N° D'ORDRE :

703.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. J. ANDRADE.

1re THÈSE. — Sur le mouvement d'un corps soumis a l'attraction newtonienne de deux corps fixes, et sur l'extension d'une propriété des mouvements kepleriens.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 4 juillet 1890, devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*
TISSERAND, } *Examinateurs.*
APPELL, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géometrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	N	Géologie.
PROFESSEURS ADJOINTS	WOLF	Physique céleste.
	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

16329 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

M. MAURICE LÉVY.

A

M. APPELL.

J. ANDRADE.

PREMIÈRE THÈSE

SUR LE

MOUVEMENT D'UN CORPS SOUMIS A L'ATTRACTION NEWTONIENNE

DE DEUX CORPS FIXES.

SUR UNE EXTENSION D'UNE PROPRIÉTÉ DES MOUVEMENTS KEPLÉRIENS.

I

INTRODUCTION.

« Quoique ce problème ne puisse avoir aucune application au système du monde, où tous les centres d'attraction sont en mouvement, il est néanmoins assez intéressant du côté analytique pour mériter d'être traité en particulier avec quelque détail. »

C'est en ces termes que *Lagrange* appréciait le problème du mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes.

Ce problème, pour la première fois ramené aux quadratures par *Euler*, est repris par Lagrange, qui y rattache le célèbre théorème de *Lambert*; *Legendre* en discute les quadratures; *Jacobi* lui applique sa théorie des systèmes canoniques; enfin une thèse de *Serret*, une thèse de M. *Desboves* sur un mouvement analogue signalé par *Liouville* paraissent épuiser la question. En effet, tout a été dit sur ce problème, si on ne l'envisage qu'au point de vue de l'exposé des méthodes d'intégration.

Un problème est-il achevé quand on l'a réduit aux quadratures?

Oui, s'il ne s'agit que d'un exercice de Calcul intégral.

Mais si l'on considère le problème au point de vue concret, et dans ses *rapports avec d'autres*, en sera-t-il encore de même?

Je ne l'ai pas pensé.

Et d'abord, à ne considérer le problème d'Euler qu'au point de vue analytique, on pourra peut-être accorder quelque attention à ce nouvel exemple d'inversion dans les fonctions elliptiques, bien qu'il n'offre certainement pas l'intérêt qui s'attache pour elles-mêmes aux belles applications réunies par *Halphen* dans son dernier Ouvrage.

La plus grande partie de cette étude est consacrée à l'inversion des quadratures auxquelles Euler avait ramené le problème; l'idée de réaliser cette inversion m'a été inspirée par M. *Maurice Lévy*.

Dans ce problème de Mécanique, j'ai rencontré des analogies curieuses, que je veux dès maintenant signaler, précisément parce que je n'ai pu les poursuivre jusqu'à leur dernière raison.

Lorsqu'un mobile décrit une section conique sous l'influence de l'attraction newtonienne d'un centre fixe, on sait que le signe de la constante de l'intégrale des forces vives suffit pour décider si la trajectoire reste ou ne reste pas confinée dans une région limitée de l'espace. Toutefois cette assertion n'est exacte que si la constante de l'intégrale des aires n'est pas nulle. S'il n'en est pas ainsi, il peut arriver que, quel que soit le signe de la constante des forces vives, le mobile vienne se réunir au centre fixe.

En sorte que l'on peut dire que, dans la combinaison de l'intégrale des forces vives et de celle des aires, réside le criterium de la limitation ou de la non-limitation de la trajectoire.

Or il se trouve, et c'est une propriété qui mériterait d'être plus connue, que le même criterium subsiste si l'on a deux masses fixes au lieu d'une seule.

J'ai développé cette propriété remarquable, et je me suis demandé si elle persisterait dans le cas de n corps fixes situés en ligne droite.

Lorsque la constante h de l'intégrale des forces vives est négative, cette seule intégrale établit que la trajectoire est limitée; mais le cas de $h > 0$ reste encore obscur.

A cet égard, j'ai, en dehors de toute recherche d'intégration, démontré le théorème suivant :

Si la constante h des forces vives est positive et si, de plus, la constante des aires n'est pas nulle, on peut fixer une limite inférieure *et* permanente *à l'étendue des oscillations de la projection du mobile sur l'axe qui porte les masses fixes.*

Le cas où le mobile peut être considéré comme satellite de l'une des deux masses fixes offre un intérêt qui m'a été signalé par M. *Tisserand*; j'ai cru entrevoir à ce sujet une singularité inattendue, mais j'espère pouvoir y revenir plus tard, au point de vue des développements en série.

II.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT ET NOTATIONS.

RAPPEL D'UNE INTÉGRATION CONNUE.

Calcul de la demi-force vive. — Pour former les équations du mouvement, on calcule d'abord le carré de la vitesse du mobile ; on prend comme coordonnées les distances r, ρ du mobile aux deux masses fixes dont la distance est $2c$; et, à ces coordonnées relatives du mobile dans le plan des trois masses, on adjoint l'angle Φ, que forme ce plan avec sa position nitiale. La valeur 2Θ, de l'angle au sommet mobile, du triangle formé par les trois masses est définie par l'équation

$$\cos 2\Theta = \frac{r^2 + \rho^2 - 4c^2}{2r\rho}.$$

En introduisant alors les coordonnées elliptiques

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2}(r + \rho), \\ \mu &= \tfrac{1}{2}(r - \rho), \end{aligned}\right.$$

on aura

$$\cos\Theta = \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}}, \qquad \sin\Theta = \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}},$$

valeurs au moyen desquelles on exprimera la distance Y du mobile à l'axe qui joint les deux masses fixes. On a ainsi

$$Y = \frac{r\rho \sin\Theta \cos\Theta}{c} = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

Si maintenant on désigne par v_x et v_y les composantes de la vitesse du mobile dans son mouvement relatif dans le plan des trois masses, ces vitesses étant estimées suivant les bissectrices (intérieure et extérieure) de l'angle mobile considéré tout à l'heure, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r' = v_x \cos\Theta - v_y \sin\Theta \\ \frac{d\rho}{dt} &= \rho' = v_x \cos\Theta + v_y \sin\Theta \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} v_x &= \frac{\lambda'}{\cos\Theta} \qquad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{dt}\right), \\ v_y &= \frac{-\mu'}{\sin\Theta} \qquad \left(\mu' = \frac{d\mu}{dt}\right) \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$v_x^2 + v_y^2 = \lambda'^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} + \mu'^2 \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2};$$

donc enfin, en faisant encore

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + y^2 \varphi'^2,$$

on aura

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \lambda'^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \mu'^2 + \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2} \varphi'^2\right].$$

Équations du mouvement. — Faisons alors la transformation de Poisson et de Hamilton, en posant

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \lambda'} &= p, \\ \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \mu'} &= q, \\ \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial \varphi'} &= s. \end{aligned}\right.$$

Ce changement de variables donne

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^2-c^2}{\lambda^2-\mu^2}p^2 + \frac{c^2-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}q^2 + \frac{c^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}s^2\right].$$

Soient K^2 et K'^2 les pouvoirs attractifs des deux masses fixes, mesurés en accélérations, en sorte que la fonction des forces accélératrices est

$$U = \frac{K^2}{r} + \frac{K'^2}{\rho} = \frac{K^2}{\lambda+\mu} \quad \frac{K'^2}{\lambda-\mu}.$$

On sait qu'en posant

$$H(\lambda, \mu, \varphi; p, q, s) = H = \tfrac{1}{2}v^2 - U,$$

les équations du mouvement pourront prendre la forme canonique

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda},\\
\frac{d\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mu},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial s}, & \frac{ds}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

III.

RÉDUCTION AUX QUADRATURES PAR LA MÉTHODE DE JACOBI.

Si l'on envisage la fonction définie tout à l'heure

$$H(\lambda, \mu, \varphi; p, q, s)$$

et si l'on y rattache l'équation aux dérivées partielles

$$H\left(\lambda, \mu, \varphi; \frac{\partial V}{\partial \lambda}, \frac{\partial V}{\partial \mu}, \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = h.$$

dont on puisse connaître une intégrale complète

$$V(\lambda, \mu, \varphi; \alpha, g, h),$$

contenant trois constantes distinctes, α, g, h, dont la dernière h est la constante de l'intégrale des forces vives, on sait, par une classique proposition de Jacobi, que les intégrales des équations différentielles du mouvement seront données par les équations suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = A = \text{const.}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = p,$$

$$\frac{\partial V}{\partial g} = G = \text{const.}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \mu} = q,$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau \quad (\tau = \text{const.}), \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = s.$$

Dans le cas particulier où nous sommes, on peut donner à V la forme suivante :

$$V = g\varphi + W(\lambda, \mu),$$

et la fonction $W(\lambda, \mu)$ doit être alors déterminée par l'équation

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)^2\right] = \frac{K^2}{\lambda + \mu} + \frac{K'^2}{\lambda - \mu} - \frac{1}{2}\frac{c^2 g^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} + h$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}(\lambda^2 - c^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 &+ (c^2 - \mu^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)^2 \\ &= 2K^2(\lambda - \mu) + 2K'^2(\lambda + \mu) + 2h(\lambda^2 - \mu^2) - g^2 c^2\left(\frac{1}{\lambda^2 - c^2} + \frac{1}{c^2 - \mu^2}\right),\end{aligned}$$

et, dans cette dernière équation, les variables peuvent se séparer en posant

$$W = W_1(\lambda) + W_2(\mu),$$

puis en prenant enfin

$$W_1(\lambda) = \int \frac{d\lambda}{\lambda^2 - c^2}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)[2h\lambda^2 + 2(K^2 + K'^2)\lambda + \alpha] - g^2 c^2},$$

$$W_2(\mu) = \int \frac{d\mu}{c^2 - \mu^2}\sqrt{(\mu^2 - c^2)[2h\mu^2 + 2(K^2 - K'^2)\mu + \alpha] - g^2 c^2};$$

on posera, pour abréger,

$$(1)\quad \begin{cases} R(\lambda) = (\lambda^2 - c^2)[2h\lambda^2 + 2(K^2 + K'^2)\lambda + \alpha] - g^2c^2, \\ S(\mu) = (\mu^2 - c^2)[2h\mu^2 + 2(K^2 - K'^2)\mu + \alpha] - g^2c^2, \end{cases}$$

et, ayant pour V l'expression

$$V = g\varphi + W_1(\lambda, \alpha, g, h) + W_2(\mu, \alpha, g, h),$$

on aura, pour les intégrales du problème,

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi - \displaystyle\int \frac{c^2 g\, d\lambda}{(\lambda^2 - c^2)\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{c^2 g\, d\mu}{(c^2 - \mu^2)\sqrt{S(\mu)}} = G = \text{const.}, \\ \displaystyle\int \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = 2A = \text{const.}, \\ \displaystyle\int \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = t + \tau. \end{cases}$$

Enfin, à ces équations qui font connaître la loi du mouvement, on peut ajouter celles-ci, qui expriment la nature des constantes α, g, h,

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2 - c^2} = p = \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}\lambda', \qquad \text{où} \qquad \lambda' = \dfrac{\sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2 - \mu^2}, \\ \dfrac{\sqrt{S(\mu)}}{c^2 - \mu^2} = q = \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}\mu', \qquad \text{où} \qquad \mu' = \dfrac{\sqrt{S(\mu)}}{\lambda^2 - \mu^2}, \\ g = s = \dfrac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)\varphi'}{c^2} \end{cases}$$

(g est la constante de l'intégrale des aires relative à l'axe qui passe par les deux masses fixes).

IV.

SUR UNE EXTENSION DU CRITERIUM DE LA LIMITATION DE LA TRAJECTOIRE DANS LES MOUVEMENTS DE KEPLER. CONDITIONS POUR QUE LE MOBILE SE MEUVE SUR L'ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION $\lambda = \text{const}$.

Les équations (2) contiennent des intégrales elliptiques, mais des intégrales elliptiques *à deux modules distincts;* je les étudierai tout à l'heure à ce point de vue. Pour le moment, je veux me borner à une partie importante de la discussion qui peut être faite sur le symbole même des quadratures.

On sait que, dans le cas d'une seule masse fixe attirante, c'est-à dire dans le cas de mouvements conformes aux lois de Kepler, le signe de la constante de l'intégrale des forces vives est un criterium remarquablement simple de la *limitation* ou de la *non-limitation* de la trajectoire; j'ajouterai que ce criterium n'est d'ailleurs plus valable dans le cas infiniment particulier où le mobile aurait un mouvement de chute possible vers la masse attirante, disons *lorsque la constante des aires n'est pas nulle.* Or une remarque entièrement analogue peut être faite sur le problème qui nous occupe.

En effet, si l'on regarde le polynôme $R(\lambda)$, qui contient le paramètre des ellipses homofocales, on voit que, si h est > 0, le polynôme $R(\lambda)$ croît ou décroît en même temps que λ, car on a toujours

$$\lambda^2 - c^2 > 0,$$
$$K^2 + K'^2 > 0.$$

On voit alors sans peine que (lorsque $h > 0$), dès que λ a *commencé* à croître, il *peut* et, par suite, à cause de la nature des fonctions en jeu, il *doit* continuer à croître indéfiniment.

Au contraire, lorsque h est < 0, λ est évidemment limité, comme l'intégrale des forces vives suffirait à l'établir.

Le raisonnement précédent n'est pourtant pas complet, et il reste à examiner les cas où λ ne parviendrait jamais à croître; ce qui peut arriver de deux manières :

1° Ou bien λ décroît toujours;

2° Ou bien λ demeure constant pendant le mouvement.

Examinons l'une et l'autre de ces deux hypothèses, et d'abord la seconde

$$\lambda = \text{const.}$$

Nous avons à voir à quelles conditions le système canonique admet cette intégrale. Le système devient, par hypothèse,

$$\left\{\begin{array}{llll} \lambda = \text{const.}, & p = 0, & s = g = \text{const.}, & \\ \dfrac{d\mu}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q}, & 0 = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}, & & \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = +\dfrac{\partial H}{\partial s}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mu}, & & \end{array}\right.$$

$$s = \text{const.}, \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{c^2-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}q^2 + \frac{c^2 s^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}\right] - \frac{K^2}{\lambda+\mu} - \frac{K'^2}{\lambda-\mu},$$

et laissons de côté la variable φ; on a

$$(4)\qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -q^2\frac{(c^2-\mu^2)\lambda}{(\lambda^2-\mu^2)^2} - \frac{c^2 s^2 \lambda}{(\lambda^2-c^2)^2(c^2-\mu^2)} + \frac{K^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{K'^2}{(\lambda-\mu)^2},$$

$$(5)\qquad \frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{q^2(c^2-\mu^2)\mu}{(\lambda^2-\mu^2)^2} + \frac{c^2 s^2 \mu}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)^2} + \frac{K^2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{K'^2}{(\lambda-\mu)^2} - \frac{q^2\mu}{\lambda^2-\mu^2}.$$

Si l'on compare l'équation (4) à l'intégrale des forces vives, qui est actuellement

$$\frac{c^2-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}q^2 + \frac{c^2 s^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)} - \frac{2K^2}{\lambda+\mu} - \frac{2K'^2}{\lambda-\mu} = 2h,$$

on obtient la condition nécessaire

$$(6)\qquad -\frac{c^2 s^2}{(\lambda^2-c^2)^2} - \frac{K^2}{\lambda} - \frac{K'^2}{\lambda} = 2h;$$

donc, dans le cas de $h > 0$, la circonstance $\lambda = \text{const.}$ ne pourra pas se présenter.

Quant à la première hypothèse, où λ décroîtrait constamment, elle exigerait que l'intégrale

$$\int (\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} = t + \tau$$

pût grandir indéfiniment, alors que λ décroîtrait; il faudrait pour cela que λ tendît vers une racine multiple de $R(\lambda)$. Or, dans l'hypothèse de $h > 0$, le polynôme $R(\lambda)$ n'admet aucune racine multiple, si ce n'est dans le cas où l'on aurait à la fois

$$s = 0, \qquad 2hc^2 + 2(K^2 + K'^2)c + \alpha = 0,$$

et cette racine multiple serait égale à c.

En effet, $R(\lambda)$ est pour $h > 0$ une somme de deux termes positifs, car $\lambda \geqq c$.

Si donc, nous excluons, comme dans le cas des mouvements képlériens, le cas où la constante des aires (s) serait nulle, ce cas particulier n'est pas à considérer.

Et l'extension du criterium rappelé plus haut est complètement justifiée.

Poursuivons cependant la recherche des conditions qui doivent être réalisées pour que le mobile ne quitte pas l'ellipsoïde de révolution qui aurait pour équation $\lambda = \text{const.}$

On déduit de la combinaison des équations (4) et (5)

$$(5\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{-q^2\mu}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{c^2 s^2 \mu}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} \left(\frac{1}{c^2 - \mu^2} - \frac{1}{\lambda^2 - c^2} \right) \\ + \frac{K^2}{\lambda(\lambda + \mu)} - \frac{K'^2}{\lambda(\lambda - \mu)}, \end{aligned} \right.$$

et le système d'équations restant en p et q est

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2} q,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q^2\mu}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{c^2 s^2 \mu}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} \left(\frac{1}{\lambda^2 - c^2} - \frac{1}{c^2 - \mu^2} \right) - \frac{K^2}{\lambda(\lambda + \mu)} + \frac{K'^2}{\lambda(\lambda - \mu)};$$

d'où l'on déduit, par élimination de dt,

$$\frac{q\,dq}{d\mu} = \frac{q^2\mu}{c^2-\mu^2} + \frac{E}{c^2-\mu^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$E = \frac{c^2 s^2 \mu}{(\lambda^2-c^2)^2} - \frac{c^2 s^2 \mu}{(c^2-\mu^2)^2} + (K'^2 - K^2) + (K^2 + K'^2)\frac{\mu}{\lambda}.$$

Or, l'équation différentielle précédente, linéaire et du premier ordre par rapport à la fonction $q^2(\mu)$, a pour intégrale générale

$$(7) \qquad q^2 = \frac{c^2 s^2 \mu^2}{(\lambda^2-c^2)^2(c^2-\mu^2)} - \frac{c^2 s^2}{(c^2-\mu^2)^2} + \frac{2(K'^2-K^2)\mu + (K^2+K'^2)\frac{\mu^2}{\lambda} + L}{c^2-\mu^2},$$

L désignant la constante arbitraire.

Que l'on compare cette valeur de q^2 à celle ci, tirée de l'intégrale des forces vives,

$$q^2 = \frac{2K^2(\lambda-\mu) + 2K'^2(\lambda+\mu) + 2h(\lambda^2-\mu^2)}{c^2-\mu^2} - \frac{c^2 s^2(\lambda^2-\mu^2)}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)^2},$$

que nous écrirons plutôt

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} q^2 = {} & \frac{2K^2(\lambda-\mu) + 2K'^2(\lambda+\mu) + 2h(\lambda^2-\mu^2)}{c^2-\mu^2} \\ & - \frac{c^2 s^2}{(c^2-\mu^2)^2} - \frac{c^2 s^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}. \end{aligned}\right.$$

En comparant les valeurs (7) et (8) et supprimant les termes qui se détruisent d'eux-mêmes ou en tenant compte de la relation (6), on trouve finalement

$$(9) \qquad L = (2K^2 + 2K'^2)\lambda + 2h\lambda^2 - \frac{c^2 s^2}{\lambda^2-c^2};$$

la variable μ a effectivement disparu, mais, puisque q_0 et $(s_0 = s)$ sont liés à h par la relation $H_0 = h$, il est clair que l'égalité (9) ne constitue pas une condition nouvelle; on a donc la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le mobile peut se mouvoir sur un ellipsoïde de révolution* $\lambda = \text{const.}$, *et il suffit pour cela que les* quantités initiales p_0, q_0, $(s_0 = s)$, λ_0, μ_0 *satisfassent aux* deux *conditions suivantes :*

$$p_0 = 0 = \lambda'_0,$$

$$-\frac{c^2 s_0^2}{(\lambda_0^2 - c^2)^2} - \frac{K^2}{\lambda_0} - \frac{K'^2}{\lambda_0} = \frac{c^2 - \mu_0^2}{\lambda_0^2 - \mu_0^2} q_2^0 + \frac{c^2 s_0^2}{(\lambda_0^2 - c^2)(c^2 - \mu_0^2)} - \frac{2K^2}{(\lambda_0 + \mu_0)} - \frac{2K'^2}{(\lambda_0 - \mu_0)} = \rho_0^2 - \frac{2K^2}{r_0} - \frac{2K'^2}{\rho_0}.$$

Pour compléter la connaissance du mouvement dans le cas précédent, on a les équations

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2} q \qquad q = \sqrt{\left[2h + \frac{2K^2}{\lambda + \mu} + \frac{2K'^2}{\lambda - \mu} - \frac{c^2 s^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}\right] \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c^2 s}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)},$$

où l'on a, comme on l'a vu,

$$\frac{c^2 s^2}{(\lambda_0 - c^2)^2} = \frac{K^2 + K'^2}{\lambda_0} - 2h;$$

on a donc, en particulier,

$$(10) \qquad \frac{d\mu}{dt} = \sqrt{\left[2h + \frac{2K^2}{\lambda + \mu} + \frac{2K'^2}{\lambda - \mu} - \frac{c^2 s^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}\right] \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}}.$$

La trajectoire est comprise entre deux parallèles de l'ellipsoïde de révolution, mais elle n'est pas nécessairement une courbe *fermée*. Nous verrons plus loin les conditions générales pour que les trajectoires soient fermées.

Cas particulier remarquable. — Il peut arriver que les deux parallèles limites se confondent et que le mobile décrive un cercle; les conditions pour qu'il en soit ainsi peuvent être indiquées *a priori*.

Il faut évidemment que le mobile, au *départ* sur une des surfaces de niveau

$$\frac{K^2}{\lambda + \mu} + \frac{K'^2}{\lambda - \mu} = \text{const.},$$

y soit précisément en un point où le plan tangent à cette surface de niveau se trouve parallèle à la droite qui joint les deux masses fixes.

Il faut, en outre, que la vitesse initiale, perpendiculaire au plan des trois masses, ait une valeur déterminée par l'intensité de la résultante des actions des deux masses, qui doit ici représenter une force centripète.

Remarque. — Un mouvement sur l'hyperboloïde $\mu = \text{const.}$, donnant dans le plan mobile un mouvement oscillatoire sur une hyperbole, pourrait se prévoir par un calcul analogue ; mais, si l'on observe que sous l'action d'une force répulsive de l'axe, inversement proportionnelle au cube de la distance à l'axe, une conique peut être décrite, l'introduction de la force apparente $\frac{g^2}{r^3}$ permet de rattacher tous ces résultats à l'élégant théorème de M. *O. Bonnet*.

V.

DIGRESSION SUR LA STABILITÉ DU MOUVEMENT DANS LE CAS DES FORCES CENTRALES.

Le rôle joué par le signe de h dans le problème précédent, abstraction faite des cas de chute, saute pour ainsi dire aux yeux quand on écrit les intégrales du problème sous la forme immédiatement fournie par la méthode de Jacobi ; il apparaît moins spontanément sous les intégrales de Lagrange.

Comme on l'a fait remarquer plus haut, aussi bien dans le cas de deux masses attirantes que dans le cas d'une seule, et sous la seule condition que la constante des aires ne soit pas nulle, le signe de l'énergie totale du mobile, h, est un criterium de la limitation ou de la non-limitation de la trajectoire.

Ce résultat, démontré pour le problème particulier qui nous occupe, sera peut-être susceptible d'une généralisation qui l'étendrait au cas d'un nombre quelconque de corps fixes, situés en ligne droite.

Il est naturel, au premier abord, de rattacher cet ordre d'idées à la fonction déjà considérée par Jacobi dans sa cinquième leçon de Dynamique.

Faisant allusion au problème du mouvement de n corps *libres,* lorsque ce problème dépend d'une fonction des forces, U, homogène et d'un degré égal à -1, par rapport aux coordonnées rectangles (x_i, y_i, z_i) de toutes les masses m_i, Jacobi envisage la fonction

$$(11) \qquad R = \Sigma m_i r_i^2 \qquad (r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette fonction R, qu'on pourrait appeler la *dispersion* du système autour de l'origine, satisfait, dans l'hypothèse rappelée plus haut, à l'équation différentielle

$$(12) \qquad \frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h.$$

Du signe éminemment positif de la fonction U, Jacobi a déduit cette remarque, applicable au système solaire, que la stabilité *n'est* compatible *qu*'avec une valeur négative de h.

Dans le tome X des *Acta mathematica,* M. Bohlin s'est servi du théorème des forces vives pour discuter dans des cas intéressants la stabilité de divers mouvements; mais, dans l'un des exemples qui précèdent des applications nouvelles, il invoque la conclusion de Jacobi pour le cas du problème du mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux masses fixes.

Cette application pure et simple n'est pas légitime; la fonction U n'est pas homogène.

Considérons le cas d'un seul corps mobile, de masse 1, de coordonnées x, y, z, soumis à l'attraction de masses *fixes* m_s, de coordonnées a_s, b_s, c_s.

En ce cas, l'équation (12) doit être remplacée par celle-ci

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h - 2\Sigma_s m_s \left(\dfrac{\partial U}{\partial a_s} a_s + \dfrac{\partial U}{\partial b_s} b_s + \dfrac{\partial U}{\partial c_s} c_s \right) \\ (R^2 = x^2 + y^2 + z^2). \end{cases}$$

On peut cependant tirer parti de cette équation pour établir une distinction des trajectoires en deux classes.

A priori, on peut en effet concevoir trois sortes de trajectoires :

1° Des trajectoires *limitées*, c'est-à-dire qui ne sortent jamais d'une région limitée de l'espace ;

2° Des trajectoires à branche infinie ; le mobile à partir d'une certaine époque s'éloigne indéfiniment de toute région limitée ;

3° Des trajectoires dans lesquelles le mobile atteint des régions de plus en plus lointaines à des époques de plus en plus reculées, mais revient cependant à *d'autres* époques de plus en plus reculées dans des régions limitées.

Or je dis que les trajectoires de cette troisième espèce sont impossibles par la forme même de l'équation (13), sauf peut-être dans le cas de $h = 0$. En effet, si l'on a affaire à une trajectoire de cette sorte, lorsque $h > 0$, il arrivera certainement un moment où l'on aura

$$R > S \quad (\text{S étant ainsi suffisamment grand}), \qquad \frac{dR}{dt} > 0$$

et, à cause de l'équation (13),

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4h + \varepsilon \quad (\lim \varepsilon = 0 \quad \text{pour } S = \infty);$$

donc $\dfrac{dR}{dt}$ a crû, donc R aussi ; et le même raisonnement pouvant être repris dès l'instant suivant, R va dès lors en croissant sans cesse, et il y aurait contradiction.

On sait d'ailleurs, par l'équation des forces vives, que, lorsque h est négatif, le mouvement est limité.

Cette remarque s'applique encore à des forces répulsives, qui seraient nulles à une distance infinie.

Supposons maintenant que les masses fixes en nombre quelconque soient disposées sur une même droite que je prendrai pour axe des z; il suffit alors de faire dans l'équation (13)

$$a_s = 0, \qquad b_s = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h - 2\Sigma_s m_s \frac{\partial U}{\partial c_s} c_s$$

ou encore

$$(14) \qquad \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{2\Sigma m_s}{\rho_s} + 4h - \frac{2\Sigma_s m_s (z - c_s) c_s}{\rho_s^3},$$

en posant

$$\rho_s^2 = x^2 + y^2 + (z - c_s)^2, \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

On peut aussi former $\frac{d^2 r^2}{dt^2}$; on trouve ainsi

$$(15) \qquad \frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2U + 4h + \frac{2\Sigma m_s (z - c_s)^2}{\rho_s^3} - 2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Or tout ce qu'il m'a paru possible de déduire de l'égalité précédente, considérée indépendamment de toute recherche sur les intégrales du problème, c'est le résultat suivant. Lorsque h est > 0, ou la trajectoire est illimitée, ou bien on peut assigner une limite inférieure et permanente à l'étendue de l'oscillation du mobile dans une direction parallèle à l'axe qui porte les masses fixes. La détermination de cette limite dépend très simplement de la valeur de h et de la valeur de la constante des aires.

Je considère la racine positive $\frac{1}{r_0}$ de l'équation suivante, où l'on a fait $M = \Sigma m_s$ et où g est la constante des aires,

$$\frac{M}{r} + h - \frac{1}{2}\frac{g^2}{r^2} = 0.$$

On voit de suite, d'après l'intégrale des forces vives, que l'on aura à chaque instant du mouvement

$$\rho_s > r > r_0.$$

Si donc on désigne par $|x|$ la valeur absolue de x, on aura aussi

$$\frac{h}{\left|\Sigma m_s \frac{z-c_s}{\rho_s^3}\right|} > \frac{h}{\Sigma \frac{m_s}{\rho_s^2}} > \frac{h}{\frac{\mathrm{M}}{r_0^2}}$$

ou bien encore, en posant $\beta = \frac{h r_0^2}{\mathrm{M}}$,

$$\frac{h}{\left|\frac{d^2 z}{dt^2}\right|} > \beta.$$

Ceci posé, une limite inférieure de l'excursion du mobile sera égale à 4β, comme je vais le démontrer.

A cet effet, envisageons une fonction Ω définie par l'équation

$$\frac{d\Omega}{dt} = 2\frac{dz}{dt}\Phi(z).$$

Si la fonction $\Phi(z)$ est finie entre les limites où z varie, limites définies si la trajectoire est *limitée*, la fonction Ω, comme z, restera finie pour toutes valeurs de t; nous tirons alors de l'équation (15) et de l'équation précédente celle-ci

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2(r^2+\Omega)}{dt^2} &= 2\mathrm{U} + 4h + 2\Sigma_s m_s \frac{(z-c_s)^2}{\rho_s^3} \\ &\quad + 2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 [\Phi'(z) - 1] + 2\frac{d^2 z}{dt^2}\Phi(z). \end{aligned}\right.$$

Cherchons à choisir la fonction Φ de manière que :

1° La somme $2\mathrm{U} + 2h + 2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 [\Phi'(z) - 1]$ soit positive constamment;

2° La somme $2h + 2\frac{d^2 z}{dt^2}\Phi(z)$ soit aussi constamment positive.

On sera certain de satisfaire à la première condition si la différence $\Phi'(z) - 1$ est toujours moindre en valeur absolue que le minimum du rapport

$$\frac{\mathrm{U}+h}{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \frac{\mathrm{U}+h}{2\mathrm{U} + 2h - \frac{g^2}{r^2}};$$

désignons ce minimum par α, en remarquant toutefois qu'il est nécessairement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Quant à la seconde condition, elle sera remplie si la valeur absolue de $\Phi(z)$ est moindre que β.

Cherchons donc si l'on peut déterminer la fonction $\Phi(z)$ de manière que l'on ait constamment

$$-\alpha < \Phi'(z) - 1 < \alpha,$$
$$-\beta < \Phi(z) < \beta,$$

et supposons d'abord $\alpha < 1$.

Si l'on fait

$$\Phi(z) = z(1-\alpha) + \alpha\psi(z) + \mathrm{P} \qquad (\mathrm{P} = \text{const.}),$$

les deux inégalités précédentes deviennent

$$0 < \psi'(z) < 2,$$
$$-\beta < z(1-\alpha) + \alpha\psi(z) + \mathrm{P} < \beta.$$

Comme la fonction $\psi(z)$ est croissante, on pourra toujours choisir la valeur de la constante P pour satisfaire à l'inégalité précédente, *pourvu que* la fonction croissante $z(1-\alpha) + \alpha\psi(z)$ ait une oscillation inférieure à 2β.

Nous prendrons, par exemple (et c'est le cas le plus favorable),

$$\psi(z) = 0.$$

On satisferait alors aux conditions requises, si l'oscillation de z était moindre que $4\beta < \frac{2\beta}{1-\alpha}$; mais alors l'équation (16) fournirait l'inégalité suivante

$$\frac{d^2(r^2+\Omega)}{dt^2} > 2\Sigma_s m_s \frac{(z-c_s)^2}{\rho_s^3},$$

d'où l'on conclurait que la quantité $r^2 + \Omega$ devrait croître indéfiniment, ce qui est contraire à notre supposition du mouvement limité.

Nous avons supposé $\alpha < 1$; si l'on avait $\alpha \geqq 1$, on voit par l'équation (15) que r^2 devrait croître indéfiniment.

Ainsi, lorsque le mouvement est limité, mais que h est > 0, il est impossible d'admettre que l'oscillation de z ne surpasse pas 4β.

D'ailleurs, lorsque h n'est pas nul, nous avons vu qu'il n'y a que deux sortes de trajectoires.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Lorsque h est > 0, la trajectoire est, ou bien infinie, ou bien, si elle est limitée, l'oscillation du mobile parallèlement à l'axe des masses est supérieure à 4β.

VI.

INVERSION.

Revenons au problème restreint, qui va seul nous occuper maintenant. Pour simplifier, nous supposerons $c = 1$, ce qui revient à prendre pour coordonnées, au lieu de λ et μ, les rapports $\frac{\lambda}{c}, \frac{\mu}{c}$.

Nous avons ainsi

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} R(\lambda) &= 2h\lambda^4 + 2(K^2 + K'^2)\lambda^3 \\ &\quad + (\alpha - 2h)\lambda^2 - 2(K^2 + K'^2)\lambda - \alpha - g^2, \\ S(\mu) &= 2h\mu^4 + 2(K^2 - K'^2)\mu^3 \\ &\quad + (\alpha - 2h)\mu^2 - 2(K^2 - K'^2)\mu - \alpha - g^2, \end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \int \frac{g\,d\lambda}{(\lambda^2 - 1)\sqrt{R(\lambda)}} + \int \frac{g\,d\mu}{(1 - \mu^2)\sqrt{S\mu}} + \text{const.}, \\ &\int \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = \text{const.}, \\ &\int \frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = t + \tau \end{aligned}\right.$$

et

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\sqrt{R(\mu)}}{\lambda^2-\mu^2},\\ \mu' &= \frac{\sqrt{S(\mu)}}{\lambda^2-\mu^2},\\ \varphi' &= \frac{g}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}.\end{aligned}\right.$$

Proposons-nous d'évaluer les coordonnées φ, λ, μ et l'instant t au moyen d'une même variable auxiliaire.

A cet effet, nous écrirons les polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ en mettant en évidence les coefficients numériques du binôme

$$(17\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} R(\lambda) &= A_0\lambda^4 + 4A_1\lambda^3 + 6A_2\lambda^2 + 4A_3\lambda + A_4,\\ S(\mu) &= A_0\mu^4 + 4B_1\mu^3 + 6A_2\mu^2 + 4B_3\mu + A_4,\\ A_0 &= 2h,\\ A_1 &= \frac{K^2+K'^2}{2} = -A_3, \qquad B_1 = \frac{K^2-K'^2}{2} = -B_3,\\ A_2 &= \frac{\alpha-2h}{6},\\ A_4 &= -\alpha-g^2.\end{aligned}\right.$$

Les notations précédentes sont, comme on voit, à très peu près les mêmes que celles d'Halphen, dans son *Traité des fonctions elliptiques* (p. 119).

Conformément aux mêmes notations, je désignerai par S et T les deux invariants de poids respectifs 6 et 4 du polynôme

$$R(\lambda)$$

et qui ont, comme on sait, pour expressions

$$\left\{\begin{aligned} S &= A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2,\\ T &= A_0A_2A_4 + 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4.\end{aligned}\right.$$

En tenant compte des relations particulières au problème dont nous nous occupons, savoir

$$\begin{cases} A_3 = -A_1, \\ A_4 = -A_0 - 6A_2 - g^2, \end{cases}$$

nous aurons

$$\begin{cases} S = -A_0^2 - 6A_2A_0 - g^2A_0 + 4A_1^2 + 3A_2^2, \\ T = -A_0^2A_2 - 6A_0A_2^2 + 4A_2A_1^2 + g^2A_1^2 - g^2A_0A_2 - A_2^3; \end{cases}$$

nous poserons

$$g_2 = \frac{S}{A_0^2}, \qquad g_3 = \frac{T}{A_0^3},$$

et nous désignerons par γ_2 et γ_3 les quantités analogues aux quantités g_2, g_3 et qui s'en déduisent par le changement dans S et T de A_1 en B_1.

Si alors on envisage la fonction de u désignée par M. Weierstrass sous la notation de

$$\wp(u; g_2, g_3) \quad \text{et si l'on fait} \quad \frac{\partial}{\partial u}\wp(u; g_2, g_3) = \wp'(u),$$

puis, si l'on détermine un argument v par les deux relations *concordantes*

$$(20)\quad \begin{cases} \wp(v; g_2, g_3) = \dfrac{A_1^2 - A_0A_2}{A_0^2}, \\ \wp'(v; g_2, g_3) = \dfrac{A_3A_0^2 - 3A_0A_1A_2 + 2A_1^3}{A_0^3} = \dfrac{A_1}{A_0^3}(2A_1^2 - 3A_0A_2 - A_0^2), \end{cases}$$

nous aurons, comme on sait,

$$(21)\quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{A_1}{A_0} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'u - \wp'v}{\wp u - \wp v}, \\ \sqrt{R(\lambda)} = \sqrt{A_0}\,[\wp(u) - \wp(u+v)], \\ u = \theta + \text{const.}, \\ \dfrac{\theta}{\sqrt{A_0}} = \displaystyle\int \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}. \end{cases}$$

Pour abréger, je désignerai par $P(u)$ la quantité

$$\wp(u; \gamma_2, \gamma_3)$$

et par w un argument analogue à v, c'est-à-dire déterminé par les deux relations concordantes

$$(20\,bis)\qquad \begin{cases} \wp(w; \gamma_2; \gamma_3) = \dfrac{B_1^2 - A_0 A_2}{A_0^2}, \\ \wp'(w; \gamma_2, \gamma_3) = \dfrac{B_1}{A_0^3}(2B_1^2 - 3A_0A_2 - A_0^2), \end{cases}$$

et nous aurons encore les formules d'inversion analogues aux précédentes

$$(21\,bis)\qquad \begin{cases} \mu = -\dfrac{B_1}{A_0} + \dfrac{P'U - P'w}{PU - Pw}, \\ \sqrt{S(\mu)} = \sqrt{A_0}\,[PU - P(u+w), \\ U = \theta + \text{const.}, \\ \dfrac{\theta}{\sqrt{A_0}} = \displaystyle\int \dfrac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, \end{cases}$$

en remarquant que si la valeur de θ est la même que dans les formules précédentes, la constante ajoutée à θ peut différer, en sorte que la valeur de U diffère d'une constante de la valeur attribuée à u dans les formules précédentes.

La quantité désignée par θ est bien la même dans les deux groupes de formules, comme cela résulte des équations du mouvement.

A chaque fonction $\wp(u)$ sont associées, comme on sait, deux fonctions $\zeta(u)$ et $\sigma(u)$, fonctions de u, g_2, g_3, et qui sont ainsi définies

$$\frac{\partial \zeta(u)}{\partial u} = -\wp(u),$$

$$\frac{1}{\sigma u}\frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} = \zeta(u).$$

Dans ce qui va suivre, pour ne pas mentionner constamment les invariants g_2, g_3, ou γ_2, γ_3, j'écrirai, comme dans les deux équations précédentes, simplement $\zeta(u)$, $\sigma(u)$, au lieu de $\zeta(u;\, g_2,\, g_3)$ et $\sigma(u;\, g_2,\, g_3)$; et je remplacerai $\zeta(u)$ et $\sigma(u)$ par $Z(u)$ et $\Sigma(u)$ pour désigner les fonctions analogues relatives au changement de g_2, g_3 en γ_2, γ_3.

En d'autres termes, nous poserons

$$\begin{array}{lll} \zeta(u) = \zeta(u;\, g_2, g_3), & \sigma(u) = \sigma(u;\, g_2,\, g_3), & \\ Z(u) = \zeta(u;\, \gamma_2, \gamma_3), & \Sigma(u) = \sigma(u;\, \gamma_2, \gamma_3), & \\ \omega \text{ et } \omega' \text{ demi-périodes de } p, & \zeta(\omega) = \eta, & \zeta(\omega') = \eta', \\ \Omega \text{ et } \Omega' \text{ demi-périodes de } P, & Z(\Omega') = H, & Z(\Omega') = H'. \end{array}$$

On vient d'exprimer λ et μ en fonction uniforme d'une même variable θ: il reste maintenant à exprimer le temps t en fonction de cette même variable.

Comme on va le voir, on ne trouvera pas, pour exprimer le temps, une fonction de θ uniforme au point de vue strictement analytique, mais elle sera uniforme dans le domaine des valeurs réelles.

Reprenons la troisième des équations (18)

$$t + \tau = \int \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{S(\mu)}},$$

c'est-à-dire, en introduisant la variable θ qui vient d'être définie,

$$t + \tau = \frac{1}{\sqrt{A_0}} \int (\lambda^2 - \mu^2)\, d\theta,$$

on a, d'après les valeurs de λ et μ,

$$\lambda^2 = \frac{A_1^2}{A_0^2} - 2\,\frac{A_1}{A_0}\,\frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} + \frac{1}{4}\left[\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right]^2,$$
$$\mu^2 = \frac{B_1^3}{A_0^2} - 2\,\frac{B_1}{A_0}\,\frac{1}{2}\,\frac{P'U - P'w}{PU - Pw} + \frac{1}{4}\left[\frac{P'U - P'w}{PU - Pw}\right]^2.$$

L'intégrale cherchée peut alors se calculer immédiatement, si l'on a égard aux relations fondamentales de la théorie des fonctions p, ζ, σ, savoir

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v,\\
&\frac{1}{4}\left[\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right]^2 = p(u+v) + pu + pv,\\
&\zeta' u = -\,pu,\\
&\frac{d\log\sigma u}{du} = \zeta u.
\end{aligned}\right.$$

On aura ainsi

$$\int \lambda^2\, d\theta = \left[\frac{A_1^3}{A_0^2} + 2\frac{A_1}{A_0}\zeta v + pv\right]\theta - 2\frac{A_1}{A_0}\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} - \zeta(u+v) - \zeta u,$$

$$\int \mu^2\, d\theta = \left[\frac{B_1^2}{A_0^2} + 2\frac{B_1}{A_0}Zw + Pw\right]\theta - 2\frac{B_1}{A_0}\log\frac{\Sigma(U+w)}{\Sigma U} - Z(U+w) - Z(U),$$

et, en se reportant aux valeurs de $p(v)$ et $P(w)$, on a enfin

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{A_0}\,(t+\tau) = {}& 2\left[\frac{A_1^2 - B_1^2}{A_0^2} + \frac{A_1\zeta v - B_1 Zw}{A_0}\right]\theta\\
&+ 2\frac{B_1}{A_0}\log\frac{\Sigma(U+w)}{\Sigma U} - 2\frac{A_1}{A_0}\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\\
&+ Z(U+w) + Z(U) - \zeta(u+v) - \zeta u,
\end{aligned}\right.$$

en se rappelant que $u = \theta + d$, $U = \theta + d'$; d et d' désignant des constantes.

Passons maintenant à la recherche de l'expression de φ en fonction de θ. A cet effet, nous écrirons la première des formules (18) de la manière suivante

$$\sqrt{A_0}\,\frac{2\varphi}{g} = \int\left[\left(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda+1}\right) - \left(\frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\mu+1}\right)\right]d\theta,$$

et nous allons mettre chacune des quatre fractions simples qui composent le crochet sous une forme appropriée à l'intégration indiquée.

Il suffit de se reporter pour cela aux diverses transformations de la fraction

$$\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

Parmi ces transformations, nous choisirons la suivante

$$(23)\qquad \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} + \text{const.} = \frac{p'\frac{v}{2}}{pm - p\frac{v}{2}} \frac{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - pm}{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)},$$

dans laquelle la constante m du second membre est liée à la constante additive du premier membre; si, par exemple, on désigne par u_0 une racine du premier membre, on pourra prendre, à des périodes près,

$$\pm m = u_0 + \frac{v}{2}.$$

Nous appliquerons ainsi la formule (23) aux quatre fonctions $\lambda - 1$, $\lambda + 1$, $\mu - 1$, $\mu + 1$ et nous poserons, en introduisant quatre constantes définies a, b, α, β,

$$(23\,bis)\left\{\begin{aligned}
\lambda - 1 &= \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} - \frac{A_1}{A_0} - 1 = \frac{p'\frac{v}{2}}{pa - p\frac{v}{2}} \frac{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p(a)}{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)},\\
\lambda + 1 &= \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} - \frac{A_1}{A_0} + 1 = \frac{p'\frac{v}{2}}{pb - p\frac{v}{2}} \frac{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p(b)}{p\left(u + \frac{v}{2}\right) - p\left(\frac{v}{2}\right)},\\
\mu - 1 &= \frac{1}{2}\frac{P'U - P'w}{PU - Pw} - \frac{B_1}{A_0} - 1 = \frac{P'\frac{w}{2}}{P\alpha - P\frac{w}{2}} \frac{P\left(U + \frac{w}{2}\right) - P(\alpha)}{P\left(U + \frac{w}{2}\right) - P\left(\frac{w}{2}\right)},\\
\mu + 1 &= \frac{1}{2}\frac{P'U - P'w}{PU - Pw} - \frac{B_1}{A_0} + 1 = \frac{P'\frac{w}{2}}{P\beta - P\frac{w}{2}} \frac{P\left(U + \frac{w}{2}\right) - P(\beta)}{P\left(U + \frac{w}{2}\right) - P\frac{w}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

L'avantage de l'emploi de la transformation (23), où le second membre est une fraction linéaire de $p\left(u + \frac{v}{2}\right)$, consiste en ce que non seulement les quatre fonctions envisagées, mais encore leurs inverses s'expriment par des fractions de même forme, c'est-à-dire par des fractions éminemment propres à achever l'intégration.

Écrivons donc l'équation (23) sous la forme suivante

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}+\text{const.}}=\frac{pm-p\frac{v}{2}}{p'\frac{v}{2}}+\frac{\left[pm-p\frac{v}{2}\right]^2}{p'\frac{v}{2}p'm}\,\frac{p'm}{p\left(u+\frac{v}{2}\right)-pm},$$

et remarquons que l'on a identiquement

$$\zeta(u+m)-\zeta(u-m)-2\zeta m=\frac{-p'm}{pu-pm};$$

nous aurons alors, pour remplacer les équations (23 *bis*), les suivantes :

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda-1}&=-\frac{\left(pa-p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}p'a}\left[\zeta\left(u+\frac{v}{2}+a\right)-\zeta\left(u+\frac{v}{2}-a\right)-2\zeta a\right]\\
&\quad+\frac{pa-p\frac{v}{2}}{p'\frac{v}{2}},\\
\frac{1}{\lambda+1}&=-\frac{\left(pb-p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}p'b}\left[\zeta\left(u+\frac{v}{2}+b\right)-\zeta\left(u+\frac{v}{2}-b\right)-2\zeta b\right]\\
&\quad+\frac{pb-p\frac{v}{2}}{p'\frac{v}{2}},\\
\frac{1}{\mu-1}&=-\frac{\left(P\alpha-P\frac{w}{2}\right)^2}{P'\frac{w}{2}P'\alpha}\left[Z\left(U+\frac{w}{2}+\alpha\right)-Z\left(U+\frac{w}{2}-\alpha\right)-2Z\alpha\right]\\
&\quad+\frac{P\alpha-P\frac{w}{2}}{P'\frac{w}{2}},\\
\frac{1}{\mu+1}&=-\frac{\left(P\beta-P\frac{w}{2}\right)^2}{P'\frac{w}{2}P'\alpha}\left[Z\left(U+\frac{w}{2}+\beta\right)-Z\left(U+\frac{w}{2}-\beta\right)-2Z\beta\right]\\
&\quad+\frac{P\beta-P\frac{w}{2}}{P'\frac{w}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de φ et en ayant encore une fois égard à l'identité $\int \zeta u\, du = \log \sigma u$, nous aurons la valeur suivante de φ, à une constante près,

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\varphi}{g} \times \sqrt{A_0} = \Bigg[& \frac{pa - pb}{p'\frac{v}{2}} + \frac{P\beta - P\alpha}{P'\frac{w}{2}} \\ & + 2\frac{\left(pa - p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}p'a}\zeta a - 2\frac{\left(pb - p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}p'b}\zeta b \\ & + 2\frac{\left(P\beta - P\frac{w}{2}\right)^2}{P'\frac{w}{2}P'\beta}Z\beta - 2\frac{\left(P\alpha - P\frac{w}{2}\right)^2}{P'\frac{w}{2}P'\alpha}Z\alpha \Bigg]\theta \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(pb - p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}p'a} \log \frac{\sigma\left(u + \frac{v}{2} + b\right)}{\sigma\left(u + \frac{v}{2} - b\right)} \\ & + \frac{\left(P\alpha - P\frac{w}{2}\right)^2}{P'\frac{w}{2}P'\alpha} \log \frac{\Sigma\left(U + \frac{w}{2} + \alpha\right)}{\Sigma\left(U + \frac{w}{2} - \alpha\right)} \\ & - \frac{\left(pa - p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}p'a} \log \frac{\sigma\left(u + \frac{v}{2} + a\right)}{\sigma\left(u + \frac{v}{2} - a\right)} \\ & - \frac{\left(P\beta - P\frac{w}{2}\right)^2}{P'\frac{w}{2}P'\beta} \log \frac{\Sigma\left(U + \frac{w}{2} + \beta\right)}{\Sigma\left(U + \frac{w}{2} - \beta\right)}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Les formules (21), (21 *bis*), (22), (25) résolvent complètement le problème de l'inversion, tel que nous nous l'étions proposé.

La formule (22) fait connaître l'époque t en fonction de la variable θ, puis les formules (21), (21 *bis*) et (25), dans lesquelles on fera, comme dans la formule (22),

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \theta + d, \\ U &= \theta + d', \end{aligned} \right.$$

font connaître les coordonnées λ, μ, φ en fonction de la même variable θ.

CAS OU L'ÉNERGIE EST NULLE.

La transformation précédente suppose essentiellement h, c'est-à-dire A_0, différent de zéro. Sans doute, on pourrait modifier les formules précédentes de façon à pouvoir y supposer

$$\lim A_0 = 0;$$

mais l'inversion directe est aussi facile à faire que dans le cas général. Nous avons ici

$$(26)\quad \begin{cases} R(\lambda) = 4A_1\lambda^3 + 6A_2\lambda^2 - 4A_1\lambda + A_4, \\ S(\mu) = 4B_1\mu^3 + 6B_2\mu^2 - 4B_1\mu + A_4 \qquad A_4 = -6A_2 - g^2. \end{cases}$$

Nous poserons

$$(27)\quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1} + p(u; g_2, g_3), \\ \mu = -\frac{1}{2}\frac{A_2}{B_1} + P(U; \gamma_2, \gamma_3), \end{cases}$$

ce qui transforme les polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ en polynômes de $p(u)$, $P(U)$ privés de second terme

$$(28)\quad \begin{cases} R(\lambda) = A_1\left(4p^3u - \dfrac{4A_1^2 + 3A_2^2}{A_1^2}\,pu + \dfrac{A_2^3 - 4A_2A_1^2 - g^2A_1^2}{A_1^3}\right), \\ S(\mu) = B_1\left(4P^3U - \dfrac{4B_1^2 + 3A_2^2}{B_1^2}\,PU + \dfrac{A_2^3 - 4A_2B_1^2 - g^2B_1^2}{B_1^3}\right), \end{cases}$$

en sorte que, en faisant

$$(29)\quad \begin{cases} g_2 = \dfrac{4A_1^2 + 3A_2^2}{A_1^2}, \qquad g_3 = \dfrac{4A_2A_1^2 + g^2A_1^2 - A_2^3}{A_1^3}, \\ \gamma_2 = \dfrac{4B_1^2 + 3A_2^2}{B_1^2}, \qquad \gamma_3 = \dfrac{4A_2B_1^2 + g^2B_1^2 - A_2^3}{B_1^3}, \end{cases}$$

nous aurons, en omettant toujours les invariants sous les signes p et P,

$$\sqrt{R(\lambda)} = \sqrt{A_1}\, p'u,$$
$$\sqrt{S(\mu)} = \sqrt{B_1}\, P'U$$

[d'après la définition même des fonctions $p(u)$]; et comme, d'après (27),

$$d\lambda = p'u\, du,$$
$$d\mu = P'U\, dU,$$

nous aurons

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} = \frac{du}{\sqrt{A_1}},$$
$$\frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = \frac{dU}{\sqrt{B_1}},$$

et, en tenant compte de la seconde des équations (18), nous pourrons désigner par ψ une variable analogue à la variable $\frac{\theta}{\sqrt{A_0}}$ rencontrée dans le cas général, et nous aurons

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{\sqrt{A_1}} = \dfrac{dU}{\sqrt{B_1}} = d\psi, \\ u = \sqrt{A_1}\,\psi + D, \\ U = \sqrt{B_1}\,\psi + D'. \end{cases}$$

On voit ainsi que les arguments u et U s'expriment encore par deux fonctions linéaires de la variable ψ, mais les deux coefficients de ψ sont différents dans ces deux fonctions.

A part ce changement, la marche du calcul est la même que dans le cas général.

Des équations (27), on tire

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{A_2^2}{A_1^2} - \frac{A_2}{A_1}\, pu + p^2 u,$$
$$\mu^2 = \frac{1}{4}\frac{A_2^2}{B_1^2} - \frac{A_2}{B_1}\, PU + P^2 U.$$

Mais, en introduisant les dérivées secondes $\wp'' u$ et $\mathrm{P}'' \mathrm{U}$; en ayant égard aux identités bien connues

$$\left\{\begin{aligned} \wp^2 u &= \tfrac{1}{6}(\wp'' u + \tfrac{1}{2} g_2), \\ \mathrm{P}^2 \mathrm{U} &= \tfrac{1}{6}(\mathrm{P}'' \mathrm{U} + \tfrac{1}{2} \gamma_2), \end{aligned}\right.$$

et, enfin, en tenant compte des valeurs de g_2, γ_2, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{A_2^2}{A_1^2} - \frac{A_2}{A_1}\wp u + \frac{1}{6}\wp'' u, \\ \mu^2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{A_2^2}{B_1^2} - \frac{A_2}{B_1}\mathrm{PU} + \frac{1}{6}\mathrm{P}'' \mathrm{U}. \end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs dans la troisième des équations (18), et tenant compte des équations (30), nous aurons

$$(31) \quad t + \tau = \frac{1}{2}\left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - \frac{A_2^2}{B_1^2}\right)\psi + \frac{A_2}{A_1\sqrt{A_1}}\zeta u - \frac{A_2}{B_1\sqrt{B_1}}\mathrm{ZU} + \frac{1}{6}\frac{\wp' u}{\sqrt{A_1}} - \frac{1}{6}\frac{\mathrm{P}'\mathrm{U}}{\sqrt{B_1}}.$$

Pour calculer l'angle φ, nous aurons encore

$$\frac{2\varphi}{g} = \int\left[\left(\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda + 1}\right) - \left(\frac{1}{\mu - 1} - \frac{1}{\mu + 1}\right)\right] d\psi,$$

mais ici nous avons pour λ et μ les valeurs (27).

Si alors on détermine quatre constantes a', b', α', β' par les conditions

$$(32) \qquad \left\{\begin{aligned} \wp(a') &= 1 + \frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}, \\ \wp(b') &= -1 + \frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}, \\ \mathrm{P}(\alpha') &= 1 + \frac{1}{2}\frac{A_2}{B_1}, \\ \mathrm{P}(\beta') &= -1 + \frac{1}{2}\frac{A_2}{B_1}, \end{aligned}\right.$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} \lambda - 1 &= \wp u - \wp a', \\ \lambda + 1 &= \wp u - \wp b', \\ \mu - 1 &= \mathrm{PU} - \mathrm{P}\alpha', \\ \mu + 1 &= \mathrm{PU} - \mathrm{P}(\beta'), \end{aligned}\right.$$

et, en utilisant encore une fois l'identité

$$\frac{1}{pu - pm} = \frac{1}{p'm}\frac{p'm}{pu - pm} = \frac{1}{p'm}[\zeta(u-m)\psi - \zeta(u+m) + 2\zeta m],$$

nous aurons

$$\frac{2\varphi}{g} = \int \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p'a'}[\zeta(u-a') - \zeta(u+a') + 2\zeta a'] - \frac{1}{P'\alpha'}[Z(U-\alpha') - Z(U+\alpha') + 2Z\alpha'] \\ -\frac{1}{p'b'}[\zeta(u-b') - \zeta(u+b') + 2\zeta b'] + \frac{1}{P'\beta'}[Z(U-\beta') - Z(U+\beta') + 2Z\beta'] \end{array} \right\} d\psi,$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (30), et à une constante près,

$$(33)\quad \frac{2\varphi}{g} = \left(\frac{2\zeta a'}{p'a'} - \frac{2\zeta b'}{p'b'} - \frac{2Z\alpha'}{P'\alpha'} - \frac{2Z\beta'}{P'\beta'}\right)\psi + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{p'a'\sqrt{A_1}}\log\frac{\sigma(u-a')}{\sigma(u+a')}, \\ -\frac{1}{p'b'\sqrt{A_1}}\log\frac{\sigma(u-b')}{\sigma(u+b')}, \\ -\frac{1}{P'\alpha'\sqrt{B_1}}\log\frac{\Sigma(U-\alpha')}{\Sigma(U+\alpha')}, \\ +\frac{1}{P'\beta'\sqrt{B_1}}\log\frac{\Sigma(U-\beta')}{\Sigma(U+\beta')}. \end{array} \right.$$

Les équations (27), (30), (31), (33) résolvent la question de l'inversion, lorsque l'énergie $h = 0$.

Il y a cependant un cas *très particulier* où les formules précédentes tomberaient en défaut, c'est le cas où, l'énergie totale étant nulle, deux corps fixes se trouveraient avoir deux masses égales, car on aurait $B_1 = 0$.

En ce cas μ, s'exprime par une fonction trigonométrique de ψ et l'expression de λ au moyen de u reste ce qu'elle était tout à l'heure, dans la première des équations (27). Mais l'expression de μ va se modifier et, par suite, les expressions de t et de φ vont être également changées.

Voici le calcul pour ce cas tout à fait exceptionnel.

On a

$$S(\mu) = 6A_2\mu^2 - 6A_2 - g^2;$$

posons

$$(34)\qquad \mu = \sqrt{\frac{6A_2+g^2}{6A_2}}\sin U,$$

on aura

$$\sqrt{S(\mu)} = \sqrt{-6A_2-g^2}\cos U,$$

$$d\psi = \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = \frac{dU}{\sqrt{-6A_2}}$$

et, par suite,

$$(35)\qquad U = \sqrt{-6A_2}\,\psi + \text{const.}$$

Nous aurons donc

$$\begin{cases} \lambda^2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{A_2^2}{A_1^2} - \dfrac{A_2}{A_1}\,p u + \dfrac{1}{6}\,p'' u, \\ \mu^2 = \left(1 + \dfrac{g^2}{6A_2}\right)\dfrac{1-\cos 2U}{2}, \end{cases}$$

et enfin, en formant l'intégrale $\int(\lambda^2-\mu^2)\,d\psi$, on aura

$$(36)\qquad \begin{cases} t+\tau = \left(-\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}\dfrac{A_2^2}{A_1^2} - \dfrac{g^2}{12A_2}\right)\psi \\ \qquad + \dfrac{A_2}{A_1\sqrt{A_1}}\,\zeta u + \dfrac{1}{6}\dfrac{p' u}{\sqrt{A_1}} - \left[\left(1+\dfrac{g^2}{6A_2}\right)\dfrac{\sin U}{2\sqrt{-6A_2}}\right]. \end{cases}$$

Il reste à calculer l'angle φ, donné par la formule

$$\frac{2\varphi}{g} = \int\left[\left(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda+1}\right) - \left(\frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\mu+1}\right)\right]d\psi.$$

La première partie de l'intégrale se calcule exactement comme tout à l'heure au moyen des constantes a' et b', qui gardent leur signification, et l'on a

$$\int\left(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda+1}\right)d\psi$$
$$= \left(\frac{2\zeta a'}{p' a'} - \frac{2\zeta b'}{p' b'}\right)\psi + \frac{1}{p' a'\sqrt{A_1}}\log\frac{\sigma(u-a')}{\sigma(u+a')} - \frac{1}{p' b'\sqrt{A_1}}\log\frac{\sigma(u-b')}{\sigma(u+b')};$$

pour calculer la seconde partie de l'intégrale, savoir

$$\int \frac{1}{1-\mu^2}\, d\psi = \frac{6A_2}{6A_2+g^2} \frac{1}{\dfrac{6A_2}{6A_2+g^2} - \sin^2 U}\, d\psi,$$

et, pour mieux accentuer l'analogie des intégrations, nous poserons

$$\sqrt{\frac{6A_2}{6A_2+g^2}} = \sin\alpha'',$$

et comme $\sqrt{\dfrac{6A_2}{6A_2+g^2}}$ est > 1, l'arc α'' sera imaginaire de la forme $\frac{\pi}{2} + i\gamma$; nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\dfrac{6A_2}{6A_2+g^2} - \sin^2 U} &= \frac{2}{\cos 2U - \cos 2\alpha''} \\
&= \frac{2}{\sin 2\alpha''} \frac{\sin 2\alpha'' - \sin 2U}{\cos 2U - \cos 2\alpha''} - \frac{1}{\sin 2\alpha''} \frac{d}{dU} \log(\cos 2U - \cos 2\alpha'') \\
&= \frac{2}{\sin 2\alpha''} \frac{d}{dU} \log \sin(\alpha'' + U) \\
&\quad - \frac{1}{\sin 2\alpha''} \frac{d}{dU} \log \sin(\alpha'' - U)\sin(\alpha'' + U) \\
&= \frac{1}{\sin 2\alpha''} \frac{d}{dU} \log \frac{\cos(U + i\gamma)}{\cos(U - i\gamma)},
\end{aligned}$$

Donc, en ayant égard à l'équation (35), on trouve

$$\int \frac{1}{1-\mu^2}\, d\psi = \frac{6A_2}{6A_2+g^2} \frac{1}{\sqrt{-6A_2}} \frac{1}{\sin 2\alpha''} \log \frac{\cos(U+i\gamma)}{\cos(U-i\gamma)}.$$

Cette expression est d'ailleurs parfaitement réelle, car les deux facteurs $\frac{1}{\sin 2\alpha''}$ et $\log\frac{\cos(U+i\gamma)}{\cos(U-i\gamma)}$ sont tous deux *purement* imaginaires.

Nous aurons donc cette valeur de φ

$$(37) \left\{ \begin{aligned}
\frac{2\varphi}{g} = \left(\frac{2\zeta a'}{\wp' a'} - \frac{2\zeta b'}{\wp' b'}\right)\psi + \frac{1}{\wp' a' \sqrt{A_1}} \log \frac{\sigma(u-a')}{\sigma(u+a')} - \frac{1}{\wp' b' \sqrt{A_1}} \log \frac{\sigma(u-b')}{\sigma(u+b')} \\
- \frac{6A_2}{6A_2+g^2} \frac{1}{\sqrt{-6A_2}} \frac{1}{\sin 2i\gamma} \log \frac{\cos(U+i\gamma)}{\cos(U-i\gamma)}.
\end{aligned} \right.$$

La première des équations (27) et les équations (34), (35), (36),

(37) résolvent le problème de l'inversion dans le cas éminemment parti culier que nous avons traité en dernier lieu.

AUTRES CAS PARTICULIERS.

D'ailleurs, dans le cas général déjà traité, des sous-cas particuliers peuvent se présenter qui ne changent pas néanmoins l'allure des formules trouvées.

C'est ainsi qu'il peut arriver que l'une des quantités désignées par a, b soit une demi-période de la fonction $\wp(u)$ ou que l'une des quantités analogues α, β soit une demi-période de la fonction $\mathrm{P}(\mathrm{U})$; le changement qui en résulte ne peut alors affecter que la formule (25). Reprenons en effet l'équation (23), sous sa forme déjà employée, mais en évitant l'introduction du facteur $\wp' m$, qui devient nul si $m =$ une demi-période.

Nous aurons

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u + \wp v} + \text{const.}} = \frac{\wp m - \wp \frac{v}{2}}{\wp' \frac{v}{2}} + \frac{\left(\wp m - \wp \frac{v}{2}\right)^2}{\wp' \frac{v}{2}} \frac{1}{\wp\left(u + \frac{v}{2}\right) - \wp m};$$

par hypothèse, $\wp(m)$ est égale à l'une des racines e_i du trinôme

$$4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3;$$

la fraction à transformer pour l'intégration est alors

$$\frac{1}{\wp\left(u + \frac{v}{2}\right) - e_i}.$$

En appelant e_j, e_k les deux autres racines, on a, comme on sait, l'identité

$$\frac{1}{\wp\left(u + \frac{v}{2}\right) - e_i} = \frac{\wp\left(u + \frac{v}{2} - \omega_i\right) - e_i}{(e_i - e_j)(e_i - e_k)},$$

en sorte que, si, pour fixer les idées, nous supposons que la circonstance dont nous parlons se présentait pour l'argument a, on aurait

$$\frac{1}{\lambda-1}=\frac{e_i-p\frac{v}{2}}{p'\frac{v}{2}}+\frac{\left(e_i-p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}(e_i-e_j)(e_i-e_k)}\left[p\left(u+\frac{v}{2}-\omega_i\right)-e_i\right].$$

L'intégrale $\int\frac{1}{\lambda-1}d\theta$ aura donc pour effet de remplacer les termes qui renfermaient tout à l'heure $p'a$ en dénominateur par les suivants :

$$(38)\qquad -\frac{e_i\left(e_i-p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}(e_i-e_j)(e_i-e_k)}\theta-\frac{\left(e_i-p\frac{v}{2}\right)^2}{p'\frac{v}{2}(e_i-e_j)(e_i-e_k)}\zeta\left(u+\frac{v}{2}-\omega_i\right).$$

La fonction $\zeta\left(u+\frac{v}{2}-\omega_i\right)$ remplace ainsi la fonction $\log\dfrac{\sigma\left(u+\frac{v}{2}+a\right)}{\sigma\left(u+\frac{v}{2}-a\right)}$; mais l'une et l'autre se comportent de la même manière à l'égard de l'addition à u d'une période simple ou répétée.

Une remarque entièrement semblable s'appliquerait à l'équation (33), et l'on voit alors que, si, par exemple, l'argument a' devient égal à ω_i, *tous les termes* dépendant de cet argument doivent être remplacés par ceux-ci :

$$(39)\qquad \frac{-e_i}{(e_i-e_j)(e_i-e_k)}\psi-\frac{1}{(e_i-e_j)(e_i-e_k)}\zeta\left(u+\frac{v}{2}-\omega_i\right).$$

Le calcul qu'on vient de faire est d'ailleurs inutile, au point de vue du problème de Mécanique dont on s'occupe. En effet, lorsque le mouvement est plan, on sera certainement dans le cas cité, puisque la valeur $(\lambda=1)$ est pour λ un minimum réalisable; j'ajoute qu'il n'en peut être ainsi que lorsque le mouvement est plan. En effet, si a, par exemple, est égal à une demi-période, il en résulte que $\lambda-1$ et $\frac{d\lambda}{d\theta}$ s'annulent à la fois; la valeur $\lambda=1$ devrait donc annuler le polynôme $R(\lambda)$, ce qui exige que $g^2=0$.

Ainsi, lorsque le mouvement est plan, et seulement dans ce cas, les constantes a, b, α, β sont égales à quelque demi-période; mais alors l'intégration précédente est inutile, car avec $g^2 = 0$ on a $\varphi =$ const.

On verra plus loin un exemple de ce cas dans le mouvement d'un satellite possible.

Tout ce qu'on vient de dire, sauf ce qui est relatif à l'équation (25), qui disparaît pour $\varphi =$ const., se présente dans le cas d'un mouvement plan; car $\lambda - 1$, $\mu + 1$, $\mu - 1$ peuvent s'annuler, mais sans changement de signe : on en verra un exemple plus loin.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES ADDITIVES QUI FIGURENT DANS LES EXPRESSIONS DE u ET U (CAS GÉNÉRAL).

Je traiterai seulement le cas le plus intéressant, celui de $A_0 < 0$. Si l'on *prend comme données* les constantes A_0, A_2, g^2, les variables λ et μ devront être comprises l'une et l'autre entre deux racines réelles consécutives des polynômes respectifs $R(\lambda)$, $S(\mu)$.

Le cas où les racines de l'un ou l'autre de ces polynômes seraient toutes imaginaires ne peut évidemment pas se présenter pour $A_0 < 0$, comme il résulte des relations tirées des équations qui donnent les valeurs des dérivées $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$

$$\begin{cases} R(\lambda) = (\lambda^2 - \mu^2)\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2, \\ S(\mu) = (\lambda^2 - \mu^2)\left(\dfrac{d\mu}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

Il résulte de là (*voir*, par exemple, HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 122, 123) que chacun des arguments v, w est *réel*.

Proposons-nous alors de mettre en évidence, dans les formules données plus haut, le caractère de leur réalité. A cause de $A_0 < 0$, les variables θ, u, U doivent varier par des accroissements purement imaginaires. Soient donc, toutes les lettres étant réelles, sauf i qui désigne toujours $\sqrt{-1}$,

$$u = ix + ix_0 + d,$$
$$U = ix + iX_0 + d'.$$

Cherchons à déterminer d et d' de manière que ces fonctions

$$\frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \quad \frac{1}{2}\frac{P'U - P'w}{PU - Pw}$$

soient toujours réelles, conformément aux équations (21) et (21 *bis*). On y parvient aisément de la manière suivante. Considérons, par exemple, la première de ces deux fonctions, et soit d réel; écrivons d'abord $\theta = ix$, au lieu de $ix + ix_0$; au lieu de $\frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$, envisageons l'expression équivalente

$$\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v,$$

c'est-à-dire

$$\zeta(ix + d + v) - \zeta(ix + d) - \zeta v$$

ou, en développant chaque ζ d'argument complexe,

$$\left\{\begin{array}{ll} \zeta(d+v) & + \frac{1}{2}\frac{p'(d+v) - p'ix}{p(d+v) - pix} \\ - \zeta(d) & \\ - \zeta v & - \frac{1}{2}\frac{p'd - p'ix}{pd - pix}. \end{array}\right.$$

Pour que les parties purement imaginaires disparaissent, nous devons annuler le coefficient de $p'ix$, ce qui nous donne

$$p(d+v) = p(d);$$

nous choisissons v entre o et 2ω et, par suite, 2ω étant la période réelle, on aura

$$\text{soit} \quad d = -\frac{v}{2} + \omega, \qquad \text{soit} \quad d = -\frac{v}{2}.$$

Si le discriminant est négatif, il faut prendre, comme on sait, $u + \frac{v}{2}$ purement imaginaire. Si le discriminant est positif, c'est-à-dire si les quatre racines de $R(\lambda)$ sont réelles, il faut prendre, lorsque A_0 est négatif, ou bien $u + \frac{v}{2}$ ou bien $u + \frac{v}{2} - \omega$ purement imaginaire. On doit prendre $u + \frac{v}{2}$ purement imaginaire si λ se meut entre les deux plus grandes racines de $R(\lambda)$; on doit adopter le second choix si λ se meut entre les deux plus petites racines; mais, comme le polynôme $R(\lambda)$ ou $A_0\lambda^4 + 4A_1\lambda^3 + 6A_2\lambda^2 - 4A_1\lambda + A_4$ admet parmi ses quatre racines réelles au moins une racine négative, et que λ est > 1, on s'arrêtera au premier choix. On prendra donc $u = -\frac{v}{2} + ix + ix_0$. En appliquant la même remarque au polynôme $S(\mu)$ et en se servant du théorème de Descartes, on voit que, lorsque $A_4 < 0$, on devra prendre $U = -\frac{w}{2} ix + iX_0$, si μ_0 est > 0, et, au contraire, $U = -\frac{w}{2} + ix + iX_0 + \Omega$, si μ_0 est < 0.

En mettant en évidence le réel et l'imaginaire, les formules (21) deviennent

$$\lambda = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{p'\left(ix + ix_0 - \frac{v}{2}\right) - p'v}{p\left(ix + ix_0 - \frac{v}{2}\right) - pv}$$

$$= -\frac{A_1}{A_0} + 2\zeta\frac{v}{2} - \zeta v + \frac{p'\frac{v}{2}}{p\frac{v}{2} - p(ix + ix_0)},$$

avec,

(40) si $U = -\frac{w}{2} + ix + iX_0$,

$$\mu = -\frac{B_1}{A_0} + 2Z\frac{w}{2} - Zw + \frac{P'\frac{w}{2}}{P\frac{w}{2} - P(ix + iX_0)}.$$

si $U = -\frac{w}{2} + ix + iX_0 + \Omega$ (cas de $\Delta > 0$ forcément),

$$\mu = -\frac{B_1}{A_0} + 2Z\left(\frac{w}{2} - \Omega\right) + \frac{P'\left(\Omega + \frac{w}{2}\right)}{P\left(\Omega + \frac{w}{2}\right) - P(ix + iX_0)} - Zw + 2H.$$

Dans cette dernière formule, on a fait, comme d'usage,

$$H = Z(\Omega).$$

Reprenons les valeurs de u et U, c'est-à-dire

(41) $$\begin{cases} u = -\frac{v}{2} + ix + ix_0 \\ \text{et, suivant les cas,} \\ \mathrm{U} = -\frac{w}{2} + ix + i\mathrm{X}_0 \;\Big|\; \mathrm{U} = -\frac{w}{2} + ix + i\mathrm{X}_0 + \Omega; \end{cases}$$

portons ces valeurs dans la formule (22), et voyons comment seront remplacés les termes en

$$\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}, \quad \zeta(u+v), \quad \zeta u$$

ou en

$$\frac{\Sigma(\mathrm{U}+w)}{\Sigma(\mathrm{U})}, \quad \mathrm{Z}(\mathrm{U}+w), \quad \mathrm{Z}(\mathrm{U});$$

on aura

$$\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} = \frac{\sigma\left(ix+ix_0+\frac{v}{2}\right)}{\sigma\left(ix+ix_0-\frac{v}{2}\right)}$$

et, suivant les cas,

soit $$\frac{\sum(\mathrm{U}+w)}{\sum(\mathrm{U})} = \frac{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0+\frac{w}{2}\right)}{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0-\frac{w}{2}\right)}$$

soit $$\frac{\sum(\mathrm{U}+w)}{\sum(\mathrm{U})} = \frac{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\frac{w}{2}\right)}{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega-\frac{w}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\frac{w}{2}\right)}{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0-\Omega-\frac{w}{2}+2\Omega\right)}$$

$$= \frac{\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\frac{w}{2}\right)}{(-1)e^{2\mathrm{H}\left(ix+i\mathrm{X}_0-\frac{w}{2}\right)}\sum\left(ix+i\mathrm{X}_0-\Omega-\frac{w}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sum\left(-ix-i\mathrm{X}_0+\Omega+\frac{w}{2}\right)}{\sum\left(-ix-i\mathrm{X}_0+\Omega+\frac{w}{2}\right)}e^{-2\mathrm{H}\left(ix+i\mathrm{X}_0-\frac{w}{2}\right)}.$$

Or, si l'on introduit les fonctions réelles des variables réelles P et Q, savoir :

$$\Phi_A(P, Q) = \int_0^Q [\zeta(P + iQ) + \zeta(P - iQ)]\, dQ,$$

$$\Phi_B(P, Q) = \int_0^Q [Z(P + iQ) + Z(P - iQ)]\, dQ,$$

on aura, suivant les cas et avec un changement de la constante τ,

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} t + \tau = {} & 2\left(\frac{A_1^2 - B_1^2}{A_0^2} + \frac{A_1\zeta v - B_1 Z w}{A_0}\right)\frac{x}{\sqrt{-A_0}} \\ & + \frac{2B_1}{A_0\sqrt{-A_0}}\Phi_B\left(\frac{w}{2}, x + X_0\right) \\ & - \frac{2A_1}{A_0\sqrt{-A_0}}\Phi_A\left(\frac{v}{2}, x + x_0\right) \\ & - \frac{2\zeta(ix + ix_0)}{i\sqrt{-A_0}} \\ & + \frac{2Z(ix + iX_0)}{i\sqrt{-A_0}} \\ & + \frac{p'(ix + ix_0)}{p\frac{v}{2} - p(ix + ix_0)} \\ & - \frac{P'(ix + iX_0)}{P\frac{w}{2} - P(ix + iX_0)} \end{aligned} \right. \qquad \left| \quad \begin{aligned} t + \tau' = {} & 2\left(\frac{A_1^2 - B_1^2}{A_0^2} + \frac{A_1\zeta v - B_1 Z w}{A_0} - \frac{2B_1}{A_0}H\right)\frac{x}{\sqrt{-A_0}} \\ & + \frac{2B_1}{\sqrt{-A_0}}\Phi_B\left(\frac{w}{2} + \Omega,\ x + X_0\right) \\ & - \frac{2A_1}{A_0\sqrt{-A_0}}\Phi_A\left(\frac{v}{2},\ x + x_0\right) \\ & - \frac{2\zeta(ix + ix_0)}{i\sqrt{-A_0}} \\ & + \frac{2Z(ix + iX_0)}{i\sqrt{-A_0}} \\ & + \frac{p'(ix + ix_0)}{p\frac{v}{2} - p(ix + ix_0)} \\ & - \frac{P'(ix + iX_0)}{P\left(\frac{w}{2} + \Omega\right) - P(ix + iX_0)}. \end{aligned} \right.$$

Cette forme met bien en évidence la réalité, car chaque terme écrit est réel; elle a l'inconvénient d'offrir une indétermination apparente toutes les fois que l'on a

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{soit} & ix + ix_0 = 2\omega' m & (m \text{ entier}), \\ \text{soit} & ix + iX_0 = 2\Omega' n & (n \text{ entier}); \end{array} \right.$$

pour la première valeur en apparence critique, les termes

$$-\zeta(u+v)-\zeta u$$

deviennent

$$-\zeta\left(2m\omega'+\frac{v}{2}\right)-\zeta\left(2m\omega'-\frac{v}{2}\right)=-4m\eta',$$

et pour la seconde, les termes

$$Z(U+w)+Z(U)$$

deviennent, suivant les cas précités,

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{soit} & 4nH',\\ \text{soit} & 4nH'+2H.\end{array}\right.$$

Si l'on veut mettre la réalité en évidence dans les formules (25), on se reportera à la signification des constantes a, b, α, β. Au moyen des égalités (23 *bis*), et en remarquant que les quantités $\lambda-1$, $\lambda+1$, $\mu+1$ sont toujours positives et la quantité $\mu-1$ toujours négative, on peut former le Tableau suivant, où q et χ désignent des quantités réelles, comme q' et χ' :

$$\begin{array}{c}\text{Pour } a \text{ et } b,\\ \text{en se rappelant que}\\ u=-\frac{v}{2}+ix+ix_0\end{array}\left\{\wp\frac{v}{2}>\wp b>\wp a>\wp\omega',\quad \text{c'est-à-dire}\left\{\begin{array}{ll} a \text{ réel} & b \text{ réel},\\ a=iq+\omega & \left\{\begin{array}{l} b \text{ réel}\\ \text{ou}\\ b=iq'+\omega\end{array}\right.\\ a=q+\omega' & \left\{\begin{array}{l} b \text{ réel}\\ \text{ou}\\ b=iq'+\omega\\ \text{ou}\\ b=q'+\omega'\end{array}\right.\end{array}\right.\right.\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\begin{array}{c}\text{discriminant}\\ \text{positif;}\end{array}$$

et

$$\text{Pour } \alpha \text{ et } \beta \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \text{Si } U + \frac{\omega}{2} = ix + iX_0, \text{ on a} \\ P\alpha > P\frac{\omega}{2}, \\ P\frac{\omega}{2} > P\beta > P\Omega' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha \text{ réel}, \\ \beta \left\{\begin{array}{l} \text{soit réel} \\ \left.\begin{array}{l}\text{soit } \beta = i\chi + \Omega \\ \text{soit } \beta = \chi + \Omega'\end{array}\right\} \text{si le discriminant est} > 0, \end{array}\right. \end{array} \\ \\ \text{Si } U + \frac{\omega}{2} = ix + iX_0 + \Omega. \\ \\ \text{En ce cas, si le discriminant} \\ \Delta(\gamma_2,\gamma_3) \text{ est } > 0, \text{ on aura} \\ \\ P\frac{\omega}{2} > P\beta > P\Omega \left\{\begin{array}{l} \beta \text{ toujours réel}, \\ \Omega > \beta > \frac{\omega}{2}, \end{array}\right. \\ \\ \text{puis} \left\{\begin{array}{l} \text{ou bien } \quad P\alpha > P\frac{\omega}{2} \ (\alpha \text{ réel}), \\ \\ \text{ou bien } \quad P\alpha < P(\Omega+\Omega') \left\{\begin{array}{l}\text{soit } \alpha = \chi + \Omega', \\ \text{soit } \alpha = i\chi.\end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Revenons à la formule (25), et désignons par e l'un des arguments a, b, et par ε l'un des arguments α, β; on aura les cas suivants, où l'on ne mentionne pas les altérations des constantes additives :

1° *e est réel.*

Dans l'expression de φ, le coefficient de ζe est réel, et le terme $\log \dfrac{\sigma\left(u + \frac{\varphi}{2} + e\right)}{\sigma\left(u + \frac{\varphi}{2} - e\right)}$ prend ici la forme

$$\log \frac{\sigma(ix + ix_0 + e)}{\sigma(ix + ix_0 - e)} = i\,\Phi_\Delta(e, x + x_0).$$

$$2^\circ \quad e = iq + \omega.$$

On a cette fois, en introduisant la fonction *paire*,

$$\sigma_1 u = \frac{e^{\eta u}\sigma(\omega - u)}{\sigma\omega} = \frac{e^{-\eta u}\sigma(\omega + u)}{\sigma\omega},$$

$$\frac{\sigma\left(u + \frac{v}{2} + e\right)}{\sigma\left(u + \frac{v}{2} - e\right)} = \frac{\sigma(ix + ix_0 + iq + \omega)}{\sigma(ix + ix_0 - iq - \omega)} = \frac{e^{\eta(ix + ix_0 + i - \frac{1}{2})}\,\sigma_1(ix + ix_0 + iq)}{e^{-\eta(ix + ix_0 - i + \frac{1}{2})}\,\sigma_1(ix + ix_0 - iq)} \times (-1).$$

Si l'on remarque que $p'e$ est ici purement imaginaire et, en même temps, que

$$\zeta(e) = \zeta(iq + \omega) = \zeta iq + \eta - \frac{1}{2}\frac{p'iq}{p\omega - piq},$$

comme, dans la formule (25), le coefficient de $\zeta(e)$ et celui de $\dfrac{\sigma\left(u + \frac{v}{2} + e\right)}{\sigma\left(u + \frac{v}{2} - e\right)}$ sont de signes contraires, on voit que le terme $2\eta ix$ provenant de l'exponentielle facteur est détruit par le terme provenant de η dans ζe; donc, en remplaçant ainsi dans la formule (25) $\dfrac{\log\sigma\left(u + \frac{v}{2} + e\right)}{\log\sigma\left(u + \frac{v}{2} - e\right)}$ par

$$\boxed{\log\frac{\sigma_1(ix + ix_0 + iq)}{\sigma_1(ix + ix_0 - iq)}},$$

et ζe par

$$\boxed{\zeta iq - \frac{1}{2}\frac{p'iq}{p\omega - piq}},$$

tous les termes restants divisés par $\sqrt{-A_0}$ sont réels.

$$3^\circ \quad e = q + \omega'.$$

On a alors

$$\frac{\sigma\left(u+\frac{v}{2}+e\right)}{\sigma\left(u+\frac{v}{2}-e\right)} = \frac{\sigma(ix+ix_0+\omega'+q)}{\sigma(ix+ix_0-\omega'-q)} = \frac{\sigma(ix+ix_0-\omega'+q)}{\sigma(-ix-ix_0+\omega'+q)} e^{2\eta'(ix+ix_0+q)},$$

le terme

$$\zeta e = \zeta q + \eta' + \frac{1}{2}\frac{\wp' q}{\wp q - \wp\omega'};$$

une réduction analogue à celle signalée tout à l'heure permet de remplacer $\log\dfrac{\sigma\left(u+\frac{v}{2}+e\right)}{\sigma\left(u+\frac{v}{2}-e\right)}$ par

$$\boxed{i\,\Phi_{\mathrm{A}}\left(q,\ x+x_0-\frac{\omega'}{i}\right)},$$

et ζe par

$$\boxed{\zeta q + \frac{1}{2}\frac{\wp' q}{\wp q - \wp\omega'}},$$

ce qui ne fournit que des termes réels, car $\wp' e$ est ici réel.

De même, examinons les termes de la forme $\mathrm{Z}\varepsilon$ et $\log\dfrac{\Sigma\left(\mathrm{U}+\frac{w}{2}+\varepsilon\right)}{\Sigma\left(\mathrm{U}+\frac{w}{2}-\varepsilon\right)}$; dans le cas où l'on prend $\mathrm{U} = -\frac{w}{2} + ix + i\mathrm{X}_0$, il n'y a qu'à répéter ce qui vient d'être dit pour les termes en $\log\dfrac{\sigma\left(u+\frac{v}{2}+e\right)}{\sigma\left(u+\frac{v}{2}-e\right)}$ et ζe. On prendra donc la seconde forme de U.

Nous avons à examiner les trois cas : $\varepsilon =$ réel, $\varepsilon = \chi + \Omega'$, $\varepsilon = i\chi$.

4° ε réel.

On a

$$\frac{\sum\left(\mathrm{U}+\frac{\varpi}{2}+\varepsilon\right)}{\sum\left(\mathrm{U}+\frac{\varpi}{2}-\varepsilon\right)}=\frac{\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\varepsilon)}{\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega-\varepsilon)}=\frac{\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\varepsilon)}{e^{2\mathrm{H}(ix+i\mathrm{X}_0-\varepsilon)}\sum(\varepsilon+\Omega-ix-i\mathrm{X}_0)};$$

le terme $-2\mathrm{H}ix$ s'AJOUTE cette fois au terme en $\mathrm{Z}\varepsilon$, et le logarithme est remplacé

$$\boxed{i\Phi_{\mathrm{B}}(\varepsilon+\Omega,x+\mathrm{X}_0)},$$

mais le résultat est encore réel.

5° $\varepsilon=\chi+\Omega'$.

Remarquons que $\mathrm{P}'\varepsilon$ est réel et qu'on a

$$\begin{aligned}\frac{\sum\left(\mathrm{U}+\frac{\varpi}{2}+\varepsilon\right)}{\sum\left(\mathrm{U}+\frac{\varpi}{2}-\varepsilon\right)}&=\frac{\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\chi+\Omega')}{\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega-\chi-\Omega')}\\&=\frac{\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\chi-\Omega'+2\Omega')}{\sum(ix+i\mathrm{X}_0-\Omega-\chi-\Omega'+2\Omega)}\\&=\frac{e^{2\mathrm{H}'(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\chi)}\sum(ix+i\mathrm{X}_0+\Omega+\chi-\Omega')}{e^{2\mathrm{H}(ix+i\mathrm{X}_0-\Omega-\chi)}\sum(ix+i\mathrm{X}_0-\Omega-\chi-\Omega')};\end{aligned}$$

l'exponentielle introduit encore dans le logarithme la partie $2(\mathrm{H}'-\mathrm{H})ix$, dont la partie $2\mathrm{H}'ix$ est détruite par un terme qui provient du développement de

$$\mathrm{Z}(\chi+\Omega')=\mathrm{Z}(\chi)+\mathrm{H}'+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{P}'\chi}{\mathrm{P}\chi-\mathrm{P}\Omega'},$$

et le résultat final est encore une fois réel quand on remplace
$$\log \frac{\sum\left(U + \frac{w}{2} + \varepsilon\right)}{\sum\left(U + \frac{w}{2} - \varepsilon\right)} \text{ par}$$

$$\boxed{i\,\Phi_B\left(\Omega + \chi,\ x + X_0 - \frac{\Omega'}{i}\right)},$$

et $Z(\varepsilon)$ par

$$\boxed{Z(\chi) + \frac{1}{2}\,\frac{P'(\chi)}{P(\chi) - P\Omega'}}.$$

Des transformations analogues mettraient en évidence la réalité des formules (27), (30), (31), (33), qui conviennent au cas où l'énergie totale est nulle; je n'y insisterai pas davantage : mon but était seulement de définir nettement l'inversion dans ce problème de Mécanique.

CAS PARTICULIERS.

Les formules précédentes ne peuvent tomber en défaut que dans un cas de dégénérescence de l'une des fonctions elliptiques; l'un des cas les plus simples et déjà signalé est celui d'un mouvement ellipsoïdal.

Mouvement sur l'ellipsoïde. — Il est réalisé quand $\lambda'_0 = 0$ et lorsque, de plus, λ_0 est une racine double de $R(\lambda)$; en appliquant la méthode d'intégration de Jacobi, on verra qu'il n'y a qu'un faible changement à faire dans les formules précédentes : supprimer les termes en a et b, v, et faire $\lambda = \lambda_0 = \text{const.}$ En ce cas, le mouvement relatif est toujours périodique; la durée de la période s'obtient en faisant le changement qu'on vient de dire dans la formule (22) et en prenant l'accroissement du second membre qui résulte du changement de U en $U + 2\Omega'$. En désignant par T la durée de cette période, on a ainsi

$$T = \left(\lambda_0^2 - \frac{2B_1^2}{A_0^2} - \frac{2B_1}{A_0}Zw\right)\frac{2\Omega'}{i\sqrt{-A_0}} + \frac{2B_1}{A_0\sqrt{-A_0}}\,\frac{2H'}{i}w + \frac{4H'}{i\sqrt{-A_0}}.$$

On voit, d'après la formule (25), que, pendant ce temps, l'angle φ s'accroît d'un angle égal à

$$\frac{\sqrt{-A_0}}{g}\left\{\left[\frac{1}{\lambda_0^2-1}+\frac{P\beta-P\alpha}{P'\frac{\omega}{2}}+\frac{2\left(P\beta-P\frac{\omega}{2}\right)^2 Z\beta}{P'\frac{\omega}{2}P'\beta}-\frac{2\left(P\alpha-P\frac{\omega}{2}\right)^2 Z\alpha}{P'\frac{\omega}{2}P'\alpha}\right]\frac{2\Omega'}{i}\right.$$
$$\left.+4\left[\frac{\left(P\alpha-P\frac{\omega}{2}\right)^2}{P'\frac{\omega}{2}P'\alpha}\alpha-\frac{\left(P\beta-P\frac{\omega}{3}\right)^2}{P'\frac{\omega}{2}P'\beta}\beta\right]\frac{H'}{i}\right\}.$$

Si cette quantité réelle est commensurable avec π, la trajectoire absolue sera aussi fermée. Sinon, il y aura lieu de répéter une remarque déjà faite en partie par Legendre et que je développerai plus loin.

CAS D'UNE TRAJECTOIRE ALGÉBRIQUE PARTICULIÈRE, FERMÉE, DANS LE MOUVEMENT RELATIF.

Nous voulons maintenant que les deux périodes désignées par ω' et Ω' dans le cas de $h<0$ soient commensurables. Cette condition, qui, remarquons-le bien, *ne s'applique pas aux deux paires de périodes,* n'est pas susceptible, on le conçoit, d'une traduction analytique plus développée ou plus nette que cette affirmation elle-même; je me bornerai donc à la développer dans un cas particulièrement remarquable.

Je considère la relation d'homogénéité bien connue

$$\wp(u;g_2,g_3)=f^2\wp\left(uf;\frac{g_2}{f^4},\frac{g_3}{f^6}\right),$$

et je cherche à faire

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned}\gamma_2&=\frac{g_2}{f^4},\\ \gamma_3&=\frac{g_3}{f^6},\end{aligned}\right.$$

ce qui exige que l'on ait

$$(44)\qquad \frac{\gamma_2^3}{g_2^3}=\frac{\gamma_3^2}{g_3^2}.$$

Toutes les fois qu'on pourra satisfaire à cette condition *et choisir en même temps pour f une valeur commensurable,* la courbe sera à la fois fermée et algébrique.

Cela résulte des valeurs de λ et μ

$$\lambda = -\frac{A_1}{A_0} + \frac{1}{2}\,\frac{p'(u) - p'v}{pu - pv},$$

$$\mu = -\frac{B_1}{A_0} + \frac{1}{2}\,\frac{P'(U) - P'w}{P(U) - Pw}.$$

Voyons comment il faut choisir les circonstances initiales pour qu'il en soit ainsi.

La relation (44) détermine l'une des trois constantes A_0, A_2, g, au moyen des deux autres. Posons alors, en vertu des valeurs précédentes de g_2, g_3, γ_2, γ_3,

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_2 = g_2 - \gamma_2,\\ &\delta_3 = g_3 - \gamma_3,\\ &F = \frac{f^4}{f^4 - 1},\\ &G = \frac{f^6}{f^6 - 1}, \qquad \delta_1^2 = A_1^2 - B_1^2,\\ &p = \frac{A_2}{A_0},\\ &q = \frac{g_2}{A_0}, \end{aligned}\right.$$

et nous aurons

$$g_2 = -1 - 6p - q + \frac{4A_1^2}{A_0^2} + 3p^2,$$

$$g_3 = -p - 6p^2 - qp + \frac{4A_1^2}{A_0^2}p - p^3 + q\frac{A_1^2}{A_0^2},$$

$$\delta_2 = \frac{4\delta_1^2}{A_0^2},$$

$$\delta_3 = p\delta_2 + q\frac{\delta_1^2}{A_0^2}$$

ou

$$\delta_3 = p\delta_2 + \frac{\delta_2}{4}q.$$

Nous aurons alors, pour déterminer les quantités g_2, g_3, les équations

$$g_2 = \delta_2 F = 3p^2 - 2p - 1 - 4\frac{\delta_3}{\delta_2} + \frac{\delta_2}{\delta_1^2}A_1^2,$$

$$g_3 = \delta_3 G = -4p^3 + g_2 p + \frac{\delta_3 - p\delta_2}{\delta_1^2}A_1^2,$$

mettons en évidence la quantité

$$\varepsilon = \delta_3 - p\,\delta_2,$$

qui doit être négative pour que l'on ait, comme on le désire, $h < 0$.

On a, pour déterminer δ_2 et ε au moyen de f et de p, les deux équations

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_2^2\left[\left(F - \frac{A_1^2}{\delta_1^2}\right)\left(G - \frac{A_1^2}{\delta_1^2}\right)\right] \\ &\quad + \left[4p(F-G) - (3p^2 - 6p - 1)\left(G - \frac{A_1^2}{\delta_1^2}\right)\right]\delta_2 - 16p^3 = 0, \\ &\varepsilon = \frac{p\,\delta_2(F-G) - 4p^3}{G - \frac{A_1^2}{\delta_1^2}}, \end{aligned}\right.$$

et n'oublions pas qu'il faut exiger

$$\delta_2 > 0,$$
$$\varepsilon \leqq 0,$$

Toute valeur de p qui, associée à une valeur commensurable de f, satisfera à ces deux inégalités assurera la fermeture d'une trajectoire relative algébrique.

CAS D'UNE TRAJECTOIRE PLANE ALGÉBRIQUE FERMÉE.

Parmi ces diverses solutions qui dépendent de deux paramètres, p et f, dont le dernier est commensurable, on peut essayer les suivantes, qui donneront un mouvement plan, et par conséquent une trajectoire absolue fermée.

Si l'on fait $p = 0$, on trouve

$$\varepsilon = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = \frac{1}{\frac{A_1^2}{\delta_1^2} - F},$$

valeur positive, pourvu que l'on ait :

$$\text{ou bien} \quad f^4 < 1, \qquad \text{ou bien} \quad f^4 > \frac{A_1^2}{B_1^2},$$

c'est-à-dire

$$f^2 > \frac{K^2 + K'^2}{K^2 - K'^2}.$$

Nous aurons ainsi, dans l'hypothèse de $p = 0$,

$$g_2 = \frac{F}{\frac{A_1^2}{\delta_1^2} - F}, \qquad \gamma_2 = \frac{F - 1}{\frac{A_1^2}{\delta_1^2} - F}, \qquad g_3 = 0, \qquad \gamma_3 = 0:$$

les fonctions restent elliptiques.

Les conditions que nous venons de trouver ne sont pas, toutefois, suffisantes; car il faut encore exprimer que, pour $A_0 < 0$, le polynôme $R(\lambda)$ a des racines réelles supérieures à 1 et que le polynôme $S(\mu)$ a des racines réelles inférieures à 1. Ces polynômes sont ici

$$R(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(A_0\lambda^2 + 4A_1\lambda + A_0),$$
$$S(\mu) = (\mu^2 - 1)(A_0\mu^2 + 4B_1\mu + A_0).$$

D'ailleurs, si le polynôme $A_0\lambda^2 + 4A_1\lambda + A_0$ a ses racines réelles, il y en aurait toujours une supérieure à 1 (le produit de ses deux racines étant 1).

En exprimant que $\frac{R(\lambda)}{\lambda^2 - 1}$ a ses racines réelles, nous trouvons cette condition

$$4A_1^2 - A_0^2 > 0 \qquad \left\{\left[A_0^2 = 4\delta_1^2\left(\frac{A_1^2}{\delta_1^2} - F\right)\right]\right\}.$$

On doit donc avoir

$$F > 0,$$

et des deux inégalités précédentes relatives à f, la seconde subsiste seule, c'est-à-dire

$$f^2 > \frac{K^2 + K'^2}{K^2 - K'^2}.$$

Les racines du polynôme

$$\frac{S(\mu)}{\mu^2 - 1} = A_0 \mu^2 + 4 B_1 \mu + A_0$$

sont d'ailleurs réelles, à cause de $F > 1$.

Et comme B_1 est > 0, μ varie entre -1 et la plus petite racine positive de l'équation $A_0 \mu^2 + 4 B_1 \mu + A_0 = 0$.

Dans ce cas, le mobile ne pénètre jamais dans la région concave d'une certaine hyperbole HH, qui tourne sa concavité vers la masse la plus petite M''.

Exemple. — Pour conclure avec plus de netteté encore, j'énoncerai le théorème suivant, qui résulte de ce qu'on vient de dire et des formules

$$z = \lambda \mu, \qquad r = \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \quad (M'M'' = 2),$$

qui donnent les coordonnées cartésiennes rapportées au milieu de la droite $M'M''$.

Si l'on désigne par f un nombre *commensurable*, par K^2 et K'^2 les pouvoirs attractifs des deux masses $\left(\text{l'unité de distance est } \frac{M'M''}{2}\right)$, et si l'on fait

$$A_1 = \frac{K^2 + K'^2}{2},$$

$$B_1 = \frac{K^2 - K'^2}{2} \qquad (K^2 > K'^2),$$

$$F = \frac{f^4}{f^4 - 1} \qquad f^2 > \left(\frac{K^2 + K'^2}{K^2 - K'^2}\right),$$

$$A_0 = -2\sqrt{A_1^2 - B_1^2}\sqrt{\frac{A_1^2}{A_1^2 - B_1^2} - F};$$

si l'on place le mobile en un point M_0 de l'axe tel que le rapport

$$2\,\frac{M_0 M' - M_0 M''}{M'M''} = \mu_0$$

soit égal à la plus petite racine de l'équation

$$A_0 \mu^2 + 4 B_1 \mu + A_0 = 0,$$

et si, de plus, on lance le mobile avec une vitesse perpendiculaire à l'axe et dont le carré soit égal à

$$\frac{4A_1 + 2A_0}{1 - \mu_0^2},$$

le mobile décrira une trajectoire fermée et algébrique, et les fonctions elliptiques de l'intégration ont même *module*.

Remarque sur les trajectoires algébriques. — Le cas qui vient d'être examiné, où les fonctions elliptiques du problème ont même module, est infiniment particulier; remarquons seulement que la recherche d'une trajectoire algébrique revient à la recherche d'une relation algébrique entre deux variables λ et μ, liées par l'équation différentielle $\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} = \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}$.

Le problème des trajectoires algébriques est donc ici identique avec le problème de la *transformation* des fonctions elliptiques.

CAS OU LE MOBILE PEUT RESTER *satellite* DE L'UNE DES MASSES DONNÉES.

Ce cas doit nécessairement pouvoir se présenter lorsque l'un des corps fixes a une masse très petite par rapport à l'autre, ou bien lorsqu'il est situé à de très grandes distances de l'autre corps fixe et du corps mobile.

Sans chercher quelles sont les conditions initiales qui doivent être réalisées pour qu'il en soit ainsi, j'indiquerai comment on peut vérifier, dans chaque mouvement particulier, si le corps mobile reste dans le voisinage de l'un des corps fixes [1].

Cherchons à reconnaître si, dans le mouvement relatif, le mobile peut rester dans la région concave d'une hyperbole HH, ayant pour foyer le corps M', situé dans la même région. Pour fixer les idées, supposons M'

(1) Ces conditions dépendent évidemment des racines de $R(\lambda)$ et $S(\mu)$, et l'on pourrait les étudier directement, sans se préoccuper de l'inversion.

la masse prépondérante. La condition pour qu'il en soit ainsi résulte des valeurs de μ.

Remarquons d'abord que $U + \frac{\omega}{2}$ devra être de la forme

$$ix + iX_0 + \Omega$$

lorsque le discriminant est *positif*, comme il résulte des considérations développées plus haut sur les racines de $S(\mu)$; la condition à exprimer est que la plus grande des valeurs de $\mu + 1$ est inférieure à 1, ce qui exige que

$$\frac{P'\frac{\omega}{2}}{P\beta - P\frac{\omega}{2}} + \frac{P'\frac{\omega}{2}}{P\frac{\omega}{2} - P(\Omega + \Omega')} < 1$$

(on aurait une condition analogue et équivalente en considérant $\mu - 1$ au lieu de $\mu + 1$). Si le discriminant des fonctions P est *négatif*, on sait que $U + \frac{\omega}{2}$ est de la forme

$$ix + iX_0,$$

et l'inégalité précédente serait remplacée par celle-ci

$$\frac{P'\frac{\omega}{2}}{P\beta - P\frac{\omega}{2}} < 1.$$

Dans le cas où la constante des aires g n'est pas nulle, le mobile décrit, si h est < 0 et si les conditions précédentes sont remplies, une trajectoire située à l'intérieur d'une sorte de tore qui entoure l'axe dans le voisinage du point M'; et si ce tore est très aplati, on a un cas de mouvement tout à fait analogue à celui ordinaire d'un satellite circulant autour de la planète.

SATELLITE EXAGÉRÉ.

Remarque importante. — Au contraire, supposons que la constante des aires g soit nulle, on peut encore avoir un mouvement du mobile où celui-ci reste dans le voisinage du point M'; mais, contrairement à ce qui se passe pour les satellites du système planétaire, *ce voisinage peut s'exagérer* de manière à produire les singularités que nous allons examiner.

Cherchons d'abord, au moyen des valeurs (23 *bis*) de $\lambda - 1$ et de $\mu + 1$, à quelles valeurs de x correspondent les instants où le mobile traverse l'axe M'M'', entre M' et M'' d'une part, au-dessus de M' d'autre part.

Ces valeurs de x, que nous pouvons appeler des *dates* relativement à la variable x, attendu que x et t varient dans le même sens, conformément à l'équation

$$(\lambda^2 - \mu^2)\frac{dx}{\sqrt{-A_0}} = dt,$$

se succèdent régulièrement.

Dans le cas d'un mouvement plan qui débute comme celui d'un satellite, $\lambda = 1$ est un minimum réalisable pour λ, et $\mu = -1$ est un minimum réalisable pour μ; il en résulte que la constante a est égale à ω', et que la constante β est égale à Ω' ou à $\Omega' + \Omega$, suivant que U est pris lui-même de la forme im ou de la forme $im + \Omega$, m étant réel, et ce dernier cas ne pouvant se présenter que si le discriminant de la fonction

$$P(U; \gamma_2, \gamma_3)$$

est positif.

Désignons par ξ_0 et par Ξ_0 les deux premières dates, relatives à x, des passages inférieur et supérieur sur l'axe; on aura donc, en distinguant la direction et le sens de la vitesse initiale :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} 1^\circ\ \lambda_0 \text{ croît,} \\ \text{c'est-à-dire} \\ 0 < x_0 < \dfrac{\omega'}{i} \end{array}\right\} & i\xi_0 + ix_0 = \omega', \\[2em] \left.\begin{array}{l} 2^\circ\ \lambda_0 \text{ décroît,} \\ \dfrac{\omega'}{i} < x_0 < 2\dfrac{\omega'}{i} \end{array}\right\} & i\xi_0 + ix_0 = 3\omega'; \end{array}\right.$$

et

$$\begin{cases} 1^\circ \ \mu_0 \text{ croît}, \\ \quad 0 < X_0 < \frac{\Omega'}{i} \end{cases} \quad i\Xi_0 + iX_0 = \Omega',$$

$$\begin{cases} 2^\circ \ \mu_0 \text{ décroît}, \\ \quad \frac{\Omega'}{i} < X_0 + 2\frac{\Omega'}{i} \end{cases} \quad i\Xi_0 + iX_0 = 3\Omega'.$$

Si l'on désigne par ξ toute date relative d'un passage inférieur, et par Ξ toute date relative d'un passage supérieur, on peut poser

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 + 2m\frac{\omega'}{i} \\ \Xi = \Xi_0 + 2n\frac{\omega'}{i} \end{cases} \qquad m \text{ et } n \text{ entiers},$$

et ces formules, d'ailleurs, étaient évidentes avant même que nous eussions précisé l'inversion.

Elles ont des conséquences fort simples, mais bien inattendues, à ce qu'il me semble.

Supposons que les quantités $\frac{\omega'}{i}$ et $\frac{\Omega'}{i}$ soient incommensurables entre elles; alors on pourra rendre la différence

$$m\frac{2\omega'}{i} - n\frac{2\Omega'}{i}$$

aussi voisine que l'on voudra de toute quantité donnée à l'avance.

Par conséquent, on peut trouver des dates de passage de chaque espèce suffisamment éloignées, mais aussi voisines l'une de l'autre qu'on le désire; de là résulte encore que le rayon vecteur allant de la masse M' à son satellite ne peut pas toujours tourner dans le même sens.

L'existence d'un satellite, au sens ordinaire du mot, dans le cas de $g = 0$, devrait donc être regardée comme exceptionnelle.

Comparaison avec la stabilité qui semble exister dans le système pla-

nétaire. — Si l'on compare ce résultat avec celui qui paraît constaté dans le système planétaire, on est conduit à soupçonner que la fixité de certains corps du système serait défavorable à la stabilité physique.

En effet, dans le problème actuel, aux époques très éloignées où deux dates relatives de deux traversées inférieure et supérieure sont très voisines, le mobile a dû nécessairement pénétrer dans un cercle de petit rayon entourant le point M', en sorte que, les trois corps ayant des dimensions finies, la chute du satellite serait certaine.

Dernières remarques. — Dans le cas de $A_0 < 0$, quand les nombres $\frac{\omega'}{i}$ et $\frac{\Omega'}{i}$ sont commensurables, la trajectoire relative est toujours fermée; dans la formule (22), lorsque θ s'accroît de $2m\omega'$, les termes en $\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)}$ s'accroissent de

$$-\frac{A_1}{A_0}\eta' vm,$$

et lorsque θ s'accroît de $2n\Omega'$, les termes en $\log\frac{\Sigma(U+w)}{\Sigma(U)}$ s'accroissent de

$$\frac{B_1}{A_0}H' wn;$$

si les nombres $\frac{\omega'}{i}$ et $\frac{\Omega'}{i}$ sont incommensurables, on peut associer deux nombres m et n tels que l'on ait

$$m\frac{\omega'}{i} - n\frac{\Omega'}{i} = \varepsilon, \qquad \text{et } \lim \varepsilon = 0 \text{ pour } m \text{ infini}.$$

Faisons croître θ de $2m\omega'$, le temps t s'accroît d'une quantité *très peu* différente de

$$4m\left(\frac{A_1^2 - B_1^2}{A_0^2} + \frac{A_1\zeta v - B_1 Z w}{A_0}\right)\frac{\omega'}{i\sqrt{-A_0}} + \left(\frac{B_1}{A_0}n\frac{H' w}{i} - m\frac{A_1}{A_0}\frac{\eta' v}{i}\right)\frac{1}{\sqrt{-A_0}},$$

c'est-à-dire un résultat de la forme

$$mA + nB.$$

Donc, à des époques distantes d'une durée presque égale à

$$mA + nB,$$

les coordonnées λ et μ redeviendront sinon les mêmes, du moins très peu différentes de ce qu'elles furent à un moment donné quelconque.

Seulement les nombres entiers m et n, associés par la théorie des fractions continues, croissent beaucoup plus rapidement que les multiples successifs de toute quantité finie. On voit donc que, en général, et à coup sûr si A et B sont de même signe, les intervalles de temps qui séparent deux époques que nous considérons croîtront eux-mêmes indéfiniment.

Enfin, pour terminer, je mentionnerai un cas curieux de mouvement dont la possibilité a déjà été indiquée au commencement de cette Étude.

Si le polynôme $R(\lambda) = 0$ admet la racine double $\lambda = 1$, cas de $g^2 = 0$, il peut arriver que λ ayant commencé à décroître décroisse constamment vers 1 : c'est le cas d'une chute asymptotique sur l'axe.

Vu et approuvé :
Paris, le 12 mai 1890.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 12 mai 1890.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Étude des fonctions X_n et Y_n de Legendre et de Laplace; application à la théorie de la figure de la Terre.

Vu et approuvé :
Paris, le 12 mai 1890.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 12 mai 1890.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

16329 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.