avec sept chiffres décimaux exacts.

Il résulte de là que l'arc sera déterminé d'autant plus exactement que δ sera plus grand, et comme cette différence est toujours plus grande pour la tangente et la cotangente que pour le sinus et pour le cosinus (**62**), il vaut mieux, quand cela se peut, calculer un arc au moyen de sa tangente ou de sa cotangente qu'au moyen de son sinus ou de son cosinus.

Les arcs très-petits sont déterminés avec beaucoup d'exactitude par leurs sinus, et très-mal par leurs cosinus; et inversement les arcs voisins de 90^0 se calculent exactement au moyen de leurs cosinus, tandis que leurs sinus ne les font connaître qu'avec une approximation très-faible.

Un arc est d'autant mieux déterminé par sa tangente ou par sa cotangente qu'il est plus éloigné de 45^0.

Le tableau suivant fait connaître les valeurs de la fraction $\frac{10''}{\delta}$, pour les sinus, cosinus et tangentes des arcs de 10 en 10 degrés, de 5^0 à 85^0.

ARCS.	SINUS.	COSINUS.	TANGENTE et COTANGENTE.
5^o	0″,004	0″,555	0″,004
15^o	0″,013	0″,176	0″,012
25^o	0″,022	0″,102	0″,018
35^o	0″,033	0″,068	0″,022
45^o	0″,047	0″,047	0″,024
55^o	0″,068	0″,033	0″,022
65^o	0″,102	0″,022	0″,018
75^o	0″,176	0″,013	0″,012
85^o	0″,555	0″,004	0″,004

On voit par ce tableau, que, si l'arc est déterminé par sa tangente ou par sa cotangente, l'erreur ne va pas au delà de 0″,024 dans le cas le plus défavorable; elle est inférieure à 3 *centièmes de seconde*.

Méthodes pour rendre les formules calculables par logarithmes.

69. Toutes les fois qu'on veut faire des calculs avec des nombres un peu compliqués, on a un grand intérêt à employer les logarithmes : les calculs sont à la fois plus rapides et plus exacts. Mais pour qu'une expression soit propre au calcul logarithmique, il faut qu'elle soit composée uniquement de facteurs entiers ou fractionnaires; quand elle ne remplit pas ces conditions, il est nécessaire de la transformer en une autre équivalente, qui soit *calculable par logarithmes*. C'est ce que nous savons faire déjà (**40**, **41**, **42**) pour la somme ou la différence de deux sinus, de deux cosinus, de deux tangentes, d'un sinus et d'un cosinus; la trigonométrie nous fournit aussi le moyen de transformer une expression *polynôme quelconque* en un produit de facteurs.

Il est évident, du reste, qu'il suffit de résoudre la question pour un binôme; car si on peut remplacer un binôme par un monôme, on pourra, en appliquant successivement la méthode, réduire à un seul terme un polynôme quelconque.

70. Je considère donc un binôme quelconque $a \pm b$, et je me propose de le transformer en produit; on peut employer à cet effet plusieurs méthodes.

1re *Méthode*. Je puis écrire :

$$a \pm b = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Je pose alors :

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

d'où l'on tire :

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b - \log a;$$

cette formule permettra de calculer l'angle *auxiliaire* φ avec les tables trigonométriques. On aura ensuite, en remplaçant $\frac{b}{a}$ par $\operatorname{tang} \varphi$,

$$a \pm b = a(1 \pm \operatorname{tang} \varphi) = \frac{a(\cos \varphi \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi};$$

or, nous avons vu (**41**) qu'on a :

$$\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \varphi),$$

$$\cos \varphi - \sin \varphi = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \varphi).$$

Donc on pourra écrire :

$$a+b=\frac{a\sqrt{2}\cos(45^0-\varphi)}{\cos\varphi},$$

$$a-b=\frac{a\sqrt{2}\sin(45^0-\varphi)}{\cos\varphi},$$

expressions calculables par logarithmes. On en tire :

$$\log(a+b)=\frac{1}{2}\log 2+\log a+\log\cos(45^0-\varphi)-\log\cos\varphi,$$

$$\log(a-b)=\frac{1}{2}\log 2+\log a+\log\sin(45^0-\varphi)-\log\cos\varphi.$$

2e *Méthode*. Les quantités b et a ne sont pas égales en général ; supposons que b soit la plus petite, et posons :

$$\cos\varphi=\frac{b}{a};$$

on en tire :

$$\log\cos\varphi=\log b-\log a;$$

et cette formule permettra de calculer l'angle *auxiliaire* φ au moyen des tables trigonométriques. On a alors :

$$a\pm b=a\left(1\pm\frac{b}{a}\right)=a(1\pm\cos\varphi).$$

Mais nous savons qu'on a :

$$1+\cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

donc,

$$a+b=2a\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$a-b=2a\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

expressions calculables par logarithmes ; on en tire :

$$\log(a+b)=\log 2+\log a+2\log\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$\log(a-b)=\log 2+\log a+2\log\sin\frac{\varphi}{2}.$$

L'inconvénient de cette méthode, c'est que l'angle auxiliaire φ est déterminé par son cosinus, et s'il est très-petit, on ne pourra pas l'obtenir avec beaucoup d'exactitude.

3[e] *Méthode.* Considérons d'abord la somme $a+b$, et posons :

$$\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{b}{a},$$

ou $$\log\operatorname{tang}\varphi=\frac{1}{2}[\log b-\log a];$$

on aura alors :

$$a+b=a(1+\operatorname{tang}^2\varphi)=\frac{a}{\cos^2\varphi},$$

expression calculable par logarithmes ; on en tire :

$$\log(a+b)=\log a-2\log\cos\varphi.$$

Prenons maintenant la différence $a-b$, et supposons $a>b$; si cela n'avait pas lieu, on ne pourrait pas se proposer de chercher le logarithme de $a-b$, puisque les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes. On a :

$$a-b=a\left(1-\frac{b}{a}\right);$$

$\frac{b}{a}$ est positif et plus petit que 1 ; on peut donc déterminer un angle auxiliaire φ tel que $\sin^2\varphi$ ou $\cos^2\varphi$ soit égal à $\frac{b}{a}$. Posons, par exemple :

$$\sin^2\varphi=\frac{b}{a};$$

d'où l'on tire :

$$\log\sin\varphi=\frac{1}{2}[\log b-\log a];$$

72. 2° *Résoudre l'équation :*

$$m \sin (a-x)=n \sin (b-x).$$

En développant $\sin (a-x)$ et $\sin (b-x)$, on ramène l'équation à la forme :

$$m \sin a \cos x - m \cos a \sin x = n \sin b \cos x - n \cos b \sin x;$$

d'où l'on tire aisément :

$$\operatorname{tang} x=\frac{m \sin a-n \sin b}{m \cos a-n \cos b};$$

telle est l'expression qu'il faut transformer en produit; la méthode générale exigerait l'emploi de deux angles auxiliaires, parce qu'il faudrait rendre séparément calculables par logarithmes le numérateur et le dénominateur de cette fraction; mais on peut arriver plus simplement. Je divise les deux termes de la fraction par $n \cos b$, et j'ai :

$$\operatorname{tang} x=\frac{\dfrac{m \sin a}{n \cos b}-\operatorname{tang} b}{\dfrac{m \cos a}{n \cos b}-1};$$

je pose ensuite :

$$\operatorname{tang} \varphi=\frac{m \sin a}{n \cos b};$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{m \cos a}{n \cos b}=\frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{m \sin a}{n \cos b}=\cot a \operatorname{tang} \varphi;$$

on a alors :

$$\operatorname{tang} x=\frac{\operatorname{tang} \varphi-\operatorname{tang} b}{\cot a \operatorname{tang} \varphi-1}=\operatorname{tang} a \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi-\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} \varphi-\operatorname{tang} a}.$$

On sait maintenant (n° **42**) transformer en produits le

---

nir, on ajoute $+1$ *à la caractéristique, et on la change de signe ; puis on retranche chaque chiffre décimal de* 9, *excepté le dernier qu'on retranche de* 10.

numérateur et le dénominateur de la fraction, et on a, en définitive :

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} a \cdot \frac{\sin(\varphi - b)\cos a}{\sin(\varphi - a)\cos b},$$

ou $$\operatorname{tang} x = \frac{\sin(\varphi - b)\sin a}{\sin(\varphi - a)\cos b},$$

formule calculable par logarithmes et où ne figure qu'un angle auxiliaire. En appliquant les logarithmes aux deux formules, on voit que l'équation donnée est remplacée par les deux suivantes :

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log m + \log \sin a - \log n - \log \cos b$$

$$\log \operatorname{tang} x = \log \sin(\varphi - b) + \log \sin a \\ - \log \sin(\varphi - a) - \log \cos b.$$

Autre méthode. — L'équation proposée peut s'écrire :

$$\frac{\sin(a - x)}{\sin(b - x)} = \frac{n}{m};$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\sin(a - x) + \sin(b - x)}{\sin(a - x) - \sin(b - x)} = \frac{n + m}{n - m};$$

je transforme le premier membre à l'aide de la formule du n° **43**, et j'obtiens l'équation :

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{a + b}{2} - x\right)}{\operatorname{tang}\frac{a - b}{2}} = \frac{n + m}{n - m};$$

ou

$$\operatorname{tang}\left(\frac{a + b}{2} - x\right) = \frac{n + m}{n - m} \operatorname{tang}\frac{a - b}{2},$$

formule calculable par logarithmes, qui fera connaître l'arc $\frac{a + b}{2} - x$, et par suite l'arc x.

Cette méthode est préférable à la première, quand m et n sont des nombres donnés; ce serait le contraire, si l'on donnait les logarithmes de m et de n, et non pas ces nombres eux-mêmes.

73. 3° *Résoudre l'équation :*

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Je divise tous les termes de l'équation par a, elle devient :

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a};$$

posons maintenant :

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

ou
$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b - \log a;$$

l'équation peut alors s'écrire :

$$\sin x + \operatorname{tang} \varphi \cos x = \frac{c}{a};$$

et, en multipliant les deux membres par $\cos \varphi$,

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c \cos \varphi}{a}$$

ou,
$$\sin (x + \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a};$$

d'où

$$\log \sin (x + \varphi) = \log c + \log \cos \varphi - \log a;$$

cette équation fera connaître l'angle $(x + \varphi)$, et par suite l'angle x.

Remarque. Pour que l'équation admette une solution, il faut que la valeur absolue de $\sin (x + \varphi)$ soit inférieure à 1, c'est-à-dire que l'on ait :

$$c^2 \cos^2 \varphi < a^2;$$

or $$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a};$$

d'où $$\cos^2 \varphi = \frac{a^2}{a^2 + b^2};$$

on devra donc avoir :

$$\frac{a^2 c^2}{a^2 + b^2} < a^2;$$

ou enfin $$c^2 < a^2 + b^2.$$

74. 4° *Calculer par logarithmes les racines de l'équation du second degré :*

$$x^2 + px + q = 0.$$

Les racines sont données par la formule :

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

c'est là une expression qu'il faut rendre calculable par logarithmes; je distinguerai deux cas, suivant que q est positif ou négatif.

1^{er} *Cas*. q est positif.

Je puis écrire les deux valeurs de x sous la forme suivante :

$$x = -\frac{p}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right];$$

Je suppose les racines réelles; c'est évidemment le seul cas où il y ait lieu de les calculer par logarithmes; alors $\frac{4q}{p^2}$ est plus petit que 1, et comme de plus cette quantité est positive, nous pourrons poser :

$$\sin^2 \varphi = \frac{4q}{p^2},$$

d'où l'on déduit :

$$\sin\varphi = \pm\frac{2\sqrt{q}}{p},$$

nous prendrons dans tous les cas le signe —, ce qui nous donne :

$$\sin\varphi = -\frac{2\sqrt{q}}{p}; \tag{1}$$

l'angle auxiliaire φ déterminé par cette formule sera positif ou négatif; mais nous pouvons toujours le supposer compris entre -90^0 et $+90^0$; si p est positif, on le calculera par la formule logarithmique :

$$\log\sin(-\varphi) = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log p;$$

si p est négatif, on emploiera la formule :

$$\log\sin\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log(-p).$$

Dans les deux cas, les valeurs de x deviennent :

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\sin^2\varphi}\right) = -\frac{p}{2}(1 \pm \cos\varphi),$$

ou, en séparant les racines,

$$x' = -\frac{p\,(1+\cos\varphi)}{2} = -p\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$x'' = -\frac{p\,(1-\cos\varphi)}{2} = -p\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

ces valeurs sont calculables par logarithmes; mais on peut en trouver d'autres; il suffit d'y remplacer p par sa valeur tirée de l'équation (1); on a ainsi :

$$x' = \frac{2\sqrt{q}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = \frac{2\sqrt{q}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{q}\cot\frac{\varphi}{2}$$

$$x'' = \frac{2\sqrt{q}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = \frac{2\sqrt{q}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{q}\,\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}.$$

On tire de ces formules :

$$\log x' = \frac{1}{2}\log q + \log\cot\frac{\varphi}{2},$$

$$\log x'' = \frac{1}{2}\log q + \log\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2},$$

si φ est positif; et

$$\log(-x') = \frac{1}{2}\log q + \log\cot\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\log(-x'') = \frac{1}{2}\log q + \log\mathrm{tang}\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

si φ est négatif.

2e *Cas*. q est négatif.

Les deux valeurs de x sont alors toujours réelles, et nous pouvons les écrire comme dans le premier cas:

$$x = -\frac{p}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right].$$

La quantité $\frac{4q}{p^2}$ étant négative, on peut poser

$$\mathrm{tang}^2\varphi = -\frac{4q}{p^2};$$

d'où l'on tire :

$$\mathrm{tang}\,\varphi = \pm\frac{2\sqrt{-q}}{p};$$

prenons le signe — dans le second membre, c'est-à-dire posons :

$$\mathrm{tang}\,\varphi = -\frac{2\sqrt{-q}}{p}; \qquad (1)$$

l'angle auxiliaire φ déterminé par cette équation sera positif ou négatif; mais nous pouvons toujours le supposer compris entre -90^0 et $+90^0$; lorsque p sera positif, on le calculera par la formule :

$$\log \operatorname{tang}(-\varphi)=\log 2+\frac{1}{2}\log(-q)-\log p\,;$$

si p est négatif, on emploiera la formule :

$$\log \operatorname{tang}\varphi=\log 2+\frac{1}{2}\log(-q)-\log(-p)\,;$$

dans tous les cas, les valeurs de x prendront la forme :

$$x=-\frac{p}{2}\left[1\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\varphi}\right]=-\frac{p}{2}\left(1\pm\frac{1}{\cos\varphi}\right)$$

ou, en séparant les deux racines :

$$x'=-\frac{p\,(1+\cos\varphi)}{2\cos\varphi}=-\frac{p\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi},$$

$$x''=\cancel{-}\frac{p\,(1-\cos\varphi)}{2\cos\varphi}=\cancel{-}\frac{p\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}\,;$$

ces valeurs se simplifient, si l'on y remplace p par sa valeur tirée de l'équation (2) ; on a ainsi :

$$x'=\frac{2\sqrt{-q}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}=\frac{2\sqrt{-q}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{-q}\cot\frac{\varphi}{2},$$

$$x''=-\frac{2\sqrt{-q}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}=\frac{-2\sqrt{-q}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=-\sqrt{-q}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Lorsque φ est positif, ces formules donnent :

$$\log x'=\frac{1}{2}\log(-q)+\log\cot\frac{\varphi}{2},$$

$$\log(-x'')=\frac{1}{2}\log(-q)+\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\,;$$

et quand φ est négatif,

$$\log(-x') = \frac{1}{2}\log(-q) + \log\cot\left(-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\log x'' = \frac{1}{2}\log(-q) + \log\operatorname{tang}\left(-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Exemple. Résoudre l'équation :

$$175{,}6\,x^2 - 4328\,x + 624{,}39 = 0.$$

On a :

$$p = -\frac{4328}{175{,}6}, \quad q = \frac{624{,}39}{175{,}6};$$

les formules à employer dans ce cas sont :

$$\log\sin\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log q - \log(-p)$$

$$\log x' = \frac{1}{2}\log q + \log\cot\frac{\varphi}{2}$$

$$\log x'' = \frac{1}{2}\log q + \log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Je calcule d'abord l'angle φ; j'ai :

$$\log\sin\varphi = \log 2 + \frac{1}{2}\log 624{,}39 - \log 4328$$
$$+ \frac{1}{2}\log 175{,}6;$$

je me servirai des petites tables :

$$\log 2 = 0{,}30103$$
$$\frac{1}{2}\log 624{,}39 = 1{,}39773$$
$$-\log 4328 = \bar{4}{,}36371$$
$$\frac{1}{2}\log 175{,}6 = 1{,}12226$$
$$\log\sin\varphi = \bar{1}{,}18473$$
$$\varphi = 8^\circ\ 48'\ 6''$$
$$\frac{\varphi}{2} = 4^\circ\ 24'\ 3''.$$

Je calcule maintenant x' :

$$\log x' = \frac{1}{2}\log 624,39 - \frac{1}{2}\log 175,6 + \log\cot 4^0\,24'\,3''$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log 624,39 &= 1,39773 \\
-\frac{1}{2}\log 175,6 &= \bar{2},87774 \\
\log\cot 4^0\,24'\,3'' &= \underline{1,11374} \\
\log x' &= 1,38921 \\
x' &= 24,5026.
\end{aligned}$$

Je calcule de même x'' :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log 624,39 &= 1,39773 \\
-\frac{1}{2}\log 175,6 &= \bar{2},87774 \\
\log\operatorname{tang} 4^0\,24'\,3'' &= \underline{\bar{2},88626} \\
\log x'' &= \bar{1},16173 \\
x'' &= 0,14512.
\end{aligned}$$

Vérification. Pour vérifier les calculs, on se rappelle que $x'+x''=-p$; dans notre exemple, $x'+x''=24,6477$, et $-p=\frac{4328}{175,6}=24,6469\ldots$; et ces deux nombres diffèrent peu.

EXERCICES.

1. Démontrer que le produit $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$ est égal à $\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$, et trouver la limite vers laquelle tend ce produit, quand n augmente indéfiniment.

2. Trouver les expressions des sinus et des cosinus des arcs de $7^0\,30'$, 15^0, $22^0\,30'$, 30^0, $37^0\,30'$.

3. Rendre calculables par logarithmes les expressions suivantes :

$$x = \frac{a-b}{a+b},$$

$$x = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b},$$

$$x = \sqrt{a \pm \sqrt{b}},$$

$$x = \frac{a \sin \alpha}{1 + a \cos \alpha},$$

$$\cos x = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

4. Calculer au moyen des tables de logarithmes les expressions suivantes :

$$x = \sqrt{9,921 - 3\sqrt{5,02}},$$

$$x = \sqrt[8]{21 + \sqrt[6]{19}},$$

$$x = \sqrt{\sqrt[3]{9,23476} - \sqrt[4]{0,063808}}.$$

5. Résoudre les équations :

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{4},$$

$$5 \operatorname{tang} x = 2 \operatorname{tang} 2x,$$

$$\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{4},$$

$$\cos 3x + \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2,$$

$$\cot x \operatorname{tang} 2x - \operatorname{tang} x \cot 2x = 2,$$

$$\sin 7x - \sin x = \sin 3x,$$

$$\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0.$$

$$\operatorname{tang}(x+\alpha) \operatorname{tang}(x-\alpha) = \frac{1 - 2\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}.$$

6. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x \sin(\alpha - y) = a, \\ x \sin(\beta - y) = b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y = m, \\ \operatorname{tang} x \operatorname{tang} z = n, \\ x + y + z = 180^0. \end{cases}$$

7. Partager l'arc de 45^0 en deux parties telles que les sinus de ces deux parties soient entre eux dans le rapport de 7 à 9.

8. Les cordes de deux arcs complémentaires sont respectivement égales à $\sqrt{6}$ et $\sqrt{12}$; quel est le rayon de la circonférence dont ces arcs font partie ? quelles sont les valeurs de ces arcs en degrés?

9. Résoudre au moyen des tables trigonométriques les équations suivantes :

$$x^2 + 1{,}1102x - 3{,}3594 = 0,$$

$$x^2 + 9{,}125571x + 9{,}74192654 = 0,$$

$$x^2 - 10{,}83945x + 26{,}991104 = 0,$$

$$7{,}3527x^2 - 33{,}81507x - 148{,}97107 = 0.$$

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

75. *Résoudre* un triangle, c'est en calculer les éléments inconnus en fonction des données. Il faut, pour cela, établir des formules qui lient entre eux les angles et les côtés d'un triangle; et comme trois de ces six quantités sont toujours données, chaque formule devra contenir quatre éléments, ce qui permettra d'exprimer l'un d'eux en fonction des trois autres.

Nous allons établir ces diverses relations, en commençant par les triangles rectangles. Pour plus de simplicité, nous désignerons toujours par A, B, C les trois angles du triangle, et par a, b, c les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C. Dans les triangles rectangles, nous supposerons, de plus, que A soit l'angle droit, et a l'hypoténuse.

Formules relatives aux triangles rectangles.

76. Théorème I. *Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle compris.*

Soit ABC un triangle rectangle en A (fig. 34); on a :

$$\mathrm{BC}=a,$$

$$\mathrm{AC}=b,$$

$$\mathrm{BA}=c,$$

Du point B comme centre avec l'unité pour rayon, je décris l'arc DE entre les deux côtés de l'angle B, et du point D j'abaisse la perpendiculaire DF sur le côté AB. On a évidemment :

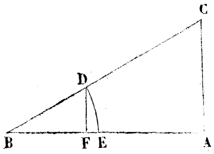

Fig. 34.

$$DF = \sin B,$$

$$BF = \cos B.$$

Les triangles semblables BCA, BDF donnent

$$\frac{CA}{DF} = \frac{BA}{BF} = \frac{BC}{BD},$$

ou

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\cos B} = \frac{a}{1};$$

d'où l'on tire :

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B;$$

on aurait de même :

$$b = a \cos C, \quad c = a \sin C,$$

et ces formules démontrent le théorème.

Remarque I. Des deux premières formules on tire aisément les deux autres en remarquant que C est le complément de B.

Remarque II. Ces formules renferment implicitement le théorème du carré de l'hypoténuse. En effet, élevons au carré les deux membres des premières équations et ajoutons; il vient :

$$b^2 + c^2 = a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = a^2.$$

Remarque III. Le théorème qui précède revient au fond à la définition du sinus et du cosinus, expliquée au n° **11**. Car, si du point B comme centre, on décrivait un cercle avec BC comme rayon, le sinus de l'angle B serait le rapport $\frac{CA}{BC}$, et le cosinus du même angle serait le rapport $\frac{BA}{BC}$; on a donc :

$$\sin B = \frac{CA}{BC} = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a};$$

ce qui donne, comme précédemment :

$$b = a \sin B, \qquad c = a \cos B.$$

77. Corollaire. *La projection d'une ligne sur une autre est égale à la longueur de la ligne projetée multipliée par le cosinus de l'angle des deux lignes.*

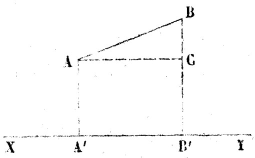

Fig. 35.

En effet, soit A'B' la projection de la ligne AB sur XY (fig. 35); par le point A, je mène AC parallèle à XY. On a, dans le triangle rectangle ABC,

$$AC = AB \cos BAC,$$

et comme AC est égal à A'B', on a enfin :

$$A'B' = AB \cos BAC. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

78. Théorème II. *Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier, ou par la cotangente de l'angle adjacent.*

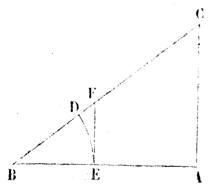

Fig. 36.

Soit ABC un triangle rectangle en A (fig. 36); du sommet B comme centre avec l'unité pour rayon, je décris l'arc de cercle DE entre les deux côtés de l'angle B; et par le point E où il coupe le côté BA, je lui mène une tangente EF; on aura :

$$EF = \text{tang}\, B.$$

Les deux triangles semblables BAC, BEF donnent la proportion :

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BE}},$$

ou

$$\frac{b}{\operatorname{tang} \mathrm{B}}=\frac{c}{1};$$

d'où l'on tire : $b=c \operatorname{tang} \mathrm{B}$.

L'angle C étant le complément de B, cot C est égal à tang B; on a donc aussi :

$$b=c \cot \mathrm{C};$$

ces formules démontrent le théorème.

On pourrait encore décrire un cercle du point B comme centre avec BA pour rayon, et remarquer que, d'après le n° **11**, on a :

$$\operatorname{tang} \mathrm{B}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BA}}=\frac{b}{c};$$

ce qui donne le théorème.

Remarque I. Ce théorème peut se déduire du premier; reprenons en effet les formules :

$$b=a \sin \mathrm{B}$$

$$c=a \cos \mathrm{B}$$

et divisons-les membre à membre; nous aurons :

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin \mathrm{B}}{\cos \mathrm{B}}=\operatorname{tang} \mathrm{B}$$

ou

$$b=c \operatorname{tang} \mathrm{B}.$$

79. Remarque générale. Les formules :

$$b=a \sin \mathrm{B}$$

$$c=a \cos \mathrm{B}$$

$$\mathrm{B}+\mathrm{C}=90^{\circ}$$

sont les seules relations *distinctes* qui puissent exister entre les éléments d'un triangle rectangle; car s'il y en avait une autre, en y remplaçant b et c par leurs valeurs tirées des premières formules et C par 90^c—B, on obtiendrait une équation entre l'hypoténuse a et l'angle B, ce qui est évidemment absurde.

Les trois formules qui précèdent pourraient donc suffire à résoudre le triangle rectangle dans tous les cas; mais il est commode d'y joindre les autres relations que nous avons démontrées et qui, d'ailleurs, peuvent s'en déduire.

Formules relatives aux triangles obliquangles.

80. THÉORÈME I. *Dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

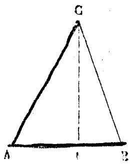

Fig. 37.

1re *Démonstration.* — Soit ABC un triangle quelconque (fig. 37); nous avons, d'après les notations adoptées précédemment :

$$BC = a \quad CA = b \quad AB = c.$$

Abaissons du point C une perpendiculaire CD sur le côté opposé AB, et supposons d'abord que cette perpendiculaire tombe dans l'intérieur du triangle. Les deux triangles rectangles BCD, ACD, nous donnent les égalités (nº **76**),

$$CD = BC \sin B = a \sin B,$$

$$CD = CA \sin A = b \sin A;$$

égalons ces deux valeurs de CD; nous aurons :

$$a \sin B = b \sin A.$$

ou

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

c. q. f. d.

Supposons en second lieu, que la perpendiculaire CD tombe en dehors du triangle, comme dans la figure 38; les deux triangles rectangles CAD, CBD donnent :

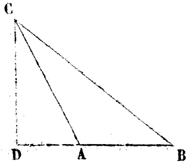
Fig. 38.

$$CD = BC \sin B = a \sin B$$
$$CD = CA \sin CAD$$
$$= CA \sin (180^0 - A) = b \sin A.$$

Égalant les deux valeurs de CD, on a, comme dans le premier cas :

$$a \sin B = b \sin A;$$

ou
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

c. q. f. d.

2e *Démonstration*. Circonscrivons un cercle au triangle ABC; soit O le centre de ce cercle, R, son rayon. Du point O, j'abaisse sur BC la perpendiculaire OD, et je joins OB; l'angle A du triangle a pour mesure la moitié de l'arc BC; il est donc égal à l'angle BOD; or, le triangle rectangle BOD, ou la définition même des sinus, nous donne :

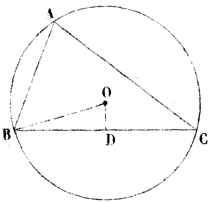
Fig. 39.

$$\sin BOD = \frac{DB}{OB}, \qquad \text{ou} \qquad \sin A = \frac{a}{2R};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R;$$

on aurait de même :

$$\frac{b}{\sin B} = 2R; \quad \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

donc
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

c. q. f. d.

Remarque I. La seconde démonstration montre que chacun des rapports égaux $\frac{a}{\sin A}$, $\frac{b}{\sin B}$, $\frac{c}{\sin C}$ est égal au diamètre du cercle circonscrit au triangle.

Remarque II. Les égalités de rapports que nous venons de démontrer portent le nom de *relation des sinus.*

81. Théorème II. *Dans un triangle quelconque, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, moins deux fois le produit de ces deux côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

L'énoncé de ce théorème revient à la formule :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Pour la démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que l'angle A est aigu ou obtus.

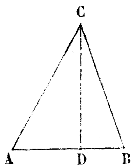

Fig. 40.

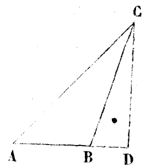

Fig. 41.

1[er] *Cas.* L'angle A est aigu (fig. 40 et 41). Du point C, j'abaisse sur le côté AB la perpendiculaire CD; la géométrie élémentaire nous donne l'égalité :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times AD$$

ou :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD;$$

Or, dans le triangle rectangle ADC, nous avons :

$$AD = AC \cos A = b \cos A;$$

et si nous portons cette valeur de AD dans l'égalité précédente, nous obtenons la formule qu'il s'agissait de démontrer :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2e *Cas.* L'angle A est obtus (fig. 42). Je fais la même construction que précédemment; la perpendiculaire CD tombe en dehors du triangle, et j'ai, par un théorème connu de géométrie élémentaire :

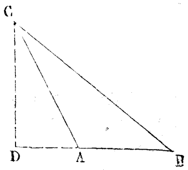

Fig. 42.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AB \times AD$$

ou : $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD;$

mais dans le triangle rectangle ACD, on a :

$$AD = AC \cos CAD = b \cos(180° - A) = -b \cos A;$$

et si l'on porte cette valeur de AD dans l'égalité précédente, on a la même formule que dans le premier cas :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

82. Remarque générale. Le théorème I nous donne les égalités

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

auxquelles nous pouvons joindre l'égalité

$$A + B + C = 180°;$$

nous avons ainsi un système de trois équations distinctes entre les six éléments d'un triangle,

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 180°. \end{array}\right\} \qquad [1]$$

Je dis que toute autre relation entre ces six quantités, doit être une conséquence des précédentes. Supposons en effet qu'on ait une autre équation entre les six éléments du triangle, on pourra y remplacer b, c et A par leurs valeurs tirées des équations [1] en fonction de a, B, C; cette nouvelle équation, qui ne contient plus alors que a, B et C, ne peut être qu'une identité; car il est évident qu'on ne peut pas avoir d'équation entre un côté d'un triangle et les deux angles adjacents; donc, toute relation entre les six éléments d'un triangle doit rentrer dans les équations [1].

Si on applique le théorème II aux trois côtés du triangle, on a les trois formules :

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

qui sont évidemment distinctes; or, nous venons de voir qu'il ne saurait y avoir plus de trois relations distinctes entre les six éléments d'un triangle; donc les deux systèmes [1] et [2] sont équivalents; chacun d'eux peut se déduire de l'autre; c'est ce que nous allons faire voir par un calcul direct.

La comparaison des équations [1] et [2] se fait d'une manière simple au moyen d'un système intermédiaire que nous allons déduire du système [1]. Les deux premières équations du système [1] peuvent s'écrire :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C}{\sin B \cos C} = \frac{c \cos B}{\sin C \cos B},$$

on en déduit :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin B \cos C + \sin C \cos B} = \frac{b \cos C + c \cos B}{(\sin B + C)};$$

or, la 3^e^ équation du système [1] donne :

$$\sin (B + C) = \sin (180^0 - A) = \sin A,$$

l'équation précédente devient alors :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin A},$$

ou $$a = b \cos C + c \cos B,$$

formule qu'on démontrerait bien aisément sur une figure, et qui exprime qu'*un côté d'un triangle est la somme des projections des deux autres côtés sur lui-même.* En écrivant ce théorème pour les trois côtés du triangle, on a les formules :

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Ce nouveau système d'équations est une conséquence du système [1]; je dis que réciproquement on peut déduire les équations [1] des équations [3]. Je démontrerai d'abord la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés, par exemple, la proportion :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};$$

il suffit pour cela d'éliminer c et C, entre les équations [3]; je multiplie la 1re équation par a, la 2e par b, et je retranche, j'ai :

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A);$$

dans cette égalité, je remplace c par sa valeur tirée de la 3e équation, et j'ai :

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

ou $$a^2 (1 - \cos^2 B) = b^2 (1 - \cos^2 A)$$

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A;$$

j'extrais la racine carrée des deux membres, et je remarque que a, b, sin A, sin B, étant des quantités essentiellement positives, les racines carrées devront être prises avec le même signe, j'aurai donc :

$$a \sin B = b \sin A,$$

ou
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};$$

les équations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

peuvent donc se déduire du système [3]. Je dis qu'on en peut tirer aussi la formule :

$$A + B + C = 180^\circ;$$

en effet, les équations [3] étant homogènes par rapport aux côtés a, b, c, nous pourrons y remplacer ces côtés par les quantités proportionnelles sin A, sin B, sin C; en faisant cette substitution dans la première équation, par exemple, elle devient :

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

ou
$$\sin A = \sin (B + C);$$

or, nous savons que pour que deux arcs aient même sinus, il faut que leur différence soit un multiple pair de la demi-circonférence, ou que leur somme soit un multiple impair de la demi-circonférence. On doit donc avoir :

$$B + C - A = k \times 360^\circ$$

ou
$$A + B + C = (2k + 1) \times 180^\circ.$$

D'ailleurs, chacun des angles A, B, C est inférieur à 180°; donc $B + C - A$ est, en valeur absolue, inférieur à

360^0 et $A+B+C$ est inférieur à $180^0 \times 3$; par suite, on doit avoir :

$$\text{ou} \qquad B+C-A=0$$

$$\text{ou} \qquad A+B+C=180^0;$$

la première hypothèse est inadmissible; car A représente l'un quelconque des angles du triangle, le plus petit, par exemple, et il ne saurait alors être égal à la somme des deux autres. On a donc, en définitive :

$$A+B+C=180^0.$$

Par conséquent, les équations [1] et les équations [3] forment deux systèmes équivalents.

Je vais faire voir maintenant que les systèmes [2] et [3] sont aussi équivalents.

Du système des équations [2], on peut déduire les équations [3]; il suffit pour cela d'ajouter deux à deux les équations [2]; ajoutons, par exemple, les deux premières :

$$a^2+b^2=b^2+a^2+2c^2-2bc\cos A-2ca\cos B,$$

ou

$$0=2c^2-2bc\cos A-2ca\cos B;$$

divisons les deux membres par $2c$ et transposons les termes, nous aurons :

$$c=b\cos A+a\cos B,$$

ce qui est l'une des équations [3]. On démontrerait de même les deux autres.

Réciproquement, on peut tirer les équations [2] des équations [3]; cherchons, par exemple, la première des formules [2] : il faut éliminer B et C entre les équations [3], et il suffit, pour cela, de multiplier la première par a, la deuxième par $-b$, et la troisième par $-c$, et d'ajouter; on trouve ainsi :

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

ou

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

on démontrerait de même les deux autres formules du système [2].

Les systèmes [2] et [3] sont donc équivalents, et par conséquent, les trois systèmes d'équations [1], [2], [3], sont tous les trois équivalents. Je les rassemble ici :

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\\ A+B+C=180^\circ\end{array}\right\}\quad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\end{array}\right\}\quad [2]$$

$$\left.\begin{array}{l}a=b\cos C+c\cos B\\ b=c\cos A+a\cos C\\ c=a\cos B+b\cos A\end{array}\right\}\quad [3]$$

Le dernier de ces systèmes nous sera inutile pour la résolution des triangles, parce que chacune des équations qui le composent contient cinq des éléments du triangle.

On pourrait, du reste, démontrer directement l'équivalence des systèmes [1] et [2]; mais les calculs seraient moins simples que les précédents.

83. Il n'est pas inutile de faire voir que, si trois longueurs a, b, c et trois angles A, B, C, vérifient l'un des systèmes d'équations qui précèdent, ces six quantités sont les côtés et les angles d'un même triangle. Cela est évident pour les angles, puisque de chacun de ces systèmes, on peut déduire la relation

$$A+B+C=180^{\circ}.$$

Cela posé, on pourra toujours faire un triangle ayant un côté égal à a, les angles adjacents étant B et C; désignons par b' et c' les côtés de ce triangle; on aura par le théorème du nº **80**,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b'}{\sin B}=\frac{c'}{\sin C};$$

mais les lignes, a, b, c, vérifient par hypothèse l'un des systèmes équivalents [1], [2] et [3]; on aura donc :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C};$$

d'où l'on déduit aisément :

$$b'=b; \quad c'=c;$$

donc les lignes a, b, c, sont les côtés d'un triangle dont les angles sont A, B, C.

84. Théorème III. — *La surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés, multipliée par le sinus de l'angle qu'ils comprennent.*

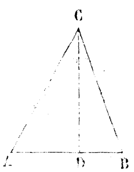

Fig. 43.

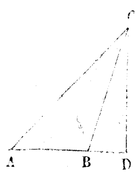

Fig. 44.

Soit ABC un triangle, CD sa hauteur, AB sa base; appelons S sa surface; on a :

$$S=\frac{1}{2}AB\times CD=\frac{1}{2}c\times CD;$$

mais, dans le triangle rectangle CAD, on a :

$$CD=AC\sin A=b\sin A;$$

donc $$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$ c. q. f. d.

Résolution des triangles rectangles.

85. Un triangle rectangle est déterminé quand on connaît deux de ses éléments, pourvu que l'un des deux au moins soit un côté; il y aura alors quatre cas distincts, suivant qu'on donne :

l'hypoténuse et un angle,
ou l'hypoténuse et un côté de l'angle droit,
ou un côté de l'angle droit et un angle,
ou enfin les deux côtés de l'angle droit.

86. Premier cas. — *On donne l'hypoténuse* a *et un angle aigu* B, *trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

Les théorèmes démontrés sur le triangle rectangle donnent immédiatement :

$$C = 90^0 - B$$

$$b = a \sin B$$

$$c = a \cos B$$

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B.$$

Et si l'on applique les logarithmes aux trois dernières formules, elles deviennent :

$$\log b = \log a + \log \sin B$$

$$\log c = \log a + \log \cos B$$

$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B - \log 2.$$

87. Deuxième cas. — *On donne l'hypoténuse* a, *et un côté de l'angle droit* b; *trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

On pourrait d'abord calculer l'angle B par la formule

$$\sin B = \frac{b}{a},$$

déduite du premier théorème sur les triangles rectangles; le côté c se calculerait ensuite par le deuxième théorème :

$$c = b \cot B;$$

mais cette méthode a l'inconvénient de faire connaître l'angle B par son sinus ; la méthode suivante fait connaître l'angle B par une tangente, et de plus elle n'exige que la recherche de deux logarithmes au lieu de trois. On calcule d'abord le côté c par le théorème de Pythagore :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)};$$

on cherche ensuite $\tang \frac{1}{2}$ C; on a (n° **37**)

$$\tang \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}};$$

d'ailleurs le théorème I sur les triangles rectangles donne la valeur de cos C :

$$\cos C = \frac{b}{a};$$

donc on aura :

$$\tang \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

on a ensuite :

$$B = 90^0 - C,$$

et $$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

Ces formules se prêtent bien au calcul logarithmique ;

en prenant les logarithmes des deux membres, on peut les écrire :

$$\log c = \frac{1}{2}\Big[\log(a+b) + \log(a-b)\Big]$$

$$\log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\Big[\log(a-b) - \log(a+b)\Big]$$

$$\log S = \log b + \frac{1}{2}\Big[\log(a+b) + \log(a-b)\Big] - \log 2.$$

88. Troisième cas. — *On donne un côté de l'angle droit* b, *et l'un des angles; trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

Quel que soit celui des angles que l'on donne, on obtiendra immédiatement l'autre en prenant l'angle complémentaire. Supposons alors qu'on connaisse B; les théorèmes I et II sur le triangle rectangle donnent immédiatement les valeurs de a et de c :

$$a = \frac{b}{\sin B},$$

$$c = b \cot B;$$

on a ensuite :

$$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b^2 \cot B;$$

en appliquant les logarithmes à ces formules, on les transforme ainsi :

$$\log a = \log b - \log \sin B$$

$$\log c = \log b + \log \cot B$$

$$\log S = 2 \log b + \log \cot B - \log 2.$$

89. Quatrième cas. — *On donne les deux côtés de l'angle droit,* b *et* c; *trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

On cherche d'abord l'angle B au moyen de la formule du théorème II; on en tire :

$$\text{tang } B = \frac{b}{c};$$

on a ensuite :

$$C = 90° - B;$$

l'hypoténuse a se calcule alors par le théorème I; on en déduit :

$$a = \frac{b}{\sin B};$$

enfin,

$$S = \frac{1}{2} bc.$$

Ces formules deviennent, quand on prend les logarithmes des deux membres :

$$\log \text{tang } B = \log b - \log c$$

$$\log a = \log b - \log \sin B$$

$$\log S = \log b + \log c - \log 2.$$

Remarque. On aurait pu calculer a par la formule

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

mais cette formule ne se prête pas au calcul logarithmique, et, pour la rendre calculable par logarithmes, il faudrait employer un angle auxiliaire, qui serait précisément l'angle B ou son complément C.

90. Nous avons réuni dans le tableau suivant les formules relatives aux quatre cas du triangle rectangle.

1^er CAS.

DONNÉES : a, B. INCONNUES : C, b, c, S.

$C = 90^0 - B.$

$b = a \sin B \ldots\ldots\ldots \qquad \log b = \log a + \log \sin B.$

$c = a \cos B \ldots\ldots\ldots \qquad \log c = \log a + \log \cos B.$

$S = \frac{1}{2} a^2 \sin B \cos B. \qquad \log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B - \log 2.$

2^e CAS.

DONNÉES : a, b. INCONNUES : c, B, C, S.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \ldots\ldots\ldots \qquad \log c = \frac{1}{2}\Big[\log(a+b) + \log(a-b)\Big].$

$\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \ldots\ldots\ldots \qquad \log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\Big[\log(a-b) - \log(a+b)\Big].$

$B = 90^0 - C.$

$S = \frac{1}{2} b \sqrt{a^2 - b^2} \ldots\ldots \qquad \log S = \log b + \frac{1}{2}\Big[\log(a-b) + \log(a+b)\Big] - \log 2.$

3^e CAS.

DONNÉES : b, B. INCONNUES : a, c, C, S.

$C = 90^0 - B.$

$a = \frac{b}{\sin B} \ldots\ldots\ldots \qquad \log a = \log b - \log \sin B.$

$c = b \cot B \ldots\ldots\ldots \qquad \log c = \log b + \log \cot B.$

$S = \frac{1}{2} b^2 \cot B \ldots\ldots \qquad \log S = 2 \log b + \log \cot B - \log 2.$

4^e CAS.

DONNÉES : b, c. INCONNUES : B, C, a, S.

$\operatorname{tang} B = \frac{b}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \log \operatorname{tang} B = \log b - \log c.$

$C = 90^0 - B.$

$a = \frac{b}{\sin B} \ldots\ldots\ldots \qquad \log a = \log b - \log \sin B.$

$S = \frac{1}{2} bc \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \log S = \log b + \log c - \log 2.$

Résolution des triangles obliquangles.

91. La résolution des triangles obliquangles présente quatre cas distincts, dont voici l'énumération : on donne :

1° un côté et deux angles;

2° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux;

3° deux côtés et l'angle compris;

4° les trois côtés.

92. Premier cas. *On donne le côté* a *et deux angles du triangle; trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

Quand on connaît deux angles, on trouve aisément le troisième au moyen de la formule

$$A+B+C=180^0;$$

je supposerai alors qu'on connaisse les trois angles; les valeurs des côtés b et c se trouveront immédiatement par la relation des sinus; on aura :

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Quant à la surface S, on emploiera, pour la calculer, la formule

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

qui devient, en y remplaçant b et c par leurs valeurs,

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de toutes ces formules, nous aurons :

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$
$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$
$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C - \log \sin A - \log 2.$$

93. Deuxième cas. *On donne deux côtés* a, b, *et l'angle opposé à l'un d'eux,* A, *par exemple; trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

La relation des sinus donne immédiatement sin B :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a};$$

l'angle B étant connu, le troisième angle C se calcule par la formule

$$C = 180^0 - (A + B);$$

on a ensuite :

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A};$$

et enfin,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Si on applique les logarithmes à ces formules, elles deviennent :

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$
$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$
$$\log S = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2.$$

Discussion. Je rappelle d'abord la construction et la discussion géométrique de ce problème. Sur l'un des côtés de l'angle A donné (fig. 45), on prend une longueur AC égale à b, et du point C comme centre avec un rayon égal à a, on décrit un arc de cercle qui coupe le second côté de l'angle A en deux points B et B_1; les deux triangles ACB, ACB_1, sont deux solutions du problème, au moins dans certains cas.

On voit tout d'abord que le problème serait impossible, si le côté a était plus petit que la perpendiculaire CD abaissée du point C sur le second côté de l'angle A.

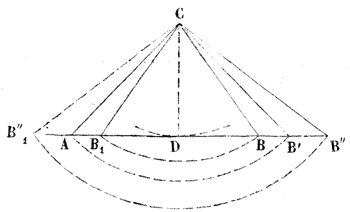

Fig. 45.

Supposons donc le côté a égal ou supérieur à CD, et examinons séparément les trois cas où A est aigu, droit ou obtus.

1° A est aigu; la figure montre que si a est égal à CD, le problème n'a qu'une seule solution, c'est le triangle rectangle CAD. Si a est supérieur à CD, mais inférieur à CA, le problème a deux solutions : ce sont les triangles CAB, CAB_1. Si a est égal à AC, le triangle CAB_1 n'existe plus, le problème n'a qu'une solution; c'est le triangle isocèle ACB'. Enfin, si a est supérieur à AC, la seule solution qui convienne est le triangle ACB'', le triangle ACB_1'', étant formé, non avec l'angle A donné, mais avec l'angle supplémentaire CAB_1''.

2° A est droit (fig. 46); dans ce cas, il faut, pour que

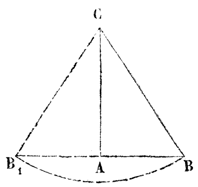

Fig. 46.

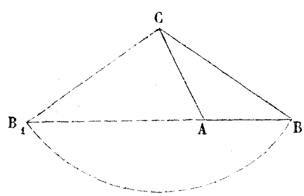

Fig. 47.

le problème soit possible, que le côté a soit supérieur à AC ou b; et de plus il n'y a qu'une solution, le deuxième triangle CAB_1 obtenu par la construction géométrique étant évidemment égal au premier triangle CAB.

3° A est obtus (fig. 47); la figure montre que le problème est impossible si le côté a est inférieur à l'autre côté AC, parce que les triangles fournis par la construction sont alors formés avec le supplément de l'angle A, et non pas avec l'angle A lui-même.

De plus, quand le problème est possible, c'est-à-dire, lorsque a est supérieur à AC ou b, il n'y a qu'une solution, le triangle ACB, l'autre triangle ACB_1 ne contenant pas l'angle A, mais l'angle supplémentaire CAB_1.

La discussion des formules trigonométriques conduit aisément aux mêmes résultats. Reprenons la formule

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a};$$

pour que cette formule puisse déterminer un angle, il faut que sin B soit inférieur ou égal à 1; on doit donc avoir :

$$a \geqslant b \sin A;$$

mais, en se reportant aux figures précédentes, on voit que $b \sin A$ représente précisément la perpendiculaire CD; la condition précédente est donc celle que nous a fournie la géométrie.

Quand cette condition sera remplie, sin B aura une valeur admissible, et on en déduira pour B deux valeurs supplémentaires, que je désignerai par B' et B'', B' étant supposé aigu. Pour qu'une de ces valeurs convienne, il faut et il suffit qu'ajoutée à A, elle donne une somme inférieure à 180°. Examinons alors les trois cas où A est aigu, droit ou obtus.

1° A est aigu; la valeur B' convient toujours; pour que l'autre valeur convienne, il faut qu'on ait :

$$A + B'' < 180^\circ$$

ou

$$A < 180^\circ - B'';$$

les angles A et $180^\circ - B''$ étant aigus, cette condition exige que sin A soit moindre que $\sin(180^\circ - B'')$ ou $\sin B''$, on aura donc :

$$\sin A < \sin B''$$

ou

$$\sin A < \frac{b \sin A}{a}$$

ou enfin

$$a < b;$$

telle est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait deux solutions.

2° A est droit ou obtus. Il est évident qu'alors l'angle B ne peut être obtus; la seule valeur admissible de B est donc la valeur B'; et pour qu'elle convienne, il faut qu'on ait :

$$A + B' < 180^\circ$$

ou

$$B' < 180^\circ - A;$$

les deux angles B' et $180^\circ - A$ étant aigus, cette inégalité exige que $\sin B'$ soit inférieur à $\sin(180^\circ - A)$ ou à sin A ; on devra donc avoir

$$\sin B' < \sin A$$

ou

$$\frac{b \sin A}{a} < \sin A,$$

$$a > b;$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit possible.

Le tableau suivant résume toute cette discussion :

$$A < 90^\circ \begin{cases} a < b \sin A \ldots\ldots & \text{impossible} \\ a = b \sin A \ldots\ldots & \text{une solution, tri. rect.} \\ a > b \sin A \begin{cases} a < b \ldots & \text{deux solutions} \\ a \geqslant b \ldots & \text{une solution} \end{cases} \end{cases}$$

$$A \geqslant 90^\circ \begin{cases} a \leqslant b \ldots\ldots\ldots & \text{impossible} \\ a > b \ldots\ldots\ldots & \text{une solution.} \end{cases}$$

Il est à peine nécessaire d'ajouter que lorsqu'il y a deux valeurs pour l'angle B, on en trouve aussi deux pour le côté c et pour la surface S; elles sont données d'ailleurs par les formules établies précédemment.

Remarque. On pourrait se proposer de calculer directement le côté c au moyen des données a, b, et A; on emploierait alors la formule :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

on en tire :

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A};$$

mais pour rendre cette formule calculable par logarithmes, il faudrait avoir recours à un angle auxiliaire, et les calculs seraient aussi longs qu'en suivant la méthode indiquée précédemment. On pourrait aussi discuter cette valeur de c : on retrouverait les résultats précédents; c'est un exercice que nous indiquons au lecteur.

94. Troisième cas. *On donne deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C ; *trouver les autres éléments et la surface du triangle.*

Je vais chercher d'abord les deux angles A et B : je connais leur somme qui est égale à $180^0 - C$; il suffit donc de calculer leur différence; or on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{\sin A - \sin B},$$

ou bien :

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Mais nous avons vu (n° **43**) que le rapport de la somme de deux sinus à leur différence est égal à la tangente de la demi-somme des angles divisée par la tangente de leur demi-différence; l'égalité précédente peut donc s'écrire :

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}}=\frac{a+b}{a-b};$$

égalité d'où l'on tire la valeur de $\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}$,

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tang}\frac{A+B}{2};$$

on a d'ailleurs :

$$A+B=180^{0}-C$$

$$\frac{A+B}{2}=90^{0}-\frac{C}{2};$$

donc enfin,

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2};$$

cette formule permettra de calculer $\frac{A-B}{2}$: en ajoutant cette valeur à $\frac{A+B}{2}$, on aura l'angle A, et en la retranchant de $\frac{A+B}{2}$, on aura l'angle B.

On calculera ensuite c par la formule

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

et la surface S par la formule,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

Lorsqu'on ne veut pas calculer la surface, on peut trouver c par une formule qui n'exige que la recherche de deux nouveaux logarithmes, au lieu de trois : on a en effet :

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

on en tire :

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}$$

ou bien,

$$\frac{c}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a+b}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}};$$

or $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$; donc $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$; la formule précédente peut alors se simplifier, et elle devient :

$$\frac{c}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{a+b}{\cos\frac{A-B}{2}};$$

d'où l'on tire enfin :

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}.$$

Le logarithme de $a+b$ étant déjà calculé, on n'aura que deux nouveaux logarithmes à chercher, ceux de $\sin\frac{C}{2}$ et de $\cos\frac{A-B}{2}$.

On établirait, d'une manière analogue, une autre formule aussi avantageuse :

$$c=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

En résumé, les formules à employer dans ce cas sont les suivantes :

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}\qquad \text{ou}\qquad c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C;$$

ou, en prenant les logarithmes,

$$\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2}$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\log(a-b)-\log(a+b)+\log\cot\frac{C}{2}$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A,$$

$$\text{ou}\ \log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{C}{2}-\log\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\log S=\log a+\log b+\log\sin C-\log 2.$$

95. Remarque I. Il arrive souvent, dans les applications que les côtés a et b ne sont connus que par leurs logarithmes; on pourrait, dans ce cas, revenir des logarithmes aux nombres, et trouver a et b; mais il est préférable d'opérer comme il suit :

Reprenons la formule

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

et divisons par a les deux termes de la fraction $\frac{a-b}{a+b}$;

nous aurons : $$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\cot\frac{C}{2};$$

calculons maintenant un angle auxiliaire par la formule

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

ou $$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b - \log a,$$

la formule précédente deviendra :

$$\operatorname{tang} \frac{A-B}{2} = \frac{1 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi} \cot \frac{C}{2}.$$

Or, en remarquant que $\operatorname{tang} 45^0 = 1$, on peut transformer ainsi qu'il suit la fraction $\frac{1 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi}$,

$$\frac{1 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi} = \frac{\operatorname{tang} 45^0 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} 45^0 \operatorname{tang} \varphi} = \operatorname{tang}(45^0 - \varphi).$$

On aura donc en définitive :

$$\operatorname{tang} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tang}(45^0 - \varphi) \cot \frac{C}{2}.$$

Voici le tableau des formules qui serviront alors à résoudre le triangle :

$$\frac{A+B}{2} = 90^0 - \frac{C}{2}$$

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b - \log a$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{A-B}{2} = \log \operatorname{tang}(45^0 - \varphi) + \log \cot \frac{C}{2}$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$$\log S = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2.$$

96. Remarque II. On pourrait calculer c directement au moyen des données sans se servir des angles A et B; la formule qu'il faut prendre alors est :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

mais cette formule n'est pas calculable par logarithmes ; il faut recourir à un angle auxiliaire : l'une des méthodes la plus élégante est la suivante.

On sait qu'on a :

$$\cos C = \cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2},$$

$$1 = \cos^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2};$$

de là résulte que la valeur de c^2 peut s'écrire ainsi :

$$c^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(\cos^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{C}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right),$$

ou, si l'on groupe ensemble les termes qui contiennent le facteur $\cos^2\frac{C}{2}$, et ceux qui contiennent le facteur $\sin^2\frac{C}{2}$,

$$c^2 = (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}.$$

Mettons maintenant en facteur $(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}$ et extrayons la racine carrée des deux membres, nous aurons :

$$c = (a+b)\sin\frac{C}{2}\sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\cot^2\frac{C}{2}};$$

posons ensuite :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2},$$

φ étant un angle auxiliaire qui sera déterminé par cette formule, la valeur de c deviendra :

$$c = (a+b)\sin\frac{C}{2}\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\varphi},$$

valeur calculable par logarithmes. Mais on reconnaît bien aisément que cette méthode ne diffère pas au fond de la méthode ordinaire; car l'angle φ n'est autre chose que $\frac{A-B}{2}$, comme on le voit en comparant les valeurs de tang φ et de tang $\frac{A-B}{2}$, et alors la valeur de c est identique à l'une des deux que nous avons indiquées plus haut.

On pourrait, il est vrai, employer d'autres angles auxiliaires pour rendre calculable par logarithmes la valeur de c; mais les calculs à faire ne seraient pas plus simples, et seraient souvent moins exacts que les précédents.

97. Quatrième cas. *On donne les trois côtés d'un triangle; trouver les trois angles et la surface du triangle.*

Pour déterminer les angles, nous emploierons les formules :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

On tire, par exemple, de la première,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

cette formule ne se prête pas au calcul logarithmique; mais si l'on cherche $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ et tang $\frac{A}{2}$, on arrive à des expressions calculables par logarithmes, et d'une élégance remarquable.

Cherchons d'abord $\sin\frac{A}{2}$. On a, par une formule connue (n° **37**),

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc};$$

le numérateur de cette valeur est la différence de deux carrés; on peut donc le décomposer en facteurs, et l'on a :

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

ou, en extrayant la racine carrée,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}\ ;$$

le radical qui est dans le second membre doit être pris avec le signe $+$, parce que $\sin \frac{A}{2}$ est essentiellement positif. Cette valeur de $\sin \frac{A}{2}$ prend une forme plus aisée à retenir, si l'on y introduit le périmètre du triangle. Posons, en effet :

$$a+b+c=2p\ ;$$

on en déduit :

$$a+b-c=2(p-c)$$

$$a-b+c=2(p-b)$$

$$b+c-a=2(p-a),$$

et la valeur de $\sin \frac{A}{2}$ devient

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Je cherche maintenant $\cos \frac{A}{2}$; on a (n° **37**) :

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}\ ;$$

j'extrais maintenant la racine carrée des deux membres ;

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}},$$

ou bien,

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ;$$

l'angle $\frac{A}{2}$ étant inférieur à 90°, cos $\frac{A}{2}$ est positif, et par conséquent le radical doit être pris avec le signe $+$.

Si l'on divise membre à membre les deux équations qui font connaître sin $\frac{A}{2}$ et cos $\frac{A}{2}$, on a :

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

le radical étant encore affecté du signe $+$ dans cette formule.

Par de simples changements de lettres, on obtient immédiatement les formules analogues pour les autres angles B et C; on a ainsi les neuf formules :

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\quad[1]$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\quad[2]$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \operatorname{tang}\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\\ \operatorname{tang}\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{aligned}\right\}\quad[3]$$

Les formules [3] sont les plus avantageuses pour deux raisons : d'abord elles font connaître les angles inconnus par leurs tangentes, ce qui permet de les obtenir avec plus d'exactitude; en second lieu, pour le calcul des trois angles du triangle, les formules [3] n'exigent que la recherche de quatre logarithmes, ceux de p, de $(p-a)$, de $(p-b)$ et de $(p-c)$; tandis que les formules [1] exigent qu'on en cherche six, et les formules [2], qu'on en cherche sept.

Il nous reste à calculer la surface S; or on a :

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2};$$

remplaçons dans cette équation $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ par les valeurs trouvées précédemment, et nous avons :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad [4]$$

formule extrêmement importante, qui donne la surface d'un triangle en fonction des trois côtés.

Les formules [3] et [4] peuvent être mises sous une forme remarquable et commode pour le calcul logarithmique. Posons, en effet,

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

on aura alors :

$$\tan g\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

$$\tan g\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$$

$$\tan g\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

$$S=pr;$$

telles sont les formules les plus commodes pour résoudre un triangle, quand on en connaît les trois côtés. En y appliquant les logarithmes, elles deviennent :

$$\log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) - \log p\right]$$

$$\log \text{tang}\,\frac{A}{2} = \log r - \log(p-a)$$

$$\log \text{tang}\,\frac{B}{2} = \log r - \log(p-b)$$

$$\log \text{tang}\,\frac{C}{2} = \log r - \log(p-c)$$

$$\log S = \log r + \log p.$$

98. Remarque. Il est aisé de reconnaître que la quantité r n'est autre chose que le rayon du cercle inscrit dans le triangle; en effet, soit O le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, OD, son rayon; joignons le centre O aux trois sommets du triangle; nous le décomposons ainsi en trois triangles ayant pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit, et pour bases respectives les trois côtés du triangle; leur somme, ou la surface du triangle ABC est donc égale à

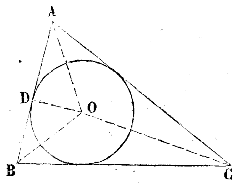

Fig. 48.

$$\frac{AB + BC + CA}{2} \times OD = p \times OD;$$

mais en vertu des formules précédentes, cette surface est égale à pr; on a donc :

$$pr = p \times OD,$$

$$r = OD.$$

On démontre alors facilement sur la figure les formules qui font connaître $\tang \frac{A}{2}$, $\tang \frac{B}{2}$, $\tang \frac{C}{2}$. Considérons, par exemple, le triangle rectangle AOD; l'angle DAO de ce triangle est égal à $\frac{A}{2}$, et le côté AD est égal à $p-a$; on a d'ailleurs :

$$\mathrm{OD} = \mathrm{AD} \tang \mathrm{DAO},$$

ou

$$r = (p-a) \tang \frac{A}{2},$$

d'où

$$\tang \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}.$$

99. Discussion. Pour qu'on puisse construire un triangle avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que l'un d'eux soit plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence, ou, ce qui revient au même, que chacun d'eux soit plus petit que la somme des deux autres. Nous allons faire voir que les formules que nous venons d'établir ne donnent de valeurs réelles pour les inconnues que lorsque ces conditions sont remplies.

Il suffira de faire cette discussion pour l'une des formules [1], la discussion des formules [2], [3], [4] se faisant d'une manière tout à fait analogue. Je prendrai donc la formule :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

pour que cette valeur de $\sin \frac{A}{2}$ soit admissible, il faut évidemment que la quantité soumise au radical soit positive et plus petite que 1. Examinons séparément ces deux conditions :

Pour que la quantité sous le radical soit positive, il faut et il suffit que les facteurs $p-b$ et $p-c$ soient de même signe; or, la somme de ces deux facteurs est $2p-b-c$ ou a; elle est positive; donc les deux facteurs eux-mêmes doivent être positifs, et on a les deux inégalités :

$$p-b>0,$$

$$p-c>0;$$

en doublant les deux membres et remplaçant $2p$ par sa valeur, on obtient :

$$a+c-b>0,$$

$$a+b-c>0,$$

ou $$b<a+c, \quad c<a+b.$$

J'écris maintenant que la quantité soumise au radical doit être moindre que l'unité :

$$\frac{(p-b)(p-c)}{bc}<1,$$

ou, en chassant le dénominateur, et faisant les calculs,

$$p-b-c<0$$

inégalité qui revient à la suivante :

$$a<b+c.$$

Ainsi, pour que la valeur de $\sin\frac{A}{2}$ soit admissible, il faut qu'on ait :

$$a<b+c,$$

$$b<a+c,$$

$$c<a+b,$$

c'est-à-dire que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres.

La discussion des autres formules conduit aux mêmes résultats.

100. Vérification des triangles. Quand on a résolu un triangle, il est bon de faire, pour ainsi dire, la preuve des calculs effectués; c'est à quoi l'on arrive en s'assurant que les éléments donnés et les éléments inconnus vérifient une des nombreuses formules que nous avons démontrées; cette formule de vérification doit être choisie, dans chaque cas, de manière qu'elle contienne tous les éléments calculés; elle doit, de plus, être aussi simple que possible. Nous allons donner les formules les plus commodes pour chacun des quatre cas.

1^er^ *cas*. Les données étant a, B, C, et les inconnues étant b, c, on peut employer la formule du 3^e^ cas :

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

ou: $$\log a = \log(b+c) + \log\sin\frac{A}{2} - \log\cos\frac{B-C}{2};$$

comme $\log a$ a été calculé directement, il faudra que les deux valeurs de $\log a$ soient identiques, ou tout au moins que la différence soit très-petite, une ou deux unités du 7^e^ ordre au plus.

2^e^ *cas*. Les données sont a, b, A, les inconnues B, C, c; et le problème peut avoir deux solutions. Quand il n'en a qu'une, on emploie la formule :

$$b = \frac{(a+c)\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-C}{2}},$$

ou $$\log b = \log(a+c) + \log\sin\frac{B}{2} - \log\cos\frac{A-C}{2}.$$

S'il y a deux solutions, on pourra faire usage de la formule très-simple :

$$c' + c'' = 2b \cos A ;$$

cette relation se démontre aisément sur la figure 46 ; on peut aussi remarquer que c' et c'' sont les racines de l'équation :

$$c^2 - 2bc \cos A + b^2 - a^2 = 0 ;$$

et que, par conséquent, la somme des racines est égale à $2b \cos A$.

3^e *cas*. Les données sont a, b, C, les inconnues A, B, c ; l'une des meilleures formules de vérification s'obtient en multipliant membre à membre les deux premières formules [3] du 4^e cas. On a ainsi :

$$\operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2} = \frac{p - c}{p}.$$

On peut aussi employer l'une des formules [1], par exemple :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

4^e *cas*. Les données sont a, b, c, et les inconnues A, B, C ; la meilleure formule de vérification est évidemment

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Ces formules de vérification sont malheureusement compliquées pour la plupart, et sont, pour cette raison, peu employées. Nous donnons ici le tableau des formules relatives à chaque cas du triangle, avec les formules de vérification.

1er CAS.

DONNÉES : a, B, C. INCONNUES : A, b, c, S.

$A = 180^0 - (B + C)$.

$b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$............ $\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$.

$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$............ $\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$.

$S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$........ $\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \sin C - \log \sin A - \log 2$.

FORMULE DE VÉRIFICATION :

$a = \dfrac{(b+c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}$........ $\log a = \log (b+c) + \log \sin \frac{A}{2} - \log \cos \frac{B-C}{2}$.

2e CAS.

DONNÉES : a, b, A. INCONNUES : B, C, c, S.

$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$.......... $\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$.

$C = 180^0 - (A + B)$.

$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.......... $\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$.

$S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$........ $\log S = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2$.

FORMULES DE VÉRIFICATION :

$b = \dfrac{(a+c) \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A-C}{2}}$........ $\log b = \log (a+c) + \log \sin \frac{B}{2} - \log \cos \frac{A-C}{2}$.

ou bien :

$c' + c'' = 2b \cos A$........ $\log(c'+c'') = \log 2 + \log b + \log \cos A$.

3e CAS.

DONNÉES : a, b, C. INCONNUES : A, B, c, S.

$\dfrac{A+B}{2} = 90^0 - \dfrac{C}{2}$.

$\text{tang} \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b} \cot \dfrac{C}{2}$. $\log \text{tg} \dfrac{A-B}{2} = \log (a-b) + \log \cot \dfrac{C}{2} - \log (a+b)$.

$c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$............ $\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$.

ou

$c = \dfrac{(a+b) \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}$........ $\log c = \log (a+b) + \log \sin \frac{C}{2} - \log \cos \frac{A-B}{2}$.

$S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$........... $\log S = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2$.

FORMULE DE VÉRIFICATION :

$\text{tang} \dfrac{A}{2} \text{tang} \dfrac{B}{2} = \dfrac{p-c}{p}$.... $\log \text{tang} \dfrac{A}{2} + \log \text{tang} \dfrac{B}{2} = \log (p-c) - \log p$.

4^e CAS.

DONNÉES : a, b, c. INCONNUES : A, B, C, S.

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad \log r = \frac{1}{2}\left[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) - \log p.\right]$$

$$\text{tang}\,\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \ldots\ldots\ldots \log\text{tang}\,\frac{A}{2} = \log r - \log(p-a).$$

$$\text{tang}\,\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b} \ldots\ldots\ldots \log\text{tang}\,\frac{B}{2} = \log r - \log(p-b).$$

$$\text{tang}\,\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c} \ldots\ldots\ldots \log\text{tang}\,\frac{C}{2} = \log r - \log(p-c).$$

$$S = pr \ldots\ldots\ldots\ldots \log S = \log r + \log p.$$

FORMULE DE VÉRIFICATION :

$$A + B + C = 180^0.$$

Exemples numériques.

101. Nous donnons dans les tableaux suivants des exemples de tous les cas du triangle rectangle et du triangle obliquangle. Les calculs ont été faits avec les tables à sept décimales, et on leur a donné la disposition la plus commode et la plus usitée.

TRIANGLES RECTANGLES.

1er CAS.

DONNÉES $\begin{cases} a = 42632^m,54. \\ B = 47^\circ\,25'\,14'',32. \end{cases}$

INCONNUES $\begin{cases} C = 42^\circ\,34'\,45'',68. \\ b = 31392^m,08. \\ c = 28845^m,64. \\ S = 452762200 \text{ m. q.} \end{cases}$

FORMULES.

$$C = 90^\circ - B.$$
$$\log b = \log a + \log \sin B.$$
$$\log c = \log a + \log \cos B.$$
$$\log S = 2 \log a + \log \sin B + \log \cos B - \log 2.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de log a.

Pour 42632..................	6297357
Pr 0,54...............	55
$\log a =$	$4,6297412$

Calcul de log sin B.

log sin 47° 25′ 10″.............	$\bar{1},8670706$
Pour 4″,32.........	83
$\log \sin B =$	$\bar{1},8670789$

Calcul de log cos B.

log cos 47° 25′ 10″............	$\bar{1},8303488$
Pour 4″,32........	-99
$\log \cos B =$	$\bar{1},8303389$

CALCUL DES INCONNUES.

Calcul de b.

$\log a = 4,6297412$
$\log \sin B = \bar{1},8670789$

$\log b = 4,4968201$

Pour......	4968190.....	31392
Pr.........	11.........	0,08
$b =$	31392,08	

Calcul de c.

$\log a = 4,6297412$
$\log \cos B = \bar{1},8303389$

$\log c = 4,4600801$

Pour......	4600705.....	28845
Pr.........	96.........	0,64
$c =$	28845,64	

Calcul de S.

$2 \log a = 9,2594824$
$\log \sin B = \bar{1},8670789$
$\log \cos B = \bar{1},8303389$
$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log S = 8,6558702$

Pour......	6558681.....	45276
Pr................	21.........	0,22
$S =$	452762200	

2^e CAS.

DONNÉES $\begin{cases} a = 549^m,6452. \\ b = 487^m,5612. \end{cases}$

INCONNUES $\begin{cases} c = 253^m,7596. \\ B = 62^\circ\ 30'\ 16'',\ 24. \\ C = 27^\circ\ 29'\ 43'',\ 76. \\ S = 61861^{m.q.},\ 67. \end{cases}$

FORMULES.

$$\log c = \frac{1}{2}\left[\log(a+b) + \log(a-b)\right].$$

$$\log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left[\log(a-b) - \log(a+b)\right].$$

$$B = 90^\circ - C.$$

$$\log S = \log b + \log c - \log 2.$$

CALCULS AUXILIARES.

Calcul de log $(a+b)$.

$a + b = 1037,2064.$

Pour 103720............... 01586251

P^r 0,64........... 268

$\log(a+b) = 3,0158652$

Calcul de log $(a-b)$.

$a - b = 62,0840.$

$\log(a-b) = 1,7929797$

Calcul de log b.

Pour 48756................ 6880281

P^r 0,12............ 11

$\log b = 2,6880292$

CALCUL DES INCONNUES.

Calcul de c.

$\log(a+b) = 3,0158652$

$\log(a-b) = 1,7929797$

$4,8088449$

$\log c = 2,4044225$

Pour........ 4044061... 25375

P^r........... 164....... 0,96

$c = 253,7596$

Calcul de C.

$\log(a-b) = 1,7929797$

$-\log(a+b) = \bar{4},9841348$

$\bar{2},7771145$

$\log \operatorname{tang}\frac{C}{2} = \bar{1},3885572$

Pour...... $\bar{1},3885400$.. 13° 44′ 50″

P^r........ 172......... 1″,88

$\frac{C}{2} = 13^\circ 44' 51'',88$

$C = 27^\circ 29' 43'',76$

Calcul de S.

$\log b = 2,6880292$

$\log c = 2,4044225$

$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log S = 4,7914217$

Pour........ 7914169... 61861

P^r............ 48........0,67

$S = 61861,67$

3e CAS.

Données		Inconnues	
	$b = 725623^{m},4.$		$a = 1172755$ m.
	$B = 38^{\circ}\,13'\,25'',44.$		$c = 921317$ m.
			$C = 51^{\circ}\,46'\,34'',56.$
			$S = 334264500000$ m.q.

Formules.

$$C = 90^{\circ} - B.$$

$$\log a = \log b - \log \sin B.$$

$$\log c = \log b + \log \cot B.$$

$$\log S = 2 \log b + \log \cot B - \log 2.$$

Calculs auxiliaires.

Calcul de log b.

Pour 72562	....	8607092
Pr 0,34	....	20
	$\log b =$	5,8607112

Calcul de log sin B.

$\log \sin 38^{\circ}\,13'\,20''$	....	$\bar{1},7914893$
Pour $5'',44$	....	146
	$\log \sin B =$	$\bar{1},7915039$

Calcul de log cot B.

$\log \cot 38^{\circ}\,13'\,20''$	....	0,1037215
Pour $5'',44$	....	—236
	$\log \cot B =$	0,1036979

Calcul des inconnues.

Calcul de a.

$\log b =$	5,8607112	
$-\log \sin B =$	0,2084961	
$\log a =$	6,0692073	
Pour........	0691869...	11727
Pr...........	204.......	0,55
$a =$	1172755	

Calcul de c.

$\log b =$	5,8607112	
$\log \cot B =$	0,1036979	
$\log c =$	5,9644091	
Pour........	9644058...	92131
Pr	33.......	0,7
$c =$	921317	

Calcul de S.

$2 \log b =$	11,7214224	
$\log \cot B =$	0,1036979	
$-\log 2 =$	$\bar{1},6989700$	
$\log S =$	11,5240903	
Pour.......	5240844...	33426
Pr	59.......	0,45
$S =$	334264500000	

4e CAS.

Données $\begin{cases} b = 6727^{m},254. \\ c = 7489^{m},462. \end{cases}$

Inconnues $\begin{cases} B = 41^{0}\,55'\,52'',005. \\ C = 58^{0}\;\,4'\;\,7'',995. \\ a = 10067^{m},17. \\ S = 25191760 \text{ m.q.} \end{cases}$

Formules.

$$\log \operatorname{tang} B = \log b - \log c.$$

$$C = 90^{0} - B.$$

$$\log a = \log b - \log \sin B.$$

$$\log S = \log b + \log c - \log 2.$$

Calculs auxiliaires.

Calcul de log b.

Pour 67272	....	8278343
Pr 0,54	....	35
	log b =	3,8278378

Calcul de log c.

Pour 74894	....	8744470
Pr 0,62	....	36
	log c =	3,8744506

Calcul de log sin B.

log sin 41° 55′ 50″	....	$\overline{1}$,8249256
Pour 2″,005	......	47
	log sin B =	$\overline{1}$,8249303

Calcul des inconnues.

Calcul de B.

log b =	3,8278378		
— log c =	$\overline{4}$,1255494		
log tang B =	$\overline{1}$,9533872		
Pour........	$\overline{1}$,9533787..		41° 55′ 50″
Pr...........	85	....	2″,005
B =	41° 55′ 52″,005		

Calcul de a.

log b =	3,8278378		
— log sin B =	0,1750697		
log a =	4,0029075		
Pour........	0029001	...	10067
Pr...........	74	....	0,17
a =	10067m,17		

Calcul de S.

log b =	3,8278378		
log c =	3,8744506		
— log 2 =	$\overline{1}$,6989700		
log S =	7,4012584		
Pour	4012454	...	25191
Pr...........	130	....	0,76
S =	25191760		

TRIANGLES OBLIQUANGLES.

1er CAS.

DONNÉES $\begin{cases} a = 647562^{m},2. \\ B = 36^{\circ}14'23'',12. \\ C = 75^{\circ}13'43'',21. \end{cases}$ INCONNUES $\begin{cases} A = 68^{\circ}31'53'',67. \\ b = 411356^{m},6. \\ c = 672843^{m},2. \\ S = 128787520000 \text{ m.q.} \end{cases}$

FORMULES.

$$A = 180^{\circ} - (B + C).$$
$$\log b = \log a + \log\sin B - \log\sin A.$$
$$\log c = \log a + \log\sin C - \log\sin A.$$
$$\log S = \log b + \log c + \log\sin A - \log 2.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de log a.

Pour	64756.................	8112800
Pr	0,22	15
	$\log a =$	5,8112815

Calcul de log sin B.

log sin 36° 14′ 20″		$\bar{1}$,7717001
Pour	3″,12........	90
	log sin B =	$\bar{1}$,7717091

Calcul de log sin C.

log sin 75° 13′ 40″		$\bar{1}$,9854027
Pour	3″,21........	18
	log sin C =	$\bar{1}$,9854045

Calcul de log sin A.

log sin 68° 31′ 50″		$\bar{1}$,9687691
Pour	3″,67........	30
	log sin A =	$\bar{1}$,9687721

CALCUL DES INCONNUES.

Calcul de b.

$\log a =$	5,8112815		
log sin B =	$\bar{1}$,7717091		
—log sin A =	0,0312279		
$\log b =$	5,6142185		
Pour.......	6142115...	41135	
Pr..........	70.......	0,66	
$b =$	411356,6		

Calcul de c.

$\log a =$	5,8112815	
log sin C =	$\bar{1}$,9854045	
—log sin A =	0,0312279	
$\log c =$	5,8279139	
Pour.......	8279118...	67284
Pr..........	21.......	0,32
$c =$	672843,2	

Calcul de S.

$\log b =$	5,6142185	
$\log c =$	5,8279139	
log sin A =	$\bar{1}$,9687721	
—log 2 =	$\bar{1}$,6989700	
log S =	11,1098745	
Pour.......	1098484...	12878
Pr..........	261........	0,752
S =	128787520000	

VÉRIFICATION.

Formule : $\log a = \log(b+c) + \log\sin\frac{A}{2} - \log\cos\frac{C-B}{2}$.

Calcul de $\log(b+c)$.

$b+c = 1084199,8$.

Pour	10841	0350693
Pr	0,998	400
	$\log(b+c) =$	6,0351093

Calcul de $\log\sin\frac{A}{2}$.

$\frac{A}{2} = 34^0 15' 56'',83$

log sin	34° 15′ 50″	$\bar{1}$,7505125
Pour	6″,83	211
	$\log\sin\frac{A}{2} =$	$\bar{1}$,7505336

Calcul de $\log\cos\frac{C-B}{2}$.

$\frac{C-B}{2} = 19^0 29' 40'',04$.

log cos	19° 29′ 40″	$\bar{1}$,9743615
Pour	0″,04	0
	$\log\cos\frac{C-B}{2} =$	$\bar{1}$,9743615

$\log(b+c) =$	6,0351093
$\log\sin\frac{A}{2} =$	$\bar{1}$,7505336
$-\log\cos\frac{C-B}{2} =$	0,0256385
$\log a =$	5,8112814

L'erreur n'est que d'une unité décimale du 7e ordre.

2e CAS.

(Il y a deux solutions.)

DONNÉES $\begin{cases} a = 3645^m,352. \\ b = 3873^m,264. \\ A = 47^\circ 26' 43'',12. \end{cases}$

INCONNUES $\begin{cases} B = 51^\circ 30' 26'',23. \\ C = 81^\circ \ 2' 50'',65. \\ c = 4888^m,386. \\ B' = 128^\circ 29' 33'',77. \\ C' = 4^\circ \ 3' 43'',11. \\ c' = 350^m,5416. \end{cases}$

FORMULES.

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a.$$
$$C = 180^\circ - (A + B).$$
$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de log a.

Pour 36453.................. 5617333
Pr 0,52................ 62
log a = 3,5617395

Calcul de log b.

Pour 38732.................. 5880699
Pr 0,64................ 72
log b = 3,5880771

Calcul de log sin A.

log sin $47^\circ 26' 40''$............... $\bar{1}$,8672446
Pour $3''$,12....... 61
log sin A = $\bar{1}$,8672507

Calcul de log sin C.

log sin $81^\circ 2' 50''$............... $\bar{1}$,9946765
Pour $0''$,65......... 2
log sin C = $\bar{1}$,9946767

Calcul de log sin C′.

log sin $4^\circ 3' 40''$............. $\bar{2}$,8501585
Pour $3''$,11......... 923
log sin C′ = $\bar{2}$,8502508

CALCUL DES INCONNUES.

Calcul de B.

log b = 3,5880771
log sin A = $\bar{1}$,8672507
− log a = $\bar{4}$,4382605
log sin B = $\bar{1}$,8935883
Pour....... $\bar{1}$,8935779... $51^\circ 30' 20''$
Pr................ 104.......... $6''$,23
B = $51^\circ 30' 26''$,23

Comme $a < b$, il y a deux solutions, et on a :

$B' = 180^\circ - B = 128^\circ 29' 33''$,77

Calcul de C et de C′.

$C = 180^\circ - (A + B) = 81^\circ 2' 50''$,65
$C' = 180^\circ - (A + B') = 4^\circ 3' 43''$,11

Calcul de c.

log a = 3,5617395
log sin C = $\bar{1}$,9946767
− log sin A = 0,1327493
log c = 3,6891655
Pour....... 6891579... 48883
Pr................ 76....... 0,86
c = 4888,386

Calcul de c'.

log a = 3,5617395
log sin C′ = $\bar{2}$,8502508
− log sin A = 0,1327493
log c' = 2,5447396
Pour....... 5447376... 35054
Pr................ 20....... 0,16
c' = 350,5416

VÉRIFICATION.

Formule : $\log(c+c') = \log 2 + \log b + \log\cos A.$

Calcul de log cos A.

$\log\cos 47^\circ 26' 40''$	$\bar{1},8301425$
Pour $3'',12$	-72
$\log\cos A =$	$\bar{1},8301353$

Calcul de $(c+c') = 5238,928$.

$\log 2 =$	$0,3010300$	
$\log b =$	$3,5880771$	
$\log\cos A =$	$\bar{1},8301353$	
$\log(c+c') =$	$3,7192424$	
Pour.........	7192401...	52389
Pr.................	23.......	0,28
$c+c' =$	5238,928	(Exact.)

2 CAS.

(Il n'y a qu'une solution.)

DONNÉES $\begin{cases} a = 42317^m,25. \\ b = 38612^m,45. \\ A = 60^\circ\, 2'\, 13'',65. \end{cases}$ INCONNUES $\begin{cases} B = 52^\circ\, 13'\, 56'',75. \\ C = 67^\circ\, 43'\, 49'',6. \\ c = 45202^m,16. \end{cases}$

FORMULES.

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a.$$
$$C = 180^\circ - (A + B).$$
$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de log a.

Pour 42317	6265149
Pr 0,25	25
$\log a =$	4,6265174

Calcul de log b.

Pour 38612	5867223
Pr 0,45	50
$\log b =$	4,5867273

Calcul de log sin A.

log sin 60° 2′ 10″	$\overline{1}$,9376885
Pour 3″,65	45
log sin A =	$\overline{1}$,9376930

Calcul de log sin C.

log sin 67° 43′ 40″	$\overline{1}$,9663265
Pour 9″,6	83
log sin C =	$\overline{1}$,9663348

CALCUL DES INCONNUES.

Calcul de B.

$\log b = 4,5867273$
$\log \sin A = \overline{1},9376930$
$-\log a = \overline{5},3734826$
$\log \sin B = \overline{1},8979029$

Pour .... $\overline{1}$,8978919 ... 52° 13′ 50″
Pr .... 110 .... 6″,
B = 52° 13′ 56″,75

Comme $a > b$, il n'y a qu'une solution.

Calcul de C.

$C = 180^\circ - (A + B) = 67^\circ\, 43'\, 49''$,

Calcul de c.

$\log a = 4,6265174$
$\log \sin C = \overline{1},9663348$
$-\log \sin A = 0,0623070$
$\log c = 4,6551592$

Pour .... 6551577 ... 45202
Pr 15 0,16
$c = 45202,16$

VÉRIFICATION.

Formule : $\log a = \log(b+c) + \log\sin\frac{A}{2} - \log\cos\frac{C-B}{2}$.

Calcul de $\log(b+c)$.

$b+c = 83814{,}61$.

Pour 83814	9233166
Pr 0,61	31
$\log(b+c) =$	$4{,}9233197$

Calcul de $\log\sin\frac{A}{2}$.

$\frac{A}{2} = 30^\circ\,1'6'',825$

log sin 30° 1′ 0″	$\overline{1},6991887$
Pour 6″,825	249
$\log\sin\frac{A}{2} =$	$\overline{1},6992136$

Calcul de $\log\cos\frac{C-B}{2}$.

$\frac{C-B}{2} = 7^\circ\,44'56'',425$

log cos 7° 44′ 50″	$\overline{1},9960177$
Pour 6″,425	—18
$\log\cos\frac{C-B}{2} =$	$\overline{1},9960159$

Calcul de $\log a$.

$\log(b+c) = 4{,}9233197$

$\log\sin\frac{A}{2} = \overline{1},6992136$

$-\log\cos\frac{C-B}{2} = 0{,}0039841$

$\log a = 4{,}6265174$ (Exact.

3ᵉ CAS.

Données $\begin{cases} a = 627^{m},5642. \\ b = 438^{m},4624. \\ C = 36^{0}\,44'\,21'',16. \end{cases}$ Inconnues $\begin{cases} A = 99^{0}\,44'\,29'',18. \\ B = 43^{0}\,31'\,\;9'',66. \\ c = 380^{m},8843. \\ S = 82297^{m\,q.},76. \end{cases}$

Formules.

$$\frac{A+B}{2} = 90^{0} - \frac{C}{2}.$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \log(a-b) - \log(a+b) + \log\cot\frac{C}{2}.$$

$$\log c = \log a + \log\sin C - \log\sin A.$$

$$\log S = \log a + \log b + \log\sin C - \log 2.$$

Calculs auxiliaires.

Calcul de $\log(a-b)$.

$a - b = 189,1018.$

Pour 18910.................. 2766915

Pr 0,18............. 41

$\log(a-b) = 2,2766956$

Calcul de $\log(a+b)$.

$a + b = 1066,0266.$

Pour 106602................ 02776535

Pr 0,66............ 269

$\log(a+b) = 3,0277680$

Calcul de $\log\cot\frac{C}{2}$.

$\frac{C}{2} = 18^{0}\,22'\,10'',58$

log cot 18° 22′ 10″........... 0,4787788

Pour 0″,58......... —41

$\log\cot\frac{C}{2} = 0,4787747$

Calcul de $\log a$.

Pour 62756................. 7976553

Pr 0,42............ 29

$\log a = 2,7976582$

Calcul de $\log b$.

Pour 43846.................. 6419300

Pr 0,24............... 24

$\log b = 2,6419324$

Calcul de log sin C.

log sin 36° 44′ 20″.......... $\bar{1},7768241$

Pour. 1″,16........ 33

$\log\sin C = \bar{1},7768274$

Calcul de log sin A.

log sin 99° 44′ 29″,18 = log sin 80° 15′ 30″,82

log sin 80° 15′ 30″............. $\bar{1},9936922$

Pour 0″,82.......... 3

$\log\sin A = \bar{1},9936925$

Calcul des inconnues.

Calcul de A et de B.

$\log(a-b) = 2,2766956$

$-\log(a+b) = \bar{4},9722320$

$\log\cot\frac{C}{2} = 0,4787747$

$\log\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \bar{1},7277023$

Pour.......... $\bar{1},7276528$...28° 6′ 30″

Pr.................. 495........ 9″,76

$\frac{A-B}{2} = 28^{0}\;6'\,39'',76$

$\frac{A+B}{2} = 71^{0}\,37'\,49'',42$

d'où $A = 99^{0}\,44'\,29'',18$

$B = 43^{0}\,31'\;\,9'',66$

Calcul de c.

$\log a = 2,7976582$

$\log\sin C = \bar{1},7768274$

$-\log\sin A = 0,0063075$

$\log c = 2,5807931$

Pour......... 5807882.....38088

Pr................ 49........ 0,43

$c = 380,8843$

Calcul de S.

$\log a = 2,7976582$

$\log b = 2,6419324$

$\log\sin C = \bar{1},7768274$

$-\log 2 = \bar{1},6989700$

$\log S = 4,9153880$

Pour.......... 9153840.... 82297

Pr.................. 40.........0,76

$S = 82297,76$

Vérification.

Formule : $\log \operatorname{tang} \frac{A}{2} + \log \operatorname{tang} \frac{B}{2} = \log (p-c) - \log p.$

Calcul de $\log \operatorname{tang} \frac{A}{2}$.

$\frac{A}{2} = 49^\circ\, 52'\, 14'',59.$

log tang $49^\circ\, 52'\, 10''$..........	0,0741775
Pour $4'',59$.......	196
$\log \operatorname{tang} \frac{A}{2} =$	0,0741971

Calcul de $\log \operatorname{tang} \frac{B}{2}$.

$\frac{B}{2} = 21^\circ\, 45'\, 34'',83.$

log tang $21^\circ\, 45'\, 30''$..........	$\bar{1}$,6011124
Pour $4'',83$........	295
$\log \operatorname{tang} \frac{B}{2} =$	$\bar{1}$,6011419

Calcul de p et de $p - c$.

$$\begin{aligned} a &= 627,5646 \\ b &= 438,4624 \\ c &= 380,8843 \\ \hline 2p &= 1446,9113 \\ p &= 723,45565 \\ p - c &= 342,57135 \end{aligned}$$

Calcul de $\log p$.

Pour 72345..................	8594085
Pr 0,565.............	34
$\log p =$	2,8594119

Calcul de $\log (p - c)$.

Pour 34257..................	5347493
Pr 0,135..............	17
$\log (p - c) =$	2,5347510

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tang} \frac{A}{2} &= 0,0741971 \\ \log \operatorname{tang} \frac{B}{2} &= \bar{1},6011419 \\ \hline \log \operatorname{tang} \frac{A}{2} + \log \operatorname{tang} \frac{B}{2} &= \bar{1},6753390 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log (p - c) &= 2,5347510 \\ -\log p &= \bar{3},1405881 \\ \hline \log (p - c) - \log p &= \bar{1},6753391 \end{aligned}$$

La différence de ces deux logarithmes n'est que d'une unité du 7e ordre décimal ; la vérification est satisfaisante

4e CAS.

Données $\begin{cases} a = 6425^m,365. \\ b = 8541^m,419. \\ c = 9651^m,736. \end{cases}$

Inconnues $\begin{cases} A = 40^\circ\,47'\,33'',38. \\ B = 60^\circ\,16'\,57'',14. \\ C = 78^\circ\,55'\,29'',50. \\ S = 26929815 \text{ m. q.} \end{cases}$

Formules.

$$\log r = \frac{1}{2}\Big[\log(p-a) + \log(p-b) + \log(p-c) - \log p\Big].$$

$$\log \tang \frac{A}{2} = \log r - \log(p-a).$$

$$\log \tang \frac{B}{2} = \log r - \log(p-b).$$

$$\log \tang \frac{C}{2} = \log r - \log(p-c).$$

$$\log S = \log r + \log p.$$

Calculs auxiliaires.

Calcul de p, $p-a$, $p-b$, $p-c$.

$$\begin{aligned} a &= 6425,365 \\ b &= 8541,419 \\ c &= 9651,736 \\ \hline 2p &= 24618,520 \\ p &= 12309,260 \\ p-a &= 5883,895 \\ p-b &= 3767,841 \\ p-c &= 2657,524 \end{aligned}$$

Calcul de $\log p$.

Pour 12309..................	0902228
Pr 0,26..............	92
$\log p =$	4,0902320

Calcul de $\log(p-a)$.

Pour 58838.................	7696579
Pr 0,95..............	70
$\log(p-a) =$	3,7696649

Calcul de $\log(p-b)$.

Pour 37678..................	5760878
Pr 0,41..............	48
$\log(p-b) =$	3,5760926

Calcul des inconnues.

Calcul de A.

$$\begin{aligned} \log r &= \bar{3},3400014 \\ -\log(p-a) &= \bar{4},2303351 \\ \hline \log \tang \frac{A}{2} &= \bar{1},5703365 \end{aligned}$$

Pour........... $\bar{1}$,5702934...20°23′40″

Pr.................. 431....... 6″,69

$$\frac{A}{2} = 20^\circ 23' 46'',69$$

$$A = 40^\circ 47' 33'',38$$

Calcul de B.

$$\begin{aligned} \log r &= \bar{3},3400014 \\ -\log(p-b) &= \bar{4},4239074 \\ \hline \log \tang \frac{B}{2} &= \bar{1},7639088 \end{aligned}$$

Pour........... $\bar{1}$,7638672...30° 8′20″

Pr.................. 416...... 8″,57

$$\frac{B}{2} = 30^\circ\ 8' 28'',57$$

$$B = 60^\circ 16' 57'',14$$

Calculs auxiliaires (suite).

Calcul de log $(p-c)$.

Pour 26575..................	4244733
Pr 0,24..............	39
$\log(p-c) =$	$3,4244772$

Calcul de log r.

$$\log(p-a) = 3.7696649$$
$$\log(p-b) = 3,5760926$$
$$\log(p-c) = 3,4244772$$
$$-\log p = \bar{5},9097680$$
$$6,6800027$$
$$\log r = 3,3400014$$

Calcul des inconnues (suite).

Calcul de C.

$$\log r = 3,3400014$$
$$-\log(p-c) = \bar{4},5755228$$
$$\log\text{tang}\,\frac{C}{2} = \bar{1},9155242$$

Pour........	$= \bar{1},9155038$	..39° 27′40″
Pr..................	204.......	4″,75

$$\frac{C}{2} = 39^\circ 27' 44'',75$$
$$C = 78^\circ 55' 29'',50$$

Calcul de S.

$$\log r = 3,3400014$$
$$\log p = 4,0902320$$
$$\log S = 7,4302334$$

Pour............	4302202...	26929
Pr..................	132.......	0,815

$$S = 26929815.$$

Vérification.

$$A = 40^\circ 47' 33'',38$$
$$B = 60^\circ 16' 57'',14$$
$$C = 78^\circ 55' 29'',50$$
$$A + B + C = 180^\circ\ 0'\ 0'',02 \quad \text{(Erreur, } 0'',02.)$$

Résolution des triangles quand les données ne sont pas toutes des angles ou des côtés, et application des formules trigonométriques à diverses questions de géométrie.

102. Il arrive quelquefois qu'au lieu de donner des angles et des côtés pour déterminer un triangle, on donne d'autres quantités, comme la surface, les hauteurs, etc. Nous allons montrer par quelques exemples comment on peut alors résoudre le triangle.

103. Problème I. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant un angle aigu B, et la somme ou la différence des deux côtés de l'angle droit* b *et* c.

Je remarque d'abord que l'angle C est connu ; ensuite les deux formules :

$$b = a \sin B$$

$$c = a \sin C$$

donnent

$$b + c = a(\sin B + \sin C) = 2a \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$= 2a \sin 45^0 \cos \frac{B-C}{2} = a\sqrt{2} \cos \frac{B-C}{2};$$

$$b - c = a(\sin B - \sin C) = 2a \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}$$

$$= 2a \sin \frac{B-C}{2} \cos 45^0 = a\sqrt{2} \sin \frac{B-C}{2},$$

d'où l'on tire :

$$a = \frac{b+c}{\sqrt{2} \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$a = \frac{b-c}{\sqrt{2} \sin \frac{B-C}{2}};$$

l'une ou l'autre de ces deux formules fera connaître a; divisons maintenant ces deux équations, nous aurons :

$$\frac{b+c}{b-c} = \cot\frac{B-C}{2},$$

ce qui donnera $b-c$ ou $b+c$, et alors les trois côtés seront connus.

104. Problème II. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a, *et la somme ou la différence des deux côtés de l'angle droit* b *et* c.

Les formules du problème précédent donnent :

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a\sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a\sqrt{2}};$$

l'une ou l'autre de ces deux équations fera connaître l'angle $\frac{B-C}{2}$, et par suite les angles B et C; celle de ces deux équations qui n'aura pas servi donnera $b-c$ ou $b+c$, et alors on connaîtra la somme et la différence des deux côtés de l'angle droit, et ces deux côtés seront déterminés.

105. Problème III. — *Résoudre un triangle, connaissant un côté* c, *l'angle opposé* C *et la somme ou la différence des deux autres côtés* a *et* b.

On a établi, dans le n° 94, les formules

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}};$$

une de ces deux formules déterminera l'angle $\frac{A-B}{2}$, l'autre fera connaître celle des quantités $a+b$ et $a-b$ qui est inconnue, et alors le triangle sera résolu.

106. PROBLÈME IV. — *Résoudre un triangle, connaissant le périmètre* 2p *et les angles* A, B, C.

En multipliant deux à deux les équations [3] du nº **97**, nous aurons :

$$\frac{p-c}{p} = \tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2},$$

$$\frac{p-b}{p} = \tang\frac{C}{2}\tang\frac{A}{2},$$

$$\frac{p-a}{p} = \tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2},$$

formules qui font connaître les trois quantités $p-a$, $p-b$, $p-c$, et par suite, les côtés a, b, c.

En multipliant ensemble les trois équations [3], on obtient la relation :

$$\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2} = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{r}{p} = \frac{S}{p^2},$$

d'où l'on tire les formules remarquables :

$$r = p\tang\frac{A}{2}\ \tang\frac{B}{2}\ \tang\frac{C}{2},$$

$$S = p^2\tang\frac{A}{2}\ \tang\frac{B}{2}\ \tang\frac{C}{2}.$$

107. PROBLÈME V. — *Résoudre un triangle, connaissant la surface* S *et les angles* A, B, C.

Première méthode. De la formule précédente on tire d'abord la valeur de p, et on est alors ramené au problème IV.

Deuxième méthode. Nous avons démontré dans le n° **92** la formule

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A};$$

on en tire :

$$a = \sqrt{\frac{2S \sin A}{\sin B \sin C}} = \sin A \sqrt{\frac{2S}{\sin A \sin B \sin C}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{2S}{\sin A \sin B \sin C}} = 2R,$$

nous aurons :

$$a = 2R \sin A,$$

$$b = 2R \sin B,$$

$$c = 2R \sin C;$$

il est utile de remarquer que R représente le rayon du cercle circonscrit au triangle; car nous avons démontré (n° **80**) que le diamètre du cercle circonscrit est égal à $\frac{a}{\sin A}$.

108. Problème VI. — *Résoudre un triangle, connaissant les angles* A, B, C *et le rayon* r *du cercle inscrit.*

Des formules du n° **97**, on déduit :

$$p - a = r \cot \frac{A}{2},$$

$$p - b = \cot \frac{B}{2},$$

$$p - c = r \cot \frac{C}{2};$$

on en tire $p - a$, $p - b$, $p - c$, et la somme de ces trois quantités donne p; on calcule alors facilement a, b, c; on peut aussi calculer p directement par la formule :

$$p = r \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

démontrée dans le problème IV (nº **106**).

On a ensuite :

$$S = r^2 \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

REMARQUE. — Au lieu du rayon du cercle inscrit, on pourrait donner le rayon de l'un des cercles ex-inscrits; si on désigne par r_a le rayon de celui qui est inscrit dans l'angle A, on démontre facilement, sur la figure, qu'on a :

$$r_a = p \tang\frac{A}{2};$$

équation d'où l'on tirerait p, et on serait alors ramené au problème IV.

109. PROBLÈME VII. — *Résoudre un triangle, connaissant les angles* A, B, C *et le rayon* R *du cercle circonscrit.*

On a immédiatement (nº **80**) :

$$a = 2R\sin A,$$
$$b = 2R\sin B,$$
$$c = 2R\sin C,$$

et d'après une formule du problème V (nº **107**) :

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

REMARQUE. — Éliminons sin A entre les deux équations :

$$a = 2R\sin A,$$
$$S = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

nous obtenons la formule remarquable :

$$R = \frac{abc}{4S};$$

cette valeur de R peut aussi être trouvée par des considérations purement géométriques. (V. les traités de géométrie.)

110. Problème VIII. — *Résoudre un triangle, connaissant les trois hauteurs.*

Je désignerai par α, β, γ les hauteurs qui partent respectivement des sommets A, B, C; on a alors :

$$2S = a\alpha = b\beta = c\gamma;$$

d'où

$$\frac{a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{\frac{1}{\beta}} = \frac{c}{\frac{1}{\gamma}};$$

cette égalité de rapports montre que le triangle donné est semblable au triangle qui aurait pour côtés les inverses des hauteurs $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$. On calculera alors les angles de ce triangle facilement, par le quatrième cas des triangles; posons :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\pi}$$

et

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\gamma}\right)}{\frac{1}{\pi}}} = \frac{1}{\rho}$$

nous aurons :

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\alpha}};$$

et de même pour les autres.

Cherchons maintenant les côtés; nous avons :

$$2S = b\beta = ab\sin C;$$

d'où l'on tire :

$$a = \frac{\beta}{\sin C} = \frac{\beta}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}};$$

et par suite, toutes réductions faites,

$$a = \frac{\pi\rho}{2\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\pi\rho}}.$$

On aurait de même les deux côtés b et c.

Remarque. — Cette solution exige que l'on calcule préalablement, soit au moyen des logarithmes, soit autrement, les inverses des trois hauteurs, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$.

111. Problème IX. — *Étant donnés les quatre côtés* a, b, c, d *d'un quadrilatère inscriptible, trouver les angles, les diagonales et la surface de ce quadrilatère.*

Soit ABCD (fig. 49), le quadrilatère inscrit; désignons par A, B, C, D les angles, et posons :

$$AB = a,$$
$$BC = b,$$
$$CD = c,$$
$$DA = d,$$
$$AC = l,$$
$$BD = m.$$

Dans les triangles ABC, ADC, nous aurons :

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B,$$
$$l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D;$$

de plus, les angles B et D, étant supplémentaires, ont des cosinus égaux et de signes contraires; par suite, si on égale les deux valeurs de l^2, on aura, pour déterminer l'angle B, l'équation :

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B;$$

d'où l'on tire :

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)};$$

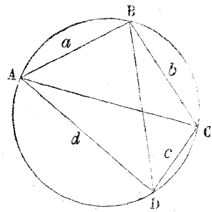

Fig.49.

cette formule n'est pas calculable par logarithmes; mais si l'on en déduit la valeur de tang $\frac{B}{2}$, on trouve une expression propre au calcul logarithmique.

On a en effet (n° **37**) :

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}},$$

le radical étant pris avec le signe $+$, parce que $\frac{B}{2}$ est un angle aigu; en remplaçant cos B par sa valeur, on a :

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-(c-d)^2}};$$

et, si l'on décompose les différences de carrés en facteurs,

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(a+c+d-b)\,(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)\,(a+b+d-c)}},$$

expression calculable par logarithmes. Elle prend une forme plus simple, quand on y introduit le périmètre $2p$ du quadrilatère; en posant :

$$a+b+c+d=2p,$$

on a immédiatement :

$$
\begin{aligned}
b+c+d-a&=2(p-a)\\
a+c+d-b&=2(p-b)\\
a+b+d-c&=2(p-c)\\
a+b+c-d&=2(p-d);
\end{aligned}
$$

par conséquent,

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

On trouverait de même les formules relatives aux autres angles.

Cherchons maintenant la surface S du quadrilatère. On a évidemment

$$S=ABC+ADC=\frac{1}{2}\,ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D$$

et comme les angles B et D sont supplémentaires,

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B=(ab+cd)\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

Or, on déduit, par un calcul facile, les valeurs de $\sin\frac{B}{2}$ et de $\cos\frac{B}{2}$ de la valeur de $\cos B$ trouvée plus haut; on trouve :

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}\qquad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}$$

Donc, enfin,

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

formule très-simple et tout à fait analogue à celle qui donne la surface d'un triangle en fonction des trois côtés; on retrouverait au reste cette dernière formule, en faisant $d=0$ dans la précédente, pour réduire le quadrilatère à un triangle.

Je vais maintenant chercher les diagonales du quadrilatère; nous avons :

$$l^2=a^2+b^2-2ab\cos B,$$

et par suite, en remplaçant cos B par sa valeur

$$l^2=\frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd},$$

ou
$$l^2=\frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd}$$

ou enfin,

$$l^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

On aurait de même,

$$m^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Ces valeurs ne sont pas calculables par logarithmes; si on voulait se servir des tables, il faudrait calculer d'abord $\cot\frac{B}{2}$ au moyen de la formule donnée plus haut, et résoudre ensuite le triangle ABC par la méthode du troisième cas des triangles.

112. Corollaire. Multiplions et divisons successivement l'une par l'autre les valeurs de l^2 et de m^2; nous aurons :

$$l^2m^2=(ac+bd)^2,$$

ou
$$lm=ac+bd;$$

et
$$\frac{l^2}{m^2}=\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2},$$

ou
$$\frac{l}{m}=\frac{ad+bc}{ab+cd},$$

formules qui démontrent ces deux théorèmes de géométrie :

Dans un quadrilatère inscrit,

1° *Le produit des deux diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés;*

2° *Le rapport des diagonales est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde.*

113. Problème X. — *Étant données trois circonférences concentriques, construire un triangle équilatéral qui ait un sommet sur chacune des circonférences.*

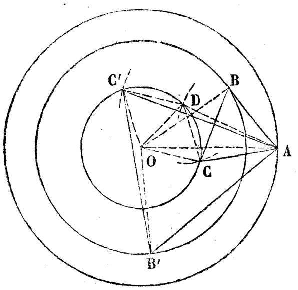

Fig. 50.

Soient a, b, c les rayons des trois circonférences OA, OB, OC (fig. 50), ABC un triangle équilatéral répondant à la question, x son côté, OA, OB, OC les rayons menés aux trois sommets, et θ l'angle OAB; l'angle OAC sera égal à $60^\circ - \theta$. Cela posé, les deux triangles OAB, OAC nous donnent les équations :

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos\theta, \qquad [1]$$

$$c^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos(60^\circ - \theta);$$

je développe $\cos(60^\circ - \theta)$, en remarquant que

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{et} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

j'ai ainsi :

$$c^2 = a^2 + x^2 - ax\cos\theta - ax\sqrt{3}\sin\theta. \qquad [2]$$

Des équations [1] et [2], je tire $\cos\theta$ et $\sin\theta$, ce qui me donne :

$$\cos\theta = \frac{x^2+a^2-b^2}{2ax},$$

$$\sin\theta = \frac{x^2+a^2+b^2-2c^2}{2ax\sqrt{3}};$$

si on élève ces deux équations au carré, et qu'on les ajoute membre à membre, l'angle θ s'élimine, et on a l'équation :

$$\frac{(x^2+a^2-b^2)^2}{4a^2x^2} + \frac{(x^2+a^2+b^2-2c^2)^2}{12a^2x^2} = 1.$$

Tous calculs faits, cette équation prend la forme

$$x^4-(a^2+b^2+c^2)x^2+a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=0$$

En la résolvant par rapport à x^2, on trouve :

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm \sqrt{3\{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\}}}{2}$$

Discussion. Il faut maintenant discuter ces valeurs, et pour cela il est nécessaire de transformer la quantité soumise au radical ; on trouve facilement :

$$-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2=$$

$$4b^2c^2-\left[a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2\right]$$

$$=4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2.$$

On peut alors décomposer ce polynome en facteurs, et on trouve

$$(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(b+c-a),$$

ou bien, en représentant $a+b+c$ par $2p$,

$$16p(p-a)(p-b)(p-c);$$

par conséquent, la valeur de x^2 devient :

$$x^2 = \frac{a^2+b^2+c^2 \pm 4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}.$$

Pour que cette valeur soit réelle, il faut, comme on sait (n° **99**), que chacune des longueurs a, b, c soit plus petite que la somme des deux autres, c'est-à-dire qu'avec ces trois lignes, on puisse construire un triangle.

Il faut de plus que les valeurs de x^2 soient positives; on voit aisément que cette condition est remplie, parce que la somme et le produit des racines de l'équation sont essentiellement positifs; mais on peut aussi le démontrer d'une manière simple en transformant l'expression de x^2. Désignons par S la surface du triangle qui aurait a, b, c, pour côtés, et par A, l'angle opposé au côté a; nous aurons :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

les valeurs de x^2 deviennent alors :

$$x^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A \pm bc\sqrt{3} \sin A,$$

ou $$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \left[\frac{1}{2} \cos A \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A\right]$$

ou enfin, $$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A \pm 60^\circ);$$

ce qui montre que x est le troisième côté d'un triangle ayant pour côtés b et c, et dans lequel l'angle compris est $A \pm 60^\circ$; comme on peut toujours supposer que a soit le plus grand des rayons, A est supérieur à 60°, et l'angle $A - 60^\circ$ est positif; si A est supérieur à 120°, $A + 60^\circ$ est supérieur à 180°, et on remplace cet angle par $360^\circ - (A + 60^\circ) = 300^\circ - A$; dans chaque cas, la valeur de x^2 sera positive. Donc enfin, la seule condition pour que le problème soit possible, c'est que l'on puisse faire un triangle avec les trois lignes a, b, c, c'est-à-dire que la plus grande d'entre elles soit inférieure à la somme des deux autres.

Construction. La remarque précédente nous donne le moyen de construire le triangle cherché. D'un point quelconque A de la plus grande circonférence avec une ouverture de compas égale au rayon moyen, on décrit un arc de cercle qui rencontre la petite circonférence en D; le triangle ODA est le triangle des trois rayons, et l'angle ODA est celui que nous avons appelé A. Du point D comme centre avec OD comme rayon, je décris un arc de cercle qui rencontre la petite circonférence aux points C et C'; AC et AC' sont les deux valeurs de x; car dans le triangle ACD, les côtés DA et DC sont respectivement égaux à b et à c, et l'angle compris CDA est égal à A — 60°; de même dans le triangle ADC', les côtés AD et DC' sont égaux respectivement à b et à c et l'angle compris C'DA est égal à A + 60° ou à 360° — (A + 60°). On achève ensuite aisément les deux triangles équilatéraux.

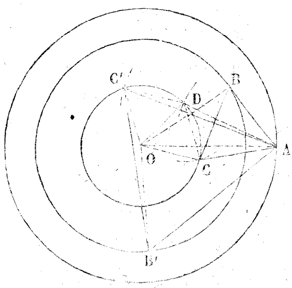

Fig. 51.

Application de la trigonométrie au levé des plans et à la solution de quelques problèmes de géométrie pratique.

114. Les méthodes indiquées dans les traités de géométrie pour le levé des plans n'offrent pas une exactitude suffisante quand on veut lever le plan d'une étendue de terrain un peu considérable, par exemple, lorsqu'on se propose de dresser la carte de toute une contrée. On recouvre alors tout le pays d'un *réseau* de triangles que l'on détermine aussi exactement que possible, et dont les côtés serviront ensuite de *bases* pour y rattacher les détails du terrain. Cette opération s'appelle une *triangulation.*

Les divers triangles qui composent le réseau ou *canevas trigonométrique* doivent avoir pour sommets des points choisis de telle manière que de chaque sommet d'un triangle on puisse apercevoir les deux autres. Il faut éviter avec soin l'emploi des triangles où un des angles serait trop petit : un pareil triangle est *désavantageux,* parce que la plus légère erreur dans la détermination des autres angles donnerait des valeurs tout à fait fautives pour les côtés adjacents au petit angle.

Les divers sommets des triangles étant fixés, on mesure, au moyen de la *chaîne,* un côté de l'un de ces triangles; cette ligne s'appelle la *base* de la triangulation. On détermine ensuite au moyen du *graphomètre,* ou mieux, au moyen du *théodolite, tous les angles* de ces triangles. On connaît alors, dans le premier triangle, un côté et les deux angles adjacents ; on calcule par la relation des sinus les autres côtés de ce triangle, qui sont en même temps les côtés de deux triangles voisins. Alors, dans chacun de ces triangles, on connaît un côté et les angles; on peut donc les résoudre, et en continuant ainsi de proche en proche, on calcule toutes les lignes du réseau, ce qui permet d'en faire le plan avec la plus grande précision.

Il y a plusieurs moyens de vérification. En premier lieu, il faut que la somme des trois angles de chaque triangle soit égale à 180°, ou du moins n'en diffère que d'une quantité très-petite, qui ne dépasse pas la limite des erreurs que l'on peut faire avec l'instrument employé. Dans ce dernier cas, on corrige chaque angle en lui ajoutant ou lui retranchant le tiers de l'erreur totale de la somme des angles. Les calculs comportent aussi une vérification qu'il ne faut pas négliger : il arrive toujours que le dernier côté que l'on calcule a déjà été calculé dans un autre triangle, et il faut que les deux valeurs soient identiques. Enfin, si l'on doutait de l'exactitude de la base, on mesurerait directement l'un des côtés calculés par la trigonométrie au moyen de cette base, et on comparerait le nombre obtenu par cette mesure directe avec la valeur trouvée par le calcul.

Je vais maintenant passer en revue quelques problèmes de géométrie pratique qu'on peut résoudre par des constructions purement géométriques, mais dont les formules de la trigonométrie fournissent des solutions plus exactes et souvent plus simples.

115. Problème I. — *Trouver la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible et dont la base est sur un terrain horizontal.*

Soit AE la hauteur qu'il s'agit de mesurer; on choi-

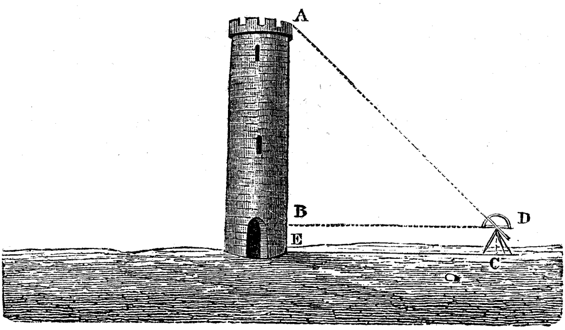

Fig. 52.

sit un point C à une distance CE qui ne soit ni trop grande ni trop petite par rapport à la hauteur AE, et on mesure la distance CE. On place ensuite un graphomètre au point C, en disposant son limbe dans le plan vertical BAE, de manière que le diamètre soit horizontal, et on mesure l'angle ADB. Dans le triangle rectangle ADB, on a alors :

$$AB = BD \operatorname{tang} BDA,$$

équation d'où l'on tire AB. En ajoutant à cette ligne la hauteur DC du graphomètre, on a la hauteur de l'édifice.

116. Problème II. — *Mesurer la hauteur d'une montagne au-dessus du niveau de la plaine.*

Soit A le sommet de la montagne; on mesure dans la plaine une base horizontale BC, et on détermine, au

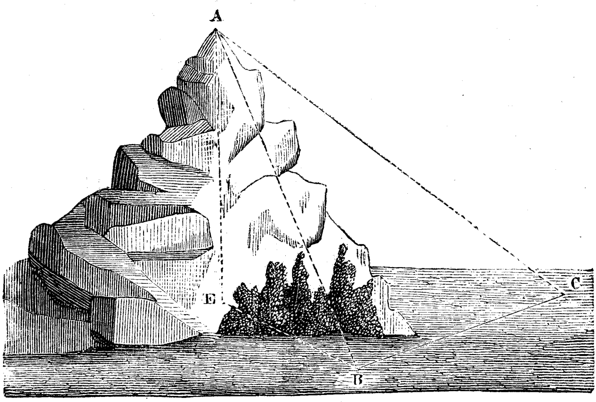

Fig. 53.

moyen du graphomètre, les angles ABC, ACB. On dispose ensuite le graphomètre au point B de manière que son limbe soit dans le plan vertical qui passe par le point A et que son diamètre soit horizontal, et on mesure l'angle que la droite AB fait avec l'horizon.

Soit AE la verticale du point A, E le point où elle coupe le plan horizontal passant par BC; la ligne BE sera située dans ce plan, et par suite le triangle ABE sera rectangle. Or, dans le triangle ABC, nous connaissons le côté BC et les deux angles adjacents; donc l'angle BAC de ce triangle est connu, et nous avons :

$$AB = \frac{BC \sin ACB}{\sin BAC};$$

nous avons ensuite dans le triangle rectangle BAE :

$$AE = AB \sin ABE;$$

et si nous remplaçons AB par sa valeur, nous aurons enfin :

$$AE = \frac{BC \sin ACB \sin ABE}{\sin BAC},$$

ce qui permettra de calculer facilement la hauteur AE.

Exemple. On a trouvé :

$$BC = 1548^m,70$$

$$ABC = 72^\circ 19' 40''$$

$$ACB = 73^\circ 13' 20''$$

$$ABE = 54^\circ 18' 10'',$$

trouver AE.

Je ferai le calcul avec les petites tables.

On a d'abord :

$$BAC = 34^\circ 27'.$$

Calcul de log BC.

Pour	1548.	18977
Pr	0,7.	20
	log BC =	3,18997

Calcul de log sin ACB.

$$\log \sin 73^\circ 13' \ldots\ldots \quad \bar{1},98110$$
$$\text{Pour} \quad 20'' \ldots \quad 1$$
$$\log \sin ACB = \bar{1},98111$$

Calcul de log sin ABE.

$$\log \sin 54^\circ 18' \ldots\ldots \quad \bar{1},90960$$
$$\text{Pour} \quad 10'' \ldots \quad 2$$
$$\log \sin ABE = \bar{1},90962$$

Calcul de log sin BAC.

$$\log \sin BAC = \bar{1},75258$$

Calcul de AE.

$$\log BC = 3,18997$$
$$\log \sin ACB = \bar{1},98111$$
$$\log \sin ABE = \bar{1},90962$$
$$-\log \sin BAC = 0,24742$$
$$\log AE = 3,32812$$
$$32797 \ldots\ldots \quad 2128$$
$$\text{Pour} \ldots \quad 15 \ldots\ldots \quad 0,70$$
$$AE = 2128^m,70$$

117. Problème III. — *Déterminer la distance d'un point accessible à un point inaccessible, mais visible.*

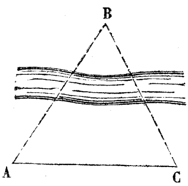

Fig. 54.

Soit A le point accessible, B le point inaccessible. On trace, à partir du point A, une base AC sur le terrain; on mesure ensuite cette base et les deux angles BAC, BCA; on en déduit facilement l'angle B, et on a alors, dans le triangle BAC,

$$AB = \frac{AC \sin BCA}{\sin ABC}.$$

118. PROBLÈME IV. — *Déterminer la distance de deux points inaccessibles, mais visibles.*

Soient A et B les deux points inaccessibles dont on veut mesurer la distance. Sur la partie du terrain qui est accessible, on trace une base CD, que l'on mesure à l'aide de la chaîne; puis on mesure avec le graphomètre les cinq angles :

$$\mathrm{ACD} = \alpha,$$
$$\mathrm{BCD} = \beta,$$
$$\mathrm{ADC} = \alpha',$$
$$\mathrm{BDC} = \beta',$$
$$\mathrm{ACB} = \mathrm{C}.$$

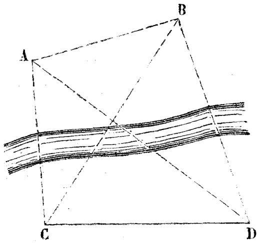

Fig. 55.

Dans le cas où les quatre points A, B, C, D sont dans un même plan, l'angle C est égal à $\alpha - \beta$; c'est ce qui a lieu ordinairement.

Cela posé, dans les deux triangles ACD, BCD, on a :

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{CD} \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')},$$

$$\mathrm{BC} = \frac{\mathrm{CD} \sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')};$$

alors, dans le triangle ABC, nous connaissons les deux côtés AC, BC, et l'angle compris C; on demande le troisième côté AB. Comme les côtés AC et BC sont connus par leurs logarithmes, nous emploierons la méthode exposée dans le n° **95**; nous poserons :

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} \cdot \frac{\sin(\beta + \beta')}{\sin(\alpha + \alpha')},$$

d'où :

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log \sin \alpha' - \log \sin \beta' + \log \sin (\beta + \beta')$$
$$- \log \sin (\alpha + \alpha')$$

nous aurons ensuite :

$$\frac{A+B}{2}=90^{0}-\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}=\operatorname{tang}(45^{0}-\varphi)\cot\frac{C}{2};$$

et quand les angles A et B auront été calculés,

$$AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{CD\sin\beta'\sin C}{\sin A\sin(\beta+\beta')}$$

et cette formule déterminera AB.

Exemple. On donne :

$$CD=412^{m},45$$
$$\alpha=109^{0}18'25''$$
$$\beta=48^{0}17'13''$$
$$\alpha'=34^{0}12'14''$$
$$\beta'=87^{0}28'16''$$
$$C=\alpha-\beta=61^{0}1'12''$$

On demande AB. Voici les calculs faits avec les tables à sept décimales.

CALCULS AUXILIAIRES.

Calcul de log sin α'.

log sin 34° 12′ 10″............	$\bar{1}$,7498317
Pour 4″............	124
log sin α' =	$\bar{1}$,7498441

Calcul de log sin β'.

log sin 87° 28′ 10″............	$\bar{1}$,9995763
Pour 6″............	5
log sin β' =	$\bar{1}$,9995768

CALCUL DES INCONNUES.

Calcul de l'angle φ.

log sin α' =	$\bar{1}$,7498441	
— log sin β' =	0,0004232	
log sin $(\beta+\beta')$ =	$\bar{1}$,8436624	
— log sin$(\alpha+\alpha')$ =	0,2257234	
log tang φ =	$\bar{1}$,8196531	
Pour..........	$\bar{1}$,8196386	.33°25′50″
Pr..............	145.......	3″,16
φ =	33° 25′ 53″,16	
$45^{0}-\varphi$ =	11° 34′ 6″,84	

CALCULS AUXILIAIRES (SUITE).

Calcul de log sin $(\alpha + \alpha')$.

$$\alpha + \alpha' = 143^\circ 30' 39'',$$
$$180^\circ - (\alpha + \alpha') = 36^\circ 29' 21''.$$

log sin 36° 29′ 20″............ $\bar{1},7742738$
Pour 1″............ 28

log sin $(\alpha + \alpha') = \bar{1},7742766$

Calcul de log sin $(\beta + \beta')$.

$$\beta + \beta' = 135^\circ 45' 29'';$$
$$180^\circ - (\beta + \beta') = 44^\circ 14' 31''.$$

log sin 44° 14′ 30″............ $\bar{1},8436602$
Pour 1″............ 22

log sin $(\beta + \beta') = \bar{1},8436624$

Calcul de log cot $\frac{C}{2}$.

$$\frac{C}{2} = 30^\circ 30' 36''.$$

log cot 30° 30′ 30″............ 0,2297071
Pour 6″............ —289

log cot $\frac{C}{2} = 0,2296782$

Calcul de log tang $(45^\circ - \varphi)$.

log tang 11° 34′ 0″........... $\bar{1},3110421$
Pour 6″,84......... 733

log tang $(45^\circ - \varphi) = \bar{1},3111154$

Calcul de log sin C.

log sin 61° 1′ 10″............ $\bar{1},9419009$
Pour 2″............ 23

log sin C $= \bar{1},9419032$

Calcul de log sin A.

log sin 78° 38′ 40″........... $\bar{1},9914140$
Pour 4″,69........ 20

log sin A $= \bar{1},9914160$

CALCULS DES INCONNUES (SUITE).

Calcul de $\frac{A-B}{2}$.

log tg $(45^\circ - \varphi) = \bar{1},3111154$
log cot $\frac{C}{2} = 0,2296782$

log tg $\frac{A-B}{2} = \bar{1},5407936$
Pour........... $\bar{1},5407889$...19° 9′ 20″
Pr............. 47....... 0″,69

$$\frac{A-B}{2} = 19^\circ 9' 20'',69$$

Calcul de A.

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} = 59^\circ 29' 24''$$
$$\frac{A-B}{2} = 19^\circ\ 9' 20'',69$$
$$A = 78^\circ 38' 44'',69$$

Calcul de AB.

log CD $= 2,6153713$
log sin $\beta' = \bar{1},9995768$
log sin C $= \bar{1},9419032$
—log sin A $= 0,0085840$
—log sin$(\beta + \beta') = 0,1563376$

log AB $= 2,7217729$
Pour........... 7217694 .. 52695
Pr.............. 35....... 0,4

AB $= 526^m,954$

119. Problème V. — *Prolonger une ligne droite au delà d'un obstacle qui arrête la vue.*

Soit AB la droite qu'il s'agit de prolonger au delà de l'obstacle L. On prend sur le terrain un point E d'où l'on puisse voir un point B de la droite AB, et le prolongement de cette droite. A partir du point E on jalonne un alignement tel qu'il rencontre au delà de l'obstacle le prolongement de la droite AB; soit C ce point de rencontre; on mesure ensuite la longueur BE, et les angles EBA, BEC. On connaît alors, dans le triangle BCE, le côté BE, et les deux angles adjacents; on en déduit d'abord l'angle ECD extérieur à ce triangle :

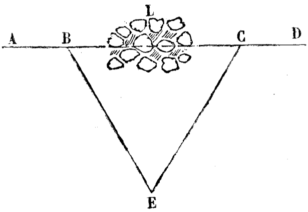

Fig. 56.

$$ECD = BEC + 180^{\circ} - EBA;$$

on calcule ensuite EC par la formule ;

$$EC = \frac{BE \sin ABE}{\sin BCE}$$

ou bien

$$EC = \frac{BE \sin ABE}{\sin (ABE - BEC)};$$

la longueur de la ligne EC donne le moyen de construire le point C, et pour avoir la ligne CD, il suffira ensuite de mener par ce point C une ligne faisant avec EC un angle égal à l'angle calculé ECD.

Remarque. Les procédés indiqués dans les traités de géométrie appliquée sont, en général, plus simples que celui que nous venons de donner et tout aussi exacts.

120. Problème VI. — *Trois points* A, B, C *étant situés sur un terrain uni, et rapportés sur une carte, déterminer* *le point* P, *d'où les longueurs* AB, BC *ont été vues sous des angles* α *et* β *qu'on a mesurés.*

Je rappelle d'abord la solution géométrique qui est très-simple. Sur AB, on décrit un segment capable de l'angle α, et sur BC un segment capable de l'angle β. On a ainsi deux circonférences qui se coupent d'abord en B, et ensuite en un autre point qui est précisément le point P qu'il fallait trouver. Cette construction n'est en défaut que dans le cas où les deux circonférences se confondent, c'est-à-dire, quand les quatre points A, B, C, P sont sur une même circonférence; le problème est alors indéterminé.

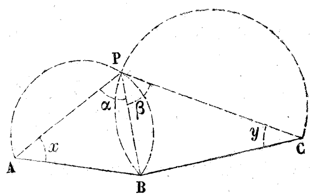

Fig. 57.

Pour résoudre le problème à l'aide de la trigonométrie, je prendrai pour inconnues les angles BAP, BCP que je désignerai par les lettres x et y; j'appellerai a et b les longueurs données AB et BC, et B l'angle connu ABC. Cela posé, j'aurai d'abord évidemment :

$$x+y+\alpha+\beta+B=360^\circ;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{x+y}{2}=180^\circ-\frac{\alpha+\beta+B}{2}. \qquad [1]$$

De plus, dans le triangle ABP, j'ai :

$$PB=\frac{a\sin x}{\sin\alpha},$$

et dans le triangle BPC,

$$PB=\frac{b\sin y}{\sin\beta}.$$

j'égale ces deux valeurs de PB, ce qui me donne la seconde équation :

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

ou

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta};$$

on en déduit :

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta};$$

le premier membre de cette équation est égal (nº **43**) à $\dfrac{\tan \frac{x+y}{2}}{\tan \frac{x-y}{2}}$; on aura donc :

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x-y}{2}} = \frac{b \sin \alpha + a \sin \beta}{b \sin \alpha - a \sin \beta},$$

ou bien,

$$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta} \operatorname{tang} \frac{x+y}{2}$$

mais $\frac{x+y}{2}$ est connu : si nous le remplaçons par sa valeur, nous aurons :

$$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha} \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta + B}{2};$$

cette formule n'est pas calculable par logarithmes; on emploiera alors un angle auxiliaire φ, déterminé par l'équation :

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}; \qquad [2]$$

en introduisant cet angle auxiliaire dans la formule précédente, elle devient :

$$\operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \frac{1 - \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang} \varphi} \operatorname{tang} \frac{\alpha + \beta + B}{2},$$

ou enfin :

$$\operatorname{tang}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi)\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta+B}{2} \qquad [3]$$

Telle est la formule qui fera connaître $\frac{x-y}{2}$; comme on connaît déjà $\frac{x+y}{2}$, les deux angles x et y se détermineront facilement.

Discussion. La formule [3] donnera toujours une valeur admissible pour $\operatorname{tang}\frac{x-y}{2}$, excepté dans le cas où l'un des facteurs du second membre serait nul et l'autre infini. Or le premier facteur $\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi)$ ne peut pas être infini, car l'angle φ est inférieur à 90°; donc $45^\circ-\varphi$ est aussi, en valeur absolue, inférieur à 90°; par conséquent $\operatorname{tang}(45^\circ-\varphi)$ est nécessairement fini.

Il en est autrement du second facteur $\operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta+B}{2}$, ce facteur peut devenir infini; il faut pour cela que l'on ait :

$$\alpha+\beta+B=180^\circ,$$

c'est-à-dire que les quatre points A, B, C, P soient sur un même cercle. Mais quand cela a lieu, les quotients $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$ sont égaux, parce qu'ils représentent les diamètres des cercles circonscrits aux triangles ABP, BCP, cercles qui se confondent dans ce cas. On a donc :

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

ou $$a\sin\beta=b\sin\alpha;$$

l'équation [2] devient alors :

$$\operatorname{tang}\varphi=1; \quad \text{d'où} \quad \varphi=45^\circ;$$

donc $$\operatorname{tang}(45^0-\varphi)=0.$$

Ainsi, lorsque le second facteur est infini, le premier est nul, la valeur de tang $\frac{x-y}{2}$ se présente sous la forme $0\times\infty$; par conséquent elle est indéterminée. C'est ce que nous avait montré aussi la solution géométrique.

EXERCICES.

1. Si l'on désigne par A l'angle droit d'un triangle rectangle, par B et C les angles aigus, par a, b, c les côtés respectivement opposés aux angles A, B, C, par S la surface du triangle, par R et r les rayons des cercles circonscrits et inscrits au triangle, on a les formules :

$$\cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})=\frac{2bc}{a^2},$$

$$\cos 2\,\mathrm{B}=\frac{c^2-b^2}{c^2+b^2},$$

$$\operatorname{tang} 2\,\mathrm{B}=\frac{2\,bc}{c^2-b^2},$$

$$\mathrm{S}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4},$$

$$\mathrm{R}+r=\frac{b+c}{2}.$$

2. Si l'on désigne par A, B, C les trois angles d'un triangle, par a, b, c les côtés opposés, par p le demi-périmètre, par S la surface, par R et r, les rayons des cercles circonscrits et inscrits, on a les formules :

$$(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tang}\mathrm{A}=(a^2+c^2-b^2)\operatorname{tang}\mathrm{B}=(a^2+b^2-c^2)\operatorname{tang}\mathrm{C},$$

$$\frac{\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}=\frac{a^2-b^2}{c^2},$$

$$\frac{p}{R}=\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\frac{S}{r^2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2},$$

$$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B-C)},$$

$$R=\frac{\sqrt[3]{abc}}{2\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}},$$

$$Rr=\frac{abc}{4p},$$

$$\frac{R}{r}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\frac{pr}{R^2}=\sin A\sin B\sin C.$$

3. Si on appelle r_a, r_b, r_c les rayons des cercles ex-inscrits à un triangle, on a les formules :

$$S=pr=(p-a)\,r_a=(p-b)\,r_b=(p-c)\,r_c,$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c},$$

$$S=\sqrt{r\,r_a r_b r_c},$$

$$r_a r_b r_c=abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Ces relations se simplifient, quand le triangle est rectangle.

4. Exprimer en fonction des trois côtés les distances du centre du cercle inscrit et des centres des cercles ex-inscrits aux trois sommets du triangle, ainsi que les longueurs des bissectrices du triangle. — Démontrer que si d_a, d_b, d_c représentent les distances du centre du cercle inscrit aux trois sommets du triangle, on a :

$$\frac{d_a\,d_b\,d_c}{r}=\frac{abc}{p}.$$

On demande de trouver cette relation et de voir ce qu'elle devient quand le rayon de la circonférence varie de 0 à ∞. Généraliser la question en remplaçant le carré par un polygone régulier d'un nombre pair de côtés dans lequel on considèrè toutes les diagonales qui passent par le centre, et les angles sous lesquels ces diagonales sont vues du point M.

20. Par un point P pris arbitrairement dans le plan d'un cercle O, on mène une sécante quelconque qui rencontre la circonférence en A et en B. On demande de prouver que le produit tang $\frac{AOP}{2}$. tang $\frac{BOP}{2}$ a une valeur constante, quelle que soit la sécante menée par le point P.

21. Exprimer le volume d'un parallélipipède oblique en fonction des arêtes a, b, c issues d'un même sommet, et des angles α, β, γ qu'elles forment entre elles. — Rendre la formule obtenue calculable par logarithmes.

22. Prouver que si a, b, c désignent les trois angles plans d'un trièdre, A l'angle dièdre opposé à la face a, on a la formule :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

On s'appuiera sur la construction géométrique qui permet de trouver A, quand on connaît a, b, et c.

23. Démontrer que l'aire d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle obtenu en joignant les pieds des trois hauteurs.

24. Démontrer que l'aire d'un quadrilatère, à la fois inscriptible et circonscriptible à un cercle, est égale à la racine carrée du produit de ses quatre côtés.

25. Quatre droites OA, OA′, OB, OB′ partent d'un même point; on les coupe par une sécante quelconque qui les rencontre aux points A, A′, B, B′; prouver que le rapport $\frac{AA'}{AB'} : \frac{BA'}{BB'}$ est constant quelle que soit cette sécante. — Quelle est la valeur de ce rapport, si les droites OA′ et OB′ sont l'une, la bissectrice de l'angle AOB, l'autre, la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire?

26. On joint un point O pris dans l'intérieur d'un triangle

aux trois sommets; ces droites rencontrent les côtés opposés aux points, A′ situé sur BC, B′ sur AC, et C′ sur AB. Démontrer qu'on a :

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1.$$

EXERCICES NUMÉRIQUES.

1. Calculer le volume du segment de la terre limité par le cercle polaire, sachant que l'arc du méridien compris entre le pôle et le cercle polaire est égal à 23° 28′, et en prenant la surface de la terre entière pour unité de surface. (Saint-Cyr, 1855.)

2. Résoudre un triangle, connaissant

$$\log a = 0,8497568,$$
$$\log b = 0,6948976,$$
$$C = 67^{\circ}51'48'',4;$$

comme vérification, calculer directement l'angle A. (Saint-Cyr, 1861.)

3. Étant donnée l'équation

$$89785 = 89524,67 \cos x + 24508,75 \sin x,$$

on propose :

1° D'établir une formule logarithmique qui fasse connaître toutes les valeurs de l'arc x.

2° De calculer ces valeurs à moins d'un dixième de seconde, en écartant celles qui ne sont pas comprises dans le premier quadrant. (Saint-Cyr, 1862.)

4. Dans un demi-cercle, dont le diamètre est AB (le lecteur est prié de faire la figure), on donne le rayon OA $= 2478^{m},576$, et l'angle au centre AOC $= 108^{\circ}36'13'',7$. On demande de calculer l'aire du secteur compris entre les rayons OC et OA. — On demande ensuite quelle doit être la valeur de l'angle au centre AOC, pour qu'en faisant tourner la figure autour de AB, le volume engendré par le segment circulaire compris entre

l'arc AC et la corde soit la moitié du volume engendré par le demi-cercle (Saint-Cyr, 1863).

5. Les rayons de deux circonférences sont l'un de 3^m, l'autre de 4^m, et la distance des centres est 2^m. On demande de calculer :

1° La surface du triangle qui a pour base la ligne des centres, et pour sommet l'un des points d'intersection des deux circonférences ;

2° La longueur de la corde commune aux deux circonférences ;

3° Les longueurs des arcs sous-tendus par cette corde ;

4° La valeur de la surface commune aux deux cercles.

On devra obtenir les valeurs de chacune des lignes avec 6 chiffres décimaux et les valeurs des angles à moins d'un centième de seconde près. (Saint-Cyr, 1864.)

6. Dans le triangle ABC, l'angle B est de $51^0\,14'\,37'',8$, l'angle C est de $28^0 55' 35''$, et le côté $a = 4436^m,857$. On demande de calculer le côté c, et ensuite l'angle que ce côté fait avec la droite qui joint le sommet A au milieu du côté opposé BC. — On demande de vérifier l'angle cherché, en se fondant sur ce qu'il ne dépend que des angles du triangle ABC, et nullement du côté BC. (Saint-Cyr, 1865.)

7. La hauteur SA d'un point S au-dessus d'un plan horizontal ABC est de $427^m,854$. Les deux droites SB et SC font avec la verticale SA, des angles égaux dont la valeur commune est $55^0 18' 27''$. Ces mêmes droites font entre elles un angle BSC de $28^0 44' 35''$. Cela posé, on demande de calculer :

1° Les arêtes AB, SC et BC de la pyramide SABC ;

2° L'angle BAC ;

3° Le volume de la pyramide SABC. (Saint-Cyr, 1866.)

8. On donne deux angles A et B d'un triangle ABC et le volume V engendré par le triangle en tournant autour d'une parallèle menée au côté BC par le point A. Calculer les côtés du triangle. Application :

$$A = 39^0 27' 28'',3,$$

$$B = 58^0\,12' 37'',29,$$

$V = 729$ m. c. (École polytechnique, 1851.)

9. Les côtés AB, BC, CD.... d'un pentagone sont tous égaux à $1^m,175$; les angles sont :

$$A = 112^0, B = 104^0, C = 115^0, D = 100^0\,4'\,8'';$$

trouver la surface de ce polygone. (École polytechnique, 1851.)

10. Étant donné le demi-cercle BCA (le lecteur est prié de faire la figure), dont le rayon vaut $6366^m,739$, on tire le rayon OC, faisant avec OA un angle α égal à $23^0\,27'\,14'',3$. Au point C on mène la tangente au cercle, qui coupe au point D le prolongement de OA, et l'on demande de calculer:

1° Le volume engendré par le triangle rectangle OCD tournant autour de l'hypoténuse OD;

2° La valeur qu'il faudrait attribuer à l'angle α, pour que le volume engendré par le triangle OCD fût double de celui engendré par le secteur circulaire OCA. (Saint-Cyr, 1867.)

NOTE I.

Sur la division d'un angle en trois parties égales.

121. Problème. — *Étant donné* sin a, *trouver* sin $\frac{a}{3}$.

Nous avons démontré (n° **36**) la formule

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a;$$

changeons a en $\frac{a}{3}$ dans cette formule, elle devient :

$$\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3};$$

pour plus de brièveté, je représente sin a par b, et sin $\frac{a}{3}$ par x, et l'équation précédente devient :

$$4x^3 - 3x + b = 0 \qquad [1]$$

Cette équation est du troisième degré, et par conséquent ne peut pas être résolue algébriquement. Mais il est facile de faire voir qu'elle doit avoir ses trois racines réelles, et de plus comprises entre -1 et $+1$, c'est-à-dire que le problème proposé admet trois solutions.

En effet, on ne donne pas l'arc a, mais son sinus; donc, en vertu d'une formule connue, si α est l'un quelconque des arcs qui ont b pour sinus, tous les autres seront compris dans les deux formules

$$a = 2k\pi + \alpha, \qquad a = (2k+1)\pi - \alpha;$$

d'où $$\frac{a}{3} = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}, \qquad \frac{a}{3} = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}.$$

L'équation [1] doit admettre pour racines les sinus de tous ces arcs, c'est-à-dire,

$$\sin\left[\frac{2k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right], \quad \text{et} \quad \sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right].$$

Pour avoir toutes les valeurs distinctes que donnent ces formules, il suffit d'y faire successivement k égal à 0, 1, 2, ou plus généralement de lui attribuer trois valeurs entières consécutives. En effet, si l'on donne à k dans chacune des formules deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de 3, les arcs obtenus diffèrent d'un nombre entier de circonférences, et par suite ont même sinus. En faisant k égal successivement à 0, 1 et 2, j'aurai

$$\begin{array}{ll} \sin\frac{\alpha}{3}, & \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right), \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right), & \sin\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right), \\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right), & \sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right), \end{array}$$

et ce sont les seules valeurs que puisse avoir x.

Mais on voit facilement que les sinus de la seconde colonne sont les mêmes que ceux de la première, quoique dans un ordre différent; on a en effet :

$$\begin{array}{ll} \frac{\alpha}{3}+\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)=\pi; & \text{donc } \sin\frac{\alpha}{3}=\sin\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right), \\ \left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)=\pi; & \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right), \\ \left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)+\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)=3\pi; & \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right); \end{array}$$

par conséquent les seules valeurs différentes que l'on puisse donner à x sont

$$\sin\frac{\alpha}{3}, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Le problème a donc trois solutions.

On trouve bien aisément tous ces résultats en considérant une figure. Puisque sin a est donné, prenons à partir du point O sur BB′, et dans le sens convenable, une longueur OQ égale à sin a, et par le point Q, menons une parallèle MM′ au diamètre AA′; tous les arcs terminés en M et en M′ ont pour sinus le sinus donné et ce sont les seuls. Prenons les tiers de tous ces arcs; le tiers de l'arc AM est un certain arc AN; les autres arcs terminés en M s'obtiennent en ajoutant à l'arc AM un nombre entier de circonférences positives ou négatives; les tiers de ces arcs seront donc égaux à l'arc AN augmenté ou diminué d'un nombre exact de fois le tiers de la circonférence, ce qui fournira en tout trois points N, N_1, N_2 également distants sur la circonférence, c'est-à-dire les trois sommets d'un triangle équilatéral inscrit. Pareillement les tiers des arcs terminés en M' auront pour extrémités les trois sommets d'un autre triangle équilatéral $N'N'_1N'_2$. Je dis maintenant que ces deux triangles équilatéraux sont symétriques par rapport au diamètre BB'. Nous avons en effet,

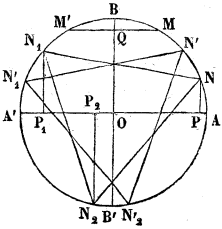

Fig. 58.

$$AN = \frac{1}{3} AM$$

$$AN'_1 = \frac{1}{3}\text{ circonf.} + \frac{1}{3} AM';$$

donc $$AN + AN'_1 = \frac{1}{3}\text{ circonf.} + \frac{AM + AM'}{3},$$

mais $$AM + AM' = \frac{1}{2}\text{ circonf.}$$

Donc enfin $$AN + AN'_1 = \frac{1}{2}\text{ circonférence.}$$

Les points N et N'_1 sont donc symétriques par rapport au diamètre BB', et il en est de même pour les points N_1 et N', N_2 et N'_2. Il en résulte que les arcs terminés en N', N'_1, N'_2 ont respectivement même sinus que les arcs terminés en N_1, N et N_2. Donc enfin les valeurs de $\sin \frac{a}{3}$ sont NP, N_1P_1 et $-N_2P_2$.

Remarque. — L'équation [1] peut avoir deux racines égales; il est facile, par ce qui précède, de voir dans quel cas cette particularité se présentera. Il faut évidemment, pour cela, que l'un des côtés du triangle équilatéral soit parallèle au diamètre AA', et par suite que l'un des arcs AN, AN_1 ou AN_2 soit égal à $\pm 30° = \pm \frac{\pi}{6}$; mais alors le triple de cet arc, c'est-à-dire l'une des valeurs de l'arc a, sera égal à $\pm \frac{\pi}{2}$, et par conséquent b ou $\sin a$ sera égal à ± 1.

122. PROBLÈME. — *Étant donné* $\cos a$, *trouver* $\cos \frac{a}{3}$.

Nous avons démontré au nº **36** la formule :

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a;$$

dans cette formule, je change a en $\frac{a}{3}$, et je pose : $\cos a = b$; $\cos \frac{a}{3} = x$; j'aurai l'équation :

$$4x^3 - 3x - b = 0 \qquad [2]$$

c'est l'équation qui donne la solution du problème.

Je vais faire voir que cette équation a encore ses trois racines réelles et comprises entre -1 et $+1$, c'est-à-dire que le problème admet trois solutions. En effet, si α est l'un des arcs ayant pour cosinus le cosinus donné b, tous les autres sont donnés par la formule

$$a = 2k\pi \pm \alpha;$$

d'où

$$\frac{a}{3} = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3},$$

et l'équation [2] devra avoir pour racines les cosinus de tous ces arcs. Or, si l'on donne à k dans la formule précédente deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de 3, les arcs obtenus différeront d'un nombre entier de circonférences, et par conséquent auront les mêmes cosinus; il résulte de là qu'il suffit de donner à k trois valeurs entières consécutives, 0, 1 et 2 par exemple, ce qui donne les arcs

$$\pm \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}.$$

Or, on a :

$$\cos \frac{\alpha}{3} = \cos \left(-\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \cos \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\cos \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right);$$

car, si deux arcs forment une somme égale à 0 ou à 2π, leurs cosinus sont égaux. Donc enfin, les solutions distinctes du problème proposé sont les suivantes :

$$\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Comme dans le problème précédent, on pourrait trouver ces valeurs au moyen d'une figure, et on démontrerait de la même manière que l'équation [2] aura deux racines égales entre elles, lorsque b sera égal à $\pm$ 1.

123. Problème. — *Trouver* $\tang\frac{\alpha}{3}$, *connaissant* $\tang a$.

Nous avons établi au n° **36** la formule :

$$\tang 3a = \frac{3\tang a - \tang^3 a}{1 - 3\tang^2 a};$$

je change dans cette formule a en $\frac{a}{3}$; puis je pose : $\tang a = b$; $\tang\frac{a}{3} = x$, et j'ai

$$b = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

ou

$$x^3 - 3bx^2 - 3x + b = 0 \qquad [3]$$

équation qui est encore du 3^e degré, et qui se discute comme les précédentes.

Soit α l'un des arcs qui ont pour tangente la quantité donnée b, tous les autres sont compris dans la formule

$$a = k\pi + \alpha,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{a}{3} = \frac{k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3};$$

si dans cette expression, on donne à k deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de 3, les arcs correspondants différeront d'un multiple de π, et par suite auront même tangente ; donc pour avoir toutes les valeurs distinctes de $\tang\frac{a}{3}$, il suffira de donner à k trois valeurs entières consécutives, par exemple, 0, 1 et 2 ; on obtient ainsi les arcs

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3},$$

dont les tangentes sont les racines de l'équation [3]; on voit qu'elles sont toutes les trois réelles, et que le problème a trois solutions.

On peut remarquer encore que ces racines sont toujours différentes; car pour que deux arcs aient même tangente, il faut que leur différence soit un multiple de π, ce qui évidemment ne peut avoir lieu pour deux des arcs $\frac{\alpha}{3}, \frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}, \frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$.

Cas particulier. — Soit $a=\frac{\pi}{2}$; alors $b=\infty$, et l'équation se réduit à

$$1-3x^2=0;$$

elle n'est plus que du 2e degré; il semble donc que l'équation [1] n'ait plus alors que deux racines; mais il est facile de voir que l'une des trois racines est devenue infinie; en effet, les trois arcs $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$, deviennent ici

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}, \quad \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6},$$

ou bien

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6};$$

l'arc intermédiaire $\frac{\pi}{2}$ a une tangente infinie, et les deux autres qui sont supplémentaires ont respectivement pour tangentes $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

NOTE II.

Recherche du logarithme du sinus ou de la tangente d'un angle très-petit.

124. Nous avons dit que lorsqu'un arc est plus petit que 5^0, il n'est pas permis de supposer que dans un intervalle de $10''$, les accroissements des logarithmes du sinus et de la tangente soient proportionnels aux accroissements des arcs; l'erreur commise en admettant cette proportionnalité pourrait dépasser une unité du 7^e ordre décimal. Pour cette raison, Callet, et après lui M. Dupuis, ont fait précéder les tables trigonométriques ordinaires d'une Table qui donne les logarithmes des sinus et des tangentes de tous les arcs de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés. Ces tables suffisent quand l'arc n'est pas inférieur à 3^0; on peut alors, dans l'intervalle d'une seconde, interpoler à la manière ordinaire; seulement le calcul est un peu plus long, parce que les différences ne sont pas inscrites dans la table et qu'il faut les calculer.

1^er^ *Exemple.* Trouver log tang $4^0\,8'\,37'',65$.

On trouve dans la table,

$$\log \operatorname{tang} 4^0\,8'\,37'' = \bar{2},8600144$$

la différence tabulaire pour $1''$ est 292; donc pour $0'',65$, il faudra ajouter au logarithme trouvé dans la table,

$$292 \times 0,65 = 190,$$

ce qui donne :

$$\log \operatorname{tang} 4^0\,8'\,37'',65 = \bar{2},8600334;$$

2^e^ *Exemple.* Trouver x connaissant

$$\log \sin x = \bar{2},8264637.$$

On trouve que le logarithme tabulaire le plus voisin par défaut est :

$$\bar{2},8264477 = \log \sin 3^\circ 50' 42'';$$

la différence des deux logarithmes est 160; la différence tabulaire est 313 ; donc la fraction de seconde qu'il faut ajouter à l'arc est

$$\frac{160}{313} = 0'',51;$$

et $$x = 3^\circ 50' 42'',51.$$

M. Schrön a supprimé les tables dont nous venons de parler; il y supplée par des méthodes ingénieuses expliquées avec détail dans la savante introduction placée par M. Houël en tête de ces Tables.

125. Je suppose en second lieu l'arc moindre que 3°; on démontre que, même dans l'intervalle d'une seconde, il n'est plus permis d'interpoler par parties proportionnelles. On emploie alors des tables auxiliaires qui, dans tous les recueils logarithmiques, accompagnent la table des logarithmes des nombres. Nous allons les décrire telles qu'elles sont dans Callet.

A gauche de la colonne des nombres sont deux colonnes qui servent à convertir un arc donné en secondes ou en minutes ; il suffit de les regarder pour en comprendre l'usage ; la première seule nous est utile : elle permet de changer en secondes un arc inférieur à 3° ou à 10800''. Veut-on, par exemple, convertir en secondes l'arc de 1° 49' 18''? On cherche, 1° en tête de la première colonne, et 49' immédiatement au-dessous, ce qui conduit à la page commençant par le nombre 6540; ensuite on descend dans la même colonne jusqu'à 18'', et sur la même ligne, dans la colonne marquée N, on lit le nombre de secondes, 6558. On a en effet :

$$1^\circ 49' 18'' = 6558''.$$

Au-dessus des logarithmes sont des nombres marqués S et T; ces nombres diminués de 10 sont égaux aux logarithmes des rapports $\frac{\sin a}{a}$ et $\frac{\operatorname{tang} a}{a}$, l'arc a étant exprimé en secondes; ces logarithmes ont été calculés pour tous les arcs des trois premiers degrés, de minute en minute; les nombres précédés de la lettre V indiquent avec le signe convenable la variation des nombres S et T, quand l'arc augmente de 10″. Ainsi pour l'arc de 6540″, S est égal à 4,6855021, et V = —2,23, ce qui veut dire que si l'arc augmente de 10″, S diminue de 2,23 unités du 7e ordre décimal. Pour les nombres T, on s'est borné à écrire les quatre derniers chiffres; les premiers sont les mêmes que ceux de S.

La disposition de ces tables auxiliaires a été beaucoup améliorée dans les ouvrages de MM. Dupuis et Schrön.

Voici maintenant l'usage de ces nombres S et T.

Premier Problème. Connaissant un arc a, trouver le logarithme de son sinus ou de sa tangente.

On a évidemment

$$\log \sin a = \log a + \log \frac{\sin a}{a}$$

$$\log \operatorname{tang} a = \log a + \log \frac{\operatorname{tang} a}{a};$$

$\log a$ se lit dans la table des logarithmes des nombres, et les nombres S et T donnent les autres logarithmes.

Exemples. 1° Calculer log sin 0° 24′ 19″, 5. On a d'abord:

$$a = 0^0\,24'\,19'',5 = 1459'',5$$

$$\text{Pour } 24'0''\ldots\ S = 4,6855713 \qquad V = -0,51$$

$$\text{Pour } 19'',5\ldots\ V = -0,051 \times 19,5 = -1.$$

On a alors:

$$\log a = \log 1459,5 = 3,1642041$$

$$\log \frac{\sin a}{a} = S - 10 = \bar{6},6855712$$

$$\log \sin a = \bar{3},8497753.$$

2° Calculer log tang 2° 7′ 53″, 24

$$a = 2^0\,7'\,53'',24 = 7673'',24$$

$$\text{Pour } 2^0\,7'\ldots \qquad T = 4,6857725 \quad V = +5,20$$

$$\text{Pour } 2^0\,7'\,53'',24\ldots T = 4,6857753$$

On a alors :

$$\log a = 3{,}8849788$$

$$\log \frac{\operatorname{tang} a}{a} = \bar{6}{,}6857753$$

$$\log \operatorname{tang} a = \bar{2}{,}5707541$$

Deuxième Problème. Étant donné le logarithme du sinus ou de la tangente d'un arc très-petit, trouver cet arc.

On cherche d'abord le plus grand nombre de secondes que contient l'arc en se servant des tables trigonométriques; puis on cherche la valeur correspondante de S ou de T qu'on retranche du logarithme donné; le reste représente le logarithme de l'arc exprimé en secondes.

Exemples. 1° Trouver l'arc x sachant que

$$\log \sin x = \bar{2}{,}3246314.$$

On trouve d'abord immédiatement que x est compris entre

$1°\,12'\,36''$ et $1°\,12'\,37''$; pour $1°\,12'\,36''$, $\log \dfrac{\sin a}{a} = \bar{6}{,}6855426$,

et comme ce nombre ne varie que très-peu, on peut admettre qu'il est le même pour l'arc a et pour l'arc x. On a alors :

$$\log \sin x = \bar{2}{,}3246314$$

$$-\log \frac{\sin x}{x} = 5{,}3144574$$

$$\log x = 3{,}6390888$$

Pour. . . . . 6390879. . . 43560

Pour 9 0,09

$$x = 4356'',009 = 1°\,12'\,36'',009.$$

2° Trouver l'arc x, sachant que

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{2}{,}5637308.$$

On trouve d'abord que x est compris entre $2^{\circ}\,5'\,50''$ et $2^{\circ}\,5'51''$; on a alors, comme dans l'exemple précédent,

$$\log \operatorname{tang} x = \bar{2},5637308$$

$$-\log \frac{\operatorname{tang} x}{x} = 5,3142311$$

$$\log x = 3,8779619$$

Pour. . . . . . 8779585.... 75502

Pour. 34. 0,59

$$x = 7550'',259 = 2^{\circ}\,5'\,50'',259.$$

NOTE III.

Méthode des projections.

126. On peut établir les formules fondamentales de la trigonométrie, en s'appuyant sur un théorème très-important, que nous allons faire connaître.

Considérons une ligne brisée ABCDEF et un axe X'X sur lequel on la projette (fig. 59 et 60); imaginons qu'un mobile parcoure cette ligne brisée toujours dans le même sens, et qu'un autre mobile se meuve sur l'axe X'X, de manière à être toujours la projection du premier; le chemin parcouru par ce deuxième mobile s'appelle la *projection* du chemin décrit par le premier, et on convient de plus, que la projection d'un côté de la ligne brisée sera *positive* ou *négative* suivant qu'elle sera décrite dans un sens ou dans l'autre par le mobile-projection. Supposons, par exemple, que X'X soit le sens positif, alors dans la fig. 59, les projections de tous les côtés seront positives, et dans la fig. 60, les projections des côtés AB, BC et DE seront positives, et celles des côtés CD et EF seront négatives. En appelant alors a, b, c, d, e les côtés de la ligne brisée, a', b', c', d', e' leurs projections définies comme nous venons de le faire, nous aurons dans la fig. 60 :

$$a' = +\mathrm{A'B'};\ b' = +\mathrm{B'C'};\ c' = -\mathrm{C'D'};\ d' = +\mathrm{D'E'};\ e' = -\mathrm{E'F'}.$$

Si nous joignons les extrémités A et F de la ligne brisée, la droite AF ferme le contour, et si nous supposons de même cette droite parcourue par un mobile qui a le même point de départ que celui qui décrit la ligne brisée, nous sommes conduits à faire sur la projection de cette droite la même convention que sur celles des côtés de la ligne brisée, c'est-à-dire qu'on lui donnera le signe + quand elle sera dirigée de X' vers X, le signe — quand elle sera dirigée en sens contraire. Dans les deux fig. 59 et 60, la projection de AF est positive.

127. Théorème des projections. — *Si on projette sur un même axe une ligne brisée, et la ligne droite qui ferme le contour, la projection de la ligne droite est égale à la somme algébrique des projections des côtés de la ligne brisée.*

Je suppose en premier lieu (fig. 59), que les projections de tous les côtés soient positives; la projection de la ligne droite qui ferme le contour le sera aussi, et l'on aura :

$$A'F' = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F'.$$

Supposons maintenant (fig. 60) que les projections des côtés ne soient pas toutes positives. Je prends sur l'axe X'X un

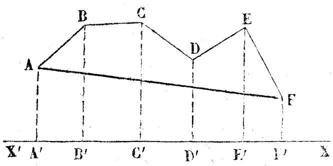

Fig. 59.

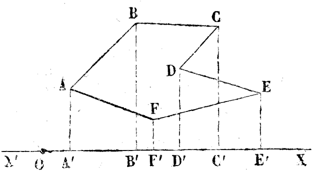

Fig. 60.

point O assez éloigné vers la gauche pour que le mobile-projection qui va de A′ en B′, de B′ en C′, etc., reste toujours à la droite du point O, et je désigne par m la distance de cette origine O au point A′. Cherchons quelle sera la distance du mobile au point O à la fin de son mouvement; la distance initiale est m, et lorsque le mobile s'éloigne de A′, c'est-à-dire quand la projection considérée est positive, la distance du mobile au point O s'accroît de tout le chemin parcouru; elle diminue, au contraire, quand le mobile se rapproche de A′, c'est-à-dire décrit une projection négative; ainsi dans la figure, on a :

$$OF' = m + A'B' + B'C' - C'D' + D'E' - E'F';$$

ou bien, en se rappelant les conventions faites sur les signes des projections,

$$OF' = m + a' + b' + c' + d' + e'.$$

Considérons maintenant le mobile qui décrit la projection de la ligne droite AF, et soit l' cette projection prise avec le signe convenable; on verrait de même que la distance finale de ce mobile au point O est

$$OF' = m + l'.$$

Égalons ces deux valeurs de OF′, et nous aurons

$$l' = a' + b' + c' + d' + e' :$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *La somme des projections des côtés d'un polygone fermé sur un axe quelconque, est nulle.*

Il suffit, pour le voir, de supposer que la ligne brisée considérée dans le théorème précédent se ferme ; alors $l' = 0$, et on a :

$$a' + b' + c' + d' + e' = 0.$$

128. Expression analytique du théorème des projections.—Nous avons démontré, en nous appuyant uniquement sur la définition du cosinus (nº **77**), que *la projection d'une ligne sur un axe est égale à la longueur de cette ligne multipliée par le cosinus de l'angle aigu qu'elle forme avec l'axe.* Nous allons généraliser cette expression de la projection d'une droite sur un axe, de manière que chaque projection soit obtenue avec le signe convenable.

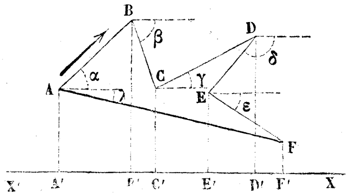

Fig. 61.

Considérons la ligne brisée ABCDEF, et l'axe X′X, et supposons toujours qu'un mobile parcoure cette ligne brisée dans le même sens ; j'appellerai *angle d'un côté avec l'axe* l'angle aigu ou obtus que forme la direction suivant laquelle ce côté est parcouru par le mobile avec la direction positive de l'axe X′X. En adoptant cette définition, je vais démontrer que *la projection d'un côté quelconque de la ligne brisée est représentée avec le signe convenable par le produit qu'on obtient en multipliant ce côté par le cosinus de l'angle qu'il forme avec l'axe.*

En effet, prenons d'abord un côté dont la projection soit positive, comme AB ; quand le mobile marche de A vers B, sa projection se meut, par hypothèse, de X′ vers X ; donc le point B est à droite de la perpendiculaire AA′ menée à l'axe par le point A ; par conséquent l'angle de la direction AB avec la direction X′X est aigu, et son cosinus est positif ; en désignant cet angle par α, le côté AB par a, et sa projection par a', on aura :

$$a' = a \cos \alpha.$$

Prenons maintenant un côté DE dont la projection soit négative, la direction DE fera alors avec X′X un angle obtus, dont le cosinus sera négatif; en le désignant par δ, l'angle aigu formé par la ligne DE avec l'axe sera égal à $180^0 - \delta$, et en vertu du nº **77**, la *valeur absolue* de la projection sera égale à DE cos $(180^0 - \delta)$; mais cette projection doit être affectée du signe —; nous aurons donc :

$$d' = -d\cos(180^0 - \delta) = d\cos\delta$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là qu'en appelant a, b, c... les côtés de la ligne brisée, l la longueur de la ligne qui ferme le contour, a', b', c', ... l' les projections de ces lignes, α, β, γ... λ les angles qu'elles forment avec l'axe, on aura toujours avec le signe convenable :

$$a' = a\cos\alpha,$$

$$b' = b\cos\beta,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$l' = l\cos\lambda,$$

et, en vertu du théorème des projections,

$$l\cos\lambda = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta + e\cos\varepsilon.$$

Telle est la formule qui va nous servir à établir d'une manière très-simple les relations fondamentales de la trigonométrie rectiligne, et qui est aussi d'un grand usage dans d'autres parties des mathématiques.

129. Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.

On établit d'abord, comme au nº **25**, la formule

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Je considère maintenant un arc AM quelconque, sa sécante et sa tangente, et je projette la sécante sur le diamètre AA′, en convenant que les projections seront positives quand elles seront dirigées de A′ vers A; la projection de OT sera égale à 1 dans tous les cas, parce que OT fait toujours un angle aigu avec OA : on aura donc :

$$\mathrm{OT}\cos\mathrm{TOA} = 1.$$

Je distingue maintenant deux cas, suivant que la sécante est positive ou négative.

1° Si la sécante est égale à $+$ OT, l'extrémité M de l'arc x est sur la ligne OT elle-même, et le cosinus de l'arc x est le même que celui de l'angle TOA ; on a donc :

$$\text{séc}\, x \cos x = 1.$$

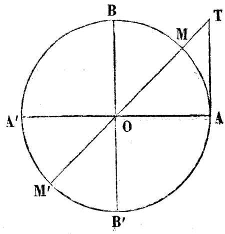

Fig. 62.

2° Je suppose que séc x soit égale à $-$ OT; alors l'extrémité de l'arc x est sur le prolongement de TO, en M'; par suite, le cosinus de l'arc x est égal et de signe contraire au cosinus de l'arc AM ou de l'angle TOA, et l'on a :

$$-\,\text{OT} \cos x = 1\,;$$

mais $\text{OT} = -\,\text{séc}\, x$; donc

$$\text{séc}\, x \cos x = 1.$$

On a donc, dans tous les cas,

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x},$$

ce qui est la formule [3] du n° **25**.

Projetons maintenant la ligne OT sur le diamètre BB', en adoptant la direction B'B pour celle des projections positives; la projection de OT représentera alors tang x avec le signe convenable, et on aura :

$$\text{OT} \cos \text{BOT} = \text{tang}\, x,$$

que l'angle BOT soit aigu ou obtus; je distingue alors deux cas suivant que la sécante de l'arc x est positive ou négative.

1° Séc $x = +$ OT; l'extrémité de l'arc x est alors sur la ligne OT elle-même, et l'angle BOT est égal à BOM, c'est-à-dire au complément de l'arc x; donc $\cos \text{BOT} = \sin x$, et par suite,

$$\text{séc}\, x \sin x = \text{tang}\, x.$$

2° Séc $x = -$ OT; l'extrémité de l'arc x est alors sur le prolongement de TO, en M', et l'arc BM', qui est le complément de l'arc x, a son cosinus égal et de signe contraire à celui de l'arc BM ou de l'angle BOT; on a donc : $\cos \mathrm{BOT} = -\cos \mathrm{BM}' = -\sin x$; d'ailleurs $\mathrm{OT} = -\text{séc}\, x$; donc on a encore :

$$\text{séc}\, x \sin x = \text{tang}\, x.$$

Je remplace séc x par sa valeur $\frac{1}{\cos x}$, et j'obtiens la formule générale :

$$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

c'est la formule [2] du nº **25**. Les formules [4] et [5] se déduiraient des précédentes par le changement de x en $\frac{\pi}{2} - x$, comme on l'a déjà fait au nº **25**.

130. Formules pour l'addition et la soustraction des arcs.

Je vais chercher d'abord la formule qui fait connaître $\cos(a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.

A partir de l'origine des arcs A, je porte l'arc a sur la circonférence; et je suppose que son extrémité soit le point C; puis à partir du point C, je porte, dans le sens convenable, l'arc b; soit M son extrémité : l'arc $a+b$ aura pour origine le point A, et pour extrémité le point M. Du point M, j'abaisse sur OC la perpendiculaire MP, et je joins OM; cette ligne ferme le contour OPM; donc, si on projette ce contour et la ligne droite OM sur l'axe A'A, on aura (nº **127**):

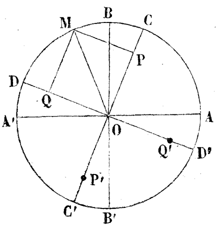

Fig. 63.

$$\text{Project. de OM} = \text{Project. de OP} + \text{Project. de PM}.$$

Je supposerai que A'A soit le sens des projections positives, et je vais évaluer chacun des termes de l'égalité précédente.

La projection de OM sera toujours, avec le signe convenable, $\cos(a+b)$; car l'arc $(a+b)$ a son extrémité en M, et d'après la définition même du cosinus, le cosinus de l'arc $(a+b)$ sera la projection de OM sur le diamètre AA', prise avec le signe $+$, si elle est comptée sur OA, et avec le signe —, si elle est portée en sens contraire; donc, dans tous les cas,

$$\text{Project. de OM} = \cos(a+b).$$

Je cherche maintenant la projection de OP; supposons d'abord que le point C, extrémité de l'arc a, soit sur la demi-circonférence BAB′, et que le point P tombe entre O et C; alors OP $= \cos b$, et la projection de OP sur OA est positive et égale à OP cos COA $=$ OP $\cos a = \cos a \cos b$; je dis qu'on aura toujours :

$$\text{Project. de OP} = \cos a \cos b.$$

En effet, si le point P tombait en P′ sur OC′ et à une distance du point O égale à OP, la projection changerait de signe sans changer de valeur absolue; mais en même temps $\cos b$ change de signe en gardant la même valeur absolue; donc l'expression précédente ne cesse pas d'être exacte, lorsque $\cos b$ devient négatif, en gardant la même valeur absolue. Pareillement, si le point C passe à gauche du diamètre BB′, dans la position symétrique, le point P restant fixe, la projection de OP sur AA′ garde la même valeur, et change seulement de signe, et comme il en est de même de $\cos a$, la projection de OP est encore égale à $\cos a \cos b$. Donc enfin, dans tous les cas,

$$\text{Project. de OP} = \cos a \cos b.$$

Il nous reste à évaluer la projection de PM; pour cela, je construis un arc ACD égal à $\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$, et je mène le diamètre DD′; puis du point M, j'abaisse MQ perpendiculaire sur DD′; les deux droites PM et OQ étant égales, parallèles et de même sens, auront des projections égales et de même signe sur le diamètre AA′; tout revient donc à trouver l'expression de la projection de OQ. Supposons d'abord que le point M soit sur la demi-circonférence CDC′, alors OQ $= \sin b$; d'ailleurs, la projection de OQ est, avec le signe convenable, OQ $\times$ cos AOD $=$ OQ $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \sin b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$; car si le point D tombait à droite du diamètre BB′, la projection de OQ serait positive, comme le cosinus de AOD; et si le point D se trouve à gauche du diamètre BB′, la projection de OQ sera négative et égale à

$-$ OQ $\times$ cos DOA' $=$ OQ cos (180° $-$ DOA') $=$ OQ cos DOA $=$ $\sin b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$. Supposons maintenant que $\sin b$ change de signe sans changer de valeur absolue, le point Q viendra alors en Q', sur le prolongement de OD, et la projection conservera la même valeur absolue, et changera de signe; donc elle sera encore égale à $\sin b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$. En résumé, on aura toujours :

$$\text{Project. de PM} = \sin b \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin a \sin b.$$

Remplaçons maintenant dans l'égalité primitive, les projections des lignes OM, MP et PM par leurs valeurs, et nous aurons la formule tout à fait générale :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Si dans cette équation on change b en $-b$, elle devient :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Enfin, dans les deux formules précédentes, remplaçons a par $\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$, et nous aurons :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b;$$

ou,

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;$$

et ces trois dernières formules, déduites d'une formule tout à fait générale, sont vraies elles-mêmes, quels que soient les arcs a et b. Ce sont les formules [1], [2], [3] et [4] établies par une autre méthode dans les numéros **30** et **31**.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE II.

TABLES TRIGONOMÉTRIQUES.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DES TRIANGLES.

NOTE I.

NOTE II.

NOTE III.

9235. — Imprimerie générale de Ch. Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.