ÉCOLE NORMALE SPÉCIALE DE CLUNY

COURS DE MÉCANIQUE

PURE ET APPLIQUÉE

PROFESSÉ

PAR M. CH. VIRY

INGÉNIEUR CIVIL
ANCIEN ÉLÈVE ET ANCIEN RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, ETC., ETC.

TOME DEUXIÈME

DYNAMIQUE PURE D'UN POINT ET DES SYSTÈMES MATÉRIELS

Ce Cours a été entièrement recueilli et rédigé par les élèves de M. VIRY

NOTAMMENT PAR

MM. JURISCH, MULLER, FONTAINE, BUROT, RÉGNIER

Il s'adresse aux professeurs de l'Enseignement special et de toutes les Écoles professionnelles, aux elèves des Écoles Centrale, Normale et Polytechnique, ainsi qu'aux Ingénieurs, Architectes et Constructeurs

PARIS

VICTOR MASSON ET FILS

PLACE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE

1870

Dynamique

Introduction.

Messieurs,

Dans le cours de l'an dernier, nous avons étudié la Statique pure et appliquée, la Cinématique pure et appliquée, en d'autres termes, nous avons étudié 1°. La force envisagée en elle même comme une simple grandeur géométrique 2°. Le mouvement considéré en lui même comme une simple relation entre les deux conceptions d'espace et de temps. – Donc jusqu'alors nous n'avons fait à proprement parler que de la Géométrie, de la Géométrie à quatre dimensions, il est vrai, la notion du temps venant s'ajouter ici à la notion d'étendue. Dans le cours de cette année, Messieurs, nous allons entrer définitivement dans le vrai domaine de la Mécanique, c'est à dire dans l'étude des relations qui lient la force au mouvement, la cause avec l'effet, ou pour parler plus exactement philosophiquement dans l'étude des relations qui identifient dans une unité indissoluble (l'élément matériel, l'élément de masse qu'il serait plus juste d'appeler l'élément dynamique) la force et le mouvement, la cause et l'effet. – Étude constituant ce qu'on a appelé la Dynamique.

Mais avant d'en arriver là et comme transition entre le cours de l'an passé et celui de cette année, ou comme Introduction à la Dynamique nous rappellerons en les complétant les notions que nous avons acquises au début de la Cinématique. – Tel sera, Messieurs, l'objet de la 1ère Section de notre enseignement de cette année. – La seconde section comprendra toute la Dynamique pure et enfin la 3e Section comprendra toute la Dynamique appliquée.

Les sujets traités dans ces trois sections ainsi que l'ordre suivi sont indiqués dans le tableau ci joint.

(1) E.2.

ÉCOLE NORMALE SPÉCIALE DE CLUNY.

Ensemble du Cours de Mécanique de 2e Année.

Professé par Mr Vivy, Ingénieur-civil, ancien élève et ancien Répétiteur de Mécanique à l'École Centrale, Agrégé de l'Université.

1868. DYNAMIQUE — DYNAMIQUE 1869.

1ère Section — Introduction à la Dynamique

- **Ch. Ier — Révision de la théorie de la composition et de la décomposition des mouvements d'un point matériel**
  - Art Ier. Vitesse et accélération tangentielle dans le mouvement curviligne varié
  - Art II. Composition et décomposition des vitesses
  - Art III. De l'accélération totale dans le mouvement curviligne varié
  - Art IV. Solution du double problème général de la cinématique pure d'un point matériel
- **Ch. II. — Composition des accélérations totales et applications.**
  - Art Ier. Théorie de la composition et de la décomposition des accélérations totales.
  - Art II. Rayons de courbure de certaines courbes. – Durée de l'oscillation du pendule cycloïdal et du pendule simple.
  - Art III. Théorèmes de Galilée.

2me Section — Dynamique pure.

1ère Partie — Dynamique pure d'un point matériel

- **Chapitre Ier — Les principes**
  - Art Ier. Principe d'inertie d'où résulte la notion de force. Principe de Newton. Égalité de l'action et de la réaction.
  - Art II. Principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis. Conséquences. Mouvement uniformément varié d'un point soumis à une force constante. Mouvement parabolique des projectiles.
  - Art III. Principe de l'indépendance des effets des forces d'où résulte le principe dominant toute la mécanique: La proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles impriment à un même point matériel.
  - Art IV. Conséquences de ce principe. – Masse des corps. Une force a pour mesure le produit de la masse sur laquelle elle agit par l'accélération totale qu'elle lui imprime.
  - Art V. Composition et décomposition des forces déduites du principe de la proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles impriment à un même point matériel.
  - Art VI. Applications des principes précédents.
  - Art VII. Solution générale du double problème constituant la dynamique pure d'un point matériel.
- **Chapitre II — Théorèmes généraux de la Dynamique pure d'un point matériel**
  - Art Ier. Théorème des quantités de mouvement.
  - Art II. Théorème des moments des quantités de mouvement.
  - Art III. Théorème du travail ou des puissances vives.
  - Art IV. Applications du théorème du travail.
- **Chapitre III. — Étude du mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre.**
  - Art Ier. Pour traiter la question aux forces réelles il faut ajouter les réactions dues aux liaisons. Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe plane donnée.
  - Art II. Applications. – Rotation de la terre. – Pendules.
  - Art III. Solution complètement générale de la question.
- **Ch IV. Principe de d'Alembert appliqué à un seul point matériel**
  - Art Ier. Principe de d'Alembert.
  - Art II. Applications du principe de d'Alembert.
- **Ch V. — Étude des mouvements relatifs**
  - Art Ier. Forces apparentes dans le mouvement relatif.
  - Art II. Applications. – Modérateurs. – Turbines.

2ème Partie — Dynamique pure des systèmes matériels

- **Ch Ier. — Extension du principe de d'Alembert aux systèmes matériels**
  - Art Ier. Extension du principe de d'Alembert aux systèmes matériels.
  - Art II et Art III. Applications. Étude du mouvement d'un solide assujetti à tourner sans glisser autour d'un axe.
  - Art IV. Moments d'inertie.
  - Art V. Pendule composé. – Centre de percussion.
- **Ch II. — Extension du théor. des qtés de mouvement aux systèmes matériels**
  - Art Ier. Théorème du mouvement du centre de gravité.
  - Art II. Théorème des quantités de mouvement.
- **Ch III. — Extension du théorème du travail aux systèmes matériels**
  - Art Ier. Théorème des puissances vives.
  - Art II. Forme de l'équation du travail dans le cas de la translation et de la rotation simple.
  - Art III. Forme de cette même équation dans le cas du mouvement quelconque.
  - Art IV. Conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide.
- **Ch IV. — Application des théorèmes généraux qui précèdent à l'analyse du choc des corps. Théorèmes de Carnot et de Duhamel.**
  - Art Ier. Choc direct entre deux corps mous ou privés complètement d'élasticité. Théorème de Carnot.
  - Art II. Théorème de Duhamel et applications.
  - Art III. Choc direct entre deux corps parfaitement élastiques.
  - Art IV. Durée et intensité du choc. Déformation des surfaces en contact.
  - Art V. Applications. Pendule balistique.

3me Section — Dynamique appliquée

1ère Partie — Introduction à la dynamique des machines

- **Ch Ier. Considérations générales sur les machines**
  - Art Ier. Théorème de la transmission du travail dans les machines.
  - Art II. Discussion de l'équation à laquelle conduit ce théorème.
  - Art III. Nécessité du régulateur et du modérateur.
- **Ch. II. — Des masses en mouvement. Théorie dynamique des volants et contrepoids.**
  - Art Ier. Variations des actions mutuelles entre les organes d'une machine. Nécessité du volant pour les restreindre.
  - Art II. Mouvement périodiquement uniforme des machines. Nécessité du volant pour régulariser ce mouvement.
  - Art III. Contrepoids considérés comme organes régularisateurs de mouvement.
  - Art IV. Contrepoids considérés comme organes assurant la stabilité des machines en mouvement.
- **Ch. III. — Théorie dynamique des Modérateurs.**
  - Art Ier. Théorie du pendule conique ordinaire. – Poids des boules.
  - Art II. Inconvénients du pendule conique et de ses congénères.
  - Art III. Modérateurs à air, à eau, à mouvement d'horlogerie.
  - Art IV. Modérateurs agissant sur le travail résistant soit utile, soit nuisible.

2e Partie — Étude des résistances de toute nature s'opposant au mouvement des machines

- **Ch. Ier. — Théorie du frottement de glissement dans les solides, les liquides et les Gaz.**
  - Art Ier. Nature physique de la résistance dite de glissement. – Loi et expression analytique de cette résistance.
  - Art II. Mouvement d'un corps sur un plan horizontal en tenant compte du frottement. Travail absorbé dans le guidage de la tige du piston des machines à vapeur.
  - Art III. Mouvement d'un corps sur un plan incliné en tenant compte du frottement.
  - Art IV. Applications: Frottement dans la presse à coin, la vis à filet carré, la vis sans fin.
  - Art V. Frottements dans les engrenages plans et coniques.
  - Art VI. Frottement dans les poulies, le treuil, les boutons de manivelle, les excentriques, crapaudines, colliers &c.
  - Art VII. Frottement de glissement dans les liquides et les gaz. Lois expérimentales.
- **Chap. II. Théorie du frottement de roulement.**
  - Art Ier. Nature physique de la résistance dite de roulement. Loi et expression analytique de cette résistance.
  - Art II. Roulement uniforme puis varié d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan horizontal. Des effets dans le jeu du billard. Transport des matériaux à l'aide de rouleaux d'interposition. Plaques tournantes.
  - Art III. Roulement uniforme puis varié d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan incliné. Applications.
- **Chap III. Frottement mixte de roulement et de glissement.**
  - Art Ier. Du frottement dans les roues de voiture à essieu fixe: 1° sur un plan horizontal 2° sur un plan incliné. Applications. Tirage des voitures, adhérence dans les locomotives. Travail d'une locomotive remorquant un train.
  - Art II. Frottement des tourillons reposant sur galets croisés. Applications: Machine d'Atwood, grosse cloche de Metz. Frottement dans le transport sur galets.
- **Ch. IV. — Théorie du frottement des cordes.**
  - Art Ier. Théorie du glissement des cordes. Applications.
  - Art II. Théorie de la raideur des cordes. Applications.
- **Chap V.** — Théorie de la résistance des milieux.
- **Chap VI.** — Théorie des pertes de puissance vive dues aux chocs et vibrations.
- **Chap VII. Applications utiles de toutes les résistances étudiées plus haut.**
  - Art Ier. Applications utiles du frottement de glissement dans les solides.
  - Art II. Applications utiles du frottement de glissement des cordes.
  - Art III. Applications utiles du frottement de roulement.
  - Art IV. Applications utiles de la résistance des milieux.
  - Art V. Applications utiles de la résistance due au choc.

3e Partie — Étude des puissances motrices

1re Série. (Voir Tableau A. 4e Volume)
Pneumatique et Hydraulique

2e Série (Voir Tableau B. 5me Volume)
Thermodynamique et Electrodynamique.

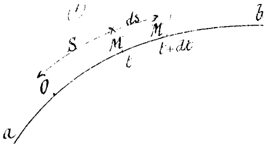
1ère Section

Introduction à la Dynamique

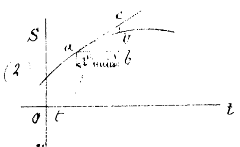
Chapitre 1er

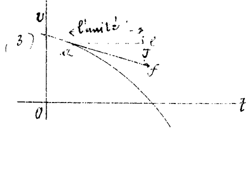
Révision de la théorie de la composition et de la décomposition des mouvements d'un point matériel.

Article 1er — Vitesse et accélération tangentielle dans le mouvement curviligne varié.



Vitesse — on a b la trajectoire curviligne d'un mobile. Supposons que ce mobile décrive cette trajectoire d'un mouvement varié quelconque et soit s la distance de ce mobile à l'origine fixe O à l'époque t ; à l'époque $t+dt$ sa distance au même point sera devenue $s+ds$: si nous considérons le rapport $\frac{ds}{dt}$ de l'accroissement de l'espace correspondant à l'accroissement infiniment petit dt du temps nous avons dit en 1ère année que ce rapport représentait l'accroissement moyen de l'espace pendant le temps dt rapportée à l'unité de temps ou ce qu'on nomme la vitesse v à l'époque t. Nous avons fait voir de plus que si la loi du mouvement du mobile sur sa trajectoire était donnée par une relation entre l'espace et le temps $s = f(t)$ relation représentée par la courbe indiquée (2) ce rapport $\frac{ds}{dt}$ ou la vitesse v était donnée géométriquement par le coefficient angulaire bc de la tangente à cette courbe représentative de la loi des espaces, de telle sorte que si sur un autre axe des temps, on porte en ordonnées les diverses valeurs de ces coefficients angulaires on aura une courbe donnant à chaque instant la valeur de la vitesse du mobile, c'est à dire la courbe représentative de la loi des vitesses.





Réciproquement, on a fait voir comment on remonte géométriquement de la loi des vitesses représentée par la courbe (3) à la loi des espaces représentée par la courbe (2)

Il s'agit cette année de résoudre ce même double problème analytiquement

1° La loi des espaces nous est donnée non plus par une courbe mais par la relation:

$$S = f(t)$$

Il s'agit d'en déduire analytiquement la loi des vitesses. — Or la vitesse v n'étant autre chose que le rapport $\frac{ds}{dt}$ de l'accroissement de la fonction s, à l'accroissement infiniment petit dt de la variable t est ce que nous avons appelé dans nos conférences de calcul infinitésimal, la dérivée de la fonction s par rapport au temps t laquelle se désigne par le symbole $f'(t)$ On aura donc:

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

Quelque soit la fonction primitive $s = f(t)$, les règles que nous avons données permettent toujours d'en déduire la fonction dérivée $f'(t)$ qui exprime la vitesse <u>Ex</u> — Ainsi soit: $S = S_0 + v_0 t + J_0 \frac{t^2}{2}$:

la loi donnée des espaces (Mouvement uniformément accéléré)

On en déduit en appliquant ces règles:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + J_0 t$$

2° Réciproquement on nous donne la loi analytique des vitesses.

$$v = f'(t)$$

on veut en déduire celle des espaces: Il suffit de remarquer que $v = \frac{ds}{dt}$ on a donc:

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) \text{ d'où } ds = f'(t)\,dt$$

et en intégrant $\quad s = \int_0^t f'(t)\,dt$

or, les règles données dans nos conférences nous permettent d'effectuer cette intégration dans les cas les plus ordinaires. Soit $f(t)$ le résultat de cette opération on aura donc: en ajoutant la constante C $\quad s = f(t) + C$

Cette constante C se détermine d'ailleurs au moyen des circonstances initiales du mouvement du mobile. Ainsi supposons que lorsqu'on commence à compter le temps c'est à dire pour $t = 0$ le mobile soit à la distance S_0 de l'origine fixe O, on aura pour déterminer cette constante C la condition:

$$S_0 = f(0) + C \quad \text{d'où} \quad C = S_0 - f'(0)$$

Ex. soit donné $\frac{ds}{dt} = v = v_0 + J_0 t$ (Mouvement uniformément accéléré)

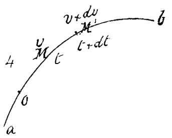
On en déduit : $s = \int_0^t (v_0 + J_0 t)\, dt = v_0 t + J_0 \frac{t^2}{2} + C$

Or pour $t = 0$, $s =$ je suppose s_0 d'où pour déterminer la constante C la condition

$$s_0 = 0 + C$$

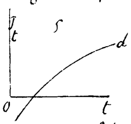
On a donc enfin. $s = s_0 + v_0 t + J_0 \frac{t^2}{2}$

Accélération tangentielle dans le mouvement curviligne varié.



Dans le mouvement varié, la vitesse variant à chaque instant soit v la vitesse du mobile à l'époque t, à l'époque $t + dt$. Cette vitesse sera $v + dv$. Si nous considérons le rapport $\frac{dv}{dt}$ de l'accroissement de la vitesse répondant à l'accroissement infiniment petit dt de temps, nous avons vu en 1ère année que ce rapport représentait l'accroissement moyen de la vitesse pendant le temps dt rapporté à l'unité de temps ou ce qu'on nomme l'accélération J_t à l'époque t. Nous avons fait voir de plus que si la loi du mouvement du mobile sur sa trajectoire était donnée par une relation entre la vitesse et le temps $v = f'(t)$

relation représentée par la courbe (3), ce rapport $\frac{dv}{dt}$ ou l'accélération J_t était donnée géométriquement par le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe représentative



de la loi des vitesses. De telle sorte que si sur un autre axe des temps (5) on porte en ordonnées les diverses valeurs de ces coefficients angulaires on aura une courbe donnant à chaque instant la valeur de l'accélération du mobile, c'est à dire la courbe représentative de la loi des accélérations.

Réciproquement, on a fait voir comment on remontait géométriquement de la loi des accélérations représentée par la courbe (5) à la loi des vitesses représentée par la courbe (3)

Résolvons ce même double problème analytiquement :

1° La loi des vitesses supposée déduite si l'on veut, de la loi des espaces est donnée par la relation analytique : $v = f'(t)$

On demande d'en déduire la loi analytique des accélérations. Or l'accélération J_t n'étant autre chose que le rapport $\frac{dv}{dt}$ de l'accroissement de la fonction v, à l'accroissement infiniment petit dt de la variable t est la dérivée de v par rapport à t : on a donc :

$$J_t = \frac{dv}{dt} = f''(t)$$

$f''(t)$ dérivée première de $f'(t)$ elle même dérivée première de $f(t)$ est dite la dérivée seconde de la fonction $s = f(t)$

Ex — On donne $v = v_0 + J_0 t$ (Mouvement uniformément accéléré)

on en déduit $J_t = \frac{dv}{dt} = J_0$ Constante

Réciproquement — si on donne la loi analytique des accélérations.

$$J_t = f''(t)$$

on peut en déduire celle des vitesses et par suite celle des espaces. Il suffit de remarquer que $J_t = \frac{dv}{dt}$, on a donc :

$$\frac{dv}{dt} = f''(t) \text{ d'où } dv = f''(t)\,dt$$

$$\text{d'où } v = \int_0^t f''(t)\,dt + C'$$

Cette constante se détermine toujours au moyen des circonstances initiales du mouvement du mobile

Ex Soit donné $\frac{dv}{dt} = J_0$ On en déduit :

$$v = \int_0^t J_0\,dt + C' = J_0 t + C'$$

Or pour $t = 0$ v égale je suppose v_0 on a donc pour déterminer la constante C' la condition $v_0 = 0 + C'$

Par suite on a enfin : $v = v_0 + J_0 t$

Ainsi donc en résumé, étant donnée l'une quelconque des trois lois du mouvement d'un mobile soit géométriquement par une courbe, soit analytiquement par une équation, il sera toujours facile d'en déduire les deux autres.

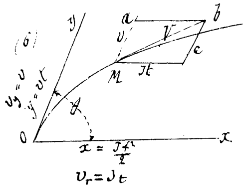
Remarque — Remarquons que la quantité désignée par J_t représentant l'accroissement de la vitesse dans le temps dt, cet accroissement étant rapporté à l'unité de temps est toujours dirigée suivant la tangente à la trajectoire parcourue par le mobile, c'est pourquoi on lui donne le nom d'accélération tangentielle pour la distinguer d'une autre grandeur, l'accélération totale dont nous allons bientôt acquérir la notion.

Cette accélération tangentielle ne donne aucune idée sur la nature de la trajectoire parcourue, elle ne fait que définir le mouvement du mobile sur cette trajectoire

Article II. — Composition et Décomposition des vitesses.

1° Composition des vitesses — Après avoir défini la vitesse et l'accélération tangentielle dans le mouvement curviligne varié nous avons donné la théorie de la composition et de la décomposition des mouvements d'un point matériel. — Nous avons d'abord fait voir que lorsqu'un point matériel était animé de plusieurs mouvements simultanés, l'un relatif, les autres d'entraînement, ces divers mouvements se composaient en un seul dit absolu dont la vitesse s'obtenait à chaque instant par la règle dite du polygone des vitesses composantes.

I. Supposons par exemple qu'un mobile soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme : $y = vt$ (1) suivant oy, pendant que cette droite est emportée en translation rectiligne et d'un mouvement uniformément accéléré $x = J\frac{t^2}{2}$ (2) suivant ox — On sait que dans ce cas, la trajectoire absolue décrite par le mobile



est une parabole dont l'équation s'obtient en éliminant t entre (1) et (2) ce qui donne :

$$y^2 = 2\frac{v^2}{J}x$$

Quant à la vitesse absolue du mobile en un point quelconque M de sa trajectoire, il suffira en vertu de la règle rappelée de mener par le point M des droites égales et parallèles aux vitesses $v_x = Jt$ $v_y = v$ possédées simultanément par le mobile à l'époque t en vertu de ses deux mouvements composants, la diagonale Mb du parallélogramme construit sur ces vitesses sera en grandeur et en direction, la vitesse cherchée V, comme vérification elle sera nécessairement tangente à la parabole en M

Analytiquement sa grandeur sera donnée par la relation :

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 + 2v_x v_y \cos\theta = J^2t^2 + v^2 + 2v.Jt\cos\theta$$

Dans le cas particulier où les axes seraient rectangulaires la vitesse serait donnée en grandeur par la relation

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 = v^2 + J^2t^2$$

Quant à sa direction, elle est déterminée par l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale, lequel est donné par les relations :

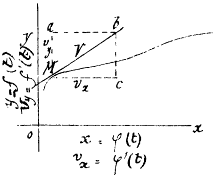
$$\left.\begin{array}{l} v_x = V\cos\alpha \\ v_y = V\sin\alpha \end{array}\right\} \text{d'où } tg\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v}{Jt}$$

II — D'une manière générale, soient

$$(1)\ y = f(t) \qquad (2)\ x = \varphi(t)$$

Les équations de deux mouvements rectilignes simultanés rectangulaires dont est animé un point matériel — Ces deux relations définissent parfaitement le mouvement réel ou absolu du point dans l'espace. En effet en éliminant le temps entre ces deux relations, on a d'abord l'équation de la trajectoire parcourue; quant à la vitesse absolue V tangente au point quelconque M de cette trajectoire, elle s'obtiendra toujours au moyen du rectangle des vitesses v_x v_y du mobile dans chacun de ses mouvements composants. La grandeur de cette vitesse V sera donc donnée

(7)



par la relation: (3) $V^2 = v_x^2 + v_y^2$

et sa direction par la relation:

$$(4) \quad tg\,\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

D'ailleurs les vitesses composantes v_x, v_y s'obtiennent aisément au moyen des relations (1) et (2)

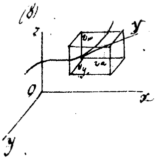
On a en effet, en vertu de ce qui a été dit plus haut: $v_y = f'(t) \quad v_x = \varphi'(t)$

Les relations (3) et (4) deviennent donc:

$$V = \sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2} \qquad tg\,\alpha = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$$

Supposons que le mobile soit soumis à trois mouvements simultanés rectangulaires définis par les lois: (1) $x = f(t)$ (2) $y = \varphi(t)$ (3) $z = \psi(t)$ suivant les axes $ox, oy\, oz$

(8)



Je dis que les équations de ces trois mouvements définissent parfaitement le mouvement absolu du solide dans l'espace. En effet en éliminant t entre (1) et (2) puis entre (2) et (3) on a les équations:

$$F(x, y) = 0$$

$$F_1(y, z) = 0$$

des projections de la trajectoire cherchée sur les plans des $x\,y$ et des $y\,z$, cette trajectoire est donc déterminée — Quant à la vitesse absolue V tangente en un point M de cette trajectoire, elle s'obtient en composant les vitesses simultanées v_x, v_y, v_z dont est animé à l'époque t le mobile en vertu de ses trois ~~mouvements~~ mouvements composants on aura donc:

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

mais $v_x = f'(t)$ $v_y = \varphi'(t)$ $v_z = \psi'(t)$ donc:

$$V = \sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

D'ailleurs en appelant $\alpha\,\beta\,\gamma$ les angles de V avec les trois axes on a:

$$V_x = V\cos\alpha \qquad v_y = V\cos\beta \qquad v_z = V\cos\gamma$$

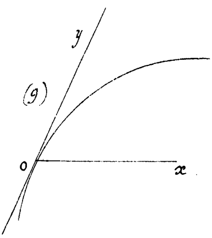
relations déterminant la direction de V

2° Décomposition des vitesses.

Si plusieurs mouvements simultanés se combinent en un seul dont la vitesse à chaque instant s'obtient par la règle du polygone. Réciproquement, on conçoit qu'un mouvement quelconque puisse être considéré comme résultant de deux ou trois (si la trajectoire est gauche) mouvements simultanés rectilignes suivant des directions assignées la vitesse de chacun de ces mouvements composants s'obtenant à chaque instant en décomposant la vitesse absolue parallèlement aux directions assignées suivant la règle du polygone.

Ainsi par exemple, on a vu qu'un mobile animé de deux mouvements rectilignes simultanés, l'un uniforme, l'autre uniformément accéléré décrit réellement dans l'espace une parabole dont la vitesse s'obtient au moyen des vitesses composantes par la règle du parallélogramme

Supposons actuellement une trajectoire parabolique décrite par un point matériel



(9)

eh bien, on pourra considérer ce mouvement unique comme dû à deux mouvements rectilignes simultanés, l'un uniforme suivant la tangente oy, par exemple, l'autre uniformément accéléré suivant une certaine direction centrale ox.

D'une manière générale soit un mouvement absolu quelconque supposé plan, on peut le considérer comme résultant de deux mouvements composants rectilignes rectangulaires suivant les directions ox, oy, les vitesses v_x v_y de chacun de ces mouvements s'obtenant à chaque instant en décomposant la vitesse absolue V (tangente à la trajectoire et supposée également connue) parallèlement aux axes suivant la règle du parallélogramme, ce qui revient à projeter rectangulairement V sur ox et Oy. Ces deux mouvements composants seront dès lors parfaitement connus, ainsi le mouvement composant suivant ox sera identique à celui d'un mobile fictif qui serait à chaque instant la projection sur ox du mobile réel, la vitesse de ce mobile fictif dit mobile projection étant à chaque instant égale à la projection sur ox de la vitesse V de l'espace de même pour le mouvement composant suivant oy

Si le mouvement absolu donné est gauche, on pourra considérer ce mouvement comme dû à trois mouvements simultanés rectilignes rectangulaires suivant ox, oy, oz. On concevra d'ailleurs comme précédemment la vitesse de ces trois mouvements composants en imaginant trois mobiles fictifs dits mobiles projection, à chaque instant les projections du mobile réel sur chacun de ces trois axes, & les vitesses $v_x\, v_y\, v_z$ de chacun de ces mobiles fictifs étant à chaque instant les projections sur ox, oy, oz de la vitesse réelle V du mobile dans l'espace.

En résumant tout ce qui précède on peut donc conclure.

1° Qu'un mouvement quelconque est parfaitement défini par ses projections sur trois axes rectangulaires. — Projections données par les relations.

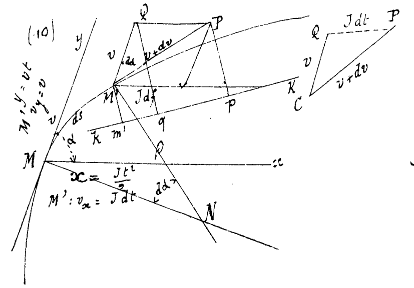
$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

2° Quand on projette un mouvement sur un axe quelconque : la vitesse du mobile projection est toujours égale à la projection de la vitesse réelle du mobile dans l'espace.

Article III. — De l'accélération totale dans le mouvement curviligne varié. — Ses composantes tangentielle et normale. — Applications.

Nous avons défini ce qu'on entendait par accélération tangentielle dans le mouvement curviligne varié. Nous avons fait voir, comment la loi de cette accélération tangentielle étant donnée. $J_t = f''(t)$

on en déduisait par deux intégrations successives la loi des vitesses et celle des espaces. — Mais ce qu'il y a à remarquer, c'est que cette simple connaissance de l'accélération tangentielle $J_t = f''(t)$ ne nous donne que les lois du mouvement du mobile, mais absolument aucune idée sur la nature de la trajectoire parcourue. — en d'autres termes — la relation $J_t = f''(t)$ s'applique aussi bien à une trajectoire rectiligne qu'à une trajectoire curviligne quelconque. — Dans cet article nous allons parler d'une nouvelle grandeur, l'accélération totale qui étant connue à chaque instant ainsi que les conditions initiales du mouvement du mobile suffira à elle seule pour déterminer à la fois : 1° la nature de la trajectoire parcourue avec son rayon de courbure en chaque point. 2° et les lois du mouvement du mobile sur cette trajectoire.



Soit M la position du mobile sur sa trajectoire à l'époque t et v sa vitesse dirigée suivant la tangente My. — A l'époque $t + dt$ le mobile sera venu en M' et sa vitesse sera devenue $v + dv$ — dirigée suivant la tangente en M' à la trajectoire.

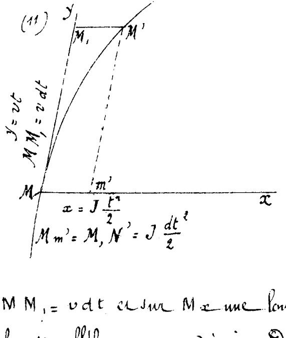
Or l'arc MM' étant infiniment petit peut être assimilé à un arc de parabole, et nous pouvons dès lors en vertu de ce que nous avons dit dans l'article précédent, le regarder comme dû à deux mouvements simultanés l'un uniforme $y = vt$ suivant la tangente My en M, l'autre uniformément varié $x = \frac{Jt^2}{2}$ suivant une certaine direction centrale Mx.

L'accélération J de ce mouvement uniformément accéléré suivant Mx, qui combiné avec le mouvement uniforme $y = vt$ suivant la tangente My oblige le mobile à parcourir l'arc de courbe MM' assimilé ainsi à un arc de parabole est ce qu'on nomme l'accélération totale du mobile à l'époque t

Par suite de la conception de ces deux mouvements simultanés donnant lieu à l'arc MM' réellement décrit, la vitesse $v + dv$ du mobile arrivé en M' est la résultante des vitesses v et Jdt du mobile dans ces deux mouvements composants ces deux vitesses étant parallèles aux directions My, Mx de ces deux mouvements.

1ère Remarque. - Réciproquement étant données les vitesses v et $v + dv$ d'un mobile M aux époques t et $t + dt$. Si par un point de l'espace C on mène deux droites CQ, CP égales et parallèles aux vitesses v et $v + dv$ la droite QP joignant les extrémités des premières sera parallèle à la direction du mouvement central $x = \frac{Jt^2}{2}$ qui combiné avec le mouvement $y = vt$ donne lieu à l'arc MM' réellement parcouru - quant à l'accélération J de ce mouvement central, elle sera égale à $\frac{PQ}{dt}$ puisque $PQ = Jdt$ - Ainsi donc la direction et l'intensité de ce mouvement central Mx est parfaitement connue à chaque instant lorsqu'on connaît les vitesses v et $v + dv$ du mobile sur la trajectoire qu'il parcourt.

2e Remarque. - On peut encore trouver la direction de ce mouvement central et par suite la direction et l'intensité de l'accélération totale de la manière suivante.

(11) 

L'élément de courbe MM' parcouru dans le temps dt pouvant être considéré comme résultant du mouvement uniforme $y = vt$ suivant la tangente My et du mouvement uniformément accéléré $x = \frac{Jt^2}{2}$ suivant la direction ox pour avoir la position M du mobile à la fin du temps dt il suffirait de prendre sur My une longueur $MM_1 = vdt$ et sur Mx une longueur $MM_1' = \frac{Jdt^2}{2}$, puis de construire sur ces deux longueurs le parallélogramme indiqué. Donc réciproquement si l'on connaît la position M' du mobile à l'époque $t + dt$ M étant la position à l'époque t, pour avoir la direction Mx du mouvement central cherché il suffira de prendre sur la tangente en M, $MM_1 = vdt$ puis de joindre $M_1 M'$, qui

qui est parallèle à cette direction et comme $M_1M' - Mm' = J\frac{dt^2}{2}$ la valeur de l'accélération totale J de ce mouvement central sera $J = M_1M\frac{2}{dt^2}$

Ces deux remarques nous seront très utiles dans la théorie de la composition des accélérations.

Projetons actuellement le contour $M'QP$ sur la tangente My on aura :

$$(v+dv)\cos d\alpha = v + Jdt\cos\alpha$$

d'où : $Jdt\cos\alpha = dv\cdot\cos d\alpha - v(1-\cos d\alpha)$

d'où : $J\cos\alpha = \frac{dv}{dt}\cos d\alpha - \frac{v.2\sin^2\frac{d\alpha}{2}}{dt}$

ou enfin à la limite : $J\cos\alpha = J_t = \frac{dv}{dt}$

qui exprime que la projection de l'accélération totale sur la tangente ou sa composante tangentielle est égale à $\frac{dv}{dt}$: — On voit donc que cette composante tangentielle de l'accélération totale se confond avec la quantité que nous avons désignée sous le nom d'accélération tangentielle. Si donc on donne $s = f(t)$ on en déduira : $J\cos\alpha = J_t = f''(t)$

Projetons maintenant le même contour sur la normale MN à la courbe au point M on aura : $(v+dv)\sin d\alpha = Jdt\sin\alpha$,

$$\text{d'où : } J\sin\alpha = \frac{(v+dv)\sin d\alpha}{dt} = \text{à la limite } v\frac{d\alpha}{dt}$$

mais le secteur infiniment petit $MM'N$ donne :

$$ds = \rho d\alpha \text{ d'où } d\alpha = \frac{ds}{\rho}$$

Remplaçant dans l'expression précédente, il vient enfin.

$$J\sin\alpha = J_n = \frac{v}{\rho}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}v = \frac{v^2}{\rho}$$

Qui exprime que la projection de l'accélération totale sur la normale à la courbe ou sa composante normale est égale à $\frac{v^2}{\rho}$ (ρ rayon de courbure au point M)

Si l'on connait la loi du mouvement du mobile sur la trajectoire $s = f(t)$ on en déduit $v = f'(t)$ et par suite : $J\sin\alpha = J_n = \frac{[f'(t)]^2}{\rho}$

Connaissant ainsi les expressions des composantes tangentielles et normale de l'accélération totale J, cette accélération totale sera nécessairement donnée par la relation

$$J^2 = J_t^2 + J_n^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 = [f''(t)]^2 + \left[\frac{f'(t)^2}{\rho}\right]^2$$

Cas particuliers : 1° Supposons que le mouvement donné soit rectiligne alors $\rho = \infty$ par suite $J_n = 0$ et l'accélération totale J se réduit à sa composante tangentielle : $J = J_t = \frac{v^2}{\rho}$

2° Dans le cas du mouvement curviligne uniforme, c'est l'accélération tangentielle $J_t = \frac{dv}{dt}$ qui est constamment nulle, alors l'accélération totale J se réduit à sa composante normale $J = J_n = \frac{v^2}{\rho}$

Si la courbe décrite est un cercle de rayon r, ρ est constant et égal à r et on a constamment :

$J = J_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ en désignant par ω la vitesse angulaire

3° Dans le cas du mouvement rectiligne uniforme : $\rho = \infty$ $\frac{dv}{dt} = 0$: Donc l'accélération totale disparait avec ses composantes tangentielles et normales.

Nous avons dit (fin de l'article 2) que lorsqu'on projette un mouvement sur un axe quelconque la vitesse du mobile projection était égale à chaque instant à la projection de la vitesse réelle sur cet axe, ou bien que le mobile projection se mouvait comme s'il était animé à chaque instant d'une vitesse égale à la projection de la vitesse du mobile dans l'espace. Il s'agit de faire voir également que dans ce mouvement projeté, l'accélération du mobile projection est la projection de l'accélération totale du mobile dans l'espace ou bien que le mobile projection se meut non seulement comme s'il était animé d'une vitesse égale à la projection de la vitesse réelle ce qu'on a déjà démontré, mais encore comme s'il était soumis à chaque instant à une accélération égale à la projection de l'accélération totale du mouvement de l'espace.

Pour cela projetons le contour MPQ de la figure précédente sur un axe quelconque KK' :

$m'q$ représente la projection de la vitesse v à l'époque t

$m'p$ représente la projection de la vitesse $v + dv$ à l'époque $t + dt$

Donc la différence qp représente la vitesse acquise dans le mouvement projeté pendant le temps dt en vertu d'une accélération inconnue que je désigne par J_x, j'ai donc

(1) pq ou $dv_x = J_x \, dt$.

Mais d'autre part pq est la projection de PQ c'est à dire de $J dt$ on a donc aussi

(2) pq ou $dv_x = J dt \cos\beta$ (β angle de PQ avec KK')

De (1) et (2) on conclut : $J_x = J \cos\beta$

qui exprime que l'accélération inconnue cherchée J_x est la projection sur KK' de l'accélération totale J. C.q.f.d.

Application. – Étude du mouvement de la projection sur un diamètre d'un point décrivant un cercle d'un mouvement uniforme.

Soit un mobile m partant du point A et décrivant la circonférence O d'un mouvement uniforme avec une vitesse $v = \omega r$

On demande les lois du mouvement oscillatoire du mobile projection m' ?..

En vertu de ce qui précède, le mobile projection m' se mouvra sur l'axe ox comme s'il était animé de la vitesse :

$$(1) \quad v_x = -v \sin\alpha = -\omega r \sin\alpha = -\omega y$$

projection de la vitesse v sur ox

et comme s'il était soumis à l'accélération :

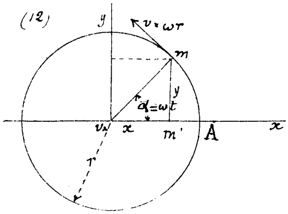
$$(2) \quad J_x = -\omega^2 r \cos\alpha = -\omega^2 x$$

projection de l'accélération totale $\omega^2 r$ du mobile dans l'espace.

Ces deux formules montrent que la vitesse du mobile projection varie proportionnellement à y et que l'accélération J_x toujours dirigée vers le point O est proportionnelle à la distance du mobile projection à ce point.

Si dans les formules précédentes nous remplaçons l'angle α par sa valeur ωt en fonction du temps, ces relations donnent

(12)



$$(1)\text{bis} \quad v_x = -\omega r \sin(\omega t)$$

$$(2)\text{bis} \quad J_x = -\omega^2 r \cos(\omega t)$$

Telles sont les deux lois des vitesses et des accélérations en fonction du temps pour avoir celle des espaces il suffit d'intégrer (1) bis et on a :

$$(3) \quad x = r \cos(\omega t)$$

Remarque importante. – La durée d'une double oscillation du point m', est évidemment la même que celle d'une révolution complète du point m, cette durée aura donc pour expression celle donnée par l'égalité

$$vT = 2\pi r \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

De là résulte que si un mobile se meut sur une droite avec une accélération

$-Kx$ (K représentant le coefficient ω^2 de tout à l'heure)

proportionnelle à chaque instant à la distance x à un point fixe O considéré sur cette droite, on en pourra conclure que le mouvement de ce mobile est un mouvement oscillatoire identique de nature au précédent et que la durée de la double oscillation sera :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$$

indépendante comme on voit de la position initiale du mobile sur la droite, ce qui prouve par suite que cette durée restera la même quelque soit l'amplitude de l'oscillation.

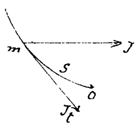
D'ailleurs les lois du mouvement de ce mobile sur cette droite seront les mêmes que celles de la projection sur cette droite d'un point se mouvant uniformément avec la vitesse angulaire $\omega = \sqrt{K}$ sur un cercle décrit sur cette droite du point fixe comme centre avec un rayon a défini par la position du mobile répondant à une vitesse nulle. Les lois des espaces, des vitesses et des accélérations seront donc en se reportant aux équations (1) bis (2) bis (3) et en y remplaçant r par a et ω par $\sqrt{K}$.

(4) $x = r\cos\omega t = a\cos[\sqrt{k}\,t]$

(5) $v_x = -\omega r\sin\omega t = -a\sqrt{k}\sin[\sqrt{k}\,t]$

(6) $J_x = -\omega^2 r\cos\omega t = -ka\cos[\sqrt{k}\,t]$

On peut généraliser cette remarque et l'appliquer à un mouvement oscillatoire curviligne. Pour cela il suffit de remarquer que la loi du mouvement sur une trajectoire curviligne quelconque ne dépend absolument que de la valeur de l'accélération tangentielle en vertu de la relation $J_t = \frac{dv}{dt}$ – en d'autres termes le mouvement sur cette trajectoire curviligne quelconque est le même que celui qui aurait lieu sur cette trajectoire rectifiée à la condition que la loi des accélérations sur cette droite soit la même que celle des accélérations tangentielles sur la courbe elle même. On peut donc étendre la remarque précédente en disant : – que si un point m décrit une courbe en vertu d'une accélération totale J dont la composante tangentielle J_t soit proportionnelle à chaque instant à la distance



s (comptée sur la courbe) du point à un point fixe o de la courbe, de telle sorte qu'on puisse poser

$$J_t = -ks$$

1° Le mouvement de ce point m sera un mouvement oscillatoire dont la durée de la double oscillation donnée par la formule

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

sera indépendante de l'amplitude de l'oscillation.

2° Que les lois de ce mouvement oscillatoire seront encore données par les relations (4)(5)(6) en y remplaçant a par s distance initiale du mobile au point fixe o.

Cette remarque importante nous servira bientôt pour trouver la durée des oscillations du pendule ordinaire du pendule cycloïdal et d'une foule d'autres mouvements oscillatoires.

Article IV. – Solution du double problème général de la cinématique pure d'un point matériel.

Nous pouvons actuellement résoudre le double problème suivant :

1° Problème direct. – Étant donné un mouvement quelconque par ses équations de projection sur trois axes rectangulaires.

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t) \quad z = \psi(t)$$

Trouver l'accélération totale et l'expression du rayon de courbure en chaque point de la trajectoire parcourue ?

2° Problème inverse. – Étant donnée l'accélération totale d'un mouvement quelconque par ses projections sur trois axes rectangulaires.

$$J_x = f_1(t) \quad J_y = \varphi_1(t) \quad J_z = \psi_1(t)$$

ainsi que les conditions initiales de ce mouvement.

Trouver le mouvement produit, c'est à dire remonter aux équations

$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

qui donnent la trajectoire parcourue et la vitesse du mobile à chaque instant sur cette trajectoire ?

– 1° Problème direct. – Soient donc :

$$(1)\ x = f(t) \quad (2)\ y = \varphi(t) \quad (3)\ z = \psi(t)$$

les équations de projection du mouvement donné.

Nature de la trajectoire. – En éliminant le temps entre (1) et (2) puis entre (2) et (3) on aura les projections $F(x, y) = 0$ $F_1(y, z) = 0$ de cette trajectoire sur les plans des xy et des yz ; cette trajectoire est donc déterminée.

Vitesse à un instant quelconque sur cette trajectoire. En différentiant (1) (2) (3) on aura en vertu des principes précédents.

$$(4)\ v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad (5)\ v_y = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t) \quad (6)\ v_z = \frac{dz}{dt} = \psi'(t)$$

D'où la vitesse cherchée :

$$(7) \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

D'ailleurs les angles α β γ qu'elle fera avec les trois axes seront donnés par les relations. $v_x = v\cos\alpha$ $\quad v_y = v\cos\beta$ $\quad v_z = v\cos\gamma$

d'où $\qquad \cos\alpha = \dfrac{f'(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2 + \ldots}} \quad \cos\beta = \dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\ldots\ldots}} \quad \cos\gamma = \dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\ldots\ldots}}$

Accélération totale à un instant quelconque. – En différentiant (4) (5) (6), on aura en vertu des principes précédents

$$(8)\ J_x = \frac{dv_x}{dt} = f''(t) \quad (9)\ J_y = \frac{dv_y}{dt} = \varphi''(t) \quad (10)\ J_z = \frac{dv_z}{dt} = \psi''(t)$$

D'où l'accélération totale cherchée J :

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2} = \sqrt{[f''(t)]^2 + [\varphi''(t)]^2 + [\psi''(t)]^2}$$

D'ailleurs les angles a, b, c que cette accélération totale fait avec les trois axes seront donnés par les relations

$$J_x = J\cos a \quad J_y = J\cos b \quad J_z = J\cos c$$

d'où $\qquad \cos a = \dfrac{f''(t)}{\sqrt{[f''(t)]^2 + \ldots}} \qquad \cos b = \dfrac{\varphi''(t)}{\sqrt{\ldots\ldots}} \qquad \cos c = \dfrac{\psi''(t)}{\sqrt{\ldots\ldots}}$

composantes tangentielle et normale de cette accélération totale. — En différentiant (7) par rapport au temps on a pour la composante tangentielle.

$$J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{f'(t)f''(t)+\varphi'(t)\varphi''(t)+\psi'(t)\psi''(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}}$$

Quant à la composante normale on la déduit de la relation

$$J^2 = J_t^2 + J_n^2$$

$$\text{D'où } J_n^2 = J^2 - J_t^2 = \frac{[f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)]^2+[f''(t)\psi'(t)-\psi''(t).\varphi'(t)]^2}{f'(t)^2+\varphi'(t)^2+\psi''(t)^2}$$

(expression du rayon de courbure). Comme d'ailleurs

$$J_n = \frac{v^2}{\rho}$$

On en tire :

$$\rho^2 = \frac{V^4}{J_n^2} = \frac{[f'(t)^2+\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2]^3}{[f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)]^2+[f''(t)\psi'(t)-\psi''(t)f'(t)]^2+[\varphi''(t)\psi'(t)-\psi''(t)\varphi'(t)]^2}$$

Et enfin.

$$\rho = \frac{[f'(t)^2+\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)]^2+[f''(t)\psi'(t)-\psi''(t)f'(t)]^2+[\varphi''(t)\psi'(t)-\psi''(t)\varphi'(t)]^2}}$$

Si le mouvement est plan, les éléments précédents deviennent en rapportant ce mouvement à deux axes rectangulaires contenus dans son plan

$$v = \sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2}$$

$$J = \sqrt{f''(t)^2+\varphi''(t)^2}$$

$$J_t = \frac{f'(t)f''(t)+\varphi'(t)\varphi''(t)}{\sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2}}$$

$$J_n = \frac{f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}}$$

$$\rho = \frac{[f'(t)^2+\varphi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)} = \frac{\left[1+\left(\frac{\varphi'(t)}{f'(t)}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{f''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)f'(t)}{f'(t)^3}}$$

Telle est dans ce cas l'expression du rayon de courbure ; dans nos conférences de calcul infinitésimal, on se rappelle que nous sommes arrivés à cette même expression sans cependant faire usage de la moindre notion de mécanique.

2° Problème inverse. — On donne l'accélération totale J par les équations de projection.

$$(1)\ J_x = f_1(t) \qquad (2)\ J_y = \varphi_1(t) \qquad (3)\ J_z = \psi_1(t)$$

on connaît de plus les circonstances initiales du mouvement du mobile, c'est-à-dire que l'on connaît à l'époque $t = 0$ 1° la position du point déterminé par les coordonnées

$$x_0\ y_0\ z_0$$

2° et sa vitesse V_0 déterminée par ses projections

v_{o_x} v_{o_y} v_{o_z}

et l'on demande tous les éléments relatifs à ce mouvement, c'est à dire la trajectoire et la vitesse à un instant quelconque. Pour cela il suffit de remonter aux équations

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t) \quad z = \psi(t)$$

en intégrant deux fois de suite les équations (1) (2) (3) et en ajoutant des constantes arbitraires déterminées par les circonstances initiales du mouvement c'est à dire par les paramètres

$x_0\ y_0\ z_0\ ;\ v_{o_x}\ v_{o_y}\ v_{o_z}$ — Le résultat de la 1ère intégration donne

v_x, v_y, v_z et par suite la vitesse v

et le résultat de la seconde donne enfin

$x\ ,\ y\ ,\ z$.

Application. — Étudier complètement le mouvement donné par les deux relations

$$y = pt$$
$$x = p\frac{t^2}{2}$$

Chapitre II

Article 1er Théorie de la composition et de la décomposition des accélérations totales.

Reprenons encore le problème général de la composition des mouvements simultanés d'un point matériel.

Un mobile possède un certain mouvement relatif dans un système de comparaison mobile ; on donne la loi du mouvement de ce système mobile et l'on demande la nature du mouvement absolu résultant de ce mobile!

Nous avons déjà vu comment on déterminait la trajectoire absolue parcourue par le mobile ainsi que la grandeur et la direction de la vitesse absolue, il s'agit actuellement pour compléter notre étude de déterminer à chaque instant l'accélération totale J de ce mouvement absolu, résultant, en fonction des accélérations totales des mouvements composants!

Remarquons que nous avons déjà traité incidemment cette question mais seulement dans le cas particulier où les mouvements composants sont rectilignes.

Nous avons vu en effet (art 14) que l'accélération totale J du mouvement résultant de trois mouvements rectilignes rectangulaires

$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

s'obtenait au moyen des accélérations composantes :

$$J_x \qquad J_y \qquad J_z$$

par la règle du polygone déjà applicable aux vitesses et aux forces, ce qui donnait

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$$

Cette règle pour les compositions des accélérations résultait immédiatement pour ce cas particulier de cette vérité démontrée (Art III) que lorsqu'on projette un mouvement quelconque sur une droite, l'accélération du mouvement projeté est précisément égale à la projection de l'accélération totale du mouvement de l'espace.

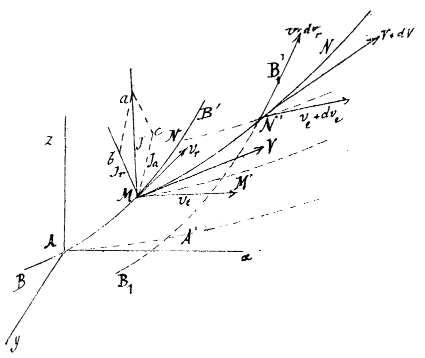
Il s'agit actuellement de faire voir que cette règle du polygone subsiste encore lors même que les mouvements composants ne sont pas rectilignes.

Nous examinerons successivement deux cas.

1^{er} Cas. — Composition des accélérations, lorsque le système solide de comparaison est animé d'un simple mouvement de translation.

Soit BB' la courbe décrite par le mobile dans un certain système de comparaison A x y z en mouvement de translation, en vertu de ce mouvement auquel elle participe. la courbe précédente dite trajectoire relative, va se déplacer dans l'espace parallèlement à elle même un de ses points A décrivant la courbe AA' par exemple, tous les autres points de cette trajectoire décriront des courbes parallèles et superposables.

Cela posé, soit M la position du mobile à l'époque t sur sa trajectoire relative BB' à l'époque t + dt, cette trajectoire est venue en $B_1 B_1'$ et le mobile par suite au lieu d'être en N est venu en N' en décrivant dans l'espace l'élément M N' de sa trajectoire absolue. — On demande l'accélération totale J de ce mouvement absolu résultant à l'époque t, c'est-à-dire au point M, en fonction des accélérations totales J_r, J_e des mouvements composants

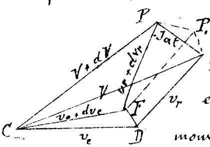


Soit sur la figure M b, la grandeur et la direction de l'accélération totale relative J_r, M c la grandeur et la direction de l'accélération totale d'entraînement J_e, il s'agit de faire voir que l'accélération totale J du mouvement absolu résultant M N' est précisément représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations composantes J_r J_e.

Soit V la vitesse absolue du mobile en M, à l'époque t, dirigée suivant la tangente en ce point à la trajectoire absolue MN, on sait qu'elle résulte des deux vitesses composantes V_r, V_e à la même époque t par la règle du parallélogramme; à l'époque $t+dt$ la vitesse absolue du mobile M arrivé en N' est est devenue $V+dV$, tangente toujours en N' à la trajectoire absolue, elle résulte encore d'ailleurs des deux vitesses composantes v_r+dv_r, v_e+dv_e à la même époque $t+dt$.

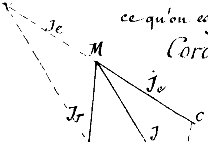
Cela posé, si par un point de l'espace C, je mène CD, DQ égales et parallèles aux vitesses v_e, v_r du mobile en M à l'époque t, la diagonale CQ représentera en vertu de ce que nous venons de rappeler la vitesse résultante V à l'époque t en grandeur et en direction. — Si par ce même point C je mène CF puis FP parallèles et égales aux vitesse v_e+dv_e, v_r+dv_r du même mobile à l'époque $t+dt$, la diagonale CP représentera la vitesse résultante $V+dV$ du mobile à l'époque $t+dt$ en grandeur et en direction.

Actuellement si nous joignons PQ, on sait (Commencement de l'Art III) que cette ligne représente la vitesse acquise Jdt dans le temps dt en vertu de l'accélération totale J du mouvement résultant, que de plus sa direction est parallèle à cette accélération totale J. — Il s'agit de faire voir que cette vitesse acquise élémentaire Jdt parallèle à l'accélération totale J du mouvement résultant, est la résultante des vitesses acquises $J_e dt$, $J_r dt$ en vertu des accélérations totales J_e, J_r des deux mouvements composants. — Or si je



joins FD, cette longueur représente précisément la vitesse acquise totale $J_e dt$ du mouvemt d'entraînement parallèle à l'accélération totale J_e de ce mouvement, puis si je mène FP_1 égale et parallèle à $DQ = v_r$, PP' représentera de même la vitesse acquise totale $J_r dt$ du mouvement relatif parallèle à l'accélération totale J_r de ce mouvement. D'ailleurs comme $P_1Q = FD = J_e\,dt$ on voit qu'en effet PQ ou Jdt est la diagonale du parallélogramme construit sur PP_1, P_1Q; c'est-à-dire sur $J_r\,dt$, $J_e\,dt$ c. q. f. d.

Les accélérations totales étant parallèles et proportionnelles à ces vitesses acquises élémentaires on conclut de ce qui précède que l'accélération totale J dans le mouvement absolu s'obtient en composant les accélérations totales des 2 mouvements composants d'après la règle du parallélogramme des vitesses et des forces, ce qu'on explique par le symbole : $J = \text{Résult.}\ (J_e, J_r)$.



Corollaire. — Si l'accélération totale J du mouvement absolu est la résultante des accélérations totales J_e, J_r des mouvements relatifs et d'entraînement. *Réciproquement* — (voir la figure ci-contre) l'accélération totale J_r dans le mouvement relatif est la résultante de l'accélération totale du mouvement d'entraînement prise en sens contraire : ce qu'on exprime par la notation : $J_r = \text{Résult.}\ (J, -J_e)$

Résultat qui signifie que pour l'observateur lié au système de Comparaison qui n'a pas par suite Conscience du mouvement dont il est animé, le mobile se sent non seulement comme s'il était soumis à la seule accélération totale absolue J, mais comme s'il était soumis à la fois aux deux accélérations J et $-J_e$, cette dernière étant égale et contraire à celle qui doit agir sur le mobile pour lui donner le mouvement qu'il possède par suite de sa liaison avec le système d'entrainement.

Si le mobile est animé à la fois de plus de deux mouvements, les divers mouvements d'entrainement étant tous supposés de translation, on obtiendra l'accélération totale J du mouvement résultant, en composant 2 à 2 les accélérations totales de tous les mouvements composants, ce qui conduira à la règle du polygone déjà applicable aux vitesses et aux forces.

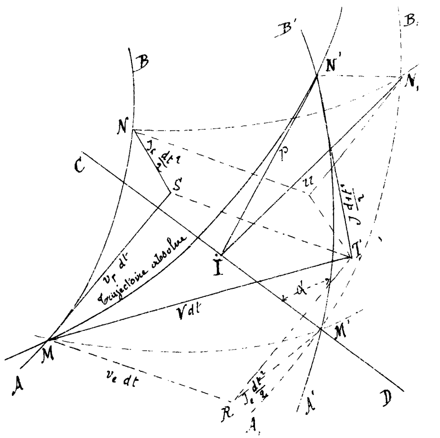
Réciproquement. Etant donné un mouvement absolu, ainsi que l'accélération totale J de ce mouvement; si on le regarde comme résultant des deux ou trois mouvements simultanés tous supposés de translation, rectiligne on obtiendra les accélérations totales de ces mouvements composants, en décomposant l'accélération totale J, d'après la règle du parallélogramme ou du parallélipipède, suivant les directions de ces mouvements composants.

2ème Cas. Composition des accélérations totales lorsque le système solide de comparaison est animé d'un mouvement quelconque: (Ce cas n'a été qu'indiqué au Cours)

Soit AB la courbe décrite par le mobile dans un certain système de comparaison animé d'un mouvement tout à fait quelconque. Or, nous avons vu l'an dernier que le mouvement quelconque le plus général d'un système solide revenait à chaque instant à une translation, telle que MM' et à une rotation simultanée autour d'un axe instantané tel que CD. Donc nous avons à composer ici en réalité trois mouvements 1° le mouvement relatif sur la trajectoire AB, 2° le mouvement de la translation instantanée 3° le mouvement de rotation instantanée du système de comparaison et nous allons faire voir que l'accélération totale du mouvement résultant résulte encore ici des trois accélérations totales 1° du mouvement relatif J_r 2° du mouvement de translation instantanée J_e 3° du mouvement de rotation instantanée J_c

Cette 3° accélération se nomme Accélération Centrifuge composée.

Soit AB la position de la trajectoire relative du mobile à l'époque t, à l'époque $t+dt$ cette trajectoire relative sera parvenue en A'B' par une translation MM' et une rotation autour de l'axe instantané CD le mobile en M à l'époque t serait évidemment en N, à l'époque $t+dt$ si le mouvement du système de comparaison se réduisait à la translation



MM, en vertu de laquelle la trajectoire relative AB viendrait en A_1B_1 mais par suite de la rotation instantanée autour de CD, A_1B_1 vient en $A'B'$ et par suite le point au lieu d'être en N est en N'. N_1N' étant un petit arc de cercle normal à l'axe instantané.

Menons en M les tangentes aux trajectoires relative et d'entrainement et prenons sur ces tangentes des longueurs

$$MS = v_r\,dt \qquad\qquad MR = v_e\,dt$$

la diagonale MT sera $V\,dt$, V représentant la vitesse absolue du mobile en M, de plus cette diagonale sera tangente en M à la trajectoire absolue décrite par le mobile M. Donc la droite TN' qui joint le point T à la position réelle N' du mobile à l'époque $t+dt$ sera la direction de l'accélération totale du mouvement absolu résultant et la grandeur de cette accélération totale J sera (2e Remarque de l'Art III)

$$J = TN'\,\frac{2}{dt^2}$$

Si actuellement nous joignons NS que par T on mène Tu égale et parallèle à NS et si on joint enfin N_1u on aura un polygone $T\,u\,N_1\,N'$ dont la ligne TN' ferme les extrémités. Cette ligne est donc la résultante des côtés $N'N_1$, N_1u, uT de ce polygone.

Actuellement si j'imagine un polygone semblable au précédent et ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce premier polygone et égaux à ces mêmes côtés multipliés tous par $\frac{2}{dt^2}$. La ligne correspondante à TN' dans ce nouveau polygone sera ainsi qu'il a été dit l'accélération totale J du mobile dans son mouvement absolu. Donc cette accélération totale

$$J = TN'\,\frac{2}{dt^2}$$

peut être regardée comme la résultante de trois accélérations dont les grandeurs sont :

$$Tu\,\frac{2}{dt^2} \;-\; uN_1\,\frac{2}{dt^2} \;-\; N_1N'\,\frac{2}{dt^2}$$

et dont les directions sont celles des lignes :

$$Tu \;-\; uN_1 \;-\; N_1N'$$

Observons maintenant :

1° Que Tu étant égal et parallèle à NS, la première de ces accélérations composantes est l'accélération totale J_r dans le mouvement relatif du mobile sur sa trajectoire relative AB.

2° Que uN_1 étant évidemment égal et parallèle à RM', la seconde de ces accélération est l'accélération totale J_e du mouvement de translation instantanée du système de Comparaison.

3° que N, N' arc de cercle de rayon p décrit autour de C D avec la vitesse angulaire ω pendant le temps dt a pour expression :

$$N_1 N' = \omega\, dt\, p.$$

mais dans le triangle T N' M'

$$p = M' N' \sin\alpha = M' N_1 \sin\alpha = M N \sin\alpha = v_r\, dt \sin\alpha$$

d'où on conclut que :

$$N N' \frac{2}{dt^2} = 2\omega\, v_r \sin\alpha$$

Cette troisième accélération composante, due à la rotation instantanée autour de C D est dirigée perpendiculairement au plan qui passe par l'axe instantané de rotation et la direction M' N, de la vitesse relative, et dans le sens qui va de N_1, à N'. On l'appelle Accélération centrifuge, composée.

Concluons. Si l'on rapporte les diverses positions qu'occupe successivement un mobile à un système d'axes qui soient eux mêmes en mouvement dans l'espace, le mouvement absolu de ce point peut être regardé comme résultant de la composition de son mouvement par rapport aux axes mobiles, et du double mouvement de translation et de rotation variable à chaque instant de ce système d'axes de comparaison, et l'accélération J de ce mouvement absolu s'obtient par la composition des accélérations totales de ces trois mouvements qui sont :

1° L'accélération J_r du mouvement du point relativement aux axes mobiles.

2° L'accélération J_e d'entrainement du mouvement de translation des axes mobiles.

3° L'accélération J_c du mouvement de rotation instantané de ces mêmes axes autour de l'axe instantané C D, accélération égale à $2\omega v_r \sin\alpha$ et dirigée perpendiculairement au plan de la rotation et de la vitesse relative et dans le sens dans lequel l'extrémité de la ligne qui représente la vitesse relative tourne dans cette rotation instantanée.

Ce qu'on exprime par la formule symbolique

$$J = \text{Résult}\,(J_r, J_e, 2\omega v_r \sin\alpha)$$

Corollaire. — Si l'accélération totale J dans le mouvement absolu du mobile est la résultante des accélérations totales J_r, J_e, $2\omega v_r \sin\alpha$ — Réciproquement l'accélération totale J_r dans le mouvement relatif est la résultante de l'accélération totale J et des accélérations J_e et $2\omega v_r \sin\alpha$ prises en signe contraire ce qu'on exprime par le symbole : $J_r = \text{Résult}\,(J, -J_e, -2\omega v_r \sin\alpha)$

Résultat qui signifie que pour l'observateur lié au système des axes mobiles qui ne peut avoir par suite conscience du mouvement dont il est animé le mobile se meut non comme s'il était soumis à la seule accélération totale réelle absolue J, mais comme s'il était soumis à la fois aux trois accélérations.

$$J\,,\quad -J_e\,,\quad -2\,\omega\, v_r\,\sin\alpha$$

Ces deux dernières dites accélérations apparentes sont égales et contraires à celles qui devraient agir sur lui pour lui donner le mouvement qu'il possède par suite de la liaison avec le système des axes mobiles.

Article II. – Applications de la théorie de la composition et de la décomposition des accélérations totales.

Détermination du rayon de courbure de certaines courbes par la considération des accélérations

Cette question a déjà été résolue analytiquement d'une manière générale (Art IV Chap 1er) En effet quelque soit la courbe donnée, on peut supposer qu'un mobile parcoure cette courbe. Soient : $x = f(t)$ $y = \varphi(t)$ $z = \psi(t)$ les équations du mouvement de ce mobile projeté sur 3 axes rectangulaires

Ces équations étant telles qu'elles donnent par l'élimination du temps la courbe dont on veut trouver le rayon de courbure.

Ces équations étant données nous avons fait voir que l'on pouvait déterminer en fonction de t, non seulement les accélérations totale normale et tangentielle mais encore le rayon de courbure.

Ainsi donc la question se trouve résolue au point de vue le plus général.

Mais outre cette méthode analytique générale, il existe une méthode géométrique particulière analogue à celle de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes et qui n'est applicable comme la méthode de Roberval que si le mouvement du point que l'on imagine décrire la courbe donnée peut être conçu comme résultant de deux mouvements simultanés dont on sache déterminer les accélérations totales.

Exemple 1°. Rayon de courbure de la Cycloïde

On sait que la Cycloïde est engendrée par le point M d'un cercle O, roulant sans glissement sur une droite fixe xx' – Considérons ce cercle O venu en O' et prenons arc $IM' = IM$ le point M' ainsi obtenu sera un point de la courbe..

Remarquons actuellement que par suite du mode de génération de cette courbe le mouvement du point décrivant peut être considéré comme résultant de deux mouvements.

1° L'un de rotation autour du centre O supposé fixe avec une vitesse $v = \omega r$ (ω vitesse angulaire de rotation du cercle O) toujours dirigée tangentiellement au cercle générateur O

2° L'autre de translation en vertu duquel tous les points de ce cercle O décrivent des parallèles à xx' avec la vitesse du centre O, laquelle est encore $v = \omega r$ attendu que les arcs développés dans le même temps sur xx' et sur le cercle sont toujours égaux.

Donc lorsque le point décrivant M du cercle O est venu en M', il est animé des deux vitesses égales l'une $M'a = \omega r$ parallèle à xx'

l'autre $M'b = \omega r$ tangente en M' à O'

Ce point possède donc en définitive une vitesse absolue donnée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux longueurs.

D'ailleurs la direction de cette vitesse est précisément celle de la tangente en M' à la cycloïde (c'est en cela que consiste le principe de Roberval.)

La direction de cette vitesse absolue ou de cette tangente est nécessairement perpendiculaire à M'T et passe par suite par le point t attendu que T est centre instantané de rotation – On peut d'ailleurs voir ce résultat directement en effet.

$$\text{à } \widehat{M'b} = M'O't \quad \text{Donc } \widehat{bM't} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{M'O'T} = \widehat{M'Tt}$$

Les deux angles $bM't$, $M'Tt$ étant égaux ont même mesure, or l'angle $M'Tt$ a pour mesure la 1/2 de l'arc $M't$, il doit donc en être de même de l'angle $bM't$ il faut donc que la direction de la tangente $M't$ passe par le point t. C. q. f. d.

Or ce que nous venons de dire pour les vitesses, nous pouvons le répéter pour les accélérations, puisqu'elles se composent comme les vitesses.

Donc l'accélération totale du point M' dans son mouvement absolu s'obtiendra par la composition des accélérations totales du même point dans les deux mouvements composants de translation et de rotation. – Mais la translation étant rectiligne et uniforme son accélération totale est nulle, donc l'accélération totale du mouvement absolu résultant se réduira à l'accélération totale du mouvement de rotation autour du centre O', or comme ce mouvement de rotation est uniforme, son accélération totale se réduit à son accélération normale $\omega^2 r$ dirigée suivant M'O'; telle est donc aussi la direction et l'intensité de l'accélération totale du mouvement résultant.

Décomposons actuellement cette accélération totale $\omega^2 r$ du mouvement résultant en ses deux composantes tangentielle et normale ; la composante normale sera la projection de $\omega^2 r$ sur M'T normale à la cycloïde en M' elle aura donc pour expression :

$$J_n = \omega^2 r \cos TM'O' = \omega^2 r \frac{c}{2r} = \omega^2 \frac{c}{2} \qquad \frac{c}{2} \text{ demie corde } M'd$$

mais d'autre part on sait que $J_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 c^2}{\rho}$

égalant ces deux valeurs de J_n on conclut :

$$\frac{\omega^2 c^2}{\rho} = \omega^2 \frac{c}{2} \quad \text{d'où} \quad \rho = 2c$$

Le rayon de courbure de la cycloïde est donc double de la corde c.

Soit m' le centre de courbure relatif au point M', menons m't' perpendiculaire à M'm' jusqu'à la rencontre de la verticale du centre O' et décrivons sur

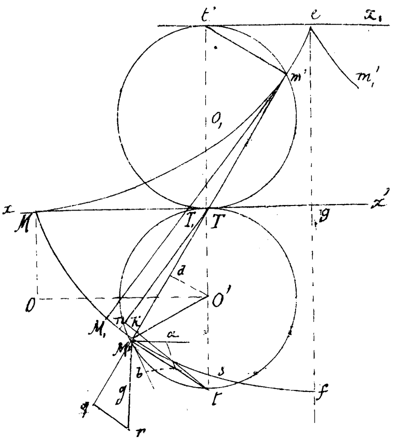
$$T t' = Tt = 2r$$

une circonférence O, elle passera évidemment par le point m'. Cela posé je dis que le lieu des points m' ou la développée de la cycloïde est engendrée par le point m' du cercle O, = cercle O, roulant sur la droite $t'x_1$ en effet, soit e, le point de rencontre de la droite $t'x_1$ avec la verticale du sommet f de la cycloïde, pour faire voir que le lieu cherché est la cycloïde annoncée il suffira évidemment de prouver que

$$\text{arc } t'm' = t'e$$

Et en effet on a (Voir figures)

Arc $t'm'$ = arc tM' = arc $tM'T$ – arc $M'T$ = $Mg - MT = Tg = t'e$ C.q.f.d.



2° Aire de la cycloïde. — Soit M_1 un point de la cycloïde infiniment voisin du point M'; M_1m' sera sa normale, coupant xx' en T_1. — Or les deux triangles infiniment petits $m'M_1M'$, $m'TT_1$ ayant l'angle en m' commun sont entre eux, comme les produits des côtés comprenant l'angle égal en m' mais puisque

$$M't = Tm' = M_1t_1 = T_1m'$$

à moins d'infiniment petits négligeables ; si nous prenons l'une de ces quantités pour unité, il résultera que ces deux triangles seront entre eux comme

4 est à 1

Il suit que le quadrilatère différentiel $M'M_1TT_1$ = 2 fois le triangle $m'TT_1$ ou trois fois le triangle égal $TM'n$ obtenu en menant Tn parallèle à $m'M_1$ jusqu'à la rencontre du cercle. On conclut de là que :

1° Une portion finie de l'aire de la cycloïde, comprise entre deux normales de la cycloïde est le triple de la portion de l'aire du cercle générateur limité par les parallèles à ces normales menées par le point de contact de ce cercle avec la droite xx'

2° Il suit de là que l'aire totale de la cycloïde est triple de celle du cercle générateur $= 3\pi r^2$

3° Rectification de la Cycloïde.

Traçons les cordes tM', tn issues du point t, et soit K le point de rencontre de la deuxième corde avec TM'. A cause des triangles semblables $m'M_1M'$ TnK, on aura à moins d'infiniment petits d'ordre négligeable.

$$M'M_1 = 2Kn$$

En d'autres termes l'accroissement infiniment petit $M'M_1$ de l'arc $fM' = s$ de la cycloïde compté à partir de son sommet f est égal au double de l'accroissement infiniment petit Kn de la corde $M't$

Donc :

1° L'arc de la cycloïde compté à partir du sommet f, est égal au double de la corde correspondante du cercle générateur partant de son sommet.

2° La longueur totale de la cycloïde est par suite égale à 4 fois le diamètre du cercle générateur.

4° Durée des oscillations du pendule cycloïdal.

Considérons un point pesant M' assujetti à se mouvoir sur la cycloïde précédente supposée matérialisée. On demande la durée de la double oscillation dans le mouvement oscillatoire qui va se produire ?

Le point M' soumis à l'attraction terrestre tend à prendre suivant la verticale, l'accélération g représentée sur la figure par la longueur $M'r$; or, en vertu de la théorie de la composition et de la décomposition des accélérations, nous pouvons décomposer cette accélération g en ses deux composantes normale et tangentielle. La première est détruite par la résistance de la courbe, quant à la seconde qui produit les variations de vitesse du mobile, elle aura pour expression en comparant les triangles semblables $T M' t$, $M' q r$:

$$J_t = q r = M' r \frac{M' t}{T t} = M' t \frac{g}{2r} \text{ mais } M' t = \frac{1}{2} M' f = \frac{1}{2} s \text{ donc}$$
$$J_t = \frac{g}{4r} \cdot s = K s$$

Ainsi le mobile M' est soumis à une accélération tangentielle exactement proportionnelle à sa distance au point fixe f – on en conclut en vertu de ce qui a été dit (Ch 1er fin de l'Art III) que le mouvement est oscillatoire et que la durée de la double oscillation indépendante de l'amplitude a pour expression.

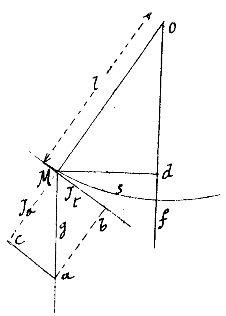
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$$

Considérons actuellement le centre de courbure c de la cycloïde à son sommet f et soient c m' M , c m'1 les deux branches cycloïdales constituant sa développée. Concevons que l'on fixe en c un fil cf de longueur 4r terminé par une masse pesante et que ce fil écarté de la verticale soit assujetti en oscillant à s'enrouler alternativement le long des deux branches de la développée, le corps pesant décrira la cycloïde précédente et l'on obtiendra par conséquent un pendule dont les oscillations ont la même durée $T = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$ quelque soient les amplitudes.

L'idée d'un pareil pendule est due à Huyghens qui désirait doter les horloges d'un régulateur irréprochable, mais la difficulté de construction des demi-cycloïdes directrices, les déformations auxquelles elles sont exposées en raison des variations de température, rendent cet appareil inapplicable. Aussi on se contente généralement pour la mesure du temps du pendule ordinaire.

5° Durée des oscillations du pendule ordinaire dans le cas des petites oscillations.

Le pendule simple ordinaire se compose comme on sait d'un point matériel M suspendu à un fil sans pesanteur fixé en un point fixe O. Ce point M soumis à



l'attraction terrestre tend à prendre suivant la verticale l'accélération g que je représente par la longueur M a. Si on la décompose en ses deux composantes tangentielle et normale, la composante normale sera détruite par la résistance du fil et la composante tangentielle m b aura pour expression en comparant les 2 triangles semblables M c a , o M d :

$$J_t = g \cdot \frac{M d}{l}$$

Si nous supposons les écarts très petits M d se confondra sensiblement avec l'arc Mf_1 en le désignant par s on aura donc :

$$J_t = \frac{g}{l} \, s = K s$$

D'où $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Telle sera la durée de la double oscillation.

La durée d'une simple oscillation sera par conséquent

$$(1) \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

On peut en déduire expérimentalement la valeur de g aux différents lieux de la terre. En effet de la formule précédente on déduit :

$$(2) \quad g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$$

t représentant la durée d'une oscillation simple. Or supposons que le pendule fasse n oscillations par heure ou en 3600", la durée t d'une seule oscillation sera :

$$t = \frac{3600}{n}$$

Remplaçant dans (2) il vient :

$$(3) \quad g = \frac{\pi^2 l}{(3600)^2} \cdot n^2 = A n^2$$

Transporté en un autre lieu de la terre je suppose que ce même pendule fasse n' oscillations par heure, on aura :

$$(4) \quad g' = \frac{\pi^2 l}{3600^2} \cdot n'^2 = A n'^2$$

Comparant (3) et (4) on en déduit par division

$$(5) \quad \frac{g}{g'} = \frac{n^2}{n'^2}$$

c'est-à-dire que les accélérations terrestres en différents lieux sont proportionnelles aux carrés du nombre d'oscillations du même pendule dans le même temps.

Longueur du pendule battant la seconde. — Pour l'obtenir il suffit de faire $t = 1$ dans (1) on a ainsi :

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}} \quad \text{d'où} \quad l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}8088}{\pi^2} = 0{,}9938$$

Théorèmes de Galilée. — 1°. Étude du mouvement d'un point pesant sur un plan incliné.

Soit un plan incliné de hauteur h, de longueur l et incliné sur l'horizon de l'angle i. Soit M un point matériel posé sur ce plan, il est soumis à l'attraction terrestre et tend par suite à prendre suivant la verticale, l'accélération g que je représente par la longueur Ma. — Décomposons cette accélération en ses deux composantes normale et tangentielle, la première est détruite par la résistance du plan, la seconde dont l'expression est : $J_t = g \sin i$

est constante quelque soit la position du point sur le plan, donc elle imprime à ce point un mouvement uniformément varié dont les équations sont, en supposant qu'il parte du repos

$$(1)\quad v = g \sin i \cdot t$$

$$(2)\quad s = g \sin i \cdot \frac{t^2}{2}$$

D'où en éliminant le temps t

$$(3)\quad v^2 = g^2 \sin^2 i \cdot \frac{2s}{g \sin i} = 2 s g \sin i$$

Si je fais $s = l$, j'ai la vitesse à l'extrémité B du plan incliné.

$$(4)\quad v^2 = 2 l \cdot g \sin i = 2 g h \quad \text{puisque } h = l \sin i$$

ce qui prouve que la vitesse acquise au bas du plan incliné est la même que si le mobile était tombé librement de la hauteur verticale $AC = h$ elle est donc absolument indépendante de la longueur l du plan, c'est-à-dire qu'au bas des plans AB' AB''.. etc la vitesse acquise serait toujours la même. Si au lieu de partir du point A avec une vitesse nulle, le mobile part de ce point avec la vitesse initiale v_0 les équations de son mouvement seront :

$$v = v_0 + g \sin i \cdot t$$

$$s = v_0 t + g \sin i \ \frac{t^2}{2}$$

En éliminant le temps il vient

$$v^2 - v_0^2 = 2 g \ s \sin i$$

Si je fais $s = l$ j'aurai la vitesse à l'extrémité B du plan incliné.

$$v^2 = v_0^2 + 2 g \ l \sin i = v_0^2 + 2 g h \quad \text{puisque } h = l \sin i$$

Ainsi la vitesse au bas du plan incliné ne dépend que de la vitesse initiale et de la hauteur de chute.

Cherchons actuellement la durée de la descente dans le cas où le mobile part du repos. Pour cela de (2) dans laquelle je fais $s = l$. je tire

$$t^2 = \frac{2 l}{g \sin i}$$

mais en élevant BD perpendiculaire sur AB, j'ai évidemment dans le triangle rectangle ABD auquel je circonscris le cercle de rayon r.

$$l = 2 r \sin i$$

Par suite l'expression précédente devient :

$$t^2 = \frac{4 r \sin i}{g \sin i} = \frac{4 r}{g} \quad \text{d'où } t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Ainsi la durée de la chute ne dépend que de AD. Il suit de là que les le mobile partant du repos en A mettra le même temps pour parcourir toutes les cordes issues de ce point et terminées à la même circonférence décrite sur AD comme diamètre

On peut faire voir enfin que ce temps est égal au temps que mettrait le mobile à parcourir les cordes telles que BD supplémentaires des précédentes.

En effet pour le plan BD dont je désigne la longueur par l' la loi des espaces est $s = g \cos i \frac{t^2}{2}$

si j'y fais $s = l'$ j'en déduis la durée de la descente.

$$t^2 = \frac{2l'}{g \cos i} \quad \text{mais } l' = 2r \cos i \text{ d'où en remplaçant :}$$

$$t^2 = \frac{4r}{g} \quad \text{ou } t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ comme plus haut.}$$

On peut donc généraliser le résultat précédent et dire qu'un mobile met le même temps pour parcourir tous les plans inclinés émanant du point B ou du point D et terminés à la circonférence O

Enfin, dernière remarque : si nous considérons un de ces plans inclinés DE par exemple, la durée de la descente est avons nous dit :

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

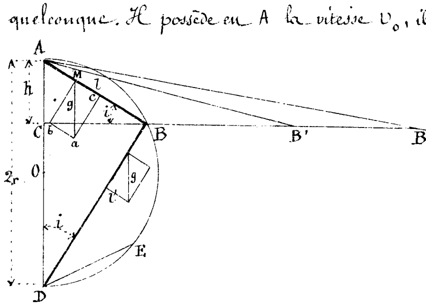
mais si au lieu de décrire la corde le mobile eût décrit l'arc qu'elle soutend, la durée de la descente en vertu de la formule du pendule simple eût été

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Ainsi le mobile met moins de temps pour parcourir l'arc que la corde correspondante : Il existe donc entre les points E et D une courbe de plus vite descente ou Brachistochrone. — On démontre que cette courbe de plus vite descente est l'arc de cycloïde unissant ces deux points et ayant pour base l'horizontale du point le plus élevé E.

2°. Étude du mouvement d'un point pesant sur une courbe quelconque AB.

Actuellement considérons un mobile descendant le long d'une courbe quelconque. Il possède en A la vitesse v_0, il faut prouver que la vitesse



au bas de cette courbe est donnée également par la relation

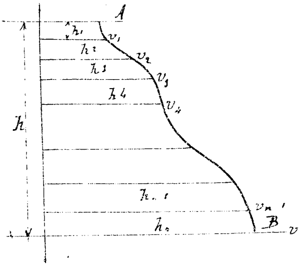
$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

h étant la hauteur verticale séparant les deux extrémités de la courbe, ce qui prouvera que la vitesse acquise en B ne dépend nullement de la forme de la courbe parcourue mais seulement ie la hauteur verticale h et de la vitesse initiale du mobile.

En effet décomposons la hauteur h en petits éléments de hauteur

$h_1 \quad h_2 \quad h_3 \qquad h_{n-1} \quad h_n$

assez petits pour être considérés comme rectilignes, On aura :



Au bout du 1er élément $v_1^2 = v_0^2 + 2gh_1$

" 2e " $v_2^2 = v_1^2 + 2gh_2$

" 3e " $v_3^2 = v_2^2 + 2gh_3$

n^me $v^2 = v_{n-1}^2 + 2gh_n$

En faisant la somme on a :

$$v^2 = v_0^2 + 2g(h_0 + h_1 \dots + h_{n-1} + h_n)$$

ou enfin : $v^2 = v_0^2 + 2gh$. C.q.f.d.

Fin de l'Introduction à la Dynamique.

Résumé

de la 1ère Section du Cours

Introduction à la Dynamique.

Chapitre 1er

Révision de la théorie de la composition et de la décomposition des mouvements d'un point matériel, théorie basée sur la notion du mouvement relatif.

Art. 1er. Vitesse et accélération tangentielle dans le mouvement curviligne varié. Passer analytiquement de la loi des espaces à celle des vitesses et à celle des accélérations tangentielles ou réciproquement si on donne d'une manière générale.

(3) E.2

$s = f(t)$ on en déduit :

$$v = f'(t) \qquad J_t = f''(t)$$

Réciproquement – Étant donné J_t et les circonstances initiales du mouvement du point on en déduit par deux intégrations successives v et s – Application au mouvement uniformément accéléré.

Article II. – Composition et Décomposition des vitesses – Règle du parallélogramme et du polygone des vitesses – Applications a. Mouvement parabolique.

b Le mouvement d'un point dans l'espace est parfaitement déterminé par les trois relations

$$(1) \quad x = f(t)$$
$$(2) \quad y = \varphi(t)$$
$$(3) \quad z = \psi(t)$$

donnant les lois du mouvement du mobile de l'espace projeté sur 3 axes rectangulaires car de ces relations (1), (2), (3) on peut déduire :

a la forme de la trajectoire

b la direction et l'intensité de la vitesse du mobile sur cette trajectoire (Règle du polygone)

c, l'accélération tangentielle (par différentiation)

Art. III. – De l'accélération totale dans le mouvement curviligne varié :

En la désignant par J, son expression en fonction de ses composantes tangentielle J_t et normale J_n est :

$$J^2 = J_t^2 + J_n^2 \quad \text{ou} \quad J^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2$$

Cas particuliers :

$J = 0$ dans le mouvement rectiligne uniforme

$J = \frac{dv}{dt}$ dans le mouvement rectiligne varié

$J = \frac{v^2}{\rho}$ dans le mouvement curviligne uniforme

$J = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ dans le mouvement circulaire uniforme

Si l'on projette le mouvement d'un point sur un axe quelconque, le mobile projection se meut non seulement comme s'il était animé d'une vitesse égale à chaque instant, à la projection de la vitesse du mobile réel dans l'espace ; mais encore comme s'il était soumis à chaque instant à une accélération égale à la projection de l'accélération totale du mobile réel dans l'espace. – Application de ce principe à l'étude du mouvement circulaire uniforme projeté sur un diamètre.

Le mouvement du mobile projection est un mouvement oscillatoire dont l'accélération $J_t = \omega^2 x$ est à chaque instant proportionnelle à la distance x du mobile au centre de cercle qui est en même temps le centre d'oscillation.

La durée de la double oscillation $T = 2\frac{\pi}{\omega}$, ω vitesse angulaire. De là résulte que réciproquement, si un mobile se meut sur une droite ou sur une Courbe avec une accélération tangentielle $J_t = Kx$ proportionnelle à sa distance à un point fixe O situé sur cette droite ou sur cette courbe, on en pourra Conclure que le mouvement de ce mobile est un mouvement oscillatoire et que la durée d'une double oscillation sera donnée par la relation

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$$

qui fait voir que cette durée est indépendante de l'amplitude de l'oscillation (Voir plus loin comme application la durée de l'oscillation du pendule Cycloïdal, et du pendule simple)

Art IV. - Solution du double problème général de la Cinématique pure d'un point matériel.

Problème direct. - Lorsqu'un mouvement est donné par les équations de projection de ce mouvement sur 3 axes Coordonnés.

$$(1)\quad x = f(t)$$
$$(2)\quad y = \varphi(t)$$
$$(3)\quad z = \psi(t)$$

on peut non seulement déterminer la trajectoire absolue, la position et l'intensité de la vitesse et de l'accélération tangentielle, mais encore les accélérations totale et normale et par suite le rayon de Courbure de la trajectoire parcourue.

Problème inverse. - Réciproquement, Connaissant les Circonstances initiales du mouvement d'un point, les projections J_x J_y J_z de l'accélération totale J à laquelle ce point est soumis; on pourra retrouver toutes les Circonstances du mouvement de ce point c'est à dire retomber par deux intégrations successives sur les équations. $x = f(t)$ $y = \varphi(t)$ $z = \psi(t)$

Applications. - a Étudier toutes les Circonstances du mouvement d'un point donné par les relations (1) (2) ou par les relations (3)(4)

$$(1)\quad x = \frac{pt^2}{2} \qquad (3)\quad x = 1 - \frac{1}{4}t^2$$
$$(2)\quad y = pt \qquad (4)\quad y = 2t - \frac{1}{2}t^2$$

= Chapitre II

Chapitre II.

Théorie de la composition et de la décomposition des accélérations totales.

Art. 1er. Les accélérations totales se composent comme les vitesses par la règle du parallélogramme. On examine successivement les deux cas suivants :

1° Composition des accélérations totales, lorsque le système solide de comparaison est animé d'un simple mouvement de translation. $J = \text{Résult}\,(J_r, J_e)$

2° Cas général. Composition des accélérations totales lorsque le système solide de comparaison est animé d'un mouvement quelconque.

Ce mouvemt quelconque revenant à chaque instant à une translation et à une rotation simultanées et instantanées on a en réalité à composer trois mouvements il en résulte que : $J = \text{Résult}\,(J_r, J_e, J_c)$

J_r accélération totale dans le mouvement relatif

J_e accélération totale dans la translation instantanée

J_c accélération totale dans la rotation instantanée ; cette accélération prend le nom d'accélération centrifuge composée.

Art. II. Applications de la théorie de la composition et de la décomposition des mouvements et spécialement des accélérations.

– a – Détermination du rayon de courbure de certaines courbes. Procédé analogue au procédé de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes.

Rayon de courbure de la cycloïde

Développée de la cycloïde

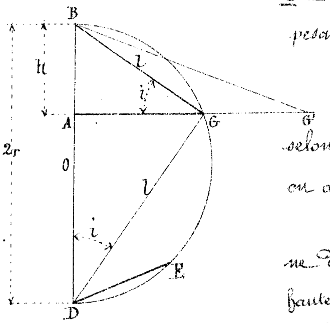
Aire et rectification de la cycloïde

Durée de l'oscillation du pendule cycloïdal $t = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}$

– b – Durée de l'oscillation du pendule simple ordinaire (cas des petites oscillations) $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

En déduire l'accélération terrestre. En deux lieux de la terre les accélérations terrestres sont proportionnelles aux carrés du nombre d'oscillations.

Longueur du pendule simple battant la seconde.



c — Théorème de Galilée ou étude du mouvement d'un point pesant sur un plan incliné.

1°. La vitesse acquise en G est donnée par la formule

$$v^2 = 2gh \quad \text{ou} \quad v^2 = v_0^2 + 2gh$$

selon que le mobile part du point B à l'état de repos ou animé de la vitesse initiale v_0

Ces formules montrent que la vitesse acquise ne dépend absolument que de la vitesse initiale, et de la hauteur h du plan, mais nullement de l'inclinaison i; de telle sorte que la vitesse acquise sur les plans BG, BG', BG'', en G,G', G'' est toujours la même

2°. La durée de la descente, le mobile étant supposé partir du point B à l'état de repos est donnée par l'expression $t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$ qui ne dépend que de r

D'où il suit que le mobile partant du repos en B mettra le même temps pour parcourir toutes les cordes issues de ce point et terminées à la circonférence O

3°. Si l'on considère le plan incliné GD supplémentaire de BG, on démontre qu'un mobile met le même temps $t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$ pour le parcourir que pour parcourir le 1er. On peut donc généraliser le résultat précédent et dire qu'un mobile met le même temps pour parcourir tous les plans inclinés émanant du point B ou du point D et terminés à la circonférence O

4°. Si nous considérons un de ces plans inclinés DE par exemple, la durée de la descente sera

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Mais si au lieu de décrire la corde, il eut décrit l'arc qu'elle soutend, la durée de la descente en vertu de la formule du pendule simple eut été.

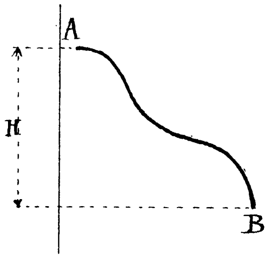
$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Aussi le mobile met moins de temps pour parcourir l'arc que la corde correspondante : Il existe donc entre les points E et D une courbe de plus vite descente ou Brachistochrone.

On démontre que cette courbe de plus vite descente est l'arc de cycloïde unissant ces deux points et ayant pour base l'horizontale du point le plus élevé E.

— d — Mouvement d'un point pesant sur une courbe AB

On démontre que la vitesse en B est donnée par la relation $v^2 = 2gH$ ou $v^2 = v_0^2 + 2gH$.



H selon que le point part de A à l'état de repos ou animé de la vitesse initiale v. Ce qui prouve que la vitesse acquise en B ne dépend nullement de la forme de la courbe parcourue mais seulement de sa hauteur verticale H et de la vitesse initiale du mobile.

Fin de l'Introduction à la Dynamique

2me Section.

Dynamique pure.

La dynamique pure est la science des relations qui lient la force au mouvement, ou plus exactement la science des relations qui identifient la force et le mouvement, la cause et l'effet en une unité indissoluble, l'élément matériel l'élément de masse qu'il faut considérer par conséquent comme un être essentiellement actif et que l'on devrait pour cette raison nommer élément dynamique.

Pour préciser et employer le langage ordinaire (dont nous comprendrons plus tard l'inexactitude) le double problème que l'on se propose en dynamique est le suivant :

1° Etant donné un corps et toutes les circonstances du mouvement qu'il possède, trouver l'expression de la force ou des forces (conception purement abstraite) qui rendait compte de ce mouvement.

2° Réciproquement. – Etant donné un corps et le système des forces qui lui sont appliquées déterminer toutes les circonstances du mouvement produit.

Or un système matériel pouvant être considéré ainsi qu'il a été dit en statique comme un ensemble de points matériels reliés par des actions attractives ou répulsives variables mais à chaque instant égales deux à deux et directement opposées pour étudier le mouvement que prend un pareil système sous l'action d'un système quelconque de forces, il faudra 1° étudier séparément le mouvement que tend à prendre chaque point matériel de ce système sous l'action a des forces extérieures qui lui sont directement appliquées b' et des actions qu'il reçoit des points matériels environnants.

2° – Connaissant ainsi le mouvement de chacun des points du système ou du corps donné, nous pourrons par suite définir le mouvement d'ensemble du système ainsi que les déformations moléculaires qu'il aura pu subir.

Nous diviserons donc l'étude de la Dynamique pure en deux parties principales.

1° La dynamique pure d'un point matériel, ou étude des relations qui existent entre le mouvement d'un point et le système des forces extérieures qui lui donnent naissance.

2° La dynamique pure des systèmes matériels ou étude des relations qui existent entre le mouvement de ce système, et le système des forces tant extérieures qu'intérieures qui donnent lieu à ce mouvement.

1ère Partie

Dynamique pure d'un point matériel

Chapitre 1er
Les Principes

Les lois de la Dynamique n'ont pu être établies qu'en partant d'un certain nombre de principes ou de vérités fondamentales dues à l'observation, ou du moins dont l'observation vérifie à chaque instant les conséquences.

Ces principes sont au nombre de quatre

1° Le principe d'inertie.

2° Le principe de Newton de l'égalité de l'action et de la réaction.

3° Le principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le point matériel sur lequel elle agit.

4° Le principe de l'indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel.

Art 1er. 1° Du principe d'Inertie. — L'été dernier, au début de notre enseignement nous nous sommes étendus longuement sur la signification vraie de ce principe. En voici l'énoncé :

Un point matériel ou un corps solide ne peut passer de lui même de l'état de repos à l'état de mouvement. Une fois en mouvement, il ne peut modifier de lui même son état de mouvement, en sorte que si aucune autre cause extérieure n'agit sur lui, la vitesse sera constamment la même en grandeur et direction, c'est à dire que son mouvement sera rectiligne et uniforme.

Je résume ce que j'ai développé l'été dernier dans une leçon d'ouverture. Ce principe d'inertie est purement abstrait et ne s'applique qu'à une abstraction, le point matériel ou le corps solide - si on voulait l'appliquer à un corps réel ou à un seul élément de matière réelle aussi bien qu'à un être animé, au sein desquels des actions intérieures énormes se produisent : on ferait une grave erreur.

Toute matière réelle en effet est constamment en mouvement, ce qu'en elle est inerte, inactif lorsqu'aucune action extérieure n'agit, c'est encore et seulement une pure abstraction, un simple point mathématique, le centre de gravité (Voir Dynamique des systèmes matériels - Théorème du mouvement du centre de gravité)

Le principe d'inertie appliqué à la matière réelle aussi bien à l'être animé qu'à un corps inorganique quelconque, signifie seulement que sans actions extérieures il ne peut prendre de mouvement d'ensemble tout actif qu'il soit autour de son centre de gravité. Cela est vrai pour la dernière particule de matière réelle isolée par la pensée du reste du monde, l'esprit ne peut la concevoir inactive sans par cela même détruire son existence. Son essence, ce qui fait qu'elle est, qu'elle vit, c'est son activité inté-rieure, mais cette activité intérieure, cette force en puissance qui constitue, disons plus qui est l'élément matériel lui même (car l'idée de matière pure et simple est tout à fait inintelligible, par suite son objet n'existe pas) cette activité intérieure dis-je est incapable seule de déplacer le centre de gravité de cet élément matériel - Pour que ce centre de gravité puisse se déplacer il faut que par suite du voisinage d'autres particules, cette activité intérieure donne naissance à des forces extérieures à l'élément considéré - Comme tout ce que nous venons de dire d'une seule particule de matière réelle est applicable à l'ensemble de toutes les particules de tous les corps constituant notre système solaire nous en conclurons que malgré les mouvements de tous ces corps les uns autour des autres (Mouvements qui sont intérieurs au système le centre de gravité général de ce système sera en repos absolu ou en mouvement rectiligne uniforme; si toutefois nous négligeons les actions extérieures très faibles que ce système reçoit des étoiles

J'insiste beaucoup sur ce principe d'inertie, c'est que mal compris il conduit à cette idée absurde parce qu'elle est contradictoire, que l'essence de la matière réelle, de ce qui est, est le repos absolu, l'inertie, la mort; en d'autres termes que l'essence de ce qui existe est ce qui n'existe pas car, encore une fois, repos absolu, inertie sont des idées purement négatives ne répondant à rien de réel

Retenons donc bien ceci 1°. Que l'essence de la matière réelle n'est pas le repos, l'inertie, la mort, mais au contraire, le mouvement, l'activité, la vie.

2° que la puissance intime qui anime chaque particule de matière réelle est cependant incapable si elle agit seule, de déplacer son propre centre de gravité - que pour que ce centre de gravité sorte de son repos il faut que par suite du voisinage d'autres particules cette activité intérieure puisse donner naissance à des forces extérieures.

Toutes ces idées se comprendront d'ailleurs avec la plus grande facilité lorsque nous aurons donné le théorème du mouvement du centre de gravité qui doit être considéré comme le complément obligé du principe d'inertie.

De l'idée abstraite d'inertie résulte la notion abstraite de force nom donné à toute cause capable de produire le mouvement ou de le modifier.

Mais en réalité la force n'existe pas plus que la matière considérée comme entité inerte - Force et matière sont deux abstractions de l'esprit n'ayant de réalité objective que dans leur union indissoluble. Cette unité indissoluble, c'est l'élément réel, l'élément dynamique des choses les renfermant toutes en puissance et les manifestant extérieurement en acte par le mouvement.

Pour résumer notre pensée, il n'y a pas trois choses, matière, force et mouvement il n'y en a qu'une, l'élément dynamique éternellement actif, ou force en puissance que l'esprit humain par une distinction purement logique conçoit à la fois comme cause sous le nom de force en puissance ou simplement de force et comme effet sous le nom de force en acte ou de mouvement

2° Principe de Newton de l'égalité de l'action et de la réaction.

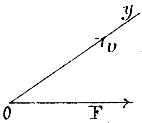
Nous avons dit également l'an dernier en quoi ce principe consistait. Soit un corps reposant sur un obstacle, la pression qu'il exerce sur lui est égale à la réaction due à cet obstacle qui empêche le corps de tomber: ici les deux forces égales et contraires sont attractives - Soit au contraire un poids attaché au bout d'une corde, l'action que le poids exerce sur la corde égale la traction de la corde sur le poids ici les deux forces égales sont répulsives - On peut exprimer ce principe de la manière abstraite qui suit.

Si A exerce sur B une attraction ou une répulsion, il en résulte nécessairement que B exerce sur A une attraction ou une répulsion égale mais de sens contraire.

De même que le principe du mouvement du centre de gravité est le complément obligé du principe d'inertie, de même le principe de d'Alembert que nous verrons plus loin est la généralisation du principe de Newton, c'est le principe de Newton appliqué au cas du mouvement.

Art. 11. 3° Principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le point matériel sur lequel elle agit.

L'effet produit par une force sur un point matériel est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce point.



Ce principe se comprend très bien à l'aide de la considération des mouvements relatifs dont nous avons déjà parlé.

Soit par exemple un mobile animé d'une vitesse initiale v dans la direction oy et supposons que ce mobile soit soumis à l'action d'une certaine force F. En vertu du mouvement initial antérieurement acquis le mobile aurait un mouvement rectiligne et uniforme suivant oy, en vertu de la force F seule, si le mobile partait du repos, il prendrait dans la direction de cette force F un mouvement dépendant de la nature de cette force.

Si l'on suppose actuellement que le mobile dans son premier mouvement antérieurement acquis entraîne en translation avec lui un système de comparaison dans lequel soit contenue la force F, le principe énoncé consiste en ce que la force F donne évidemment au mobile dans ce système de comparaison le même mouvement que s'il partait du repos de telle sorte que pour trouver le mouvement réel du point, il suffira de composer le mouvement rectiligne uniforme antérieurement acquis avec le mouvement de ce point par rapport aux axes mobiles dû à l'action de la force F agissant par supposition dans ce système mobile.

Il résulte de ce principe :

Que le mouvement d'un point matériel partant du repos et soumis à l'action d'une force de grandeur et de direction constante, est un mouvement rectiligne uniformément varié.

1er Cas. - En effet supposons que la force F au lieu d'agir d'une manière continue agisse par intermittences aussi rapprochées d'ailleurs qu'on le voudra.

Soit par exemple t la durée totale d'action de la force F et divisons cette durée en n intervalles θ de telle sorte que

$$t = n\theta \quad (n \text{ étant aussi grand qu'on le voudra})$$

A la fin du 1er intervalle de temps θ, la force F a donné au mobile une 1ère impulsion en vertu de laquelle il prend je suppose une vitesse a

A la fin du 2e intervalle, le mobile a reçu une 2ème impulsion égale à la 1ère (la force étant supposée constante) et si le mobile fut parti du repos il lui eut imprimé par suite la même vitesse a que précédemment ; mais en vertu du principe précédent le mouvement antérieurement acquis persistant, cette nouvelle vitesse a va se combiner avec la 1ère celle de ce mouvement antérieurement acquis et produire une vitesse totale $2a$, de même à la fin du 3e intervalle de temps, il y a production d'une vitesse $3a$ et à la fin du temps (1) $t = n\theta$ il y a production d'une vitesse totale : (2) $v = na$

Donc le mouvement du point pendant un temps quelconque s'effectue le long d'une droite de même direction que la force et dans le sens de son action et la vitesse dont ce point sera animé à un instant quelconque sera proportionnel au nombre total des actions que lui aura imprimé la force, c'est à dire au temps pendant lequel elle aura agi. Si n croît indéfiniment, la force agira par intermittences de plus en plus rapprochées, on se rapprochera ainsi de plus en plus du cas où la force agit d'une manière continue et la proposition subsistant quand même c'est à dire la vitesse étant toujours proportionnelle au temps, il en résultera que le mouvement sera uniformément varié. — Des deux égalités précédentes on peut tirer d'ailleurs :

$$\frac{v}{t} = \frac{a}{\theta} \qquad \text{d'où } v = \frac{a}{\theta}\,t = Jt \qquad J \text{ Constante}$$

$$\text{D'où} \qquad s = \frac{Jt^2}{2}$$

Réciproquement — Tout mouvement rectiligne uniformément varié est produit par une force constante en grandeur et en direction.

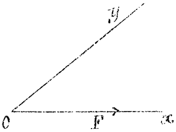
D'abord le point est soumis à l'action d'une force, autrement son mouvement serait uniforme. cette force ensuite est constamment dirigée dans le sens de la droite, car si pendant un instant très court, elle avait une direction différente, elle imprimerait au mobile une vitesse de même direction qu'elle, laquelle se combinerait avec celle dirigée suivant la droite pour produire une vitesse différente de direction que celle du mobile. Enfin la force est nécessairement constante en intensité car la vitesse augmente de quantités égales en temps égaux quelques petits soient ces temps.

Application. — Le mouvement des graves étant rectiligne et uniformément accéléré, il en résulte que la pesanteur est une force constante au moins dans les environs de la surface terrestre.

2me Cas. — Nous avons supposé jusqu'à présent que le mobile partait du repos si au moment de l'application de la force le mobile possédait une vitesse initiale v_0 dans la direction de cette force, en vertu toujours du même principe de la conservation du mouvement acquis, on aurait encore :

$$v = v_0 \pm Jt \qquad \text{d'où } s = v_0 t \pm \frac{Jt^2}{2}$$

3me Cas. — Enfin si la vitesse initiale n'est pas dirigée dans le sens de la force, soit oy la direction, ox étant celle de la force — Toujours en vertu du même principe, le mouvement absolu du point résultera du mouvement uniforme.



$$y = v_0 t \quad \text{suivant } oy$$

et du mouvement uniformément accéléré.

$$x = \frac{Ft^2}{2} \quad \text{suivant } ox$$

C'est le mouvement parabolique déjà étudié et dont on trouve un exemple dans le mouvement des projectiles.

Art III. — Le Principe de l'Indépendance des Effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel — Proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel.

Ce principe peut s'énoncer ainsi.

Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel chacune d'elle produit le même effet que si elle agissait seule.

En d'autres termes si un point matériel est soumis à l'action de plusieurs forces, on trouvera le mouvement qu'il prend à partir d'un instant quelconque en composant le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à la vitesse qu'il possède à cet instant avec les divers mouvements que chacune des forces lui communiquerait si elle agissait seule sur lui et qu'il partit du repos. Ce principe se comprend très bien comme le précédent par la Considération du mouvement relatif. Il suffira dans cette composition de mouvements de regarder l'un comme un mouvement relatif, les autres comme des mouvements d'entrainement de translation.

De ce principe résulte ce théorème qui domine toute la Dynamique.

<u>Les forces sont proportionnelles aux accélérations totales qu'elles impriment au même point matériel.</u>

Nous supposerons deux cas : 1°. Les forces que l'on compare sont constantes en grandeur et direction et elles agissent successivement sur un même mobile partant du repos.

2°. Les forces sont variables de grandeur et de direction et elles agissent sur un même point matériel, animé de vitesses initiales différentes, d'où résulte des mouvements curvilignes différents.

1er Cas. — Supposons qu'un point matériel sans vitesse initiale se mette en mouvement sous l'action d'une force F constante en grandeur et en direction et désignons par J l'accélération de son mouvement qui sera rectiligne et uniformément varié. Soit de même J' l'accélération du mouvement que prend ce même point matériel sous l'action d'une seconde force constante F' il s'agit de faire voir que

$$\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}$$

En effet désignons par f une certaine force commune mesure entre F et F' telle qu'on ait : $F = nf$, $F' = n'f$

c'est à dire que l'on considère la force F comme équivalente à n forces égales à f agissant simultanément sur le même point matériel et la force F' comme équivalente à n' de ces mêmes petites forces f

Soit dès lors j l'accélération du mouvement que chacune des forces f produit sur le point matériel, considéré lorsqu'elle agit seule. le mouvement que ce point prendra sous l'action simultanée de n forces f de même direction et de même sens s'obtiendra par la composition des divers mouvements rectilignes uniformément accélérés que chacune d'elles lui donnerait séparément, l'accélération dans le mouvement résultant sera donc la résultante des accélérations dans les mouvements composants ; Donc J cette accélération résultante sera égale à nj on aura donc $J = nj$

De même sous l'action de n' forces f ou sous l'action de la force F'. Ce point matériel prend une accélération $J' = n'j$

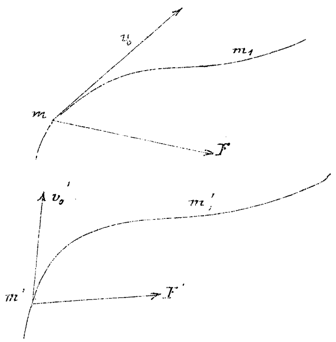
Les forces et les accélérations étant proportionnelles à n sur n' sont proportionnelles entre elles d'où $\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}$. C. q. f. d.

Corollaire — Un point matériel sollicité par une force variable agissant dans la direction de la vitesse initiale reçoit à deux instants quelconques des accélérations proportionnelles aux intensités de la force à ces deux instants.

Soient en effet à deux époques quelconques t, t' : F, F' les intensités de la force variable donnée et J J' les intensités des accélérations produites aux mêmes instants, comme on peut considérer la force variable donnée comme constante pendant un temps infiniment petit à ces deux époques t et t', il en résulte que le théorème précédent s'applique c'est à dire qu'on a encore :

$$\frac{J}{J'} = \frac{F}{F'} \quad \text{C q f d}$$

2me Cas. — Nous venons de démontrer la proportionnalité des forces aux accélération dans le cas où les forces F et F' étaient constantes en direction et le mouvement rectiligne, il reste à démontrer cette propriété dans le cas où les forces F et F' étaient quelconques et le mouvement est curviligne.



Soit par exemple $m\,m_1$ la trajectoire décrite par un point matériel sous l'action d'une force variable F, ce point étant animé de la vitesse initiale v_0; soit de même $m'm'_1$ la trajectoire curviligne décrite par le même point matériel sous l'action de la force variable F' ce point étant animé de la vitesse initiale v_0'. Il s'agit de faire voir qu'on a encore ici à chaque instant

$$\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}$$

J et J' représentant les accélérations totales de ces deux mouvements curvilignes à un certain instant.

En effet : Le mouvement du mobile m à une époque quelconque t pendant un petit temps dt peut être considéré comme résultant du mouvement dû à la vitesse acquise et du mouvement dû à l'action de la force F pendant ce temps : Par suite l'accélération totale du mouvement résultant est la résultante des accélérations totales des mouvements composants, or le mouvement dû à la vitesse acquise étant uniforme son accélération est nulle donc l'accélération totale résultante n'est autre que l'accélération J que la force F imprimerait au même mobile si la vitesse initiale était nulle.

De même l'accélération totale dans le second mouvement n'est rien autre chose que l'accélération J' que F' imprimerait au même mobile s'ils partent également du repos. On est donc ramené au 1er cas et on a par suite encore.

$$\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}$$

Ainsi donc les forces sont toujours proportionnelles aux accélérations totales qu'elles impriment au même point matériel, et elles sont dirigées dans les mêmes directions que ces accélérations totales.

Art. IV. Conséquences du principe précédent. — Masse des Corps

Du principe précédent de la proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles impriment au même point matériel résulte la notion de la masse des corps.

En effet si parmi les deux forces F, F' que l'on compare en les faisant successivement agir sur le même point matériel, je suppose que l'une d'elles soit précisément le poids P de ce point matériel ; nous aurons :

$$\frac{F'}{P} = \frac{J'}{g} \quad \text{d'où} \quad \frac{F'}{J'} = \frac{P}{g}$$

Si au lieu de comparer la force F' au poids P du point matériel sur lequel elle agit, je lui compare les forces F'' F''' etc. j'aurai de même $\frac{F''}{J''} = \frac{P}{g}$ $\frac{F'''}{J'''} = \frac{P}{g}$

Ainsi le quotient du nombre F qui mesure une force appliquée à un point matériel divisé par celui J qui mesure l'accélération totale qu'elle lui imprime est un nombre constant et égal au quotient du poids P de ce point matériel par g l'accélération terrestre correspondante, de telle sorte qu'on a toujours quelque soit F

$$(1) \quad \frac{F}{J} = \frac{P}{g}$$

Si nous transportons d'ailleurs ce même point matériel en différents lieux de la terre ou à différentes hauteurs de l'atmosphère : là même où toute attraction cesse. Sous l'action de la pesanteur variable en ces différents points et mesurée par les poids P' P'' P''' le point matériel prendra diverses accélérations g' g'' g''' etc, et on aura toujours en vertu du principe précédent :

$$\frac{P'}{g'} = \frac{P''}{g''} = \frac{P'''}{g'''} \ldots\ldots = \frac{P}{g} = m \quad (2)$$

Ainsi le rapport du poids d'un point matériel à l'accélération correspondante est un nombre constant non seulement pour les différents lieux de la terre, mais aussi pour les différents lieux des espaces célestes. Ce nombre constant s'appelle la masse du point considéré et se désigne par la lettre m.

De (1) et (2) on déduit : $\frac{F}{J} = m$

Telle est la relation qui lie la force F au mouvement caractérisé par l'accélération J, qu'elle produit, ou plutôt telle est la relation qui identifie la force et le mouvement dans un abstrait la masse m du point.

Cette relation est capitale en Dynamique. On en déduit :

1°. $$F = m\,J$$

qui signifie que l'expression d'une force F en fonction du mouvement qu'elle produit supposé connu par la quantité J est : m J

2°. $$J = \frac{F}{m}$$

qui signifie que connaissant l'expression F d'une force et la masse du mobile sur lequel elle agit, l'accélération totale J que cette force lui imprime est donnée par le rapport $\frac{F}{m}$

Corollaires. De ce que F = m J, c'est à dire de ce qu'une force a pour mesure le le produit de la masse du point matériel sur lequel elle agit par l'accélération totale qu'elle lui imprime on peut déduire les deux corollaires suivants :

1° Soit une force F agissant sur un point matériel de masse m en lui donnant une accélération totale J on aura : $F = mJ$ Supposons une autre force F', telle qu'en agissant sur un autre point matériel de masse m', elle lui imprime la même accélération J que précédemment on aura : $F' = m'J$.

De ces deux relations on conclut : $\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}$

Ce qui prouve que quand deux forces différentes agissent sur deux points matériels différents en leur imprimant la même accélération, ces forces sont exactement proportionnelles aux masses sur lesquelles elles agissent. On peut donc d'après cela définir physiquement la masse d'un corps en disant que c'est :

Cette qualité en vertu de laquelle il cède plus ou moins facilement à l'action des forces. (Voir plus loin le principe de d'Alembert.)

Si dans la relation fondamentale $F = mJ$ nous faisons $J = 1$ il reste $m = F$ c'est à dire que la masse d'un corps est égale à la force qu'il faudrait lui appliquer pour lui donner l'unité d'accélération

II Quand une même force agit sur des masses différentes m, m' elle leur imprime des accélérations $J\,J'$ en raison inverse de ces masses. En effet :

Des deux relations $F = mJ$ $F = m'J'$

On conclut : $\frac{J'}{J} = \frac{m}{m'}$ C. q. f. d.

Application. - L'an dernier nous avons parlé de la machine d'Atwood servant à vérifier les lois de la chute des corps. - Elle se compose comme on sait d'une poulie très mobile sur la gorge de laquelle repose un fil sans pesanteur aux extrémités duquel sont suspendus deux poids égaux P qui se font équilibre. - Si l'on place actuellement sur l'un des poids P un poids additionnel p, le système sous l'action de la force p se met en mouvement soit J l'accélération observée sur l'appareil, g étant l'accélération du corps tombant librement dans l'air, nous avons admis en 1re année que

$$J = g\frac{p}{2P+p}$$

il nous est facile actuellement de le démontrer.

En effet, en vertu du dernier corollaire : que le poids additionnel p tombe librement dans l'air en n'entraînant avec lui que sa propre masse $m = \frac{p}{g}$ ou qu'il tombe en entraînant avec lui non seulement sa masse $\frac{p}{g}$ mais encore la masse $\frac{2P}{g}$ des deux poids P, la force déterminant le mouvement dans les deux cas reste la même et égale à p, donc en vertu du dernier corollaire les accélérations produites seront en raison inverse des masses mises en mouvement, on aura donc :

$$\frac{J}{g} = \frac{\frac{p}{g}}{\frac{p+2P}{g}} = \frac{p}{2P+p}$$

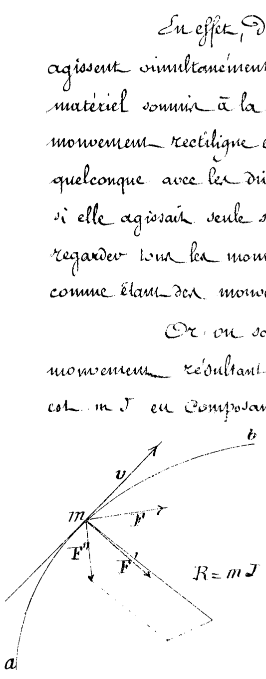
d'où $$J = g\,\frac{p}{2P+p} \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Art V. — Théorie de la Composition et de la décomposition des forces déduite du principe de la proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles impriment à un même point matériel.

Nous avons dit en statique que la force unique capable de donner à un point matériel le mouvement qu'il prend sous l'action des diverses forces qui le sollicitent simultanément s'appelle résultante de ces forces. Nous avons vu directement par une méthode géométrique plus ingénieuse que logique comment cette résultante s'obtenait au moyen des Composantes par la règle dite du polygone des forces. Nous allons faire voir ici à l'aide du principe de la proportionnalité des forces aux accélération que cette règle n'est qu'une Conséquence très simple de la règle du polygone des accélération totales.

En effet, d'après le 4e principe de l'indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel, le mouvement d'un point matériel soumis à la fois aux actions de plusieurs forces s'obtient en Composant le mouvement rectiligne et uniforme correspondant à la vitesse qu'il possède à un instant quelconque avec les divers mouvements que chacune des forces lui Communiquerait si elle agissait seule sur lui et qu'il partit du repos (et dans cette Composition on doit regarder tous les mouvements composants qui jouent le role de mouvements d'entrainement comme étant des mouvements de translation) :

Or on sait que dans ce cas, on trouve l'accélération totale J du mouvement résultant et par suite la direction de la résultante des forces dont l'intensité est mJ en Composant les accélérations totales des mouvements composants au moyen de la règle du polygone. Mais les forces étant proportionnelles aux accélérations totales et de même direction, si l'on représente les forces Composantes par des droites dont les longueurs soient proportionnelles à leurs intensités on formera un polygone semblable à celui des accélérations et par suite la résultante qui doit être dirigée suivant l'accélération totale résultante (



s'obtiendra par la même construction $C q f \delta$

Si d'ailleurs nous projetons ce polygone des forces sur un axe quelconque on sait que la projection de la résultante est la résultante des projections des composantes.

Art VI. – Conséquences de la théorie et des principes précédents, ou Identification de l'idée de force et de l'idée de mouvement.

1ère Conséquence. – On a vu en cinématique (Introduction à la Dynamique, art 3 Ch I) que l'accélération totale J dans le mouvement curviligne pouvait se décomposer à chaque instant en deux :

Une composante tangentielle $J_t = \frac{dv}{dt}$

Une composante normale $J_n = \frac{v^2}{\rho}$

Or m représentant la masse du mobile, l'accélération totale J est due à l'action d'une force totale R dont l'expression en vertu du principe de la proportionnalité des forces aux accélérations sera en fonction de J, c'est à dire en fonction du mouvement produit $R = mJ$

mais cette force totale peut être remplacée également par ses deux composantes tangentielle et normale dont les expressions en fonction du mouvement sont nécessairement

$$(1)\quad R_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$(2)\quad R_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

La 1ère se nomme force tangentielle, c'est elle seule qui produit les changements de vitesse du mobile sur sa trajectoire. La 2de se nomme force centripète elle ne concourt en rien aux changements de vitesse du point elle donne lieu seulement au changement de courbure.

Ainsi l'on peut dire 1° que si un mobile de masse m parcourt une trajectoire donnée avec un mouvement connu, c'est qu'il est sollicité à chaque instant par une force totale R dont les composantes tangentielle et normale ont en fonction de ce mouvement les expressions précédentes (1) et (2)

2° Réciproquement, si un mobile de masse m animé d'une certaine vitesse initiale v_0 est sollicité par un ensemble de forces dont la résultante soit R. La loi de son mouvement sur sa trajectoire sera :

$$R_t = m\frac{dv}{dt}$$

et si R et par suite R_t est donné en fonction du temps, on pourra par deux intégrations successives en déduire la loi des vitesses et celle des espaces.

Quant à la nature de la trajectoire parcourue elle sera donnée par la relation

$$R_n = \frac{v^2}{\rho}$$

qui fera connaître son rayon de courbure à chaque instant.

Cas particuliers. — I Supposons qu'un mobile de masse m se meuve d'un mouvement varié rectiligne, et soit J l'accélération de ce mouvement donnée en fonction du temps.

Ici l'accélération normale et par suite la composante normale ou centripète de la force totale sollicitant le mobile étant nulle, cette force totale se réduit à sa composante tangentielle dont l'expression en fonction du mouvement donné sera.

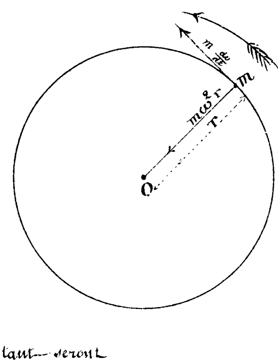
$$R = R_t = m J$$

Réciproquement. On donne la force R sollicitant un mobile dans la direction de la trajectoire supposée rectiligne — On en conclut les lois du mouvement de ce mobile en intégrant deux fois la relation : $m J = R$ ou $m \frac{dv}{dt} = R$

II Supposons que le mobile de masse m décrive un cercle r d'un mouvement uniforme avec la vitesse v. L'accélération tangentielle étant nulle, il en est de même de la force tangentielle par suite la force totale sollicitant le mobile se réduit à sa composante centripète toujours dirigée vers le centre du cercle et ayant pour valeur :

$$R = R_r = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r$$

en remplaçant v par ωr, sa valeur en fonction de la vitesse angulaire ω



Réciproquement. — Si un mobile de masse m est lancé avec une certaine vitesse initiale v et qu'il soit soumis à l'action d'une force constante donnée R toujours dirigée vers un centre il décrira un cercle dont le rayon sera donné par la relation.

$$R = m \frac{v^2}{r}$$

III — Enfin supposons que le mobile de masse m parcoure le cercle r d'un mouvement varié, les composantes de la force qui le sollicite à chaque instant seront

$$R_t = m \frac{dv}{dt}$$

$$R_n = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r, \omega \text{ étant variable à chaque instant}$$

Réciproquement — un mobile de masse m est assujetti à se mouvoir sur un cercle de rayon r, sous l'action d'un certain système de forces F dont je désigne par R la résultante, on demande la loi de son mouvement sur ce cercle. Cette loi sera donnée par la relation :

$$m \frac{dv}{dt} = R_t .$$

mais puisque $v = \omega r$: $dv = r\,d\omega$ — Remplaçant dv par sa valeur dans l'expression précédente, puis multipliant les deux termes par r il vient :

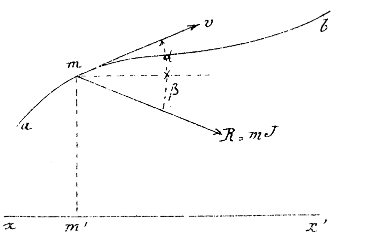
$$m\, r^2\, \frac{d\omega}{dt} = R_t\, r = \mathcal{M}_o R \quad \text{d'où} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{R_t\, r}{m r^2} = \frac{\mathcal{M}_o R}{m r^2}$$

Or le numérateur de cette expression donnant l'accélération angulaire du mouvement est précisément le moment de la force R par rapport au centre O du cercle lequel est égal à la somme des moments de ses composantes F, on peut donc remplacer $R_t r$ par $\Sigma \mathcal{M}_o F$. Quant au dénominateur c'est le produit de la masse du mobile par le carré de sa distance à l'axe cette quantité s'appelle le moment d'inertie de ce point et se désigne par la lettre I. On pourra donc écrire la relation précédente : $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{I}$

Relation qu'il suffirait d'intégrer deux fois de suite pour avoir la vitesse angulaire à chaque instant ainsi que l'angle décrit. Cette relation est donc l'équation différentielle du mouvement du point dans le cas particulier où ce mouvement est circulaire.

2ème Conséquence. – Nous avons dit en Cinématique (Introduction à la Dynamique – Fin de l'Art III Ch. 1er) que si on projette sur un axe quelconque le mouvement d'un point matériel, le mobile projection se mouvait comme s'il était animé à chaque instant d'une vitesse égale à la projection de la vitesse de l'espace et soumis à une accélération égale à la projection de l'accélération totale du mobile dans l'espace.

Soit par exemple un mobile de masse m décrivant la trajectoire ab et soit à un instant quelconque v et J la vitesse dont il est animé et l'accélération à laquelle il est soumis. Si nous considérons le mobile projection m' en vertu de ce qui précède, il possèdera à chaque instant une vitesse.



$$(1)\quad v_x = v \cos \alpha$$

et sera soumis à une accélération.

$$(2)\quad J_x = J \cos \beta$$

Soit X la force inconnue dirigée suivant xx' donnant lieu à cette accélération on a :

$$J_x = \frac{X}{m} \quad (3)$$

d'autre part, l'accélération totale J est due à l'action d'une force R dont l'expression en fonction de la masse m du mobile et de cette accélération est $\quad R = m\, J \quad (4)$

Si actuellement je remplace J_x et J par leurs valeurs (3) et (4) dans (2) cette relation devient : $\quad \dfrac{X}{m} = \dfrac{R}{m} \cos \beta \quad$ d'où enfin $X = R \cos \beta$

c'est à dire que la force inconnue qui sollicite le mobile projection est précisément la projection de la force R de l'espace. On peut donc dire encore : – Si un point matériel

Si un point matériel de masse m se meut dans l'espace en vertu d'une vitesse initiale V et sous l'action d'une force R constante ou variable, et que l'on projette à chaque instant ce mobile sur un axe quelconque, cette projection s'y mouvra comme un corps qui ayant même masse m que le mobile de l'espace aurait pour vitesse à chaque instant $v_x = V \cos\alpha$ c'est à dire la projection de la vitesse V de l'espace et serait soumis à chaque instant à la force $R \cos\beta$ projection de la force R de l'espace.

3e Conséquence. Soit un point de masse m en mouvement relatif dans un système de comparaison mobile. nous avons vu en Cinématique (Introduction à la Dynamique. Ch IV.) que dans le cas où le mouvement du système de comparaison est quelconque, l'accélération totale J du mouvement absolu résultant est la résultante des trois accélérations totales J_r du point dans son mouvement relatif J_e et J_c dans le mouvement que possède le point par suite de sa liaison au système de comparaison. ce qu'on exprime par le symbole

$$J = \text{Résult.}\,(J_r, J_e, J_c) \qquad J_c = 2\,\omega\, V_r \sin\alpha$$

On en conclut d'après tout ce qui précède que :

$$m\,J = \text{Résult}\,(m\,J_r,\ m\,J_e,\ m\,J_c)$$

C'est à dire que la force totale qui sollicite le mobile dans son mouvement absolu est la résultante des trois forces qui le sollicitent dans ses trois mouvements composants, l'un relatif, les deux autres d'entraînement de rotation et de translation instantanées.

On déduit d'ailleurs aussi de cette formule symbolique.

$$m\,J_r = \text{Résult}\,(m\,J,\ -m\,J_e,\ -m\,J_c)$$

Résultat qui signifie que pour l'observateur lié au système des axes mobiles, qui ne peut avoir par suite conscience du mouvement dont il est animé, le mobile se meut non comme s'il était soumis à la seule force réelle absolue $m\,J$, mais comme s'il était soumis à la fois aux trois forces

$$m\,J,\quad -m\,J_e,\quad -m\,J_c$$

Ces deux dernières dites forces apparentes dans le mouvement relatif sont égales et contraires à celles qui devraient agir sur le point pour lui donner le mouvement qu'il possède par suite de sa liaison avec le système des axes mobiles. (Voir plus loin. Mouvements relatifs)

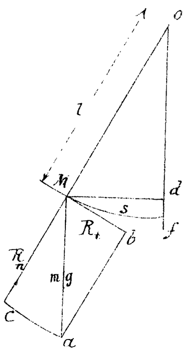
De cette assimilation des résultats de la Cinématique pure aux questions de de dynamique, concluons donc d'une manière générale que tout ce que nous avons dit des accélérations totales s'applique aux forces et réciproquement, ce qui se comprend bien puisque la force ne diffère de l'accélération totale que par une constante la masse du point matériel sur lequel elle agit en vertu de la relation

$$F = m J \quad \text{ou} \quad J = \frac{F}{m}$$

et si nous faisons d'ailleurs $m = 1$ il résultera $F = J$ ce qui signifie que la quantité purement géométrique et abstraite appelée accélération n'est autre chose que la force rapportée à l'unité de masse et réciproquement. (Poisson)

De cette identification de la force à l'accélération, il résulte que tous les problèmes que nous avons résolu dans l'Introduction à la Dynamique en partant de la notion d'accélération, peuvent être repris et traités avec la même facilité en partant de la notion de force.

Reprenons par exemple l'étude du pendule simple.



Soit M la position du mobile de masse m à un instant quelconque de son mouvement, il est soumis à son poids $p = mg$.

Décomposons cette force verticale en ses deux composantes normale et tangentielle. La composante normale est détruite par la résistance du fil, quant à la composante tangentielle R_t elle aura pour expression en comparant les triangles semblables MCa, OMd :

$$R_t = mg \cdot \frac{Md}{l}$$

mais si nous supposons les écarts très petits Md se confondra sensiblement avec l'arc Mf, en le désignant par s on aura donc

$$R_t = mg \cdot \frac{s}{l}$$

Or cette force tangentielle proportionnelle à s donne bien à une accélération tangentielle.

$$J_t = \frac{R_t}{m} = \frac{g}{l} s = K s$$

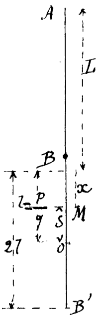
proportionnelle à la distance du point M au point fixe f. On en conclut donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{C.q.f.d.}$$

Donnons encore un autre exemple :

Étudions par exemple le mouvement oscillatoire d'un point matériel, d'un poids $p = mg$ suspendu à l'extrémité d'un fil métallique élastique.

Soit un fil élastique AB de longueur L suspendu en A. En B j'applique brusquement le poids $p = mg$. La tige prend alors un mouvement oscillatoire. On demande la durée de la double oscillation ainsi que les lois du mouvement.



Soit M la position du mobile à une distance x de l'origine B à une époque quelconque du mouvement. A cet instant il est soumis à la force $F = p - N$ N représentant la résistance du fil.

En admettant que cette résistance soit proportionnelle à l'allongement on pourra poser:

$$N = qx \quad \left[q = \frac{E\Omega}{L} \ \ \Omega \text{ section du fil, E coefficient d'élasticité}\right]$$

et écrire par suite: $F = p - qx = -q\left(x - \frac{p}{q}\right)$

Posons $-\left(x - \frac{p}{q}\right) = s$ il viendra

$$(1) \quad F = qs$$

Prenons sur la figure un point O à une distance du point B de la quantité $\frac{p}{q}$ que je désigne par la seule lettre l — Alors la quantité désignée par s sera représentée dans cette figure par la distance OM — La formule (1) montre donc que la force sollicitant le mobile constamment dirigée vers le point O qui joue le rôle de centre d'attraction est constamment proportionnelle à la distance s du mobile à ce point fixe O

Cette force imprime au mobile une accélération

$$J = \frac{F}{m} = \frac{q}{m}\, s = ks$$

dirigée de M vers O, et qu'il faut par suite prendre avec le signe —

Cette accélération étant aussi proportionnelle à la distance du mobile au point O, on en conclut en vertu du principe connu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{q}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{p}{q}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (T')$$

Ainsi la durée de l'oscillation est la même que celle d'un pendule simple dont la longueur serait $l = \frac{p}{q}$ moitié de l'amplitude.

Quant aux lois des espaces, vitesses et accélérations en fonction du temps elles seront données en se rappelant: [Fin de l'Art III. Ch. 1er de l'Introduction à la Dynamique] par les formules.

(2) $S = a \cos\left[\sqrt{K}.t\right] = l \cos\left[\sqrt{\frac{g}{l}}.t\right]$

(3) $V = a\sqrt{K} \sin\left[\sqrt{K}.t\right] = -l\sqrt{\frac{g}{l}} \sin\left[\sqrt{\frac{g}{l}}.t\right]$

(4) $J = -Ka \cos\left[\sqrt{K}.t\right] = -g \cos\left[\sqrt{\frac{g}{l}}.t\right]$

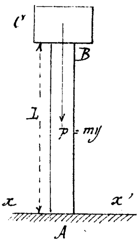
Dans lesquelles $l = \frac{p}{q}$, q étant égal à $\frac{E\Omega}{L}$

Si je veux avoir une relation entre v et s, il suffit d'éliminer le temps t entre (2) et (3) ce qui donne : (5) $v^2 = \frac{g}{l}\left(l^2 - s^2\right)$

Si je voulais une relation entre v et x comme $x = l - s$ en substituant dans la précédente, j'aurais :

$$(6)\quad v^2 = \frac{g}{l}\left(2lx - x^2\right)$$

Remarque. Si l'on proposait actuellement la question suivante : Étudier le mouvement oscillatoire d'un corps C de poids $p = mg$, placé sur l'extrémité B d'un prisme élastique fixé verticalement en A sur un sol parfaitement inébranlable. On observerait que le problème est identique au précédent et en raisonnant par suite comme il précède, en changeant le mot allongement en raccourcissement et le mot résistance du fil en réaction du prisme sur le Corps, on prouverait



1° Que le raccourcissement ou la déformation maximum a pour expression $2l = 2\frac{p}{q}$ $\quad q = \frac{E\Omega}{L}$ (E Coefficient d'élasticité à la compression)

2° Que l'intensité de la réaction N ou de l'action mutuelle au contact du prisme et du Corps C dont l'expression générale est $N = qx$ passe par un maximum pour x maximum, c'est à dire pour $x = 2\frac{p}{q}$, que par suite cette réaction maximum a pour expression $N_m = 2p$.

3° Que la durée de la double oscillation du Corps C a pour expression

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{p}{q}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\cdot\frac{p}{E\Omega}}$$

Nous verrons plus tard l'importance de cette remarque à propos de la question de la durée et de l'intensité du choc (Dynamique pure des systèmes matériels. Ch. V. Art. IV)

Art. VII. — Solution générale du double problème constituant l'objet de la Dynamique pure d'un point matériel. — Nous avons déjà fait comprendre dans l'article précédent (1ère conséquence) comment la relation fondamentale entre la force et l'accélération

$$F = mJ$$

renfermait la solution du problème général constituant l'objet de la Dynamique pure. Nous terminons ce chapitre en exposant la méthode générale à suivre pour résoudre ce problème dans tous les cas possibles.

Problème direct. — Toutes les circonstances du mouvement d'un point de masse m

étant données. Trouver en fonction de ce mouvement la force qui lui donne naissance.

Supposons que le mouvement de ce mobile nous soit donné par ses projections sur trois axes rectangulaires.

$$x = f(t) \quad y = \varphi(t) \quad z = \psi(t)$$

Nous avons vu (Introduction à la Dynamique Art IV du Chap Ier) comment on déduisait à chaque instant de ces données l'intensité et la direction de l'accélération totale J de ce mouvement. Ayant cette accélération pour trouver la force cherchée il suffira de la multiplier par m en vertu de la relation

$$F = m\,J$$

Application. Les lois du mouvement d'un mobile de masse m sont :

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \sin \omega t$$

on demande l'expression de la force qui le produit.

– Problème inverse. Etant donnée la force agissant sur un mobile de masse m et les circonstances initiales du mouvement de ce mobile, trouver tous les éléments du mouvement produit.

Supposons que la résultante R des forces données ait pour projections sur trois axes rectangulaires : $X\ Y\ Z$.

Les composantes $J_x\ J_y\ J_z$ de l'accélération totale que cette force R imprime au mobile seront alors données par les relations :

$$(1)\ m\,J_x = X \quad (2)\ m\,J_y = Y \quad (3)\ m\,J_z = Z$$

dites équations différentielles du mouvement du point.

On en déduit :

$$J_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{X}{m} \quad J_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{Y}{m} \quad J_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{Z}{m}.$$

Desquelles on conclut par deux intégrations successives en ajoutant les six constantes $x_0 y_0 z_0$, $v_x\ v_y\ v_z$ qui définissent l'état initial du mobile ; les équations

$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

qui définissent complètement le mouvement cherché.

Corollaire. – Conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un seul point matériel.

On a démontré directement en statique que pour que le système soit en équilibre il suffisait que la somme algébrique des projections de toutes les forces sur trois axes rectangulaires soit nulle séparément, c'est à dire qu'on ait :

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

Nous pouvons arriver à ces mêmes conditions en considérant l'équilibre ou l'état statique comme un cas particulier du mouvement.

En effet. quelque soient les forces données, le mouvement qu'elles impriment au mobile est complètement défini par les équations différentielles (1), (2) (3) — Si maintenant je suppose qu'il y ait équilibre entre ces forces cela veut dire que le mouvement du point est nul ou rectiligne uniforme dans les deux cas l'accélération totale du mouvement est nulle, or si cette accélération totale est nulle, il en sera de même de ses composantes J_x J_y J_z — Si donc, je fais $J_x = 0$ $J_y = 0$ $J_z = 0$ dans (1) (2) (3), elles se réduisent en effet, comme on voit aux conditions.

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

C q f. d

Chapitre II.

Théorèmes généraux de la Dynamique pure d'un point matériel.

Transition. — Nous venons d'exposer en terminant le Chapitre précédent la solution du double problème constituant l'objet de la Dynamique pure d'un point matériel, il semble donc qu'il ne reste rien à ajouter à ce sujet

Cependant si l'on remarque que l'application de cette méthode générale aux cas particuliers est parfois longue et pénible ; on est amené à rechercher, par l'application des mêmes principes qui nous ont conduit à cette méthode générale, des méthodes particulières présentant moins de généralité que la précédente mais par cela même plus directement applicables à telle ou telle nature de questions. — Tel est l'objet des Théorèmes généraux de la Dynamique, ils présentent sous une forme facile à retenir, certaines propriétés du mouvement, immédiatement applicables aux problèmes et que donnerait d'ailleurs mais avec plus de difficultés l'intégration directe des équations différentielles auxquelles donne lieu chaque problème particulier.

Ces théorèmes généraux sont au nombre de trois.

1° Le Théorème des quantités de mouvement.

2°. Le théorème des moments des quantités de mouvement d'où on déduit le théorème des aires.

3°. Le théorème du travail ou des puissances vives.

Nous allons les passer successivement en revue.

Art 1er. Théorème des quantités de mouvement.

Soit d'abord F une force constante en grandeur et direction agissant sur un mobile de masse m animé d'une vitesse initiale v_0 dans la direction de la force, elle imprime, comme on sait, à ce point matériel un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est :

$$J = \frac{F}{m}$$

La vitesse à une époque quelconque de la durée sera par suite donnée par la formule

$$(1) \quad v = v_0 + \frac{F}{m} t$$

D'où on déduit : $(2) \quad m v - m v_0 = F t$

Le produit Ft de la force par sa durée d'action s'appelle l'impulsion de cette force ; le produit $m v_0$ de la masse du mobile par sa vitesse initiale est la quantité de mouvement initiale du mobile, le produit $m v$ de la masse par la vitesse finale est la quantité de mouvement finale possédée par le mobile après l'action de la force. — L'égalité précédente (2) peut donc se formuler ainsi :

Théorème. — La variation de quantité de mouvement pendant un certain temps est égale à l'impulsion de la force pendant ce temps.

Si dans cette relation (2) on fait $v_0 = v$, il reste.

$$m v = F t$$

c'est à dire que la quantité de mouvement acquise à partir du repos est égale à l'impulsion de la force pendant toute la durée d'action.

Supposons que la force F agisse en sens inverse de la vitesse v_0 jusqu'à ce que celle-ci se soit annulée on aura alors

$$m v_0 = F t$$

c'est à dire que la quantité de mouvement détruite est égale à l'impulsion de la force retardatrice produisant cette destruction de mouvement. — Cette relation montre qu'il est impossible de détruire une quantité de mouvement finie dans un temps infiniment petit.

Supposons que deux forces inégales $F F'$ agissent pendant le même temps t sur deux points matériels différents m, m'. En appliquant le théorème à ces deux forces, on aura :

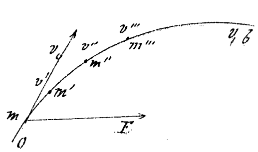
$$\left.\begin{array}{l} mv - mv_0 = Ft \\ m'v' - m'v'_0 = F't \end{array}\right\} \text{d'où } \frac{F}{F'} = \frac{mv - mv_0}{m'v' - m'v'_0}$$

c'est à dire que les quantités de mouvement acquises par ces deux points sont précisément proportionnelles aux forces qui les ont produites dans un même temps. Si les deux points partaient du repos, on aurait simplement :

$$\frac{F}{F'} = \frac{mv}{m'v'}.$$

Nous avons supposé la force F constante en grandeur et direction et le mouvement rectiligne. Voyons maintenant ce que devient la relation (2) dans le cas général d'une force F variable en grandeur et en direction agissant sur un mobile de masse m animé d'une vitesse initiale v_0 dont la direction n'est pas celle de la force.

Soit ab la trajectoire parcourue par le mobile m animé de la vitesse initiale v_0 sous l'action de la force F. Nous avons dit que le mouvement d'un mobile sur sa trajectoire et par conséquent ses variations de vitesse et par suite de quantité de mouvement ne dépendaient que de la composante tangentielle F_t de la force totale F sollicitant le mobile. De telle sorte que le mouvement de ce mobile sur sa trajectoire ab sous l'action de la force F est le même que si ce mouvement s'effectuait sur une droite sous l'action de la force F_t. Ceci rappelé soit t, la durée d'action de la force F et par conséquent de sa composante tangentielle F_t, décomposons cette durée en éléments $\theta' \theta'' \theta'''$... assez petits pour que pendant la durée de chacun d'eux on puisse considérer l'intensité de la force F et par conséquent de sa composante



F_t comme constante et soient $F'_t\ F''_t\ F'''_t$ ..... ces intensités pendant les petits temps $\theta'\theta''\theta'''$..

Considérons le 1er élément de temps θ', pendant ce temps, le mobile parcourt un petit élément de chemin, sensiblement rectiligne mm' sous l'action de la force sensiblement constante F'_t dont la direction se confond sensiblement avec celle de cet élément, le mouvement est donc sensiblement uniformément accéléré, dès lors nous rentrons sensiblement dans le cas précédent et pour cette durée θ' nous aurons sensiblement.

$$mv' - mv_0 = F'_t \theta'$$

De même pour le second temps θ'' on aura :

$$mv'' - mv' = F''_t \theta''$$

pour le 3e; θ''' ..... $m v''' - m v'' = F_t''' \theta'''$

et ainsi de suite ....

....

Pour le n^{me} et dernier intervalle θ^n, on aura:

$$m v - m v^{n-1} = F_t^n \theta^n$$

Et en faisant la somme: $m v - m v_0 = \Sigma F_t \theta$

Cette dernière relation s'approche d'autant plus de la réalité que les temps θ sont plus petits, à la limite on aura donc rigoureusement:

$$m v - m v_0 = \int_0^t F_t \, dt$$

Le produit $F_t dt$ s'appelle l'impulsion élémentaire de la force F, la relation obtenue signifie donc encore que la variation de quantité de mouvement pendant le temps t est égale à la somme intégrale des impulsions élémentaires de la force F pendant ce temps.

On aurait pu arriver immédiatement à ce résultat en faisant usage de la méthode infinitésimale. En effet: quelque soit le mouvement du point m sous l'action de la force variable F, l'équation différentielle du mouvement de ce point sur sa trajectoire est $m \frac{dv}{dt} = F_t$ d'où $m dv = F_t dt$

Intégrant et ajoutant la constante, on a immédiatement

$$m v - m v_0 = \int_0^t F_t \, dt \quad \text{C. q. f. d.}$$

Si le point matériel m au lieu d'être sollicité par une seule force F est sollicité à la fois par plusieurs, le théorème précédent subsiste pour la résultante de ces forces mais comme l'impulsion de la résultante est évidemment égale à la somme des impulsions des composantes, on pourra énoncer le théorème en disant que la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des impulsions de toutes les forces agissantes ce qui s'exprime par l'égalité:

$$m v - m v_0 = \Sigma \int F_t \, dt$$

Enfin si l'on projette le mouvement du point m sur un axe quelconque on sait que le mobile projection se meut sur cet axe comme un mobile de même masse m sollicité par une force constamment égale à la somme des projections sur cet axe de toutes les forces agissant sur le mobile de l'espace. On aura donc en appliquant le théorème précédent à la projection du mouvement donné sur trois axes rectangulaires.

$$m v_x - m v_{0_x} = \sum \int_0^t F_x \, dt$$
$$m v_y - m v_{0_y} = \sum \int_0^t F_y \, dt$$
$$m v_z - m v_{0_z} = \sum \int_0^t F_z \, dt$$

Article II – Théorème des moments des quantités de mouvement – Théorème des aires

Considérons un mouvement curviligne s'effectuant dans un seul plan en vertu de la force F – Soit v_0 la vitesse du mobile M à l'époque t, à l'époque t + dt, le mobile est venu en M' et sa vitesse est devenue v', laquelle résulte comme on sait de la vitesse v précédente et de la vitesse acquise pendant le temps dt en vertu de la force F laquelle est $J\,dt$ ou $\frac{F}{m}\,dt$

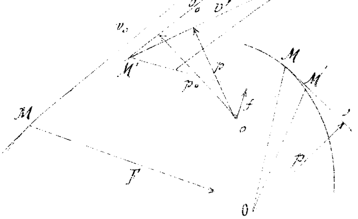
Appliquons actuellement au parallélogramme M'PQ le théorème de Varignon ou des moments par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la courbe et projeté en O, on aura : $v' p' = v_0 p_0 + \frac{F}{m} dt . f$

D'où on conclut : $m v' p' - m v_0 p_0 = F dt . f$

exprimant que l'accroissement du moment de la quantité de mouvement pendant le temps dt est égal au moment de l'impulsion pendant ce même temps dt

Posant des équations analogues pour tous les temps dt composant le temps fini t et faisant la somme on a enfin : $m v . p - m v_0 . p_0 = \int_0^t F dt . f$ (1)

c'est à dire que l'accroissement total qu'éprouve le moment de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport à un point du plan de sa trajectoire pendant un intervalle de temps quelconque est égal à la somme des moments par rapport à ce point, des impulsions élémentaires de la force correspondant aux divers éléments de ce temps



Théorème des aires – Supposons que la direction de la force F passe constamment par le point O pris pour centre des moments le moment de toutes les impulsions élémentaires sera alors constamment nul, le second membre de l'équation (1) sera constamment nul et il restera par conséquent

$$m v p - m v_0 p_0 = 0 \quad \text{ou bien :}$$
$$v p = v_0 p_0 = \text{Constante}$$

Ainsi dans ce cas le mouvement est tel que le produit de la vitesse tangentielle v par la distance p du point O à cette vitesse est une quantité constante.

Multiplions cette quantité constante vp par $\frac{\theta}{2}$ θ étant un intervalle de temps fini et constant aussi petit que possible, le produit:

$$v\,p\,\frac{\theta}{2}$$

ne cessera pas d'être constant quelque soit la position du mobile sur sa trajectoire mais ce produit que l'on peut écrire

$$v\,\theta.\frac{p}{2}$$

est précisément la mesure de la surface du triangle OMM' formé par les rayons vecteurs menés du point O aux positions qu'occupe le mobile au commencement et à la fin du temps θ. Donc les aires décrites pendant des éléments de temps successifs et égaux θ par le rayon vecteur qui joint le mobile au point O sont égales entr'elles, on en conclut:

Que l'aire décrite par le rayon vecteur pendant un temps quelconque est proportionnelle à ce temps.

C'est en cela que consiste le théorème des aires.

Réciproquement — Si le mouvement d'un point matériel s'effectue dans un plan, de telle manière que le rayon vecteur qui joint ce point mobile à un point fixe O du plan décrive des aires proportionnelles aux temps employés à les parcourir, la force qui agit sur le point matériel reste toujours dirigée vers ce point O - En effet.

S'il en était autrement, le moment de l'impulsion élémentaire de cette force par rapport au point O ne serait pas constamment nul, donc le moment de la quantité de mouvement du mobile par rapport à ce point O changerait de valeur avec le temps et par suite l'aire élémentaire $v\,\theta\frac{p}{2}$ varierait d'un instant à l'autre ce qui est contraire à l'hypothèse.

Application - L'observation prouvant que la terre décrit autour du soleil des aires proportionnelles aux temps il en résulte que la force qui sollicite la terre est constamment dirigée vers le centre du soleil.

Art - III - Théorème du travail ou des puissances vives.

Soit d'abord F une force constante en grandeur et en direction agissant sur un mobile de masse m possédant à l'instant initial une vitesse V_0 dans la direction de la force. On sait que cette force imprime au mobile un mouvement uniformément accéléré, dont l'accélération est:

$$J = \frac{F}{m}$$

les lois de ce mouvement uniformément accéléré étant :

$$(1) \quad v = v_0 + \frac{F}{m} t$$

$$(2) \quad s = v_0 t + \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Si j'élimine le temps entre (1) et (2) j'aurai d'abord en élevant (1) au carré

$$(3) \quad v^2 - v_0^2 = \left(\frac{F}{m}\right)^2 t^2 + 2 v_0 \frac{F}{m} t$$

Puis en multipliant (2) par $2\frac{F}{m}$

$$(4) \quad 2 \frac{F}{m} . s = \left(\frac{F}{m}\right)^2 t^2 + 2 v_0 \frac{F}{m} t$$

De (3) et (4) on déduit enfin :

$$(5) \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F s$$

Le produit de la force F par le chemin s décrit par son point d'application est ce que nous avons appelé en statique le travail de la force F

La quantité $\frac{1}{2} m v_0^2$ s'appelle puissance vive initiale

$\frac{1}{2} m v^2$ — d° — finale

Dès lors l'équation (5) peut s'exprimer ainsi :

Théorème. — La variation de puissance vive, répondant à un certain temps d'un mobile sollicité en ligne droite par une force constante est précisément égale au travail de cette force pendant le même temps.

Si $v_0 = 0$ Il reste $\frac{1}{2} m v^2 = F s$

Ce qui signifie que pour qu'un mobile partant du repos gagne une puissance vive $\frac{1}{2} m v^2$ due à une vitesse v, il faut exercer sur lui un travail égal : $F s$

Si dans la même formule nous faisons $v = 0$ il reste :

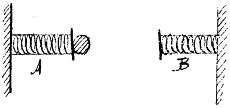
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = F s$$

ce qui signifie que pour anéantir la puissance vive $\frac{1}{2} m v_0^2$ possédée par un mobile en vertu de sa vitesse acquise v_0, il faut exercer sur ce mobile en sens contraire de la vitesse v_0 qu'il possède un travail résistant $F s$ juste égal au travail qu'il faudrait exercer sur lui pour lui communiquer la vitesse v_0

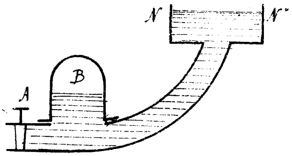
Ainsi dans le premier cas une certaine quantité de travail a été dépensée et s'est transformée en une quantité égale de puissance vive.

Dans le second cas au contraire une certaine quantité de puissance vive s'est en se dépensant transformée en une quantité équivalente de travail. — Pour faire comprendre cette transformation imaginons deux ressorts à boudin A et B placés, …

en regard l'un de l'autre, une bille est appuyée contre le 1er ressort, on lâche la détente le ressort se détend effectue un certain travail qui se transforme en puissance vive. En vertu de cette puissance vive communiquée à la bille, elle vient frapper le second ressort B et le comprime jusqu'à ce que sa vitesse s'annule. Donc ici la puissance vive du mobile transformation du travail effectué par A, se dépense en se retransformant en travail de compression du ressort B ... et ainsi de suite.



Autre exemple. - Soit une conduite d'eau, le robinet A étant ouvert il y a écoulement avec la vitesse constante v. je suppose, par suite la masse d'eau comprise entre le robinet A et le niveau N N' possède une puissance vive



$$\frac{1}{2} m v^2$$

Actuellement, fermons subitement le robinet A, la vitesse v s'anéantissant brusquement, il en est de même de la puissance vive $\frac{1}{2} m v^2$, mais cette puissance vive ne peut se détruire, elle ne peut que se transformer en travail or les parois de la conduite étant inextensibles, il va résulter de la fermeture brusque du robinet A un choc violent de l'eau contre les parois dit coup de bélier lequel amènera infailliblement la rupture de la conduite. Pour l'éviter on établit en amont du robinet A un réservoir d'air B; lorsqu'on ferme alors le robinet A la puissance vive $\frac{1}{2} m v^2$ se transforme en travail en comprimant l'air du réservoir, puis cet air se détend et refoule la colonne en sens contraire, il y a alors transformation de travail en puissance vive, la colonne liquide prend donc aussi un mouvement oscillatoire par une série de transformations de travail en puissance vive et de puissance vive en travail (Voir hydrauliques - Réservoirs d'air dans les conduites d'eau)

Nous avons exposé le théorème du travail en supposant que la force F était constante en grandeur et en direction et le mouvement du point rectiligne. Voyons ce que devient ce théorème dans le cas général d'une force F variable en grandeur et en direction agissant sur un mobile de masse m animé d'une vitesse initiale v_0 dont la direction n'est pas celle de la force.

Soit ab la courbe décrite par le mobile m animé de la vitesse initiale v_0 sous l'action de la force variable F. Je rappelle encore que le mouvement du mobile et par conséquent ses variations de vitesse et par suite de puissance vive sur sa trajectoire ne dépendent que de la composante tangentielle F_t de la force F de telle sorte que le mouvement du mobile sur sa trajectoire ab est le même que si ce mouvement s'effectuait en ligne droite sous l'action de la force F_t dans la direction de cette droite — Ceci rappelé, soit s le chemin total parcouru par le mobile sur sa trajectoire, et décomposons ce chemin en éléments σ' σ'' σ''' ....

Assez petits pour être considérés comme rectilignes et pour que pendant le temps que le mobile met à parcourir chacun d'eux, la force F et par conséquent sa composante tangentielle F_t puisse être regardée comme constante. Soient par conséquent

$$F'_t \quad F''_t \quad F'''_t \ldots\ldots$$

les intensités de cette composante répondant aux petits chemins σ' σ'' σ'''.....—

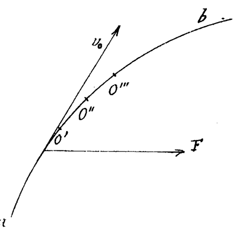
Si je considère actuellement le premier élément sensiblement rectiligne σ', le mobile le parcourt sous l'action de la force sensiblement constante F'_t dont la direction se confond sensiblement avec celle de cet élément, le mouvement du mobile est donc sensiblement uniformément accéléré dans cet intervalle dès lors nous rentrons dans le cas précédent et pour cet intervalle σ' on aura sensiblement :

$$\frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = F'_t \sigma'$$

de même pour l'intervalle σ'': $\frac{1}{2} m v''^2 - \frac{1}{2} m v'^2 = F''_t \sigma''$

σ''': $\frac{1}{2} m v'''^2 - \frac{1}{2} m v''^2 = F'''_t \sigma'''$

Enfin pour le dernier intervalle : $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v^{(n-1)2} = F^{n}_t \sigma^{n}$



On en déduit en faisant la somme :

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \sum F_t \sigma$$

Cette dernière relation s'approchera d'autant plus de la réalité que les éléments de chemin σ considérés seront plus petits, donc à la limite pour $\sigma = ds$ on aura exactement :

$$(1)\ \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int^s F_t\, ds$$

mais $F_t\, ds$ représente précisément le travail élémentaire de la force variable F. Donc la relation précédente exprime encore :

Que la variation de puissance vive pendant un certain temps, est égale à la somme intégrale des travaux élémentaires de la force F pendant ce même temps.

On aurait pu d'ailleurs arriver immédiatement à ce résultat en faisant usage de la méthode infinitésimale. En effet quelque soit le mouvement du point

m sous l'action de la force variable F. l'équation différentielle du mouvement de ce point sur sa trajectoire est : $m \frac{dv}{dt} = F_t$

mais : $v = \frac{ds}{dt}$

Multipliant membre à membre ces deux relations il vient $m\, v\, dv = F_t\, ds$

Intégrant et ajoutant la Constante, il vient enfin : $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^s F_t\, ds$

C. q. f. d.

Si le point matériel m au lieu d'être sollicité par une seule force F est sollicité à la fois par plusieurs le théorème précédent subsiste pour la résultante de ces forces, mais comme on sait que le travail de la résultante est toujours égal à la somme des travaux des Composantes on pourra énoncer le théorème en disant que la variation de puissance vive est égale à la somme des travaux de toutes les forces agissantes, ce qui s'exprime par l'égalité

$$(2) \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma \int^s F_t\, ds$$

Enfin si l'on projette le mouvement du point m sur un axe quelconque Comme le mobile projection se meut comme un mobile de masse m sollicité à chaque instant par une force égale à la somme des projections sur cet axe de toutes les forces agissant sur le mobile réel de l'espace :- On aura en appliquant le théorème précédent au mouvement du mobile projeté sur trois axes rectangulaires

$$\frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = \Sigma \int^x F_x\, dx$$

$$\frac{1}{2} m v_y^2 - \frac{1}{2} m v_{0y}^2 = \Sigma \int^y F_y\, dy$$

$$\frac{1}{2} m v_z^2 - \frac{1}{2} m v_{0z}^2 = \Sigma \int^z F_z\, dz$$

<u>Forme particulière de l'équation du travail dans le cas du mouvement de rotation.</u>

La relation générale (2) a lieu quelque soit la Courbe parcourue par le mobile de masse m - Considérons le cas particulier où cette courbe devient un cercle de rayon r et voyons ce que devient cette relation (2)

Si j'appelle ω_0 et ω les vitesses angulaires répondant aux vitesses linéaires v_0 et v initiales et finales, on a les relations :

$$v = \omega r$$

$$v_0 = \omega_0 r$$

D'ailleurs le travail élémentaire d'une force F dans le mouvement de rotation, a pour expression en appelant $d\alpha$ la déviation angulaire élémentaire (Voir statique)

$d\alpha\, M_0\, F$ Donc la somme des travaux élémentaires de toutes les forces F agissant sur le mobile aura pour expression $d\alpha \Sigma M_0 F$

et leur travail total pour une déviation angulaire finie α sera :

$$\int_0^\alpha d\alpha \Sigma M_0 F$$

Si je remplace actuellement dans (2) v, v_0 par leurs valeurs en fonction de ω, ω_0 puis le 2ème membre, par l'expression précédente : Cette relation deviendra :

$$\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2)\, m r^2 = \int_0^\alpha d\alpha \Sigma M_0 F$$

On aurait pu d'ailleurs arriver directement à cette forme, par la méthode infinitésimale. En effet dans ce cas particulier du mouvement circulaire, l'équation différentielle du mouvement du point est (Ch 1er Art VI. fin de la 1ère Conséquence)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_0 F}{m r^2}$$

mais $\omega = \dfrac{d\alpha}{dt}$

d'où en multipliant $m r^2 \omega\, d\omega = d\alpha\, \Sigma M_0 F$

Intégrant et ajoutant la Constante, on a enfin :

$$\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2) m r^2 = \int_0^\alpha d\alpha\, \Sigma M_0 F \qquad (9')$$

Art. IV. Applications du théorème du travail.

1ère Application. Considérons un corps de poids $p = mg$ tombant librement dans le vide. Soit v_0 sa vitesse à un certain instant, on demande quelle elle sera quand il sera tombé de la hauteur h.

En appliquant le théorème du travail, on a immédiatement :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = ph = mgh$$

d'où $v^2 = v_0^2 + 2gh$

Remarquons que nous aurions pu arriver à cette relation, en posant les lois du mouvement du point $v = v_0 + gt$

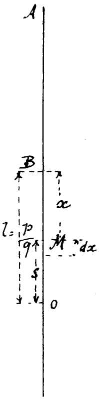
$$h = v_0 t + g\frac{t^2}{2}$$

et en éliminant le temps entre ces deux relations, ainsi qu'il a été fait (Introduction à la Dynamique Ch II. Fin de l'Art II)

Seulement ce qu'il faut remarquer c'est que l'application du théorème du travail nous amène tout de suite à ce résultat.

2e Application. Reprenons encore l'étude du mouvement oscillatoire d'un point de poids $p = mg$ suspendu à l'extrémité d'une tige élastique. Soit v la vitesse acquise par le point arrivé en M à une distance x du point origine B. On aura en appliquant le théorème du travail depuis l'origine du mouvement jusqu'en ce point

$$\frac{1}{2} m v^2 = \int_0^x (p - qx)\, dx$$



$(p-qx)\,dx$ représente le travail élémentaire de la force $(p-qx)$ à laquelle le point est soumis.

En effectuant l'intégration on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 = px - q\frac{x^2}{2}$$

d'où $v^2 = 2gx - \frac{q}{p}gx^2 = \frac{g}{\frac{p}{q}}\left(2\frac{p}{q}x - x^2\right) = \frac{g}{l}\left(2lx - x^2\right)$ (1)

en posant $\frac{p}{q} = l$

Nous retombons comme on voit sur la formule déjà obtenue (Ch. 1er Fin de l'Art VI formule (6)) elle nous montre que v passe par 0 pour $x = 0$ et pour $x = 2l$ et par un maximum pour $x = l$. Ce maximum est $v = \sqrt{gl}$

Remarquons bien encore que ce résultat que nous venons d'obtenir directement par l'application pure et simple du théorème du travail pouvait s'obtenir mais d'une manière plus pénible en partant des lois du mouvement du mobile.

En effet l'expression de la force agissant sur le mobile étant :

$$F = p - qx$$

l'équation différentielle du mouvement du point est :

$$m\frac{dv}{dt} = p - qx$$

d'où $\frac{dv}{dt} = g - \frac{g}{\frac{p}{q}}x = g - \frac{g}{l}x$ en posant $\frac{p}{q} = l$

mais $v = \frac{dx}{dt}$

Multipliant membre à membre : $v\,dv = \left(g - \frac{g}{l}x\right)dx$

Intégrant en remarquant que la constante $= 0$ on a :

$$v^2 = 2gx - \frac{g}{l}x^2 = \frac{g}{l}\left(2lx - x^2\right) \qquad \text{C.q.f.d.}$$

De cette relation on peut d'ailleurs déduire la durée de l'oscillation, en effet on en tire :

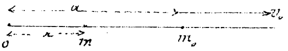
$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{2lx - x^2}$$

d'où $dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{dx}{\sqrt{2lx - x^2}}$

d'où $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int^{2l}\frac{dx}{\sqrt{2lx - x^2}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (Voir Conférences de Calcul infinitésimal)

nous retombons comme on voit sur le même résultat obtenu (Ch. 1er fin de l'Art VI formule (7))

3e 4 Application. — Un mobile de poids $p = mg$ animé d'une vitesse initiale v_0 est soumis à une force ou une attraction f toujours de même direction que la vitesse initiale v_0 et qui varie en raison inverse de la distance du mobile à une origine fixe O située sur la direction de la vitesse initiale.



…ait à la distance du mobile au centre d'attraction O à l'origine du mouvement : Lorsqu'il est arrivé à une distance quelconque x du centre d'attraction, l'expression de la force retardatrice f qui le sollicite est :

$$f = \frac{K}{x}$$

Le Coefficient K étant déterminé par la Condition que pour $x = a$ $f = f_0$ connu.

Ce qui donne : $K = a f_0$

Posons actuellement l'équation du travail depuis l'origine du mouvement jusqu'à l'instant où le mobile est venu en m, on aura :

$$(1)\ \tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = -K \int^x \frac{1}{x}\, dx = -K \mathcal{L} x + C$$

Or pour $x = a$ $v = v_0$ donc $C = K \mathcal{L} a$

On a donc en ajoutant cette constante :

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = -K \mathcal{L} . \frac{x}{a}$$

d'où $\quad v^2 = v_0^2 - K . \frac{2g}{p} . \mathcal{L} . \frac{x}{a}$

Expression donnant la vitesse du mobile en chacune de ses positions. Cette vitesse s'annule pour : $\quad v_0^2 = K \frac{2g}{p} \mathcal{L} . \frac{x}{a}$

C'est à dire quand le mobile est à une distance x du point O donnée par la relation

$$\mathcal{L} . \frac{x}{a} = \frac{1}{K} \frac{p v_0^2}{2g} = q$$

déduite de la précédente

On en conclut : $\quad \frac{x}{a} = e^q \quad$ d'où $\quad x = a e^q$

Remarquons toujours que la relation (1) obtenue directement par l'application du théorème du travail peut s'obtenir en partant de l'équation différentielle du mouvement du mobile. En effet cette équation différentielle est :

$$m \frac{dv}{dt} = -f = -\frac{K}{x}$$

mais $\quad v = \frac{dx}{dt}$

D'où en multipliant $\quad m v\, dv = -K \frac{dx}{x}$

et en intégrant et ajoutant la constante

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = -K \int^x \frac{1}{x}\, dx \quad \text{Cqfd.}$$

= Ex. III

Chapitre III.

Etude du mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre.

Transition. — Jusqu'à présent, nous n'avons examiné que le mouvement d'un point matériel libre, mais il peut arriver que ce point matériel soit soumis à certaines conditions, comme de se mouvoir sur une courbe ou sur une surface donnée parfaitement polie qui l'empêche de suivre la direction de la résultante R des forces qui peuvent le solliciter (Exemples : Pendule simple, pendule cycloïdal, mouvement sur un plan incliné)

Or la présence de cette courbe ou de cette surface fait naître une réaction ou pression N sur le mobile, et si l'on fait abstraction du frottement dont nous nous occuperons plus tard, cette réaction ne peut être que normale à la courbe ou à la surface, car si elle lui était oblique, on pourrait la décomposer en deux, l'une normale, l'autre tangentielle ; mais on ne saurait alors concevoir physiquement l'existence de cette dernière résistance tangentielle dans l'hypothèse d'une surface parfaitement polie. — Donc dans les questions d'équilibre ou de mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe ou une surface on pourra faire abstraction de cette courbe ou de cette surface à la condition de joindre à la résultante R des forces extérieures une force N normale à chaque instant à la courbe ou à la surface parcourue et représentant sa résistance. — Dès lors aussi tous les théorèmes établis précédemment (Ch II) sur le mouvement d'un point matériel libre seront applicables au mouvement d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface fixe, à la condition de joindre à la force R directement appliquée à ce point matériel la réaction N qu'il éprouve de la part de la courbe ou de la surface fixe et de considérer le mouvement comme s'effectuant sous l'action de la résultante de ces deux forces.

Mais si l'on remarque que la réaction N est constamment normale à la courbe et que par conséquent elle n'a aucune action sur les variations de vitesse du point, on en conclura que les deux théorèmes des quantités de mouvement et des puissances vives sont complètement indépendants de cette réaction N et ont lieu entre les forces extérieures seulement.

Art. 1er. Application de ces principes à l'étude du mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe plane donnée.

Soit une courbe quelconque ab et soit un mobile de masse m placé sur cette courbe avec une vitesse initiale v_0 et astreint à parcourir cette courbe.

Je supposerai d'abord qu'il n'est soumis à aucune force extérieure, on demande d'étudier son mouvement ? Or en vertu de ce qui précède le mouvement de ce point est le même que celui d'un point libre sollicité par une certaine force totale N représentant à chaque instant la résistance de la courbe.

En supposant qu'il n'y ait pas de frottement, cette résistance est constamment normale à la courbe et par conséquent elle n'a pas de composante tangentielle d'où il suit, que le mobile parcourt la courbe d'un mouvement uniforme avec la vitesse v_0. Quant à l'expression de cette résistance N normale à la courbe, elle sera

$$N = \frac{m v_0^2}{\rho}$$

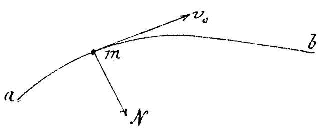
Cette réaction N de la courbe sur le mobile est la force centripète.

Mais en vertu du principe de Newton de l'égalité de l'action et de la réaction : cette réaction de la courbe sur le mobile est égale et directement opposée à l'action $\mathcal{P}$ du mobile sur la courbe, cette action aura donc également pour expression :

$$\mathcal{P} = -\frac{m v_0^2}{\rho}$$

c'est la force centrifuge.

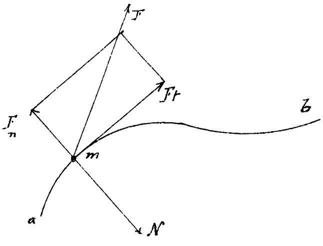
Supposons en second lieu que le mobile m, toujours astreint à recourir la courbe ab soit sollicité par une certaine force motrice F.



Le mouvement de ce point m sera le même que celui d'un point matériel libre sollicité par la force F et une certaine force N normale à la courbe et représentant sa résistance. Décomposons actuellement la force F en ses deux composantes F_t, F_n suivant la tangente et la normale, il résulte de là que le point m se meut comme s'il était soumis à la force tangentielle F_t et à la force centripète $N - F_n$. Or dans tout mouvement curviligne on sait qu'en fonction du mouvement les composantes tangentielles et normale de la force totale qui le produit sont :

Composante tangentielle. $F_t = m\frac{dv}{dt}$

Composante normale ou centripète $N - F_n = m\frac{v^2}{\rho}$



De cette dernière on conclut :

$$N = \underset{\text{(Pression morte)}}{F_n} + \underset{\text{Pression vive}}{m\frac{v^2}{\rho}}$$

Telle sera l'expression de la réaction de la courbe sur le mobile

Réciproquement. — En vertu du principe de Newton, le mobile exerce sur la courbe une pression P égale et contraire à cette réaction. On peut donc dire que la pression P exercée par un mobile sur la courbe qu'il parcourt est la résultante de la composante normale de la force donnée et de la force centrifuge.

Ici on aurait : $$P = -F_n - m\frac{v^2}{\rho}$$

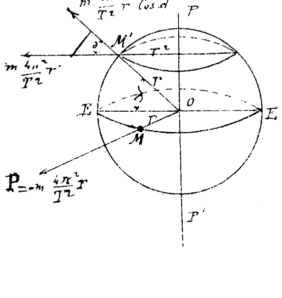
Art. II — Applications de ce qui précède.

1ère Application — Mouvement de rotation de la terre. Supposons un mobile de masse m assujetti à se mouvoir sur un cercle de rayon r d'un mouvement uniforme avec une vitesse $v = \omega r$ il est dès lors soumis à l'action d'une force centrale ou centripète ayant pour expression : $$N = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

Par suite en vertu du principe de Newton, le mobile exerce sur la courbe une pression égale et directement opposée qui est la force centrifuge.

$$P = -m\omega^2 r$$

proportionnelle comme on voit au rayon du cercle décrit et au carré de la vitesse angulaire. Soit T la durée d'une révolution, cette vitesse angulaire ω sera donnée par la relation $\omega T = 2\pi$ d'où $\omega = \frac{2\pi}{T}$



l'expression précédente de la force centrifuge deviendra donc : $$P = -m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

le signe — n'indiquant que la direction centrifuge de cette force.

Actuellement considérons un corps placé en un point M de l'équateur de la terre, il est clair que son poids apparent c'est à dire la pression qu'il exerce sur l'obstacle qui l'empêche de tomber est la différence entre l'attraction réelle que la terre exerce sur lui, et la force centrifuge qui tend à l'éloigner du centre, donc en appelant m la masse du corps on aura :

$$\underbrace{m\,g}_{\text{Poids apparent - g représentant l'accélération apparente}} = \underbrace{m\,G}_{\text{Poids réel - G représentant l'accélération réelle due à la pesanteur}} - \underbrace{m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r}_{\text{Force centrifuge}}$$

qu'on peut écrire :

$$mg = mG - mg\,\frac{4\pi^2}{gT^2}\,r$$

Mais $2\pi r = 40070000^{\text{mètres}}$

$T = 86164''$

En remplaçant dans la précédente, on en tire :

$$g = G - g\,\frac{1}{289} \quad \text{D'où :}$$

$$g = G\,\frac{1}{1+\frac{1}{289}} = G\,\frac{289}{290} = G\left(1-\frac{1}{290}\right)$$

c'est à dire que la rotation de la terre fait que l'accélération de la pesanteur est diminuée de $\frac{1}{290}$ de ce qu'elle serait si notre globe n'avait qu'un mouvement de translation.

Cette formule montre aussi que l'accélération réelle G due à la pesanteur diffère très peu de l'accélération apparente - Mais si la terre tournait plus vite, l'accélération apparente diminuerait et pour la vitesse donnée par l'égalité :

$$m\,G = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$$

ou approximativement $m\,g = m\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,r$

les corps paraîtraient sans pesanteur - On trouve que T est égal dans ce cas à $17 \times 86164''$, c'est à dire que ce phénomène se produirait si la terre tournait seulement 17 fois plus vite.

Supposons maintenant que nous considérions un corps placé en M' sur un parallèle à l'équateur de rayon r' Soit $\lambda = \widehat{MOE}$ la latitude de ce parallèle on aura encore :

$$\underbrace{mg}_{\text{Poids apparent, g accélération apparente en M'}} = \underbrace{m\,G}_{\text{Poids réel G accélération réelle en M'}} - \underbrace{m\,\frac{4\pi^2 r'}{T^2}\,\cos\lambda}_{\text{Projection de la force centrifuge sur la verticale du point M'}}$$

mais $r' = r\,\cos\lambda$ — L'expression précédente devient donc :

$$g = G - \frac{g\,4\pi^2 r}{gT^2}\,\cos^2\lambda = G - g\,\frac{\cos^2\lambda}{289}$$

On a donc approximativement

$$g = G\left(1-\frac{\cos^2\lambda}{290}\right).$$

A l'équateur $\cos \delta = 1$ d'où $g = G\left(1 - \frac{1}{290}\right)$ comme plus haut.

au pôle $\cos \delta = 0$ $g = G$

L'attraction de la terre sur l'unité de masse des corps ou l'accélération doit encore subir une correction due à ce que la terre n'est pas parfaitement sphérique et homogène. En tenant compte de sa forme réelle on trouve que g est lié à G par la formule

$$g = G\left(1 - \frac{\cos^2 \delta}{200}\right)$$

2e Application. – Mouvement d'un point matériel soumis à la seule action de la pesanteur et assujetti à rester sur une courbe fixe.

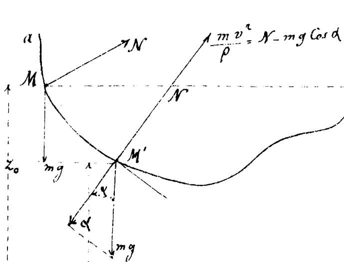
Supposons un point matériel de masse m placé en M sur la trajectoire ab et à la hauteur z_0 au dessus d'un certain plan de comparaison il possède à cet instant une vitesse v_0 et est soumis à son poids ainsi qu'à la résistance de la courbe. Son mouvement est donc le même que celui d'un point libre soumis à la force mg et à la réaction N. Au bout d'un certain temps le mobile est venu en M' à la hauteur z au dessus du même plan de comparaison et a alors acquis une vitesse v et si on applique le théorème des puissances vives on aura :

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mg\,(z_0 - z) \quad (\text{Le travail de la réaction } N = 0.)$$

D'où $v^2 = v_0^2 + 2gh$ en posant $z_0 - z = h$

Et cela est vrai quelque soit la forme de la courbe nous retombons ainsi sur les mêmes résultats obtenus en partant des équations du mouvement du mobile sur sa trajectoire (Introduction à la Dynamique Ch III fin de l'Art II)

Si $z_0 - z$ c'est à dire $h = 0$ $v = v_0$ c'est à dire que quelque soit la courbe ab le mobile reprend les mêmes vitesses en en repassant par les mêmes hauteurs. Ainsi en M'' la vitesse $= v_0$ comme en M



Pression sur la courbe

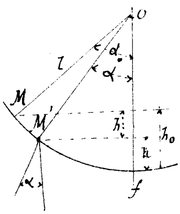
La pression que le mobile exerce en M' sur la courbe ab s'obtient ainsi qu'il a été dit en composant la force centrifuge en ce point avec la composante normale de la force, c'est à dire du poids on aura donc

(1) $\mathcal{P} = -\left[\underbrace{mg\cos\alpha}_{\text{Pression morte}} \pm \underbrace{\frac{mv^2}{\rho}}_{\text{Pression vive}}\right] = -mg\left[\cos\alpha \pm \frac{2h}{\rho}\right]$ si $v^2 = 2gh$

le signe $-$ indiquant seulement la direction centrifuge de cette pression.

Cas particuliers.

I Supposons que la courbe précédente se réduise à un cercle ou un arc de cercle de rayon l. La pression du mobile arrivé en M' sur cette courbe sera en faisant $\rho = l$ dans la formule précédente



$$\mathcal{P} = -\left[mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{l}\right] = -mg\left[\cos\alpha + \frac{2h}{l}\right]$$

au point bas f répondant à $\alpha = 0$

$$\mathcal{P} = -mg\left[1 + \frac{2h_0}{l}\right]$$

Cette pression représente la tension du fil dans le pendule simple.

II Supposons que cette courbe quelconque devienne une cycloïde, la formule générale (1) sera toujours applicable à la condition que ρ représentera à chaque instant le rayon de courbure de la cycloïde. Pour le point le plus bas répondant à $\alpha = 0$ on aurait.

$$\mathcal{P} = -mg\left[1 + \frac{2h_0}{4r}\right]$$

r représentant le rayon du cercle générateur de la cycloïde.

III Enfin supposons que la courbe précédente devienne une ligne droite, on est ramené au cas du plan incliné, et ici la pression du mobile se réduit à la pression morte.

$$\mathcal{P} = -mg\cos\alpha$$

α angle du plan incliné. Et en effet la pression vive $\frac{mv^2}{\rho}$ s'annule le rayon de courbure ρ devenant infini.

Art. III. Solution générale du problème du mouvement d'un point qui n'est pas libre.

Dans les deux articles précédents, nous avons étudié le mouvement d'un point soumis à l'action d'un certain système de forces tout en étant assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée. Mais nous n'avons traité cette question que pour quelques cas particuliers, il s'agit actuellement d'envisager cette même question dans toute sa généralité; elle se pose de la façon suivante.

On donne par ses projections

(1) $f(x, y) = 0$ (2) $\varphi(z, y) = 0$

sur les deux plans coordonnés xy et yz, la courbe que le mobile est assujetti à parcourir

On donne de plus par ses projections

$$X \quad Y \quad Z$$

sur les trois axes, la résultante R des forces extérieures qui agissent sur le point.

On connait d'ailleurs les circonstances initiales du mouvement de ce point, et l'on demande :

1°. De trouver toutes les circonstances du mouvement de ce mobile, c'est à dire de déterminer les équations $x = f(t)$ $y = \varphi(t)$ $z = \varphi(t)$ qui définissent ce mouvement.

2°. On demande de plus l'intensité et la direction de la réaction N à chaque instant.

Solution. — Le mouvement étant rapporté aux trois axes rectangulaires ox, oy, oz les équations différentielles de ce mouvement projeté sur ces trois axes seront

$$(3) \quad m\,J_x = X + N \cos\lambda$$

$$(4) \quad m\,J_y = Y + N \cos\mu$$

$$(5) \quad m\,J_z = Z + N \cos\nu$$

D'ailleurs N étant constamment normale à la courbe, on a l'élément ds de cette courbe la projection de ds sur $N = 0$; mais ds étant la résultante géométrique de dx, dy, dz ses projections sur les trois axes, comme la projection de la résultante sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des composantes, il résulte que la somme des projections de dx, dy, dz sur N est aussi égale à 0 d'où la relation :

$$(6) \quad 0 = dx \cos\lambda + dy . \cos\mu + dz \cos\nu$$

avec la condition $\quad (7) \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$

Attendu que les axes sont supposés rectangulaires.

En tout 7 équations entre les sept inconnues $x, y\, z, N, \lambda, \mu, \nu$

Donc la question est résolue analytiquement.

= Chap IV

Chapitre IV.

Principe de d'Alembert appliqué à un seul point matériel.

Transition. Art 1er. Dans le chapitre qui précède, nous avons étudié le mouvement d'un point assujetti à certaines conditions comme de rester sur une courbe ou une surface donnée. Supposons actuellement que le mobile A soit non seulement astreint à parcourir la courbe donnée ab, mais soit obligé par suite de sa liaison avec un corps B exerçant sur lui une action motrice R de parcourir cette courbe avec des vitesses successives dont la loi est imposée d'avance. Pour fixer les idées nous pouvons imaginer qu'il s'agisse par exemple d'un corps que l'on tient à la main et auquel on imprime le mouvement voulu. Observons maintenant que dans ce mouvement forcé le point A de masse m oppose aux modifications de mouvement (tant dans la courbure que dans la vitesse) que tend à lui imprimer ma main ou le corps B ou la force R une certaine résistance, car en vertu de l'inertie son mouvement naturel dû à la vitesse initiale est rectiligne et uniforme. Or en vertu du principe évident de la réaction égale et contraire à l'action, cette résistance dite d'inertie est à chaque instant égale et directement opposée à la force R émanant du corps B capable de la vaincre. Or la force R capable de vaincre cette résistance d'inertie et par suite de donner au mobile le mouvement qu'il possède en vertu de sa liaison avec le corps B a pour expression en fonction de ce mouvement : $m\,J$ J représentant l'accélération totale du mouvement imposé.

Donc la résistance d'inertie inhérente au mobile, évidemment égale et contraire à cette force R en vertu du principe de Newton a pour expression :

$$-\,m\,J$$

On peut donc dire qu'à chaque instant du mouvement d'un point matériel, il y a équilibre dynamique entre l'action motrice R et la résistance d'inertie inhérente au mobile $=-\,m\,J$.

C'est en cela que consiste le principe de d'Alembert appliqué à un seul point matériel où l'on voit que ce principe n'est qu'une extension au cas du mouvement, du principe de Newton de l'égalité de l'action et de la réaction.

Ce principe permet de ramener toutes les questions de mouvement d'un point matériel à de simples questions d'équilibre; En effet :

Puisqu'à tous les instants du mouvement d'un point, il y a équilibre dynamique entre la force motrice R et la résistance d'inertie $-mJ$,

Nous pouvons appliquer à ce système, les 6 conditions d'équilibre trouvées en statique; comme les deux forces $R, -mJ$ sont appliquées à un même point matériel, ces 6 conditions d'équilibre se réduisent à trois; celles qui expriment que la somme algébrique des projections de ces forces sur trois axes rectangulaires doit être séparément nulle ce qui donne : $X - mJ_x = 0 \quad Y - mJ_y = 0 \quad Z - mJ_z = 0$

d'où on en déduit $\quad mJ_x = X \quad mJ_y = Y \quad mJ_z = Z$

et l'on voit que ces trois relations ne sont rien autre chose que les équations différentielles du mouvement du point (Ch 1er Art VII Coroll) lesquelles définissent complètement son mouvement.

A proprement parler le principe de d'Alembert appliqué à un seul point matériel ne nous donne donc aucun résultat nouveau, il nous permet seulement par la conception et l'introduction des forces d'inertie de ramener toute question de mouvement à une question d'équilibre. Ainsi, si d'une part nous avons pu considérer l'équilibre comme un cas particulier du mouvement et déduire (Ch 1er Coroll de l'Art VII) des équations différentielles du mouvement d'un point posées à priori les conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliqué à un point matériel. — On voit que réciproquement par l'introduction des forces d'inertie on peut considérer le mouvement comme un cas particulier de l'équilibre, puisqu'en partant des conditions d'équilibre nous retombons sur les équations différentielles du mouvement.

Composantes tangentielle et normale de la résistance d'inertie $-mJ$

La résistance d'inertie d'un point matériel en mouvement étant égale et contraire à la force qui devrait agir sur ce point matériel supposé libre pour lui donner le mouvement qu'il possède, laquelle a pour composantes tangentielle et normale

$$R_t = m\frac{dv}{dt} \qquad R_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

il suit que l'on peut regarder cette résistance d'inertie comme la résultante des deux forces

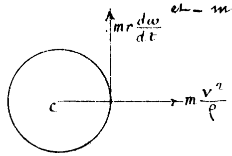
1°. Résistance d'inertie tangentielle $= -m\dfrac{dv}{dt}$

2°. Résistance normale d'inertie $= -m\dfrac{v^2}{\rho}$

Art. II. — Applications du principe de d'Alembert

1ère Application. — Etude du mouvement d'un point sollicité par des forces quelconques et astreint à se mouvoir sur un cercle.

Considérons un point matériel de masse m astreint à décrire un cercle de rayon r sous l'action d'un système quelconque de forces. En vertu du principe de d'Alembert à chaque instant du mouvement de ce point, il y a équilibre dynamique entre les forces réelles F qui le sollicitent et la résistance d'inertie de ce point dont les composantes tangentielles et normales sont : $-m\frac{dv}{dt}$ ou $-mr\frac{d\omega}{dt}$ et $-m\frac{v^2}{\rho}$



Le point ne pouvant que tourner autour du centre O du cercle, les six conditions d'équilibre se réduisent à une seule, celle des moments autour de cet axe O à laquelle donne :

$$\Sigma M_o F - mr^2\frac{d\omega}{dt} = 0$$

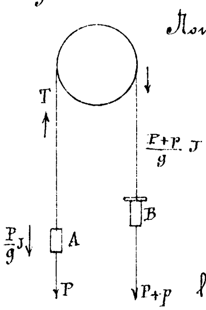
Attendu que le moment de la composante normale d'inertie qui passe par l'axe est nécessairement nul : de la relation précédente, on tire :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{mr^2}$$

Or c'est précisément l'équation différentielle du mouvement du point que nous avons trouvée directement (Ch 1er Art VI fin de la 1ère conséquence). On voit donc encore ici combien le principe de d'Alembert est commode.

2e Application — Étude du mouvement dans la machine d'Atwood : Déterminer l'accélération J de ce mouvement ainsi que la tension du fil.

Avant l'addition du poids additionnel p dans l'état de repos ou de mouvement uniforme du système, il est clair que la tension du fil est constamment égale au poids P, mais aussitôt l'application du poids p le système se met en mouvement et la tension prend une certaine valeur que je désigne par T l'accélération étant représentée par J.



Nous négligeons l'inertie de la poulie

L'équilibre dynamique du corps A donne en vertu du principe de d'Alembert :

$$(1) \quad T - P - \frac{P}{g}J = 0$$

L'équilibre dynamique du corps B donne de même

$$(2) \quad P + p - T - \frac{P+p}{g}J = 0$$

En additionnant ces deux relations dans lesquelles J est le même le fil étant supposé inextensible.

$$p - \frac{2P+p}{g} J = 0 \quad \text{d'où} \quad J = g\,\frac{p}{2P+p}$$

Résultat déjà trouvé (Cb 1ère fin de l'Art IV)

La relation (1) donne ensuite en y remplaçant J par sa valeur.

$$T = P + \frac{Pp}{2P+p} = P\left[1 + \frac{1}{1+\frac{2P}{p}}\right]$$

Ainsi la tension T surpasse d'autant plus P que p est plus grand. Pour $p = P$ on aurait : $T = P\left(1+\frac{1}{3}\right)$ et à la limite pour $p = \infty$ on aurait :

$$T = 2P$$

Ce qu'il faut bien remarquer, c'est que cette question de mouvement que nous venons de traiter comme une question d'équilibre grace au principe de d'Alembert peut se traiter directement comme une question de mouvement en effet :

Considérons le point A, la force qui le sollicite est $T-P$, elle imprime donc à ce point une accélération J donnée par la relation :

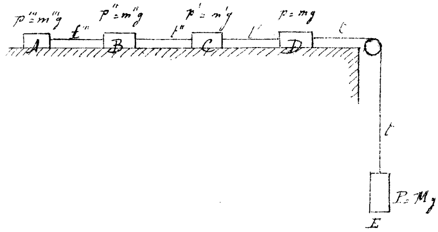
$$T-P = \frac{P}{g} J$$

De même si on considère le point B il est soumis à la force $P+p-T$, elle lui imprime donc une accélération J donnée par la relation :

$$P+p-T = \frac{P+p}{g} J$$

et nous retombons comme on voit sur les deux équations (1), (2) que nous donnait le principe de d'Alembert.

3e Application. — On donne le système indiqué. On demande 1° l'accélération J qu'il va prendre sous l'action de la force $P = Mg$, et les tensions $t\ t'\ t''\ t'''$ des cordons qui unissent les corps $p\ p'\ p''$



On néglige encore la résistance d'inertie de la poulie.

L'équilibre dynamique de A donne $t''' - \frac{p'''}{g} J = 0$ (1)

id B $t'' - t''' - \frac{p''}{g} J = 0$ (2)

id C $t' - t'' - \frac{p'}{g} J = 0$ (3)

id D $t - t' - \frac{p}{g} J = 0$ (4)

id E $P - t - \frac{P}{g} J = 0$ (5)

Additionnant ces relations on en conclut :

$$P = \frac{P+p+p'+p''+p'''}{g} J \quad \text{d'où} \quad J = g\,\frac{P}{P+p+p'+p''+p'''}$$

J étant connu (1) donne t''' (2) donne t'' (3) donne t' (4) donne t.

Chapitre V

Théorie des mouvements relatifs

Art 1er. — Reprenons actuellement l'étude des mouvements relatifs.

Supposons toujours qu'un point matériel se meuve dans un système de comparaison mobile. On connaît je suppose le mouvement du point relativement au système mobile, c'est le mouvement que verrait un observateur invariablement fixé à ce système, on connaît de plus le mouvement de ce système mobile et l'on demande le mouvement absolu du point !

On a vu comment ce mouvement absolu s'obtenait par la composition des mouvements composants et l'on a démontré (Ch 1er — 3e Conséquence de l'Art VI) que

$$m\,J = \text{Résult}\,(m\,J_r\,,\ m\,J_e\,,\ m\,2\,\omega\,v_r\,\sin\alpha) \qquad \alpha = (\widehat{v_r\,,\,\omega})$$

c'est à dire que la force totale sollicitant réellement le mobile dans son mouvement absolu est la résultante de la force qui semble solliciter le mobile dans son mouvement relatif et des forces qu'il faudrait lui appliquer pour lui donner le mouvement qu'il possède par suite de sa liaison avec le système mobile de comparaison.

De cette relation nous avons déduit également

$$m\,J_r = \text{Résult}\,(m\,J\,,\ -m\,J_e\,,\ -m\,2\,\omega\,v_r\,\sin\alpha)$$

c'est-à-dire que pour l'observateur fixé au système de comparaison qui ne voit que le mouvement relatif du mobile qu'il prend pour un mouvement absolu, les choses se passent comme si ce point matériel était soumis non seulement à la force totale réelle $m\,J$, mais encore aux forces dites apparentes

$$-m\,J_e\,,\ -m.2\,\omega\,v_r\,\sin\alpha$$

égales et contraires à celles qu'il faudrait appliquer à ce point matériel pour lui donner le mouvement qu'il possède par suite de la liaison de sa trajectoire relative avec le système de comparaison — La résultante de ces deux forces dites apparentes n'est donc rien autre chose que la résistance d'inertie de ce point dans le mouvement que tend à lui imprimer le système de comparaison auquel il est lié.

Cela signifie en d'autres termes, que si l'observateur lié au système des axes mobiles, connaît la force réelle absolue $m\,J$ sollicitant le mobile m et qu'il examine le mouvement qu'il voit c'est à dire le mouvement relatif, il s'apercevra que ce mouvement n'est pas celui que peut produire cette seule force réelle mJ et que pour se rendre compte de ce mouvement, il faut ajouter à cette force mJ les deux forces

$$-mJ_e, -2\,\omega\, v_r \sin\alpha$$

Delà résulte ces deux principes :

1° Que pour étudier le mouvement relatif d'un point, comme si c'était un mouvement absolu, il suffit d'ajouter à la force réelle mJ. sollicitant le point, les deux forces apparentes $-mJ_e, -mJ_c$

2° Que tous les théorèmes généraux (Chap. II) de la Dynamique d'un point matériel en mouvement absolu s'appliquent à un point matériel en mouvement relatif par rapport à un système mobile pourvu qu'aux forces réelles sollicitant le point on ajoute à chaque instant les deux forces apparentes $-mJ_e, -mJ_c$.

Remarque importante — Si nous observons que la seconde force apparente $-m\,2\,\omega\, V_r \sin\alpha$ est constamment normale à la vitesse relative V_r (Introduction à la Dynamique Chap 1er Art. 1er 2e Cas) On en conclura que le travail de cette force dans le mouvement relatif sera constamment nul et par suite le théorème du travail appliqué au mouvement relatif sera complètement indépendant de cette force, et on aura simplement :

$$\frac{1}{2} m (v_r^2 - v_{0r}^2) = \mathcal{E}\, mJ - \mathcal{E}\, mJ_e.$$

Cas particuliers — Reprenons l'expression symbolique :

$$mJ_r = \text{Résult}\,(mJ, -mJ_e, -m\,2\,\omega\, v_r \sin \widehat{\omega, v_r})$$

et examinons quelques cas particuliers.

1° Supposons que le système des axes mobiles n'ait qu'un simple mouvement de translation, alors $\omega = 0$ et par suite la force centrifuge composée s'annule et il reste

$$mJ_r = \text{Résult}\,(mJ, -mJ_e)$$

a Si cette translation est rectiligne et uniforme $J_e = 0$ et il reste :

$$mJ_r = mJ.$$

b Si cette translation commune à tous les points du système de comparaison est circulaire et s'effectue avec une vitesse v_e et un rayon r on aura :

$$mJ_r = \text{Résult}\,\left(mJ, -m\frac{v_e^2}{r}\right)$$

2° Lorsque le système de comparaison tourne simplement autour d'un axe fixe plusieurs cas peuvent se présenter

a Si le point est en repos relatif J_r et $v_r = 0$ — Donc :

$$mJ = mJ_e = m\,\omega^2 \rho.$$

ρ distance constante du mobile à cet axe fixe.

C'est-à-dire que la force réelle qui sollicite le point est celle qu'il faut lui appliquer pour lui donner le mouvement qu'il possède par suite de sa liaison avec le système de comparaison.

b. Si le point est en repos absolu on a $J=0$, $v_r = \omega\rho$ perpendiculaire au rayon ρ et en sens contraire de la rotation, donc $\sin\alpha$ ou $\sin(v_r\,\omega)=1$ et l'opposée de la force composée $m.2\omega v_r \sin\alpha$ devient :

$$+2m.\omega^2\rho \text{ en valeur absolue.}$$

quant à sa direction, faisant avec v_r un angle droit décrit en sens contraire de la rotation elle est par conséquent centripète.

Enfin $-mJ_e$ opposée à la force centripète $mJ_e = m\omega^2\rho$ et elle est centrifuge.

Donc en résumé la formule générale symbolique donne ici :

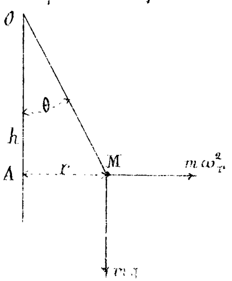
$$mJ_r = m\omega^2\rho \text{ force apparente centripète.}$$

Ce dont on pouvait d'ailleurs s'apercevoir a priori.

Art II. – Applications des principes précédents.

1° Pendule conique. Soit un axe de rotation; à cet axe de rotation est fixé une douille à laquelle s'articule une tige terminée par une boule. L'expérience apprend que si l'on donne à l'axe un mouvement de rotation uniforme ω, la boule s'écarte d'un certain angle θ et décrit autour de l'axe une circonférence d'un certain rayon. On demande une relation entre θ et ω?

Imaginons un système de comparaison entraîné en translation circulaire par le centre de la boule. Pour un observateur fixé à ce système la boule paraîtra en équilibre sous l'action des forces réelles mg et T (la tension du fil) et de la force apparente $m\omega^2 r$. En posant l'équation d'équilibre des mouvements autour de l'axe projeté en O on a



$$mgr = m\omega^2 rh$$

d'où

(1) $h = l\cos\theta = \dfrac{g}{\omega^2}$

Telle est la relation cherchée.

Quant à la durée d'une révolution elle est donnée par la relation :

(2) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

la même que la durée de la double oscillation d'un pendule simple de longueur h

Il est évident d'ailleurs que les boules ne commencent à s'écarter que pour la valeur de ω répondant à l'égalité

$$l = \frac{g}{\omega^2} \quad \text{d'où} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Nous aurions pu d'ailleurs résoudre cette même question sans parler des mouvements relatifs. En effet à chaque instant du mouvement circulaire uniforme de la boule elle est en vertu du principe de d'Alembert en équilibre sous l'action des forces réelles mg, T et de sa résistance d'inertie laquelle se réduit à la composante centrifuge $m\omega^2 r$ puisque le mouvement est circulaire uniforme. On a donc comme tout à l'heure en posant l'équation d'équilibre des moments autour de l'axe projeté en O

$$mg.r = m\omega^2 r.h$$

On pourrait encore raisonner comme il suit sans faire appel ni à la théorie des mouvements relatifs, ni au principe de d'Alembert :

L'expérience apprenant que sous la vitesse angulaire ω, le mobile décrit un cercle r d'un mouvement uniforme, c'est qu'il est sollicité par une force centrale dont l'expression en fonction du mouvement produit est $m\omega^2 r$. Mais cette force ne peut résulter que de l'action combinée des deux forces réelles mg et T. On a donc en projetant sur MA :

$$m\omega^2 r = T \sin\theta$$

si nous y joignons la condition

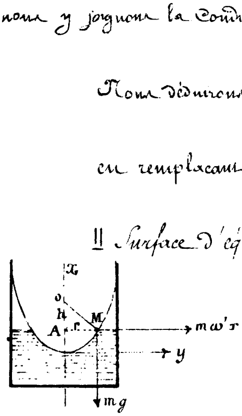
$$mg = T\cos\theta$$

Nous déduirons de ces deux relations :

$$tg\,\theta = \frac{\omega^2 r}{g} \quad \text{mais } r = h\,tg\,\theta$$

en remplaçant il vient encore $h = \frac{g}{\omega^2}$ Cqfd

II Surface d'équilibre d'un liquide en rotation uniforme.

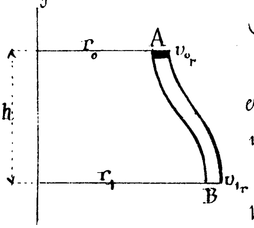


Soit une molécule quelconque M de la surface d'équilibre inconnue cherchée ; elle est comme la boule du pendule conique précédent, en équilibre relatif sous l'action des forces réelles mg et T réaction normale de la surface et de la force apparente $-m\omega^2 r$, ou si l'on veut encore en équilibre dynamique sous l'action des forces réelles T, mg et de sa résistance d'inertie $m\omega^2 r$ — Donc en posant l'équation d'équilibre des moments autour de l'axe projeté en O, on a encore :

$$h = \frac{g}{\omega^2}$$

Ainsi h est constant quelque soit le point M de la surface. Cette surface est donc telle que sa sous normale est une quantité constante $h = \frac{g}{\omega^2}$, c'est donc une parabole dont l'équation est $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$

III Étude du mouvement relatif d'un point matériel pesant dans un tuyau animé d'une rotation uniforme ω autour d'un axe



(Voir Hydraulique - Théorie des turbines Fontaine et Fourneyron)

Imaginons un système de comparaison lié à l'axe de rotation et tournant avec lui de la même vitesse ω et étudions le mouvement relatif du point dans ce système de comparaison.

Pour cela aux forces réelles agissant sur le mobile qui sont 1° son poids mg 2° les réactions N du tuyau constamment normales à ce tuyau, il faut ajouter les forces apparentes se réduisant ici à la composante centrifuge d'inertie $m\omega^2\rho$, ρ représentant la distance variable du mobile à l'axe.

Posons actuellement l'équation du travail entre toutes ces forces en nous rappelant que les réactions N étant toujours normales à la direction de v_r, leur travail est nul dans le mouvement relatif que nous étudions. On aura par conséquent :

$$\frac{1}{2}m(v_{1_r}^2 - v_{0_r}^2) = mgh + \int_{r_0}^{r_1} m\omega^2 r\,dr$$

effectuant l'intégration :

$$\frac{1}{2}m(v_{1_r}^2 - v_{0_r}^2) = mgh + m\frac{\omega^2}{2}(r_1^2 - r_0^2)$$

mais $\omega r_1 = v_1$ $\quad \omega r_0 = v_0$ — Remplaçant on a enfin :

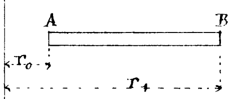
$$v_{1_r}^2 = v_{0_r}^2 + 2gh + (v_1^2 - v_0^2)$$

donnant la vitesse relative de la bille à sa sortie du tuyau !

On obtiendra actuellement sa vitesse absolue V_1 de sortie, en composant cette vitesse relative v_{1_r} avec la vitesse d'entrainement v_1 et on aura :

$$V_1^2 = v_{1_r}^2 + v_1^2$$

Cas particulier du Précédent — Supposons que le tuyau précédent devienne horizontal, la théorie précédente est applicable, seulement le travail de la pesanteur s'annule et il reste



$$V_{1r}^2 = V_{0r}^2 + V_1^2 - V_0^2$$

Fin de la Dynamique pure d'un point matériel.

Résumé

de la Dynamique pure d'un point matériel.

Introduction.

Problème général de la Dynamique — Étant donné un corps ou système matériel ainsi que toutes les circonstances du mouvement qu'il possède, trouver l'expression de la ou des forces qui donnent lieu à ce mouvement — Réciproquement Étant donné un corps les circonstances initiales de son mouvement et enfin le système des forces agissant sur lui, trouver le mouvement qu'il prendra dans l'espace.

Un Corps ou système matériel étant un assemblage de points matériels reliés par des actions mutuelles égales et directement opposées, pour résoudre le problème précédent, il faudra nécessairement savoir le résoudre par un seul point matériel. De là deux grandes divisions dans l'étude de la Dynamique pure.

1ère Partie — 1° Dynamique pure d'un point matériel.
2e Partie — 2° Dynamique pure des systèmes matériels.

1ère Partie.

Dynamique pure d'un point matériel

Chapitre 1er

Les principes.

Les principes ou vérités fondamentales servant de base à la Dynamique pure d'un point matériel sont au nombre de quatre que l'on énumère.

Art 1er. – 1° Le principe d'inertie d'où résulte la notion de force.

2°, Le principe de Newton de l'égalité de l'action et de la réaction

Art 11 – 3° Le principe de l'indépendance de l'effet d'une force et du mouvement antérieurement acquis par le point matériel sur lequel elle agit. Ce principe peut ainsi se formuler :

L'effet produit par une force sur un point matériel est indépendant du mouvement antérieurement acquis par ce point matériel. Ce principe se comprend très bien à l'aide de la considération des mouvements relatifs dont nous avons déjà parlé.

Il résulte de ce principe :

a Que le mouvement d'un point matériel partant du repos et soumis à l'action d'une force constante et de direction constante est un mouvement rectiligne uniformément varié.

b Que réciproquement tout mouvement rectiligne uniformément varié est produit par une force constante en grandeur et en direction. Application : la pesanteur est une force constante.

c Si le point matériel possède une vitesse V_0 de même direction que la force F supposée toujours constante en grandeur et en direction, le mouvement est encore uniformément varié.

d Si le point matériel possède une vitesse initiale V_0 dirigée dans un autre sens que la force F toujours supposée constante en grandeur et direction, le mobile prend dans l'espace un mouvement parabolique dont on sait calculer tous les éléments.

Application. Mouvement parabolique des projectiles.

Art. 3. 4° Le principe de l'indépendance des effets des forces qui agissent simultanément sur un même point matériel.

Ce principe peut ainsi se formuler :

Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel chacune d'elles produit le même effet que si elle agissait seule.

Ce principe se comprend facilement à l'aide de la notion du mouvement relatif.

De là résulte le principe dominant toute la mécanique : celui de la proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles impriment à un même point matériel on examine successivement deux cas :

1er Cas. Les deux forces que l'on compare sont constantes en grandeur et direction, et elles agissent successivement sur un même mobile partant du repos.
Corollaire. Un point matériel sollicité par une force variable agissant constamment dans la direction de la vitesse initiale reçoit à deux instants quelconques des accélérations totales proportionnelles aux intensités de la force à ces deux instants.

2e Cas ou Cas général. Les deux forces que l'on compare sont variables de grandeur et de direction et elles agissent successivement sur un même point matériel possédant des vitesses initiales de direction différente que celle des forces. (Mouvement Curviligne)

Art. IV. Du principe de la proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles impriment à un même point matériel résulte (en prenant pour l'une des forces le poids p même du point)

a La notion de la masse des corps. C'est un nombre abstrait $m = \frac{p}{g}$ constant pour les différents lieux de la terre.

Digression sur cette quantité m

b L'expression $F = mJ$ (J accélération totale) d'une force en fonction de la masse du point sur lequel elle agit et de l'élément J du mouvement qu'elle lui imprime et réciproquement l'expression $J = \frac{F}{m}$ donnant l'élément J du mouvement dû à l'action d'une force donnée F agissant sur un point de masse m.

La formule $F = mJ$ renferme donc implicitement la solution du double problème général qui fait l'objet de la dynamique pure d'un point matériel. On en déduit les deux corollaires suivants :

1er Corollaire. Deux forces différentes $F F'$ agissant successivement sur deux masses différentes m, m' en leur imprimant la même accélération totale sont entre elles dans le même rapport que ces masses : c'est à dire qu'on a $\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}$

De là cette notion sensible de la masse d'un corps qui peut être considérée comme une qualité en vertu de laquelle le corps cède plus ou moins facilement à l'action des forces (Voir plus loin le théorème de d'Alembert)

2e Corollaire. Quand une même force agit successivement sur deux masses différentes $m m'$ en leur imprimant des accélérations différentes $J J'$ on a toujours $\frac{m}{m'} = \frac{J'}{J}$

Application à la machine d'Atwood $J = g\frac{P}{p + 2P}$

Art. V. – Théorie de la composition et de la décomposition des forces, déduite du principe de la proportionnalité des forces aux accélérations totales qu'elles produisent.

– Art. VI – Applications de la théorie et des principes précédents

1^{re} Application. – Dans les Compléments de Cinématique on a démontré que

$$J = \text{Résult } (J_r, J_e)$$

$$J = \text{Résul } (J_r, J_e, J_c)$$

Il en résulte que $mJ = \text{Résul } (mJ_r, mJ_e)$

$$mJ = \text{Résul } (mJ_r, mJ_e, mJ_c)$$

c'est à dire que lorsqu'un mobile de masse m est animé d'un mouvement relatif dans un système de Comparaison animé d'un mouvement qqe revenant à chaque instant à une translation et une rotation instantanée.

La force totale sollicitant le mobile dans son mouvement absolu est la résultante des forces totales qui semblent le solliciter dans les mouvements composants (Voir plus loin, Mouvements relatifs)

2^e Application – Les Composantes de l'accélération totale J d'un mouvement curviligne varié étant $J_t \frac{dv}{dt}$, $J_n = \frac{v^2}{\rho}$

On peut dire que si un mobile de masse m parcourt une trajectoire donnée avec un mouvement Connu, c'est qu'il est sollicité à chaque instant par une force totale R dont les Composantes tangentielle et normale sont en fonction du mouvement donné. $R_t = m\frac{dv}{dt}$ produisant les changements de vitesse $R_n = \frac{mv^2}{\rho}$ produisant la Courbure et réciproquement

Cas particuliers.

Mouvement rectiligne varié $R_t = \frac{m\,dv}{dt}$ $R_n = 0$

Mouvement circulaire uniforme $R_t = 0$ $R_n = \frac{mv^2}{\rho} = m\omega^2 r$

Mouvement Circulaire varié $R_t = m\frac{dv}{dt}$ d'où $\frac{d\omega}{dt} = \frac{M_o R}{mr^2} = \frac{\sum M.F}{mr^2}$

3^e Application – Quand un point matériel de masse m se meut dans l'espace en vertu d'une vitesse initiale v et sous l'action d'une force R variable à chaque instant si l'on projette à chaque instant ce mobile sur un axe quelconque, ce mobile projection se meut comme un corps qui ayant même masse m que le mobile réel serait animé d'une vitesse $v_x = v\cos\alpha$ constamment égale à la projection de la vitesse de l'espace et soumis à l'action d'une force $R_x = R\cos\beta$ constamment égale à la projection de la force R de l'espace.

En résumé tout ce qui a été dit des accélérations totales s'applique aux forces, ce qui se comprend bien, l'accélération totale pouvant être regardée comme une force rapportée à l'unité de masse.

De cette application résulte que tous les problèmes résolus en partant de la notion de l'accélération totale, peuvent se résoudre en partant de la notion de force. Exemples :

1°. Durée de l'oscillation d'une pendule simple.

2°. Étude du mouvement oscillatoire d'un point pesant suspendu à l'extrémité d'une tige élastique.

Art VII – Solution générale du double problème constituant la Dynamique pure d'un point matériel

1°. Étant donné le mouvement $x = f(t)$ $y = \varphi(t)$ $z = \chi(t)$ d'un point de masse m trouver l'expression de la force qui lui donne naissance.

2°. Réciproquement, étant données les composantes X Y Z de la résultante des forces agissant sur un mobile de masse m, ainsi que les conditions initiales du mouvement de ce point trouver toutes les circonstances de ce mouvement. Il suffit pour cela d'intégrer deux fois les équations différentielles $X = m J_x$ $Y = m J_y$ $Z = m J_z$ du mouvement en ayant soin d'ajouter les constantes définissant la situation et l'état du mobile à l'origine du mouvement.

Cas particuliers :

Corollaire ou Conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliqué à un point matériel, l'équilibre étant considéré comme un cas particulier du mouvement.

Chapitre II.

Théorèmes généraux de la Dynamique pure d'un point matériel.

Transition – Ces théorèmes, conséquence des principes antérieurs permettent dans la solution des problèmes d'éviter l'emploi de la méthode générale précédente en présentant sous une forme facile à retenir et à appliquer les résultats mêmes que donnerait l'intégration directe des équations différentielles auxquelles donnent lieu chaque problème particulier

---

Art. 1er Théorème de la quantité de mouvement.

La variation de la quantité de mouvement pendant un certain temps est égale à l'impulsion de la force pendant ce temps.

On démontre le théorème dans les deux cas suivants :

1° La force constante en grandeur et direction agit sur un point matériel possédant une vitesse initiale dans la direction de la force.

2° Cas général — La force est variable en grandeur et direction et elle agit sur un point matériel possédant une vitesse initiale dans une direction quelconque. Démonstration élémentaire — Démonstration ordinaire

Si le mobile est sollicité à la fois par plusieurs forces le théorème précédent à la somme des impulsions des composantes on peut énoncer en ce cas le théorème en disant que la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des impulsions des forces agissantes

Application du théorème de la quantité de mouvement au mouvement de la projection d'un point sur un axe quelconque

Art. II. Théorème des moments de la quantité de mouvement.

L'accroissement total qu'éprouve le moment de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport à un point du plan de sa trajectoire pendant un intervalle de temps quelconque est égal à la somme des moments par rapport à ce point des impulsions élémentaires de la force correspondant aux divers éléments de ce temps.

Corollaire ou Théorème des aires — Quand un mobile se meut dans un plan en vertu d'une force centrale passant constamment par le même point O du plan l'aire totale décrite par le rayon vecteur pendant un temps quelconque est proportionnelle à ce temps — Réciproquement — Si les aires décrites sont proportionnelles &c. &c.

Application au mouvement des planètes.

Art. III. Théorème du travail ou des puissances vives.

Quand un mobile se meut dans l'espace sous l'action d'une force quelconque, la variation de puissance vive pendant un certain temps est égale au travail total de la force précédente en même temps. Digression sur la signification physique de la quantité désignée sous le nom de puissance vive — Exemples de la transformation de la puissance vive d'un corps en travail et réciproquement.

1°. Double ressort. 2°. Réservoir d'air dans les conduites d'eau.

On démontre le théorème du travail ou des puissances vives énoncé précédemment dans les deux cas suivants :

1°. La force F constante en grandeur et en direction agit sur un point matériel possédant une vitesse initiale v_0 dans la direction de la force.

2°. *Cas général.* La force est variable en grandeur et en direction et elle agit sur un point matériel possédant une vitesse initiale v_0 dans une direction quelconque. — — Démonstration élémentaire — Démonstration ordinaire.

Si le mobile est sollicité à la fois par plusieurs forces, le théorème du travail a lieu pour la résultante des forces données mais comme le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes, on peut énoncer dans ce cas le théorème en disant que la variation des puissances vives pendant un certain temps est égale à la somme des travaux de toutes les forces agissantes pendant ce même temps.

Application du théorème des puissances vives au mouvement de la projection d'un point sur un axe quelconque.

Forme particulière du théorème des puissances vives dans le cas d'un mouvement circulaire varié. — Moment d'inertie d'un point.

Art. IV. Applications du théorème du travail :

1°. Étude du mouvement des corps pesants dans le vide.

2°. Reprise de l'étude du mouvement oscillatoire d'un point pesant suspendu à l'extrémité d'une tige élastiques.

3°. Étude du mouvement d'un point soumis à une attraction émanant d'un certain point O et proportionnelle à chaque instant à la distance du mobile à ce point.

Dans ces trois exemples l'application du théorème de travail donne immédiatement l'expression de la vitesse du mobile en fonction du chemin parcouru. On insiste pour faire comprendre que ces résultats obtenus immédiatement par l'application du théorème du travail, peuvent se déduire des équations différentielles du mouvement du mobile ; ce qui fait sentir l'importance toute relative de ce théorème comme des précédents.

Chap. III.

Chapitre III.

Étude du mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre.

Transition – Jusqu'à présent nous n'avons étudié que le mouvement d'un point matériel complètement libre. – Dans cette leçon on fait comprendre 1° que l'on peut traiter le mouvement d'un point matériel assujetti à certaines conditions comme de rester sur une courbe ou une surface fixe, exactement comme le mouvement d'un point matériel libre, à la condition de joindre à la résultante R des forces extérieures agissant réellement sur le mobile, une force N normale à chaque instant à la courbe ou à la surface parcourue et exprimant à chaque instant sa résistance.

2° – Que par conséquent tous les théorèmes généraux établis précédemment sur le mouvement d'un point matériel libre sont également applicables au cas du mouvement d'un point assujetti à certaines liaisons, toujours à la condition d'ajouter à la résultante R des forces extérieures la réaction N – Mais on fait observer que cette réaction N étant constamment normale à la courbe ou à la surface, que le mobile est astreint à parcourir puisqu'on suppose qu'on néglige le frottement, elle n'influe en rien sur les variations de vitesse du mobile ; que par conséquent les deux théorèmes 1° des quantités de mouvement – 2° des puissances vives, seront toujours indépendantes de cette réaction N et auront lieu entre les forces extérieures seulement.

Art 1. – Mouvement d'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe plane donnée.

1er Cas – Le mobile est lancé sur une courbe avec une vitesse tangentielle v_0, il n'est d'ailleurs soumis à l'action d'aucune force. Dans ce cas le mouvement du mobile sur la courbe est uniforme et l'expression de la réaction N de cette courbe sur le mobile est $N = \frac{m v_0^2}{\rho}$ c'est la force centripète – Quand à l'action ou pression du mobile sur la courbe, en vertu du principe de Newton elle sera $F = -\frac{m v_0^2}{\rho}$ c'est la force centrifuge – Cas particulier où la courbe précédente devient un cercle Ex la fronde.

2e Cas. – Le mobile lancé sur la courbe précédente avec la vitesse initiale v_0 est soumis à la résultante R d'un certain système de forces extérieures – Dans ce cas l'équation différentielle du mouvement du mobile sur cette courbe est

$$m \frac{dv}{dt} = R_t \quad R_t \text{ composante tangentielle de } R.$$

quant à la réaction N de la courbe sur le mobile elle sera :

$$N = R_n \frac{mv^2}{\rho} \quad R_n \text{ composante normale de } R \text{ positive ou négative.}$$

Réciproquement en vertu du principe de Newton. La pression qu'exerce le mobile sur la Courbe sera $P = R_n - \frac{mv^2}{\rho}$ Le signe - indique seulement que 6 est directement opposé à N.

$- R_n$ s'appelle la pression morte

$- \frac{mv^2}{\rho}$ la pression vive

Art. II - Applications des principes précédents.

1° Application des principes précédents au mouvement de rotation de la terre.

a Pour un point matériel situé à l'équateur on a

$$g = G\left(1 - \frac{1}{290}\right)$$

c'est-à-dire que la rotation de la terre fait que l'accélération de la pesanteur est diminuée à l'équateur de $\frac{1}{290}$ de ce qu'elle serait si le globe tournait pas. Il en résulte que si la terre tournait 17 fois plus vite, l'accélération terrestre apparente g et par suite le poids apparent du corps à l'équateur serait à peu près nul.

b Pour un point matériel situé sur un parallèle dont ∂ représente la latitude on a à peu près $g = G\left(1 - \frac{\cos^2\partial}{290}\right)$

ou plus exactement en tenant compte de la forme ellipsoïdale de la terre

$$g = G\left(1 - \frac{\cos^2\partial}{200}\right)$$

2° Application des mêmes principes à l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à la seule action de la pesanteur et assujetti à rester sur une courbe fixe d'ailleurs quelconque.

Le théorème des puissances vives donne immédiatement.

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

On fait remarquer que ce résultat obtenu par l'application directe des théorèmes du travail, avait été obtenu précédemment en partant des équations du mouvement du mobile.

Quant à la pression P que le mobile exerce sur la courbe elle aura pour expression :

$$P = \underbrace{mg\cos\alpha}_{\text{Pression morte}} \pm \underbrace{\frac{mv^2}{\rho}}_{\text{Pression vive}} = mg\left(\cos\alpha \pm \frac{2h}{\rho}\right) \text{ si } v^2 = 2gh$$

Cas particuliers.

a supposons que la Courbe précédente soit un cercle de rayon l; la formule précédente devient (t) $P = mg\,(\cos\alpha + \frac{2h}{l})$
c'est l'expression de la tension du fil qui soutient le point materiel dans le pendule simple: Pour le point bas répondant à $\alpha = 0$. on aura:

$$P = mg\,(1 + \frac{2h_0}{l})$$

h_0 représentant la chute totale.

b supposons que cette courbe soit une cycloïde, la formule (t) exprimera encore la tension du fil soutenant le point matériel dans le pendule cycloïdal, à la condition que l représentera à chaque instant le rayon de courbure de cette cycloïde pour le point bas répondant à $\alpha = 0$ on aura:

$$P = mg\,(1 + \frac{2h_0}{4r})$$

h_0 représentant la chute totale et r le cercle générateur de la cycloïde

c Enfin si la courbe se réduit à une ligne droite, on est ramené au cas du plan incliné. Ici la pression du mobile se réduit à la pression morte $P = mg\cos\alpha$ — car la pression vive s'annule, le rayon de courbure devenant infini.

Art III — Problème général — On donne par ses projections $f(x,y)=0$, $\varphi(y,z)=0$ sur les deux plans des xy et des yz, la courbe qu'un mobile de masse m est astreint à parcourir on donne de plus par ses projections X, Y, Z sur les trois axes ox, oy, oz, la résultante R des forces extérieures sollicitant le mobile, on connait d'ailleurs l'état initial de ce mobile. On demande de déterminer 1° toutes les circonstances du mouvement 2° et à chaque instant l'intensité et la direction de la réaction N de la courbe.

4me Chapitre.

Principe de d'Alembert.

appliqué à un seul point matériel — Ses Conséquences.

Transition et Article 1er. — Liaison intime entre le sujet précédent et le sujet présent.
Principe de d'Alembert. — A chaque instant du mouvement d'un point, il y a équilibre dynamique entre l'action motrice R et la résistance d'inertie $-mJ$ de ce point

Ce principe résulte du principe de l'égalité de l'action à la réaction généralisé et étendu au cas du mouvement, et il permet de ramener toutes les questions de mouvement d'un point matériel à de simples questions d'équilibre. Ainsi si d'une part nous pouvons considérer l'équilibre comme un cas particulier du mouvement et déduire (Voir Page 15) des équations différentielles du mouvement d'un point les équations d'équilibre d'un système de forces appliqué à ce point matériel; réciproquement, par l'introduction des forces d'inertie on peut traiter le mouvement d'un point comme une question d'équilibre et trouver les équations différentielles du mouvement de ce point en posant les trois relations d'équilibre relatives à un point matériel, entre les forces réelles sollicitant ce point et la force d'inertie de ce point.

Composantes de la force d'inertie d'un point : la composante tangentielle ou force d'inertie tangentielle a pour expression $-\frac{m\,dv}{dt}$ la composante normale ou centrifuge a pour expression $-\frac{mv^2}{\rho}$

Art II. — Applications du principe de d'Alembert.

Étude du mouvement d'un point sollicité par des forces quelconques et astreint à se mouvoir sur un cercle. L'application directe du principe de d'Alembert conduit immédiatement à la formule $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_0 F}{m r^2}$ trouvée plus haut.

Étude du mouvement dans la machine d'Atwood, déterminer l'accélération J_t de ce mouvement ainsi que la tension du fil.

On fait comprendre également dans cet exemple que les résultats obtenus par l'application du principe de d'Alembert, peuvent se trouver sans parler de ce principe

5me Chapitre

Étude des mouvements relatifs.

Art 1er — On a démontré que lorsqu'un point matériel se meut dans un système de comparaison mobile.

1° $\quad mJ = \text{Résult}\,(mJ_r, mJ_e)$ si le système est en simple translation.

2° $\quad mJ = \text{Résult}\,(mJ_r, mJ_e, mJ_c)$ si le système possède un mouvement qqc. revenant à chaque instant à une translation et à une rotation instantanées.

On en conclut que réciproquement.

$$m J_r = \text{Résult}\ (m J_1 - m J_e) \text{ dans le } 1^{er} \text{ Cas.}$$

$$\text{et } m J_r = \text{Résult}\ (m J_1 - m J_{e_1} - m J_c) \text{ dans le } 2^{e} \text{ Cas}$$

c'est à dire que pour un observateur fixé au système de comparaison qui ne voit par suite que le mouvement relatif du mobile qu'il prend pour un mouvement absolu, les choses se passent comme si ce point matériel était soumis non seulement à la force totale réelle $m J$, mais encore aux deux forces $m J_e$ - $m J_c$ égales et contraires aux deux forces qui sembleraient solliciter le mobile si à l'instant considéré on le supposait lié au système mobile de Comparaison.

En d'autres termes, si l'observateur en question connait la force réelle absolue $m J$ sollicitant le mobile, et qu'il étudie le mouvement qu'il voit, il remarque que ce mouvement n'est pas celui que produirait cette force $m J$, et que pour s'expliquer ce mouvement, il est obligé d'ajouter à la force réelle $m J$, les deux forces $-m J_e$, $-m J_c$ constituant la résistance d'inertie du point supposé lié à chaque instant au système mobile et qu'on désigne sous le nom de forces apparentes dans le mouvement relatif

De ce qui précède résulte:

1° Que pour étudier le mouvement relatif d'un point matériel il suffit d'ajouter aux forces réelles qui sollicitent le point, les deux forces apparentes $-m J_e$, $-m J_c$ et de traiter la question comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu.

2° Que les théorèmes généraux dont on a parlé s'appliquent également à l'étude des mouvements relatifs, à la Condition de joindre aux forces réelles les forces apparentes permettant de traiter le mouvement relatif comme un mouvement absolu.

Art II. – Cas particuliers seuls examinés.

1° Si le mouvement du système de Comparaison est un simple mouvement de translation circulaire uniforme, la seule force apparente à ajouter aux forces réelles sera:

$$-m J_e = -m \omega^2 r \qquad r \text{ rayon du cercle de translation.}$$

2° Si le mouvement du système de Comparaison est un simple mouvement de rotation uniforme autour d'un certain axe ‖ la seule force apparente à ajouter aux forces réelles sera :

$$-m J_e = -m \omega^2 \rho$$

ρ désignant à chaque instant la distance variable du mobile à l'axe de rotation.

C. Applications des deux cas particuliers qui précèdent

1° Étude du mouvement du pendule conique.

2° Surface d'équilibre d'un liquide en rotation uniforme.

On peut d'ailleurs traiter ces deux questions sans parler des mouvements relatifs.

3° Étude du mouvement relatif d'un point matériel pesant dans un tuyau animé d'une rotation uniforme autour d'un certain axe. – Application aux turbines.

4° Étude du mouvement relatif d'une sphère glissant le long d'une baguette horizontale très mince qui la traverse et à laquelle un moteur imprime et conserve un mouvement de rotation uniforme autour d'un de ses points. – La courbe parcourue est une spirale logarithmique, $\rho = e^{\omega}$

Fin de la Dynamique pure d'un point matériel.

2me Partie

Dynamique pure des systèmes matériels

Préliminaires. — Nous ne sommes occupés jusqu'à présent que du mouvement d'un seul point matériel. — Il s'agit de passer à l'étude du mouvement des systèmes matériels.

Un système matériel quelconque peut être considéré comme un ensemble des points matériels de masses m m' m''..... reliés deux à deux par des actions attractives ou répulsives variables f mais à chaque instant égales deux à deux et directement opposées (Principe de Newton)

Supposons qu'un tel système soit soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures F variables à chaque instant d'une manière quelconque en grandeur et en direction; il est clair que sous l'action combinée des forces F et f le système matériel en question va prendre dans l'espace un certain mouvement d'ensemble, et en outre se déformer à chaque instant de la durée suivant une certaine loi.

Cela posé, le problème général que l'on se propose dans cette 2e partie de la Dynamique pure est le suivant :

1° Définir le mouvement d'ensemble du système.

2° Indiquer les variations de forme qu'il subit à chaque instant de la durée.

Cette année, nous ne nous occuperons que de la 1re partie du problème, la 2e partie étant du domaine de la mécanique moléculaire (Théorie mathématique de l'élasticité dont la théorie de la résistance des matériaux est un cas particulier). — Or pour résoudre la 1re partie du problème, il suffit d'observer que chaque point matériel du système donné se meut comme un point matériel libre, sollicité à la fois par les forces extérieures F qui lui sont directement appliquées et par les actions intérieures f qu'il reçoit de tous les autres points du système. — Dès lors en appliquant successivement à tous les points du système donné que l'on peut considérer comme libres, les principes et les théorèmes développés dans la 1re partie, on obtiendra un ensemble de relations, renfermant la solution de la question.

Considérons donc ce que deviennent ces principes et ces théorèmes étendus au cas des systèmes matériels.

Chapitre 1er

Extension du principe de d'Alembert au cas des systèmes matériels.

Art 1er. — Principe de d'Alembert appliqué aux systèmes matériels.

Le principe de d'Alembert appliqué à un seul point matériel libre, consiste avons nous dit en ce que : à chaque instant du mouvement de ce point sollicité par un certain système de forces extérieures, il y a équilibre dynamique entre ces forces et la résistance d'inertie du point dont les composantes tangentielle et normale, sont $-m\frac{dv}{dt}$, $-m\frac{v^2}{\rho}$.

Considérons actuellement un système matériel $m\,m'\,m''$ ..... sollicité par les forces extérieures F, F', F'' ..... et les actions intérieures f qui agissent au sein même de ce système : Il est clair, en appliquant le principe précédent à

à chaque point de ce système tel que m (que l'on peut considérer comme libre dès l'instant qu'aux forces extérieures F qui agissent directement sur lui, on joint les actions intérieures f qu'il reçoit des autres points), il est clair dis-je : qu'à chaque instant du mouvement du système, chacun des points qui le composent tel que m est en équilibre dynamique sous l'action :

a des forces extérieures, telles que F qui le sollicitent directement.

b des actions mutuelles, telles que f qu'il reçoit des autres points du système

c et de la résistance d'inertie dont les composantes tangentielle et normale sont : $-m\frac{dv}{dt}$, $-m\frac{v^2}{\rho}$

D'après cela, si à un instant quelconque du mouvement d'un système matériel on joint aux forces tant extérieures F qu'intérieures f qui agissent sur ses différents points, les résistances d'inertie de ces points ; on obtiendra un système total de forces qui seront en équilibre dynamique à chaque instant.

C'est en cela que consiste le principe de d'Alembert appliqué à un système matériel quelconque.

Dans le cas particulier où le système matériel donné est supposé parfaitement solide, indéformable, les forces intérieures disparaissent et l'on peut dire qu'à chaque instant du mouvement de ce solide il y a équilibre dynamique entre les forces extérieures

F et les résistances d'inertie des différents points. — Nous ne nous occuperons dans tout ce qui va suivre que de cas particulier d'un système solide, indéformable. Ce principe permet de ramener toutes les questions du mouvement du système solide à de simples questions d'équilibre. — En effet puisqu'en vertu de ce principe, il y a à chaque instant équilibre dynamique entre les forces extérieures et les résistances d'inertie des différents points. — Nous pouvons appliquer à ce système total de forces, les six conditions d'équilibre trouvées en statique; l'ensemble de ces six relations constitue les équations différentielles du mouvement du solide et définissent entièrement son mouvement.

Art II. Application du principe de d'Alembert à l'étude du mouvement d'un solide tournant autour d'un axe.

Si nous voulions considérer la question dans toute sa généralité, c'est à dire étudier le mouvement d'un corps solide libre dans l'espace sollicité par un système de forces quelconques : en posant les six conditions d'équilibre dynamique dont on vient de parler, on verrait qu'elles définissent à chaque instant la position de l'axe central du mouvement du solide, ainsi que l'intensité de la rotation et du glissement simultanés qui s'opèrent autour de cet axe central instantané — et en définitive on arriverait par le calcul à cette belle conception trouvée l'an dernier en cinématique sous la notion de force à savoir : que le mouvement fini le plus général d'un corps solide libre dans l'espace revient à la rotation et au glissement simultanés sur une certaine surface gauche fixe, d'une surface gauche mobile liée invariablement au solide, les génératrices de la surface gauche fixe étant le lieu des axes centraux du mouvement dans l'espace absolu, et la surface gauche mobile, le lieu de ces mêmes axes dans la figure mobile. — Et le calcul nous donnerait la faculté de trouver les équations de ces deux surfaces gauches!

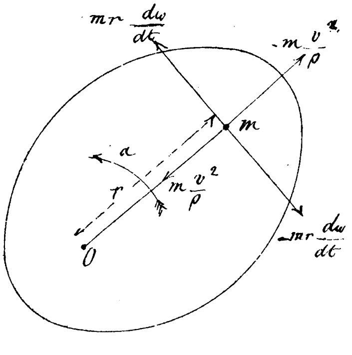
Mais nous ne nous poserons pas, à cause de la difficulté des calculs, la question en termes aussi généraux — Nous étudierons seulement en partant du principe de d'Alembert, le mouvement d'un solide astreint à tourner autour d'un axe fixe sous l'action d'un système quelconque de forces F.

D'après le principe de d'Alembert appliqué à un corps solide, à chaque instant du mouvement varié qui va se produire (puisque les forces F ne sont pas supposées en équilibre statique) il y a équilibre dynamique entre les forces extérieures F, les réactions N de l'axe et les résistances d'inertie des différents points du solide. Donc l'ensemble de ces forces doit satisfaire aux six conditions d'équilibre : mais comme le corps ne peut que tourner autour de l'axe projeté en O, ces six conditions d'équilibre se réduisent comme on sait à une seule : celle des moments autour de l'axe O laquelle sera nécessairement indépendante des réactions N de l'axe puisqu'elles passent par cet axe (attendu qu'on néglige le frottement) — Quant à la direction et à l'intensité de ces réactions N, elles seront données en posant les cinq autres relations qui ne sont plus dans ce cas de réelles conditions d'équilibre

Occupons nous d'abord de la condition d'équilibre proprement dite qui n'est autre que la relation des moments autour de l'axe projeté en O. En posant cette relation on aura : (1) $\sum M_o F + \int M_o i = 0$.

$M_o i$ représentant le moment de la résistance d'inertie d'un élément quelconque du solide. Il s'agit tout d'abord d'en trouver l'expression : Soit à l'instant initial, ω la vitesse angulaire du corps, m la masse d'un élément de ce corps et r sa distance de l'axe O, cet élément présente une résistance d'inertie dont les composantes tangentielle et normale sont comme on sait : $-\frac{m\,dv}{dt}$, $-m\frac{v^2}{\rho}$
dirigées comme il est indiqué dans la figure, si le sens de la rotation est marqué par la flèche a.

Quant au moment de cette résistance d'inertie égal à la somme des moments de ses composantes, il se réduira évidemment au moment de sa composante tangentielle $-m\frac{dv}{dt}$, le moment de la composante normale qui passe par l'axe étant nul par cela même.



Or le moment de cette composante tangentielle ou le moment cherché a évidemment pour expression.

$$M_o i = -m\frac{dv}{dt}r$$

Mais $dv = r\,d\omega$ puisque $v = \omega r$

donc $M_o i = -mr^2\frac{d\omega}{dt}$

Par suite $\int M_o i = -\int mr^2\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}\int mr^2$

L'équation (1) deviendra donc en remplaçant :

$$\sum M_o F - \frac{d\omega}{dt}\int mr^2 = 0$$

d'où on déduit : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_o F}{\int mr^2}$

Si dans cette relation nous faisons $\frac{d\omega}{dt} = 1$ il reste : $\int mr^2 = \sum M_o F$. c'est à dire que la quantité purement géométrique, $\int mr^2$, représente la somme des moments des résistances d'inertie de tous les points du corps, quand les forces extérieures F sont telles que le corps prend une accélération angulaire $= 1$, c'est pour cette raison que cette quantité a pris dans la science le nom de moment des forces d'inertie ou simplement de Moment d'inertie, elle se désigne généralement par la lettre I_o, de sorte que la dernière formule s'écrit :

$$(2)\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_o F}{I_o}$$

Cette relation à laquelle nous conduit l'équation d'équilibre dynamique du corps n'est rien autre chose que l'équation différentielle du mouvement du solide ; En effet : nous donnant à chaque instant l'accélération angulaire du mouvement, nous pouvons par deux intégrations successives en déduire la loi des vitesses angulaires ainsi que celle des arcs décrits

Nous pouvons d'ailleurs arriver à la formule (2) sans faire usage du principe de d'Alembert, en effet :

Si je considère un point du corps, le point m, par exemple à la distance r de l'axe et si j appelle R la force qui lui est directement appliquée on a trouvé :

(Dynamique pure d'un point matériel, Ch 1er – Art VI, Fin de la 1ere Conséquence)

$$m r^2 \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_o R$$

De même pour un autre point m' du corps, on aurait :

$$m' r'^2 \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_o R'$$

et ainsi de suite – Si je fais la somme de ces égalités, j'aurai

$$\frac{d\omega}{dt} (m r^2 + m' r'^2 + m'' r''' \ldots\ldots) = \Sigma \mathcal{M}_o F$$

D'où $$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{\int m r^2} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{I_o} \qquad C q f d$$

Or de cette relation obtenue directement, par des considérations dynamiques, je puis déduire la condition d'équilibre statique d'un système quelconque de forces appliqué à un solide qui ne peut que tourner autour d'un axe : En effet si ces forces sont en équilibre le solide sera en repos ou en rotation uniforme or dans ces deux cas l'accélération $\frac{d\omega}{dt} = o$ – Si j'introduis cette condition dans la relation (2) il en résulte puisque I_o n'est pas nul, qu'il faut nécessairement que

$$\Sigma \mathcal{M}_o F = o$$

condition d'équilibre connue.

Ainsi donc si d'une part nous pouvons considérer l'équilibre, l'état statique comme un cas particulier du mouvement (puisque de la formule (2) obtenue par de pures considérations dynamiques, nous concluons la condition d'équilibre statique) :

Réciproquement par l'introduction des forces d'inertie et le principe de d'Alembert nous pouvons considérer le mouvement comme un cas particulier de l'équilibre (puis qu'en posant l'équation d'équilibre des moments entre les forces réelles et celles d'inertie nous arrivons à l'équation différentielle (2) du mouvement du solide.)

Enfin de cette équation différentielle (2) du mouvement d'un solide en rotation (2) $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{I_o}$

obtenue soit en nous appuyant sur le principe de d'Alembert, soit directement; nous pouvons déduire le théorème des puissances vives applicable à un solide en rotation en effet en combinant par multiplication (2) avec la relation

$$(3)\ \omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

le temps se trouvera éliminé et nous aurons.

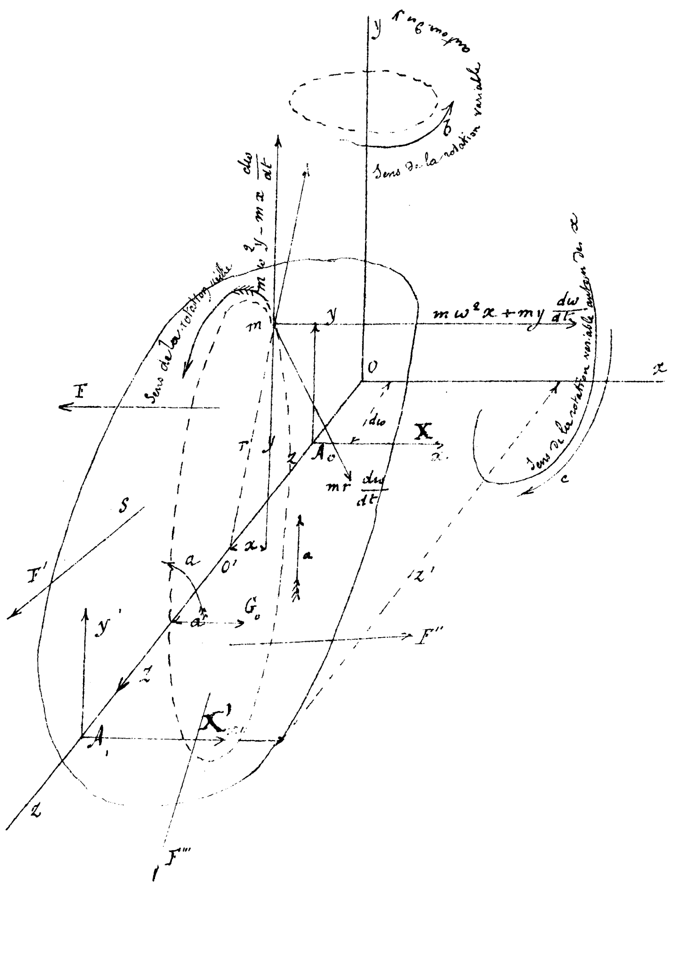
$$I_o . \omega\, d\omega = d\alpha\, \Sigma M_o F$$

En intégrant et ajoutant la constante, on a enfin:

$$\frac{1}{2} I_o (\omega^2 - \omega_o^2) = \int^{\alpha} d\alpha\, \Sigma M_o F$$

Art. III. – Recherche de l'expression des réactions N de l'axe dans le cas précédent du mouvement varié de rotation d'un solide autour de cet axe.

Il nous reste à déterminer les réactions de l'axe sur le solide pendant sa rotation



et par suite les pressions que ce solide exerce à chaque instant sur cet axe. Pour cela il suffit de poser les cinq autres relations d'équilibre qui deviennent ici de pures relations entre les réactions inconnues cherchées et les connues de la question.

Rapportons pour cela le solide S à trois axes rectangulaires et prenons l'axe des Z pour axe de rotation. Les réactions de cet axe se réduisent à trois, l'une Z suivant l'axe de rotation OZ, les deux autres normales à OZ et passant par les appuis fictifs A_o et A_1 déterminant la fixité de l'arbre soient X et Y les composantes de la 1ère X' et Y' les composantes de la 2e suivant les x et les y.

Le mouvement ayant lieu dans le sens des flèches a les composantes tangentielle et normale de la résistance d'inertie d'un point quelconque m du corps dont x, y, z sont les coordonnées, sont $m\omega^2 r$, $m r \frac{d\omega}{dt}$ dans le sens indiqué par les flèches. Remplaçons ces deux forces par leurs composantes parallèles aux x et aux y, alors la résistance totale d'inertie du point m pourra être considérée comme résultant des deux forces :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^o\ m\omega^2 x + m y \frac{d\omega}{dt} & \text{suivant les } x \\ 2^o\ m\omega^2 y + m x \frac{d\omega}{dt} & \text{suivant les } y \end{array}\right\} \text{dans le sens des flèches.}$$

Dès lors les cinq relations de condition déterminant les composantes X, Y, X', Y', Z des réactions se posent avec la plus grande facilité

Équation de projection sur les x : $\Sigma F_x + X + X' + \omega^2 \int m x + \frac{d\omega}{dt} \int m y = 0$ (3)

Équation de projection sur les y $\Sigma F_y + Y + Y' + \omega^2 \int m y - \frac{d\omega}{dt} \int m x = 0$ (4)

Équation de projection sur les z $\Sigma F_z + Z = 0$ (5)

Équation des moments autour de l'axe des x $\Sigma M_x F - Y z_0 - Y' z_1 - \omega^2 \int m y z + \frac{d\omega}{dt} \int m x z = 0$ (6)

Équation des moments autour de l'axe des y. $\Sigma M_y F + X z_0 + X' z_1 + \omega^2 \int m x z + \frac{d\omega}{dt} \int m y z = 0$ (7)

Ce système d'équations déterminant les réactions est susceptible de simplification. Saisissons par exemple l'instant de la rotation où le centre de gravité G du système rencontre le plan des x z et soit à cet instant a sa distance à l'axe des z. A cet instant nous aurons évidemment en vertu du théorème des moments par rapport à un plan :

$$\int m x = M a$$

On aura également à cet instant :

$$\int m y = M Y = 0$$

puisqu'à cet instant, Y du centre de gravité = 0 d'après l'hypothèse.

Les équations (3) et (4) du système précédent deviennent donc :

(3) bis $\Sigma F_x + X + X' + M\omega^2 a = 0$

(4) bis $\Sigma F_y + Y + Y' - M a \frac{d\omega}{dt} = 0$

En les comparant aux premières (3) et (4) on en conclut :

1° Que $M\omega^2 a$ représente la somme des projections de toutes les résistances d'inertie sur l'axe des x.

2° Que $-M a \frac{d\omega}{dt}$ représente la somme des projections de ces mêmes forces sur les y

Or $M\omega^2 a$ est l'expression de la composante centrifuge d'inertie d'un point de masse M (M représentant la masse entière du solide) tournant à la distance a avec la vitesse de rotation ω.

Donc on peut conclure 1°. que la somme des projections sur les x de toutes les résistances d'inertie est égale à la Composante centrifuge d'inertie $M\omega^2 a$ de la masse totale concentrée en son centre de gravité.

2°. Que la somme des projections sur les y de toutes les forces d'inertie est égale à la Composante tangentielle d'inertie $M a \frac{d\omega}{dt}$ de la masse totale concentrée en son Centre de gravité.

On peut condenser ces deux résultats dans l'énoncé suivant :

La résultante de translation des forces d'inertie est toujours égale à la force d'inertie de la masse totale concentrée en son centre de gravité.

Des relations (3) bis, (4) bis on tire d'ailleurs :

$$X + X' = -(\Sigma F_x + M\omega^2 a)$$

$$Y + Y' = -\left(\Sigma F_y + M a \frac{d\omega}{dt}\right)$$

ce qui nous donne ce second principe.

La résultante des réactions exercées par les appuis est égale et de signe contraire à la résultante de translation des forces extérieures F et de la force d'inertie de la masse totale supposée concentrée en son centre de gravité.

Nous ferons plus tard usage de ce principe dans la théorie dynamique des marteaux. Quant à la résultante de translation des pressions exercées sur les appuis, elle est évidemment égale et de même signe que les résultants de translation des forces extérieures et de la force totale d'inertie.

Cas particuliers

Si le plan des xy divise le corps en deux parties symétriques et renferme par conséquent le centre de gravité du système, il est clair que les termes en xz et yz disparaîtront, car si nous considérons à la fois deux tranches symétriquement placées en avant et en arrière du plan des xy, pour ces deux tranches on aura à la fois :

$$\int m x z = \int m y z = 0$$

Si de plus on choisit l'instant où le centre de gravité passe dans le plan des zx — Les cinq relations déterminant les réactions deviendront

$$(3)''' \quad \Sigma F_x + X + X' + M\omega^2 a = 0$$

$$(4)''' \quad \Sigma F_y + Y + Y' - M a \frac{d\omega}{dt} = 0$$

(5)''' $\Sigma F_z + Z = 0$

(6)''' $\Sigma M_x F - Y z_0 - Y' z_1 = 0$

(7)''' $\Sigma M_y F + X z_0 + X' z_1 = 0$

Si de plus nous supposions que l'axe de rotation OZ passe par le Centre de gravité, le système se réduit en conservant les conditions précédentes à:

(3)^{IV} $\Sigma F_x + X + X' = 0$

(4)^{IV} $\Sigma F_y + Y + Y' = 0$

(5)^{IV} $\Sigma F_z + Z = 0$

(6)^{IV} $\Sigma M_x F - Y z_0 - Y' z_1 = 0$

(7)^{IV} $\Sigma M_y F + X z_0 + X' z_1 = 0$

Art IV. — Moments d'Inertie. — Pour passer aux applications de la théorie exposée dans les articles II et III, il est nécessaire de connaître l'expression des moments d'inertie des différents corps. Or si l'on se rappelle la définition du moment d'inertie d'un corps, on en conclura que la recherche des moments d'inertie dans le cas des solides homogènes est une pure question d'analyse. Nous la traiterons donc dans nos conférences de calcul infinitésimal, comme application des méthodes les plus simples d'intégration. Nous nous contenterons pour le moment de quelques définitions et de la démonstration de deux principes facilitant la recherche des moments d'inertie.

Le moment d'inertie d'un corps solide autour d'un axe est d'après ce qu'on a vu la somme des produits des masses des différents éléments de ce solide par le carré de leurs distances à cet axe. Cette somme est donc exprimée par le symbole

$$\int m r^2$$

Si l'on pose $\int m r^2 = M.R^2$, M représentant la masse totale $\int m$ du corps la quantité R déduite de cette relation est ce qu'on nomme le rayon de gyration du solide. C'est donc la distance à laquelle toute la masse du corps devrait être concentrée en un point pour que le moment d'inertie de ce point unique de masse M soit égal au moment d'inertie du solide.

D'autre part, si l'on remarque que

$$m = \frac{p}{g} = \frac{v\delta}{g} = \frac{\delta}{g}.v$$

v élément de volume du corps supposé homogène
δ son poids spécifique.

On pourra écrire:

$$\int m r^2 = \frac{\delta}{g}\int v r^2$$

qui exprime que le moment d'inertie d'un solide pesant homogène s'obtient en multipliant le moment d'inertie de son volume par la densité $\frac{P}{g}$ du corps.

La recherche des moments d'inertie revient donc dans le cas de solides homogènes à une pure question d'analyse.

Par analogie on appellera moment d'inertie d'une ligne ou d'une surface par rapport a un certain axe la somme des produits de leurs divers éléments multipliés par le carré de leur distance à l'axe de rotation, Ainsi :

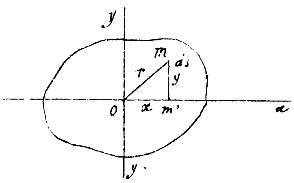
1° pour les lignes on aura : $I = \int dl\, r^2$ dl élément de la ligne totale L

2° — surfaces — $I = \int ds . r^2$ ds élément de la surface totale S

Dans le cas d'une surface plane l'axe de la rotation et par suite l'axe du moment peut être situé soit dans la surface, soit perpendiculairement à cette surface. Dans ce second cas le moment d'inertie est dit : Moment d'inertie polaire

Je vais faire voir qu'il existe une relation très simple entre le moment d'inertie polaire d'une surface plane, et le moment d'inertie ordinaire de cette surface.

Soit une surface tournant autour de l'axe projeté en o son moment d'inertie polaire sera :



$$I_o = \int r^2 ds$$

Menons par le point o où l'axe polaire perce la surface deux axes rectangulaires contenus dans cette surface, le triangle rectangle m m' o donne : $r^2 = x^2 + y^2$

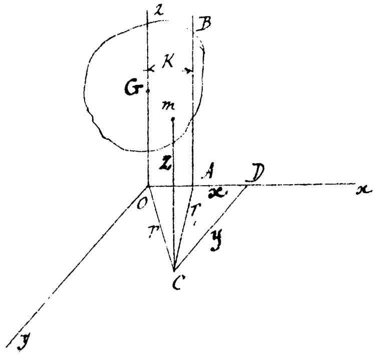
Remplaçant r^2 par sa valeur dans I_o, on a :

$$I_o = \int r^2 ds = \int (x^2+y^2)\, ds = \int x^2 ds + \int x^2 ds = I_x + I_y$$

c'est à dire que le moment d'inertie polaire d'une surface est égal à la somme des moments d'inertie ordinaires de la surface par rapport à deux axes perpendiculaires tracés dans son plan et passant par le point o

La recherche des moments d'inertie des volumes, surfaces et lignes est également facilité par le principe suivant au moyen duquel quant on connait le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité du solide de la surface ou de la ligne, on en déduit le moment d'inertie par rapport à tout autre axe parallèle au 1er.

Soit oz le 1er axe passant par le centre de gravité G du solide et AB



le second axe à la distance K du premier.

Prenons le plan de ces deux droites pour plan des xz et considérons un point m du solide soient $x\,y\,z$ ses coordonnées et r, r_1 ses distances aux axes OZ, AB.

Le triangle ADC rectangle en D donne $r_1^2 = y^2 + (x-K)^2 = y^2 + x^2 + K^2 - 2Kx = r^2 + K^2 - 2Kx$

D'où en multipliant par m

$$mr_1^2 = mr^2 + mK^2 - 2mKx$$

et par suite: $\int mr_1^2 = \int mr^2 + K^2 \int m - 2K\int mx$

mais en vertu du théorème des moments par rapport à un plan.

$\int mx = X \int m = 0$ puisque $X = 0$ le centre de gravité G étant sur l'axe des Z. Il reste donc:

$$\int mr_1^2 = \int mr^2 + MK^2 \quad \left(\int m = M \text{ la masse totale}\right)$$

ou. $I = I_0 + MK^2$

c'est à dire que le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque AB s'obtient en ajoutant au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle mené par le centre de gravité G, le produit de la masse entière par le carré de la distance des deux axes. Si l'on pose maintenant $\int mr_1^2 = MR_1^2$

$$\int mr^2 = MR^2$$

L'égalité précédente devient en divisant tout par M.

$$R_1^2 = R^2 + K^2$$

c'est à dire que le carré du rayon de gyration d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal à la somme du carré du rayon de gyration du solide par rapport à un axe parallèle au premier mené par le centre de gravité, et du carré de la distance des deux axes.

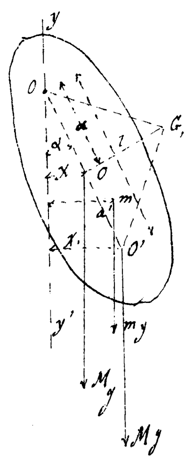
Article V. — Applications de la théorie développée dans les articles II et III.

1°. Théorie du pendule composé.

Nous avons démontré en nous servant du principe de d'Alembert, ou sans nous en servir: que l'accélération angulaire dans le mouvement varié d'un solide tournant autour d'un axe avait pour expression.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_0 F}{I}$$

Ce résultat va nous permettre de trouver d'une manière élégante la longueur d'un pendule simple oscillant comme un pendule composé donné.



Soit a la distance du centre de gravité G du pendule composé donné à l'axe O de suspension. L'accélération angulaire pendant l'oscillation a pour expression pour l'angle décrit α

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_0 F}{I_0} = \frac{\Sigma mgx}{I_0} = \frac{Mg.X}{I_0} = \frac{Mg.a}{I_0}\sin\alpha$$

On demande la longueur du pendule simple de même masse M possédant à chaque instant le même mouvement c'est à dire la même accélération que le pendule composé pour le même angle d'écart α. Soit l la longueur inconnue de ce pendule simple, son accélération angulaire pour le même angle d'écart α sera :

$$\frac{d\omega'}{dt} = \frac{\Sigma M_0 F}{I_0} = \frac{Mg.X.}{M.l^2} = \frac{Mgl\sin\alpha}{M.l^2} = \frac{g}{l}\sin\alpha$$

On veut avoir $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega'}{dt}$ on a donc pour cela la condition :

$$\frac{Mga}{I_0} = \frac{g}{l} \qquad \text{D'où } l = \frac{I_0}{Ma} \quad (1)$$

Telle est la longueur du pendule simple oscillant comme le pendule composé donné. Or la durée de l'oscillation du pendule simple de longueur l ayant été trouvée :

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

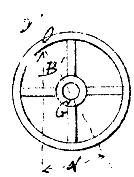
la durée de l'oscillation du pendule composé équivalent sera en remplaçant l par la valeur trouvée

$$(2)\quad t = \pi\sqrt{\frac{I_0}{Ma}\cdot\frac{1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{I_0}{Pa}} \qquad P \text{ poids du pendule composé} = Mg$$

Formule qui permet de calculer expérimentalement le moment d'inertie I_0 d'un solide quelconque tournant autour d'un axe quelconque O. En effet de (2) on tire :

$$(3)\quad I_0 = \frac{t^2}{\pi^2}.Pa$$

Supposons par exemple un volant faisant n oscillations par heure c'est à dire dans 3600", autour d'un axe O sur lequel il est suspendu, la durée t de l'oscillation sera $\frac{3600}{n}$ et en remplaçant dans (3) on aura pour I_0



$$I_0 = \frac{(3600)^2}{\pi^2 n^2}.Pa$$

Connaissant expérimentalement I_0 autour de l'axe projeté en O, il sera facile d'en déduire le moment d'inertie I_G autour de l'axe même de la roue passant par son centre de gravité. En effet en vertu du principe de l'article IV. On a :

$$I_0 = I_G + Ma^2 \quad \text{D'où } I_G = I_0 - Ma^2 \; a \text{ représentant la distance } OG$$

Nous pourrions encore arriver aux résultats donnés par les formules (1) et (2) de la façon suivante :

L'accélération angulaire du pendule composé donné est fournie par la relation : $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mga}{I_o} \sin\alpha$ trouvée précédemment.
ou très approximativement par la formule :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mga}{I_o}\alpha = K\alpha$$

si on suppose les écarts α très petits. Donc le mouvement oscillatoire qui se produit est tel que l'accélération angulaire, c'est à dire l'accélération linéaire tangentielle à l'unité de distance de l'axe est proportionnelle à α. Nous pouvons donc appliquer la règle démontrée dans l'introduction à la Dynamique (Ch I fin de l'Art III) donnant la durée de la double oscillation dans une foule de mouvements oscillatoires

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{Ma}\cdot\frac{1}{g}}$$ en remplaçant K par sa valeur présente.

D'où la durée d'une oscillation simple :

$$(2)\quad t = \pi\sqrt{\frac{I_o}{Ma}\cdot\frac{1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{I_o}{Pa}}$$

D'ailleurs la durée de l'oscillation d'un pendule simple de longueur l est comme on sait : $t' = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Si l'on veut que ce pendule simple oscille comme le pendule composé donné, il suffit d'expérience que $t' = t$ ce qui donne

$$(1)\quad l = \frac{I_o}{Ma}$$

On peut d'ailleurs donner à la formule (1) une autre forme, en effet on vient de rappeler (se reporter à la 1ère figure) que

$$I_o = I_G + Ma^2 = M\rho^2 + Ma^2$$

ρ rayon de gyration du solide tournant autour de l'axe projeté en G.
Remplaçant I_o par sa valeur dans (1) il vient en divisant haut et bas par M

$$(1)\text{bis}\quad l = \frac{\rho^2+a^2}{a} = a + \frac{\rho^2}{a} = a + a'$$

Ainsi pour obtenir la longueur l du pendule simple oscillant comme le pendule composé donné il faudra prolonger $OG = a$, d'une quantité $GO' = a' = \frac{\rho^2}{a}$ que l'on obtiendra par conséquent en élevant $GG' = \rho$ perpendiculaire en G sur OG ; la perpendiculaire en G' sur OG' coupera OG prolongé au point O' extrémité cherchée du pendule simple oscillant comme le pendule composé donné. Ce point O' s'appelle centre d'oscillation.

De cette formule (1) bis, résulte d'ailleurs :

1°. Que le centre d'oscillation O' est toujours au dessous du centre de gravité G

2°. Que ce centre d'oscillation O' est réciproque de l'axe O de suspension c'est à dire que si on retourne le pendule et qu'on le suspende en O' la durée des oscillations de ce nouveau pendule sera la même que celle de l'ancien, en effet :

On a trouvé : $l = a + \frac{\rho^2}{a} = a + a'$

Si on renverse le pendule et qu'on le suspende par l'axe O' d'oscillation la longueur l' du pendule simple correspondant sera donnée par la formule.

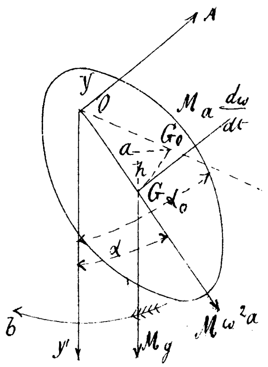
$$l' = a' + \frac{\rho^2}{a'}$$

mais puisqu'on a posé $\frac{\rho^2}{a} = a'$ on en conclut aussi $\frac{\rho^2}{a'} = a$, la dernière formule devient donc : $l' = a' + a$

Donc $l = l'$ et par suite les deux pendules composés inverses O et O' ont la même durée d'oscillation C q f d

3°. Si l'on remplace l'axe de suspension O par un autre qui lui soit parallèle et à la même distance a du centre de gravité, la longueur GO' et par suite la longueur OO' ou l restent les mêmes, c'est à dire que si du centre de gravité, on décrit deux cylindres avec les rayons a et $\frac{\rho^2}{a}$, le corps oscillera de la même manière autour d'une arête quelconque de ces deux cylindres.

Pressions du pendule composé sur ses appuis aux différents instants de l'oscillation.



Nous supposerons le pendule symétrique par rapport au plan perpendiculaire à l'axe d'oscillation O mené par le centre de gravité G — Ici ce plan est celui de la figure

Or nous avons dit (Art III) que la résultante de translation des pressions exercées sur les appuis d'un corps en rotation autour d'un axe était égale et de même signe à la résultante de translation des forces extérieures et de la force totale d'inertie.

La pression cherchée est donc ici pour l'angle de dérivation α le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche b, la résultante du poids Mg appliqué au centre de gravité G, et des composantes

$$M\omega^2 a, \quad Ma\frac{d\omega}{dt}$$

centrifuge et tangentielle de la résistance totale d'inertie, ces composantes étant dirigées dans le sens qu'indiquent les flèches.

Appelons h la hauteur verticale dont est descendu le centre de gravité depuis sa position extrême en G_0 jusqu'en G. La vitesse angulaire ω acquise par ce point arrivé en G sera donnée par la relation des puissances vives : (Fin de l'Art II)

$$\frac{\omega^2}{2} I_0 = Mg.h$$

Mais à cause de la relation $l = \frac{I_0}{Ma}$ d'où on tire $I_0 = Mal$, cette relation devient :

$$\frac{\omega^2}{2} M a l = M g h$$

D'où la Composante centrifuge d'inertie : $M\omega^2 a = 2.Mg \frac{h}{l}$

Quant à la Composante tangentielle $Ma\frac{d\omega}{dt} = Mg\frac{a \sin\alpha}{l}$, en remplaçant $\frac{d\omega}{dt}$ par sa valeur $\frac{g \sin\alpha}{l}$

Enfin le poids vertical Mg se décompose en

$Mg \cos\alpha$ suivant OG

et $Mg \sin\alpha$ suivant OA

Donc la pression cherchée est la résultante des deux forces rectangulaires

l'une suivant $OG = Mg\left(\frac{2h}{l} + \cos\alpha\right)$

l'autre $OA' = Mg \sin\alpha\left(1 - \frac{a}{l}\right)$

2° Théorie du centre de percussion.

Soit un corps ou pendule composé symétrique par rapport au tableau et libre autour d'un axe projeté perpendiculairement au tableau en O. Supposons le au repos, le centre de gravité G est alors dans la verticale de l'axe de suspension.

Cela posé nous nous proposons la question suivante :

Une force F vient frapper brusquement le solide perpendiculairement à la direction verticale OGx. On demande en quel point de cette direction cette force doit agir pour qu'elle ne détermine pas de réactions à l'appui O suivant la direction oy perpendiculaire à ox ?

En langage ordinaire, supposez que je tienne verticalement à la main une barre métallique et que je la frappe en un point quelconque, tout le monde sait que j'éprouverai généralement une réaction très vive qui me forcera à lâcher la barre : également si tenant un marteau à la main par un point quelconque du manche, je frappe sur une enclume, j'éprouverai à la main une réaction généralement très douloureuse. Eh bien le problème que l'on se propose est la recherche du point précis ou dans le 1er cas il faudra frapper, dans le second cas où il faudra tenir le manche du marteau pour que la main n'éprouve absolument aucune réaction.

Soit l la distance inconnue cherchée de ce point à l'axe de suspension O, et considérons l'équilibre dynamique du solide pendant la durée très petite du choc — à cause de la symétrie du corps par rapport au tableau, toutes les forces agissant sur le solide 1° les forces réelles F ou Mg le poids du corps 2° les forces réactives à l'appui O, qui d'après l'énoncé du problème doivent se réduire pendant le choc à une seule réaction verticale X 3° les forces d'inertie des différents points, toutes ces forces peuvent être considérées comme situées dans le même plan, celui du tableau; dès lors les six conditions d'équilibre se réduisent à trois, deux de projection et une de moments autour de l'axe projeté en O, cette dernière est la seule vraie condition d'équilibre en la posant nous avons comme on sait :

$$(1)\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{I_o} = \text{ici}: \frac{Fl}{I_o}$$

L'équation de projection sur les x donnera :

$$(2)\ X - Mg + \frac{d\omega}{dt}\int my - \omega^2 \int mx = 0$$

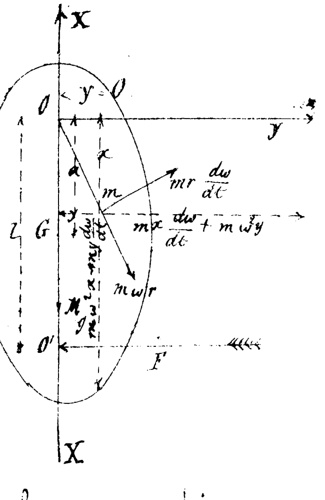
Or si nous observons que pendant la durée très petite du choc.

1° $\int my = MY = 0$ puisque Y l'ordonnée du centre de gravité est nulle:

Ce centre de gravité restant sur l'axe des x pendant toute la durée du choc 2° et que $\omega = 0$

Si l'on observe de plus que $\int mx = Ma$

Les formules (2 et (3) se simplifient et deviennent.



$$(2)\text{ bis}\quad X - Mg = 0$$

$$(3)\text{ bis}\quad F - Ma\frac{d\omega}{dt} = 0$$

Or: (1) et (3) bis comparées donnent:

$$\frac{Fl}{I_o} = \frac{F}{Ma}$$

D'où enfin

$$l = \frac{I_o}{Ma}$$

C'est la longueur du pendule simple oscillant comme le pendule composé constitué par le solide donné — On en conclut par conséquent.

Que le point dit centre de percussion où il faut frapper pour éviter toute réaction horizontale se confond exactement avec le point que nous avons désigné dans la théorie du pendule composé sous le nom d'axe d'oscillation.

Il résulte de cette assimilation que pour déterminer expérimentalement le centre de percussion, il suffira de faire osciller le solide comme un pendule ce qui suffit comme on sait pour trouver expérimentalement la longueur du pendule simple correspondant en vertu de la formule : $l = \frac{(3600)^2}{\pi^2 N^2 g}$

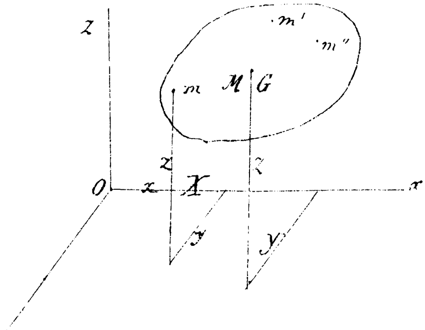
Cette longueur l donnera le centre de percussion cherché.

La considération du centre de percussion est nécessaire en pratique, notamment dans l'établissement du pendule balistique et dans l'établissement des marteaux qu'on emploie en métallurgie. — Ces appareils doivent être disposés en effet de telle sorte que le choc ne détermine aucune réaction à l'axe d'oscillation autrement l'appareil serait promptement désorganisé (Voir en Dynamique appliquée la théorie des marteaux.)

Chapitre II.

Théorème du mouvement du centre de gravité et extension aux systèmes matériels du théorème des quantités de mouvement

Transition. — Dans le chapitre précédent nous avons donné quelques applications intéressantes du principe de d'Alembert étendu aux systèmes matériels, mais dans ces applications simples nous avons toujours supposé le système matériel essentiellement solide et indéformable. — Ce que nous allons dire dans ce chapitre est essentiellement général et s'applique aux systèmes matériels quelconques au sein desquels peuvent agir des actions intérieures quelconques.



Art. 1er — Théorème du mouvement du centre de gravité.

Considérons un système matériel quelconque m m' m'', m''', déjà variable en mouvement sous l'action d'un système donné de forces extérieures F et des actions intérieures f agissant au sein de ce système. — Rapportons le aux trois axes coordonnés ox oy oz

1er Point — Soient $x\,y\,z$, les coordonnées d'un point quelconque du système de masse m ; il est clair que le mouvement de ce point considéré individuellement est le même que celui d'un point matériel libre soumis à la fois aux forces extérieures qui lui sont directement appliquées et dont je désigne par R la résultante et aux actions intérieures qu'il reçoit de tous les points matériels environnants et dont je désigne par r la résultante, actions intérieures qui par rapport à ce point isolé du système par la pensée sont de véritables forces extérieures. Dès lors les équations différentielles du mouvement de ce point projeté sur les trois axes rectangulaires ox, oy, oz seront

$$m j_x = R_x + r_x \qquad m j_y = R_y + r_y \qquad m j_z = R_z + r_z$$

Posons des équations analogues pour chacun des points du système et faisons la somme, on aura :

$$\Sigma m j_x = \Sigma R_x + \Sigma r_x \qquad \Sigma m j_y = \Sigma R_y + \Sigma r_y \qquad \Sigma m j_z = \Sigma R_z + \Sigma r_z$$

mais ce qu'il faut remarquer (c'est le point important du théorème) c'est que les sommes Σr_x, Σr_y, Σr_z sont nécessairement nulles, attendu que les actions mutuelles étant égales deux à deux et directement opposées, il en est nécessairement de même de leurs projections. Les équations précédentes se réduisent donc à

$$(1) \quad \Sigma m j_x = \Sigma R_x$$

$$(2) \quad \Sigma m j_y = \Sigma R_y$$

$$(3) \quad \Sigma m j_z = \Sigma R_z$$

2e Point — D'autre part soient à une époque quelconque $X\,Y\,Z$ les coordonnées du centre de gravité du système, x, y, z représentant au même instant les coordonnées d'un point quelconque m de ce système. On aura en vertu du théorème des moments par rapport à un plan.

$$\Sigma m x = M X \qquad \Sigma m y = M Y \qquad \Sigma m z = M Z$$

Si nous différentions deux fois de suite ces relations, nous aurons :

$$(4) \ \Sigma m j_x = M J_x \quad (5) \ \Sigma m j_y = M J_y \quad (6) \ \Sigma m j_z = M J_z$$

3e Point — Enfin (4) (5) (6) comparées à (1) (2) (3) donnent :

$$(7) \quad M J_x = \Sigma R_x$$

$$(8) \quad M J_y = \Sigma R_y$$

$$(9) \quad M J_z = \Sigma R_z$$

Or J_x, J_y, J_z représentent les projections de l'accélération totale du mouvement du centre de gravité du système, donc les équations (7) (8) (9) définissent complètement ce mouvement, or elles ont identiquement la même forme que les équations différentielles du mouvement d'un point matériel unique de masse M sollicité par des forces égales et parallèles aux forces extérieures seules qui agissent sur le système (les forces intérieures ont complètement disparu) On conclut de là que le centre de gravité d'un système matériel quelconque animé ou inanimé, déformable ou non se meut comme si toute la masse y était concentrée et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles mêmes, quelque soient d'ailleurs les actions intérieures variables agissant au sein du système

(Application. Supposez qu'une bombe éclate en un point quelconque de la trajectoire parabolique qu'elle parcourt, en vertu du théorème précédent le centre de gravité du système matériel formé par les débris n'en continuera pas moins à parcourir la même parabole.

Cas particulier ou principe de la Conservation du mouvement du centre de gravité.

De l'énoncé précédent résulte immédiatement que si les forces extérieures agissant sur le système et transportées parallèlement à elles mêmes ont une résultante nulle, ou bien s'il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité restera nécessairement immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme, quelque soient les mouvements intérieurs du système autour de ce centre de gravité.

Tel est le principe de la Conservation du mouvement du centre de gravité venant compléter en l'expliquant le principe d'inertie posé dès le début de la Dynamique.

(Applications. Soit un canon chargé posé sur un sol horizontal parfaitement poli. Le coup parti le boulet s'en va d'un côté, le canon recule de l'autre, mais le centre de gravité du système canon et boulet n'en reste pas moins en repos absolu comme avant la décharge. De même un être animé placé sur une glace horizontale parfaitement polie ne saurait quelque soient ses efforts déplacer horizontalement son centre de gravité. Pour que cela soit possible, il faut que par suite de la rugosité du sol, les actions intérieures de l'être animé donnent naissance à des actions extérieures ou réactions qui le poussent en avant (Voir Applications utiles du frottement de la stabilité dans les machines en mouvement)

Enfin de ce principe nous conclurons, si nous négligeons l'action des étoiles sur notre système solaire action très faible vu leur énorme distance que le centre de gravité de ce système solaire est nécessairement en repos ou en mouvement rectiligne uniforme quelque soient les mouvements des astres qui le composent les uns autour des autres

Art II. – Extension aux systèmes matériels du théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe.

Considérons toujours un système matériel déformable en mouvement sous l'action des forces extérieures F et des actions intérieures f variables à chaque instant mais toujours égales deux à deux et de signes contraires

Chaque point de ce système tel que m pouvant être considéré comme un point matériel libre se mouvant sous l'action combinée des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et dont je désigne par R la résultante et des actions intérieures qu'il reçoit des corps environnants et dont je désigne par r la résultante. Si je projette le mouvement de ce point sur un axe quelconque ox et que j'applique à ce mouvement projeté le théorème des quantités de mouvement j'aurai:

$$m v_x - m v_{0x} = \int_0^t R_x dt + \int_0^t r_x dt$$

De même pour un autre point m' soumis aux forces extérieures et intérieures R', r'

$$m' v'_x - m' v'_{0x} = \int_0^t R'_x dt + \int_0^t r'_x dt$$

et ainsi de suite pour tous les points

Faisons la somme de toutes ces égalités nous avons enfin:

$$\Sigma m v_x - \Sigma m v_{0x} = \Sigma \int_0^t R_x dt + \Sigma \int_0^t r_x dt$$

ce qui signifie que l'accroissement total de la somme des quantités de mouvement du système projetées sur un axe fixe quelconque pendant un temps quelconque est égal à la somme des impulsions totales des forces extérieures et des forces intérieures projetées sur cet axe pendant le même temps.

Mais ce qu'il faut remarquer et c'est en quoi consiste l'originalité de ce théorème ainsi que du précédent, c'est que les forces intérieures disparaissent, en effet étant égales deux à deux et directement opposées, la somme algébrique de leurs impulsions projetées sur le même axe est nécessairement nulle quelque soient les déformations du système.

On a donc simplement:

$$\Sigma m v_x - \Sigma m v_{0x} = \Sigma \int_0^t R_x dt$$

ce qui veut dire que l'accroissement total de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur ce axe, et complètement indépendant des actions mutuelles intérieures.

Cas particuliers. — De l'énoncé précédent résulte immédiatement si la résultante des forces extérieures est nulle, ou s'il n'y a pas de forces extérieures, que la quantité de mouvement du système projeté sur un axe quelconque est constante à tous les instants de la durée.

Ce principe complète le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité et il explique facilement le recul des bouches à feu ainsi que l'ascension des fusées dont on a déjà parlé. — Reprenons le canon chargé de tout à l'heure posé sur un plan horizontal parfaitement poli. Si nous le supposons en repos sa quantité de mouvement est nulle. — Si nous mettons actuellement le feu à la pièce, il ne se développe que des actions intérieures, par suite le centre de gravité du système reste en repos ainsi que nous l'avons déjà dit, mais de plus en vertu du nouveau principe, la quantité de mouvement du système est encore nulle comme avant la décharge; on aura donc en désignant par m_c, m_b les masses du canon et du boulet, v_c et v_b les vitesses qu'ils prennent après la décharge.

$$m_c v_c - m_b v_b = 0 \qquad \text{d'où} \quad \frac{m_c}{m_b} = \frac{v_b}{v_c}$$

c'est-à-dire que les vitesses du boulet et du canon sont en raison inverse de leurs masses.

Chapitre III.

Extension du théorème des puissances vives aux systèmes matériels.

Article 1er. — Considérons toujours un système matériel déformable en mouvement sous l'action des forces extérieures F et intérieures f.

Chaque point de ce système tel que m pouvant être considéré comme un point matériel libre se mouvant sous l'action combinée des résultantes R et r des forces extérieures et intérieures qui agissent sur lui. On aura en appliquant à ce point le théorème des puissances vives.

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \mathcal{T}.R + \mathcal{T}r$$

de même pour un point m'

$$\frac{m'v'^2}{2} - \frac{m'v_0'^2}{2} = \mathcal{T}.R' + \mathcal{T}r'$$

et ainsi de suite pour tous les points : en faisant la somme de ces égalités on a :
$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum \mathcal{T}.R + \sum \mathcal{T}.r$$

Ce qu'on peut énoncer.

L'accroissement total de la puissance vive du système pendant un intervalle de temps quelconque est égal à la somme des travaux de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures.

Ce qu'il y a de très important à remarquer dans ce théorème c'est que les forces intérieures n'y disparaissent pas nécessairement comme dans les deux précédents. Nous avons vu en effet que la somme des travaux élémentaires des deux forces mutuelles égales et contraires qui se développent entre deux points matériels (Voir Statique : Travail des actions mutuelles) n'est égale à 0 qu'autant que la distance de ces deux points ne varie pas pendant l'élément de temps auquel ces travaux se rapportent, cette somme dépendant de l'écartement relatif des deux éléments. Donc l'équation générale du travail n'est indépendante des actions mutuelles que dans deux cas

1° Celui où les distances des différents éléments du système restent constantes pendant tout le mouvement, c'est à dire dans le cas où le système est parfaitement solide.

2° Celui où le système étant déformable pendant tout le mouvement revient exactement à l'instant final à la même forme qu'à l'instant initial.

Art. II. Considérons le premier cas d'un système solide indéformable et étudions les formes particulières que prend la relation générale des puissances vives
$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum \mathcal{T}.F$$

1° dans le cas où le mouvement du solide est une translation simple

2° rotation simple

3° un mouvement tout à fait quelconque.

I. Forme de l'équation du travail dans le cas où le mouvement du solide est une simple translation.

Dans ce cas tous les points du solide ayant à chaque instant même vitesse, celle du centre de gravité, la relation précédente deviendra en appelant M la masse totale du corps.

$$M\frac{v^2}{2} - M\frac{v_0^2}{2} = \Sigma \mathcal{T}.F$$

c'est à dire que la variation de puissance vive est la même que celle qu'éprouverait le Centre de gravité du système auquel serait Concentré la masse entière du solide et auquel serait appliquée la resultante de translation de toutes les forces du système

Forme de l'équation du travail dans le cas où le mouvement du solide est une rotation simple.

Dans ce cas les vitesses linéaires initiales et finales d'un point quelconque M du solide à la distance r de l'axe, sont liées aux vitesses angulaires correspondantes ω_0 et ω par les relations:

$$V_0 = \omega_0 r \qquad v = \omega r$$

D'ailleurs dans ce cas, le travail élémentaire de toutes les forces extérieures a pour expression $d\alpha\, \Sigma M_o F$ et par suite le travail total pour un angle α parcouru sera:

$$\int^{\alpha} d\alpha\ \Sigma\, M_o F$$

Introduisant ces conditions dans la relation générale elle prend la forme

$$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\int m r^2 = \int_0^{\alpha} d\alpha\, \Sigma M_o F$$

ou (1) $\frac{I_o}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \int^{\alpha} d\alpha\, \Sigma M_o F$

I_o représentant le moment d'inertie $\int m r^2$ du solide

Rappelons nous que nous pouvons ainsi que nous l'avons fait (Ch 1er, fin de l'Art. II) arriver directement à cette relation en partant de l'équation differentielle du mouvement du solide

$$(2)\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{I_o}$$

obtenue en partant du principe de d'Alembert. On voit donc encore une fois que les simples Conceptions de la statique généralisées au moyen du principe de d'Alembert nous donnent toutes les propriétés du mouvement des systèmes. (On pourrait d'ailleurs comme Sturm l'a fait dans son traité de Mécanique déduire d'une manière complètement générale de ce principe de d'Alembert tous les théorèmes généraux de la Dynamique des systèmes materiels)

Réciproquement de l'équation du travail (1) dans le cas d'un mouvement de rotation, nous pouvons déduire par différentiation la relation (2) en effet en différentiant (1) nous avons : $I_o\, \omega\, d\omega = d\alpha\ \Sigma M_o F$

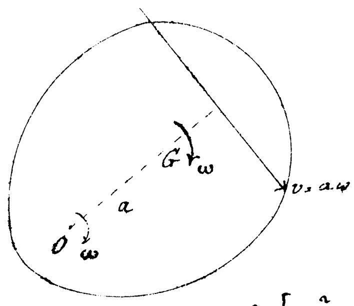
Divisant tout par dt on a :

$$I_0 . \omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \sum M_0 F$$

mais puisque $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$. il reste :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_0 F}{I_0} \quad C_q f d$$

Application. — Considérons un corps solide soumis aux forces F et tournant autour d'un axe quelconque projeté en O par exemple. — On aura en vertu de ce qui précède :



$$\frac{I_0}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \sum \mathcal{T}.F$$

Mais on sait que $I_0 = I_G + M a^2$

Par suite le terme : $\frac{I_0}{2}\omega^2$

qui représente la puissance vive finale du système peut s'écrire :

$$(\alpha)\ \frac{I_0 \omega^2}{2} = \frac{I_G}{2}\omega^2 + M\frac{a^2\omega^2}{2} = \frac{I_G}{2}\omega^2 + M\frac{v^2}{2} \quad \text{en posant } a\omega = v$$

c'est à dire que la puissance vive finale possédée par le corps tournant autour de O avec la vitesse angulaire ω est égale à la somme des puissances vives que posséderait le solide, s'il tournait avec la même vitesse angulaire ω autour d'un axe parallèle au 1er passant par le centre de gravité G, et si en même temps il était animé d'un mouvement de translation ayant une vitesse $v = a\omega$.

Mais d'autre part on a vu en Cinématique qu'une rotation ω autour d'un axe projeté en O, pouvait toujours être considérée comme résultant d'une rotation égale ω s'effectuant dans le même sens autour d'un axe parallèle et d'une translation perpendiculaire au plan des deux axes de rotation ayant précisément pour vitesse $v = a\omega$, a représentant la distance des deux axes.

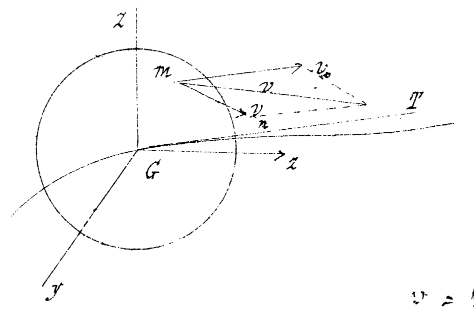
Puisque donc on peut considérer la rotation autour du point O, comme résultant d'une rotation égale et parallèle autour de l'axe projeté en G et d'une translation perpendiculaire au plan des deux axes O et G s'effectuant dans le sens de la flèche avec la vitesse $v = a\omega$:

On peut dire (puisqu'on a établi (α)) que la puissance vive que possède le corps dans son mouvement résultant autour de l'axe O est égale à la somme des puissances vives que possède ce corps dans ses deux mouvements composants, l'un étant une rotation autour d'un axe passant par le Centre de gravité du corps

— Art III.

Art III. - Ce principe est tout à fait général et l'on peut dire que la puissance vive que possède un corps animé d'un mouvement quelconque que l'on peut toujours regarder comme résultant de deux mouvements composants l'un relatif par rapport à des axes mobiles entraînés en translation par le centre de gravité du corps l'autre de translation en vertu duquel tous les points du solide auraient à chaque instant même vitesse que le centre de gravité, origine des axes mobiles. - On peut dire dis je que la puissance vive totale que possède le solide est égale à la somme des puissances vives qu'il possède en vertu de chacun des deux mouvements composants que nous venons de définir, en effet

Soit v la vitesse absolue d'un point quelconque m du solide dans son mouvement absolu résultant à un instant quelconque de la durée. Soit v_r sa vitesse relative par rapport au système d'axes mobiles $Gx_1 Gy_1 z$ entraînés en translation par le centre de gravité G : et soit enfin V_e la vitesse du centre de gravité G et par suite la vitesse du point m dans son mouvement composant d'entraînement supposé de translation. On sait qu'on a :



$$v = \text{Résult}\ (v_e, v_r)$$

c'est à dire $\quad v^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2 v_e v_r \operatorname{Cos}(\widehat{v_e v_r})$

et par conséquent pour le solide tout entier en multipliant tous les termes par $\frac{m}{2}$ et faisant la somme :

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m v_r^2 + \tfrac{1}{2} V_e^2 \Sigma m + v_e \Sigma m v_r \operatorname{Cos}(\widehat{v_r, v_e})$$

Observons maintenant que

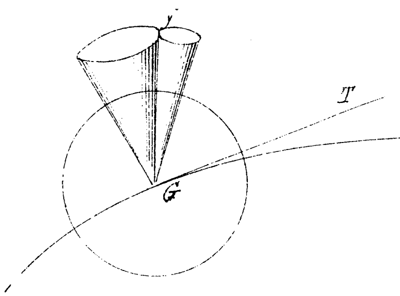
$$\Sigma m v_r \operatorname{Cos}(\widehat{v_r, v_e})$$

représente la somme des projections sur la tangente GT à la courbe parcourue par le centre de gravité, des quantités de mouvement des différents points du solide dans son mouvement relatif - Or cette somme est toujours égale à la projection sur le même axe de la quantité de mouvement de la masse entière concentrée en son centre de gravité, or puisque la vitesse relative du centre de gravité G est nulle, il en est de même de sa quantité de mouvement, par suite le terme $\Sigma m v_r \operatorname{Cos}(\widehat{v_r, v_e})$ qui lui est égal est nécessairement nul. Il reste donc :

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m v_r^2 + \tfrac{1}{2} M v_e^2$$

qui exprime en effet que la puissance vive du solide dans son mouvement absolu est égale à la somme des puissances vives qu'il possède en vertu de ses deux mouvements composants, ces deux mouvements composants étant définis ainsi qu'il a été dit.
Ce qui précède nous permet de résoudre la question suivante.

III Forme de l'équation du travail dans le cas où le mouvement du solide est tout à fait quelconque.



Quelque soit ce mouvement on a vu en cinématique qu'il revient à chaque instant à une translation suivant la tangente GT à la courbe parcourue par le centre de gravité du corps et à une rotation simultanée autour d'un certain axe instantané Gy passant par le centre de gravité du solide.

Soient à l'instant initial v_0 et ω_0 les vitesses de la translation et de la rotation instantanées et simultanées, la puissance vive initiale du corps en vertu de ce qui précède aura pour expression

$$M\frac{v_0^2}{2} + \frac{I_G}{2}\omega_0^2$$

Si à l'instant final ces vitesses sont devenues v et ω, la puissance vive finale sera $M\frac{v^2}{2} + \frac{I'_G\omega^2}{2}$

La variation de puissance vive étant toujours égale à la somme des travaux des forces, nous avons donc dans ce cas général

$$\frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{I'_G}{2}\omega^2 - \frac{I_G}{2}\omega_0^2 = \sum \mathcal{C}^{'}.F$$

Application. Considérons une sphère roulant sur un plan parfaitement horizontal. Soit v_0 la vitesse initiale du centre, le frottement exercé sur cette sphère une action retardatrice que je supposerai constante et équivalente à une force F appliquée au centre de la bille. On demande quel espace la bille parcourra avant d'arriver au repos et le temps qu'elle mettra à parcourir cet espace ?

Le corps s'arrêtera évidemment quand toute la puissance vive qu'il possède aura été détruite par le travail résistant de la force retardatrice F.

Or le mouvement de roulement du corps revenant à chaque instant à une translation et à une rotation relative autour du centre, sa puissance vive égale à la somme des puissances vives de chacun de ces mouvements composants sera à l'instant initial : $\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 M \rho^2$

ρ rayon de giration de la sphère, d'ailleurs ω_0 est lié à v_0 par la condition

$$v_0 = \omega_0 r$$

Exprimons que cette puissance vive est égale au travail résistant $F.x$ de la force F jusqu'à l'arrêt on aura :

$$\frac{1}{2} M\omega_0^2 r^2 + \frac{1}{2} M\omega_0^2 \rho^2 = Fx$$

$$\text{D'où} \quad x = \frac{M\omega_0^2}{2F}(r^2+\rho^2) \quad (1)$$

D'ailleurs la force retardatrice étant constante, la sphère parcourt cet espace d'un mouvement uniformément varié et par suite la durée du mouvement est donnée par la relation :

$$x = \frac{v_0}{2}.t \qquad \text{D'où } t = \frac{2x}{v_0} = \frac{M\omega_0}{F}.\left(\frac{r^2+\rho^2}{r}\right) \quad (2)$$

Si cette sphère toujours soumise à la même force retardatrice n'eût possédé qu'un mouvement de translation v_0, on aurait eu pour déterminer x, l'égalité : $\quad \frac{1}{2} M v_0^2 = Fx \qquad$ D'où $x = \frac{Mv_0^2}{2F} = \frac{M\omega_0^2 r^2}{2F}$

ce qu'on aurait trouvé en faisant $\rho = 0$ dans (1) — Ainsi dans ce cas le mobile irait moins loin, ce qui se comprend bien, sa puissance vive initiale étant moindre.

Supposons actuellement que cette sphère roule sur un plan incliné n'exerçant aucun frottement. Soit v_0 sa vitesse initiale, on demande à quelle hauteur verticale h elle parviendra — On aura en exprimant toujours que la puissance vive initiale est égale au travail résistant de F jusqu'à l'arrêt.

$$\frac{1}{2} M\omega_0^2 r_0^2 + \frac{1}{2} M\omega_0^2 \rho^2 = Mgh$$

$$\text{D'où} \quad h = \frac{\omega_0^2}{2g}(r_0^2+\rho^2)$$

Si $\rho = 0$ c'est-à-dire si le mobile se meut en translation, ou s'il n'a pas d'inertie.
$$h = \frac{\omega_0^2 r_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Ainsi dans le 1er cas le mobile monte plus haut que la hauteur génératrice de sa vitesse, mais en retour pour acquérir en roulant cette vitesse v_0, il faut qu'il tombe d'une hauteur plus grande que v_0 et précisément égale à

$$\frac{\omega_0^2(r_0^2+\rho^2)}{2g}$$

Quant à la durée de la montée elle sera toujours donnée par la relation

$$x = \frac{v_0}{2}t \text{ d'où } t = \frac{2x}{v_0} = \frac{2h}{v_0 \sin i} = \frac{\omega_0^2(r_0^2+\rho^2)}{g v_0 \sin i} = \frac{\omega_0}{g \sin i}.\frac{r_0^2+\rho^2}{r}$$

Art IV. – Théorème du travail virtuel conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un solide – L'équilibre de ce système étant considéré comme un cas particulier du mouvement.

L'an dernier en statique nous sommes arrivés par des considérations indirectes purement géométriques au théorème du travail virtuel et par suite aux six conditions d'équilibre applicables à tout système de forces s'exerçant sur un solide.

Cette année nous avons donné le principe de d'Alembert qui permet par l'introduction des forces d'inertie de traiter les questions de mouvements des solides comme des questions d'équilibre statique en appliquant à toutes les forces y compris celles d'inertie les six conditions d'équilibre trouvées.

Ainsi à l'aide de ce principe la solution des questions de mouvements peut être considéré comme une simple conséquence des solutions des questions de statique.

Eh bien réciproquement les questions de statique peuvent être considérées comme cas particuliers des questions de mouvement – Nous l'avons déjà fait voir plusieurs fois dans le courant de cet enseignement pour quelques cas particuliers – Il s'agit de généraliser actuellement la chose et de faire voir que l'on peut déduire le théorème du travail virtuel et par suite les six conditions d'équilibre de pures considérations sur le mouvement des systèmes matériels solides.

Considérons en effet un corps solide en mouvement sous l'action d'un système quelconque de forces φ, le mouvement de ce système sera caractérisé dans un intervalle de temps quelconque par la relation des puissances vives

$$(1)\quad \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum \mathcal{T}.\varphi$$

Supposons actuellement que j'applique à ce solide un système de forces F en équilibre. Or si ce système est en équilibre il ne modifie en rien le mouvement du solide qui se meut par suite comme précédemment mais sous l'action cette fois des forces F et des forces φ. On aura donc dans ce second cas

$$(2)\quad \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \sum \mathcal{T}.\varphi + \sum \mathcal{T}.F$$

Or ces deux équations ont même premier membre elles ne peuvent donc exister simultanément que si les seconds membres sont aussi égaux ce qui exige

$$\sum \mathcal{T}.F = 0$$

D'où on conclut que si un système de forces F appliqué à un corps solide est en équilibre, il faut nécessairement que la somme des travaux de ces forces soit nulle pour n'importe quel déplacement (dû aux forces virtuelles & quelconques) imprimé au solide. Or c'est là l'énoncé du théorème du travail virtuel, d'où on déduit comme on l'a fait voir en statique, les six conditions d'équilibre.

Chapitre IV.

Applications des théorèmes généraux qui précèdent à l'analyse du choc des corps. Théorèmes de Carnot et de Duhamel

On entend par choc le phénomène dû à la rencontre de deux corps dont les vitesses sont différentes.

On dit que le choc est direct lorsque les deux corps se meuvent suivant un axe de symétrie commun.

Nous supposerons deux cas hypothétiques.

1° Le cas où les deux corps sont complètement dénués d'élasticité. Dans ce cas le phénomène du choc ne comprend qu'une seule période, celle de compression

2° Le cas où ils sont complètement élastiques. Alors le phénomène comprend deux périodes inverses : la 1re dans laquelle les deux corps se compriment, la seconde dans laquelle ils réagissent en covenant à leur forme primitive.

Tous les solides naturels étant compris entre les deux limites respectives d'une élasticité parfaite ou d'un défaut complet d'élasticité, il s'ensuivra que le choc de ces solides présentera des circonstances intermédiaires entre celles qui se rapportent à ces deux hypothèses limites.

Art. 1er. Choc direct de deux corps munis ou privés complètement d'élasticité

Soient deux sphères de masse m, m' dénuées complètement d'élasticité et animées sur la direction rectiligne xx' supposée sans frottement, des vitesses initiales $v_0\ v'_0$ dans le sens indiqué par les flèches ; v_0 étant $> v'_0$ il arrivera un instant où les deux corps se rencontreront.

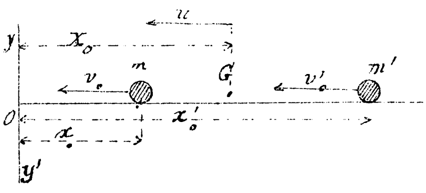
– A cet instant commence la période de Compression après laquelle les deux corps ne réagissant pas, n'en font plus à proprement parler qu'un seul d'une masse $m+m'$ se mouvant avec une vitesse commune U

On demande cette vitesse commune U en fonction des vitesses initiales v_0, v'_0 ?

Nous pouvons résoudre la question en faisant usage de l'un ou l'autre des trois théorèmes précédents.

I Détermination de la vitesse u par l'application directe du principe de la Conservation du mouvement du Centre de gravité.

Les deux Corps $m\,m'$ constituant un système matériel sur lequel n'agit aucune force extérieure il en résulte que quoiqu'il arrive par suite de la Collision de ces deux masses et quelque soient les actions mutuelles développées pendant la période du choc, que le centre de gravité du système en vertu du principe de la Conservation du mouvement du centre de gravité conservera éternellement sa vitesse initiale. Donc après le choc, la vitesse Commune U que prend le système des deux corps et qui représente la vitesse du centre de gravité de ces deux corps qui n'en font plus qu'un qui se meut en translation, cette vitesse U s'obtiendra dis-je en cherchant l'expression de la vitesse du centre de gravité avant la Collision, puisqu'après comme avant, cette vitesse est restée la même.



Pour cela en appliquant le théorème des momenta par rapport au plan $y\,y'$ perpendiculaire en O à la direction du mouvement j'aurai :

$$(m+m')\,X_0 = m\,x_0 + m'\,x'_0$$

et en différentiant :

$$(m+m')\,\frac{dX_0}{dt} = m\,\frac{dx_0}{dt} + m'\,\frac{dx'_0}{dt}$$

ou enfin $$(m+m')\,U = m\,v_0 + m'\,v'_0$$

d'où $$U = \frac{m v_0 + m' v'_0}{m+m'}$$

II – Détermination de la vitesse U par l'application du théorème des quantités de mouvement –

Nous avons vu que la variation de quantité de mouvement d'un système matériel était égale à la somme des impulsions des forces extérieures seulement et indépendant des actions mutuelles. — Or puisqu'aucune force extérieure n'agit sur le système des deux corps m, m' la somme des impulsions de ces forces nulles sera également nulle d'où résulte que la quantité du mouvement avant comme après le choc reste constante, ce qui donne immédiatement l'égalité.

$$(m+m')\,u = m v_0 + m' v'_0$$

$$\text{d'où } u = \frac{m v_0 + m' v'_0}{m+m'}$$

Discussion. — Si les masses sont égales, elle se réduit à :

$$u = \frac{1}{2}\left(v_0 + v'_0\right)$$

c'est à dire que la vitesse après le choc est égale à la moyenne des vitesses avant le choc.

Si les deux mobiles supposés encore de même masse vont l'un vers l'autre avec même vitesse, il vient : $u = 0$

c'est à dire que les deux corps sont réduits au repos — Ainsi dans ce cas toute la puissance vive du système est complètement absorbée par le travail résistant des actions mutuelles ou en d'autres termes se transforme complètement en travail de déformation — Dans le cas général, il y a toujours déformation et par suite perte de puissance vive, et l'expression de cette perte sera :

$$\rho = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m' v_0'^2 - \frac{1}{2}(m+m')u^2$$

et en remplaçant u par la valeur trouvée, on aura :

$$\rho = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m' v_0'^2 - \frac{1}{2}\,\frac{(m v_0 + m' v'_0)^2}{m+m'}$$

$$\text{ou} \quad \rho = \frac{1}{2}\,\frac{\left[m^2 v_0^2 + m m' v_0^2 + m'^2 v_0'^2 + m m' v_0'^2 - m^2 v_0^2 - m'^2 v_0'^2 - 2 m m' v_0 v'_0\right]}{m+m'}$$

$$\text{ou bien} \quad \rho = \frac{1}{2}\,\frac{m m' (v_0^2 + v_0'^2 - 2 v_0 v'_0)}{m+m'} = \frac{1}{2}\,\frac{m m' (v_0 - v'_0)^2}{m+m'}$$

Si $m = m'$ $v_0 = v'_0$ il en résulte :

$$\rho = 2 \cdot \frac{1}{2}\, m v_0^2$$

c'est à dire que la perte de puissance vive est égale à la puissance vive initiale et totale du système, ce que nous avions déjà reconnu, les deux corps étant dans ce cas réduits au repos.

III. — Détermination de la vitesse u par l'application du théorème des puissances vives — Théorème de Carnot.

Nous avons démontré que la variation de puissance vive d'un système matériel déformable était égale à la somme des travaux des forces extérieures et à la somme des travaux des forces intérieures et nous appliquons ce théorème au système des deux corps depuis l'instant initial jusqu'à l'instant final du choc ; comme il n'y a pas de forces extérieures nous aurons en changeant les signes

(1) $\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m' v_0'^2 - \frac{1}{2} u^2 (m+m') = \Sigma \mathcal{T} f$ (somme des travaux des forces intérieures)

Mais on ne connaît pas l'expression $\Sigma \mathcal{T} f$ du travail des actions mutuelles pendant le choc ou du moins nous ne pouvons directement trouver cette expression en fonction du rapprochement des molécules. Mais si l'on remarque que ce travail résistant et par suite la perte de puissance vive, ne dépend que du mouvement relatif des deux corps, on ne changera rien à cette perte si on suppose qu'un système de comparaison emporte les deux corps m, m' en sens contraire de leur mouvement avec précisément la vitesse inconnue cherchée u. Mais alors après l'addition de ce mouvement commun, m possède avant le choc une vitesse absolue $(v_0 - u)$ et m' une vitesse $(v_0' - u)$ et après le choc la vitesse commune aux deux corps est devenue $(u - u)$ c'est à dire nulle. Les deux corps étant dans ce cas réduits au repos la perte de puissance vive qu'ils éprouvent toujours égale au travail des actions mutuelles, est égale à la somme des puissances vives initiales, on aura donc l'égalité

(2) $\frac{m(v_0 - u)^2}{2} + \frac{m'(v_0' - u)^2}{2} = \Sigma \mathcal{T} f$

De (1) et (2) on conclut :

(3) $\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} m' v_0'^2 - \frac{1}{2} u^2 (m+m') = \frac{1}{2} m (v_0 - u)^2 + \frac{1}{2} m' (v_0' - u)^2$

elle donne successivement

$0 = 2 u^2 (m+m') - 2 m v_0 u - 2 m' v_0' u$

d'où $\quad u = \frac{m v_0 + m' v_0'}{m + m'}$ $\quad$ C.q.f.d.

Reprenons la relation (3) elle exprime que la perte de puissance vive dans le choc de deux corps est égale à la somme des puissances vives que posséderaient les deux corps si chacun d'eux était animé de la vitesse qu'il a perdu ou gagné pendant le choc.

Ce théorème dû à Carnot et que l'on connaît généralement sous le nom de théorème de Carnot est général et s'applique à deux systèmes matériels quelconques se choquant dans l'espace d'une manière quelconque, on peut donc écrire généralement $\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 = \Sigma \frac{1}{2} m v^2$

v_1 vitesse d'un point quelconque du système avant le choc.

v_0 $\quad$ id. $\quad$ après le choc

v vitesse gagnée ou perdue par un point quelconque du système pendant le choc

---

Art. II. — Théorème de Duhamel — Il existe un théorème analogue à celui de Carnot, dû à Duhamel — Nous l'admettons sans démonstration. En voici l'énoncé

Si on ajoute brusquement des liaisons à un système solide, indéformable, en mouvement, la perte de puissance vive est égale à la puissance vive que posséderait tout le système si chaque point matériel qui le compose était animé de la vitesse qu'il a gagné ou perdu par ce fait, ce qu'on exprime encore symboliquement par la formule

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v_1^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_2^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2$$

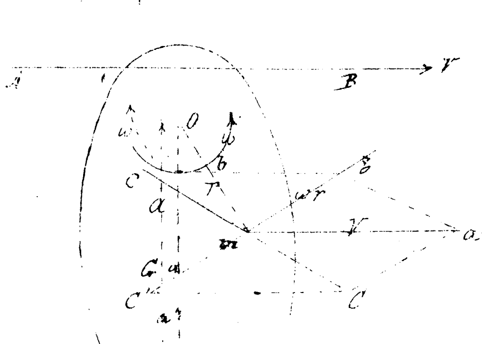
Si au contraire on supprime brusquement des liaisons, il y a gain de puissance vive, c'est à dire qu'on a

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m v_2^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} m v_1^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2$$

Applications du théorème de Duhamel

Soit un solide quelconque animé d'un mouvement de translation rectiligne avec une vitesse V suivant la direction AB et supposons que subitement je passe au travers du corps un axe fixe projeté en O; immédiatement le corps va se mettre à tourner autour de cet axe avec une certaine vitesse angulaire ω dans le sens de la flèche b. On demande l'expression de cette vitesse angulaire ω en fonction de V et des conditions géométriques de la figure?

Solution — Appliquons le théorème de Duhamel, c'est à dire exprimons que la perte de puissance vive due à cette liaison brusque égale la puissance vive que posséderait le corps si chacun de ses éléments était animé de la vitesse



qu'il a gagné ou perdu par suite de cette liaison. Nous aurons:

$$\tfrac{1}{2} MV^2 - \frac{\omega^2}{2} I_0 = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2$$ I_0 = Moment d'inertie du solide autour de l'axe

dans laquelle il reste à trouver l'expression de v vitesse gagnée ou perdue par chaque point immédiatement après la liaison. Or considérons un point quelconque m du corps avant la liaison il possède la vitesse V représentée en grandeur et en direction par la droite $m\,a$ après la liaison, il possède la vitesse ωr

représentée par la droite mb, or il est clair que ce point n'a pu passer de la vitesse V à la vitesse ωr que par l'addition de la vitesse mc égale et directement opposée à la résultante de V et de ωr pris en signe contraire ; c'est à dire que ce gain de vitesse est égal en valeur absolue à la vitesse qu'aurait ce point s'il était animé à la fois de la translation V et de la rotation ω, dans le sens de la flèche pointillée. On en conclut que la perte ou le gain de puissance vive totale $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ est égale à la puissance vive qu'aurait le corps, s'il était animé à la fois de la translation V suivant AB et de la rotation $-\omega$, le signe $-$ marquant que cette rotation a lieu dans le sens contraire de la rotation réelle c'est à dire dans le sens de la flèche pointillée.

Or ces deux mouvements reviennent comme on sait (Voir Cours de Cinématique) à une rotation unique égale et de même sens que la première s'effectuant autour d'un axe O' parallèle au 1er, le plan des deux axes de rotation étant perpendiculaire à la translation V, et la distance d de ces deux axes étant donnée par la relation : $V = \omega d$ d'où $d = \frac{V}{\omega}$

Dès lors $\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\omega^2}{2} I_{o'}$ $\quad I_{o'}$ Moment d'inertie du solide autour de l'axe O'

La relation de Duhamel devient donc ici :

$$\frac{1}{2} MV^2 - \frac{\omega^2}{2} I_o = \frac{\omega^2}{2} I_{o'}$$

Mais en appelant a et a' les distances du centre de gravité G du solide aux deux axes, on sait qu'on a : $I_o = I_G + Ma^2$

$$\underline{I_{o'} = I_G + Ma'^2}$$

D'où par soustraction $\quad I_{o'} = I_o + M(a'^2 - a^2)$

mais $\quad d = a + a' = \frac{V}{\omega}$ d'où $a' = \frac{V}{\omega} - a$

Il en résulte : $\quad a'^2 - a^2 = \frac{V^2}{\omega^2} - \frac{2Va}{\omega}$

$I_{o'}$ devient alors en remplaçant :

$$I_{o'} = I_o + M\left[\frac{V^2}{\omega^2} - \frac{2Va}{\omega}\right]$$

La relation de Duhamel devient par suite en multipliant tous les termes par 2 et remplaçant I_o' par cette valeur :

$$MV^2 - \omega^2 I_o = \omega^2 I_o + MV^2 - 2MV\omega a$$

d'où $\quad 2MV\omega a = 2\omega^2 I_o$

ou enfin $\quad \omega = \frac{MV.a}{I_o}$

Si $a = 0$ $\omega = 0$ c'est à dire que si l'axe O passe par le centre de gravité le corps s'arrête complètement, par suite toute sa puissance vive est anéantie

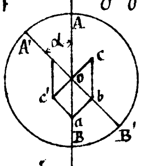
Si a est > 0, ω est positif la rotation a alors lieu dans le sens de la flèche pleine

Si a est < 0, ω est négatif, la rotation s'effectue alors dans le sens de la flèche pointillée.

Autre application du théorème de Duhamel.

Supposons une sphère solide homogène tournant autour d'un certain axe AB passant par son centre O, avec la vitesse angulaire ω — On supprime brusquement la liaison ou l'axe AB et on le remplace en même temps par la liaison ou l'axe A'B' passant également par le centre O et faisant avec le premier l'angle α — On demande l'expression de la vitesse angulaire ω' de la rotation qui va se produire autour de ce nouvel axe en fonction de la vitesse angulaire ω et des conditions géométriques de la figure?

Solution. — Appliquons encore le théorème de Duhamel, c'est à dire exprimons que la perte de puissance vive due à cette nouvelle liaison brusque égale la puissance vive que posséderait le corps si chacun de ses éléments était animé de la vitesse qu'il a gagné ou perdu par suite de cette liaison, nous aurons:



$$\frac{\omega^2}{2} I - \frac{\omega'^2}{2} I = \Sigma \frac{1}{2} m v^2$$

ou $$I(\omega^2-\omega'^2) = \Sigma m v^2 \quad (1)$$

Dans laquelle v représente la vitesse gagnée ou perdue par chaque point du solide il s'agit de trouver l'expression de cette vitesse.

Soit pour cela, Oa une longueur prise à partir du centre sur l'axe de la 1ère rotation et la représentant en intensité et en direction, subitement cette rotation se transforme en une autre ω' autour de A'B' représentée en grandeur et en direction par Ob. Mais ce passage de la rotation ω autour de AB à la rotation ω' autour de A'B' n'a pu se produire que par l'addition à la 1ère rotation ω, de la rotation ω'' représentée en grandeur et en direction par la ligne OC', égale et contraire à la résultante OC de la rotation ω et de la rotation ω' prise en sens contraire — Cette rotation ω'' a donc pour expression en valeur absolue:

$$\omega''^2 = \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega'\cos\alpha$$

Par suite: $\Sigma m v^2 = I\omega''^2 = I\omega^2 + I\omega'^2 - 2I\omega\omega'\cos\alpha$

Substituant dans (1) en divisant tous les termes par I, il vient:

$$\omega^2 - \omega'^2 = \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\alpha$$

D'où $\quad 2\omega'^2 = 2\omega\omega' \cos\alpha$

Et enfin: $\omega' = \omega \cos\alpha$

ce qui prouve que ω' est toujours $< \omega$ donc il y a toujours perte de puissance vive. Pour $\alpha = 90°$, $\omega' = 0$ le corps s'ar été complètement par suite toute sa puissance vive est anéantie.

Remarque importante relative aux pertes de puissance vive qui se produisent soit dans le choc entre corps mous, soit dans les corps solides auxquels on introduit subitement des liaisons.

Dans le cas du choc entre corps mous la puissance vive qui semble perdue s'est simplement transformée en travail moléculaire pour accomplir la déformation permanente des deux corps. Mais dans les deux questions précédentes les systèmes examinés dans lesquels on introduit subitement des liaisons étant supposés essentiellement solides on peut se demander ce que devient cette puissance vive qui semble s'anéantir? Eh bien elle se transforme en ce mouvement vibratoire particulier qui se manifeste à nos sens sous forme de chaleur. Exemple supposons que le double mouvement de la terre s'anéantisse, elle donnera d'un seul coup quatre vingt une fois plus de chaleur que le soleil n'en émet en un jour et elle commencera à tomber sur le soleil, elle acquerra dans cette chute une rapidité telle que la collision (en supposant les deux corps parfaitement solides) donnera naissance à un gigantesque éclair de lumière et de chaleur. En un instant elle en produira autant que le soleil en émet en 95 années. (W Thomson) La permanence de la chaleur solaire s'explique d'ailleurs par la chute perpétuelle de divers météores sur sa surface

---

Art III. Choc direct entre deux corps parfaitement élastiques c'est à dire revenant exactement à leur forme primitive à l'instant final du choc.

Ici le phénomène comprend deux périodes 1° Celle de compression cessant à l'instant où les deux corps ont pris même vitesse 2° Celle de détente dans laquelle les deux corps réagissent l'un sur l'autre en revenant à leurs forme-

Si nous considérons la quantité de mouvement du système à l'instant initial de la période de compression, et cette même quantité à la fin de la période de détente, comme dans cet intervalle aucune force extérieure n'agit la variation de cette quantité sera nulle on aura donc en désignant par v, v' les vitesses des deux corps m, m' à l'instant final de la période de détente

$$(1) \quad mv + m'v' = mv_0 + m'v'_0 .$$

De même si nous considérons la puissance vive du système à l'instant initial de la période de compression et cette même quantité à l'instant final de la période de détente comme dans cet intervalle de temps aucune force extérieure n'agit, que de plus le travail des actions mutuelles est nul, les deux corps à l'instant final de la période de détente étant exactement revenus à leur forme primitive il résulte que la variation de puissance vive éprouvée sera nulle on aura donc: $(2)\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m'v'^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m'v_0'^2$

Deux relations entre les deux inconnues v et v'.

Pour mettre ces inconnues en évidence, je puis écrire ces deux relations

$$(1) \text{bis} \qquad m(v - v_0) = m'(v'_0 - v')$$

$$(2) \text{bis} \qquad m(v^2 - v_0^2) = m'(v_0'^2 - v'^2)$$

D'où $\frac{(2)\text{bis}}{(1)\text{bis}}$ donne : $v + v_0 = v'_0 + v'$

ou bien $(3)\ v - v' = v'_0 - v_0 = -(v_0 - v'_0)$

Or $v - v'$ est la différence des vitesses finales des deux corps, ou la vitesse relative finale, de même $v_0 - v'_0$ est la différence des vitesses initiales ou la vitesse relative initiale :

On peut donc énoncer la relation (3). La vitesse relative finale est égale et de signe contraire à la vitesse relative initiale.

La relation (3) forme évidemment avec la relation (1) un système équivalent au système (1) (2) — Nous avons donc pour déterminer les deux inconnues cherchées v et v' le système très simple:

$$(1) \quad mv + m'v' = mv_0 + m'v'_0$$

$$(3) \qquad v - v' = v'_0 - v_0$$

Multipliant (3) par m' et ajoutant (1) membre à membre On a: $\Big\{\, v(m+m') = 2m'v'_0 + v_0(m - m')$ d'où

$$(4) \quad v = v'_0 \frac{2m'}{m+m'} + v_0 \frac{m-m'}{m+m'}$$

Multipliant (3) par m et la retranchant de (1) on a : $\left\{ v'(m+m') = 2m v_0 + v_0' (m'-m) \right.$

D'où $(5)\ v' = v_0 \dfrac{2m}{m+m'} + v_0' \dfrac{m'-m}{m+m'}$

Cas particuliers. Les formules (4) et (5) donnent les vitesses finales dans le cas général. Supposons maintenant que les masses m, m' soient égales, ces formules deviennent :

$$(4) \text{ bis} \quad v = v_0' \qquad\qquad (5) \text{ bis} \quad v' = v_0$$

Ainsi la vitesse finale du 1er est égale à la vitesse initiale du second et réciproquement. Il y a donc simplement échange de vitesses après le choc — Supposons, m étant toujours égal à m', que m soit au repos c'est à dire, supposons de plus $v_0 = 0$ on aura alors :

$$(4) \text{ ter} \quad v = v_0' \qquad\qquad (5) \text{ ter} \quad v' = 0$$

c'est à dire que le corps choqué a pris la vitesse du corps choquant qui est amené au repos.

Supposons enfin que les deux corps toujours de même masse vont l'un vers l'autre avec même vitesse, c'est à dire introduisons dans (4) et (5) les hypothèses $m = m'$ $v_0' = v_0$, elles deviennent :

$$(4)^{\text{iv}} \quad v = v_0 \qquad\qquad (5)^{\text{iv}} \quad v' = v_0$$

c'est à dire qu'à la fin du choc les corps ont mêmes vitesses qu'à l'instant initial, mais dirigées en sens contraire.

Si nous écrivons les équations (4) et (5) sous la forme suivante :

$$(4)' \quad v = v_0 \frac{2\frac{m'}{m}}{1+\frac{m'}{m}} + v_0 \frac{1-\frac{m'}{m}}{1+\frac{m'}{m}}$$

$$(5) \quad v' = v_0 \cdot \frac{2}{1+\frac{m'}{m}} + v_0' \frac{\left(\frac{m'}{m}-1\right)}{1+\frac{m'}{m}}$$

Sous cette forme on voit que si m est très grand par rapport à m' et tend vers l'infini, que : v tend vers v_0

et v' vers $2v_0 - v_0'$

ainsi le corps choqué conserve dans ce cas limite sa vitesse.

Art. IV. Durée et intensité du choc — Déformation des surfaces en contact.

Dans cet article je me propose seulement d'indiquer sur un cas particulier la méthode à suivre pour se rendre compte approximativement des circonstances qui influent sur la durée du choc, son intensité et enfin la déformation subie par le corps choqué.

Envisagée dans toute sa généralité et toute sa rigueur, cette question présente des difficultés telles qu'elle est restée jusqu'à présent dans la science sans solution complète.

Nous avons dit (Dynamique pure d'un point matériel Ch. 1er Fin de l'Art II.) que si un corps G de poids p est placé sans vitesse sur l'extrêmité d'un prisme vertical élastique de longueur L et de section Ω fixé par sa base A sur un sol parfaitement inébranlable :

1°. Le raccourcissement ou la déformation maximum du prisme avait pour expression : $2l = 2\frac{p}{q}$ $\left(q = \frac{E\Omega}{L}\right.$, E Coefficient d'élasticité à la Compression$\left.\right)$

2°. Que l'intensité de la réaction N, ou de l'action mutuelle au contact du prisme et du Corps G dont l'expression générale est qx (x désignant le raccourcissement à chaque instant) passe par un maximum pour x maximum c'est à dire pour $x = 2l = 2\frac{p}{q}$, que par suite cette réaction maximum a pour expression

$$N_m = 2p$$

3°. Que la durée de la double oscillation du Corps G a pour expression

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{p}{q}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}\frac{p}{E\Omega}}$$

Or supposons actuellement que ce Corps G au lieu d'être placé sans vitesse sur le sommet B du prisme BA, y arrive animé d'une certaine vitesse due à une hauteur de chute que je désigne par L'. Alors il y a choc et l'impression est tellement brusque que le ressort constitué par le prisme élastique donné n'a pour ainsi dire pas le temps d'être impressionné d'être comprimé dans toute la longueur L, en définitive une fraction $\frac{1}{n}$ de cette longueur L participe seule au phénomène, par suite la loi des variations de la réaction N avec la déformation au lieu d'être.

$$N = q\,x$$

est :

$$N = q'x \quad - \quad q' \text{ étant egal à } n\,q \text{ c'est à dire à } n\,\frac{E\Omega}{L}$$

La difficulté de la question consiste à trouver ce rapport $\frac{1}{n}$ de la longueur impressionnée à la longueur réelle.

Mais si nous passons sur cette difficulté c'est à dire si nous supposons $\frac{1}{n}$ et par suite q' connu, la question devient très facile en effet :

1°. Calcul de la déformation ou Compression maximum. — En la désignant encore par $2l$, on l'obtiendra en exprimant que le travail moteur du poids p tombant de la hauteur $L'+2l$ est égal au travail résistant de la réaction variable 1 de l à $2l$ – On aura donc : $p(L'+2l) = \int^{2l} N\,dx = \int^{2l} q'\,x\,dx = q'\frac{4l^2}{2}$

Si nous négligeons $2l$ devant L' dans le 1er membre, on tirera de cette égalité $2l = \sqrt{2\frac{p}{q'}.L'} = \sqrt{\frac{2p}{n}.\frac{LL'}{E\Omega}}$

ce qui prouve que la déformation varie comme la racine carrée 1° du poids du corps choquant – 2° de sa hauteur de chute 3° et de la hauteur du prisme, et en raison inverse de la racine carrée de la section Ω et de la quantité E c'est-à-dire de la dureté ou raideur de la substance. Tous résultats faciles à prévoir

2° Calcul de l'intensité maximum du choc. – Ayant l'expression de la déformation maximum $2l$, on en conclura pour la valeur maximum de la réaction N ou de l'intensité du choc.

$$N_m = q'.2l = \sqrt{2pq'L'} = \sqrt{2np\,E\Omega\frac{L'}{L}}$$

ce qui prouve que cette intensité varie proportionnellement à la racine carrée 1° du poids p 2° de la dureté ou raideur E de la substance 3° de la section Ω 4° de la hauteur de chute L' et en raison inverse de la racine carrée de la hauteur L'

3° Calcul de la durée du choc. – La durée du choc se compose de la durée de la période de compression augmentée de la durée de la période de détente cette durée n'est donc autre que celle de la double oscillation du mouvement oscillatoire du prisme BA dont la loi est évidemment la même que dans le cas où le corps était placé sans vitesse sur son sommet B. Or la durée de cette double oscillation est donnée comme on vient de le rappeler par la formule.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{2g}}$$

en remplaçant $2l$ par sa valeur dans le cas présent, on a :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{p}{q'}L'}}{2g\pi}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{\frac{p}{q'}L'}{2g^2}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{p}{2ng^2}.\frac{LL'}{E\Omega}}$$

ce qui prouve que la durée du choc est proportionnelle à la racine 4me de p, de L et de L' et en raison inverse de la racine 4me de la section Ω et de la raideur ou dureté E de la substance – Tous résultats faciles à prévoir.

Art. V. Applications des principes précédents à l'étude du pendule balistique.

Le pendule balistique est un appareil destiné à mesurer la vitesse des projectiles de l'artillerie, c'est Jacques Cassini qui en 1707 fournit la 1ère donnée expérimentale sur ce sujet, mais le pendule balistique est dû à Robins.

La méthode consiste essentiellement à faire pénétrer le projectile dans une masse beaucoup plus grande, libre d'osciller autour d'un axe horizontal auquel elle est suspendue, et à déterminer la vitesse cherchée par l'amplitude α de l'oscillation imprimée à cette masse.

Description

Théorie. – Soit m la masse du boulet et v sa vitesse au sortir de l'âme de la pièce, au moment où le projectile pénètre dans le récepteur en fonte qui termine le pendule, deux choses se passent. D'abord le projectile perd la plus grande partie de sa quantité de mouvement par l'effet des réactions du milieu dans lequel se fait la pénétration et à l'instant final du choc (ne comportant qu'une seule période celle de compression, car nous supposons les matières renfermées dans le récepteur en fonte indéfiniment compressibles et sans ressort) le boulet et le récepteur ont pris même vitesse commune u inférieure à v, et si nous exprimons que la perte de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force réactive N pendant le temps θ de ce choc, on aura :

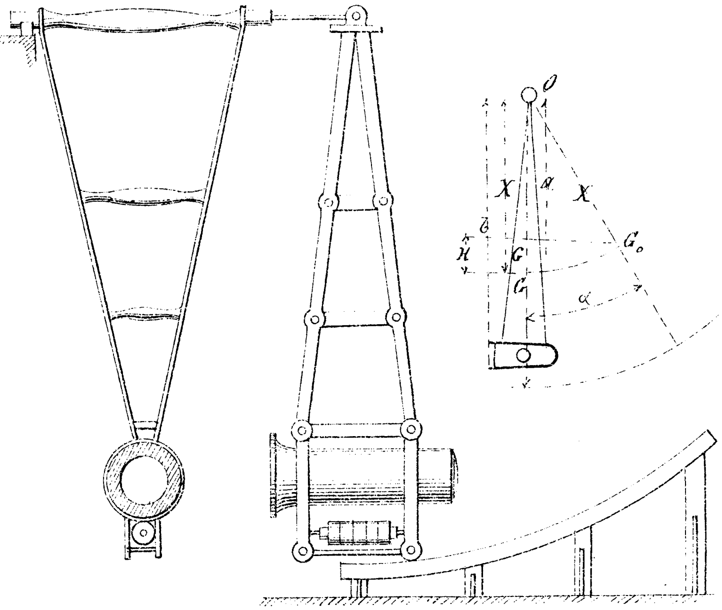
$$(1) \quad mv - mu = \int_0^{\theta} N\,dt$$

D'autre part à chaque instant de la durée θ de ce choc le pendule reçoit du projectile des actions précisément égales et contraires aux réactions N qu'il exerce sur le boulet, lesquelles tendent à lui imprimer un mouvement de rotation dont l'accélération angulaire sera donnée par la formule connue

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_o F}{I_o}$$

Or les forces agissant sur le pendule sont 1° les actions N du boulet dont le moment a pour expression Nb (b distance de l'axe du récepteur à l'axe de rotation)

2° La pesanteur dont le moment est nul pendant toute la durée θ du choc car cette force est appliquée au centre de gravité G du pendule et pendant la durée très courte du choc ce centre de gravité ne sort pas sensiblement du plan vertical projeté suivant OG d'où résulte que l'on peut considérer pendant toute la durée du choc cette force comme passant constamment par l'axe O, par suite son moment est nul.



3°. Les réactions de l'axe dont les moments sont également nuls puisqu'elles passent par l'axe. La formule précédente devient donc simplement

(2) $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Nb}{I_o}$ I_o moment d'inertie du pendule seul

Intégrant (2) en remarquant que la constante est nulle puisque le pendule part du repos on a:

(3) $\omega = \frac{b}{I_o}\int_o^\theta N\,dt$

De (1) et (3) on conclut en éliminant l'intégrale.

$$\omega = \frac{b}{I_o}(mv - mu)$$

et en remarquant que la vitesse linéaire de l'axe du récepteur à la fin de la durée θ du choc $= \omega b$ en fonction de la vitesse angulaire autour de l'axe O, l'expression précédente devient:

$$\omega = \frac{b}{I_o}(mv - m\omega b)$$

d'où $mv.b = \omega I_o + m\omega b^2$ d'où $v = \frac{\omega}{mb}(I_o + mb^2)$ (4)

Dans laquelle $(I_o + mb^2)$ représente le moment d'inertie de toute la masse en mouvement; pendule et boulet.

Cette relation donnerait donc la vitesse cherchée v du boulet si ω était connu la question revient donc actuellement à déterminer ω vitesse angulaire que prend le pendule à l'instant final du choc. Or cette vitesse angulaire ω est précisément accusée par l'angle d'écart α du pendule, déviation due précisément à cette vitesse angulaire initiale ω, et qui est atteinte quand toute la puissance vive que possède le pendule en vertu de cette vitesse initiale ω a été entièrement détruite par le travail résistant de la pesanteur: On aura donc en posant d'après cela l'équation du travail.

(5) $\frac{\omega^2}{2}(I_o + mb^2) = PH$

P poids total du pendule et du boulet. H hauteur dont s'élève le centre de gravité de cette masse; tirant ω de (5) et substituant dans (4) on a:

(6) $v = \frac{1}{mb}\sqrt{2PH(I_o + mb^2)}$

Mais cette formule n'est pas commode, elle exige la mesure de H qui nécessite la connaissance précise de la position du point G laquelle dépend de la position du boulet dans le récepteur. Il vaut mieux transformer cette formule de la façon suivante en exprimant H en fonction de l'angle d'écart α.

On a évidemment en appelant X la distance du centre de gravité G du système total (pendule et boulet) à l'axe de rotation :

(7) $H = X\,(1 - \cos\alpha) = X \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2X \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

D'ailleurs $P = P' + P''$ — P' poids du pendule P'' poids du boulet et si on désigne par a la distance du centre de gravité du pendule seul à l'axe O, il est clair que X sera donnée par la relation des moments par rapport au plan horizontal perpendiculaire au tableau passant par O.

(8) $PX = P'a + P''b$.

Des relations (7) et (8) on tire en les multipliant membre à membre et divisant par X

(9) $PH = 2\,(P'a + P''b)\,\sin^2 \frac{\alpha}{2}$

Remplaçant actuellement PH par sa valeur (9) et m par sa valeur $\frac{P''}{g}$ dans (6), cette formule devient :

$$V = \frac{g}{P''b}\, 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{(P'a + P''b)\left(I_0 + \frac{P''b^2}{g}\right)}$$

ou (10) $$v = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\left(\frac{P'}{P''}\,a + b\right)\left(\frac{I_0 g}{P''b} + b\right)\frac{g}{b}}$$

Mais si l'on remarque que le choc doit s'exercer au centre de percussion afin que l'axe de suspension ne soit pas dérangé :

La distance b doit être donnée par la formule :

$$b = \frac{I_0}{Ma} = \frac{I_0 g}{P'a}$$

Si nous supposons que les dimensions de l'appareil sont telles que cette condition soit satisfaite, et que nous remplacions b par cette valeur dans (10), la seconde parenthèse du radical devient égale à la 1ère et la formule devient en définitive

(11) $$v = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \left(\frac{P'}{P''}\,a + b\right)\sqrt{\frac{g}{b}} \quad \left(b = \frac{I_0 g}{P'a}\right)$$

Telle est la formule donnant la vitesse du boulet en fonction de l'angle d'écart α, réduite à son plus grand degré de simplicité.

Dans l'application on commence par peser le pendule ce qui donne P' on le couche ensuite sur un couteau horizontal, ce qui donne a P'' est donné pour trouver b on fait osciller le pendule et comme b doit être la longueur du pendule simple répondant au pendule composé donné avant l'addition du boulet, b se trouve déterminé par la relation $t = \pi \sqrt{\frac{b}{g}}$ d'où $b = g \frac{t^2}{\pi^2}$

Il faut que la longueur trouvée par cette formule coïncide avec la distance de l'axe du récepteur à l'axe de rotation o. Pour amener cette coïncidence au dessous du récepteur sont enfilés sur une vis une série de disques en plomb. On en ajoute ou en retranche jusqu'à ce que cette coïncidence soit obtenue.

Reste à observer l'angle α pour cela la partie inférieure du pendule pousse devant elle dans son oscillation un petit curseur léger, posé à cheval sur un cercle gradué quand le pendule redescend, le curseur reste à sa place et indique bien l'angle maximum décrit.

Fin de la 2me Partie
de la Dynamique pure des systèmes matériels

Résumé

de la 2e Partie de la Dynamique pure ou Dynamique pure des systèmes matériels

Préliminaires. — Nous ne nous sommes occupés jusqu'à présent que du mouvement d'un seul point matériel. Il s'agit de passer à l'étude du mouvement des systèmes matériels.

Un système matériel quelconque peut être considéré comme un ensemble de points matériels de masses m m' m''.... reliés deux à deux par des actions attractives ou répulsives variables f, mais à chaque instant égales, deux à deux et directement opposées (Principe de Newton).

Supposons qu'un tel système soit soumis à l'action d'un ensemble de forces extérieures F variables à chaque instant d'une manière quelconque en grandeur et en direction ; il est clair que sous l'action combinée des forces F et f le système matériel en question va prendre dans l'espace un certain mouvement d'ensemble, et en outre se déformer à chaque instant de la durée suivant une certaine loi.

Cela posé, le problème général que l'on se propose dans cette 2.e Partie de la Dynamique pure est le suivant :

1.° Définir le mouvement d'ensemble du système.

2.° Étudier les variations de forme qu'il subit à chaque instant de la durée.

Cette année, nous ne nous occuperons que de la première partie du problème la seconde partie étant du domaine de la mécanique moléculaire (Théorie mathématique de l'élasticité dont la théorie de la résistance des matériaux est un cas particulier.

Or, pour résoudre la 1.ère partie du problème, il suffit d'observer que chaque point matériel du système donné se meut comme un point matériel libre, sollicité à la fois par les forces extérieures F qui lui sont directement appliquées et par les actions intérieures f qu'il reçoit de tous les autres points du système – Dès lors en appliquant successivement à tous les points du système donné (que l'on peut considérer comme libres), les principes et les théorèmes développés dans la 1.ère partie, on obtiendra une relation finale répondant à la question.

Considérons donc ce que deviennent ces principes et ces théorèmes étendus au cas des systèmes matériels.

Chapitre 1.er

Extension du principe de D'Alembert au cas des systèmes matériels

Art 1.er Si nous appliquons successivement à tous les points matériels dont se compose le système donné, le principe de d'Alembert exposé (page 22) nous arrivons à cette conclusion :

Qu'à chaque instant du mouvement d'un système matériel quelconque sollicité par des forces extérieures F il y a équilibre dynamique entre 1° les forces extérieures F 2° les forces intérieures f 3° et les forces ou résistances d'inertie des différents points dont se compose le système

Dans le cas particulier où le système matériel donné est supposé parfaitement solide, les forces intérieures f disparaissent et le principe de d'Alembert peut alors s'énoncer :

« A chaque instant du mouvement d'un système solide sollicité par des forces extérieures F il y a équilibre dynamique entre ces forces extérieures F et les forces ou résistances d'inertie des différents points dont ce système se compose.

Ce principe permet de ramener toutes les questions de mouvement d'un système matériel à de simples questions d'équilibre. En effet, si nous considérons le cas particulier d'un système solide, puisqu'à chaque instant du mouvement, il y a équilibre entre les forces extérieures et les résistances d'inertie des différents points de ce système, l'ensemble de ces forces devra satisfaire aux six conditions d'équilibre trouvées en statique (Remarquons qu'il s'agit d'un système solide, dans le cas général d'un système déformable ces six relations ne suffisent plus). Dès lors si nous posons ces six conditions d'équilibre, elles renfermeront implicitement toutes les circonstances du mouvement du système. Donnons en un exemple :

Art. II. Étude du mouvement d'un solide assujetti à tourner sans glisser autour d'un axe sous l'action d'un système quelconque de forces extérieures F

A un instant quelconque de mouvement, il y a équilibre dynamique, en vertu du principe précédent entre les forces extérieures F et N (N désignant les réactions dues à l'axe) et les résistances d'inertie des différents points du solide : le système ayant un axe fixe autour duquel il ne peut que tourner, il n'y a qu'une seule réelle condition d'équilibre celle des moments autour de l'axe de rotation, laquelle est indépendante des réactions N, en la posant on trouve :

$$(1)\quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M_o F}{\sum m r^2}$$

$\sum m r^2$ s'appelle le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation - Raison de cette dénomination

En intégrant (1) on trouve la relation des puissances vives d'un solide tournant autour d'un axe

$$(2)\ \frac{1}{2}\int m r^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = \int^\alpha d\alpha\ \Sigma M_0 F$$

Art. III. - Si nous posions les cinq autres relations d'équilibre entre les forces N, et d'inertie ; on aurait d'ailleurs cinq conditions qui permettraient de déterminer à chaque instant l'intensité et la direction des réactions N.

Remarquons actuellement que la formule (1) peut s'obtenir sans parler du principe de d'Alembert ni des forces d'inertie ; si dans cette formule ainsi obtenue je fais $\frac{d\omega}{dt} = 0$, c'est à dire si les forces extérieures F sont telles que le solide est au repos ou en mouvement uniforme auquel cas elles sont dites en équilibre, il viendra $\Sigma M_0 F = 0$ or on se rappelle que telle est la condition d'équilibre d'un système de forces appliqué à un solide qui ne peut que tourner autour d'un axe.

Ainsi donc :

Si d'une part par l'introduction des forces d'inertie et le principe de d'Alembert, nous pouvons traiter le mouvement des systèmes matériels définis comme une question d'équilibre et trouver les équations différentielles du mouvement de ce système en posant entre les forces extérieures et les résistances d'inertie de tous les points du système les six conditions trouvées en statique. Réciproquement d'autre part nous pouvons considérer l'équilibre d'un système de forces appliqué à un solide comme un cas particulier du mouvement et déduire des équations différentielles du mouvement de ce solide posées directement, les 6 conditions d'équilibre applicables à ce solide.

Art. IV. - Moments d'inertie des volumes des surfaces, des lignes.

La question de la recherche des moments d'inertie, dans le cas de solides homogènes est une pure question d'analyse qui sera traitée en Conférence comme une application des premiers principes de l'intégration.

On se contente ici de démontrer les deux principes suivants :

1° Le moment d'inertie polaire d'une surface c'est à dire son moment par rapport à un axe perpendiculaire au plan de cette surface et projeté en O, est égale à la somme des moments d'inertie de cette même surface par rapport à deux axes rectangulaires situés dans cette surface et passant par le point O

2° - Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque s'obtient en ajoutant au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle mené par le centre de gravité, le produit de la masse entière par le carré de la distance des deux axes.

Art. V. — Applications de la théorie précédente et de la formule trouvée.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum \mathcal{M}_o F}{\int m r^2}$$

1°. Pendule Composé. — La longueur l du pendule simple oscillant comme un pendule composé donné est $l = \frac{I_o}{Ma}$ I_o Moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension. a distance du centre de gravité du pendule à l'axe de suspension M masse totale du pendule

La durée de l'oscillation sera dès lors

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{I_o}{Mga}} = \pi\sqrt{\frac{I_o}{Pa}}$$ P poids du pendule.

Cette formule permet de déterminer expérimentalement le moment d'inertie I_o d'un solide quelconque.

Centre d'oscillation. — Le Centre d'oscillation est réciproque du centre de suspension.

2°. Centre de percussion.

Ce point se confond avec celui que nous venons de désigner dans le pendule composé sous le nom de Centre d'oscillation. — La détermination expérimentale en est dès lors très facile.

Applications de cette théorie au marteau frontal et au pendule balistique.

Chapitre II.

Théorème du mouvement du Centre de gravité. Extension du théorème des quantités de mouvement.

Art. 1er Théorème du mouvement du Centre de gravité.

Le Centre de gravité d'un système matériel quelconque déformable ou non se meut comme si toute la masse du système y était concentrée et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles mêmes. — Ainsi le mouvement de ce point est complètement indépendant des actions mutuelles ou intérieures qui peuvent se développer au sein du système donné.

Applications : Bombe éclatant en l'air, Homme tombant et lançant un poids dans sa chute.

Corollaire du théorème précédent ou Principe de la Conservation du mouvement du centre de gravité.

Si les forces extérieures agissant sur le système et transportées parallèlement à elles mêmes ont une résultante nulle ou bien s'il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité du système reste nécessairement immobile ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Applications. Homme suspendu au bout d'une corde — Bouche à feu — Fusées. Mouvement du centre de gravité de notre système planétaire. — Explication de la marche des êtres animés et des locomotives sur un terrain horizontal. —

Explication de la variation qu'éprouve la réaction due au sol lorsque un homme ou en général un être animé s'élève ou s'abaisse par le seul jeu de ses muscles.

Art. II. Extension du théorème des quantités de mouvement.

Lorsqu'un système matériel quelconque déformable ou non est en mouvement, l'accroissement total de la somme des quantités de mouvement des différents éléments du système, projetées sur un axe quelconque est égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur cet axe. Ainsi cet accroissement est complètement indépendant des actions mutuelles qui peuvent se développer au sein du système

Corollaire du théorème précédent. Si les forces extérieures disparaissent il résulte du théorème précédent, que la quantité de mouvement du système projetée sur un axe quelconque reste toujours constante quelque soient les actions mutuelles qui se développent au sein du système. Ce Corollaire explique facilement le recul des bouches à feu et l'ascension des fusées.

Chapitre III

Extension aux systèmes matériels du théorème du travail ou des puissances vives.

Art. 1er. La variation totale de puissance vive d'un système matériel quelconque en mouvement pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux de toutes les forces tant intérieures, qu'extérieures qui agissent sur lui pendant cette durée

Ce qu'il y a d'important à remarquer c'est que le terme relatif aux forces intérieures ne disparait pas nécessairement comme dans les deux théorèmes précédents cela ne peut arriver que dans les deux cas hypothétiques suivants :

1° Quand le système matériel est supposé parfaitement solide, indéformable.

2° Quand étant déformable, le système, à l'instant final du temps auquel se rapporte l'équation, a repris exactement la même forme qu'à l'instant initial de ce temps.

Art II – Formes de l'équation du travail appliquée à un système solide dans les deux cas suivants :

1° Cas d'un mouvement de translation simple.

Dans ce cas la variation de puissance vive est la même que celle qu'éprouverait le centre de gravité du système auquel serait concentré la masse entière et auquel serait appliquée la résultante de translation de toutes les forces extérieures.

2° Cas d'un mouvement de rotation simple.

La forme que prend dans ce cas l'équation du travail est celle que nous avons trouvée en intégrant la relation :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{\int m r^2}$$

déduite directement du principe de d'Alembert.

Réciproquement en différentiant l'équation du travail appliqué à un mouvement de rotation simple et trouvée sans qu'on ait parlé du principe de d'Alembert on retombe sur la formule $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma M_o F}{\int m r^2}$ que fournit immédiatement ce principe.

Art III. – Forme de l'équation du travail appliqué à un système solide dans le cas où ce solide possède un mouvement tout à fait quelconque dans l'espace.

Théorème. La puissance vive possédée par un solide tournant autour d'un axe avec la vitesse angulaire ω, est égale à la somme des puissances vives que posséderait ce solide s'il tournait avec la même vitesse ω autour d'un axe parallèle au 1er mené par le centre de gravité, et si en même temps il possédait un mouvement de translation dont la vitesse v soit : $\omega\delta$ (δ distance des deux axes de rotation). – Mais d'autre part on a vu en Cinématique qu'une rotation unique autour d'un axe peut être considérée comme résultant d'une rotation égale s'effectuant autour d'un axe parallèle au 1er et d'une translation ppd au plan des deux rotations s'effectuant avec la vitesse $v = \omega\delta$.

De là on peut conclure en généralisant les 2 théorèmes suivants :

1er Théorème. La puissance vive que possède un corps animé d'un mouvement quelconque que l'on peut toujours regarder comme résultant de deux mouvements composants, l'un relatif par rapport à des axes mobiles entraînés en translation par le centre de gravité du corps, l'autre de translation en vertu duquel tous les points du solide auraient à chaque instant même vitesse que le centre de gravité origine des axes mobiles. Cette puissance vive dis je est égale à la somme des puissances vives qu'il possède en vertu de ces deux mouvements composants.

2me Théorème – Lorsqu'un solide est animé dans l'espace d'un mouvement quelconque que l'on peut toujours regarder comme résultant deux mouvements que l'on vient de définir.

La variation de puissance vive du solide pendant un temps quelconque est égale à la somme des variations de puissance vive qu'il éprouve dans chacun de ces mouvements composants.

Or comme le mouvement le plus général revient à chaque instant à une rotation et à une translation simultanées, il résulte du théorème précédent que la variation totale de puissance vive de ce solide toujours égale au travail des forces extérieures sera équivalente à la somme des puissances vives qu'éprouverait le solide dans chacun de ces deux mouvements composants. C'est la réponse à l'énoncé de cet article.

C Applications 1°. Étude du mouvement d'une bille sphérique roulant sur un plan horizontal exerçant une résistance constante : Espace parcouru et durée du phénomène.

2°. Étude du mouvement d'une bille sphérique roulant sur un plan incliné n'exerçant aucune résistance. Hauteur à laquelle parvient la bille et durée du phénomène.

On compare les résultats obtenus dans ces deux cas avec ceux qu'on obtiendrait en supposant que la bille au lieu de rouler glisse.

Art IV. Conditions d'équilibre d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide, l'équilibre de ce système étant considéré comme un cas particulier de son mouvement.

L'an dernier en statique nous sommes arrivés par des considérations directes au théorème du travail virtuel et par suite aux six conditions d'équilibre applicables à tout système de forces appliquées à un solide. Cette année nous avons donné le principe de d'Alembert qui permet par l'introduction des forces d'inertie de traiter toutes les questions du mouvement des solides comme de simples questions d'équilibre statique en appliquant à toutes les forces y compris celles d'inertie les six conditions d'équilibre trouvées directement.

Eh bien, réciproquement les questions de statique peuvent être considérées comme cas particuliers des questions de mouvement. On fait voir très facilement en effet que l'on peut déduire le théorème du travail virtuel et par suite les six conditions d'équilibre, non plus de considérations directes et purement géométriques, mais de considérations essentiellement dynamiques sur le mouvement des systèmes.

Chapitre IV.

Application des théorèmes généraux qui précèdent à l'analyse du choc des corps. _ Théorèmes de Carnot et de Duhamel

Art 1er _ Choc direct entre deux corps mous ou privés complètement d'élasticité

On recherche en fonction des vitesses initiales des deux corps la vitesse commune u que prend l'ensemble de ces deux corps après le choc. Pour cette recherche on peut faire usage :

1° Du théorème général du mouvement du centre de gravité des systèmes matériels.

2° Du théorème des quantités de mouvement

3° Du théorème des puissances vives

L'application de ce dernier théorème au phénomène du choc entre corps mous conduit au théorème important de Carnot dont voici l'énoncé général

La perte de puissance vive dans le choc de deux corps mous est égale à la somme des puissances vives que posséderaient les deux corps si chacun d'eux était animé de la vitesse qu'il a perdue ou gagnée pendant le choc.

Dans le cas particulier examiné, on recherche l'expression de cette perte de puissance vive en fonction des vitesses initiales des deux corps.

= Art II

Art. II. Théorème de Duhamel.

Il existe un théorème dû à Duhamel complètement analogue au théorème de Carnot et relatif à la perte de puissance vive qu'éprouve un système matériel solide lorsqu'on introduit brusquement dans ce système des liaisons. En voici l'énoncé : — Si on ajoute brusquement des liaisons à un système solide en mouvement la perte de puissance ~~vive qu'il possèderait~~ qu'il éprouve est égale à celle qu'il possèderait si chaque point matériel qui le compose était animé de la vitesse qu'il a perdue ou gagnée par suite de ces liaisons. Si au contraire on supprime brusquement des liaisons, le gain de puissance vive est égal à la puissance vive que possèderait tout le système si chaque point matériel de ce système était animé de la vitesse qu'il a gagnée par suite de cette suppression de liaisons.

On admet ce théorème sans démonstration et on l'applique aux deux questions suivantes :

1°. Un solide quelconque est en translation rectiligne avec une vitesse V ; on introduit brusquement comme liaison un axe autour duquel le solide ne peut que tourner on demande 1°. la vitesse angulaire ω de la rotation qui va se produire, 2° l'expression de la perte de puissance vive.

2°. Une sphère solide est en rotation ω autour d'un certain diamètre on supprime brusquement cette liaison mais on la remplace immédiatement par une autre liaison consistant en un axe de rotation passant également par le centre on demande :

1°. La vitesse angulaire ω' qui va se produire autour de ce nouvel axe.

2°. La perte de puissance vive.

Remarque. — Dans le cas du choc entre corps mous, la puissance vive qui semble perdue, s'est simplement transformée en travail pour accomplir la déformation des deux corps. Dans les deux cas précédents les systèmes examinés étant supposés essentiellement solides on peut se demander ce que devient cette puissance vive qui semble s'anéantir ! Elle se transforme en ce mouvement vibratoire particulier qui nous donne la sensation de chaleur : Exemple : — « Supposons que le double mouvement de la terre s'anéantisse, elle donnera d'un seul coup quatre vingt une fois plus de chaleur que le soleil n'en émet en un jour, et elle commencera à tomber sur le soleil, elle acquerra dans sa route une rapidité telle que la collision (en supposant les deux corps parfaitement solides, donnera naissance à un gigantesque éclair de lumière et de chaleur. En un instant elle en produira autant que le soleil en ennet en 15 années (W. Thomson)

Art. III. Choc direct entre deux corps parfaitement élastiques.

Recherche des vitesses finales des deux corps en fonction des vitesses initiales. Discussion des résultats.

Art. IV. Notions sommaires sur la durée et l'intensité du choc ainsi que sur les déformations du corps choqué.

Art. V. Application de la théorie du choc à l'étude du pendule balistique. Expression de la vitesse des projectiles en fonction de l'angle d'écart du pendule.

Fin de la Dynamique pure des systèmes matériels.

Dynamique pure d'un point et des systèmes matériels

Table analytique et synthétique des matières.

1ère Section _ Introduction à la Dynamique

2me Section _ Dynamique pure.

1ère Partie. Dynamique pure d'un point matériel.

2ème Partie — Dynamique pure des systèmes matériels.