LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME,

I
DUH
1

PAR

P. DUHEM,

CHARGÉ D'UN COURS COMPLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
ET DE CRISTALLOGRAPHIE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

TOME I.

LES CORPS CONDUCTEURS A L'ÉTAT PERMANENT.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

(Tous droits réservés.)

PR 2505

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

INTRODUCTION.

En 1811, Poisson inaugura la théorie des phénomènes électriques; depuis ce temps, l'étude des lois auxquelles obéissent l'Électricité et le Magnétisme a suscité les efforts d'une foule de grands physiciens et de grands analystes. Leurs innombrables travaux se sont succédé sans relâche pendant toute la durée du siècle et dans tous les pays; leurs découvertes forment aujourd'hui l'un des plus vastes ensembles scientifiques qui soit au monde.

Le moment semble venu de coordonner les résultats de tant d'efforts; de réunir en un faisceau unique ces recherches conçues d'après les idées les plus diverses, écrites dans toutes les langues, dispersées dans toutes les revues. Il semble que, si l'on parvenait à réaliser cette vaste synthèse, on se trouverait en présence du plus beau système de Philosophie naturelle qui ait jamais été engendré par l'esprit humain.

Dans le présent Ouvrage, nous avons cherché, dans la limite de nos forces, à tracer une première ébauche de cette synthèse. Notre œuvre présentera certainement bien des imperfections; mais peut-être, malgré ses défauts, préparera-t-elle d'autres œuvres plus achevées; s'il en est ainsi, nous n'aurons pas perdu notre peine.

Ce que nous nous sommes proposé d'écrire, c'est un exposé aussi un, aussi logique que possible des théories sur l'Électricité et le Magnétisme, et non pas une compilation de ces théories. On ne trouvera pas ici tout ce qui a été dit sur les phénomènes électriques et magnétiques; nous désirons seulement qu'on y trouve les idées vraiment nettes et fécondes qui ont été émises à leur su-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

jet. Le minerai qui contient la Science renferme toujours de la gangue; nous avons rejeté beaucoup de cette gangue : le titre de ce que nous avons gardé n'en sera que plus riche.

Après avoir, pendant dix ans, médité les diverses parties de la Science électrique, nous nous sommes convaincu que tout ce qu'il y a de clair et de fécond dans cette Science pouvait se grouper, avec beaucoup d'ordre et d'unité, autour de quelques principes empruntés à la Mécanique et à la Thermodynamique, et c'est ce groupement que nous avons essayé d'exposer.

Avant de montrer comment la Mécanique et la Thermodynamique permettent de débrouiller, de trier, de classer les théories relatives à l'Électricité et au Magnétisme, faut-il reprendre et discuter les principes de ces sciences? Logiquement, oui; car l'exposé que l'on donne ordinairement de ces principes suffit bien à l'examen de quelques-uns des problèmes les plus simples de la Physique; mais on le trouve, au contraire, constamment défectueux et contradictoire lorsqu'on veut l'appliquer aux questions plus complexes que soulève l'étude de l'Électricité et du Magnétisme.

Cependant, cette revision logiquement nécessaire des principes de la Mécanique et de la Thermodynamique, nous ne l'avons pas faite ici. La raison en est simple : pour prévoir tous les cas, si compliqués, qu'offriront les théories électriques, il est nécessaire de surcharger les démonstrations de la Mécanique et de la Thermodynamique d'une foule de restrictions, de conditions, d'hypothèses, qui en font l'une des parties les plus épineuses de la Science. Présenter d'abord ces théories d'une manière abstraite, en les séparant des applications qui exigent et, partant, justifient ce luxe de précautions, ce serait les rendre difficiles à comprendre peut-être, rebutantes à coup sûr.

Nous avons donc cru qu'il était bon de renverser l'ordre logique : dans le présent Livre, nous nous proposons de faire fonctionner, sous les yeux du lecteur, l'instrument thermodynamique; de lui faire exécuter l'ouvrage pour lequel il a été nécessaire de tant compliquer ses rouages. Nous nous bornerons à donner, de temps en temps, sur son mécanisme quelques sommaires indications. Plus tard, si nos forces ne nous trahissent pas, nous démonterons cet instrument pièce à pièce, nous en expliquerons tous les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

organes et nous montrerons les autres applications qu'on en peut faire.

Ce premier Volume est consacré à l'étude des lois qui président à l'équilibre de l'Électricité et à son mouvement permanent sur les corps conducteurs. Après avoir donné un tableau de la théorie classique de l'équilibre électrique et des méthodes mathématiques qui servent à résoudre le problème de l'Électrostatique, nous étudions, dans les trois derniers Livres, les applications de la Thermodynamique aux conducteurs métalliques homogènes ou hétérogènes et aux conducteurs électrolytiques.

Nous sommes très bref sur les électrolytes, non pas que les méthodes employées pour les conducteurs métalliques ne permettent d'en pousser très loin l'étude; mais cette étude ne peut être faite sans un examen approfondi des propriétés des dissolutions salines, et la longueur de cet examen excéderait les bornes de notre Ouvrage.

Au contraire, nous traiterons très complètement les propriétés des conducteurs métalliques; l'exposé que nous en donnons est, croyons-nous, le plus étendu et le plus approfondi qui ait été donné jusqu'ici.

Le second Volume sera consacré aux propriétés des aimants et des corps diélectriques; les méthodes indiquées dans notre *Théorie nouvelle de l'aimantation par influence, fondée sur la Thermodynamique,* nous ont permis de ramener à l'unité le vaste ensemble de recherches auxquelles ces corps ont donné lieu, de les rectifier sur plusieurs points, de les compléter sur beaucoup.

Dans un troisième Volume, nous étudierons les phénomènes que produisent les courants linéaires, les lois de l'induction entre tels courants, leurs actions électrodynamiques, l'induction que les aimants engendrent dans les fils métalliques, l'aimantation par les courants, les actions qui s'exercent entre les aimants et les courants. La méthode nouvelle suivie dans cette partie de notre Ouvrage nous permettra d'étudier les propriétés de courants linéaires quelconques et non pas seulement des courants uniformes, auxquelles on se borne en général.

La méthode suivie dans ce troisième Volume sera étendue ultérieurement à l'étude de la propagation de l'électricité dans les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

milieux d'étendue finie en toute dimension, qu'ils soient conducteurs, magnétiques ou diélectriques.

Nous avons laissé de côté, en général, l'étude des méthodes destinées à mesurer les diverses grandeurs électriques; les Traités classiques renferment, sur ces méthodes, des renseignements suffisants. De même, nous nous sommes borné à indiquer sommairement les expériences qui servent à vérifier les lois que nous étudions; la description détaillée des instruments et des précautions exigés par leur emploi se trouve dans d'autres livres. Notre but, d'ailleurs, n'est pas d'écrire un Manuel propre à servir de guide à l'expérimentateur et au praticien, mais de marquer nettement le lien théorique qui unit entre elles les diverses parties de la Science électrique. La vue claire de ce lien provoquera la découverte de nouveaux phénomènes, de nouvelles lois, qui, à leur tour, serviront à le fortifier et à l'étendre.

Lille, 1er juillet 1891.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME.

TOME I.

LIVRE I.

LES FORCES ÉLECTROSTATIQUES ET LA FONCTION POTENTIELLE.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRES DÉFINITIONS. — LES LOIS DE COULOMB.

§ 1. — Premières définitions.

Symmer et Franklin ont apporté le premier contingent à l'ensemble des hypothèses qui représentent les propriétés des corps électrisés. Ces hypothèses étaient, dans leur origine, intimement liées à des suppositions sur la nature de l'électricité; mais il est aisé aujourd'hui de briser ce lien, de laisser de côté ces suppositions sur la nature de l'électricité, suppositions si étrangères au véritable objet de la Physique, que cette science n'a même pas le droit d'en montrer la vanité; de ne laisser, enfin, aux hypothèses fondamentales que le caractère de définitions de paramètres analytiques qui est essentiellement le leur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Un système électrisé se composera, pour nous, d'un certain nombre de corps soit homogènes, soit doués d'une constitution que définissent certains paramètres et certaines grandeurs géométriques variables d'un point à l'autre d'une manière continue. Ces corps sont séparés les uns des autres et du milieu non électrisable qui les entoure par des surfaces de discontinuité.

A chaque point $M(x, y, z)$ intérieur à l'un de ces corps correspondra une quantité ρ, fonction de x, y, z, ayant en tout point M des valeurs positives ou négatives, mais finies et que l'on nommera la *densité électrique solide* au point M. Si, autour du point M, on trace un élément de volume $dv = dx\,dy\,dz$, la quantité $dq = \rho\,dv$ sera la *quantité d'électricité, la charge électrique,* ou *la masse électrique* que renferme cet élément.

A chaque point P situé sur l'une des surfaces de discontinuité que renferme le système correspondra une quantité σ, fonction des deux paramètres u et v qui déterminent la position d'un point sur cette surface. Cette fonction aura, en tout point P, des valeurs positives ou négatives, mais finies; elle sera nommée la *densité électrique superficielle* au point P. Si, autour du point P, sur la surface considérée, on trace un élément superficiel dS, la quantité $dq = \sigma\,d$S sera la *quantité d'électricité, la charge électrique,* ou *la masse électrique* que renferme cet élément de surface.

L'intégrale

$$\iiint \rho\,dx\,dy\,dz,$$

étendue au volume entier de l'un des corps qui forment le système, représente la quantité totale d'électricité répandue à l'intérieur de ce corps.

L'intégrale

$$\mathrm{S}\sigma\,d\mathrm{S},$$

étendue à tous les éléments de l'une des surfaces de discontinuité du système, représente la quantité totale d'électricité répandue sur cette surface.

Si l'on forme pour tous les corps du système les intégrales analogues à celle que nous venons de considérer en premier lieu, pour toutes les surfaces de discontinuité du système les intégrales ana-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

logues à celle que nous venons de considérer en second lieu, et si l'on ajoute entre elles toutes les intégrales ainsi obtenues, la somme représentera la quantité totale d'électricité que renferme le système.

Nous admettrons que cette quantité demeure invariable dans une modification quelconque du système.

Cette hypothèse a été introduite en Physique par Franklin, lorsqu'il a admis que tout phénomène électrique pouvait être représenté par la formation de quantités égales de fluide positif et de fluide négatif aux dépens du fluide neutre. Depuis l'époque de Franklin, les physiciens n'ont cessé de l'admettre, explicitement ou implicitement, et d'en faire un fréquent usage dans leurs théories. C'est ainsi que, dans un Mémoire d'Ohm, paru en 1827, Mémoire dont nous aurons bientôt à signaler l'importance, nous trouvons ce principe très explicitement énoncé (1). « C'est une condition, dit Ohm, au cours de l'un de ses raisonnements, qui résulte de ce principe fondamental, que les deux électricités se développent toujours dans le même temps en quantités égales. » De nos jours, on a donné à cette hypothèse le titre de *Principe de la conservation de l'électricité* (2).

§ 2. — Lois de Dufay et de Coulomb.

Ces définitions une fois posées, nous admettrons, sur la foi des expériences bien connues de Dufay, de Cavendish et de Coulomb, que si l'on met en présence l'une de l'autre, *à une distance sensible,* deux masses matérielles m et m' infiniment petites, portant de l'électricité répandue à leur intérieur ou distribuée à leur surface, chacune de ces deux masses est soumise à une force vérifiant les lois suivantes :

1° L'action F′ que la masse m exerce sur la masse m' est dirigée

(1) G.-S. Ohm, *Théorie mathématique des courants électriques*, traduite par J.-M. Gaugain, p. 109.

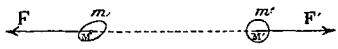
(2) G. Lippmann, *Principe de la conservation de l'électricité ou second principe de la théorie des phénomènes électriques* (*Journal de Physique pure et appliquée*, 2e série, t. X, p. 381; 1881).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

suivant la droite qui joint un point M de la masse m (*fig.* 1) à un point M′ de la masse m'.

2° Si l'on désigne par q la charge électrique totale portée par la masse m, par q' la charge électrique totale portée par la masse

Fig. 1.



m', par r la distance MM′, par ε un certain coefficient positif et absolument constant; si, de plus, on suppose la force F′ comptée positivement quand elle est répulsive, c'est-à-dire dirigée de M vers M′, et négativement quand elle est attractive, c'est-à-dire dirigée de M′ vers M, la force F′ est représentée en grandeur et en signe par la formule

$$F' = \varepsilon \frac{qq'}{r^2}.$$

3° La force F que la masse m' exerce sur la masse m est égale et directement opposée à la force F′ que la masse m exerce sur la masse m'.

On voit, par la formule qui précède, que, le coefficient ε étant positif, le force F′ a le même signe que le produit qq'; en d'autres termes, que deux masses matérielles électrisées s'attirent ou se repoussent selon qu'elles sont chargées d'électricités de signes différents ou de la même électricité.

La valeur du coefficient ε étant absolument constante, on peut, si l'on veut, donner à ce coefficient la valeur 1 et, par conséquent, la faire disparaître des formules, à la seule condition de choisir d'une manière appropriée l'unité de charge électrique laissée, jusqu'ici, arbitraire. Si l'on définit la quantité d'électricité qui doit servir d'unité par cette condition que deux masses matérielles infiniment petites, chargées chacune de cette quantité d'électricité et placées à l'unité de distance l'une de l'autre, exercent l'une sur l'autre une action répulsive égale à l'unité de force; si l'on suppose, en outre, les charges q et q' rapportées à cette unité, la formule précédente pourra s'écrire

$$F' = \frac{qq'}{r^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La simplification qui résulte de cette suppression du coefficient ε est assez faible pour ne présenter, en théorie, que peu d'intérêt. Au contraire, lorsque nous traiterons des relations entre les différents systèmes d'unités électriques, il nous sera commode de considérer les formules dans lesquelles l'unité de quantité d'électricité a été laissée arbitraire et dans lesquelles, par conséquent, ε a été conservé. Nous laisserons donc cette quantité figurer dans nos formules.

L'expérience n'a établi l'exactitude des lois de Coulomb que pour des masses électrisées dont la distance est supérieure à une certaine limite. Les forces qui s'exercent entre des masses électrisées situées à des distances insensibles les unes des autres sont-elles encore données par ces lois? C'est une question que nous examinerons plus loin (1). Pour le moment, nous allons étudier les forces qui s'exercent entre des corps électrisés, dans l'hypothèse où ces forces sont exactement et en toute condition données par les lois de Coulomb. Les résultats obtenus ainsi nous serviront pour la discussion ultérieure des lois de Coulomb (2).

---

(1) *Voir* Livre IV, Chapitre II.

(2) Les travaux de Coulomb sur l'Électricité et le Magnétisme ont été publiés, de 1785 à 1789, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*. Ceux qui se rapportent à la démonstration des lois dites de Coulomb sont les suivants :

Premier Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme, par M. Coulomb. *Construction et usage d'une balance électrique fondée sur la propriété qu'ont les fils de métal d'avoir une force de réaction de torsion proportionnelle à l'angle de torsion* (*Mémoires de l'Académie pour* 1785, p. 569-577).

Second Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme, où l'on détermine suivant quelles loix le fluide magnétique, ainsi que le fluide électrique, agissent soit par répulsion, soit par attraction, par M. Coulomb (*Mémoires de l'Académie pour* 1785, p. 578-611).

Les Mémoires de Coulomb forment le Tome I des *Mémoires de Physique* réimprimés par la Société française de Physique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

DÉFINITION DE LA FONCTION POTENTIELLE. — PROPRIÉTÉS DE CETTE FONCTION EN UN POINT SITUÉ HORS DES CHARGES AGISSANTES.

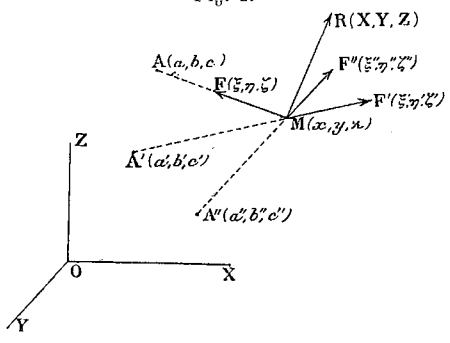
La loi de Coulomb présente, avec la loi de l'attraction universelle, une étroite analogie. Aussi a-t-on pu étendre à l'étude de l'électricité les méthodes analytiques que les astronomes avaient créées pour résoudre les problèmes de la Mécanique céleste. Ces méthodes, transportées en un champ nouveau, y ont montré une fécondité extraordinaire, qui s'est manifestée à la fois par de magnifiques théories mathématiques et par des conséquences physiques d'une grande importance.

C'est aux propriétés d'une fonction dont le nom au moins a pénétré partout, la *fonction potentielle,* que se rattachent les conséquences dont il s'agit. Nous allons voir comment les lois de Coulomb nous conduisent à la définition de la fonction potentielle.

Supposons tout d'abord, pour simplifier notre exposé, que l'on remplace par des points les éléments solides ou superficiels des corps électrisés et que l'on concentre en chacun de ces points la charge électrique totale répartie sur l'élément auquel il correspond.

Soit M un point de coordonnées x, y, z, renfermant une quan-

Fig. 2.



tité égale à l'unité d'électricité positive. Soient A, A′, A″, ..., d'autres points en nombre quelconque (*fig.* 2). Le point A ren-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ferme une quantité q d'électricité, le point A′ en renferme une quantité q', le point A″ une quantité q'', ... Les coordonnées du point A sont a, b, c; celles du point A′ sont a', b', c'; celles du point A″ sont a'', b'', c''; ....

Le point A exerce au point M une action F, dirigée de A vers M, qui a pour valeur

$$F = \varepsilon \frac{q}{r^2},$$

r désignant la distance AM.

Le point A′ exerce de même au point M une action F′, dirigée de A′ vers M, qui a pour valeur

$$F = \varepsilon \frac{q'}{r'^2},$$

r' désignant la distance A′M; ....

Soit R l'action résultante exercée au point M par les points A, A′, A″, ...; soient X, Y, Z, les composantes de cette action suivant les trois axes de coordonnées. Soient ξ, η, ζ les composantes de la force F; ξ', η', ζ' les composantes de la force F′; ξ'', η'', ζ'' les composantes de la force F″; ....

Nous aurons

$$\begin{aligned} X &= \xi + \xi' + \xi'' + \ldots, \\ Y &= \eta + \eta' + \eta'' + \ldots, \\ Z &= \zeta + \zeta' + \zeta'' + \ldots. \end{aligned}$$

Désignons par α, β, γ les angles que la direction AM fait avec les trois axes de coordonnées. Nous aurons

$$\xi = F\cos\alpha, \qquad \eta = F\cos\beta, \qquad \zeta = F\cos\gamma.$$

Mais, d'autre part,

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{y-b}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{z-c}{r},$$

ou bien

$$\cos\alpha = \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \cos\beta = \frac{\partial r}{\partial y}, \qquad \cos\gamma = \frac{\partial r}{\partial z},$$

d'après l'égalité

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous avons donc

$$\xi = \varepsilon \frac{q}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\eta = \varepsilon \frac{q}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y},$$

$$\zeta = \varepsilon \frac{q}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\xi = -\varepsilon q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\eta = -\varepsilon q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\zeta = -\varepsilon q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Nous avons de même

$$\xi' = -\varepsilon q' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x},$$

$$\eta' = -\varepsilon q' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y},$$

$$\zeta' = -\varepsilon q' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z};$$

.....

De ces formules, nous déduisons les suivantes

$$X = -\varepsilon \left(q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + q' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial x} + q'' \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial x} + \dots \right),$$

$$Y = -\varepsilon \left(q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + q' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial y} + q'' \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial y} + \dots \right),$$

$$Z = -\varepsilon \left(q \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + q' \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial z} + q'' \frac{\partial \frac{1}{r''}}{\partial z} + \dots \right);$$

ou bien, en posant

$$V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \dots, \tag{1}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, en remarquant que q, q', q'', ... sont des quantités indépendantes de x, y, z,

$$(2)\qquad \begin{cases} X = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ Y = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ Z = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

La quantité V, dont les dérivées partielles font ainsi connaître les composantes de l'action R exercée au point M, chargé d'une unité d'électricité, par les charges q, q', q'', ..., placées aux points A, A', A'', ..., a reçu le nom de *fonction potentielle au point* M *des charges réparties aux points* A, A', A'', ...

On peut, au moyen de la fonction potentielle, connaître la composante de la force R suivant une direction quelconque.

Soient a, b, c les angles que cette direction fait avec les trois axes de coordonnées et T la composante de la force R suivant cette direction. Si nous désignons par l, m, n les angles que la direction de la force R fait avec les axes de coordonnées et par θ l'angle que la direction de la force R fait avec la direction donnée, nous aurons

$$\cos\theta = \cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n$$

et

$$T = R\cos\theta = R\cos l \cos a + R\cos m \cos b + R\cos n \cos c.$$

Mais

$$X = R\cos l, \qquad Y = R\cos m, \qquad Z = R\cos n.$$

Nous aurons donc

$$T = X\cos a + Y\cos b + Z\cos c.$$

Menons par le point M une parallèle à la direction considérée. Désignons par s la distance du point M à une origine fixe prise sur cette droite, cette distance étant comptée positivement si, pour aller de cette origine au point M, on marche dans la direction considérée. Soit M' un autre point, pris sur la même droite, à une distance $(s + ds)$ de l'origine. La fonction potentielle a, en ce point M', une valeur V' que nous représenterons par $\left(V + \dfrac{\partial V}{\partial s}\, ds\right)$. La quantité $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ ainsi définie est ce que nous nommerons la *dérivée de la fonction potentielle suivant la direction s*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les coordonnées du point M′ auront pour valeurs $\left(x + \frac{dx}{ds}\,ds\right)$, $\left(y + \frac{dy}{ds}\,ds\right)$, $\left(z + \frac{dz}{ds}\,ds\right)$, en sorte que nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Mais, d'autre part,

$$\cos a = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos b = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos c = \frac{dz}{ds},$$

en sorte que, si, dans l'expression de T, nous remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs (2), nous aurons

$$T = -\varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)$$

ou bien

$$T = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{3}$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que chacun des éléments de volume ou de surface que renferme le système était remplacé par un point de cet élément, et que la charge portée par cet élément était concentrée en ce point. Cette opération est toujours permise, pourvu que les éléments auxquels appartiennent les points A, A′, A″, ... soient tous à distance finie du point M; ou, en d'autres termes, que l'on puisse tracer autour du point M une surface fermée dont tous les points soient à une distance finie de M et qui ne renferme pas d'autre électricité que la charge égale de l'unité qui se trouve au point M. Si ces conditions sont remplies, nous dirons abréviativement que le point M est *extérieur aux charges agissantes*.

Dans ces conditions, il est aisé de voir que l'expression de la fonction potentielle au point M peut s'obtenir de la manière suivante :

Pour chacun des volumes électrisés que renferme le système, formons l'intégrale triple

$$\iiint \frac{\rho}{r}\,da\,db\,dc,$$

ρ étant la densité électrique solide en un point de l'élément $da\,db\,dc$, et r la distance de ce point au point M (x, y, z).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour chacune des surfaces électrisées que renferme le système, formons l'intégrale double

$$\mathrm{S}\frac{\sigma}{r}\,d\mathrm{S},$$

σ étant la densité superficielle en un point de l'élément $d\mathrm{S}$, et r la distance de ce point au point $\mathrm{M}(x, y, z)$.

Ajoutons ensemble toutes les intégrales ainsi obtenues, et nous aurons la valeur de la fonction potentielle au point M

$$\text{(4)}\qquad \mathrm{V}(x, y, z) = \sum\int\int\int \frac{\rho}{r}\,da\,db\,dc + \sum\mathrm{S}\frac{\sigma}{r}\,d\mathrm{S}.$$

La fonction V ainsi définie est une fonction des coordonnées x, y, z du point M.

Le point M demeurant à distance finie de tous les points électrisés, r est toujours différent de o. L'élément soumis à l'intégration est toujours fini; il varie d'une manière uniforme et continue avec les coordonnées x, y, z du point M. La quantité V est donc une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x, y, z du point M.

Lorsque l'une des trois variables x, y, z croît au delà de toute limite, toutes les quantités r croissent au delà de toute limite ; tous les éléments sous le signe d'intégration tendent vers o, et il en est de même de la fonction V. Mais les produits $x\mathrm{V}$, $y\mathrm{V}$, $z\mathrm{V}$ gardent en général, dans ce cas, des valeurs finies.

On a évidemment, en vertu de l'égalité (4),

$$\text{(5)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n+p}\mathrm{V}}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial z^p} &= \sum\int\int\int \rho\,\frac{\partial^{m+n+p}\frac{1}{r}}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial z^p}\,da\,db\,dc \\ &\quad + \sum\mathrm{S}\,\sigma\,\frac{\partial^{m+n+p}\frac{1}{r}}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial z^p}\,d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

De cette formule, on déduit aisément la conclusion suivante :

Lorsque le point M reste extérieur aux masses agissantes, les dérivées partielles d'ordre quelconque de la fonction potentielle au point M par rapport aux coordonnées de ce point existent et sont des fonctions uniformes, finies et continues des coordonnées de ce point. Toutes ces dérivées tendent vers o lorsque le point M s'éloigne indéfiniment. Le produit d'une dérivée quelconque d'ordre p

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par une fonction homogène et du degré p des variables x, y, z tend également vers o dans ce cas, tandis que le produit de la même dérivée par une fonction homogène et de degré $(p+1)$ des mêmes variables demeure, en général, fini.

La relation

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \tag{6}$$

donne

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}.$$

L'égalité (5), qui est applicable toutes les fois que le point M est extérieur aux masses agissantes, donne alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\sum \iiint \frac{\rho}{r^3}\, da\, db\, dc + 3\sum \iiint \frac{\rho(x-a)^2}{r^5}\, da\, db\, dc - \sum \iint \frac{\sigma}{r^3}\, dS + 3\sum \iint \frac{\sigma(x-a)^2}{r^5}\, dS.$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\sum \iiint \frac{\rho}{r^3}\, da\, db\, dc + 3\sum \iiint \frac{\rho(y-b)^2}{r^5}\, da\, db\, dc - \sum \iint \frac{\sigma}{r^3}\, dS + 3\sum \iint \frac{\sigma(y-b)^2}{r^5}\, dS,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\sum \iiint \frac{\rho}{r^3}\, da\, db\, dc + 3\sum \iiint \frac{\rho(z-c)^2}{r^5}\, da\, db\, dc - \sum \iint \frac{\sigma}{r^3}\, dS + 3\sum \iint \frac{\sigma(z-c)^2}{r^5}\, dS.$$

Si l'on ajoute membre à membre les trois égalités ainsi obtenues en tenant compte de l'égalité (6), on arrive à la proposition suivante, dont nous verrons à chaque instant l'importance :

En tout point M, *extérieur à l'espace qui renferme l'agent, on a l'égalité*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{7}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'expression

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

se présente si fréquemment dans les calculs qu'il est utile de la représenter par un symbole ; on adopte, en général, aujourd'hui, dans les Traités français et allemands, le symbole ΔV. L'équation précédente devient alors

(7 *bis*) $$\Delta V = 0.$$

Nous venons d'esquisser brièvement les principales propriétés de la fonction potentielle en un point extérieur à l'espace qui renferme l'agent. Ces propriétés ont une telle importance qu'il serait impardonnable d'ignorer l'histoire de leur découverte (1).

Lagrange, le premier, dans ses *Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances* (2), a signalé la propriété fondamentale de la fonction potentielle :

« Soient, dit-il, M, M′, M″, ... les masses des corps qui composent le système donné ; x, y, z les coordonnées rectangulaires de l'orbite du corps M dans l'espace ; x', y', z' celles de l'orbite du corps M′, etc. ; qu'on fasse, pour abréger,

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{MM''}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \dots + \frac{M'M''}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}} + \dots$$

et qu'on dénote, à l'ordinaire, par $\frac{d\Omega}{dx}, \dots$ les coefficients de $dx, \dots$, dans la différentielle de la quantité Ω regardée comme fonction des variables x, y, z, x', ... ; on aura

$$\frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dy}, \quad \frac{1}{M}\frac{d\Omega}{dz},$$

(1) *Voir* MAX BACHARACH, *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie* (Dissertation inaugurale). Würzbourg ; 1883.

(2) Lues à l'Académie de Berlin le 20 octobre 1777 (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1777, publiés en 1779, pp. 155-174).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pour les forces avec lesquelles le corps M est attiré par les autres corps M′, M″, ..., suivant les directions des coordonnées $x, y, z, \ldots$. Cette manière de représenter les forces est, comme on le voit, extrêmement commode par sa simplicité et sa généralité. »

Lagrange ajoute en terminant (p. 171) : « On prouverait par les mêmes principes que ces théorèmes seraient également vrais si les corps agissaient les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle proportionnelle à une fonction quelconque de la distance. »

La remarque de Lagrange paraît n'avoir pas été aperçue de ses contemporains et Laplace a dû, par ses propres efforts, retrouver la fonction potentielle; car le premier qui en fasse usage, après Lagrange, est Legendre (1), et il désigne la propriété fondamentale de cette fonction comme « un théorème que M. Laplace a bien voulu me communiquer ».

Laplace a employé, pour la première fois, la fonction potentielle en 1784, dans sa *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*. Il en a fait ensuite un fréquent usage dans la *Mécanique céleste* et, par là, a contribué, plus que tout autre, à révéler l'importance de cette fonction.

Dans le Mémoire (2) où Poisson a fondé l'Électrostatique théorique, la fonction potentielle a, pour la première fois, été employée dans les recherches de Physique; le rôle qu'elle y joue n'a cessé de grandir depuis cette époque.

Le nom de *fonction potentielle* lui fut donné par Green (3) en 1828. Gauss (4) lui donna en 1840 le nom de *potentiel;* ce nom prête à certaines confusions; aussi Clausius (5) a-t-il proposé de

---

(1) Legendre, *Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes* (*Mémoires des Savants étrangers*, pp. 411-434. Paris; 1785).

(2) Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, lu à l'Académie des Sciences les 9 mai et 3 août 1812 (*Mémoires des Savants étrangers*, p. 1; 1811).

(3) G. Green, *An essay on the application of mathematical analysis on the theories of electricity and magnetism*. Nottingham; 1828.

(4) C.-F. Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs Kräfte* (*Mémoires de Goettingue*, 1840, Gauss, *Werke*, t. V).

(5) Clausius, *La fonction potentielle et le potentiel;* traduit en français par Folie. Paris; 1870.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

reprendre la dénomination de Green. Il est à regretter que cet exemple, auquel nous nous conformerons dans le présent Ouvrage, n'ait pas été suivi par tous les physiciens.

Le symbole ΔV, adopté aujourd'hui en France et en Allemagne pour représenter l'expression

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

est dû à Murphy (1). Lamé désignait cette expression par $\Delta_2 V$, Betti par $\Delta^2 V$, Green par δV. Les auteurs anglais emploient volontiers les symboles ∇V et $\nabla^2 V$.

L'égalité fondamentale

$$\Delta V = 0$$

est due à Laplace. On lui donne, en général, le nom d'*équation de Laplace*. Laplace l'a donnée, sous cette forme, seulement en 1787 (2). Mais, dès 1782 (3), il avait donné l'équation, transformée de celle-là en coordonnées polaires, qui sert de point de départ à la théorie des *fonctions* Y_n *de Laplace*.

---

(1) MURPHY, *Elementary principles of the theory of electricity, heat and molecular attractions*, Part I, p. 140; 1853.

(2) LAPLACE, *Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne* (*Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année* 1787, pp. 249-267. Paris; 1789).

(3) LAPLACE, *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année* 1782. Paris; 1785).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE III.

THÉORÈME DE GREEN.

Pour pousser plus avant l'étude de la fonction potentielle, nous aurons souvent besoin de faire usage d'une identité analytique dont l'énoncé porte le nom de *théorème de Green*.

Pour démontrer cette égalité, nous nous appuierons sur un lemme que nous allons tout d'abord établir.

Considérons un espace clos limité par une surface simplement connexe ou à connexions multiples. Soient U et F deux fonctions de x, y, z, qui sont finies, uniformes et continues en tous les points de cet espace et de la surface qui le limite, et dont les dérivées partielles par rapport à x sont finies en tous les points du même espace et de la surface qui le limite.

Envisageons l'intégrale

$$J = \iiint U \frac{\partial F}{\partial x} dx\, dy\, dz,$$

étendue à cet espace. Nous allons, au moyen d'une intégration par parties, transformer cette intégrale.

Soit M un point de la surface qui limite l'espace considéré. Menons en ce point une normale à la surface vers l'intérieur de cet espace. Désignons par (N_i, x) l'angle formé par cette normale ainsi dirigée avec la direction positive de l'axe des x.

Menons, au point M, une parallèle à la direction positive de l'axe des x. Si, au point M, cette parallèle pénètre à l'intérieur de l'espace considéré, l'angle (N_i, x) sera aigu. Il sera obtus si cette parallèle sort de l'espace.

Menons un plan perpendiculaire à l'axe des x, laissant entièrement du côté des x positifs l'espace considéré. Tous les points de cet espace se projettent sur ce plan à l'intérieur d'une certaine courbe fermée, à connexion simple ou multiple, qui est le contour apparent de cet espace. Divisons l'aire intérieure à cette courbe fermée en éléments superficiels.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit $d\Sigma$ un de ces éléments. Par tous les points du contour de l'élément $d\Sigma$, menons des parallèles à l'axe des x. Nous obtiendrons ainsi un cylindre infiniment délié qui découpera sur la surface de l'espace considéré un nombre pair d'éléments. Nous désignerons ces éléments, d'après l'ordre dans lequel ils sont rencontrés lorsqu'on s'avance parallèlement à l'axe des x, par les indices $1, 2, \ldots, 2n$. Leurs surfaces seront $dS_1, dS_2, \ldots, dS_{2n}$. En un point d'un élément de rang impair, une parallèle à la direction positive de l'axe des x pénètre à l'intérieur de l'espace ; l'angle (N_i, x) est aigu. Au contraire, en un point d'un élément de rang pair, une parallèle à la direction positive de l'axe des x sort de l'espace clos ; l'angle (N_i, x) est obtus. On peut donc écrire

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d\Sigma &= dS_1 \cos(N_i, x)_1 = -dS_2 \cos(N_i, x)_2 \\ &= dS_3 \cos(N_i, x)_3 = \ldots = -dS_{2n} \cos(N_i, x)_{2n}. \end{aligned}\right.$$

Soient x_1 l'abscisse d'un point de l'élément dS_1 ; x_2 l'abscisse d'un point de l'élément $dS_2, \ldots$; x_{2n} l'abscisse d'un point de l'élément dS_{2n}. Nous aurons évidemment

$$J = \mathbf{S}\, d\Sigma \left(\int_{x_1}^{x_2} U \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \int_{x_3}^{x_4} U \frac{\partial F}{\partial x}\, dx + \ldots + \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} U \frac{\partial F}{\partial x}\, dx \right),$$

le signe $\mathbf{S}$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\Sigma$ compris à l'intérieur du contour apparent de l'espace considéré.

Lorsque x varie de x_{2p-1} à x_{2p}, il résulte des hypothèses faites que les deux fonctions U et F restent finies, uniformes et continues et que les dérivées partielles de ces deux fonctions par rapport à x restent finies. On peut donc appliquer à l'intégrale

$$\int_{x_{2p-1}}^{x_{2p}} U \frac{\partial F}{\partial x}\, dx$$

la formule d'intégration par parties et écrire

$$\int_{x_{2p-1}}^{x_{2p}} U \frac{\partial F}{\partial x}\, dx = (UF)_{2p} - (UF)_{2p-1} - \int_{x_{2p-1}}^{x_{2p}} F \frac{\partial U}{\partial x}\, dx,$$

$(UF)_k$ désignant la valeur que prend le produit UF lorsqu'on donne aux variables y et z les valeurs des coordonnées d'un point de l'élé-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment $d\Sigma$, et à la variable x la valeur de l'abscisse d'un point de l'élément ds_k.

On a alors

$$J = \sum d\Sigma\,[-(UF)_1+(UF)_2-(UF)_3+\ldots-(UF)_{2n-1}+(UF)_{2n}]$$
$$-\sum d\Sigma\left(\int_{x_1}^{x_2} F\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\int_{x_3}^{x_4} F\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\ldots+\int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} F\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\right).$$

La seconde ligne de cette égalité peut évidemment être remplacée par l'expression suivante

$$-\iiint F\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant à l'espace considéré.

La première ligne peut être remplacée, en vertu des relations (1), par

$$-\sum UF\cos(N_i, x)\,dS,$$

le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments dS de la surface qui limite l'espace considéré. On a donc

$$(2)\qquad \begin{cases} \iiint U\frac{\partial F}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \\ \quad =-\sum UF\cos(N_i, x)\,dS-\iiint F\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

Tel est le lemme que nous voulions établir.

Nous en déduirons aisément le théorème de Green.

Soit U une fonction de x, y, z, uniforme, finie et continue à l'intérieur d'un espace limité par une surface à connexion simple ou multiple et sur cette surface même ; les dérivées du premier ordre de U existent et sont finies à l'intérieur de cet espace et sur la surface qui le limite. Soit V une autre fonction de x, y, z, qui est uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre à l'intérieur de cet espace et sur la surface qui le limite ; les trois dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ sont supposées finies en tous les points de cet espace et de la surface qui le limite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Faisons usage de l'égalité (2), en supposant que

$$F = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Nous aurons

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\,dy\,dz = -\mathbf{S} U \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N_i, x)\, dS - \iiint \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

De même

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx\,dy\,dz = -\mathbf{S} U \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N_i, y)\, dS - \iiint \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dx\,dy\,dz = -\mathbf{S} U \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N_i, z)\, dS - \iiint \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} dx\,dy\,dz.$$

Ajoutons membre à membre les trois égalités ainsi obtenues et nous trouverons

$$\iiint U\,\Delta V\, dx\,dy\,dz = -\mathbf{S} U \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N_i, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N_i, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N_i, z)\right] dS - \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Si nous désignons par $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ la dérivée de la fonction V suivant la normale à la surface qui limite l'espace considéré, cette normale étant dirigée vers l'intérieur de cet espace, la définition même de la dérivée d'une fonction suivant une direction nous donnera

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N_i, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N_i, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N_i, z),$$

et l'égalité précédente deviendra

$$(3)\quad \iiint U\,\Delta V\, dx\,dy\,dz = -\iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz - \mathbf{S} U \frac{\partial V}{\partial N_i} dS.$$

Telle est l'identité qui est connue sous le nom de *théorème de Green*.

On donne souvent à cette identité de Green une autre forme.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Admettons que les dérivées partielles du premier ordre de U soient uniformes, finies et continues, comme celles de V, à l'intérieur de l'espace considéré et sur la surface qui le limite, et que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ existent et soient finies en tous les points de cet espace et de la surface qui le limite. Nous pourrons écrire

$$\iiint V\,\Delta U\,dx\,dy\,dz = -\iiint\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz-\mathbf{S}\,V\frac{\partial U}{\partial N_i}\,dS.$$

En comparant cette égalité à l'égalité (3), nous trouvons

$$(4)\qquad \iiint(U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dx\,dy\,dz = -\mathbf{S}\left(U\frac{\partial V}{\partial N_i}-V\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)dS.$$

Cette nouvelle forme du théorème de Green est souvent employée pour transformer une intégrale triple étendue à un espace clos en une intégrale double étendue à la surface qui limite ce volume, transformation que l'on a à chaque instant occasion d'effectuer en Physique mathématique.

Au moyen d'hypothèses particulières faites sur les fonctions U et V, on peut déduire des formules (3) et (4) d'autres formules souvent employées.

Si, par exemple, nous supposons U = V, l'identité (3) devient

$$(5)\qquad \iiint V\,\Delta V\,dx\,dy\,dz = -\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz-\mathbf{S}\,V\frac{\partial V}{\partial N_i}\,dS.$$

Si nous faisons U = 1, soit dans l'identité (3), soit dans l'identité (4), nous trouvons

$$(6)\qquad \iiint\Delta V\,dx\,dy\,dz = -\mathbf{S}\frac{\partial V}{\partial N_i}\,dS.$$

Nous aurons souvent, dans la suite de ces Leçons, à faire usage des égalités (5) et (6).

Green a, le premier (1), insisté sur la grande importance du

(1) GEORGES GREEN, *Essay on the application of mathematical analysis on the theories of electricity and magnetism* (Nottingham, 1828).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

théorème que nous venons de démontrer, mais ce théorème était, au moins partiellement, connu avant lui : « La formule (4), dit M. E. Mathieu (1), est celle qui sert à déterminer les coefficients de la série qui donne le refroidissement d'un corps; elle a donc été employée dans différents cas par Fourier et Poisson, longtemps avant l'apparition du Mémoire de Green sur la théorie de l'Électricité. » Le lemme dont nous avons fait usage pour l'établir a été souvent employé par Poisson.

(1) Émile Mathieu, *Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnetisme.* Première Partie : *Théorie du potentiel,* p. 14 (Paris, 1885).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IV.

LEMMES DE GAUSS.
ATTRACTION D'UNE COUCHE SPHÉRIQUE HOMOGÈNE.

§ 1. — Les trois lemmes de Gauss.

La démonstration de l'identité de Green repose essentiellement sur la division d'un espace clos en une infinité de cylindres infiniment déliés ayant tous leurs génératrices parallèles entre elles.

Il existe un autre mode très naturel de division d'un semblable espace en volumes infiniment petits : il consiste à décomposer cet espace en cônes infiniment aigus ayant tous leur sommet en un même point.

Ce mode de division a été employé, pour la première fois, par Lagrange, dans l'étude du problème de l'attraction des ellipsoïdes ([1]). Legendre retrouva, de son côté, ce même mode de décomposition de l'espace dans son premier travail sur l'attraction des ellipsoïdes ([2]). Dans son second Mémoire sur le même problème, Legendre ([3]) reconnaît, à cet égard, la priorité de Lagrange : « Ce principe, dit-il, auquel j'étais parvenu par des considérations géométriques, ne s'est point trouvé différent d'un moyen de transformation indiqué par M. de Lagrange.... La propriété en appartient donc à cet illustre géomètre. »

Ce mode de division de l'espace s'est montré très puissant entre les mains des géomètres qui se sont occupés de la théorie de l'attraction. Il leur a notamment permis de résoudre le problème de l'attraction des ellipsoïdes.

Il existe une sorte de parallélisme entre les méthodes fondées sur la décomposition de l'espace en cylindres infiniment déliés dont les génératrices ont même direction et les méthodes fondées

([1]) LAGRANGE, *Mémoires de l'Académie de Berlin,* p. 125; 1773.

([2]) LEGENDRE, *Mémoires des Savants étrangers,* t. X; 1778.

([3]) LEGENDRE, *Mémoires sur les intégrales doubles* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* p. 455; 1788).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sur la décomposition de l'espace en cônes infiniment déliés issus d'un même point. Ce parallélisme a été, à plusieurs reprises, signalé par Gauss (1).

Le rôle que joue, dans la première espèce de méthodes, le théorème de Green, semble être tenu, dans la seconde espèce de méthodes, par trois lemmes très simples que Gauss (2) a imaginés afin de résoudre le problème de l'attraction des ellipsoïdes. Ce sont ces lemmes que nous allons démontrer, suivant la forme même de Gauss.

Imaginons une surface fermée S, à connexion simple ou multiple, limitant un certain espace clos E; imaginons aussi un point M que, pour le moment, nous supposerons n'être point situé sur la surface S.

Du point M, faisons partir un rayon vecteur qui rencontre la surface S; si le point M est à l'intérieur de l'espace E, ce rayon vecteur rencontrera la surface S un nombre impair de fois. A chaque rencontre d'ordre impair, il sortira de l'espace considéré, et, à chaque rencontre d'ordre pair, il y entrera. Si, au contraire, le point M est extérieur à l'espace considéré, le rayon vecteur rencontrera la surface S un nombre pair de fois; à chaque rencontre d'ordre impair, il entrera dans l'espace considéré; à chaque rencontre d'ordre pair, il en sortira.

Désignons par r_p la distance du point M au $p^{\text{ième}}$ point de rencontre de notre rayon vecteur avec la surface S. Soit N_e la normale en ce point à la surface S, cette normale étant dirigée vers l'extérieur de l'espace E, et soit $(r, N_e)_p$ l'angle que la normale ainsi dirigée fait avec le rayon vecteur. L'angle $(r, N_e)_p$ est aigu ou obtus, selon qu'au point considéré le rayon vecteur sort de l'espace E ou pénètre dans cet espace.

Dès lors, *si le point* M *est intérieur à l'espace* E, nous au-

---

(1) GAUSS (C.-F.), *Theoria attractionis corporum sphæroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata* (*Nouveaux Mémoires de Goettingue*, t. II, 1813; GAUSS, *Werke*, t. V, p. 1). — *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (*Nouveaux Mémoires de Goettingue*, t. V, 1830; GAUSS, *Werke*, t. V, p. 43).

(2) GAUSS (C.-F.), *Theoria attractionis corporum sphæroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata* (*Nouveaux Mémoires de Goettingue*, t. II, 1813; GAUSS, *Werke*, t. V, p. 9).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rons

$$\cos(r, N_e)_1 > 0, \quad \cos(r, N_e)_2 < 0, \quad \ldots, \quad \cos(r, N_e)_{2m-1} > 0,$$

et, *si le point* M *est extérieur à l'espace* E, nous aurons

$$\cos(r, N_e)_1 < 0, \quad \cos(r, N_e)_2 > 0, \quad \ldots, \quad \cos(r, N_e)_{2n} > 0.$$

Sur la surface d'une sphère de rayon 1, ayant pour centre le point M, prenons un élément $d\sigma$ voisin du point où cette surface sphérique est percée par notre rayon vecteur. Le contour de cet élément étant pris pour directrice d'un cône infiniment délié dont le sommet est en M, ce cône découpera sur la surface S des éléments $ds_1, ds_2, \ldots, ds_p, \ldots$.

Si l'angle $(r, N_e)_p$ est aigu, nous aurons

$$d\sigma = \frac{\cos(r, N_e)_p \, dS_p}{r_p^2}.$$

Si, au contraire, l'angle $(r, N_e)_p$ est obtus, nous aurons

$$d\sigma = -\frac{\cos(r, N_e)_p \, dS_p}{r_p^2}.$$

Cela posé, considérons, en premier lieu, le cas où *le point* M *est intérieur à l'espace considéré*. Nous aurons

$$d\sigma = \frac{\cos(r, N_e)_1 \, dS_1}{r_1^2} = -\frac{\cos(r, N_e)_2 \, dS_2}{r_2^2}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\cos(r, N_e)_{2m-1} \, dS_{2m-1}}{r_{2m-1}^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos(r, N_e)_1 \, dS_1}{r_1^2} + \frac{\cos(r, N_e)_2 \, dS_2}{r_2^2} + \ldots + \frac{\cos(r, N_e)_{2m-1} \, dS_{2m-1}}{r_{2m-1}^2} = d\sigma.$$

Écrivons les égalités analogues qui nous sont fournies par tous les éléments $d\sigma$ de la sphère de rayon 1, et ajoutons-les membre à membre; nous verrons sans peine que le premier membre de l'égalité résultante sera l'intégrale

$$\int_S \frac{\cos(r, N_e) \, dS}{r^2}$$

étendue à toute la surface S, et que le second membre sera la surface de la sphère de rayon 1, c'est-à-dire 4π. D'où le théorème suivant, qui constitue le *premier lemme de Gauss :*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Lorsque le point M *est intérieur à l'espace clos limité par la surface* S, *on a*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{S}\frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\,d\mathrm{S}}{r^2} = 4\pi.$$

Considérons maintenant le cas où *le point* M *est extérieur à l'espace* E limité par la surface S, on a, dans ce cas,

$$d\sigma = -\frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)_1\,d\mathrm{S}_1}{r_1^2} = \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)_2\,d\mathrm{S}_2}{r_2^2}$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)_{2n}\,d\mathrm{S}_{2n}}{r_{2n}^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)_1\,d\mathrm{S}_1}{r_1^2} + \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)_2\,d\mathrm{S}_2}{r_2^2} + \ldots + \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)_{2n}\,d\mathrm{S}_{2n}}{r_{2n}^2} = 0.$$

En écrivant des égalités analogues pour tous les éléments $d\sigma$ et en les ajoutant membre à membre, on trouve le résultat suivant, qui constitue le *deuxième lemme de Gauss :*

Lorsque le point M *est extérieur à l'espace clos limité par la surface* S, *on a*

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{S}\frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\,d\mathrm{S}}{r^2} = 0.$$

Examinons maintenant le cas un peu plus compliqué où le point M est sur la surface S, et supposons d'abord que la surface S admette au point M un plan tangent unique P. Ce plan P divise l'espace en deux régions faciles à distinguer l'une de l'autre. Si, par le point M, on mène une demi-droite normale au plan P, selon la direction que l'on aura attribuée à cette demi-droite, elle entrera dans l'espace E au point M, ou bien elle en sortira. Nous nommerons première région la région dans laquelle se trouve la première direction, et deuxième région la région dans laquelle se trouve la deuxième direction.

Le plan P divise en deux hémisphères la sphère de rayon 1 ayant le point M pour centre. Nommons premier hémisphère l'hémisphère situé dans la première région, et deuxième hémisphère l'hémisphère situé dans la deuxième région.

Soit $d\sigma$ un élément superficiel du premier hémisphère. Prenons le contour de cet élément $d\sigma$ pour directrice d'un cône infiniment

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

délié ayant pour sommet le point M. Ce cône découpe sur la surface S un nombre impair d'éléments dS_1, dS_2, ..., dS_{2m-1}. Les éléments d'ordre impair correspondent aux points où le cône sort de l'espace E, les éléments d'ordre pair aux points où il pénètre dans cet espace. On a donc

$$d\sigma = \frac{\cos(r, N_e)_1 dS_1}{r_1^2} = -\frac{\cos(r, N_e)_2 dS_2}{r_2^2}$$
$$= \dots\dots\dots\dots = \frac{\cos(r, N_e)_{2m-1} dS_{2m-1}}{r_{2m-1}^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos(r, N_e)_1 dS_1}{r_1^2} + \frac{\cos(r, N_e)_2 dS_2}{r_2^2} + \dots + \frac{\cos(r, N_e)_{2m-1} dS_{2m-1}}{r_{2m-1}^2} = d\sigma.$$

Écrivons des égalités analogues pour tous les éléments $d\sigma$ du premier hémisphère, et ajoutons-les membre à membre; nous aurons

$$(a) \qquad \int \frac{\cos(r, N_e) dS}{r^2} = 2\pi,$$

l'intégration s'étendant à tous les éléments de la surface S qui sont situés dans la première région.

Soit de même $d\sigma$ un élément superficiel du second hémisphère; à cet élément, circonscrivons un cône infiniment délié ayant le point M pour sommet. Ce cône découpe sur la surface S un nombre pair ou nul d'éléments dS_1, dS_2, ..., dS_{2n}. Les éléments d'ordre impair correspondent aux points où le cône entre dans l'espace E, les éléments d'ordre pair aux points où il sort de cet espace. On a donc

$$d\sigma = -\frac{\cos(r, N_e)_1 dS_1}{r_1^2} = \frac{\cos(r, N_e)_2 dS_2}{r_2^2}$$
$$= \dots\dots\dots\dots = \frac{\cos(r, N_e)_{2n} dS_{2n}}{r_{2n}^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\cos(r, N_e)_1 dS_1}{r_1^2} + \frac{\cos(r, N_e)_2 dS_2}{r_2^2} + \dots + \frac{\cos(r, N_e)_{2n} dS_{2n}}{r_{2n}^2} = 0.$$

Ajoutons membre à membre les égalités analogues fournies par tous les éléments $d\sigma$ du second hémisphère, et nous trouverons

$$(b) \qquad \int \frac{\cos(r, N_e) dS}{r^2} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'intégration s'étendant à tous les éléments de la surface S qui se trouvent dans la deuxième région.

Ajoutons membre à membre les deux égalités (a) et (b); la somme des premiers membres sera l'intégrale

$$\int_S \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2}$$

étendue à la surface S tout entière, et nous obtiendrons le *troisième lemme de Gauss :*

Lorsque le point M *est situé sur la surface* S *et que la surface admet en ce point un plan tangent unique, on a*

$$\int_S \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2} = 2\pi. \tag{3}$$

Si au point M la surface S, au lieu d'admettre un seul plan tangent, admettait plusieurs plans tangents ou un cône de tangentes à une ou plusieurs nappes, un raisonnement analogue donnerait aisément la valeur de l'intégrale

$$\int_S \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2}.$$

Si, par exemple, le point considéré est un point conique simple, on aura

$$\int_S \frac{\cos(r, N_e)}{r^2}\, dS = \alpha,$$

α étant l'ouverture sphérique de la nappe du cône qui renferme la surface à son intérieur au voisinage du point considéré; si le point considéré fait partie d'une arête, on aura encore la même formule, $\frac{\alpha}{2}$ étant l'angle plan du dièdre qui, au voisinage de l'arête, comprend la surface à son intérieur.

§ 2. — Existence de la force d'attraction en un point intérieur aux charges agissantes. Conséquence des lemmes de Gauss.

Supposons qu'un système soit formé d'un ou de plusieurs corps renfermant à leur intérieur de l'électricité dont la densité solide soit ρ au point (a, b, c). Ce système renferme des surfaces de discontinuité sur lesquelles l'électricité est distribuée, et sa densité superficielle est σ en un point de l'élément superficiel dS. Soit $M(x, y, z)$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un point extérieur à toutes ces masses agissantes. Si ce point porte une unité d'électricité, il sera soumis, en vertu des lois de Coulomb, à une force ayant pour composantes

$$(4)\qquad \begin{cases} X = \sum\iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da\,db\,dc + \sum\int\!\!\int \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,dS, \\ Y = \sum\iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\,da\,db\,dc + \sum\int\!\!\int \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\,dS, \\ Z = \sum\iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\,da\,db\,dc + \sum\int\!\!\int \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\,dS, \end{cases}$$

r désignant, suivant les circonstances, soit la distance du point M au point (a, b, c), soit la distance du point M à un point de l'élément dS.

Prenons maintenant le point $M(x, y, z)$ à l'intérieur des régions occupées par les charges agissantes, soit à distance finie de toute surface de discontinuité, soit même sur une surface de discontinuité. Laissons de côté, pour le moment, ce dernier cas, qui est le plus compliqué. Désignons par l'indice 1 le *corps électrisé* auquel appartient le point M, c'est-à-dire une masse d'étendue finie, entourant le point M et ne renfermant aucune surface de discontinuité.

Autour du point M, traçons une surface fermée assez petite pour qu'elle ne pénètre dans aucun corps du système autre que le corps 1, et qu'elle ne rencontre aucune surface de discontinuité. Désignons par Θ cette surface.

Soit 2 la partie du corps 1 non comprise dans la surface Θ.

Imaginons que toutes les charges électriques, situées en dehors de la surface Θ, agissent sur le point M, chargé d'une unité d'électricité, conformément aux lois de Coulomb. La force exercée a pour composantes des quantités X, Y, Z, données par les égalités (4), qui peuvent encore s'écrire de la manière suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} X = \sum\iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da\,db\,dc + \sum\int\!\!\int \frac{\sigma}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\,dS \\ \qquad + \iiint_2 \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da\,db\,dc, \\ Y = \ldots, \\ Z = \ldots. \end{cases}$$

Dans ces expressions, le signe $\sum$ qui porte sur l'intégrale triple

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

s'applique à tous les corps du système autres que le corps 1; le signe $\sum$ qui porte sur l'intégrale de surface s'applique à toutes les surfaces de discontinuité du système; l'intégrale triple non soumise au signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de l'espace 2.

Ces expressions (5) peuvent se transformer.

Considérons la sphère de rayon 1 ayant le point M pour centre; soit $d\Sigma$ un élément de la surface de cette sphère. Prenons le contour de cet élément pour directrice d'un cône infiniment délié ayant pour sommet le point M. Deux sphères décrites du point M comme centre avec des rayons r et $(r + dr)$ découpent sur ce cône un élément de volume $r^2\, d\Sigma\, dr$; on peut adopter, pour l'espace 2, ce mode de division en éléments de volume.

On peut donc écrire, au lieu des égalités (5),

$$X = \sum\int\int\int \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\, da\, db\, dc + \sum\mathrm{S}\frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\, d\mathrm{S} + \mathrm{S}\int \rho\frac{\partial r}{\partial x}\, dr\, d\Sigma,$$

$$Y = \ldots,$$

$$Z = \ldots,$$

le dernier signe S indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments $d\Sigma$ de la sphère de rayon 1 ayant le point M pour centre.

Supposons maintenant que la surface Θ se contracte de manière à venir s'évanouir au point M par une série quelconque de formes. Les deux premiers termes de l'expression de X demeurent invariables durant cette modification. Le troisième terme formé par une intégrale dont les limites et les éléments demeurent finis, lorsque la surface Θ s'évanouit, tend vers une limite finie dont la valeur ne dépend pas de la série de formes par lesquelles passe la surface Θ. Donc X tend aussi vers une limite finie, indépendante de la série de formes par lesquelles passe la surface Θ, et cette limite peut être représentée par la première des égalités (4).

Une démonstration analogue s'applique à Y et Z et nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Si l'on suppose que la loi de Coulomb exprime toujours l'action mutuelle de deux particules électrisées, quelque petite que soit la distance qui sépare ces deux particules, l'action

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

exercée sur un point chargé d'une unité d'électricité conserve une grandeur et une direction bien déterminée, même si le point fait partie d'un volume électrisé, pourvu qu'il soit à distance finie de toute surface de discontinuité électrisée. Les composantes de cette action sont représentées par les égalités (4).

Nous allons voir de plus que, *dans ces conditions, chacune des trois composantes de la force est une fonction continue des coordonnées du point sur lequel agit la force.*

Soient, en effet, deux points voisins $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$. Autour du point M, traçons une surface fermée convexe, Θ, enfermant aussi le point $M'(x', y', z')$, et ne rencontrant aucune surface de discontinuité.

Soit X l'une des composantes de la force exercée au point M.

Nous pourrons écrire

$$X = X_1 + X_2,$$

X_1 étant la composante de l'action exercée au point M par l'électricité répandue à l'intérieur de la surface Θ, et X_2 la composante de l'action exercée au point M par l'électricité extérieure à la surface Θ. Une notation analogue nous permet d'écrire, pour le point M',

$$X' = X'_1 + X'_2.$$

Nous aurons donc

$$X' - X = X'_1 - X_1 + X'_2 - X_2.$$

Les raisonnements faits précédemment nous montrent que, pour tout point M'' intérieur à la surface Θ, on peut écrire

$$X''_1 = S \int_0^R \rho \frac{\partial r}{\partial x} dr \, d\Sigma,$$

$d\Sigma$ étant un élément superficiel de la surface de rayon 1 ayant pour centre le point M'', et R la distance au point M'' d'un point de la surface Θ ayant sa perspective sphérique sur l'élément $d\Sigma$. Cette expression nous montre que l'on peut toujours prendre la surface Θ assez petite, pour avoir en tout point M'' intérieur à cette surface

$$|X''_1| < \frac{\eta}{3} \quad (1),$$

(1) La notation a, empruntée à M. Weierstrass, signifie *valeur absolue de a.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

η_1 étant une quantité positive quelconque donnée d'avance. On aura donc, en particulier,

$$|X_1| < \frac{\eta_1}{3}, \qquad |X'_1| < \frac{\eta_1}{3}.$$

La surface Θ étant ainsi choisie, remarquons que X_2 est évidemment une fonction continue des coordonnées du point M, en sorte qu'on pourra tracer autour du point M une sphère S, en entier comprise à l'intérieur de la surface Θ, et assez petite pour que l'on ait

$$|X'_2 - X_2| < \frac{\eta_1}{3};$$

toutes les fois que le point M′ sera intérieur à cette sphère. On voit alors que, toutes les fois que le point M′ sera intérieur à la sphère S, on aura

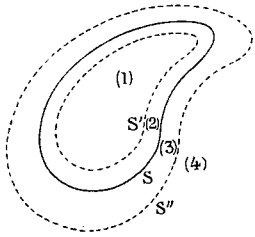
$$|X' - X| < \eta_1,$$

ce qui démontre la continuité de la quantité X.

La proposition que nous venons de démontrer, combinée avec les lemmes de Gauss, va nous fournir un théorème que nous aurons constamment à appliquer au cours de ces Leçons.

Supposons que nous ayons un système formé d'un certain

Fig. 3.



nombre de corps continus à l'intérieur desquels la densité électrique solide a, en tout point, une valeur finie ρ; ces corps sont séparés les uns des autres par des surfaces de discontinuité en tout point desquelles la densité superficielle a une valeur finie σ. Un élément de volume $dx\,dy\,dz$ peut renfermer un élément $d\theta$ d'une semblable surface. Il contient alors une charge électrique

$$dm = \rho\,dx\,dy\,dz + \sigma\,d\theta.$$

Au travers de ce système, traçons une surface fermée S (*fig.* 3),

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à connexion simple ou multiple, *dont tout point soit à distance finie de toute surface de discontinuité électrisée.* Traçons ensuite deux surfaces qui puissent, par une déformation continue, venir coïncider avec la surface S : l'une S′, intérieure à l'espace limité par la surface S; l'autre, S″, extérieure au même espace; nous supposerons, ce qu'il est toujours possible de faire, que l'on ait tracé ces surfaces de manière que l'espace qu'elles comprennent entre elles ne renferme aucune surface de discontinuité du système.

L'espace entier se trouve alors divisé en quatre régions :

La région 1, intérieure à la surface S′;
La région 2, comprise entre S′ et S;
La région 3, comprise entre S et S″;
La région 4, formée par l'espace illimité extérieur à S″.

Considérons un élément de volume de la première région, élément situé autour du point M_1. Pour cet élément, qui renferme une quantité dm d'électricité, formons l'expression

$$\varepsilon\, dm \int_S \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2},$$

r désignant la distance du point M_1 à un point de l'élément dS et l'intégration s'étendant à toute la surface S. D'après le premier lemme de Gauss, cette quantité aura pour valeur

$$4\pi\varepsilon\, dm.$$

Si nous intégrons ces deux quantités égales entre elles pour tout l'espace 1, intérieur à S′, nous trouverons l'égalité

$$\varepsilon \int_1 dm \int_S \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2} = 4\pi\varepsilon \int_1 dm. \tag{6}$$

Considérons maintenant un élément de volume de la région 4, élément de volume situé autour du point M_4. Soit r la distance du point M_4 à l'élément dS. Pour cet élément, nous aurons, d'après le second lemme de Gauss,

$$\varepsilon\, dm \int_S \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, en intégrant pour toute la région 4,

$$\varepsilon \int_4 dm \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}}{r^2} = 0.$$

Considérons maintenant un point M_2 de la région 2. Si l'on désigne par $d\psi$ la perspective de l'élément $d\mathrm{S}$ sur une sphère de centre M_2 et de rayon 1, on aura

$$|\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}| = r^2\, d\psi.$$

On aura donc, pour tout point M_2 de la région 2,

$$\left| \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}}{r^2} \right| \leq \mathop{\mathrm{S}} d\psi$$

ou

$$\left| \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}}{r^2} \right| \leq 4\pi.$$

Pour tous les points de la région 2, ρ demeure inférieur en valeur absolue à une certaine limite P_2. On a donc

$$(8) \qquad \left| \varepsilon \int_2 dm \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}}{r^2} \right| < 4\pi\varepsilon \mathrm{P}_2 \iiint_2 dx\, dy\, dz.$$

Mais $\iiint_2 dx\, dy\, dz$ est le volume compris entre les deux surfaces S et S'. On peut prendre ces deux surfaces assez voisines pour que ce volume soit plus petit que toute quantité positive donnée d'avance.

L'inégalité (8) peut donc être remplacée par l'égalité

$$(9) \qquad \varepsilon \int_2 dm \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}}{r^2} = \eta',$$

η' étant une quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut en valeur absolue, pourvu que l'on choisisse la surface S' assez voisine de la surface S.

On démontrerait de même l'égalité

$$(10) \qquad \varepsilon \int_3 dm \mathop{\mathrm{S}}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(r, \mathrm{N}_e)\, d\mathrm{S}}{r^2} = \eta'',$$

η'' étant une quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut en valeur absolue en choisissant la surface S'' assez voisine de S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Enfin on a évidemment

$$\int_2 dm = \iiint_2 \rho \, dx \, dy \, dz$$

ou bien

$$\left| \int_2 dm \right| < P_2 \iiint_2 dx \, dy \, dz,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_2 dm = \eta_1, \tag{11}$$

η_1 étant, comme η', une quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut en valeur absolue en choisissant la surface S' assez voisine de la surface S.

Soit $\mathfrak{M}$ la quantité totale d'électricité comprise à l'intérieur de la surface S. Nous aurons

$$\mathfrak{M} = \int_1 dm + \int_2 dm. \tag{12}$$

Les égalités (6), (7), (9), (10), (11), (12) donnent alors

$$\varepsilon \int dm \sum \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2} - 4\pi\varepsilon\, \mathfrak{M} = \eta' + \eta'' - 4\pi\varepsilon\eta_1.$$

Le premier membre de cette égalité ne dépend pas de la position des surfaces S' et S''. Le second membre peut être rendu plus petit que toute quantité donnée si l'on rapproche assez les surfaces S' et S'' de la surface S. Il est dès lors évident que semblable égalité ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\varepsilon \int dm \sum \frac{\cos(r, N_e)\, dS}{r^2} - 4\pi\varepsilon\, \mathfrak{M} = 0. \tag{13}$$

Cette égalité (13) peut se mettre sous une autre forme.

La quantité

$$F_N = \varepsilon \, dS \int \frac{\cos(r, N_e)\, dm}{r^2}$$

est la composante suivant la normale extérieure à la surface S de l'action que toutes les charges électriques dm répandues sur le système exerceraient sur l'élément dS, si la surface S était revêtue d'une couche électrique *fictive* de densité superficielle égale à l'unité. Moyennant cette définition de F_N, définition rendue légitime par ce que nous avons dit au début de ce paragraphe de l'exis-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tence de la force même à l'intérieur des charges agissantes, l'égalité (13) peut s'écrire

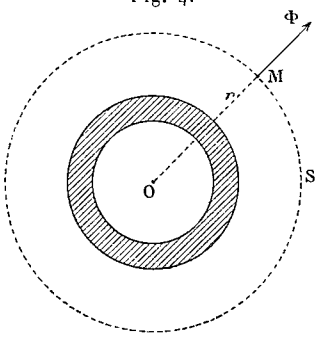
$$\int F_N \, dS = 4\pi\varepsilon \, \mathfrak{M}. \tag{14}$$

Cette égalité sera pour nous d'un fréquent usage. Nous nous bornerons, pour le moment, à en déduire les célèbres théorèmes de Newton (1) sur l'attraction d'une couche sphérique homogène.

§ 3. — Attraction exercée en un point par une couche sphérique homogène.

Un volume compris entre deux surfaces sphériques (*fig.* 4)

Fig. 4.



concentriques est rempli d'électricité qui y est répandue avec une densité solide uniforme; soit $\mathfrak{M}$ la quantité d'électricité qu'il renferme. En un point M se trouve une masse matérielle portant une charge électrique μ. Cette masse matérielle subit, de la part de la couche sphérique, une action $\Phi\mu$, Φ ayant, évidemment, la même valeur pour tous les points équidistants du centre O de la couche sphérique et l'action étant évidemment dirigée suivant la ligne menée du centre O au point M. Convenons de compter positivement l'action lorsqu'elle est dirigée de O vers M et négativement lorsqu'elle est dirigée de M vers O.

Prenons une surface sphérique S ayant pour centre le point O et passant par le point M. Soit r le rayon de cette surface. Il est

(1) NEWTON, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Liber I, Sectiones XII, XIII.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aisé de voir que, pour une semblable surface, la quantité F_N, définie comme nous l'avons fait tout à l'heure, aura précisément, en tout point, la valeur Φ. Nous aurons donc

$$\int F_N \, dS = 4\pi r^2 \Phi. \tag{15}$$

Deux cas sont maintenant à distinguer :

1° Le point M est situé dans la cavité intérieure à la couche sphérique. Dans ce cas, toutes les charges électriques dont émanent les actions F_N sont extérieures à la surface S.

D'après l'égalité (14) on a

$$\int F_N \, dS = 0,$$

ou bien, en vertu de l'égalité (15),

$$\Phi = 0.$$

Une couche sphérique homogène n'exerce aucune action sur les points renfermés dans la cavité qu'elle délimite.

2° Le point M est extérieur à la couche sphérique. Dans ce cas, toutes les charges électriques de cette couche, qui produisent l'action F_N, sont intérieures à la surface S. On a donc, d'après l'égalité (14),

$$\int F_N \, dS = 4\pi\varepsilon \mathfrak{M},$$

$\mathfrak{M}$ étant la somme de ces charges, et l'égalité (15) devient

$$\Phi = \varepsilon \frac{\mathfrak{M}}{r^2}.$$

Une couche sphérique homogène agit sur un point extérieur comme si toutes les charges qu'elle renferme étaient réunies en son centre.

Ces deux théorèmes permettent aisément de calculer l'action exercée sur un point situé d'une manière quelconque dans l'espace par une sphère sur laquelle l'électricité est distribuée en couches concentriques homogènes. En particulier, si le point électrisé est extérieur à la sphère, la sphère doit agir sur lui comme si toutes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les charges électriques qu'elle renferme étaient ramassées en son centre; l'action exercée doit donc varier en raison inverse du carré de la distance du point au centre de la sphère. On sait que Coulomb a vérifié expérimentalement cette conséquence de sa loi en observant les oscillations d'un petit corps électrisé en présence d'une sphère conductrice électrisée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION POTENTIELLE EN UN POINT INTÉRIEUR AUX CHARGES AGISSANTES.

§ 1. — Existence et continuité de la fonction potentielle en un point intérieur aux charges agissantes.

Au Chapitre II, nous avons défini la fonction potentielle et étudié ses propriétés seulement en un point situé à distance finie de toutes les charges agissantes. Nous allons maintenant étendre les résultats obtenus, en les modifiant au besoin, de manière qu'ils deviennent applicables à un point placé au contact des charges agissantes.

Nous allons, dans le présent Chapitre, considérer un point M placé dans une région où la densité solide de l'électricité n'a pas une valeur nulle, mais situé en même temps à distance finie de toutes les surfaces sur lesquelles existe une distribution superficielle.

Pourvu que la densité solide ait, au point M, une valeur finie, nous savons, par ce qui a été dit au Chapitre précédent, que l'action exercée par toutes les charges électriques du système sur une charge égale à l'unité supposée placée au point M a des composantes parfaitement déterminées X, Y, Z, qui nous sont données par les égalités (4) du Chapitre IV.

Autour du point M, on peut tracer une surface fermée S, simplement connexe et convexe, limitant un volume en tous les points duquel la densité solide de l'électricité existe et a une valeur finie. Ce volume ne renferme aucune surface de discontinuité. Désignons ce volume par l'indice 1 et le reste de l'espace par l'indice 2.

L'électricité répandue dans la région 1 exerce au point M une action dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1; l'électricité répandue dans la région 2 exerce au point M une action dont les com-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

posantes sont X_2, Y_2, Z_2; on a

$$(1)\qquad \begin{cases} X = X_1 + X_2, \\ Y = Y_1 + Y_2, \\ Z = Z_1 + Z_2. \end{cases}$$

Les quantités X_2, Y_2, Z_2 obéissent aux lois indiquées au Chapitre II; en particulier, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point M, et par $V_2(x, y, z)$ la fonction potentielle au point M de toute l'électricité répandue dans la région 2, on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} X_2 = -\varepsilon \dfrac{\partial V_2}{\partial x}, \\ Y_2 = -\varepsilon \dfrac{\partial V_2}{\partial y}, \\ Z_2 = -\varepsilon \dfrac{\partial V_2}{\partial z}. \end{cases}$$

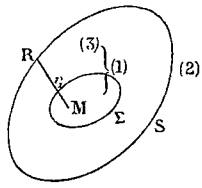
Notre étude doit porter sur les quantités X_1, Y_1, Z_1. De ces quantités, nous ne savons rien, si ce n'est qu'elles sont finies, déterminées et représentées par les égalités

$$(3)\qquad \begin{cases} X_1 = \iiint_1 \dfrac{\rho}{r^2} \dfrac{\partial r}{\partial x}\, da_1\, db_1\, dc_1, \\ Y_1 = \iiint_1 \dfrac{\rho}{r^2} \dfrac{\partial r}{\partial y}\, da_1\, db_1\, dc_1, \\ Z_1 = \iiint_1 \dfrac{\rho}{r^2} \dfrac{\partial r}{\partial z}\, da_1\, db_1\, dc_1, \end{cases}$$

ρ étant la densité électrique solide en un point de l'élément $da_1\, db_1\, dc_1$, pris dans la région 1, et r la distance de ce point au point M.

Entourons le point M d'une surface fermée Σ (*fig.* 5) simple-

Fig. 5.



ment connexe, entièrement contenue dans S, et pouvant, par une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

déformation continue, venir s'évanouir au point M. Soit 3 la région comprise entre la surface Σ et la surface S. Envisageons la quantité

$$J = \iiint_3 \frac{\rho}{r}\, da_3\, db_3\, dc_3, \tag{4}$$

Cette quantité tend vers une limite finie et déterminée lorsque la surface Σ tend à venir s'évanouir au point M en passant par une série quelconque de formes.

Soit, en effet, un rayon vecteur issu du point M. Il rencontre d'abord la surface Σ un nombre impair de fois, en des points dont les distances au point M ont pour valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_{2p}, r_{2p+1}$; il rencontre ensuite la surface convexe S en un point unique dont la distance au point M est R. Supposons que ce rayon vecteur soit l'une des génératrices d'un cône ayant le point M pour sommet et pour ouverture sphérique $d\omega$. Nous verrons sans peine que l'on peut écrire

$$J = \int d\omega \left[\int_{r_1}^{r_2} \rho r\, dr + \int_{r_3}^{r_4} \rho r\, dr + \ldots + \int_{r_{2p-1}}^{r_{2p}} \rho r\, dr + \int_{r_{2p+1}}^{R} \rho r\, dr \right].$$

Supposons maintenant que la surface Σ vienne s'évanouir au point M. Toutes les intégrales qui figurent entre crochets tendent vers o, sauf la dernière qui tend vers une limite finie et déterminée

$$\int_0^R \rho r\, dr.$$

La quantité J tend donc vers une limite finie et déterminée

$$J' = \int d\omega \int_0^R \rho r\, dr.$$

Si nous nous reportons à l'expression (4) de J, nous voyons que, *lorsque la surface* Σ *vient s'évanouir au point* $M(x, y, z)$, *la quantité* J *tend vers une limite finie et déterminée, que nous désignerons par* $V_1(x, y, z)$ *et que nous nommerons fonction potentielle au point* M *de l'électricité répandue dans la région* 1.

Suivant l'usage établi dans l'étude des intégrales définies, cette proposition s'exprime par l'égalité

$$V_1(x, y, z) = \iiint_1 \frac{\rho}{r}\, da_1\, db_1\, dc_1. \tag{5}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Par définition, *la fonction potentielle au point* M *de toute l'électricité répandue sur le système* sera la quantité

$$V(x,y,z) = V_1(x,y,z) + V_2(x,y,z). \tag{6}$$

Si l'on se souvient de la définition de $V_2(x,y,z)$ et si l'on en rapproche la définition de $V_1(x,y,z)$ donnée par l'égalité (6), on voit que l'on aura encore, comme pour un point extérieur aux masses agissantes,

$$V(x,y,z) = \sum\int\int\int \frac{\rho}{r}\, da\, db\, dc + \sum\int\int \frac{\sigma}{r}\, dS_1, \tag{7}$$

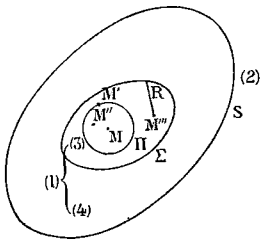
les notations ayant la même signification que dans l'égalité (4) du Chapitre II.

Cette fonction $V(x,y,z)$, dont l'existence est ainsi démontrée, est une fonction *continue* des coordonnées du point M.

La continuité de $V_2(x,y,z)$ étant une vérité reconnue, il nous suffit, pour prouver cette proposition, de démontrer la continuité de $V_1(x,y,z)$.

Démontrer la continuité de $V_1(x,y,z)$, c'est démontrer que, du point M comme centre, on peut décrire une sphère Π (*fig.* 6)

Fig. 6.



avec un rayon MM' si petit que, pour tout point $M''(x'', y'', z'')$ intérieur à cette sphère, on ait

$$|V_1(x'',y'',z'') - V_1(x,y,z)| < \eta, \tag{8}$$

η étant une quantité positive quelconque choisie d'avance.

Commençons par entourer le point M d'une surface fermée, simplement connexe et convexe Σ entièrement contenue dans S. Désignons par 3 la région comprise à l'intérieur de la surface Σ et

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par 4 la région comprise entre la surface Σ et la surface S. La région 1 se composera de l'ensemble des régions 3 et 4.

Soit $M'''(x''', y''', z''')$ un point quelconque de la région 3; soient

$$V_1(x''', y''', z'''), \quad V_3(x''', y''', z'''), \quad V_4(x''', y''', z''')$$

ou, plus brièvement,

$$V_1''', \quad V_3''', \quad V_4'''$$

les fonctions potentielles au point M''' des charges réparties respectivement dans les régions 1, 3, 4; on aura

$$V_1''' = V_3''' + V_4'''.$$

Soit R la longueur du rayon vecteur mené du point M''' à un point de la surface Σ; soit $d\omega$ l'ouverture sphérique d'un petit cône dont ce rayon vecteur forme une génératrice. Nous pourrons écrire

$$V_3''' = \mathbf{S} \, d\omega \int_0^R \rho r \, dr,$$

le signe $\mathbf{S}$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments de la sphère de rayon 1 ayant pour centre le point M'''.

Cette formule nous montre que l'on peut prendre la surface Σ assez petite pour que, pour tout point intérieur à cette surface, la quantité V_3''' soit inférieure en valeur absolue à une quantité donnée d'avance. Nous supposerons que l'on ait pris la surface Σ assez petite, pour que, pour tout point M''' intérieur à cette surface, on ait

$$|V_3'''| < \frac{\eta}{3}. \tag{9}$$

Envisageons maintenant la fonction V_4'''. C'est la fonction potentielle au point M''' de charges auxquelles ce point M''' est extérieur. C'est donc une fonction continue des coordonnées x''', y''', z''' du point M'''.

Le point M étant l'une des positions possibles du point M''', on voit que, du point M comme centre, on pourra décrire une surface sphérique Π, en entier contenue dans Σ et si petite que, pour tout point M'' intérieur à cette surface Π, on ait

$$|V_4'' - V_4| < \frac{\eta}{3}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Aux deux points M et M″, on peut appliquer l'inégalité (9). On a donc

$$|V''_3| < \frac{\eta}{3}, \qquad |V_3| < \frac{\eta}{3}.$$

On peut donc, autour du point M, tracer une sphère Π si petite que, pour tout point M″ de cette sphère, on ait

$$|V''_3 + V'_4 - V_3 - V_4| < \eta,$$

ou bien

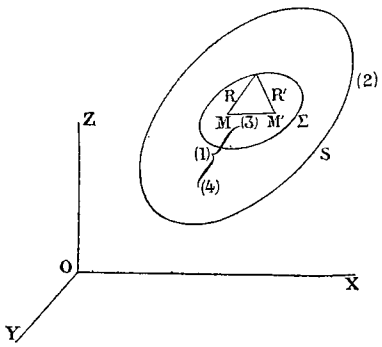
$$|V''_1 - V_1| < \eta,$$

ce qui est l'inégalité (9). *La fonction potentielle en un point varie donc d'une manière continue lorsque ce point se déplace dans une région où la densité solide des charges agissantes existe partout et a partout une valeur finie.*

§ 2. — **Existence des dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle. — Leur relation avec les composantes de la force.**

Considérons au voisinage du point $M(x, y, z)$ un autre point $M'(x + \Delta x, y, z)$, situé avec M sur une même parallèle à Ox (*fig.* 7). Adoptons d'ailleurs les mêmes notations qu'en la dé-

Fig. 7.



monstration précédente. Envisageons la quantité

$$\frac{V_3(x + \Delta x, y, z) - V_3(x, y, z)}{\Delta x},$$

qui, d'après l'égalité (5), peut s'écrire

$$\iiint \frac{\rho}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) da_3\, db_3\, dc_3,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant

$$r = [(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r' = [(a-x-\Delta x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [r^2 - 2(a-x)\Delta x + \Delta x^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Or on a

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = \frac{r^2 - r'^2}{rr'(r+r')\Delta x},$$

et l'on a aussi les inégalités

$$|a-x| \leqq r,$$

$$|a-x-\Delta x| \leqq r',$$

$$|\Delta x| \leqq r + r',$$

cette dernière résultant de ce que la valeur absolue de Δx est la longueur du troisième côté d'un triangle dont les deux autres ont pour longueurs r et r'.

Ces inégalités, jointes à l'égalité précédente, donnent

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\right| \leqq \frac{2}{r'(r+r')} + \frac{1}{rr'}.$$

Si r est inférieur à r', le second membre est inférieur à $\frac{2}{r^2}$. Si r est au moins égal à r', le second membre est au plus égal à $\frac{2}{r'^2}$. On a donc, en tout cas,

$$\left|\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)\right| < 2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right).$$

Cette inégalité obtenue, on voit que l'on aura

$$\left|\frac{V_3(x+\Delta x, y, z) - V_3(x, y, z)}{\Delta x}\right| < \left|2\iiint \rho\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right) da_3\, db_3\, dc_3\right|.$$

Or la quantité qui figure au second membre peut se transformer en prenant deux systèmes de coordonnées polaires. On aura

$$\iiint \frac{\rho}{r^2}\, da_3\, db_3\, dc_3 = \mathrm{S}\, d\omega \int_0^{\mathrm{R}} \rho\, dr,$$

la première intégration s'étendant à tous les éléments $d\omega$ de la sphère de rayon 1 ayant le point M pour centre, et R étant la longueur comprise entre le point M et la surface Σ sur un rayon passant par l'élément $d\omega$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On aura de même

$$\iiint \frac{\rho}{r'^2}\, da_3\, db_3\, dc_3 = \mathbf{S}\, d\omega' \int_0^{R'} \rho\, dr,$$

la première sommation s'étendant à tous les éléments $d\omega'$ de la sphère de rayon 1 ayant pour centre le point M′, et R′ étant la longueur comprise entre le point M′ et la surface Σ sur un rayon passant par l'élément $d\omega'$.

Ces deux formules montrent que l'on peut toujours choisir la surface Σ assez petite pour que l'on ait, quelle que soit la position des points M et M′ dans le domaine 3,

$$\left| 2 \iiint \rho \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} \right) da_3\, db_3\, dc_3 \right| < \frac{\eta}{3},$$

η étant une quantité positive choisie d'avance, et par conséquent

$$\left| \frac{V_3(x + \Delta x, y, z) - V_3(x, y, z)}{\Delta x} \right| < \frac{\eta}{3}, \tag{10}$$

quelle que soit la position du point M′ sur une parallèle à Ox menée par le point M et comprise à l'intérieur de la surface Σ.

Soit X_4 la composante, parallèle à Ox, de l'action exercée au point M par l'électricité répandue dans la région 4. Nous avons

$$X_4 = \varepsilon \iiint \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}\, da_4\, db_4\, dc_4.$$

Or nous savons que l'on peut toujours choisir la surface Σ assez petite pour que l'on ait

$$\left| \iiint \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}\, da_4\, db_4\, dc_4 - \iiint \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}\, da_1\, db_1\, dc_1 \right| < \frac{\eta}{3}. \tag{11}$$

Nous pouvons supposer que l'on ait choisi la surface Σ assez petite pour que l'on ait à la fois l'inégalité (10) et l'inégalité (11).

La surface Σ étant ainsi choisie, remarquons que les propriétés de la fonction potentielle en un point extérieur aux masses agissantes nous donnent

$$X_4 = -\varepsilon \frac{\partial V_4(x, y, z)}{\partial x},$$

ce qui montre que l'on peut toujours choisir δx assez petit pour que le point M′ soit compris à l'intérieur de la surface Σ toutes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les fois que l'on a

$$|\Delta x| \leqq |\delta x|,$$

et que l'on ait aussi, toutes les fois que cette dernière condition est remplie,

$$(12)\quad \left| \frac{V_4(x+\Delta x, y, z) - V_4(x, y, z)}{\Delta x} - \iiint \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} da_4\, db_4\, dc_4 \right| < \frac{\eta}{3}.$$

Si l'on observe en outre que

$$V_1(x, y, z) = V_3(x, y, z) + V_4(x, y, z),$$
$$V_1(x+\Delta x, y, z) = V_3(x+\Delta x, y, z) + V_4(x+\Delta x, y, z),$$

on voit que les inégalités (10), (11) et (12) conduisent à la conclusion suivante :

Quelque petite que soit la quantité positive η donnée d'avance, on peut toujours trouver une quantité finie δx, telle que l'on ait

$$(13)\quad \left| \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} + \iiint \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} da_1\, db_1\, dc_1 \right| < \eta,$$

toutes les fois que Δx est au plus égal en valeur absolue à δx.

Tirons les conséquences de cette inégalité.

Elle nous montre que $V_1(x, y, z)$ admet au point M une dérivée partielle du premier ordre par rapport à x, et que cette dérivée a pour valeur

$$-\iiint \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} da_1\, db_1\, dc_1,$$

c'est-à-dire, d'après la première des égalités (3), $-\frac{X_1}{\varepsilon}$. Ce résultat, joint aux égalités (1), (2) et (6), nous démontre aisément les propositions qui suivent, du moins en ce qui concerne la variable x ; les propositions qui concernent les deux autres variables s'établissent d'une manière analogue.

En un point d'une région où la densité solide de l'électricité existe et a une valeur finie, la fonction potentielle admet des dérivées partielles du premier ordre par rapport à chacune des trois variables x, y, z.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces dérivées partielles sont exprimées par les égalités

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\sum \iiint \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}\,da\,db\,dc - \sum \mathrm{S}\dfrac{\sigma}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}\,d\mathrm{S}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -\sum \iiint \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\,da\,db\,dc - \sum \mathrm{S}\dfrac{\sigma}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial y}\,d\mathrm{S}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\sum \iiint \dfrac{\rho}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\,da\,db\,dc - \sum \mathrm{S}\dfrac{\sigma}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial z}\,d\mathrm{S}, \end{cases}$$

les notations ayant la même signification que dans l'égalité (7).

Entre ces dérivées partielles et les composantes de la force au point considéré, on a les relations

$$(15)\qquad X = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Enfin, en répétant presque textuellement la démonstration qui a servi à prouver la continuité de la fonction potentielle, on prouvera que *ces dérivées partielles du premier ordre varient d'une manière continue.*

Les égalités (15) entraînent une conséquence qui nous sera utile tout à l'heure.

Supposons qu'à l'intérieur d'un corps en chaque point duquel la densité solide de l'électricité existe et a une valeur finie, nous tracions une surface fermée S.

En un point de cette surface, prenons la composante F_N de la force suivant la normale N_e extérieure à la surface. Il résulte des égalités (15) que l'on a

$$F_N = -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial N_e}.$$

Mais les lemmes de Gauss donnent [Chap. IV, égalité (14)]

$$\mathrm{S} F_N\,d\mathrm{S} = 4\pi\varepsilon\,\mathfrak{M},$$

$\mathfrak{M}$ étant la charge électrique totale répandue à l'intérieur de la surface S ; la définition même de cette charge est

$$\mathfrak{M} = \iiint \rho\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume entier compris à l'intérieur de la surface.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les trois égalités que nous venons d'écrire donnent

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{N}_e}\,d\mathrm{S} + 4\pi\iiint \rho\,dx\,dy\,dz = 0.$$

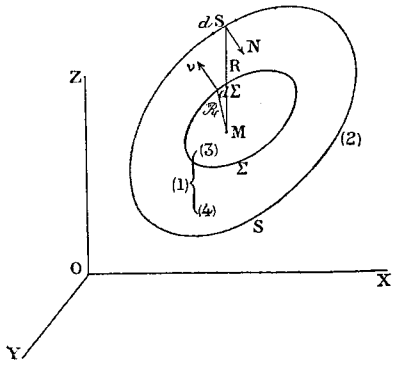
C'est l'égalité que nous voulions établir.

§ 3. — Existence des dérivées partielles du second ordre de la fonction potentielle en un point intérieur aux charges agissantes.

Jusqu'ici nous avons admis seulement que l'on pouvait, autour du point $\mathrm{M}(x, y, z)$, tracer une surface S, fermée, simplement connexe et convexe, telle que la densité solide ρ de l'électricité existe et ait une valeur finie en tous les points intérieurs à la surface S. Dans le présent paragraphe, nous supposerons en outre qu'*en tous ces points la densité solide de l'électricité soit une fonction continue de x, y, z, admettant, par rapport à ces variables, des dérivées partielles du premier ordre qui soient finies.*

Désignons toujours par 1 la région du corps intérieure à la surface S, et par 2 la région extérieure (*fig.* 8).

Fig. 8.



La première des égalités (14) nous donne aisément

$$\text{(17)} \qquad \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x} = -\iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da_1\,db_1\,dc_1.$$

Traçons, autour du point M, une surface Σ, comprise dans S, séparant la région 1 en deux autres régions : l'une, 3, intérieure

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à Σ ; l'autre, 4, comprise entre Σ et S. Nous aurons alors

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da_1\,db_1\,dc_1 = {} & \iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da_3\,db_3\,dc_3 \\ & + \iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da_4\,db_4\,dc_4. \end{aligned} \right.$$

En premier lieu, on peut toujours prendre la surface Σ assez petite pour que l'on ait

$$(19)\quad \left| \iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da_3\,db_3\,dc_3 \right| < \frac{\eta}{3},$$

η étant une valeur positive donnée d'avance.

En second lieu, on voit aisément que

$$(20)\quad \iiint \frac{\rho}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\,da_4\,db_4\,dc_4 = \iiint \rho\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a_4}\,da_4\,db_4\,dc_4,$$

car

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - a_4}{r} = -\frac{\partial r}{\partial a_4}.$$

La fonction $\frac{1}{r}$ est finie, continue et uniforme en tout point de la région 4 ; la fonction $\rho(a_4, b_4, c_4)$ est uniforme, finie et continue, et admet, en tout point de la région 4, des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies. Si donc on désigne par

dS un élément de la surface S ;
N la normale à l'élément dS vers l'intérieur de la région 4 ;
R la distance de l'élément dS au point M ;
$d\Sigma$ un élément de la surface Σ ;
$\mathfrak{R}$ la distance de cet élément au point M ;
ν la normale à cet élément vers l'intérieur de la région 4,

on aura, en vertu de l'égalité (2) du Chapitre III,

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} \iiint \rho\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a_4}\,da_4\,db_4\,dc_4 = {} & -\mathbf{S}\frac{\rho}{\mathrm{R}}\cos(\mathrm{N}, x)\,d\mathrm{S} - \mathbf{S}\frac{\rho}{\mathfrak{R}}\cos(\nu, x)\,d\Sigma \\ & - \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a_4}\,da_4\,db_4\,dc_4. \end{aligned} \right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La quantité

$$\iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a_4}\,da_4\,db_4\,dc_4$$

est la fonction potentielle au point M d'une masse électrique qui serait répandue dans l'espace 4 de manière à avoir $\frac{\partial \rho}{\partial a_4}$ pour densité solide en chaque point. Il résulte alors de ce qui a été dit au § 1 du présent Chapitre que l'on peut toujours prendre la surface Σ assez petite pour que l'on ait

$$(22)\qquad \left|\iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a_1}\,da_1\,db_1\,dc - \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a_4}\,da_4\,db_4\,dc_4\right| < \frac{\eta}{3}.$$

Si l'on désigne par $d\omega$ l'ouverture sphérique du petit cône ayant pour sommet le point M et pour directrice le contour de l'élément $d\Sigma$, on aura

$$\mathrm{S}\frac{\rho}{\mathcal{R}}\cos(\nu, x)\,d\Sigma = \mathrm{S}\,\rho\,\mathcal{R}\frac{\cos(\nu, x)}{\cos(\nu, \mathcal{R})}\,d\omega,$$

la seconde sommation s'étendant à la surface de la sphère de rayon 1 ayant le point M pour centre. On voit alors que l'on peut prendre la surface Σ assez petite pour que l'on ait

$$(23)\qquad \left|\mathrm{S}\frac{\rho}{\mathcal{R}}\cos(\nu, x)\,d\Sigma\right| < \frac{\eta}{3}.$$

On peut évidemment choisir la surface Σ assez petite pour que chacune des inégalités (19), (22) et (23) soit vérifiée. Alors, si l'on tient compte des égalités (17), (18), (20) et (21), on arrive au résultat suivant :

Il est toujours possible de prendre la surface Σ assez petite pour que l'on ait

$$\left|\frac{\partial V_1}{\partial x} - \mathrm{S}\frac{\rho}{R}\cos(N, x)\,dS - \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a_1}\,da_1\,db_1\,dc_1\right| < \eta_1,$$

η_1 étant une quantité positive quelconque donnée d'avance. Mais, si l'on observe que le premier membre ne dépend pas de la surface Σ, on voit qu'il faut que ce premier membre soit identiquement nul.

Ainsi, moyennant les restrictions indiquées au commencement

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de ce numéro, on arrive au résultat suivant :

$$(24) \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \mathrm{S}\frac{\rho}{R}\cos(N, x)\,dS + \iiint \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a_1}\,da_1\,db_1\,dc_1.$$

Cette égalité (24) nous montre que moyennant les restrictions indiquées, la quantité $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ peut être regardée comme la fonction potentielle d'une certaine distribution électrique; dans tout l'espace 1, cette distribution a pour densité solide $\frac{\partial \rho}{\partial a_1}$, et, sur la surface S, elle a pour densité superficielle $\rho\cos(N, x)$. On peut, dès lors, étendre à cette quantité les propriétés connues de la fonction potentielle, et notamment les propriétés dont la démonstration a fait l'objet du paragraphe précédent. On arrive ainsi à cette proposition :

Si, dans le domaine d'un point, la densité électrique est une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées, admettant des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies, la fonction potentielle en ce point admet, par rapport aux coordonnées de ce point, des dérivées partielles du second ordre qui sont continues.

§ 4. — Équation de Poisson.

Supposons qu'en tout point situé à l'intérieur d'une surface fermée S, la densité électrique solide soit finie et varie d'une manière continue de ce point aux points voisins; supposons en outre que les trois dérivées partielles $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial V^2}{\partial z^2}$, existent et soient des fonctions finies et continues de x, y, z.

Traçons une surface quelconque Σ à l'intérieur de la surface S. Soit $d\Sigma$ un élément de cette surface. Soit N_e la normale à l'élément $d\Sigma$ vers l'extérieur de la surface Σ. D'après l'égalité (16), nous aurons

$$\mathrm{S}\frac{\partial V}{\partial N_e}\,d\Sigma + 4\pi\iiint \rho\,dx\,dy\,dz = 0,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume enfermé par la surface Σ.

Si N_i désigne la normale à l'élément $d\Sigma$ vers l'intérieur de la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

surface Σ, nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial N_c} = -\frac{\partial V}{\partial N_i}.$$

D'ailleurs, dans les conditions où nous nous trouvons, nous pourrons appliquer l'équation (6) du Chapitre III, qui donne

$$S \frac{\partial V}{\partial N_i} d\Sigma = -\int\int\int \Delta V \, dx \, dy \, dz.$$

Nous trouvons donc

$$\int\int\int (\Delta V + 4\pi\rho) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Cette égalité exige que $(\Delta V + 4\pi\rho)$ soit égal à 0 en tout point intérieur à la surface S. Supposons, en effet, qu'en un point M, intérieur à la surface S, cette quantité soit différente de 0 et qu'elle soit, par exemple, positive; en vertu des hypothèses faites, elle varie d'une manière continue autour du point M; on peut donc, autour du point M, tracer une surface Σ assez petite pour que $(\Delta V + 4\pi\rho)$ soit positif en tout point du volume enfermé par cette surface; pour que, par conséquent, l'intégrale

$$\int\int\int (\Delta V + 4\pi\rho) \, dx \, dy \, dz,$$

étendue au volume qu'enferme cette surface, soit une quantité positive, contrairement à ce que nous venons de démontrer.

Donc, *si, dans le domaine d'un point, la densité électrique solide existe, est finie et continue; si, dans ce domaine, les dérivées partielles du second ordre de la fonction potentielle existent, sont finies et continues, on a, en ce point,*

$$\Delta V = -4\pi\rho. \tag{25}$$

Cette équation, dite *équation de Poisson,* renferme comme cas particulier l'équation

$$\Delta V = 0,$$

donnée par Laplace pour le point extérieur aux charges agissantes.

§ 5. — Historique.

L'équation (25) a été découverte en 1813 par Poisson (1). La

(1) POISSON, *Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

démonstration que Poisson en donna à cette époque ne s'applique en toute rigueur qu'aux corps à l'intérieur desquels l'électricité est distribuée d'une manière homogène. Si un point M est situé à l'intérieur d'un semblable corps, on peut le prendre pour centre d'une sphère qui partage l'espace en deux régions : l'une 1, intérieure à la sphère; l'autre 2, extérieure à cette sphère.

On a alors

$$V = V_1 + V_2.$$

L'équation de Laplace nous donne

$$\Delta V_2 = 0,$$

et, d'autre part, le calcul de ΔV_1, facile à faire au moyen des théorèmes de Newton sur l'attraction des couches sphériques homogènes, donne

$$\Delta V_2 = -4\pi\rho,$$

ce qui démontre l'équation (25) pour un volume uniformément électrisé. Lorsque le volume qui entoure le point considéré n'est pas uniformément électrisé, on peut, d'après Poisson, prendre le rayon de la sphère auxiliaire assez petit pour pouvoir regarder comme homogène l'électrisation à l'intérieur de cette sphère et reproduire la démonstration précédente.

Cette démonstration manque évidemment de rigueur. Poisson s'en aperçut et donna ultérieurement deux autres démonstrations du théorème important qu'il avait découvert.

La première de ces deux démonstrations (1) est celle que nous venons de donner au paragraphe précédent; elle repose sur l'emploi des lemmes de Gauss, que Poisson démontre comme Gauss. Bien que Poisson ne cite pas le nom de Gauss, il est probable qu'il connaissait le travail publié par ce dernier sur l'attraction des ellipsoïdes; car, ainsi que le remarque justement M. Bacharach (2) :

---

des attractions des sphéroïdes (*Nouveau Bulletin de la Société philomathique de Paris,* vol. III, p. 388-392; 1813).

(1) Poisson, *Mémoire sur la théorie du magnétisme en mouvement* (*Mémoires de l'Académie des Sciences* pour l'année 1823, t. VI, p. 455-463. Paris; 1827).

(2) Max Bacharach, *Abriss einer Geschichte der Potentialtheorie,* p. 11 (*Inauguraldissertation.* Würzbourg; 1883).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

« Il est difficile de supposer que Poisson, qui s'occupait si profondément du problème de l'attraction des ellipsoïdes, comme en font foi les importants travaux qu'il a publiés sur ce sujet, ait encore ignoré après treize années le travail de Gauss, qui n'avait pas tardé à devenir célèbre. »

La seconde démonstration de Poisson (1) repose sur les propriétés des fonctions de Laplace.

Poisson admettait, sans se préoccuper de la démontrer, l'existence de la fonction potentielle et de ses dérivées partielles du premier et du second ordre à l'intérieur des charges agissantes. Gauss, le premier, sentit cette lacune et chercha à la combler dans un Mémoire (2) qui a une importance capitale pour la théorie de la fonction potentielle. Gauss montra (3), par la méthode que nous avons reproduite au § 1 du présent Chapitre, que l'intégrale qui définit la fonction potentielle en un point extérieur aux charges agissantes continue à représenter, à l'intérieur des charges agissantes, une fonction finie et continue des coordonnées.

Gauss (4) donna aussi une démonstration analogue au sujet des intégrales qui, à l'intérieur des charges agissantes, représentent les dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle. Cette démonstration a été reproduite par Dirichlet (5), Riemann (6) et Heine (7).

Mais il ne suffit pas de démontrer que ces intégrales continuent à représenter des fonctions continues des coordonnées à l'intérieur des charges agissantes, pour pouvoir affirmer que ces fonctions

---

(1) POISSON, *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes* (*Connaissance des Temps* pour 1829, p. 354-364. Paris; 1826).

(2) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze in beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte* (*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre,* 1839. Publiés par Gauss et Weber à Leipzig en 1840. — GAUSS, *Werke,* t. V, p. 197).

(3) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze,* § 6 (GAUSS, *Werke,* t. V, p. 202).

(4) GAUSS, *ibid.*

(5) LEJEUNE-DIRICHLET, *Vorlesungen über die im umgekehrten verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte,* publiées par F. Grube, § 4. Leipzig ; 1876.

(6) RIEMANN, *Schwere, Elektricität und Magnetismus,* rédigé par K. Hattendorff, § 6. Hanovre; 1876.

(7) HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen,* t. II, § 17.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

continues sont encore, à l'intérieur des charges agissantes, les trois dérivées de la fonction potentielle.

Clausius (1) donna, le premier, une démonstration de cette dernière proposition; mais sa démonstration repose sur l'emploi d'une intégration par parties dont la légitimité même suppose l'exactitude de la proposition à démontrer.

La première démonstration satisfaisante du théorème en question est due à Bouquet et se trouve dans la *Théorie mécanique de la chaleur* de Briot (2). La démonstration que nous avons donnée est due à M. Otto Hölder (3).

L'existence des dérivées secondes de la fonction potentielle a été démontrée par Gauss (4) à peu près comme nous l'avons indiqué dans ce Chapitre. Cette démonstration, comme celle qui a été donnée par Clausius (5) suppose essentiellement l'existence des dérivées partielles de la densité électrique au voisinage du point considéré. M. Otto Hölder (6) a montré que les dérivées partielles de la fonction potentielle existaient encore dans le cas beaucoup plus général où l'on admet seulement l'hypothèse suivante :

Autour du point $M(x, y, z)$, *on peut tracer un domaine tel que, pour tout point* $M'(x', y', z')$ *de ce domaine, on ait*

$$|\rho(x', y', z') - \rho(x, y, z)| < A.\overline{MM'}^{\mu},$$

A *et* μ *étant deux constantes positives; si, de plus, pour deux points quelconques* $M'(x', y', z')$ *et* $M''(x'', y'', z'')$ *de ce domaine, on a*

$$|\rho(x'', y'', z'') - \rho(x', y', z')| < A.\overline{M'M''}^{\mu},$$

les dérivées partielles du second ordre de la fonction potentielle sont continues au point M.

---

(1) CLAUSIUS, *Die Potentialfunktion und das Potential;* Brunswick, 1859. Traduit en français, sur la deuxième édition, sous le titre : *La fonction potentielle et le potentiel,* par F. Folie. Paris; 1870.

(2) BRIOT, *Théorie mécanique de la chaleur.* Paris; 1869.

(3) OTTO HOLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie,* § 3 (*Inauguraldissertation.* Stuttgart; 1882).

(4) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze,* § 9 (GAUSS, *Werke,* t. V, p. 206).

(5) CLAUSIUS, *La fonction potentielle et le potentiel,* p. 46. Égalité (59).

(6) OTTO HOLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie,* § 4 et 5.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Quant à l'équation de Poisson, il en a été donné d'innombrables démonstrations. Outre celle que nous avons donnée, qui, nous l'avons dit, est due à Poisson, nous mentionnerons celle de Gauss (1), qui repose sur l'expression des dérivées partielles du second ordre que l'on peut déduire de l'égalité (24); celle de Clausius (2), fondée exclusivement sur les théorèmes les plus élémentaires du Calcul intégral; celle de M. Weingarten (3), qui emploie les propriétés des intégrales de Fourier; enfin celle de M. Kronecker (4).

---

(1) GAUSS, *Allgemeine Lezrsätze*, § 10 (GAUSS, *Werke*, t. V, p. 208).

(2) CLAUSIUS, *Sur la démonstration de l'équation*

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -4\pi\varepsilon K_p$$

(*Journal de Liouville*, 2e série, t. III, p. 57; 1858). — *De la fonction potentielle et du potentiel*, § 20.

(3) WEINGARTEN, *Zur Theorie des Potentials* (*Crelle's Journal*, t. XLIX, p. 367; 1855).

(4) KRONECKER, *Zur Potentialtheorie* (*Borchardt's Journal*, t. LXX, p. 246; 1869).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VI.

CRITERIA DE LA FONCTION POTENTIELLE D'UN VOLUME ÉLECTRISÉ. ATTRACTION DES ELLIPSOIDES.

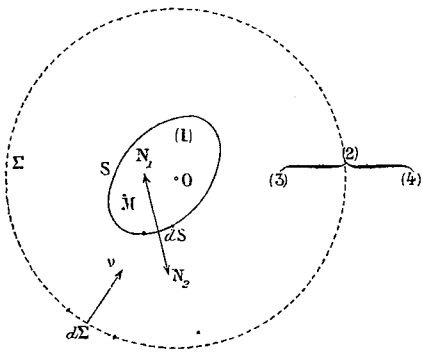
§ 1. — Criteria de la fonction potentielle d'un volume électrisé.

Imaginons qu'en un certain volume, limité par une surface fermée S, l'électricité soit répandue avec une densité solide ρ, finie en tout point ; ce volume ne renferme aucune surface de discontinuité électrisée et la surface S n'est pas, non plus, électrisée. Au dehors de la surface S, il n'existe pas d'électricité.

A l'intérieur de la surface S, la densité solide ρ est supposée non seulement avoir en tout point une valeur finie, mais encore varier d'une manière continue d'un point à l'autre et admettre en chaque point des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies.

Quelles sont alors les propriétés, connues par ce qui précède, dont jouit la fonction potentielle d'une semblable distribution électrique, tant à l'intérieur du volume 1 qu'enferme la surface S (*fig.* 9) que dans l'espace illimité 2 extérieur à cette surface ?

Fig. 9.



1° Dans l'espace entier, formé par les régions 1 et 2, la fonction potentielle $V(x, y, z)$ dont il s'agit est une fonction uniforme,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

finie et continue des coordonnées ; en tout point, elle admet, par rapport aux coordonnées, des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies.

2° En tout point de l'espace 1, intérieur à la surface S, elle admet, par rapport aux coordonnées, des dérivées partielles du second ordre qui sont uniformes, finies et continues. Elle s'offre donc à nous comme une fonction uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'intérieur de l'espace 1 ; ce qu'on exprime en disant qu'elle est *régulière* dans l'espace 1.

Si l'on désigne par $f(x, y, z)$ la fonction uniforme, finie et continue $(-4\pi\rho)$, on aura, en tout point de l'espace 1, en vertu de l'équation de Poisson,

$$\Delta V = f(x, y, z). \tag{1}$$

3° En tout point de l'espace 2, extérieur à la surface S, la fonction $V(x, y, z)$ admet, par rapport aux coordonnées, des dérivées partielles du second ordre qui sont uniformes, finies et continues ; en sorte que cette fonction est aussi régulière à l'intérieur de l'espace 2.

En tout point de cet espace, elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles de Laplace

$$\Delta V = 0. \tag{2}$$

On exprime ordinairement cette double propriété de la fonction V d'être régulière dans l'espace 2 et de satisfaire, en tout point de cet espace, à l'équation de Laplace, en disant qu'elle est *harmonique* à l'intérieur de l'espace 2.

4° Lorsque le point (x, y, z) s'éloigne au delà de toute limite de la surface S dans une direction quelconque, les quantités V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ tendent vers 0 ; et, si l'on désigne par R la distance du point (x, y, z) à un point fixe quelconque O de l'espace 1, les quantités

$$RV, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial z}$$

ne croissent pas au delà de toute limite.

Ces propriétés caractérisent la fonction potentielle de la distribution électrique considérée. Aucune autre fonction ne peut les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

posséder. Nous allons montrer, en effet, qu'attribuer la possession simultanée de l'ensemble de ces propriétés à deux fonctions $V(x, y, z)$, $V'(x, y, z)$, c'est supposer que ces deux fonctions ont la même valeur en tout point de l'espace ou, en d'autres termes, qu'elles ne forment qu'une fonction.

Désignons par $\Theta(x, y, z)$ l'excès de la fonction $V'(x, y, z)$ sur la fonction $V(x, y, z)$, et examinons les propriétés de cette fonction $\Theta(x, y, z)$.

1° Comme les deux fonctions V et V', la fonction Θ est uniforme, finie et continue en tous les points de l'espace ; elle tend vers o lorsque le point (x, y, z) s'éloigne infiniment, dans une direction quelconque, de la surface S. Ses dérivées partielles du premier ordre possèdent les mêmes propriétés.

2° Comme les deux fonctions V et V', la fonction Θ est régulière en tout point de l'espace 1. Les deux fonctions V et V' vérifiant l'équation (1) en tous les points de cet espace, la fonction Θ vérifie, en tous les points de cet espace, l'équation de Laplace

$$\Delta\Theta = 0.$$

La fonction Θ est donc harmonique en tous les points de l'espace 1.

3° Comme les deux fonctions V et V', la fonction Θ est harmonique en tous les points de l'espace 2.

4° Les produits $R\Theta$, $R^2\frac{\partial\Theta}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial\Theta}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial\Theta}{\partial z}$, ne croissent pas au-delà de toute limite lorsque le point (x, y, z) s'éloigne infiniment de la surface S.

Soient dS un élément de la surface S; N_1 la normale à cet élément vers l'intérieur de l'espace 1 ; N_2 la normale à ce même élément vers l'intérieur de l'espace 2.

La fonction Θ vérifie, à l'intérieur de l'espace 1, des conditions telles qu'il est permis de lui appliquer l'égalité (5) du Chapitre III ; cette égalité devient, parce que la fonction Θ est harmonique,

$$(3)\qquad \iiint_1 \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\Big] dx\,dy\,dz + \mathbf{S}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial N_1}\,dS = 0.$$

Du point fixe O, intérieur à l'espace 1, comme centre, avec un rayon vecteur variable R, décrivons une surface convexe Σ et choisissons le rayon R assez grand pour que la surface Σ soit, en entier, extérieure à la surface S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La surface Σ sépare l'espace 2 en deux régions : une région 3 limitée par les surfaces Σ et S, et une région illimitée 4 extérieure à la surface Σ.

Soit $d\Sigma$ un élément de la surface Σ ; soit ν la normale à cet élément dirigée vers l'intérieur de l'espace 3.

La fonction Θ jouit, dans l'espace 3, de propriétés telles qu'il est permis de lui appliquer l'équation (5) du Chapitre III ; et, comme la fonction Θ est harmonique dans l'espace 3, cette équation devient

$$\iiint_3 \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz + \int\!\!\int \Theta \frac{\partial\Theta}{\partial N_2}\,dS + \int\!\!\int \Theta \frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\,d\Sigma = 0.$$

L'élément $d\Sigma$ est vu du point o sous un angle $d\omega$. On a donc

$$d\Sigma = R^2 \frac{d\omega}{\cos(\nu, R)}$$

et

$$\iiint_3 \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz + \int\!\!\int \Theta \frac{\partial\Theta}{\partial N^2}\,dS = -\int\!\!\int R^2\Theta \frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\frac{1}{\cos(\nu, R)}\,d\omega,$$

la sommation qui figure au second membre s'étendant à tous les éléments de la sphère de rayon 1 ayant pour centre le point O. La surface Σ étant convexe, l'angle $\cos(\nu, R)$ n'est jamais égal à o. La quantité $R^2\frac{\partial\Theta}{\partial\nu}$ ne croît pas au delà de toute limite avec R; Θ tend vers o lorsque R croît au delà de toute limite. Si donc on fait croître tous les rayons vecteurs R de la surface Σ au delà de toute limite, le second membre de l'égalité précédente tend vers o.

Ce résultat entraîne le suivant :

L'intégrale

$$\iiint_3 \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

étendue à l'espace compris entre la surface S et une surface Σ convexe et extérieure à la surface S tend vers la limite bien déterminée

$$-\int\!\!\int \Theta \frac{\partial\Theta}{\partial N_2}\,dS,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lorsque la surface Σ grandit de telle manière que tous ses points s'écartent indéfiniment de la surface S. C'est le résultat qu'exprime l'égalité

$$(4)\qquad \iiint_2 \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz+\mathrm{S}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial N_2}\,d\Sigma=0.$$

La quantité Θ et ses dérivées partielles du premier ordre étant continues dans tout l'espace, on a évidemment

$$\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial N_1}\,d\Sigma+\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial N_2}\,d\Sigma=0,$$

en sorte que les égalités (3) et (4), ajoutées membre à membre, donnent

$$(5)\qquad \iiint\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=0,$$

l'intégrale s'étendant à tout l'espace.

Il est aisé de voir que cette égalité (5) ne saurait être satisfaite si l'on n'avait, en tous les points de l'espace, l'égalité

$$\mathrm{F}^2=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2=0,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z}=0.$$

Imaginons, en effet, qu'en un point M de l'espace la quantité F^2 ne soit pas égale à 0. Comme cette quantité F^2 est une fonction continue des coordonnées, on pourrait toujours, autour du point M, délimiter un domaine A assez petit, pour que la quantité F^2 soit différente de 0 en tout point du domaine A. Soit B l'espace extérieur au domaine A. On aurait

$$\iiint \mathrm{F}^2\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\mathrm{A}}\mathrm{F}^2\,dx\,dy\,dz+\iiint_{\mathrm{B}}\mathrm{F}^2\,dx\,dy\,dz.$$

Au second membre, la deuxième intégrale ne pourrait être que nulle ou positive ; la première serait certainement positive ; l'intégrale qui figure au premier membre ne pourrait donc être égale à 0 comme l'exige l'égalité (5).

Ainsi, la fonction Θ est une fonction continue dans tout l'espace, admettant, dans tout l'espace, des dérivées partielles du premier

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ordre qui, d'après les égalités (6), sont identiquement nulles. La fonction Θ a donc, dans tout l'espace, la même valeur constante ; comme, d'ailleurs, la quantité $\Theta(x, y, z)$ doit tendre vers o lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment de la surface S, il faut que la quantité Θ soit identiquement nulle, et que les deux fonctions V et V′ aient identiquement la même valeur en tous les points de l'espace. C'est la proposition même que nous avions énoncée.

Les propriétés que nous avons énumérées comme appartenant à la fonction potentielle d'un volume électrisé sont donc particulières à cette fonction et ne peuvent appartenir à aucune autre fonction. On peut leur donner le nom de *criteria* de la fonction dont il s'agit. Il suffit d'être assuré qu'une fonction les possède toutes (1) pour pouvoir affirmer qu'elle représente la fonction potentielle d'une distribution électrique intérieure à la surface S et ayant en chaque point la densité solide

$$\rho = -\frac{f(x, y, z)}{4\pi}.$$

Cet important théorème est dû à Lejeune-Dirichlet (2), qui en a fait usage dans l'étude du problème de l'attraction exercée par un ellipsoïde homogène.

§ 2. — Fonction potentielle d'un ellipsoïde homogène.

L'étude de l'action exercée par un ellipsoïde homogène sur un point extérieur ou intérieur à cet ellipsoïde a sollicité les efforts de presque tous les grands géomètres qui se sont succédés depuis Newton jusqu'à nos jours (3). Newton, Maclaurin, d'Alembert,

---

(1) Au lieu d'énoncer les *criteria* de la fonction potentielle relatifs à l'infini, nous nous contenterons souvent de dire que la fonction potentielle s'annule à l'infini, toutes les fois qu'aucune confusion ne sera à craindre.

(2) LEJEUNE-DIRICHLET, *Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène* (*Crelle's Journal*. Bd. XXXII, p. 80-84 ; 1846).

(3) On trouvera exposée très complètement l'histoire du problème de l'attraction des ellipsoïdes dans C. Paraira : *Over de Methoden ter bepaling van de aantrekking eener ellipsoide op en willekeurlig punt* (*Academisch præfschrift*. Amsterdam ; 1879).

Une histoire plus résumée du même problème sert d'introduction au Mémoire de Chasles : *Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes ; solution synthétique pour le cas général d'un ellipsoïde hétérogène et d'un point extérieur*. Paris : 1846.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Lagrange, ont amorcé la solution de ce problème. Elle a été donnée par Legendre et par Laplace. Ivory, Gauss, Poisson, Chasles et bien d'autres l'ont résolu par des méthodes différentes.

La solution de Lejeune-Dirichlet (1) diffère de celles dont nous venons d'énumérer les auteurs, en ce qu'elle n'aurait pu servir de méthode d'invention. Lejeune-Dirichlet prend, en effet, la fonction qui, d'après les travaux de ses prédécesseurs, doit représenter la fonction potentielle d'un ellipsoïde homogène, et, par l'emploi des *criteria* établis au paragraphe précédent, il s'assure que cette fonction est bien, en effet, la fonction potentielle de l'ellipsoïde considéré.

Cette méthode est évidemment moins satisfaisante pour l'esprit que les belles et élégantes méthodes d'invention proposées par différents géomètres, et notamment par Gauss et par Chasles. Mais elle a sur toutes les autres un avantage qui nous la fera préférer, la brièveté.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{7}$$

l'équation de l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes.

Envisageons l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0. \tag{8}$$

La quantité u, qui figure dans cette équation (8), est, en vertu de cette équation, une fonction algébrique de x, y, z.

Il est aisé de voir que cette équation, ramenée à la forme entière, est du troisième degré en u. Elle donne donc, en général, pour u, trois déterminations.

Supposons que l'on ait les inégalités

$$a > b > c.$$

Les trois déterminations de u séparent les unes des autres les

(1) LEJEUNE-DIRICHLET, *Sur un moyen général de vérifier l'expression du potentiel relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène* (*Crelle's Journal*. Bd. XXXII, p. 80-84; 1846). — *Vorlesungen, etc.*, rédigées par F. Grube; 2e Partie. Leipzig; 1876.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quatre quantités

$$-a^2, \qquad -b^2, \qquad -c^2, \qquad +\infty.$$

Le théorème des substitutions conduit immédiatement à ce résultat; en effet

Pour $u = -\infty$,	le premier membre de l'équation (8)	a le signe	$-$
» $u = -a^2 - \eta$	»	»	$-$
» $u = -a^2 + \eta$	»	»	$+$
» $u = -b^2 - \eta$	»	»	$-$
» $u = -b^2 + \eta$	»	»	$+$
» $u = -c^2 - \eta$	»	»	$-$
» $u = -c^2 + \eta$	»	»	$+$
» $u = +\infty$	»	»	$-$

Considérons la plus grande des trois racines, celle qui est comprise entre $-c^2$ et $+\infty$; cette racine est positive si le point (x, y, z) est extérieur à l'ellipsoïde, nulle si le point (x, y, z) est situé à la surface de l'ellipsoïde, et négative si le point (x, y, z) est intérieur à l'ellipsoïde. Il suffit, pour le démontrer, de remarquer que, par la substitution $u = 0$, le premier membre de l'équation (8) devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

quantité positive, nulle ou négative, suivant que le point (x, y, z) est extérieur à l'ellipsoïde, situé à la surface de l'ellipsoïde ou intérieur à l'ellipsoïde.

La somme des trois racines de l'équation (8) a pour valeur

$$\tfrac{1}{3}[(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 + c^2)].$$

Cette somme croît au delà de toute limite lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment, dans une direction quelconque, du centre de l'ellipsoïde. Par conséquent, la racine comprise entre $-c^2$ et $+\infty$ croît au delà de toute limite lorsque le point (x, y, z) s'éloigne indéfiniment de l'ellipsoïde.

Ces préliminaires posés, envisageons l'expression

$$(9) \qquad V(x, y, z) = \pi\rho\, abc \int_U^{+\infty} \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} - \dfrac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\, d\lambda,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dans laquelle U a pour valeur o si le point (x, y, z) n'est pas extérieur à l'ellipsoïde, tandis que, si ce point est extérieur à l'ellipsoïde, U désigne la racine positive de l'équation (8). Si le point (x, y, z) est situé à la surface de l'ellipsoïde, ces deux règles conduisent l'une et l'autre à prendre pour U la valeur o.

La quantité ρ est la densité électrique uniforme à l'intérieur de l'ellipsoïde.

Enfin le radical est pris en valeur absolue.

L'intégrale qui figure dans cette expression (9) a une limite infinie; mais cette intégrale n'est pas illusoire, car, pour les valeurs infinies de λ, la quantité sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\lambda^{-\frac{3}{2}}$.

Nous allons montrer que la fonction $V(x, y, z)$ présente tous les *criteria* de la fonction potentielle de l'ellipsoïde, et que, par conséquent, elle représente cette fonction potentielle.

1° La limite inférieure de l'intégration, U, représente deux fonctions analytiques différentes de x, y, z, selon que le point (x, y, z) est extérieur ou intérieur à l'ellipsoïde; mais ces deux fonctions analytiques prennent la même valeur o en un point de la surface de l'ellipsoïde; U est donc, dans tout l'espace, une fonction uniforme, finie et continue, de x, y, z.

D'ailleurs, l'élément sous le signe $\int$ est aussi, dans tout l'espace, une fonction uniforme, finie et continue, de x, y, z; car aucune des quantités

$$a^2 + \lambda, \quad b^2 + \lambda, \quad c^2 + \lambda$$

ne devient égale à o entre les limites de l'intégration.

Il résulte de là que, dans tout l'espace, la fonction $V(x, y, z)$ est une fonction uniforme, finie et continue, de x, y, z.

2° Soit R la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées; montrons que, lorsque R augmente au delà de toute limite, le produit RV demeure fini.

Nous avons

$$RV = \pi\rho abc \int_U^{+\infty} \frac{R\left[1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right]}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\, d\lambda.$$

Si nous nous reportons à la définition de U pour un point exté-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rieur à l'ellipsoïde, nous voyons que l'on peut poser

$$U = R\varphi,$$

φ étant une fonction de x, y, z qui demeure finie, positive, et ne tend pas vers o lorsque R croît au delà de toute limite.

Faisons alors un changement de variable défini par l'égalité

$$\lambda = R^2(\varphi + t),$$

et nous aurons

$$RV = \pi\rho abc \int_U^{+\infty} \frac{1 - \dfrac{\dfrac{x^2}{R^2}}{\dfrac{a^2}{R^2} + \varphi + t} - \dfrac{\dfrac{y^2}{R^2}}{\dfrac{b^2}{R^2} + \varphi + t} - \dfrac{\dfrac{z^2}{R^2}}{\dfrac{c^2}{R^2} + \varphi + t}}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{R^2} + \varphi + t\right)\left(\dfrac{b^2}{R^2} + \varphi + t\right)\left(\dfrac{c^2}{R^2} + \varphi + t\right)}}\, dt.$$

Lorsque R croît au delà de toute limite, $\frac{x^2}{R^2}$, $\frac{y^2}{R^2}$, $\frac{z^2}{R^2}$ ne croissent pas au delà de toute limite; φ est toujours fini, positif, et ne tend pas vers o; $\frac{a^2}{R^2}$, $\frac{b^2}{R^2}$, $\frac{c^2}{R^2}$ tendent vers o; VR demeure donc fini.

3° Calculons la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$.

La formule de la différentiation sous le signe $\int$, appliquée à l'égalité (9), donne

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \pi\rho abc \left\{ \int_U^{\infty} \frac{-2x}{a^2+\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} - \left[\frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} - \dfrac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \right]_{\lambda=U} \frac{\partial U}{dx} \right\}.$$

Deux cas sont à distinguer :

Si le point (x, y, z) est intérieur à l'ellipsoïde, U a la valeur constante o, et il en est de même de $\frac{\partial U}{\partial x}$; le second terme du facteur entre accolades est égal à o.

Si, au contraire, le point (x, y, z) est à la surface de l'ellipsoïde ou à l'extérieur de l'ellipsoïde, on a

$$\frac{x^2}{a^2+U} + \frac{y^2}{b^2+U} + \frac{z^2}{c^2+U} - 1 = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et le second terme du facteur entre accolades est encore égal à 0.

La formule précédente se réduit donc, en toutes circonstances, à

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\pi\rho abc \int_U^{+\infty} \frac{2x}{a^2+\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}; \tag{10}$$

$\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ ont des expressions analogues.

De ces expressions il est aisé de conclure, par des raisonnements analogues aux précédents, que $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sont des fonctions de x, y, z uniformes, finies et continues en tous les points de l'espace, et que les produits $R^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial V}{\partial z}$ demeurent finis lorsque R croît au delà de toute limite.

4° La formule de différentiation sous le signe $\int$, appliquée à l'égalité (10), nous donne

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -2\pi\rho abc \Bigg[&\int_U^{+\infty} \frac{1}{a^2+\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \\ &- \frac{x}{a^2+U} \frac{1}{\sqrt{(a^2+U)(b^2+U)(c^2+U)}} \frac{\partial U}{\partial x}\Bigg].\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Cette expression montre que $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est une fonction uniforme, finie et continue en tous les points extérieurs à l'ellipsoïde, et aussi en tous les points intérieurs. Pour les points de la surface même de l'ellipsoïde, cette expression perd tout sens, comme $\frac{\partial U}{\partial x}$.

5° De cette équation (11) et des expressions analogues que l'on peut donner pour $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, on déduit

$$\Delta V = -2\pi\rho abc \Bigg[\int_U^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} - \frac{1}{\sqrt{(a^2+U)(b^2+U)(c^2+U)}} \left(\frac{x}{a^2+U}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{y}{b^2+U}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{z}{c^2+U}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\Bigg].$$

Mais, par différentiation, on vérifie aisément que

$$\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right) \frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = 2\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en sorte que l'équation précédente devient

$$(12)\qquad \Delta V = -\frac{2\pi\rho abc}{\sqrt{(a^2+U)(b^2+U)(c^2+U)}}\left(2-\frac{x}{a^2+U}\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{y}{b^2+U}\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{z}{c^2+U}\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Deux cas sont à distinguer :

Si le point (x, y, z) est intérieur à l'ellipsoïde, on a

$$U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

D'ailleurs, le radical étant, par hypothèse, pris en valeur absolue, l'égalité (12) devient

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

Si, au contraire, le point (x, y, z) est extérieur à l'ellipsoïde, on a

$$\frac{x^2}{a^2+U}+\frac{y^2}{b^2+U}+\frac{z^2}{c^2+U}-1=0$$

et, par conséquent,

$$\frac{2x}{a^2+U}-\left[\frac{x^2}{(a^2+U)^2}+\frac{y^2}{(b^2+U)^2}+\frac{z^2}{(c^2+U)^2}\right]\frac{\partial U}{\partial x}=0,$$

$$\frac{2y}{b^2+U}-\left[\frac{x^2}{(a^2+U)^2}+\frac{y^2}{(b^2+U)^2}+\frac{z^2}{(c^2+U)^2}\right]\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

$$\frac{2z}{c^2+U}-\left[\frac{x^2}{(a^2+U)^2}+\frac{y^2}{(b^2+U)^2}+\frac{z^2}{(c^2+U)^2}\right]\frac{\partial U}{\partial z}=0.$$

Prenons ces trois équations; multiplions les deux membres de la première par $\frac{x}{a^2+U}$; les deux membres de la deuxième par $\frac{y}{b^2+U}$; les deux membres de la troisième par $\frac{z}{c^2+U}$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons

$$\left[\frac{x^2}{(a^2+U)^2}+\frac{y^2}{(b^2+U)^2}+\frac{z^2}{(c^2+U)^2}\right]\left[2-\left(\frac{x}{a^2+U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{y}{b^2+U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{z}{c^2+U}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]=$$

Comme, pour aucun point extérieur à l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{(a^2+U)^2}+\frac{y^2}{(b^2+U)^2}+\frac{z^2}{(c^2+U)^2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ne peut être égal à 0, cette égalité devient

$$2 - \frac{x}{a^2 + \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{y}{b^2 + \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{z}{c^2 + \mathrm{U}}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} = 0.$$

Ce résultat, reporté dans l'égalité (12), donne, pour tout point extérieur à l'ellipsoïde,

$$\Delta \mathrm{V} = 0.$$

Ainsi la fonction $\mathrm{V}(x, y, z)$ offre tous les *criteria* de la fonction potentielle de l'ellipsoïde représenté par l'égalité (7), en supposant que l'électricité soit répandue uniformément à l'intérieur de cet ellipsoïde avec la densité solide ρ. La fonction $\mathrm{V}(x, y, z)$ représente donc bien cette fonction potentielle.

Posons

$$(13)\quad \begin{cases} \Theta = \pi abc \displaystyle\int_{\mathrm{U}}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ \mathrm{L} = \pi abc \displaystyle\int_{\mathrm{U}}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ \mathrm{M} = \pi abc \displaystyle\int_{\mathrm{U}}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \\ \mathrm{N} = \pi abc \displaystyle\int_{\mathrm{U}}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}. \end{cases}$$

Les quatre quantités Θ, L, M, N sont des constantes pour les points intérieurs à l'ellipsoïde ou situés à sa surface, et des fonctions de x, y, z pour les points extérieurs à l'ellipsoïde.

La formule (9) donnera alors

$$(14)\qquad \mathrm{V}(x, y, z) = \rho(\Theta - \mathrm{L}x^2 - \mathrm{M}y^2 - \mathrm{N}z^2).$$

L'égalité (10) nous donnera la première des égalités

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = -2\rho \mathrm{L}x, \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = -2\rho \mathrm{M}y, \\ \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = -2\rho \mathrm{N}z, \end{cases}$$

qui nous seront utiles plus tard. Une charge électrique égale à l'unité étant fixée à un point matériel placé en (x, y, z), ce point

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

subira, de la part de l'ellipsoïde, une action dont les composantes auront pour valeur

$$(16)\qquad \begin{cases} X = 2\varepsilon\rho L x, \\ Y = 2\varepsilon\rho M y, \\ Z = 2\varepsilon\rho N z. \end{cases}$$

Ces formules achèvent la solution, donnée par Lejeune-Dirichlet, du problème de l'attraction d'un ellipsoïde homogène.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VII.

ACTION ÉLECTROSTATIQUE ET FONCTION POTENTIELLE D'UNE SURFACE ÉLECTRISÉE.

§ 1. — Étude de la composante normale de l'action exercée en un point par une surface électrisée.

Supposons qu'un système soit formé par des corps continus séparés les uns des autres et du milieu non électrisable qui les environne par des surfaces de discontinuité. L'électricité est répandue à l'intérieur des corps avec une densité solide ρ et sur les surfaces de discontinuité avec une densité superficielle σ.

Cette électricité, agissant suivant les lois de Coulomb, exerce sur un point matériel chargé d'une quantité d'électricité égale à l'unité une action dont la grandeur et la direction sont parfaitement déterminées, que le point électrisé se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur des charges agissantes, pourvu toutefois qu'il se trouve à distance finie de toute surface de discontinuité électrisée. Le Chapitre V nous fait connaître quelles sont, dans ces conditions, les plus importantes propriétés de cette force.

Il nous reste à étudier ce qui advient de cette force lorsque son point d'application s'approche indéfiniment d'une surface de discontinuité électrisée, ou même vient se placer sur cette surface de discontinuité. C'est l'objet du présent Chapitre.

L'existence et la continuité en tout point de l'espace de l'action électrique exercée par des volumes électrisés étant une vérité reconnue, nous pourrons nous contenter d'étudier l'action exercée par les surfaces électrisées, action qui, composée avec la précédente, nous donnera l'action de tout le système.

Soit donc un système formé seulement de surfaces électrisées, et un point $M(x, y, z)$ qui n'est situé sur aucune de ces surfaces.

Soient

dS un élément de l'une des surfaces électrisées;

(a, b, c) un point de cet élément;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

σ la densité superficielle au point (a, b, c);
r la distance du point M au point (a, b, c).

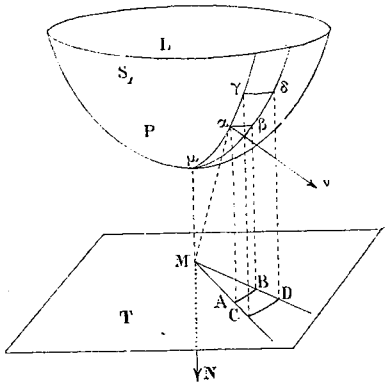
L'action au point M a pour composantes

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \varepsilon \sum S \sigma \dfrac{x-a}{r^3} dS, \\ Y = \varepsilon \sum S \sigma \dfrac{y-b}{r^3} dS, \\ Z = \varepsilon \sum S \sigma \dfrac{z-c}{r^3} dS, \end{cases}$$

Prenons un point $M(x, y, z)$, que l'on puisse faire tendre d'une manière continue vers une des surfaces S du système. Supposons que, de ce point M, on puisse abaisser sur la surface S une normale $M\mu$ dont la longueur tende vers o et dont l'orientation varie d'une manière continue lorsque le point M tend vers un point de la surface S; cela sera toujours possible si, comme nous le supposerons, au point P de la surface S, vers lequel tend le point M, et en tous les points assez voisins du point P, la surface S admet un plan tangent, et si l'orientation de ce plan tangent varie d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S.

Soit μ (*fig.* 10) le pied de la normale en question. On pourra

Fig. 10.



toujours supposer le point M si voisin de la surface S que le point μ soit aussi voisin que l'on voudra du point P vers lequel tend le point M.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Par le point M menons un plan T parallèle au plan tangent à la surface S en μ. Si le point μ est suffisamment voisin du point P, nous pourrons toujours, sur la surface S, tracer une ligne fermée L, découpant sur cette surface une aire limitée S_1 qui renferme à son intérieur le point P et tous les points μ relatifs à toutes les positions successives du point M et qui, en outre, possède la propriété suivante :

Une normale $A\alpha$ au plan T rencontrera toujours l'aire S, en un point au plus α et fera toujours un angle fini avec le plan tangent en α.

Cela posé, nous observerons que la force exercée au point M par toutes les surfaces électrisées du système résulte toujours de deux forces : l'une engendrée par l'électricité répartie sur la calotte S_1 ; l'autre répartie sur le reste des surfaces électrisées.

Cette dernière demeure évidemment une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées du point M, même si le point M tend vers le point P de l'aire S_1, ou vient à traverser l'aire S_1 ; ne nous en occupons pas plus longtemps et étudions la première.

La première a une composante dirigée suivant la normale N à la surface S_1, normale comptée dans un sens déterminé, le sens μM. Cette composante, que nous désignerons par F_N, va solliciter notre attention.

Par μM, menons deux plans normaux en μ à la surface S_1, faisant entre eux un angle $d\psi$. Ils ont pour trace, sur le plan T, deux lignes droites MA, MB. Envisageons l'élément du plan T compris entre ces deux droites et deux circonférences de cercle ayant pour centre le point M et pour rayons $MA = R$ et $MC = R + dR$. Cet élément ABCD a pour aire

$$R\,dR\,d\psi.$$

Il est la projection d'un certain élément $\alpha\beta\gamma\delta$ de l'aire S_1. Soit ν la normale à l'aire S_1 au point α, cette normale étant prise dans un sens tel qu'elle vienne coïncider avec la direction N si l'on fait venir le point α au point M. L'élément $\alpha\beta\gamma\delta$ aura pour aire

$$dS_1 = \frac{R}{\cos(N, \nu)}\,dR\,d\psi.$$

On aura alors

$$F_N = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{dR} \sigma \frac{R}{r^2} \frac{\cos(\alpha M, N)}{\cos(N, \nu)}\,dR\,d\psi,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\mathcal{R}$ désignant le rayon vecteur de la projection de la courbe L sur le plan T.

Jusqu'ici, nous avons supposé que la densité superficielle σ demeurerait finie dans le champ d'intégration; que la quantité $\frac{1}{\cos(N, \nu)}$ demeurait finie et variait d'une manière continue dans ce champ. Nous allons supposer maintenant que ces quantités admettent, par rapport à R, des dérivées partielles du premier ordre qui demeurent finies dans le champ d'intégration.

Soit z la distance $A\alpha$ du point α au plan T, comptée positivement d'un tel côté du plan T que la normale N traverse ce dernier de la face positive à la face négative. Nous aurons

$$r^2 = R^2 + z^2.$$

Nous aurons aussi

$$\cos(\alpha M, N) = \frac{z}{r}.$$

Nous aurons donc

$$F_N = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \sigma \frac{R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos(N, \nu)} dR\, d\psi.$$

Mais

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial R}.$$

On a donc, en appliquant à l'expression de F_N la formule de l'intégration par parties et en désignant par $\mathcal{S}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{N}$, ce que deviennent σ, z, ν en un point de la courbe L,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} F_N = \varepsilon & \int_0^{2\pi} \mathcal{S} \frac{\mathcal{Z}}{(\mathcal{R}^2 + \mathcal{Z}^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\cos(N, \mathcal{N})} d\psi \\ & - \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{\sigma}{\cos(N, \nu)} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{dR} dR\, d\psi \\ & - \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\sigma}{\cos(N, \nu)} \right] dR\, d\psi. \end{aligned} \right.$$

Remarquons bien que cette transformation de l'intégrale donnant F_N suppose essentiellement que le point M n'est pas situé sur la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

surface S; sinon la formule de différentiation sur laquelle elle repose perdrait tout sens.

Mais le second membre de la formule (2) possède, comme nous l'allons voir, une valeur finie, qui varie d'une manière continue lorsque le point M se rapproche de la surface S_1 d'un côté déterminé de cette surface et même lorsqu'il vient se poser sur la surface S_1. Seulement, cette valeur, qui représente F_N tant que le point M n'est pas sur la surface S_1, quelque voisin qu'il soit d'ailleurs de cette surface S_1, peut cesser de représenter F_N au moment où il vient se placer sur la surface S_1.

Ce que nous venons d'énoncer est évident pour le premier des trois termes qui figurent au second membre de l'égalité (2).

Envisageons le second de ces termes. Il peut s'écrire

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{\sigma}{\cos(N,\nu)} \frac{1}{\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \frac{dz}{dR} \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} dR\, d\psi.$$

En vertu des hypothèses faites, tous les facteurs dont se compose la quantité sous le signe $\int$ demeurent finis dans le champ d'intégration, même si le point M vient se placer sur la surface S_1, sauf le terme $R^{-\frac{1}{2}}$. La théorie des intégrales dans lesquelles la quantité sous le signe $\int$ devient infinie nous montre alors que l'intégrale précédente garde une valeur finie et varie d'une manière continue lorsque le point M s'approche de la surface S_1 ou vient se placer sur cette surface.

Une démonstration analogue s'applique au dernier terme du second membre de l'égalité (2).

Nous arrivons donc à la conséquence suivante :

Considérons une surface S *dans une région* S_1 *de laquelle le plan tangent varie d'orientation d'une manière continue pendant que la courbure a une valeur finie* [cette condition équivaut à l'existence de la dérivée de cos(N, ν), comme on le voit aisément].

Supposons en outre qu'en tout point de cette région S_1 *la densité électrique superficielle ait une valeur finie, varie*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'une manière continue et admette des dérivées partielles par rapport aux paramètres qui fixent la position d'un point sur la surface S.

Prenons un point M *situé au voisinage de cette surface d'un côté déterminé de cette surface. L'action exercée par la surface électrisée sur ce point* M *admet une composante suivant la normale à la surface qui va joindre le point* M. *Lorsque le point* M *tend d'une manière quelconque vers un point* P *de la surface, cette composante normale* F_N *tend vers une limite finie et bien déterminée. Cette limite varie d'une manière continue avec la position du point* P *sur la surface. On n'est pas autorisé à dire que cette limite représente la valeur de* F_N *sur la surface.*

Prenons deux points M, M′ situés de part et d'autre de la surface S_1 et infiniment voisins d'un même point P. Dans ce cas, la direction N′ est sensiblement opposée à N; la direction ν' à ν. La quantité $\cos(N', \nu')$ a donc sensiblement la même valeur que la quantité $\cos(N, \nu)$. De même z et z' ont sensiblement des valeurs égales et de signe contraire. Il semble donc que, lorsque ces deux points tendent simultanément vers le point P, les deux quantités F_N et $F_{N'}$ doivent tendre vers des limites égales et de signe contraire. Mais, si l'on observe que la quantité qui figure sous le signe $\int$ dans les deux derniers termes du second membre de l'égalité (2) devient infinie dans le champ d'intégration, on voit sans peine que cette conclusion n'est plus nécessaire. Ainsi, *lorsque deux points, situés de part et d'autre de la surface* S_1, *tendent tous deux vers un même point de cette surface, les composantes normales des forces exercées sur ces deux points tendent vers des limites qui ne sont pas forcément égales et de signe contraire.*

Prenons le point M sur la surface S_1 (*fig.* 11). Autour du point M, sur cette surface S_1, traçons une ligne fermée l séparant l'aire S_1 en deux autres; une aire limitée S_2 entourant le point M et une aire annulaire S_3 comprise entre l et L. Par le point M, menons la normale N à la surface S_1.

L'électricité répartie sur l'aire S_3 exerce au point M une action

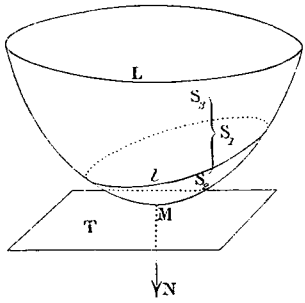
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dont la composante suivant N est

$$\Phi_N = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_\rho^{\mathcal{R}} \frac{\sigma R \cos(\alpha M, N)}{r^2 \cos(N, \nu)} dR\, d\psi,$$

ρ étant le rayon vecteur de la projection de la courbe l sur le

Fig. 11.



plan T tangent en M à la surface S_1.

Or on a

$$\cos(\alpha M, N) = \frac{z}{r},$$

$$r^2 = R^2 + z^2.$$

On a donc

$$\Phi_N = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_\rho^{\mathcal{R}} \frac{\sigma R z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cos(N, \nu)} dR\, d\psi.$$

Comme la surface S_1 a une courbure finie au point M, on peut écrire

$$z = KR^2,$$

K tendant vers une limite finie lorsque R tend vers o. On a alors

$$\Phi_N = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_\rho^{\mathcal{R}} \frac{K\sigma}{(1 + K^2 R^2)^{\frac{3}{2}} \cos(N, \nu)} dR\, d\psi.$$

Sous cette forme, on voit que, si la courbe l se contracte de manière à venir s'évanouir au point M en passant par une série quelconque de formes, ce qui fait tendre vers o toutes les quantités ρ, la quantité Φ_N tend vers une limite finie et déterminée, représentée

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par le symbole

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{\sigma R \cos(\alpha M, N)}{r^2 \cos(N, \nu)} \, dR \, d\psi$$

ou

$$\varepsilon \mathbf{S}_{S_1} \frac{\sigma}{r^2} \cos(r, N) \, dS.$$

Cette limite est, par définition, *la composante normale de l'action que la surface électrisée* S_1 *exerce en un de ses points* M *en vertu des lois de Coulomb.*

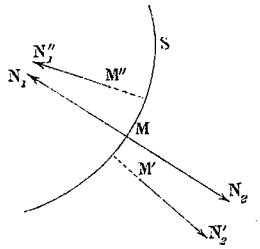
La démonstration de l'existence de cette limite suppose seulement que la quantité σ soit finie et intégrable. *Si,* de plus, *la densité superficielle varie d'une manière continue sur la surface* S_1, *cette composante normale varie d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface* S_1.

Résumons les résultats trouvés dans ce paragraphe pour la composante normale de l'action exercée en un point par une surface électrisée.

1° Soit un point M situé sur une surface S dont la courbure au voisinage du point M a une valeur finie. Cette surface est recouverte d'une couche électrique ayant une densité superficielle finie en tout point voisin du point M. La normale à la surface S au point M (*fig.* 12) admet deux orientations que nous désignerons par N_1, N_2.

L'action exercée au point M par l'électricité répandue sur la

Fig. 12.



surface S admet suivant N_1 une composante finie et déterminée Φ_{N_1}.

2° Si la densité superficielle est continue, au voisinage du point M, la quantité Φ_{N_1} varie d'une manière continue avec la position de ce point sur la surface S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° Supposons maintenant que la densité superficielle admette, au voisinage du point M, une dérivée finie par rapport à l'arc de toute courbe tracée sur la surface S. Soit M'' un point extérieur à la surface S qui tend vers le point M en demeurant du côté de la surface S marqué par la normale N_1. Soit N''_1 une normale à la surface S allant à la rencontre de ce point. La composante suivant N''_1 de l'action exercée au point M'' par l'électricité répandue sur la surface S tend vers une limite finie et déterminée lorsque le point M'' tend vers le point M d'une manière quelconque. Cette limite F_{N_1} varie d'une manière continue avec la position du point M.

Soit de même M' un point extérieur à la surface S qui tend vers le point M en demeurant du côté de la surface S marqué par la normale N_2. Soit N'_2 la normale à la surface S allant à la rencontre de ce point. La composante suivant N'_2 de l'action exercée au point M' par l'électricité répandue sur la surface S tend vers une limite finie et déterminée lorsque le point M' tend vers le point M d'une manière quelconque. Cette limite F_{N_2} varie d'une manière continue avec la position du point M.

4° Les quantités F_{N_1}, F_{N_2} ne sont pas forcément égales et de signe contraire; la quantité F_{N_1} n'est pas forcément égale à Φ_{N_1}; la quantité F_{N_2} n'est pas forcément égale à $-\Phi_{N_1}$ ou Φ_{N_2}.

Nous trouverons plus loin la valeur des quantités

$$F_{N_1} + F_{N_2},$$
$$\Phi_{N_1} - F_{N_1},$$
$$\Phi_{N_2} - F_{N_2}.$$

§ 2. — Étude des composantes tangentielles de l'action exercée en un point par une surface électrisée.

Prenons dans le plan T (*fig.* 13), mené par le point M parallèlement au plan tangent en μ à la surface S_1, une direction déterminée MΘ. Convenons de compter les angles ψ à partir de cette direction.

L'action exercée au point M par l'électricité répandue sur la surface S_1 admet suivant MΘ une composante F_Θ, qui a pour valeur

$$F_\Theta = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \sigma \frac{R \cos(\alpha M, \Theta)}{r^2 \cos(\widehat{N, \nu})} dR\, d\psi.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais on a

$$\cos(\alpha M, \Theta) = \sin(\alpha M, N)\cos\psi,$$

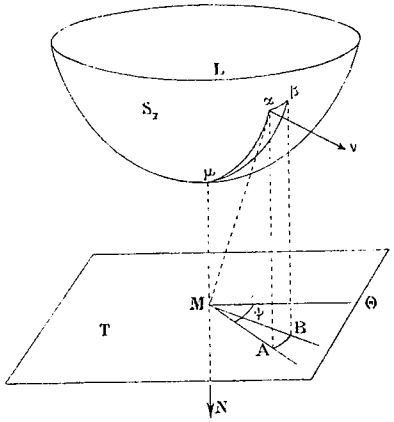
$$\sin(\alpha M, N) = \frac{R}{r},$$

$$r^2 = R^2 + z^2.$$

On a donc

$$F_\Theta = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathfrak{R}} \sigma \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos(N, \nu)} dR \cos\psi \, d\psi.$$

Fig. 13.



Mais on a, d'ailleurs,

$$\cos\psi \, d\psi = d(\sin\psi).$$

On peut donc, en remarquant que

$$\sigma \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos(N, \nu)}$$

est une fonction uniforme finie et continue de ψ, écrire

$$F_\Theta = 3\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathfrak{R}} \sigma \frac{R^2 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{1}{\cos(N, \nu)} dR \sin\psi \, d\psi$$

$$- \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathfrak{R}} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\sigma}{\cos(N, \nu)} \right] dR \sin\psi \, d\psi.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit dl la longueur de l'arc BA. Nous aurons

$$dl = \mathrm{R}\, d\psi.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{F}_\Theta = 3\varepsilon \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathcal{R}} \sigma \frac{\mathrm{R}^3 z^2}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial z}{\partial l} \frac{1}{\cos(\mathrm{N},\nu)}\, d\mathrm{R}\sin\psi\, d\psi \\ \qquad - \varepsilon \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{R}^3}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{\sigma}{\cos(\mathrm{N},\nu)}\right] d\mathrm{R}\sin\psi\, d\psi. \end{cases}$$

Si, comme nous le supposons, la surface S_1 admet en tout point une courbure finie, $\frac{\partial z}{\partial l}$ a une valeur finie; $\frac{\partial \cos(\mathrm{N},\nu)}{\partial l}$ a une valeur finie.

Si, comme nous le supposons également, la densité superficielle σ admet une dérivée par rapport à l'arc de toute ligne tracée sur la surface S_1, $\frac{\partial \sigma}{\partial l}$ a une valeur finie.

Enfin, nous savons que

$$z = \mathrm{K}\mathrm{R}^2,$$

K croissant au delà de toute limite lorsque R tend vers o, si le point M est extérieur à la surface S_1, et tendant vers une limite finie si M est situé sur la surface S_1, en sorte que les quantités

$$\frac{\mathrm{R}^3}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\mathrm{R}^3 z^2}{(\mathrm{R}^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

ne croissent pas au delà de toute limite lorsque R tend vers o.

La quantité F_Θ garde donc une valeur finie et variable d'une manière continue avec la position du point M, non seulement si le point M s'approche de la surface S, mais encore si ce point vient se placer sur la surface S ou se déplace sur cette surface.

Or, tant que le point M n'est point sur la surface S, nous sommes assurés que la quantité F_Θ représente la composante suivant $\mathrm{M}\Theta$ de l'action exercée au point M sur la surface S_1.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

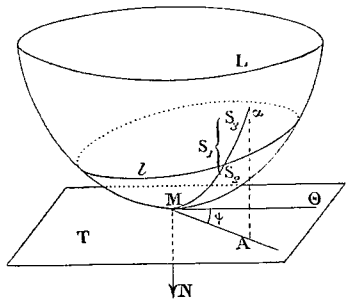
Prenons une surface S *qui admet en tout point une courbure finie et qui est recouverte d'une couche électrique dont la den-*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sité, variable d'une manière continue, admet une dérivée finie par rapport à l'arc de toute courbe tracée sur la surface S. *Soit* M *un point extérieur à la surface, situé d'un côté déterminé de cette surface et qui s'approche d'un point* P *de cette surface; soit* MΘ *une direction issue du point* M, *cette direction tendant à devenir parallèle au plan tangent en* P *à la surface* S. *La composante* F_Θ *suivant* MΘ *de l'action exercée au point* M *par la surface* S *tend vers une limite finie et déterminée, variable d'une manière continue avec la position du point* P *sur la surface* S *et la direction limite de la droite* MΘ.

Prenons maintenant le point M sur la surface S_1 (*fig.* 14).

Fig. 14.



Traçons sur cette surface une ligne fermée l, entourant le point M et partageant l'aire S_1 en deux autres : l'une, S_2, limitée par la courbe l et renfermant le point M; l'autre, annulaire, S_3, comprise entre les courbes L et l.

L'action exercée au point M par l'électricité répandue sur l'aire S_3 a, suivant MΘ, une composante qui a pour valeur

$$F_\Theta = \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_\rho^{R} \sigma \frac{R \cos(\alpha M, \Theta)}{r^2 \cos(N, \nu)} dR\, d\psi,$$

ρ étant le rayon vecteur de la projection de la courbe l sur le plan T.

Une transformation de tout point semblable à celle qui a donné

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la formule (3) permet d'écrire l'égalité suivante :

$$F_\Theta = 3\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_\rho^{\mathcal{R}} \sigma \frac{R^3 z^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial z}{\partial l} \frac{1}{\cos(N, \nu)} \, dR \sin\psi \, d\psi$$
$$- \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_\rho^{\mathcal{R}} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\sigma}{\cos(N, \nu)} \right] dR \sin\psi \, d\psi.$$

Sous cette forme, on voit que, si ρ tend vers o, la quantité F_Θ tendra vers une limite finie, déterminée, variable d'une manière continue avec la direction $M\Theta$ et la position du point M sur la surface S_1, cette limite ayant pour expression

$$3\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \sigma \frac{R^3 z^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial z}{\partial l} \frac{1}{\cos(N, \nu)} \, dR \sin\psi \, d\psi$$
$$- \varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\sigma}{\cos(N, \nu)} \right] dR \sin\psi \, d\psi,$$

c'est-à-dire ce que devient le second membre de l'égalité (3) lorsque, dans le cas auquel se rapporte cette égalité, le point M vient se placer sur la surface S_1.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La surface S_1 *exerce en un point* M *qui lui appartient une action dont la composante suivant une tangente* $M\Theta$ *à la surface* S_1 *au point* M *a une valeur finie et déterminée, variable d'une manière continue avec l'orientation de la tangente* $M\Theta$ *et la position du point* M *sur la surface* S_1. *Cette valeur est la limite vers laquelle tend la composante suivant une droite* $M'\Theta'$ *de l'action exercée par la surface en un point extérieur* M' *lorsque le point* M' *et la direction* $M'\Theta'$ *tendent respectivement vers le point* M *et la direction* $M\Theta$.

Nous énoncerons abréviativement les diverses propositions que nous avons établies au présent paragraphe, en disant que *les composantes tangentielles de l'action d'une surface en un point varient d'une manière continue, même si ce point traverse la surface.*

§ 3. — **Réfraction de la force au passage d'une surface électrisée.**

Nous allons maintenant chercher les relations qui existent entre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les trois quantités que nous avons désignées au § 1 par les lettres F_{N_1}, F_{N_2}, Φ_{N_1}. La détermination de ces relations repose sur une conséquence des lemmes de Gauss, conséquence qui n'est elle-même que la généralisation du théorème établi au § 2 du Chapitre IV.

Imaginons un système formé, comme tous ceux que nous étudions, par des corps continus, en tout point desquels la densité électrique solide a une valeur finie et par des surfaces de discontinuité en tout point desquelles la densité électrique superficielle a une valeur finie.

Au sein de ce système, traçons une surface fermée S.

Cette surface S peut couper certaines surfaces de discontinuité en de certaines lignes ou les toucher en certains points; elle peut aussi avoir des aires d'étendue finie communes avec certaines de ces surfaces de discontinuité.

Nous supposerons, désormais, que si le point M est un point commun à la surface S et à une surface de discontinuité Σ, celle-ci est soumise, au voisinage du point M, aux conditions suivantes :

1° Elle admet une courbure finie;

2° La densité superficielle de la couche électrique qui la recouvre admet une dérivée finie suivant toute ligne tracée sur la surface Σ.

Moyennant ces conditions, nous serons assurés que le point M et que tout point voisin du point M subiraient, s'ils portaient une charge électrique égale à l'unité, une force finie et déterminée de la part de l'électricité répandue sur le système.

Cela étant, nous sommes assurés que, de quelque manière que l'on place une charge électrique égale à l'unité sur la surface S, l'action de tout le système sur le point où se trouve cette charge admet une composante f_{n_e} finie et déterminée, suivant la normale n_e extérieure à la surface S en ce point.

Envisageons alors la somme

$$\int f_{n_e}\, dS.$$

Par une série de raisonnements analogues en tout point à ceux qui nous ont servi au Chapitre IV, § 2, nous trouverons que l'on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

peut écrire

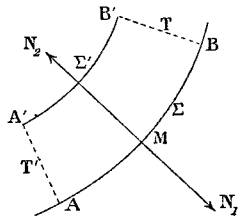
$$(4) \qquad \mathbf{S} f_{n_e}\, d\mathbf{S} = 4\pi\varepsilon\, \mathfrak{M} + 2\pi\varepsilon\mu,$$

$\mathfrak{M}$ étant la quantité totale d'électricité répartie à l'intérieur de la surface S et μ la quantité totale d'électricité répartie sur cette même surface.

Telle est l'égalité que nous allons appliquer immédiatement et dont nous aurons encore à faire un fréquent usage au cours de ces Leçons.

Considérons une surface de discontinuité Σ (*fig.* 15) chargée

Fig. 15.



d'électricité et, sur cette surface, un point M au voisinage duquel la surface Σ possède les propriétés que nous avons rappelées il y a un instant.

Du côté de cette surface vers lequel est dirigée la normale N_2, traçons une surface Σ', parallèle à la première. Soit δ la distance de ces deux surfaces.

Sur la surface Σ autour du point M, prenons une aire AB. Par tous les points A, B, ... du contour de cette aire, menons des normales AA', BB', ... Elles forment une surface réglée T qui découpe une aire A'B' sur la surface Σ'.

Les aires AB, A'B' et la portion de la surface T, qui est située entre elles, limitent un espace clos. On peut toujours choisir la distance δ assez petite pour qu'aucune surface de discontinuité autre que la surface Σ ne pénètre dans cet espace clos, ou ne rencontre la surface fermée qui le limite.

Cette surface remplit alors assurément des conditions telles, que l'égalité (4) lui soit applicable. Moyennant l'emploi de notations dont le sens est bien facile à deviner, cette égalité (4) pourra

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

s'écrire, dans le cas actuel,

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathbf{S}_{(AB)} f_{n_e}\, d\Sigma + \mathbf{S}_{(A'B')} f'_{n_e}\, d\Sigma' + \mathbf{S}\, \varphi_{n_e}\, dT \\ \qquad = 4\pi\varepsilon \iiint \rho\, dx\, dy\, dz + 2\pi\varepsilon\, \mathbf{S}\, \sigma\, d\Sigma. \end{cases}$$

La quantité f_{n_e} n'est autre chose que la quantité désignée à la fin du § 1 par Φ_{N_1}. On a donc

$$\mathbf{S}_{(AB)} f_{n_e}\, d\Sigma = \mathbf{S}_{(AB)} \Phi_{N_1}\, d\Sigma.$$

Lorsqu'on fait tendre δ vers o, chaque élément $d\Sigma'$ tend vers un des éléments $d\Sigma$, et f'_{n_e} tend vers la quantité désignée à la fin du § 1 par F_{N_2}. On peut donc prendre δ assez petit pour que l'on ait

$$\left| \mathbf{S}_{(A'B')} f'_{n_e}\, d\Sigma' - \mathbf{S}_{(AB)} F_{N_2}\, d\Sigma \right| < \frac{\eta}{3},$$

η étant une quantité positive quelconque donnée d'avance.

La densité ρ étant finie dans tout le volume considéré, et celui-ci tendant vers o, en même temps que δ, on pourra toujours prendre δ assez petit pour que l'on ait

$$\left| \iiint \rho\, dx\, dy\, dz \right| < \frac{\eta}{3}.$$

La quantité φ_{n_e} est finie en tout point de la surface T; celle-ci a une aire qui tend vers o avec δ. On peut donc prendre δ assez petit pour que l'on ait

$$\left| \mathbf{S}\, \varphi_{n_e}\, dT \right| < \frac{\eta}{3}.$$

En tenant compte de l'égalité (5) et des divers résultats que nous venons d'obtenir, on voit que l'on peut toujours prendre δ assez petit pour que l'on ait

$$\left| \mathbf{S}_{(AB)} (\Phi_{N_1} + F_{N_2} - 2\pi\varepsilon\sigma)\, d\Sigma \right| < \eta,$$

η étant une quantité positive quelconque.

Or, le premier membre de cette inégalité ne dépendant pas de δ,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'inégalité ne peut avoir lieu que si l'on a

$$(6) \qquad \mathrm{S}_{(AB)} (\Phi_{N_1} + F_{N_2} - 2\pi\varepsilon\sigma)\, d\Sigma = 0,$$

l'aire AB étant une aire quelconque tracée sur la surface Σ et contenant le point M.

Cette égalité, à son tour, ne peut avoir lieu, à moins que l'on n'ait, au point M,

$$\Phi_{N_1} + F_{N_2} - 2\pi\varepsilon\sigma = 0.$$

Supposons, en effet, qu'au point M, la quantité

$$\Phi_{N_1} + F_{N_2} - 2\pi\varepsilon\sigma$$

soit différente de 0. La valeur de cette quantité varie d'une manière continue avec la position du point M sur la surface Σ; car, d'après les hypothèses faites et les conséquences qui s'en déduisent, chacune des trois quantités Φ_{N_1}, F_{N_2} et σ possède cette même propriété. On pourrait, dès lors, tracer autour du point M un domaine en tout point duquel cette quantité aurait le même signe qu'au point M; en prenant pour AB la totalité ou une partie de ce domaine, l'égalité (6) ne pourrait plus avoir lieu.

On a donc, en tout point de l'aire Σ,

$$(7) \qquad \Phi_{N_1} + F_{N_2} - 2\pi\varepsilon\sigma = 0.$$

On démontrerait de même que l'on a

$$(8) \qquad \Phi_{N_1} - F_{N_1} + 2\pi\varepsilon\sigma = 0.$$

Ces deux égalités, combinées entre elles, donnent la troisième relation

$$(9) \qquad F_{N_1} + F_{N_2} - 4\pi\varepsilon\sigma = 0.$$

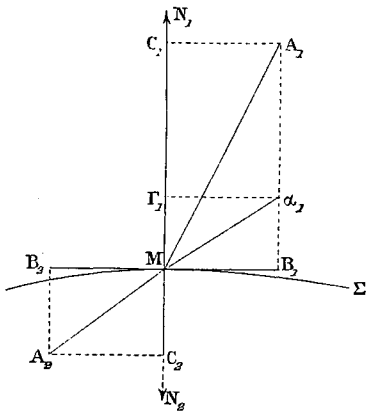
Soient F_1, F_2, Φ_1 les trois forces dont les composantes normales sont F_{N_1}, F_{N_2}, Φ_{N_1}. Ces trois forces, nous le savons, doivent avoir les mêmes composantes tangentielles. Elles sont donc situées dans un même plan normal au point M à la surface Σ. Si A_2M représente la force F_2, $M\alpha$ la force Φ et MA_1 la force F_1 (*fig.* 16), les deux lignes $M\alpha$, MA_1 devront avoir, sur le plan tangent en M à la surface Σ, une même projection MB_1, égale et directement opposée à la projection MB_2 de la longueur MA_2 sur le même plan.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si σ est positif, les forces en question seront disposées comme l'indique la *fig.* 16. La longueur C_2C_1 sera égale au double de la longueur $C_2\Gamma_1$.

Ces diverses propriétés sont souvent désignées sous le nom

Fig. 16.



de *réfraction de la force au passage d'une surface électrisée.*

Un cas particulièrement intéressant par ses applications à l'Électrostatique est le cas où la force F_2 est égale à 0.

Lorsqu'une couche électrique n'exerce aucune action sur les points situés en l'une des deux régions en lesquelles elle sépare l'espace, elle exerce en un point de la surface qu'elle recouvre une force normale à cette surface, dirigée vers l'autre région de l'espace et ayant pour grandeur $2\pi\varepsilon\sigma$; sur un point situé dans cette dernière région de l'espace et infiniment voisin de la surface, elle exerce une force dirigée comme la précédente et ayant pour grandeur $4\pi\varepsilon\sigma$.

§ 4. — Fonction potentielle d'une surface électrisée.

Si nous prenons un point situé à distance finie de toute surface de discontinuité électrisée, nous savons que la fonction potentielle en ce point est une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées de ce point. Que devient cette fonction lorsque le point auquel elle se rapporte s'approche indéfiniment de l'une des sur-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

faces électrisées du système, ou même vient se placer sur cette surface?

Pour répondre à cette question, on peut évidemment réduire le système à la surface électrisée dont il est question, ou même à la portion de surface que nous avons désignée par S_1 dans les § 1 et 2.

La fonction potentielle de l'électricité répandue sur la surface S_1, en un point extérieur à cette surface, peut, en faisant usage des notations employées aux § 1 et 2, s'écrire

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\mathcal{R}} \frac{\sigma R}{r \cos(N, \nu)} \, dR \, d\psi.$$

Or, tant que le point M n'est pas sur la surface S_1, le rapport $\frac{R}{r}$ tend vers o lorsque R tend vers o. Il tend vers l'unité lorsque R tend vers o si le point M est venu se placer sur la surface S_1. La quantité précédente représente donc, comme on le voit aisément, une fonction finie, continue et uniforme des coordonnées du point M, même dans le cas où le point M vient se placer sur la surface S_1.

La fonction potentielle au point M *d'un système quelconque électrisé est donc une fonction finie, continue, uniforme, des coordonnées du point* M, *même si le point* M *s'approche des surfaces de discontinuité électrisées ou vient se placer sur ces surfaces.*

En un point M extérieur à toute surface électrisée, la fonction potentielle admet des dérivées partielles du premier ordre qui sont continues et sont liées aux composantes de la force par les relations

$$X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x},$$
$$Y = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y},$$
$$Z = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}.$$

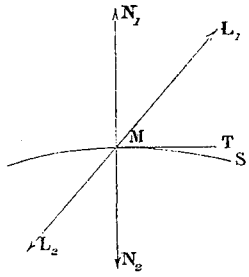
Ces relations, jointes aux propriétés de la force électrostatique que nous avons étudiées aux paragraphes précédents, nous fournissent de suite la démonstration d'un certain nombre de théorèmes sur

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la fonction potentielle : il nous suffira d'énoncer ces théorèmes.

Soit M un point d'une surface électrisée S; N_1, N_2 sont les deux directions de la normale à la surface S au point M (*fig.* 17).

Fig. 17.



La surface S est supposée avoir une courbure finie au point M et aux points avoisinants. La densité électrique superficielle en ces points a une dérivée finie par rapport à tout arc tracé sur la surface S.

Dans ces conditions :

1° *Lorsque le point* (x, y, z) *tend d'une manière quelconque vers le point* M *en demeurant du côté de la surface que désigne la normale* N_1, *la quantité*

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N_1, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N_1, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N_1, z)$$

tend vers une limite finie et déterminée, $\frac{\partial V}{\partial N_1}$, *variable d'une manière continue avec la position du point* M *sur la surface* S.

2° *Lorsque le point* (x, y, z) *tend d'une manière quelconque vers le point* M *en restant du côté de la surface* S *que marque la normale* N_2, *la quantité*

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N_2, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N_2, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N_2, z)$$

tend vers une limite finie et déterminée, $\frac{\partial V}{\partial N_2}$, *qui varie d'une manière continue avec la position du point* M *sur la surface* S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° *Entre ces deux quantités* $\frac{\partial V}{\partial N_1}$, $\frac{\partial V}{\partial N_2}$ *existe la relation*

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi\sigma. \tag{10}$$

4° *Soit* T *une direction quelconque tangente en* M *à la surface* S. *La quantité*

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(T, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(T, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(T, z)$$

tend vers la même limite finie et déterminée lorsque le point (x, y, z) *s'approche de la surface* S *en se trouvant d'ailleurs d'un côté ou de l'autre de cette surface.*

5° *Soient* L_1, L_2 *deux directions opposées, issues du point* M. *Lorsque le point* (x, y, z) *tend vers le point* M *en demeurant du côté de la surface marqué par la normale* N_1,

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(L_1, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(L_1, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(L_1, z)$$

tend vers une limite finie et déterminée $\frac{\partial V}{\partial L_1}$. *Lorsque le point* (x, y, z) *tend vers le point* M *en demeurant du côté de la surface marqué par la normale* N_2

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(L_2, x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(L_2, y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(L_2, z)$$

tend vers une limite finie et déterminée $\frac{\partial V}{\partial L_2}$. *Entre ces deux quantités* $\frac{\partial V}{\partial L_1}$, $\frac{\partial V}{\partial L_2}$, *on a la relation*

$$\frac{\partial V}{\partial L_1} + \frac{\partial V}{\partial L_2} = -4\pi\sigma\cos(L_1, N_1). \tag{11}$$

6° *La fonction potentielle admet une dérivée suivant l'arc d'une ligne quelconque tracée sur la surface* S; *mais, en un point de la surface* S, *elle n'admet pas de dérivée par rapport à la normale à la surface* S, *ni, par conséquent, par rapport à l'arc d'une courbe quelconque non située sur la surface* S.

Telles sont les principales propriétés de la fonction potentielle au voisinage d'une surface de discontinuité électrisée (¹).

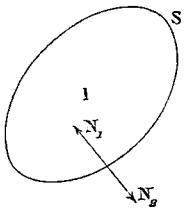
(¹) Les recherches relatives aux discontinuités qu'éprouvent les dérivées se-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 5. — Criteria de la fonction potentielle d'un système électrisé.

Prenons un système formé par un corps continu C (*fig.* 18)

Fig. 18.



électrisable séparé du milieu non électrisable qui l'environne par

---

condes de la fonction potentielle lorsqu'on franchit une surface électrisée n'ont qu'un intérêt mathématique. Aussi nous bornerons-nous à donner, à cet égard, les renseignements suivants, que nous empruntons à M. Max Bacharach.

Les recherches relatives aux discontinuités des dérivées secondes sont récentes, bien que déjà Green, dans l'étude de la bouteille de Leyde (*Essay*, art. 8), ait déjà donné une formule qui se rapporte à cette question. Cette formule, que Clausius et Betti ont ensuite démontrée et généralisée de diverses manières, est la suivante : Soit N_e la normale extérieure à une surface, à l'intérieur de laquelle la fonction potentielle est constante et dont les rayons de courbure principaux sont R_1, R_2. On a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial N_e^2} = 4\pi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma.$$

M. Paci déduisit de là [*Sopra la funzione potenziale di una massa distribuita sopra una superficie* (*Giornale di Matematica da Battaglini*, t. XV, p. 289 ; 1877)] que l'on devait avoir, en un point quelconque d'une surface électrisée,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial N_e^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial N_i^2} = 4\pi\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma.$$

Mais il ne démontra directement cette formule que pour l'ellipsoïde ; il l'étendit aux autres cas en confondant la surface avec l'ellipsoïde osculateur. M. Carl Neumann a donné [*Neue Sätze über das Newton'sche Potential* (*Mathematische Annalen*, t. XVI, p. 432 ; 1880)], mais sans démonstration, l'expression de la discontinuité qu'éprouvent, en traversant une surface électrisée, les dérivées secondes, suivant une direction quelconque, de la fonction potentielle. Cette formule renferme celle de M. Paci comme cas particulier. M. Beltrami [*Intorno ad alcuni nuovi teoremi del sig. Neumann sulle funzioni potenziali* (*Annali di Matematica*, série II, t. X, p. 46 ; 1880)] donna bientôt deux démonstrations très générales de cette équation. Enfin, les résultats énoncés par M. Carl Neumann ont été démontrés par M. Horn [*Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials* (*Schlömilch's Zeitschrift*, t. XXVI, p. 145 et 209 ; 1881)].

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une surface S dont la courbure est finie en chaque point. En tout point du corps C, la densité électrique solide a une valeur finie ρ, qui varie d'une manière continue d'un point à l'autre du corps C et admet des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux coordonnées du point auquel elle se rapporte. La densité superficielle σ a une valeur finie en tout point de la surface S; elle varie d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S, et admet une dérivée par rapport à l'arc de toute courbe tracée sur la surface S.

Dès lors, nous savons que la fonction potentielle V de l'électricité répandue sur ce système satisfait aux conditions suivantes :

1° Cette quantité est, dans tout l'espace, une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x, y, z du point auquel elle se rapporte.

2° Dans l'espace 2, extérieur à la surface S, elle est harmonique.

3° Dans l'espace 1, intérieur à la surface S, elle est régulière et elle satisfait à l'équation

$$\Delta V = -4\pi\rho.$$

4° En tout point de la surface S, on a

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi\sigma.$$

5° Si l'on désigne par R la distance du point (x, y, z) à un point fixe O pris à l'intérieur du corps C, les produits

$$RV, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial z}$$

demeurent finis lorsque R augmente au delà de toute limite.

Réciproquement, si une fonction V possède toutes ces propriétés, on est assuré qu'elle est la fonction potentielle de la distribution électrique considérée, car deux fonctions distinctes ne peuvent posséder à la fois ces propriétés.

Supposons, en effet, que ces propriétés appartiennent à la fois à deux fonctions, et désignons par Θ leur différence; celle-ci possédera les propriétés suivantes :

1° Elle sera, dans tout l'espace, une fonction uniforme, finie

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et continue des coordonnées (x, y, z) du point auquel elle se rapporte.

2° Elle sera harmonique dans l'espace 2, extérieur à la surface S.

3° Elle sera harmonique dans l'espace 1 intérieur à la surface S.

4° Ses dérivées premières satisferont, sur la surface S, à la condition

$$\frac{\partial \Theta}{\partial N_1} + \frac{\partial \Theta}{\partial N_2} = 0.$$

5° Les produits

$$R\Theta, \quad R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

demeureront finis lorsque R augmentera au delà de toute limite.

Or nous avons vu, au Chapitre VI, § 1, que ces propriétés entraînaient la conséquence suivante : La fonction Θ est identiquement nulle; les deux fonctions dont elle est la différence sont donc identiques, comme nous l'avions annoncé.

Les cinq propriétés que nous avons énumérées sont, on le voit, *les criteria de la fonction potentielle d'un système électrisé.*

§ 6. — Historique.

Coulomb a découvert, en 1786, comme nous le verrons au Livre II, que, lorsque l'équilibre électrique est établi sur un corps conducteur, il ne peut pas y avoir d'électricité répandue à l'intérieur de ce corps, en sorte que sa surface seule est électrisée. C'est cette découverte qui a amené les théoriciens à rechercher les propriétés des couches électriques.

Toutefois, pénétrés de l'idée que l'électricité était un fluide matériel, capable, à la vérité, de se condenser en un très petit volume, mais point d'être réduit à occuper un volume nul, les premiers qui se sont occupés de ces recherches, à savoir Coulomb, Laplace et Poisson, ont considéré des couches électriques très minces, mais point des couches électriques infiniment minces. C'est plus tard seulement que Green a introduit dans la Physique mathématique la notion de couche électrique superficielle.

Il y a plus.

Les premiers essais, guidés par les lois de l'équilibre électrique sur les corps conducteurs, se sont bornés à l'étude de couches

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

électriques n'exerçant aucune action électrostatique sur les points situés à l'intérieur des conducteurs qu'elles recouvrent.

Une couche homogène, de très petite épaisseur, comprise entre deux sphères concentriques, est un exemple d'une semblable couche. Or, tandis que son action en un point intérieur est égale à 0, elle exerce, en un point de la surface qui la limite extérieurement, une action normale à cette surface, dirigée vers l'extérieur de cette surface, et ayant pour grandeur $4\pi\rho y$, si l'on désigne par y l'épaisseur de la couche et par ρ sa densité. Cette remarque avait été faite, dès 1759, par Lagrange (1).

En 1788, Coulomb (2), développant la théorie du plan d'épreuve, marque très nettement qu'à la traversée d'une couche électrique en équilibre, couche que, dans ce passage, Coulomb considère comme infiniment mince, la composante de l'action électrostatique suivant la normale à la couche varie brusquement; égale à 0 en un point infiniment voisin de la couche, mais intérieur au corps, elle est proportionnelle au double de la densité de la couche en un point infiniment voisin de la couche, mais extérieur au corps. La démonstration que Coulomb donne de cette proposition renferme, en germe, la démonstration qu'en ont donnée, peu après, Laplace et Poisson.

C'est, en effet, dans les Mémoires de Poisson, que nous trouvons ensuite le développement de l'idée émise par Lagrange et Coulomb. Dans son premier Mémoire sur l'Électrostatique (3), Poisson dit : « Lorsque la figure de la couche électrique est déterminée, les formules de l'attraction des sphéroïdes font connaître son action sur un point pris en dehors ou à la surface du corps électrisé. En faisant usage de ces formules, j'ai trouvé qu'à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, la force répulsive du fluide électrique est proportionnelle à son épaisseur en chaque point; il en est de même à la surface d'un ellipsoïde de révolution, quel que

---

(1) LAGRANGE, *Miscellanea Taurinensia*, t. I, p. 142-145; 1759.

(2) COULOMB, *Sixième Mémoire sur l'électricité. Suite des Recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps conducteurs; détermination de la densité électrique dans les différents points de la surface de ces corps*, § 45 (*Mémoires de l'Académie pour* 1788, p. 676-677. Paris; 1791).

(3) POISSON, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, p. 5 (*Mémoires des savants étrangers*, t. XII, p. 1811).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

soit le rapport de ses deux axes; de sorte que, sur ces deux espèces de corps, la répulsion électrique est la plus grande dans les points où l'électricité est accumulée en plus grande quantité. Il est naturel de penser que ce résultat est général et qu'il a également lieu à la surface d'un corps conducteur de forme quelconque; mais, quoique cette proposition paraisse très simple, il serait cependant très difficile de la démontrer au moyen des formules de l'attraction des sphéroïdes; et c'est un des cas où l'on doit suppléer à l'imperfection de l'analyse par quelque considération directe. On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, une démonstration purement synthétique, que M. Laplace a bien voulu me communiquer, et qui prouve qu'à la surface de tous les corps électrisés, la force répulsive du fluide est partout proportionnelle à son épaisseur (1). »

La démonstration de Laplace concernait seulement une couche n'exerçant aucune action à l'intérieur du corps qu'elle recouvre. Au lieu de reproduire simplement cette démonstration, Poisson cherche à l'étendre à une couche très mince quelconque, et il est ainsi amené à découvrir la discontinuité de la composante normale et la continuité des composantes tangentielles de l'action exercée par une semblable couche : « On démontre aussi, dit-il (2), sans aucun calcul, que la répulsion électrique à la surface d'un corps de forme quelconque est proportionnelle à l'épaisseur ou à la quantité d'électricité accumulée en chaque point; mais cette proposition est comprise dans une autre plus générale, dont je vais donner la démonstration.

» Je considère une couche infiniment mince, solide ou fluide, mais de telle forme qu'on voudra; je suppose que l'on prenne un point A sur sa surface extérieure et qu'on y élève une normale à cette surface, qui aille couper la surface intérieure en un point que j'appelle a; je désigne par y l'épaisseur Aa de la couche; par R son action sur le point A décomposée suivant la normale Aa et par R′ son action sur le point a décomposée suivant la même droite :

---

(1) Pour bien entendre ce passage et le suivant, on doit supposer que la densité de la couche électrique et la constante ε ont été, toutes deux, prises égales à l'unité.

(2) Poisson, *loc. cit.*, p. 30.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

je dis qu'on aura toujours

$$R - R' = 4\pi y,$$

π désignant le rapport de la circonférence au diamètre. »

Après avoir démontré cette proposition, Poisson continue en ces termes (1) : « De même, si l'on appelle T l'action de la couche entière sur le point A, décomposée suivant le plan tangent ou perpendiculaire à Aa, et que l'on désigne par T′ son action sur le point a, aussi perpendiculaire à cette droite, on trouvera $T = T'$. ... Généralement, je représente par p l'action de la couche sur le point A, suivant une direction qui fait avec la normale un angle quelconque θ, et par p' son action sur le point a, suivant une direction parallèle; j'ai alors $p = R\cos\theta + T\sin\theta$ et $p' = R'\cos\theta + T'\sin\theta$; mettant pour R′ et T′ leurs valeurs, il vient $p' = R\cos\theta + T\sin\theta - 4\pi y\cos\theta$, et par conséquent

$$p' = p - 4\pi y\cos\theta.$$

» ... S'il s'agit d'une couche fluide répandue sur un sphéroïde de forme quelconque, et disposée de manière qu'elle n'exerce aucune action sur les points intérieurs, ce qui est le cas du fluide électrique, on aura $T' = 0$, $R' = 0$; donc aussi $T = 0$, $R = 4\pi y$; d'où il suit : 1° que la force tangentielle est nulle à la surface extérieure, comme nous l'avions déjà prouvé dans le numéro précédent; 2° que la force normale à cette surface est proportionnelle à l'épaisseur de la couche en chaque point.

» Cette démonstration est celle que nous avons annoncée au commencement de ce Mémoire, et qui nous a été communiquée par M. Laplace. Nous l'avons rendue un peu plus générale, en considérant d'abord une couche fluide ou solide, qui n'était pas assujettie à n'exercer aucune action sur les points de sa surface intérieure. »

Laplace et Poisson considéraient, on le voit, les propriétés d'une couche très mince, mais point d'une couche rigoureusement superficielle. Green considéra, en 1828, cette sorte de couche (2) et

(1) POISSON, *loc. cit.*, p. 33.

(2) GEORGE GREEN, *An essay of the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism.* Nottingham; 1828 (*Mathematical papers of the late* George Green, p. 30. Londres; 1871).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

démontra, pour chacun de ses points, la relation fondamentale

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi\sigma.$$

Sa démonstration, fondée sur l'emploi de l'identité qui porte son nom, exigerait, pour être rendue rigoureuse, que l'on fît, au préalable, la preuve des diverses propositions que nous avons exposées aux paragraphes 1 et 2.

C'est à Gauss (1) que l'on doit la méthode par laquelle il est possible d'établir toutes ces propositions d'une manière aussi rigoureuse qu'élégante.

Récemment, M. Otto Hölder (2) a montré que toutes ces propositions demeuraient exactes dans un cas étendu où la densité électrique n'admet pas de dérivée suivant l'arc de la surface qu'elle recouvre.

Enfin Lejeune-Dirichlet (3) a insisté le premier sur le rôle de criteria joué par les propositions que Gauss avait démontrées.

---

(1) Gauss, *Allgemeine Lehrsätze*, nos 12, 13, 14, 15, 16 (Gauss *Werke*, Bd. V, p. 212).

(2) Otto Holder, *Beiträge zur Potentialtheorie. IIer Abschnitt* (*Inaugural Dissertation.* Stuttgard ; 1882).

(3) Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, p. 65. Leipzig ; 1876.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VIII.

RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES DE MÉCANIQUE.

§ 1. — Énoncé du principe des vitesses virtuelles.

Nous allons, dans ce Chapitre, rappeler brièvement quelques-unes des notions de Mécanique dont nous aurons à faire un fréquent usage dans la suite de ces Leçons.

Nous commencerons par retracer l'énoncé du principe des vitesses virtuelles, qui, ainsi que l'a montré Lagrange, domine la Statique tout entière.

Considérons un système matériel et, pour fixer les idées, supposons-le formé d'un nombre fini de points matériels séparés les uns des autres par des distances finies. Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$ ces points.

Ce système est soumis à certaines liaisons; ces liaisons sont de deux sortes.

Les unes s'expriment par une égalité ou plusieurs égalités entre les coordonnées d'un ou de plusieurs points du système. Telle est, par exemple, pour un point, la condition de demeurer sur une surface ou sur une courbe. Nous les nommerons *liaisons bilatérales*.

Les autres ne sont point susceptibles de s'exprimer par une ou plusieurs égalités. Supposons, par exemple, que le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ soit assujetti à demeurer, soit en dehors d'un certain corps, soit à sa surface, sans pouvoir pénétrer à son intérieur. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface de ce corps; supposons qu'à l'intérieur de ce corps on ait

$$f(x, y, z) < 0$$

et, à l'extérieur,

$$f(x, y, z) > 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La liaison imposée au point M_1 s'exprime alors de la manière suivante :

$$f(x_1, y_1, z_1) \geqq 0.$$

Une telle liaison, dans ce qui va suivre, sera nommée *liaison unilatérale*.

Supposons qu'entre les points du système il existe p liaisons bilatérales

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots) = 0 \end{cases}$$

et q liaisons unilatérales

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots) \geqq 0, \\ \varphi_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots) \geqq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_q(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots) \geqq 0. \end{cases}$$

Supposons que les quantités

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, \\ \dots, & \dots, & \dots, \\ x_n, & y_n, & z_n \end{matrix}$$

vérifient les conditions (1) et (2); supposons que l'on choisisse les quantités infiniment petites

$$\begin{matrix} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, \\ \delta x_2, & \delta y_2, & \delta z_2, \\ \dots, & \dots, & \dots, \\ \delta x_n, & \delta y_n, & \delta z_n, \end{matrix}$$

de telle façon que les quantités

$$\begin{matrix} x_1 + \delta x_1, & y_1 + \delta y_1, & z_1 + \delta z_1, \\ x_2 + \delta x_2, & y_2 + \delta y_2, & z_2 + \delta z_2, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ x_n + \delta x_n, & y_n + \delta y_n, & z_n + \delta z_n \end{matrix}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vérifient aussi les conditions (1) et (2) :

$$\begin{matrix} \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, \\ \delta x_2, & \delta y_2, & \delta z_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \delta x_n, & \delta y_n, & \delta z_n \end{matrix}$$

constituent les composantes du mouvement des divers points dans *un déplacement virtuel du système ;* ou, plus brièvement, constituent un déplacement virtuel du système.

Un déplacement virtuel $\delta x_1, \delta y_1, \ldots$ sera *renversable* si $-\delta x_1, -\delta y_1, \ldots$ est aussi un déplacement virtuel du système.

Si toutes les liaisons auxquelles le système est assujetti sont des liaisons bilatérales, tous les déplacements virtuels du système sont des déplacements renversables. En effet, dans le cas où le système n'est soumis qu'à des liaisons bilatérales, pour que $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1; \delta x_2, \ldots$ constituent un déplacement virtuel, il est nécessaire et suffisant que ces quantités vérifient les relations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial f_p}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_p}{\partial y_1}\delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_p}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \end{aligned}$$

et ces relations sont évidemment vérifiées aussi par le système de quantités

$$-\delta x_1, \quad -\delta y_1, \quad -\delta z_1; \quad -\delta x_2, \quad \ldots.$$

Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force explicitement donnée qui agit sur le point M_1 ; X_2, Y_2, Z_2 les composantes de la force explicitement donnée qui agit sur le point M_2 ; .... Par définition, dans tout déplacement virtuel $\delta x_1, \delta y_1, \ldots$, la première force effectue un *travail virtuel*

$$X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1;$$

la deuxième force effectue un travail virtuel

$$X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2;$$

etc, ...

Le *Principe des travaux virtuels,* nommé souvent aussi

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Principe des vitesses virtuelles, peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Pour qu'un système soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que, dans tout déplacement virtuel du système, la somme des travaux virtuels des forces données appliquées à ses divers points soit nulle ou négative.

En d'autres termes, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système matériel s'obtiennent en écrivant que, pour tous les systèmes de valeurs de δx_1, δy_1, δz_1, ... qui constituent un déplacement virtuel, on doit avoir

$$(3) \qquad X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots + Z_n \delta z_n \leqq 0.$$

Si tous les déplacements virtuels dont le système est susceptible sont renversables, ce principe s'exprime simplement par l'égalité

$$(4) \qquad X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + \ldots + Z_n \delta z_n = 0.$$

C'est sous cette dernière forme que le principe des travaux virtuels a été, pour la première fois, énoncé par Jacques Bernoulli (1); c'est aussi sous cette forme que Lagrange, dans la *Mécanique analytique,* en a fait le fondement de la Statique tout entière. La forme plus complète exprimée par l'inégalité (3) est due à Gauss (2); elle a été exposée avec grand soin par Clausius (3) et par M. Carl Neumann (4). Sauf le Traité de Sturm, aucun Traité de Mécanique français ne mentionne cette forme complète du principe des travaux virtuels.

---

(1) Lettre citée dans Varignon, *Nouvelle Mécanique.*

(2) GAUSS, *Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik* (*Crelle's Journal*, t. 4; 1829. GAUSS, *Werke,* Bd. V, p. 27, en note). — *Principia generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii* (Nouveaux Mémoires de Goettingue, vol. VII; 1830. GAUSS, *Werke,* Bd. V, p. 35). — *Lettre de Gauss à Mœbius* citée par M. Carl Neumann.

(3) CLAUSIUS, *De la fonction potentielle et du potentiel,* trad. Folie; Paris, 1870.

(4) C. NEUMANN, *Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 2. — Énoncé du principe de d'Alembert. Formule fondamentale de la Dynamique.

Le principe des vitesses virtuelles, qui sert de fondement à toute la Statique, peut aussi servir à établir tous les théorèmes de la Dynamique, moyennant une modification qui se déduit du *Principe de d'Alembert*.

Considérons un système formé de n points en mouvement, M_1, M_2, ..., M_n. A un certain instant t, les coordonnées de ces points sont

$$\begin{array}{llll} x_1, & y_1, & z_1, & \text{pour } M_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, & \text{pour } M_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ x_n, & y_n, & z_n, & \text{pour } M_n. \end{array}$$

Ce système est soumis à certaines liaisons. Ces liaisons peuvent être bilatérales, comme il arrive si un point est assujetti à se mouvoir à la surface d'un certain corps, ou unilatérales, comme il arrive si un point est assujetti seulement à ne point pénétrer à l'intérieur d'un certain corps. Nous laisserons de côté le cas des liaisons unilatérales, dont l'étude se fait dans la théorie des percussions, et nous supposerons que le système soit exclusivement assujetti à des liaisons bilatérales, exprimables à chaque instant par des égalités entre les coordonnées des divers points du système à cet instant.

Deux cas peuvent se présenter pour chacune de ces égalités : ou bien la forme de la relation qui lie les coordonnées des divers points du système et exprime une liaison bilatérale demeure la même à tout instant ; c'est ce qui arrive, par exemple, si un point est assujetti à demeurer sur une surface qui demeure fixe pendant le mouvement du système ; ou bien la forme de cette égalité varie d'un moment à l'autre : c'est ce qui arrive, par exemple, si un point est assujetti à demeurer sur une surface qui se meut en même temps que le système.

Dans le premier cas, la liaison considérée peut s'exprimer, pour toute la durée du mouvement, par une relation entre les seules coordonnées des divers points du système

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, \ldots) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le second cas, la liaison considérée peut s'exprimer, pour toute la durée du mouvement, par une relation entre les coordonnées des divers points du système et le temps :

Les équations de liaison peuvent donc contenir explicitement le temps.

Considérons un système formé de n points matériels $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dont les coordonnées à l'instant t sont $x_1, y_1, z_1; x_2, \ldots, z_n$. Ce système est soumis à p liaisons bilatérales exprimées par des équations qui peuvent dépendre explicitement du temps

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, t) = 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, t) = 0. \end{cases}$$

Donnons à t, dans ces équations, une certaine valeur constante t_0, et posons

$$(6) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n, t_0), \\ F_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n, t_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = f_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n, t_0). \end{cases}$$

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les masses des n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$; soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la force explicitement donnée qui, à l'instant t_0, agit sur le point M_1 ; soient $\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2z_1}{dt^2}$ les composantes, au même instant, de l'accélération de ce point ; adoptons des notations analogues pour les points $M_2, \ldots, M_n$, et nous pourrons énoncer le principe de d'Alembert de la manière suivante :

Quel que soit, dans la durée du mouvement, l'instant t_0 que l'on considère, si l'on prenait un système formé des n points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, placés sans vitesse initiale dans les positions qu'ils occupent à l'instant t_0; si l'on soumettait le point M_1 à une force dont les composantes seraient

$$X_1 - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad Y_1 - m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad Z_1 - m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le point M_2 *à une force dont les composantes seraient*

$$X_2 - m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \quad Y_2 - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}, \quad Z_2 - m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2};$$

etc., ...; *si enfin on assujettissait le système ainsi constitué aux liaisons*

$$(7) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = 0, \\ F_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, z_n) = 0, \end{cases}$$

le système ainsi constitué serait en équilibre.

Tel est le principe de d'Alembert qui ramène ainsi tout problème de Dynamique à un problème de Statique.

Ce principe conduit, avec l'aide du principe des travaux virtuels, à une formule dont on peut déduire la mise en équation de tout problème de Dynamique.

Voici comment on peut obtenir cette formule.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système fictif que nous venons de considérer sont exprimées par le principe des vitesses virtuelles ; si donc δx_1, δy_1, δz_1 ; δx_2, ... désigne un des mouvements virtuels compatibles avec les liaisons (7) qui sont toutes bilatérales, on doit avoir

$$(8) \qquad \sum_{q=1}^{q=n} \left[\left(X_q - m_q \frac{d^2 x_q}{dt^2} \right) \delta x_q + \left(Y_q - m_q \frac{d^2 y_q}{dt^2} \right) \delta y_q + \left(Z_q - m_q \frac{d^2 z_q}{dt^2} \right) \delta z_q \right] = 0.$$

Cette formule (8) résume, comme nous l'avons dit, la mise en équation de tout problème de Dynamique. On lui donne le nom de *formule fondamentale de la Dynamique*. Elle est due à Lagrange, qui en a fait le fondement de toute l'étude de la Dynamique dans sa *Mécanique analytique*.

§ 3. — Remarques diverses sur les liaisons.

L'égalité (8) doit avoir lieu pour tous les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons (7) ; en d'autres termes, elle doit avoir lieu pour tout système de valeurs de δx_1, δy_1, δz_1, ..., qui

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vérifie les égalités

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial F_p}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial F_p}{\partial z_1}\delta z_1 + \dfrac{\partial F_p}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Les $(p+1)$ équations linéaires et homogènes (8) et (9) doivent être vérifiées par tout système de valeurs de δx_1, δy_1, δz_1, ... qui vérifient les équations (9). L'équation (8) doit donc être une conséquence des équations (9). La théorie des équations linéaires nous apprend qu'il faut et il suffit pour cela que l'on puisse trouver p facteurs λ_1, λ_2, ..., λ_p, indépendants de δx_1, δy_1, δz_1; δx_2, ..., tels qu'en multipliant par λ_1 le premier membre de la première égalité (9), par λ_2 le premier membre de la seconde, ..., par λ_p le premier membre de la dernière, et en ajoutant les résultats obtenus au premier membre de l'égalité (8), on obtienne une somme identiquement nulle.

Il doit donc exister p facteurs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p,$$

dépendant seulement de $x_1, y_1, z_1; x_2, \ldots, z_n, t$, tels que l'on ait, quels que soient δx_1, δy_1, δz_1; δx_2, ..., δz_n, l'égalité

$$\sum_{q=1}^{q=n} \left[\left(X_q + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_q} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_q} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_q} - m_q \frac{d^2 x_q}{dt^2} \right) \delta x_q \right.$$
$$+ \left(Y_q + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_q} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_q} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_q} - m_q \frac{d^2 y_q}{dt^2} \right) \delta y_q$$
$$\left. + \left(Z_q + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_q} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_q} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_q} - m_q \frac{d^2 z_q}{dt^2} \right) \delta z_q \right] = 0,$$

ce qui exige que l'on ait les $3n$ égalités

$$X_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_1} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2},$$
$$Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_1} = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2},$$
$$Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_1} = m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces égalités nous montrent que le point M_1, par exemple, se meut comme si, sans être assujetti à aucune liaison, il était soumis non seulement à la force explicitement donnée dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1, mais encore à une force dont les composantes seraient

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial x_1},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial y_1},$$

$$\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + \ldots + \lambda_p \frac{\partial F_p}{\partial z_1}.$$

Cette force fictive porte le nom de *force de liaison appliquée au point* M_1. Les p fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des $(3n+1)$ variables x_1, y_1, z_1, x_2, $\ldots$, z_n, t portent le nom de *multiplicateurs de Lagrange*.

Faisons encore, au sujet des liaisons auxquelles un système peut être assujetti, une remarque fondamentale.

Tout déplacement virtuel $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots, \delta z_n$ du système est assujetti aux liaisons (6). Il doit donc vérifier les égalités (9), qui deviennent, en vertu de la définition des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ donnée par les égalités (6),

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}\delta x_1 + \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1}\delta y_1 + \dfrac{\partial f_p}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_p}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \end{cases}$$

t ayant dans $f_1, f_2, \ldots, f_p$ la valeur t_0 ; on obtient tous les déplacements virtuels à l'instant t_0 en prenant tous les systèmes de valeurs de $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots, \delta z_n$ qui vérifient ces égalités (10).

Pendant le temps qui s'écoule entre les instants t_0 et $t_0 + dt$, le système en mouvement éprouve un *déplacement réel*, dont les composantes sont

$$dx_1, \quad dy_1, \quad dz_1, \quad \ldots, \quad dz_n.$$

Ce déplacement est assujetti aux liaisons exprimées par les égalités

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(5), qui renferment la variable t. On a donc

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}dy_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}dz_n+\dfrac{\partial f_1}{\partial t}dt=0,\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}dy_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\dfrac{\partial f_2}{\partial z_n}dz_n+\dfrac{\partial f_2}{\partial t}dt=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_p}{\partial y_1}dy_1+\dfrac{\partial f_p}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\dfrac{\partial f_p}{\partial z_n}dz_n+\dfrac{\partial f_p}{\partial t}dt=0. \end{cases}$$

La comparaison des égalités (10) et (11) conduit alors au résultat suivant.

Pour que le déplacement réel du système à l'instant t_0 coïncide avec un des déplacements virtuels du système au même instant, il faut et il suffit que les égalités

$$(12)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial t}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial f_p}{\partial t}=0$$

soient vérifiées à l'instant t_0. Par conséquent, *pour qu'à tout instant le déplacement réel du système coïncide avec un des déplacements virtuels du système au même instant, il faut et il suffit que les équations de liaison ne dépendent pas explicitement du temps.*

§ 4. — Théorème des forces vives.

C'est à ce cas particulier où les liaisons ne dépendent pas du temps que nous allons maintenant nous limiter. Nous considérerons un système formé de n points et assujetti à p liaisons bilatérales dont aucune ne dépend explicitement du temps; dans ce cas, le déplacement réel dx_1, dy_1, dz_1, ..., dz_n que le système éprouve pendant le temps dt est l'un des déplacements virtuels δx_1, δy_1, δz_1, ..., δz_n. L'égalité (8) doit donc être vérifiée en particulier si l'on remplace δx_1, δy_1, δz_1, ..., δz_n par dx_1, dy_1, dz_1, ..., dz_n; elle devient alors

$$\sum_{q=1}^{q=n}\left[\left(\mathrm{X}_q-m_q\frac{d^2x_q}{dt^2}\right)dx_q+\left(\mathrm{Y}_q-m_q\frac{d^2y_q}{dt^2}\right)dy_q+\left(\mathrm{Z}_q-m_q\frac{d^2z_q}{dt^2}\right)dz_q\right]=0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais on a

$$dx_q = \frac{dx_q}{dt}\,dt,$$

$$dy_q = \frac{dy_q}{dt}\,dt,$$

$$dz_q = \frac{dz_q}{dt}\,dt,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$\sum_{q=1}^{q=n} (\mathrm{X}_q\,dx_q + \mathrm{Y}_q\,dy_q + \mathrm{Z}_q\,dz_q) = \sum_{q=1}^{q=n} m_q \left(\frac{dx_q}{dt}\,\frac{d^2x_q}{dt^2} + \frac{dy_q}{dt}\,\frac{d^2y_q}{dt^2} + \frac{dz_q}{dt}\,\frac{d^2z_q}{dt^2} \right) dt.$$

D'ailleurs

$$2\left(\frac{dx_q}{dt}\,\frac{d^2x_q}{dt^2} + \frac{dy_q}{dt}\,\frac{d^2y_q}{dt^2} + \frac{dz_q}{dt}\,\frac{d^2z_q}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_q}{dt}\right)^2 \right].$$

En outre, si l'on désigne par v_q la vitesse du mouvement du point q à l'instant t, on a

$$v_q^2 = \left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_q}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_q}{dt}\right)^2.$$

On a donc, finalement,

$$(13) \qquad \sum_{q=1}^{q=n} (\mathrm{X}_q\,dx_q + \mathrm{Y}_q\,dy_q + \mathrm{Z}_q\,dz_q) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2} \right) dt.$$

Le premier membre est, par définition, le *travail* effectué pendant le temps dt par les forces qui agissent sur les divers points du système.

La quantité $\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}$ est, par définition, la *force vive* du système à l'instant t ; elle ne diffère que par la présence du facteur $\frac{1}{2}$ de la quantité à laquelle Leibnitz donnait le même nom. D'après ces définitions, l'égalité (13) peut s'énoncer ainsi :

Le travail effectué pendant un temps infiniment court par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

toutes les forces explicitement données qui agissent sur un système est égal à la variation que subit pendant le même temps la force vive du système.

Cette proposition suppose, nous l'avons vu, le système uniquement soumis à des liaisons bilatérales dont aucune ne dépend explicitement du temps. On donne à cette proposition le nom de *Principe des forces vives.*

§ 5. — Du potentiel.

L'étude de l'égalité (13) va nous conduire à une nouvelle notion qui joue, en Mécanique, un rôle fondamental, la notion de *Potentiel.*

Pour chacun des éléments de temps dt compris entre les instants T et T′, écrivons les égalités analogues à l'égalité (13) et ajoutons-les membre à membre.

Le second membre du résultat a une valeur facile à trouver. Si v_q désigne la vitesse du point M_q à l'instant T et v'_q la vitesse du même point à l'instant T′, ce second membre aura pour valeur

$$\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q'^2}{2} - \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}.$$

On voit que, pour connaître ce second membre, il suffit de connaître les vitesses dont sont animés les différents points aux deux instants extrêmes que l'on considère, sans avoir besoin de savoir par quels états a passé le système entre ces deux instants.

Il n'en est pas de même du premier membre.

Dans le cas le plus général, X_q, Y_q, Z_q sont des fonctions de

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots\ z_n,$$
$$\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dy_1}{dt},\ \frac{dz_1}{dt},\ \ldots,\ \frac{dz_n}{dt}$$

et de t.

Si l'on connaît le mouvement que chacun des points du système a subi entre les instants T et T′, on peut évaluer les coordonnées des divers points et les composantes de leur vitesse en fonction de la seule variable t. Le premier membre de l'équation (13) devient alors une quantité de la forme

$$\Phi(t)\,dt,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et en ajoutant membre à membre toutes les équations, telles que l'équation (13), on obtient une égalité dont le premier membre a pour valeur

$$\int_{T}^{T'} \Phi(t)\,dt.$$

On voit que le calcul de ce premier membre suppose, en général, la connaissance complète du mouvement pris par le système entre les instants T et T'.

Il est cependant un cas où il n'en est point ainsi; ce cas, particulier en apparence, est en réalité celui que l'on rencontre le plus généralement dans les applications.

Commençons par supposer que X_q, Y_q, Z_q dépendent seulement des coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n$ des divers points du système et point de $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}, \ldots, \frac{dz_n}{dt}, t$.

Le système est soumis aux p liaisons ne dépendant point explicitement du temps

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) &= 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_p(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) &= 0. \end{aligned}$$

Ces p relations permettent d'exprimer les $3n$ coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n$ en fonction de $k = 3n - p$ variables indépendantes convenablement choisies $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. En remplaçant les coordonnées par leurs expressions en fonction de ces variables, on transformera la quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q\,dx_q + Y_q\,dy_q + Z_q\,dz_q)$$

en

$$P_1\,d\alpha_1 + P_2\,d\alpha_2 + \ldots + P_k\,d\alpha_k,$$

et l'équation (13) deviendra

$$P_1\,d\alpha_1 + P_2\,d\alpha_2 + \ldots + P_k\,d\alpha_k = \frac{d}{dt}\left(\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}\right) dt. \qquad (14)$$

Chacune des quantités $P_1, P_2, \ldots, P_k$ est une fonction des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La quantité

$$P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \ldots + P_k d\alpha_k$$

n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables indépendantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Mais l se trouve que cette condition exceptionnelle est réalisée dans la plupart des applications; en d'autres termes, *dans la plupart des cas qui intéressent le physicien, il existe une fonction uniforme de* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

telle que l'on ait

$$P_1 d\alpha_1 + P_2 d\alpha_2 + \ldots + P_k d\alpha_k = - dU(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k).$$

Dans ce cas, l'équation (14) devient simplement

$$dU(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) + \frac{d}{dt}\left(\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2}\right) dt = 0.$$

Si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ à l'instant T, et par $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ les valeurs des mêmes variables à l'instant T', en ajoutant membre à membre les équations, analogues à la précédente, que l'on peut écrire pour tous les instants dt compris entre T et T', on trouvera

$$(15) \quad U(a_1, a_2, \ldots, a_k) + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2}{2} = U(a'_1, a'_2, \ldots, a'_k) + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q'^2}{2}.$$

Ainsi, dans ce cas, l'équation des forces vives s'intègre lorsque l'on connaît les positions initiales et finales et les vitesses initiales et finales des divers points du système, sans qu'il soit nécessaire de connaître la suite des états par lesquels le système a passé entre les deux instants que l'on considère.

La quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q'^2}{2}$$

est une combinaison homogène du second degré de

$$\frac{da'_1}{dt}, \quad \frac{da'_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{da'_k}{dt}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'équation (15) est donc une équation différentielle du premier ordre entre les k variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, dont les valeurs à chaque instant déterminent la position du système. *L'équation des forces vives fournit donc, dans le cas qui nous occupe, une intégrale première des équations du mouvement du système.*

La fonction $U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ est ce que nous nommerons le *potentiel des forces* $X_1, Y_1, Z_1, \ldots$. Ce nom est dû à Gauss. Lagrange, qui a le premier insisté sur l'importance de cette fonction, dans sa *Mécanique analytique,* ne lui a point donné ce nom particulier. Hamilton et Jacobi ont donné à la fonction $(-U)$ le nom de *fonction des forces;* W. Thomson et Rankine ont nommé la fonction U l'*énergie potentielle* et Clausius l'*ergiel.*

Si la quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q\, dx_q + Y_q\, dy_q + Z_q\, dz_q)$$

est, quels que soient dx_q, dy_q, dz_q, la différentielle totale d'une fonction uniforme des quantités x_q, y_q, z_q, la quantité

$$P_1\, d\alpha_1 + P_2\, d\alpha_2 + \ldots + P_k\, d\alpha_k$$

sera *a fortiori* la différentielle totale d'une fonction uniforme de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. On dit alors que *le système admet de lui-même un potentiel.*

Mais il peut arriver que la quantité

$$P_1\, d\alpha_1 + P_2\, d\alpha_2 + \ldots + P_k\, d\alpha_k$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, sans que la quantité

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q\, dx_q + Y_q\, dy_q + Z_q\, dz_q)$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme des quantités x_q, y_q, z_q laissées indépendantes. On dit alors que *le système admet un potentiel en vertu des liaisons qui lui sont imposées.*

Dans le cas où les forces agissantes admettent un potentiel soit d'elles-mêmes, soit en vertu des liaisons imposées au système, le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

principe des vitesses virtuelles peut être mis sous une forme nouvelle.

Dans ce cas, en effet, on a

$$\sum_{q=1}^{q=n} (X_q \delta x_q + Y_q \delta y_q + Z_q \delta z_q) = P_1 \delta\alpha_1 + P_2 \delta\alpha_2 + \ldots + P_k \delta\alpha_k,$$

$\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, ..., $\delta\alpha_k$ n'étant liés par aucune relation, et, de plus, en désignant par U le potentiel

$$P_1 = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_1}, \qquad P_2 = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_2}, \qquad \ldots, \qquad P_k = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_k},$$

en sorte que le principe des vitesses virtuelles peut s'énoncer ainsi :

Pour qu'un système dont les forces agissantes admettent un potentiel soit en équilibre dans un état donné, il faut et il suffit que, dans cet état, on ait

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} \delta\alpha_k = 0,$$

quels que soient $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, ..., $\delta\alpha_k$; en d'autres termes, il faut et i suffit que l'on ait

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0. \tag{16}$$

On voit donc que, pour rechercher les états d'équilibre d'un système qui admet un potentiel, on est amené à écrire les mêmes égalités que si l'on voulait chercher les maxima et les minima du potentiel.

§ 6. — Criterium de la stabilité de l'équilibre.

Cette remarque se trouve complétée par le théorème suivant :

Si, pour un état donné du système, le potentiel est minimum, cet état est un état d'équilibre stable.

Commençons par définir exactement ce qu'on doit entendre par ce dernier mot.

Nous pouvons toujours supposer que les paramètres α_1, α_2, ..., α_k soient égaux à O pour l'état du système que nous considérons; car, s'ils étaient égaux respectivement à $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_k$, il suffirait

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de prendre pour nouveaux paramètres propres à définir l'état du système les paramètres

$$\alpha_1 - \mathfrak{A}_1, \quad \alpha_2 - \mathfrak{A}_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k - \mathfrak{A}_k,$$

pour que la condition dont il s'agit se trouvât vérifiée.

Supposons donc qu'un système soit en équilibre pour

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_k = 0.$$

Supposons, en outre, que les quantités $x_1, y_2, z_1, \ldots, z_n$ s'expriment par des fonctions continues de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Nous dirons que *la position d'équilibre du système est stable si elle réalise les conditions suivantes :*

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$, *k quantités positives quelconques. On peut toujours trouver des quantités positives* $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, u_q, \ldots$ *assez petites pour que l'on ait*

$$|\alpha_1(t)| \leq A_1, \quad |\alpha_2(t)| \leq A_2, \quad \ldots, \quad |\alpha_k(t)| \leq A_k,$$

à tout instant t postérieur à t_0, *si l'on a, à l'instant* t_0,

$$|\alpha_1(t_0)| < a_1, \quad |\alpha_2(t_0)| < a_2, \quad \ldots, \quad |\alpha_k(t_0)| < a_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots |u_q(t_0)| < u_q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette définition précise étant posée, arrivons à la démonstration du théorème que nous avons énoncé.

Nous remarquerons, en premier lieu, que, le potentiel étant déterminé seulement à une constante arbitraire près, nous pouvons choisir cette constante arbitraire de manière que l'on ait

$$U(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

ou, en d'autres termes, que, pour la position d'équilibre considérée, le potentiel soit à la fois minimum et nul. Dans ce cas, pour des valeurs assez voisines de O de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, U sera évidemment positif et aussi voisin de O que l'on voudra.

En second lieu, nous remarquerons qu'au lieu de s'assurer que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont, à tout instant, inférieurs en valeur absolue à certaines quantités $A_1, A_2, \ldots, A_k$, il suffit de s'assurer que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont, à tout instant, inférieurs en valeur absolue à d'autres quantités plus petites. Nous pourrons alors choisir ces nouvelles quantités $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de telle manière que, pour

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

toutes les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ inférieures ou égales en valeur absolue à $A_1, A_2, \ldots, A_k$, on ait

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) > 0,$$

sauf pour le cas particulier

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_k = 0.$$

Cela posé, je dis que l'on peut donner aux quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, u_q, \ldots$ des valeurs assez petites pour qu'aucune des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ne puisse, à aucun instant t, atteindre sa limite $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Supposons, en effet, qu'à un certain instant t, une ou plusieurs des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ atteignent leur limite. A ce moment, U aura une valeur positive qui ne peut être inférieure à une certaine limite; on pourra écrire

$$U[\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0), \ldots, \alpha_k(t_0)] + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2(t_0)}{2}$$

$$= U[\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_k(t)] + \sum_{q=1}^{q=n} \frac{m_q v_q^2(t)}{2}.$$

Le second membre sera une quantité positive qui ne peut être inférieure à une certaine limite. Au contraire, on peut choisir $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, u_q, \ldots$ assez petits pour que le premier membre soit plus petit qu'une quantité positive quelconque donnée d'avance, cas auquel l'égalité précédente deviendra absurde.

On voit donc bien que l'on peut imposer aux quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, u_q, \ldots$ des valeurs si petites qu'aucune des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ne puisse à aucun moment atteindre sa limite; comme nous l'avons annoncé, l'équilibre est stable.

Cette importante proposition est due à Lagrange (1); la belle et rigoureuse démonstration que l'on vient de lire est de Lejeune-Dirichlet (2).

---

(1) LAGRANGE, *Mécanique analytique*, Ire Partie, Section III.

(2) LEJEUNE-DIRICHLET, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichts* (*Crelle's Journal*, t. XXXII, p. 85; 1846).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IX.

DU POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE.

Les forces électrostatiques déterminées par la loi de Coulomb vont nous fournir un remarquable exemple de forces qui admettent un potentiel.

Considérons deux masses matérielles, de très petites dimensions, m et m', portant respectivement des charges électriques q et q'. Soit r la distance d'un point M de la masse m à un point M′ de la masse m'. Soient x, y, z les coordonnées du point M, et x', y', z' les coordonnées du point M′. Le point M est soumis à une force provenant de la masse m', dont les composantes sont

$$X = \varepsilon qq' \frac{x - x'}{r^3},$$

$$Y = \varepsilon qq' \frac{y - y'}{r^3},$$

$$Z = \varepsilon qq' \frac{z - z'}{r^3},$$

et le point M′ est soumis à une force provenant de la masse m, dont les composantes sont

$$X' = \varepsilon qq' \frac{x' - x}{r^3},$$

$$Y' = \varepsilon qq' \frac{y' - y}{r^3},$$

$$Z' = \varepsilon qq' \frac{z' - z}{r^3}.$$

Supposons que le point M éprouve un déplacement δx, δy, δz, et le point M′ un déplacement $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; la somme des travaux des deux forces que nous venons de considérer aura pour valeur

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z'$$
$$= \frac{\varepsilon qq'}{r^3}[(x' - x)(\delta x' - \delta x) + (y' - y)(\delta y' - \delta y) + (z' - z)(\delta z' - \delta z)],$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou bien, d'après la relation

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + X'\,\delta x' + Y'\,\delta y' + Z'\,\delta z' = \varepsilon \frac{qq'}{r^2}\,\delta r.$$

De cette égalité, on déduit immédiatement la conséquence suivante : lorsqu'un certain nombre de points électrisés sont déplacés les uns par rapport aux autres, en conservant chacun une charge électrique invariable, le travail effectué par les forces qui agissent entre ces divers points, d'après la loi de Coulomb, est égal, au signe près, à la variation de la quantité

$$W = \varepsilon \sum \frac{qq'}{r}. \tag{1}$$

Le signe $\sum$ représente la somme de toutes les combinaisons, telles que $\frac{qq'}{r}$, que l'on peut faire dans le système, chacune de ces combinaisons étant prise une et une seule fois.

La quantité W représente donc, d'après les définitions posées au Chapitre précédent, le *potentiel des forces électriques;* nous donnerons à cette quantité le nom de *potentiel électrostatique;* on lui donne souvent, dans les Traités, le nom d'*énergie électrique* que nous n'emploierons pas.

Cette quantité est susceptible d'une expression remarquable.

Supposons que l'on multiplie successivement la charge q par toutes les quantités $\frac{q'}{r}$ fournies par les autres points électrisés du système, et que l'on ajoute tous les produits obtenus, de façon à former l'expression

$$q \sum \frac{q'}{r},$$

dans laquelle le signe $\sum$ indique une sommation qui s'étend à toutes les charges du système autres que la charge q; puis, qu'on répète la même opération sur toutes les charges du système et que l'on ajoute ensemble tous les résultats obtenus, de manière à former l'expression

$$\sum q \sum \frac{q'}{r},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le premier des deux signes $\sum$ s'étendant à toutes les charges du système; il est évident que, dans une semblable addition, nous aurons fait figurer deux fois chacune des expressions distinctes $\frac{qq'}{r}$, et que, par conséquent, nous aurons

$$\sum q \sum \frac{q'}{r} = 2 \sum \frac{qq'}{r}, \tag{2}$$

le signe $\sum$ ayant au second membre le même sens que dans l'égalité (1).

Mais, d'autre part, si V désigne la valeur de la fonction potentielle au point M où se trouve la charge q, nous aurons

$$\sum \frac{q'}{r} = \mathrm{V}. \tag{3}$$

Des égalités (1), (2), (3) résulte cette nouvelle égalité fondamentale

$$\mathrm{W} = \frac{\varepsilon}{2} \sum q\,\mathrm{V}. \tag{4}$$

Jusqu'ici, nous avons, pour étudier le potentiel électrostatique, supposé l'électricité concentrée en des points isolés, mais nous pouvons tout aussi bien la supposer répandue en des volumes ou sur des surfaces. Dans ce cas, *si les diverses parties du système subissent des déplacements durant lesquels tous les éléments des volumes électrisés et tous les éléments des surfaces électrisées conservent des charges électriques invariables, le travail effectué par les forces électrostatiques est, au signe près, la variation d'un potentiel* W dont l'expression s'obtient de la manière suivante :

On forme, pour chacune des surfaces électrisées, l'intégrale

$$\frac{\varepsilon}{2} \int\!\!\int \mathrm{V}\sigma\, d\mathrm{S},$$

σ étant la densité superficielle en un point de l'élément dS et V la valeur de la fonction potentielle au même point.

On forme, pour chacun des volumes électrisés, l'intégrale

$$\frac{\varepsilon}{2} \iiint \mathrm{V}\rho\, dx\, dy\, dz,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ρ étant la densité électrique solide en un point de l'élément $dx\,dy\,dz$ et V la fonction potentielle au même point.

Enfin on ajoute entre elles toutes les intégrales obtenues.

On a ainsi

$$(5) \qquad W = \frac{\varepsilon}{2}\left[\sum\int V\sigma\, dS + \sum\iiint V\rho\, dx\, dy\, dz\right].$$

Cette expression est susceptible de transformations très importantes que nous allons indiquer.

On sait que l'on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\Delta V$$

et

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2}\right).$$

L'égalité (5) peut donc s'écrire

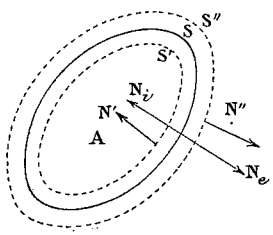
$$(6) \qquad W = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\sum\int V\left(\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2}\right) dS + \sum\iiint V\,\Delta V\, dx\, dy\, dz\right].$$

Cette égalité (6) montre que W *est déterminé lorsqu'on connaît la valeur de la fonction potentielle* V *en tous les points de l'espace.*

Le théorème de Green va nous permettre de donner une nouvelle forme à l'égalité (6).

Pour ne point compliquer les calculs sans avantage sérieux pour la généralité des démonstrations, nous supposerons que le système renferme un seul corps électrisé A (*fig.* 19) et une seule surface

Fig. 19.



électrisée, la surface S, qui sépare ce corps du milieu non électrisable qui l'entoure. Les directions N_1, N_2 deviennent alors res-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pectivement les directions N_i, N_e, de la normale à la surface S dirigées vers l'intérieur ou vers l'extérieur du corps A. Dans ces conditions, l'égalité (6) s'écrit

$$(6\ bis)\qquad \begin{cases} W = -\dfrac{\varepsilon}{8\pi}\iiint_A V\,\Delta V\,dx\,dy\,dz \\ \qquad -\dfrac{\varepsilon}{8\pi}\int_S V\,\dfrac{\partial V}{\partial N_i}\,dS - \dfrac{\varepsilon}{8\pi}\int_S V\,\dfrac{\partial V}{\partial N_e}\,dS. \end{cases}$$

A l'intérieur du corps A, traçons une surface S′ infiniment voisine de la surface S. Soit A′ l'espace enfermé par la surface S′. Soit N′ la normale à la surface S′ vers l'intérieur de l'espace A′. Le théorème de Green [Chapitre III, égalité (5)] nous donne

$$\iiint_{A'} V\,\Delta V\,dx\,dy\,dz + \int_{S'} V\,\frac{\partial V}{\partial N'}\,dS' = -\iiint_{A'}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Faisons maintenant tendre la surface S′ vers la surface S; l'espace A′ tend vers l'espace occupé par le corps A; $\frac{\partial V}{\partial N'}$ tend vers $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ et l'égalité précédente devient

$$(7)\qquad \begin{cases} \iiint_A V\,\Delta V\,dx\,dy\,dz + \int_S V\,\dfrac{\partial V}{\partial N_i}\,dS \\ \qquad = -\iiint_A\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz. \end{cases}$$

A l'extérieur du corps A traçons une surface fermée S″ enveloppant le corps A et infiniment voisine de la surface S. Soit N″ la normale à la surface S″ vers l'espace illimité qui l'environne. Soit B″ cet espace illimité. Par un raisonnement analogue à celui qui nous a donné l'égalité (4) du Chapitre VI, nous trouverons

$$\iiint_{B''}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz + \int_{S''} V\,\frac{\partial V}{\partial N''}\,dS'' = 0.$$

Faisons maintenant tendre la surface S″ vers la surface S; l'espace B″ tend vers l'espace illimité B extérieur à la surface S; $\frac{\partial V}{\partial N''}$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tend vers $\frac{\partial V}{\partial N_e}$, et l'égalité précédente devient

$$(8)\qquad \mathbf{S}_S\, V\,\frac{\partial V}{\partial N_e}\,dS = -\int\int\int_B \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz.$$

Les égalités (6 *bis*), (7) et (8) donnent la formule suivante

$$(9)\qquad W = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\int\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

l'intégration qui figure au second membre s'étendant à tout l'espace.

Telle est l'importante expression du potentiel électrostatique à laquelle nous voulions parvenir.

Cette expression nous montre, en premier lieu, que *le potentiel électrostatique ne peut jamais être négatif.*

Peut-il être égal à 0?

Nous avons vu, au § 1 du Chapitre VI, que l'égalité

$$\int\int\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = 0$$

entraînait, en tout point de l'espace, l'égalité

$$V = 0.$$

Dès lors, en tout point intérieur à l'un des corps qui forment le système, on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\,\Delta V = 0,$$

et en tout point des surfaces de discontinuité qui limitent ces corps, on a

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_1}+\frac{\partial V}{\partial N_2}\right) = 0.$$

Donc, *pour que le potentiel électrostatique soit égal à* 0, *il faut et il suffit que le système entier soit à l'état neutre.*

Le potentiel électrostatique de tout système électrisé est positif.

En second lieu, si l'on supposait chaque élément de volume de l'espace soumis à des forces dont le potentiel serait

$$\frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'ensemble de toutes ces forces aurait le même potentiel que les forces qui, d'après les lois de Coulomb, agissent entre les diverses particules électrisées du système; ces forces effectueraient donc, dans tout déplacement virtuel du système, le même travail que les forces données par les lois de Coulomb. Il en résulte que l'on pourrait substituer ces forces aux forces données par les lois de Coulomb.

Quelles sont ces forces, dont le potentiel sur chaque élément de volume nous est seul connu? C'est une question qui a donné lieu à d'importants travaux de Maxwell (1), mais que nous n'examinerons pas dans le présent Volume.

---

(1) MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, Ire Partie, Chap. V.
Voir aussi H. POINCARÉ, *Électricité et Optique :* I. *Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière,* Chap. II.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LIVRE II.

LA DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE SUR LES CORPS CONDUCTEURS ET LE PROBLÈME DE LEJEUNE-DIRICHLET.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITION DE L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE. — L'ÉLECTRICITÉ RÉSIDE A LA SURFACE DES CORPS CONDUCTEURS.

§ 1. — Principes de la théorie de Poisson.

Jusqu'ici nous avons laissé invariable la charge électrique prise par chacun des éléments d'un système; nous avons supposé que chacun des éléments pouvait se déplacer, mais que l'état d'électrisation d'aucun d'entre eux ne pouvait varier.

Lorsqu'un corps sera supposé satisfaire à une semblable restriction, il sera dit *mauvais conducteur*. Si, à un instant donné, un corps mauvais conducteur ne présente d'électricité en aucun de ses points, il n'en présentera à aucun instant. Le milieu non électrisable dans lequel sont supposés plongés les corps que nous étudierons est, par hypothèse, un corps mauvais conducteur.

Il ne s'agit pas ici de savoir si les corps que la nature nous présente et auxquels on donne le nom de *mauvais conducteurs* offrent exclusivement des propriétés susceptibles d'être représentées par la définition précédente. En vérité, le corps mauvais conducteur ou isolant que nous venons de définir est un corps idéal, dont nous allons néanmoins étudier les propriétés, quitte à comparer ensuite par l'expérience ces propriétés à celles des mauvais conducteurs réels.

En général, sur des corps placés dans des positions déterminées, la distribution électrique ne cessera d'être variable que lorsque certaines conditions seront vérifiées par la densité électrique en chaque point. Les corps sont dits alors *bons conduc-*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

teurs, et les conditions dont il s'agit sont dites *conditions d'équilibre électrique.*

Ce sont ces conditions qu'il s'agit de fixer.

Poisson (1) a cherché à les déterminer par des considérations hypothétiques. Nous verrons, au Livre III, que ces considérations hypothétiques ne fournissent pas une représentation satisfaisante de toutes les lois de la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs; nous serons amenés alors à remplacer la théorie de Poisson par une autre théorie. Mais les résultats de la théorie de Poisson seront conservés dans la nouvelle théorie.

L'hypothèse fondamentale de Poisson consiste à regarder les actions étudiées par Dufay et Coulomb non pas comme des forces appliquées aux particules matérielles qui portent des charges électriques, mais comme des forces appliquées aux charges électriques elles-mêmes.

Cette hypothèse se trouve déjà renfermée dans l'énoncé même que Coulomb a donné des lois découvertes par lui. Il y parle des attractions et des répulsions qui s'exercent entre les corps électrisés, ou entre les charges électriques, sans établir aucune distinction entre les sens de ces expressions (2).

Cette hypothèse n'est pas sans soulever de graves difficultés logiques. Une force étant, par définition, le produit d'une certaine accélération par une masse matérielle à laquelle elle est appliquée, parler de forces appliquées aux charges électriques, c'est admettre, *a priori,* que les charges électriques sont de certaines

---

(1) POISSON, *Mémoire sur la distribution de l'Électricité à la surface des corps conducteurs,* lu les 9 mai et 3 août 1812 à l'Académie des Sciences (*Savants étrangers,* 1811, p. 1).

(2) COULOMB, *Second Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme, où l'on détermine suivant quelles loix le fluide magnétique, ainsi que le fluide électrique, agissent, soit par répulsion, soit par attraction* (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1785, p. 579).

En terminant ce Mémoire, Coulomb s'exprime ainsi :

« Des recherches qui précèdent il résultera : 1° Que l'action, soit répulsive, soit attractive, de deux globes électrisés et, par conséquent, de deux molécules électriques, est en raison composée des densités du fluide électrique des deux molécules électrisées, et inverse du carré des distances.... 4° Que la force attractive et répulsive du fluide magnétique est exactement, ainsi que dans le fluide électrique, en raison composée de la directe des densités, et inverse du carré des distances des molécules magnétiques. » (*Loc. cit.,* p. 611.)

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quantités d'un fluide matériel. C'est, du reste, l'hypothèse adoptée d'une manière générale à l'époque de Coulomb et de Poisson. Si l'on ne veut point faire cette hypothèse, si l'on veut regarder la charge électrique comme un simple paramètre dont on affecte toute molécule matérielle électrisée, on ne peut plus attribuer aucun sens au mot *force appliquée à une charge électrique.*

Nous trouverons plus tard le moyen de nous affranchir de cette hypothèse qui assimile les charges électriques à des masses matérielles; pour l'instant, nous l'accepterons sans la discuter et nous en déduirons les conséquences.

De cette hypothèse Poisson déduit la condition de l'équilibre électrique sur un système de conducteurs, condition qui s'énonce ainsi :

Pour que l'électricité soit en équilibre sur un conducteur ou sur un système de conducteurs, il est nécessaire et suffisant que l'électricité répandue sur ces corps n'exerce ni attraction ni répulsion sur un point quelconque pris au hasard dans l'intérieur d'un quelconque de ces corps, ce point étant supposé affecté d'une charge électrique égale à l'unité.

On suppose, en effet, les fluides électriques susceptibles de servir de point d'application à des forces données par les lois de Coulomb, et libres de se mouvoir à l'intérieur de chaque corps conducteur. Dès lors, pour qu'une charge électrique placée en un point pris à l'intérieur d'un corps conducteur demeure immobile, il faut et il suffit qu'elle ne soit soumise à aucune force. De là le principe de Poisson résulte nécessairement.

Considérons, en effet, un point pris à l'intérieur d'un corps conducteur; ou bien il y a en ce point une certaine quantité d'électricité, ou bien il n'y a pas en ce point d'électricité libre.

S'il y a en ce point une certaine charge électrique, pour que cette charge y demeure et que, par conséquent, la distribution soit permanente, il faut et il suffit que l'action exercée sur cette charge et, partant, sur une charge égale à l'unité placée au même point, par toutes les charges positives ou négatives du système, soit égale à 0.

S'il n'y a pas d'électricité libre au point considéré, on peut tou-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

jours concevoir qu'il y ait en ce point deux charges électriques égales et de signes contraires μ et $-\mu$. Si les charges réparties sur le système exercent sur la quantité 1 d'électricité supposée mise en ce point une certaine action F, dirigée d'une certaine manière, la première de nos charges subira une action μF dans le sens de la force F; la seconde subira une action égale et de sens contraire. Si l'action F est nulle, les deux charges demeureront au point considéré, qui restera à l'état neutre; mais, si l'action F est différente de 0, la charge positive qui se trouve au point considéré sera entraînée dans un sens, la charge négative en sens contraire, en sorte que la distribution électrique sur le corps considéré sera modifiée.

C'est ainsi que les hypothèses de Poisson conduisent des lois de Coulomb au principe de l'équilibre électrique sur des corps conducteurs. L'incertitude des hypothèses dont il s'agit entraîne une incertitude égale pour le principe de l'équilibre électrique, qui ne possède point la certitude des lois de Coulomb. Nous allons maintenant étudier les conséquences analytiques de ce principe et les comparer à l'expérience. Ce sera l'objet du présent Livre et du suivant.

§ 2. — Dans l'état d'équilibre, l'électricité réside à la surface des corps conducteurs.

Coulomb a énoncé le premier (1) cette proposition :

« *Dans un corps conducteur, chargé d'électricité, le fluide électrique se répand sur la surface du corps, mais ne pénètre pas dans l'intérieur du corps.* »

Cette proposition, Coulomb l'a donnée comme une conséquence de l'expérience; mais, en réalité, aucune des expériences de Coulomb ne démontre directement la proposition dont il s'agit, et

(1) COULOMB, *Quatrième Mémoire sur l'Électricité, où l'on démontre deux principales propriétés du fluide électrique : la première, que ce fluide ne se répand dans aucun corps par une affinité chimique ou par une attraction élective, mais qu'il se partage entre différents corps mis en contact uniquement par son action répulsive; la seconde, que dans les corps conducteurs le fluide parvenu à l'état de stabilité, est répandu sur la surface du corps et ne pénètre pas dans l'intérieur* (*Mémoires de l'Académie pour* 1786, p. 72).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

même aucune expérience ne peut la démontrer directement, car tout point intérieur au volume qu'un conducteur occupe est inaccessible. La proposition précédente ne peut donc, par sa nature même, être établie que théoriquement.

La possibilité d'établir théoriquement cette proposition a déjà été reconnue par Coulomb. « Cette propriété du fluide électrique, dit-il (1), de se répandre sur la surface des corps conducteurs et de ne point pénétrer dans l'intérieur de ces corps lorsque ce fluide est parvenu à l'état d'équilibre, est une conséquence de la loi de la répulsion de ses éléments, en raison inverse du carré des distances, loi que nous avons trouvée dans notre premier Mémoire; mais, comme c'est l'expérience, et non la théorie, qui nous a conduits, nous avons cru devoir suivre la même marche dans l'exposé de nos recherches; voyons actuellement comment la théorie généralise le résultat annoncé par l'expérience. » Suit une démonstration, inexacte d'ailleurs, dont nous aurons à reparler tout à l'heure.

Malgré cette indication de Coulomb, Poisson ne paraît pas s'être préoccupé de déduire de sa théorie la démonstration de ce fait que l'électricité en équilibre réside seulement à la surface des corps conducteurs; il prend toujours cette vérité comme une conséquence de l'expérience (2).

Green est le premier (3) qui ait montré que cette vérité était une conséquence simple et immédiate de la théorie de Poisson. La démonstration de Green peut être remplacée par la suivante :

Supposons, pour un instant, qu'à l'intérieur d'un corps conducteur il existe de l'électricité distribuée soit sur de certaines surfaces avec une densité superficielle finie, soit en de certains volumes avec une densité solide finie. Traçons à l'intérieur de ce conducteur une surface fermée S, assujettie à rencontrer les surfaces censées électrisées seulement suivant certaines lignes. A cette surface, appliquons la conséquence générale des lemmes de

---

(1) COULOMB, *Loc. cit.*, p. 75.

(2) POISSON, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, p. 2 (*Mémoires des Savants étrangers*, 1811). — *Second Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, p. 1 (*Ibid.*).

(3) GREEN, *Essay*... (Nottingham, 1828. *Mathematical papers of the late* George Green, p. 22).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Gauss, établie au Livre V, Chapitre VII, § 3. Nous aurons

$$\int F_{N_e} dS = 4\pi\varepsilon \mathfrak{M},$$

$\mathfrak{M}$ étant la masse électrique totale enfermée à l'intérieur de la surface S. Mais, d'après le principe de Poisson, si l'équilibre électrique est établi sur le conducteur considéré, l'électricité qui réside en tout le système exerce une action nulle en un point quelconque pris au hasard à l'intérieur de ce conducteur. On a donc, en tout point de la surface S, $F_{N_e} = 0$, et, par conséquent, l'égalité précédente devient

$$\mathfrak{M} = 0.$$

Ainsi, à l'intérieur d'un conducteur, il n'existe pas d'électricité lorsque l'équilibre est établi; l'électricité réside exclusivement à la surface de séparation du conducteur et du milieu isolant.

Coulomb (1) pensait que la propriété que nous venons de démontrer pourrait encore être exacte, lors même que les actions qui s'exercent entre deux points électrisés ne seraient pas en raison inverse du carré de leur distance. Il suffisait, selon lui, pour que cette propriété demeurât exacte, que, la distance r tendant vers 0, l'action électrique crût moins rapidement que $\frac{1}{r^3}$.

Cette pensée de Coulomb n'est pas conforme à la vérité. Si l'on admet le principe de l'équilibre électrique proposé par Poisson; si l'on admet, d'autre part, que l'électricité en équilibre sur un conducteur se porte exclusivement à la surface de ce corps, on peut en déduire que l'action mutuelle de deux particules électrisées est en raison inverse du carré de la distance qui les sépare.

En effet, des hypothèses faites, et d'une évidente raison de symétrie, il résulte qu'une sphère conductrice électrisée doit être recouverte d'une couche électrique ayant en tout point la même densité, et que cette couche exerce une action nulle en tout point intérieur à la sphère.

Or une couche sphérique homogène peut-elle, dans une autre loi que celle de nature, exercer une action nulle en tout point qui

(1) COULOMB, *Loc. cit.*, p. 75.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lui est intérieur? Laplace (1) a démontré qu'elle ne le pouvait, et M. J. Bertrand (2) a donné de cette impossibilité une ingénieuse démonstration que nous allons reproduire.

Soit

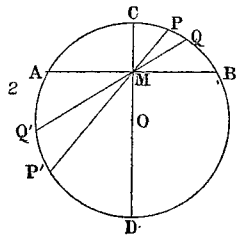
$$F = qq' f(r)$$

la grandeur de la force répulsive qui s'exerce entre deux particules électriques situées à la distance r.

Si le produit $r^2 f(r)$ demeure constant, la proposition est démontrée. Supposons donc que ce produit varie et aille, par exemple, en croissant, lorsque r augmente de ρ_0 à ρ_1.

Prenons une sphère de diamètre $(\rho_0 + \rho_1)$ (*fig.* 20) et recou-

Fig. 20.



vrons-la d'électricité, qui forme à sa surface une couche homogène de densité σ. Exprimons que l'action de cette électricité en un point intérieur à la sphère, par exemple au point M, dont les distances aux divers points de la sphère varient entre ρ_0 et ρ_1, est égale à zéro. Par le point M, menons un plan AB, normal au diamètre CD qui passe par ce point. Il partage la sphère en deux calottes, et l'action de l'une, ACB, doit faire équilibre à l'action de l'autre, ADB. L'action de la calotte ACB est évidemment dirigée suivant le diamètre CD. Cette action est la somme des compo-

---

(1) LAPLACE, *Mécanique céleste*, première Partie, Livre II, n° 12 (1re édition, t. I, p. 140.)

(2) J. BERTRAND, *Loi des actions électriques* (*Journal de Physique pure et appliquée*, 1re série, t. II, p. 418; 1873).

M. Liouville a démontré le premier que la loi de la raison inverse du carré de la distance est la seule dans laquelle l'électricité se porte à la surface des corps. *Voir* J. Bertrand, *Note sur quelques points de la théorie de l'électricité* (*Journal de Liouville*, t. IV, p. 495; 1839).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

santes suivant ce diamètre des actions exercées au point M par chacun des éléments PQ de la calotte sphérique ACB. Or la composante suivant MO de l'action de l'élément PQ est, en désignant par $d\omega$ l'angle sous lequel du point M on voit PQ et par N la normale à cet élément vers l'extérieur de la sphère,

$$\Phi = \frac{\sigma r^2\, d\omega}{\cos(\mathrm{N}, r)} f(r) \cos(r, \mathrm{MC}).$$

Considérons la composante suivant MC de l'action exercée au même point M par l'élément P'Q' de la calotte ADB, cet élément P'Q' étant découpé par le même cône d'ouverture sphérique $d\omega$. Elle a pour valeur

$$\Phi' = \frac{\sigma r'^2\, d\omega}{\cos(\mathrm{N}', r')} f(r') \cos(r', \mathrm{MD}).$$

Mais on a

$$\cos(r, \mathrm{MC}) = \cos(r', \mathrm{MD}),$$
$$\cos(\mathrm{N}, r) = \cos(\mathrm{N}', r');$$

on a donc

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{r'^2 f(r')}{r^2 f(r)};$$

r et r' sont compris entre ρ_0 et ρ_1 et r' est supérieur à r. On a donc

$$\Phi' > \Phi.$$

Les actions de l'élément P'Q' et de l'élément PQ ont une composante positive dirigée de M vers C. Tous les éléments de la sphère peuvent ainsi se combiner deux à deux de manière à donner une composante positive dirigée de M vers C. Le point M est donc soumis à une force dirigée de M vers C. Par suite, on est conduit à une contradiction si l'on ne suppose pas que l'on ait

$$r^2 f(r) = \text{const.}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

IL EXISTE UN ET UN SEUL ÉTAT D'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE.

§ 1. — Traduction analytique du principe de Poisson.

Soit M un point pris à l'intérieur d'un conducteur sur lequel l'équilibre électrique est établi. Ce point est extérieur aux masses agissantes, puisque l'électricité réside exclusivement à la surface du conducteur. Les dérivées premières de la fonction potentielle existent en ce point et sont liées aux composantes de la force par les relations

$$X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Mais, d'après la condition d'équilibre donnée par la théorie de Poisson, on a

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

On a donc, en tout point intérieur à un conducteur,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Ainsi, *lorsque l'équilibre électrique est établi sur un système de corps conducteurs électrisés, la fonction potentielle a une valeur constante à l'intérieur de chacun des conducteurs; réciproquement, si cette condition est remplie pour chacun des conducteurs, l'équilibre électrique est établi.*

Deux remarques à propos de ce principe.

En premier lieu, la fonction potentielle, étant constante aux points infiniment voisins de la surface du conducteur et étant continue dans tout l'espace, a la même valeur en tous les points de la surface d'un même conducteur.

En second lieu, si N_i, N_e sont les deux directions, intérieure et extérieure, de la normale en un point à la surface du conducteur, la densité superficielle σ est donnée en ce point par la relation

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

générale

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_e} = -4\pi\sigma.$$

Or, dans le cas actuel, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle sont nulles en tout point intérieur au conducteur, fût-il infiniment voisin de la surface. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial N_e} = -4\pi\sigma. \tag{1}$$

§ 2. — Existe-t-il un état d'équilibre électrique?

Ces deux remarques étant données, voici la question que nous allons examiner en premier lieu :

Un système est formé d'un certain nombre de corps placés dans des positions données; les uns sont mauvais conducteurs et possèdent une distribution électrique donnée; les autres sont conducteurs et chacun d'eux renferme une charge électrique totale déterminée. Peut-on, à la surface de chacun d'eux, distribuer cette charge de manière que l'équilibre électrique soit établi sur le système?

Pour répondre à cette question, nous démontrerons en premier lieu la proposition suivante :

Une distribution électrique qui rend maximum ou minimum le potentiel électrostatique W *est une distribution d'équilibre.*

Supposons, en effet, que, pour une certaine distribution, le potentiel électrostatique

$$W = \varepsilon \sum \frac{qq'}{r}$$

soit maximum ou minimum; supposons que la distribution subisse une variation infiniment petite; la variation subie par W doit être égale à zéro.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or, une variation de la distribution ne doit altérer ni la distribution sur chaque corps mauvais conducteur, ni la charge totale sur chaque corps conducteur; toute variation de la distribution s'obtient donc en superposant un certain nombre d'opérations analogues à la suivante :

Une charge électrique dq passe d'un certain point M d'un conducteur à un autre point M′ du même conducteur.

Il faut donc que la variation de W soit nulle pour toute opération de ce genre.

Supposons, en premier lieu, que la charge au point M diminue de dq, toutes les autres charges demeurant constantes. W augmenterait évidemment de

$$\delta_1 W = -\varepsilon\, dq \sum \frac{q'}{r} = -\varepsilon V\, dq,$$

V étant la valeur de la fonction potentielle au point M.

Supposons ensuite que, les choses étant dans cet état, la charge au point M′ augmente de dq, toutes les autres charges demeurant constantes. W varierait évidemment de

$$\delta_2 W = \varepsilon\, dq \sum \frac{q}{r} = \varepsilon(V' + dV')\, dq,$$

V′ étant la valeur initiale de la fonction potentielle au point M′, et $(V' + dV')$ ce que devient cette valeur lorsque la charge au point M diminue de dq.

Or on a évidemment

$$dV' = -\frac{dq}{\overline{MM'}}.$$

On a donc

$$\delta W = \delta_1 W + \delta_2 W = \varepsilon(V' - V)\, dq - \varepsilon \frac{dq^2}{\overline{MM'}}.$$

En négligeant l'infiniment petit du second ordre $\varepsilon \frac{dq^2}{\overline{MM'}}$ et en égalant δW à O, on trouve

$$V' = V,$$

ce qui montre que la fonction potentielle a la même valeur en deux points quelconques pris à l'intérieur d'un même conducteur et, par conséquent, que toute distribution électrique qui rend W

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

maximum ou minimum est, comme nous l'avions annoncé, une distribution d'équilibre.

Considérons maintenant le système pour lequel nous voulons prouver qu'il existe une distribution d'équilibre. Quelle que soit la distribution électrique sur ce système, nous savons que W peut s'exprimer de la manière suivante [Liv. I, Ch. IV, égalité (9)],

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'espace.

Cette expression montre que la quantité W n'est jamais négative. Quelle que soit la distribution électrique sur les conducteurs qui forment le système, elle ne peut devenir inférieure à une certaine limite; la quantité W, envisagée comme une fonction de la distribution électrique, est une fonction dont les variations sont limitées inférieurement.

Si, pour une certaine distribution électrique, la fonction W atteignait sa limite inférieure, elle passerait certainement alors par un minimum et la distribution dont il s'agit serait une distribution d'équilibre. Mais, de ce qu'une fonction est limitée, il n'en résulte pas forcément qu'elle atteigne sa limite; on pourrait concevoir une série infinie de distributions électriques telles que, lorsque le système présente successivement toutes ces distributions, son potentiel électrostatique s'approche indéfiniment de sa limite sans jamais l'atteindre. Par conséquent, ce que nous venons de dire, tout en rendant très vraisemblable l'existence d'une distribution d'équilibre, ne suffit pas, en toute rigueur, à démontrer l'existence de cette distribution.

§ 3. — S'il existe une distribution d'équilibre, il n'en existe qu'une seule.

Voici maintenant une proposition, réciproque en quelque sorte de la précédente, mais susceptible d'une démonstration rigoureuse.

Si, sur un système constitué comme nous venons de l'indiquer, il existe une distribution électrique d'équilibre, il en existe une seule.

Dans certains cas, il peut arriver qu'au lieu de se donner la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

charge totale que renferme un conducteur, on se donne la valeur que la fonction potentielle doit prendre à son intérieur; nous supposerons, pour plus de généralité, dans la démonstration qui va suivre, que certains conducteurs du système se trouvent aussi placés dans cette condition.

Pour simplifier la démonstration, sans nuire à sa généralité, supposons qu'il existe un seul corps conducteur 1 et un seul corps mauvais conducteur 2.

Sur le corps mauvais conducteur, la distribution électrique est donnée. Supposons que, sur le corps conducteur, deux distributions d'équilibre d'une même quantité d'électricité soient possibles. Dans la première distribution, la densité superficielle au point M de la surface du conducteur a une valeur σ, la fonction potentielle en un point de l'espace est V. En tout point situé à l'intérieur du corps 1 ou à sa surface, cette fonction potentielle prend une même valeur V_1.

Dans la seconde distribution, la densité superficielle au point M a une valeur σ'; la fonction potentielle en un point de l'espace est V'. En tout point situé à l'intérieur du conducteur 1 ou à sa surface, cette fonction prend une même valeur V'_1.

La condition pour que la charge électrique totale du conducteur soit la même dans les deux cas s'exprime ainsi

$$\mathbf{S}\,\sigma\, dS_1 = \mathbf{S}\,\sigma'\, dS_1,$$

ou bien

$$\mathbf{S}\,(\sigma - \sigma')\, dS_1 = 0. \tag{2}$$

Quant à la condition pour que la fonction potentielle, à l'intérieur du conducteur, soit la même dans les deux cas, elle s'exprime simplement par l'égalité

$$V_1 - V'_1 = 0. \tag{2 bis}$$

On a, d'après l'égalité (1),

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e},$$

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V'}{\partial N_e},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui peut s'écrire, puisqu'à l'intérieur du conducteur 1 V prend la valeur constante V_1 et V' la valeur constante V'_1,

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial V}{\partial N_e} + \dfrac{\partial V}{\partial N_i}\right), \\ \sigma' = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial V'}{\partial N_e} + \dfrac{\partial V'}{\partial N_i}\right). \end{cases}$$

Soit W la fonction potentielle des charges distribuées sur le mauvais conducteur; soit U la fonction potentielle des charges distribuées sur le bon conducteur dans la première distribution; soit U' la fonction potentielle des charges distribuées sur le bon conducteur dans la seconde distribution. On a

$$(4)\qquad \begin{cases} V = U + W, \\ V' = U' + W. \end{cases}$$

Comme en tout point du corps bon conducteur on a

$$\frac{\partial W}{\partial N_i} + \frac{\partial W}{\partial N_e} = 0,$$

les égalités (3) deviennent

$$(5)\qquad \begin{cases} \sigma = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial U}{\partial N_e} + \dfrac{\partial U}{\partial N_i}\right), \\ \sigma' = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial U'}{\partial N_e} + \dfrac{\partial U'}{\partial N_i}\right). \end{cases}$$

Cela posé, envisageons l'égalité

$$(6)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int\!\!\int (\sigma' - \sigma)(U' - U)\, dS_1 \\ \qquad = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\!\!\int (U' - U)\left[\dfrac{\partial (U' - U)}{\partial N_e} + \dfrac{\partial (U' - U)}{\partial N_i}\right] dS_1. \end{cases}$$

Le théorème de Green permet, comme nous l'avons déjà vu au Livre I, Chap. IX, de remplacer le second membre par

$$\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int\!\!\int \left\{\left[\frac{\partial (U' - U)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial (U' - U)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial (U' - U)}{\partial z}\right]^2\right\} dx\, dy\, dz,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace.

D'autre part, en vertu des égalités (4), on a, dans tout l'espace,

$$U' - U = V' - V,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en sorte que, sur la surface S_1, $(U' - U)$ prend la valeur constante $(V'_1 - V_1)$. Le premier membre de l'égalité (6) peut donc s'écrire

$$(V'_1 - V_1) \int\!\!\!\int (\sigma' - \sigma)\, dS_1,$$

ce qui est égal à 0, en vertu ou de l'égalité (2), ou de l'égalité (2 *bis*).

L'égalité (6) devient donc

$$\iiint \left\{ \left[\frac{\partial(U' - U)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(U' - U)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial(U' - U)}{\partial z}\right]^2 \right\} dx\, dy\, dz = 0,$$

ce qui suppose que l'on ait dans tout l'espace

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U'}{\partial z},$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (5),

$$\sigma = \sigma'$$

en tout point de la surface S_1. Cette égalité démontre le théorème énoncé.

Par une autre méthode, Gauss (1) avait déjà démontré ce théorème pour un conducteur unique soustrait à toute influence. La démonstration générale que l'on vient de lire est due à Liouville (2).

---

(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze...* (*Gauss Werke*, Bd V).

(2) LIOUVILLE, Note à l'occasion du Mémoire de M. Chasles, *Addition à la Connaissance des Temps pour* 1845.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE III.

L'IDENTITÉ DE GAUSS ET LE THÉORÈME DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE.

§ 1. — L'identité de Gauss.

Dans ce Chapitre et dans ceux qui vont suivre, nous allons passer rapidement en revue quelques-unes des plus belles idées analytiques dont les géomètres aient fait usage pour résoudre le problème de la distribution électrique.

L'*identité de Gauss* (1) a servi de point de départ à d'importantes théories.

Soit V la fonction potentielle d'un système de charges électriques M', M'', M''', ... concentrées en des points P', P'', P''', ... Soit, d'autre part, φ la fonction potentielle de charges électriques m', m'', m''', ... concentrées en des points p', p'', p''', ...

Aux points P', P'', P''', ..., la fonction φ a les valeurs φ', φ'', φ''', ...

Aux points p', p'', p''', ..., la fonction V a les fonctions V', V'', V''', ...

On a évidemment

$$V' = \frac{M'}{P'p'} + \frac{M''}{P''p'} + \frac{M'''}{P'''p'} + \dots,$$

$$V'' = \frac{M'}{P'p''} + \frac{M''}{P''p''} + \frac{M'''}{P'''p''} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et, de même,

$$\varphi' = \frac{m'}{p'P'} + \frac{m''}{p''P'} + \frac{m'''}{p'''P'} + \dots,$$

$$\varphi'' = \frac{m'}{p'P''} + \frac{m''}{p''P''} + \frac{m'''}{p'''P''} + \dots.$$

Envisageons la quantité

$$M'\varphi' + M''\varphi'' + M'''\varphi''' + \dots,$$

(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze...*, art. 19 (*Gauss Werke*, Bd V, p. 221).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Elle a pour valeur

$$\mathrm{M}'\left(\frac{m'}{p'\mathrm{P}'}+\frac{m''}{p''\mathrm{P}'}+\frac{m'''}{p'''\mathrm{P}'}+\ldots\right)$$
$$+\mathrm{M}''\left(\frac{m'}{p'\mathrm{P}''}+\frac{m''}{p''\mathrm{P}''}+\frac{m'''}{p'''\mathrm{P}''}+\ldots\right)+\ldots,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$m'\left(\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{P}'p'}+\frac{\mathrm{M}''}{\mathrm{P}''p'}+\frac{\mathrm{M}'''}{\mathrm{P}'''p'}+\ldots\right)$$
$$+m''\left(\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{P}'p''}+\frac{\mathrm{M}''}{\mathrm{P}''p''}+\frac{\mathrm{M}'''}{\mathrm{P}'''p''}+\ldots\right)+\ldots$$

ou bien

$$m'\mathrm{V}'+m''\mathrm{V}''+m'''\mathrm{V}'''+\ldots.$$

On a donc l'identité

$$(1)\qquad \mathrm{M}'v'+\mathrm{M}''v''+\mathrm{M}'''v'''+\ldots=m'\mathrm{V}'+m''\mathrm{V}''+m'''\mathrm{V}'''+\ldots$$

ou, abréviativement,

$$(1\ bis)\qquad \sum \mathrm{M}v=\sum m\mathrm{V}.$$

Les charges électriques qui forment l'un des deux systèmes, ou qui les forment tous les deux, au lieu d'être concentrées en des points isolés, peuvent être répandues sur des surfaces ou en des volumes. L'identité précédente demeure exacte, à la seule condition que l'on remplace les sommations par les intégrations correspondantes.

Supposons, par exemple, que le premier système soit formé par une surface S, sur laquelle la densité électrique a une valeur Σ, et le second par une surface s, sur laquelle la densité électrique a une valeur σ. L'identité de Gauss s'écrira

$$\int_s \mathrm{V}\sigma\, ds=\int_\mathrm{S} v\,\Sigma\, d\mathrm{S}.$$

Il est important de remarquer que cette égalité demeure encore exacte, si l'on suppose que la surface S coïncide avec la surface s, que V soit la fonction potentielle d'une couche de densité Σ distribuée sur cette surface, et v la fonction potentielle d'une couche de densité σ distribuée sur la même surface.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 2. — Le théorème de la moyenne arithmétique.

De cette identité, Gauss (1) a déduit un théorème fondamental auquel M. Carl Neumann a donné le nom de *Théorème de la moyenne arithmétique.*

Le premier système que nous considérerons, pour démontrer ce théorème, est formé de masses quelconques distribuées d'une manière quelconque. La fonction potentielle V de ce système prend une valeur V_0 au point P_0.

Le second système est formé d'une couche de densité superficielle égale à l'unité répartie sur la surface d'une sphère de rayon R ayant pour centre P_0. La fonction potentielle ρ de cette sphère a la valeur constante $\frac{4\pi R^2}{R}$ en tout point situé à l'intérieur de la sphère ou à sa surface; en un point extérieur, dont la distance au point P_0 est r, elle a la valeur $\frac{4\pi R^2}{r}$.

La quantité $\sum mV$ devient ici $\int V\,dS$, la sommation étant étendue à la surface de la sphère.

Si M_0 est la charge électrique totale qui, dans le premier système, se trouve à l'intérieur de la sphère, et si M', M'', ... sont les charges qui se trouvent à l'extérieur de la sphère ou à sa surface, on aura

$$\sum M\rho = 4\pi R M_0 + 4\pi R^2\left(\frac{M'}{r'} + \frac{M''}{r''} + \dots\right).$$

On a donc

$$\int V\,dS = 4\pi R M_0 + 4\pi R^2\left(\frac{M'}{r'} + \frac{M''}{r''} + \dots\right).$$

Si la sphère ne renferme aucune charge électrique du premier système, on aura

$$M_0 = 0,$$
$$V_0 = \frac{M'}{r'} + \frac{M''}{r''} + \dots,$$

et l'égalité précédente deviendra

$$V_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\int V\,dS. \qquad (2)$$

(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze...*, art. 20 (*Gauss Werke*, Bd V, p. 222).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ainsi, *lorsqu'une sphère ne renferme aucune charge agissante à son intérieur, la valeur de la fonction potentielle au centre de cette sphère est la moyenne arithmétique des valeurs que la fonction potentielle prend sur la surface de cette sphère.*

Tel est le théorème dit *de la moyenne arithmétique.*

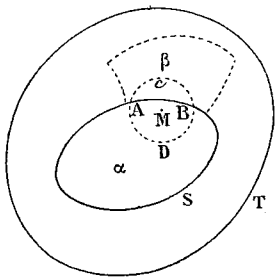
§ 3. — Théorèmes sur la variation de la fonction potentielle hors des charges agissantes.

Le théorème très simple que nous venons de démontrer est d'une rare fécondité. Indiquons-en dès maintenant quelques-unes des conséquences les plus importantes.

1° *Si la fonction potentielle a une valeur constante dans une certaine région d'un espace linéairement connexe ne renfermant aucune masse agissante, elle est constante dans tout cet espace* (1).

Soit l'espace linéairement connexe contenu à l'intérieur de la surface T (*fig.* 21). Dans cet espace, la surface S limite un autre

Fig. 21.



espace linéairement connexe α, à l'intérieur duquel la fonction potentielle a une valeur constante *a*. Peut-il arriver que, aussitôt franchie la surface S, la fonction potentielle prenne une valeur variable d'un point à l'autre?

Si cette hypothèse est exacte, comme la fonction potentielle

(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze...*, art. 21 (*Gauss Werke*, [Bd V, p. 224).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

varie d'une manière continue d'un point à l'autre, on pourra toujours trouver un domaine linéairement connexe β, contigu à l'espace α, en tous les points duquel la fonction potentielle aura ou une valeur inférieure à a, ou une valeur supérieure à a. Supposons, pour fixer les idées, que la première supposition soit réalisée.

Traçons une sphère ayant son centre en un point M de l'espace α, une partie ADB de sa surface à l'intérieur de l'espace α, et une autre partie ACB de sa surface à l'intérieur de l'espace β. L'intégrale $\int V\,dS$, étendue à la surface de cette sphère, aura forcément une valeur inférieure à $4\pi R^2 a$, tandis que $4\pi R^2 a$ devrait être sa valeur, d'après le théorème de la moyenne arithmétique.

L'hypothèse faite est donc inadmissible, et le théorème énoncé est démontré.

2° *En un point situé à distance finie de toute masse agissante, la valeur de la fonction potentielle ne peut être ni un maximum ni un minimum.*

Supposons, en effet, que la valeur V_0 de la fonction potentielle au point M_0 soit une valeur maximum ou une valeur minimum; une valeur maximum, pour fixer les idées.

Autour du point M_0, nous pourrons toujours tracer un domaine ne renfermant aucune force agissante, et tel qu'en tout point M de ce domaine la fonction potentielle ait une valeur V, inférieure à V_0. Si du point M_0 comme centre, nous traçons une sphère de rayon R en entier contenue dans ce domaine, l'intégrale $\int V\,dS$ étendue à cette sphère sera forcément inférieure à $4\pi R^2 V_0$, contrairement au théorème de la moyenne arithmétique. L'impossibilité de l'hypothèse faite entraîne l'exactitude du théorème énoncé.

Ce théorème entraîne à son tour de nouvelles conséquences, énoncées déjà par Gauss (1) dans des cas particuliers et démontrées d'une manière entièrement générale par M. Carl Neumann (2).

---

(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze...*, art. 26, 27, 28 (*Gauss Werke*, Bd V, p. 228).

(2) CARL NEUMANN, *Revision einiger allgemeinen Sätze aus der Theorie des logarithmischen Potentiales* (*Mathematische Annalen*, t. III, p. 340-344 et 430-434; 1870). — *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, p. 39-49. Leipzig; 1877.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Considérons une surface fermée S à l'intérieur de laquelle ne se trouve aucune charge agissante; il peut arriver que la fonction potentielle ait la même valeur en tout point intérieur à cette surface, ou bien que sa valeur varie d'un point à l'autre de l'espace enfermé par cette surface; dans ce dernier cas, les valeurs qu'elle prend dans l'intérieur de cet espace et sur la surface qui le limite sont toutes comprises entre une limite inférieure A et une limite supérieure B; comme la fonction potentielle est une fonction continue, il existe, dans l'intérieur de cet espace ou sur la surface qui le limite, au moins un point où elle prend la valeur A et un point où elle prend la valeur B. Un semblable point, où la fonction potentielle atteint sa limite inférieure ou sa limite supérieure, ne peut être situé à l'intérieur de la surface S, car en ce point la fonction potentielle présenterait un minimum ou un maximum. Il est donc forcément situé sur la surface S.

Ainsi, *si l'on trace une surface fermée ne renfermant aucune masse agissante, ou bien la fonction potentielle est constante en tout point intérieur à cette surface, ou bien, à l'intérieur de cette surface, elle est constamment comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs qu'elle prend sur la surface.*

Cette proposition entraîne de suite cette conséquence :

Si la fonction potentielle a la même valeur en tous les points d'une surface fermée qui ne renferme aucune charge agissante, elle a aussi la même valeur en tous les points intérieurs à cette surface.

Nous verrons plus loin l'importance capitale que présente cette proposition dans l'étude de l'équilibre électrique.

Considérons une surface fermée S renfermant toutes les masses agissantes; l'espace illimité extérieur à cette surface S peut être considéré comme un espace clos compris entre la surface S et une surface dont tous les points sont à l'infini. Si l'on remarque qu'en tout point de cette dernière la fonction potentielle a la valeur o et si l'on raisonne comme dans le cas précédent, on arrive au résultat suivant :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Traçons une surface fermée renfermant à son intérieur toutes les charges agissantes.

Si la fonction potentielle a la valeur o *en tous les points de cette surface, elle a la valeur* o *dans l'espace illimité qui lui est extérieur.*

Si elle n'a pas la valeur o *en tous les points de cette surface, désignons par* B *et* A *la plus grande et la plus petite des valeurs qu'elle y prend, ces deux valeurs pouvant être égales entre elles. Dans l'espace illimité extérieur à la surface considérée, la fonction potentielle est toujours comprise entre la plus petite et la plus grande des trois valeurs* o, A, B.

Une remarque sur le premier de ces deux cas :

D'après ce que nous avons dit pour ce cas, on voit que, si la fonction potentielle V a la valeur o en tous les points d'une surface fermée contenant toutes les masses agissantes, on a, en tout point de cette surface,

$$\frac{\partial V}{\partial N_e} = 0.$$

Or, pour toute surface fermée, on a

$$\mathrm{S}\frac{\partial V}{\partial N_e}\,dS = -4\pi\,\partial\mathfrak{M},$$

$\partial\mathfrak{M}$ étant la somme des charges que la surface contient. On arrive donc au résultat suivant :

Pour que la fonction potentielle ait la valeur o *en tous les points d'une surface fermée qui contient toutes les charges agissantes, il faut que la somme de ces charges soit égale à* o.

Qu'arrive-t-il dans le cas où la somme des masses agissantes est égale à o sans pour cela avoir une fonction potentielle identiquement nulle en tout point extérieur?

Soit T (*fig.* 22) une surface qui renferme toutes les masses agissantes soit à son intérieur, soit à sa superficie. Traçons une sphère de rayon R contenant la surface T. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème de la moyenne arithmétique, nous

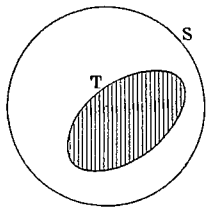
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aurons

$$\int V\, dS = 4\pi R M_0 + 4\pi R^2 \left(\frac{M'}{r'} + \frac{M''}{r''} + \dots \right).$$

Au premier membre, l'intégration s'étend à toute la surface de la sphère. Au second membre, M_0 est la somme des masses inté-

Fig. 22.



rieures à la sphère, c'est-à-dire à la surface T, M', M'', ... les masses extérieures. Dans le cas actuel, on a

$$M_0 = 0, \qquad M' = 0, \qquad M'' = 0, \qquad \dots$$

et, par conséquent,

$$\int V\, dS = 0.$$

D'après cette égalité, si la fonction V n'est pas égale à 0 en tout point de la sphère, elle y a tantôt des valeurs positives et tantôt des valeurs négatives.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe, si la fonction potentielle n'est pas égale à 0 en tous les points de l'espace extérieur à la surface T, elle ne peut avoir en tous ces points des valeurs de même signe; 0 ne peut alors être pour elle ni une limite inférieure, ni une limite supérieure; sa limite inférieure et sa limite supérieure sont toutes deux atteintes en des points de la surface T.

Si l'on rapproche ce résultat de celui auquel on est parvenu dans le cas où la fonction potentielle est égale à 0 en tout point de surface T, on voit sans peine que l'on peut énoncer ce théorème général :

Lorsqu'une surface fermée contient à son intérieur ou à sa superficie toutes les masses agissantes et que la somme de ces

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dernières est égale à 0, *les valeurs de la fonction potentielle à l'extérieur de cette surface sont limitées supérieurement et inférieurement par deux des valeurs de cette fonction sur la surface; ces deux limites sont de signe contraire, à moins qu'elles ne soient toutes deux égales à* 0.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IV.

QUELQUES THÉORÈMES SUR LE SIGNE DE LA DENSITÉ ÉLECTRIQUE A LA SURFACE D'UN CONDUCTEUR.

Les théorèmes démontrés au Chapitre précédent permettent de démontrer quelques propositions très simples et très générales sur la distribution électrique à la surface d'un système qui renferme exclusivement des corps conducteurs.

Lorsque la densité électrique aura le même signe en tous les points de la surface d'un conducteur, nous dirons, avec M. Carl Neumann, que la distribution est *monogène* à la surface de ce conducteur; lorsque, au contraire, la densité électrique aura des signes différents aux divers points de la surface d'un conducteur, nous dirons que la distribution est *amphigène*.

THÉORÈME I. — *Si un système est formé d'un conducteur électrisé unique, la distribution à la surface de ce conducteur est nécessairement monogène.*

Soit, en effet, A la valeur constante que prend la fonction potentielle à la surface de ce conducteur, valeur que nous supposons différente de o. Imaginons, pour fixer les idées, qu'elle soit positive. Dans le champ extérieur au corps conducteur, nous savons que la fonction potentielle prendra des valeurs toutes comprises entre o et A, par conséquent toutes inférieures à A. On aura donc, en tout point du conducteur, $\frac{\partial V}{\partial N_e} < o$, et, par conséquent, $\sigma > o$. Si l'on avait supposé A négatif, on aurait eu, en tout point du conducteur, $\sigma < o$. Si l'on avait supposé A égal à o, on aurait eu, en tout point de la surface du conducteur, $\sigma = o$. Le théorème énoncé est ainsi démontré.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce théorème est dû à Gauss (1). Les suivants sont dus à M. Carl Neumann (2).

THÉORÈME II. — *Deux conducteurs* C *et* C', *portant des charges quelconques, sont mis en présence et soustraits à l'influence de tout autre corps électrisé ; la distribution est monogène au moins sur l'un d'entre eux.*

Soit V la fonction potentielle ; soient A et A' les *niveaux potentiels* des deux conducteurs C et C', c'est-à-dire les valeurs constantes auxquelles se réduit la fonction potentielle à l'intérieur de ces conducteurs.

Si l'on considère l'ensemble des points extérieurs aux deux conducteurs C et C', les valeurs de la fonction potentielle en ces points sont limitées inférieurement et supérieurement par deux des trois quantités

$$0, \quad A, \quad A'.$$

Donc, de toutes manières, l'une au moins des deux quantités A et A' est limite soit inférieure, soit supérieure, des valeurs que prend la fonction potentielle dans le champ. Supposons, par exemple, que la quantité A joue ce rôle de limite. Il sera facile, en répétant une démonstration analogue à celle du théorème précédent, de prouver que la distribution à la surface du conducteur C est forcément monogène.

Le théorème précédent est entièrement général. D'autres propositions analogues peuvent être données, qui sont utiles lorsque l'on possède certains renseignements soit sur les charges des conducteurs en présence, soit sur les niveaux potentiels. Voyons d'abord les théorèmes dont l'application nécessite certains renseignements sur les charges des conducteurs.

THÉORÈME III. — *En présence d'un conducteur induit renfermant une charge totale égale à* 0, *on place un inducteur électrisé ; la distribution sur l'induit étant nécessairement*

(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze....* art. 28 (*Gauss Werke*, Bd V, p. 231).

(2) C. NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Chap III, §§ 4, 5, 6. Leipzig ; 1877.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

amphigène, la distribution sur l'inducteur sera forcément monogène.

Ce théorème résulte immédiatement du précédent.

THÉORÈME IV. — *Si l'on met en présence deux conducteurs portant l'un la charge totale* $+\mu$, *l'autre la charge totale* $-\mu$, *la distribution sur chacun d'eux est nécessairement monogène.*

En effet, d'après le théorème démontré à la fin du Chapitre précédent, les limites supérieure et inférieure des valeurs de la fonction potentielle dans le champ sont alors les niveaux potentiels des deux conducteurs. Une démonstration analogue à celle du théorème I montre que chacun d'eux porte une distribution monogène.

THÉORÈME V. — *Une charge* -1, *concentrée en un point quelconque, produit une distribution monogène sur un conducteur portant la charge totale* $+1$.

Ce théorème est un cas particulier du précédent.

THÉORÈME VI. — *Une charge* -1, *concentrée en un point quelconque* P, *produit une distribution monogène sur un conducteur* C *portant la charge totale* $(1+\mu)$, μ *étant une quantité positive quelconque.*

Soit A le niveau potentiel du conducteur C. Le point P peut être considéré comme une surface évanouissante en tout point de laquelle la fonction potentielle a la valeur $-\infty$. Les limites des valeurs de la fonction potentielle dans le champ sont donc deux des trois quantités

$$-\infty, \quad 0, \quad A.$$

$-\infty$ est forcément la limite inférieure des valeurs de la fonction potentielle dans le champ. La limite supérieure de ces valeurs ne peut être 0, car la fonction potentielle aurait en tout point du champ des valeurs négatives, tandis qu'il est aisé de voir qu'en un point très éloigné des masses agissantes elle se réduit sensible-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment à $\frac{\mu}{r}$, c'est-à-dire à une quantité positive. Donc la limite supérieure des valeurs de la fonction potentielle est A, et il en résulte immédiatement que la distribution sur le conducteur C est monogène.

Examinons maintenant les propositions relatives aux cas où les deux conducteurs en présence, C et C′, sont maintenus à des niveaux potentiels connus.

THÉORÈME VII. — *Si deux conducteurs en présence sont maintenus à des niveaux potentiels de même signe, la distribution est monogène sur celui des deux dont le niveau potentiel est le plus grand en valeur absolue; elle a le même signe que le niveau potentiel.*

Si, par exemple, on a

$$A > A' > 0,$$

A sera la limite supérieure des valeurs de la fonction potentielle dans le champ, et alors, sur le conducteur C, la distribution sera monogène et positive, ce qui démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME VIII. — *Si deux conducteurs en présence sont maintenus à des niveaux potentiels de signe contraire, sur chacun d'eux la distribution est monogène et de même signe que le niveau potentiel.*

Les deux limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs de la fonction potentielle dans le champ sont; en effet, dans ce cas, A et A′.

THÉORÈME IX. — *Si l'un des deux conducteurs,* C, *est maintenu au niveau potentiel* A, *et l'autre,* C′, *au niveau potentiel* 0, *la distribution est monogène sur chacun d'eux; sur* C, *elle a le signe de* A; *sur* C′, *un signe contraire à celui de* A.

Dans ce cas, en effet, les deux limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs de la fonction potentielle dans le champ sont A et 0.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÉORÈME X. — *Sur un conducteur mis en communication avec le sol, une charge électrique d'un certain signe, concentrée en un point, engendre une distribution monogène de signe contraire.*

C'est un cas particulier du théorème précédent.

Remarquons, en terminant, que le théorème I peut se généraliser. Une démonstration analogue à celle qui a fourni ce théorème permettra d'établir le suivant :

THÉORÈME XI. — *Dans un système formé d'un nombre quelconque de corps conducteurs, l'un au moins de ces conducteurs porte une distribution monogène.*

Toutes les démonstrations que nous venons de donner supposent que les surfaces des conducteurs limitent un espace linéairement connexe indéfiniment étendu en tout sens. L'exactitude des théorèmes précédents suppose donc tous les conducteurs extérieurs les uns aux autres. Ils peuvent cesser d'être applicables si l'un des conducteurs est intérieur à une cavité dont l'autre forme les parois. C'est à ce cas très important de distribution électrique que sera consacré le Chapitre V du Livre III.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE V.

LE PROBLÈME DE LEJEUNE-DIRICHLET.

§ 1. — Le problème de la distribution électrique se ramène au problème de Lejeune-Dirichlet.

Le problème général de la distribution électrique peut s'énoncer de la manière suivante :

Un certain nombre de corps mauvais conducteurs A, A′, A″, ... portent des distributions déterminées.

Un certain nombre de corps conducteurs B, B′, B″, ... sont isolés et portent des charges électriques totales déterminées Q, Q′, Q″, ...

Un certain nombre de corps conducteurs C, C′, C″, ... sont maintenus à des niveaux potentiels déterminés $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$.

Existe-t-il une distribution électrique d'équilibre sur les conducteurs B, B′, B″, ... C, C′, C″, ... et quelle est cette distribution?

Rappelons en premier lieu que, d'après la démonstration de M. Liouville, que nous avons indiquée au Chapitre II, un semblable problème, s'il admet une solution, n'en admet qu'une seule. Ce théorème est essentiel pour l'étude qui va suivre.

Le problème que nous venons d'énoncer va pouvoir se décomposer en deux problèmes successifs, dont chacun doit admettre au plus une solution d'après ce que nous venons de dire.

Le premier problème est le suivant :

Trouver la distribution électrique engendrée par les mauvais conducteurs A, A′, A″, ... *sur les bons conducteurs* B, B′, B″, ..., C, C′, C″, *maintenus à des niveaux potentiels donnés* $b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$, *quels que soient ces niveaux potentiels.*

Ce premier problème étant résolu, on aura à résoudre le suivant. Dans la distribution précédente, les charges totales respectives des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

conducteurs B, B′, B″, ... sont des fonctions des quantités b, b', b'', ... c, c', c'', ... dont le calcul peut se faire lorsque la distribution est déterminée. Soient

$$q\ (b, b', b''. \ldots c, c', c''. \ldots),$$
$$q'(b, b', b''. \ldots c, c', c'', \ldots),$$
$$q''(b, b', b''. \ldots c, c', c''. \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ces charges.

On aura à déterminer les quantités b, b', b'', ... c, c', c'', ... par les équations

$$q\ (b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots) = \mathrm{Q},$$
$$q'(b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots) = \mathrm{Q}',$$
$$q''(b, b', b''. \ldots c, c', c''. \ldots) = \mathrm{Q}'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c = \gamma, \quad c' = \gamma', \quad c'' = \gamma'', \quad \ldots.$$

Il suffira alors de reporter ces valeurs de b, b', b'', ..., c, c', c'', ... dans la solution du premier problème pour avoir résolu complètement la question de distribution électrique que l'on s'était posée.

La difficulté de l'étude de la distribution électrique réside habituellement dans la solution du premier problème; le second est de moindre difficulté. Voyons, par exemple, comment on résoudra le second problème dans le cas où le système ne renferme qu'un seul conducteur.

Si ce conducteur est le conducteur C, maintenu au niveau potentiel γ, les équations du second problème se réduisent à l'équation toute résolue $c = \gamma$.

Si ce conducteur est le conducteur B, portant une charge déterminée Q, le second problème se ramène à la résolution d'une équation du premier degré.

Imaginons en effet, pour un instant, que l'on ait résolu le problème suivant :

Le conducteur B *étant soustrait à toute influence, de quelle manière l'électricité doit-elle être distribuée à sa surface pour y maintenir le niveau potentiel* 1?

Supposons que S soit, dans ce problème, la densité électrique en chaque point du conducteur B et Σ la charge distribuée à sa surface.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'autre part, dans le premier problème, soit $\sigma(b)$ la densité électrique en tout point du conducteur b.

Si nous plaçons en présence du corps non conducteur A le conducteur B, et si, en chaque point de sa surface, nous plaçons de l'électricité avec la densité $\sigma(b) + b'\mathrm{S}$, nous aurons évidemment une nouvelle solution du premier problème, solution dans laquelle le niveau potentiel du conducteur B sera $(b + b')$. La charge totale de ce conducteur sera devenue $q(b) + b'\mathfrak{Q}$. On a donc

$$q(b + b') = q(b) + b'\mathrm{Q}.$$

La fonction $q(b)$ est donc une fonction linéaire de b, et l'équation à résoudre se réduit à une équation du premier degré en b.

C'est donc sur la solution du premier problème que doit être portée notre attention.

Les conducteurs B, B′, B″, . . . , C, C′, C″, . . . peuvent être creusés de cavités; certains d'entre eux peuvent être contenus à l'intérieur des cavités dont d'autres forment les parois. L'espace non occupé par la matière de ces conducteurs peut donc se décomposer en plusieurs espaces linéairement connexes. L'un de ces espaces s'étend à l'infini, les autres sont limités de tous côtés par les parois des conducteurs.

Soit V la fonction potentielle, en un point de l'espace, de toutes les charges distribuées sur le système; soit U la fonction potentielle des charges distribuées sur les mauvais conducteurs; soit W la fonction potentielle des charges distribuées sur les conducteurs.

On a

$$\mathrm{V} = \mathrm{U} + \mathrm{W}.$$

La fonction U est d'ailleurs une fonction donnée, en sorte que la détermination de la fonction V, qui suffit à résoudre le problème de la distribution électrique, se ramène à la détermination de la fonction W. Voyons à quelles conditions est assujettie cette fonction W.

Considérons l'espace linéairement connexe extérieur à tous les conducteurs.

Dans cet espace, la fonction W est harmonique.

Si R désigne la distance d'un point à l'origine des coordonnées,

$$\mathrm{RW}, \quad \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}, \quad \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}, \quad \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

demeurent des quantités finies lorsque R croît au delà de toute limite. L'espace en question s'appuie sur certaines surfaces S, S', S'', ..., T, T', T'', ... appartenant aux conducteurs B, B', B'', ..., C, C', C'', ...

Sur la surface S, on a $W = b - U$,

Sur la surface S', on a $W = b' - U$,

Sur la surface S'', on a $W = b'' - U$,

.....,

Sur la surface T, on a $W = c - U$,

.....,

les quantités $(b - U)$, $(b' - U)$, $(b'' - U)$, ..., $(c - U)$, ... étant des données du problème.

Considérons maintenant un espace linéairement connexe limité de toutes parts par les conducteurs. Soient $s, s', s'', \ldots, t, t', t'', \ldots$ les surfaces appartenant aux conducteurs B, B', B'', ..., C, C', C'', ... qui limitent cet espace.

Dans l'espace considéré, la fonction W est harmonique

Sur la surface s, on a $W = b - U$,

Sur la surface s', on a $W = b' - U$,

.....,

Sur la surface t, on a $W = c - U$,

.....,

Réciproquement, si l'on a déterminé une fonction W qui, dans les divers espaces considérés, satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer, on aura déterminé la fonction cherchée.

En effet, supposons que, dans les divers espaces linéairement connexes que n'occupent pas les conducteurs, on ait déterminé une fonction W qui vérifie les conditions précédentes. Pour obtenir une fonction W définie dans tout l'espace, nous conviendrons de donner à cette fonction la valeur b à l'intérieur du conducteur B, les valeurs $b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$ à l'intérieur des conducteurs B', B'', ..., C, C', C'', ...

Alors, la fonction W sera finie, uniforme et continue dans tout l'espace; elle sera harmonique à l'intérieur de chacune des régions linéairement connexes en lesquelles l'espace illimité est partagé

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par les surfaces qui séparent les conducteurs du milieu isolant; elle prendra des valeurs données sur chacune des surfaces dont il s'agit. Lorsque R croît au delà de toute limite, les quantités RW, $R^2\frac{\partial W}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial W}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial W}{\partial z}$ garderont des valeurs finies. D'après ce qu'on a vu au Livre I, Ch. VII, § 5, une seule fonction W peut présenter cet ensemble de caractères; la fonction W que nous avons trouvée coïncide donc avec celle que nous cherchions.

Le problème de la distribution électrique se ramène ainsi à la résolution d'un certain nombre de problèmes réductibles à deux types principaux : ces deux types, auxquels nous donnerons les noms de *problème extérieur de Lejeune-Dirichlet* et de *problème intérieur de Lejeune-Dirichlet*, sont caractérisés ainsi :

1° Problème extérieur de Lejeune-Dirichlet. — *Étant donné un espace linéairement connexe, illimité, extérieur à certaines surfaces fermées* S, S′, . . . , *trouver une fonction* V, *harmonique en tout point de cet espace; égale à* 0 *à l'infini, de telle sorte que* RV, $R^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial V}{\partial z}$ *gardent des valeurs finies lorsque la distance* R *du point* (x, y, z) *à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite; et prenant sur les surfaces* S, S′, . . . *des valeurs données qui varient d'une manière continue d'un point à l'autre de ces surfaces.*

2° Problème intérieur de Lejeune-Dirichlet. — *Étant donné un espace linéairement connexe, limité par certaines surfaces fermées* S, S′, . . . , *trouver une fonction* V, *harmonique en tout point de cet espace et prenant sur les surfaces* S, S′, . . . *des valeurs données qui varient d'une manière continue d'un point à l'autre de ces surfaces.*

La solution de tout problème de distribution électrique comporte la solution d'un problème extérieur et d'un certain nombre de problèmes intérieurs. Dans le cas particulier où le système se compose exclusivement de conducteurs pleins extérieurs les uns aux autres, la distribution électrique sur ce système se détermine au moyen de la seule solution du problème extérieur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 2. — **Essai de démonstration du principe de Lejeune-Dirichlet.**

C'est Riemann qui, en 1857 (1), a donné le nom de *problèmes de Dirichlet* aux problèmes précédents, et de *principe de Dirichlet* à l'énoncé qui affirme, dans tous les cas, l'existence d'une solution pour ces problèmes. Ce nom, aujourd'hui adopté par les géomètres, est fort mal choisi; car Lejeune-Dirichlet n'a jamais rien publié sur ce sujet. Ce problème n'est, en réalité, comme nous le verrons au prochain Chapitre, qu'une autre forme d'un problème posé par Green dès 1828. Gauss (2), en 1839, énonce également un problème équivalent à celui-là, et propose une démonstration tendant à prouver qu'il admet toujours une solution. Enfin, en 1847, Sir W. Thomson (3) énonce, en le généralisant même, le problème dit de Dirichlet, et, par une méthode analogue à celle de Gauss, démontre qu'il admet toujours une solution.

La démonstration proposée par Gauss a servi de type aux autres démonstrations qui ont été proposées pour prouver le principe de Dirichlet, c'est-à-dire l'existence d'une fonction résolvant, dans tous les cas possibles, l'un ou l'autre des problèmes de Dirichlet. La démonstration de Gauss a été reprise par M. E. Mathieu (4). Les deux démonstrations proposées par Sir W. Thomson dérivent évidemment de la même idée. Il en est encore de même de celle que l'on va lire.

Celle-ci se trouve, pour la première fois, restreinte au cas de deux variables, il est vrai, dans le Mémoire de Riemann que nous avons cité; Natani (5) l'a exposée le premier pour le cas de trois varia-

---

(1) B. RIEMANN, *Theorie der Abel'schen Funktionen* (*Borchardt's Journal*, t. LIV, p. 115; 1857. — *Riemann's gesammelte Werke*, p. 90).

(2) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze...*, art. 31 (*Gauss Werke*, Bd V, p. 243). — Nous reviendrons sur le problème de Gauss au Livre III, Chap. V.

(3) W. THOMSON, *Theorems with reference to the solution of certain partial differential équations* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal;* janvier 1848. — Traduit en français dans le *Journal de Liouville*, t. XII, p. 493; 1847. W. THOMSON, *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, n° 206).

(4) MATHIEU, *Réflexions au sujet d'un theorème d'un Mémoire de Gauss sur le potentiel* (*Borchardt's Journal*, t. LXXXV, p. 264; 1878).

(5) NATANI, *Mathematisches Wörterbuch*, Bd V, p. 602; 1866.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

bles, mais l'un et l'autre déclarent l'emprunter à l'enseignement de Lejeune-Dirichlet. Nous la trouvons, en effet, dans les Leçons de Lejeune-Dirichlet, rédigées par M. Grube (1).

Cette démonstration, comme nous le verrons en l'exposant, donne prise à plusieurs critiques fort graves, dont quelques-unes atteignent aussi celle de Gauss et toutes celles qui en dérivent. Ces critiques sont dues à M. Weierstrass, à M. Kronecker (2) et à M. Heine (3).

Nous démontrerons, par la méthode de Lejeune-Dirichlet, l'existence d'une solution pour le problème intérieur; on verrait sans peine que l'on peut construire, pour le problème extérieur, une démonstration analogue sujette aux mêmes critiques.

Soit donc un espace linéairement connexe clos, limité par une surface fermée S qui peut être composée de plusieurs parties. Soit q une valeur variable d'une manière continue sur la surface S.

Admettons, en premier lieu, qu'il existe une infinité de fonctions Q, régulières dans tout l'espace considéré, et dont la valeur au point (x, y, z) tende vers la valeur q lorsque le point (x, y, z) tend d'une manière quelconque vers un point de la surface S.

Cette supposition, que Dirichlet regarde comme évidemment permise, pourrait fort bien n'être pas légitime. M. Heine a montré, il est vrai, que, s'il existe une semblable fonction Q, il en existait certainement une infinité; mais il a fait observer que l'existence d'une pareille fonction dans tous les cas possibles n'est nullement chose certaine.

---

(1) P.-G. LEJEUNE DIRICHLET, *Vorlesungen über die in umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte,* herausgegeben von F. Grube, p. 127. Leipzig; 1867.

(2) M. Weierstrass et M. Kronecker n'ont formulé ces critiques dans aucune de leurs publications; mais M. HEINE, *Ueber trigonometrische Reihen* (*Borchardt's Journal,* Bd LXXI, p. 360; 1870) et M. BRUNS, *Deproprietate quâdam functionis potentialis corporum homogeneorum* (*Inaugural Dissertation,* p. 12; Berlin, 1871), en les faisant connaître, déclarent les emprunter à l'enseignement des deux illustres géomètres.

(3) HEINE, *Loc. cit.* et *Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Princips* (*Mathematische Annalen,* t. IV, p. 626; 1871).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette première hypothèse faite, considérons l'intégrale

$$J=\iiint\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

étendue à notre espace clos.

Cette intégrale est finie et n'est jamais négative; ses valeurs admettent donc une limite inférieure. Dirichlet regarde comme évident qu'il existe au moins une détermination de la fonction Q qui fait prendre à J cette valeur limite. M. Kronecker et M. Weierstrass ont fait justement remarquer qu'une quantité dont les valeurs sont limitées ne prend pas forcément sa valeur limite, en sorte que la démonstration présente ici un deuxième point douteux.

Admettons néanmoins que, parmi les fonctions Q, il en existe au moins une, V, qui rende J minimum.

Nous allons prouver que cette fonction vérifie, en tout point intérieur à l'espace considéré, l'équation

$$\Delta V = 0.$$

Il sera alors prouvé que la fonction V, qui prend sur la surface S les valeurs q, résout le problème de Dirichlet à l'intérieur de l'espace considéré.

La fonction V étant régulière, ayant par conséquent des dérivées partielles du premier et du second ordre qui sont continues, la quantité ΔV varie d'une manière continue à l'intérieur de l'espace considéré. On pourra donc toujours partager cet espace en un certain nombre de régions qui seront de trois sortes :

1° Des régions A, A′, ..., où ΔV est égal à 0;
2° Des régions B, B′, ..., où ΔV est positif;
3° Des régions C, C′, ..., où ΔV est négatif.

Ces régions sont limitées par la surface S et par des surfaces le long desquelles $\Delta V = 0$.

Imaginons que l'on forme une fonction T, régulière dans l'espace considéré, prenant en tout point de la surface S la valeur 0; positive en tout point des régions B, B′, ...; négative en tout point des régions C, C′, ...; égale à 0, par conséquent, sur les surfaces qui séparent ces deux sortes de régions; quelconque en-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fin dans les régions A, A′, ... Dirichlet admet l'existence d'une semblable fonction, existence qui n'est cependant nullement évidente. C'est le troisième point faible de sa démonstration.

Soit h une constante arbitraire. La fonction

$$U = V + hT$$

est une des fonctions Q, quelle que soit la constante h.

Pour cette fonction U, l'intégrale J devient

$$\begin{aligned} J = &\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \\ &+ 2h \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ &+ h^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz. \end{aligned}$$

D'après ce qui a été dit, la fonction V rend l'intégrale J minimum. La quantité J est donc maintenant une fonction du second degré de h qui doit être minimum pour $h = 0$.

Il est nécessaire, pour qu'il en soit ainsi, que l'on ait

$$\iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 0.$$

La fonction T est égale à 0 en tout point de la surface S. Dès lors, l'identité de Green permet [Liv. I, Chap. III, égalité (3)] de remplacer cette condition par la suivante :

$$\iiint T\,\Delta V\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Le produit $T\Delta V$, nul en tout point des régions A, A′, ..., est positif en tout point des régions B, B′, ..., C, C′, ... L'égalité précédente ne peut donc subsister que si les régions B, B′, ..., C, C′, ... n'existent pas. On a alors, en tout point de l'espace considéré,

$$\Delta V = 0,$$

et la fonction V résout le problème de Dirichlet.

On a vu combien la démonstration du principe de Dirichlet, donnée par Lejeune-Dirichlet, est peu satisfaisante, bien qu'elle ait l'avantage de faire envisager le problème posé à un point de vue nouveau et intéressant. Nous verrons, dans les Chapitres sui-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vants, que l'on peut démontrer le principe de Dirichlet dans des cas qui, malgré leur étendue, demeurent particuliers. Lors donc que nous admettrons l'exactitude du principe de Dirichlet dans le cas le plus général, nous ne devrons pas oublier que nous faisons une hypothèse dont la vérification dépasse la portée de l'analyse actuelle.

§ 3. — Énoncé d'un problème plus général que celui de Lejeune-Dirichlet.

L'équilibre électrique sur un système de conducteurs devant être unique, chacun des problèmes de Lejeune-Dirichlet doit admettre au plus une solution. Il est facile de s'assurer directement qu'il en est ainsi, non seulement pour le problème de Lejeune-Dirichlet, mais encore pour un problème plus général, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

On donne un espace clos, limité par une surface fermée S. *On demande de trouver une fonction* V *harmonique dans tout l'espace clos dont il s'agit, continue, ainsi que ses dérivées premières, en tout point de la surface* S, *lorsqu'on connaît les valeurs de* V *en tout point d'une partie* S′ *de la surface* S *et les valeurs de* $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ *en tout point de l'autre partie* S″ *de la surface* S.

Supposons que ce problème puisse admettre deux solutions distinctes, et soit Θ la différence de ces deux solutions. Alors, en tout point de S′, on aurait Θ = 0, et en tout point de S″, $\frac{\partial \Theta}{\partial N_i} = 0$, ce qui permettrait d'écrire

$$\mathrm{S}\,\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial N_i}\, dS = 0,$$

ou bien, la fonction Θ étant forcément harmonique dans l'espace considéré,

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui entraînerait

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0$$

en tout point de l'espace clos considéré.

Les deux solutions du problème posé ne peuvent donc, à l'intérieur de l'espace considéré, différer que par une constante. Encore cette constante se réduit-elle à zéro pour peu que V soit donné, fût-ce en un point seulement de la surface S; car, en ce point, on doit avoir $\Theta = 0$.

On peut énoncer un problème analogue pour l'espace extérieur à la surface S, en ajoutant qu'à l'infini V doit présenter les caractères d'une fonction potentielle. On démontrera, comme nous venons de le faire pour le problème intérieur, que ce problème extérieur ne peut admettre plus d'une solution.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VI.

LA FONCTION DE GREEN.

§ 1. — **Le problème de Green équivaut au problème de Dirichlet.**

Le problème dit *de Dirichlet* est équivalent à un problème posé par Green dès 1828 (1). Ce problème peut être présenté, au point de vue logique, sinon au point de vue historique, comme la recherche d'une généralisation du théorème de la moyenne de Gauss.

A l'intérieur d'une sphère de rayon R, une fonction V est harmonique. Sa valeur V_0, au centre de la sphère, se déduit de ses valeurs à la surface de cette sphère par la relation

$$4\pi V_0 = \frac{1}{R^2} \int V \, dS, \tag{1}$$

l'intégrale s'étendant à la surface de la sphère ; tel est le théorème de la moyenne.

L'égalité (1) peut s'écrire sous une forme peu différente. Soit r la distance d'un point quelconque de l'espace au centre de la sphère. Soit N_i la normale à l'élément dS vers l'intérieur de la sphère. En un point de l'élément dS, nous aurons

$$\frac{\partial r}{\partial N_i} = -1,$$

et

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i},$$

en sorte que l'égalité (1) peut s'écrire

$$4\pi V_0 = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i} \, dS. \tag{2}$$

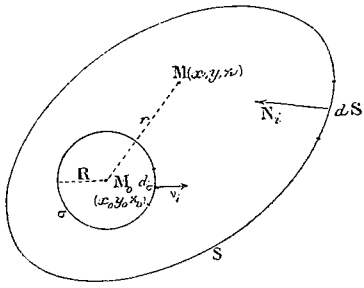
(1) GEORGE GREEN, *An essay on the application of mathematical Analysis to the theories of electricity and magnetism;* Nottingham, 1828, Art. 5 (*Mathematical papers of the late George Green, edited by Ferrers,* p. 31).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le problème de Green a pour but de généraliser cette égalité.

Considérons un espace clos, linéairement connexe, limité par une surface fermée S (*fig.* 23), *à connexion simple ou*

Fig. 23.



multiple, et un point fixe $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ *à l'intérieur de cet espace.*

Soit $M(x, y, z)$ *un point variable du même espace, et représentons par r la longueur* MM_0.

On demande de trouver une fonction $G(x, y, z)$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

1° *Cette fonction est harmonique dans tout l'espace considéré, sauf au point* M_0;

2° *Au point* M_0, *elle est infinie, mais la différence* $\left[G(x, y, z) - \frac{1}{r}\right]$ *est harmonique dans tout l'espace, même au point* M_0;

3° *Toute fonction* V, *harmonique dans l'espace considéré, prend, au point* M_0, *une valeur* V_0 *donnée par l'égalité*

$$4\pi V_0 = \int\!\!\int_S V \frac{\partial G}{\partial N_i}\, dS. \tag{3}$$

Tel est le problème de Green; la fonction G, que ce problème a pour but de déterminer, a reçu de Riemann le nom de *fonction de Green.*

La comparaison des égalités (2) et (3) montre que, dans le cas particulier où la surface S est une sphère, et où le point M_0 en est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le centre, on a

$$G = \frac{1}{r}.$$

Le théorème de la moyenne détermine dans ce cas la fonction de Green.

Il est facile de voir en premier lieu que le problème de Green ne peut admettre, pour une surface S donnée et pour une position donnée du point M_0, plus d'une solution.

Admettons en effet que, pour une même surface S et pour un même point M_0, on ait trouvé deux fonctions de Green, $G(x, y, z)$ et $G'(x, y, z)$. Alors, quelle que soit la fonction harmonique V, en désignant par V_0 sa valeur au point M_0, on pourra écrire

$$4\pi V_0 = \int\!\!\int_S V \frac{\partial G}{\partial N_i} dS$$

et aussi

$$4\pi V_0 = \int\!\!\int_S V \frac{\partial G'}{\partial N_i} dS,$$

ou, par conséquent,

$$0 = \int\!\!\int_S V \frac{\partial (G - G')}{\partial N_i} dS.$$

Mais les deux fonctions

$$G(x, y, z) - \frac{1}{r},$$

$$G'(x, y, z) - \frac{1}{r}$$

sont, par hypothèse, des fonctions harmoniques à l'intérieur de l'espace considéré. Il en sera donc de même de la fonction

$$G(x, y, z) - G'(x, y, z),$$

en sorte que l'on pourra écrire

$$\int\!\!\int_S (G - G') \frac{\partial (G - G')}{\partial N_i} dS = 0.$$

La fonction $(G - G')$ étant harmonique, cette égalité peut se transformer, par l'identité de Green, en

$$\iiint \left\{ \left[\frac{\partial (G - G')}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (G - G')}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial (G - G')}{\partial z} \right]^2 \right\} dx\, dy\, dz = 0,$$

et, par un procédé que nous avons plusieurs fois suivi, on déduit

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de cette égalité que l'on doit avoir, en tout point de l'espace considéré,

$$\frac{\partial(G - G')}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(G - G')}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(G - G')}{\partial z} = 0.$$

Les deux fonctions G et G' ne peuvent donc différer que par une constante; elles ne fournissent pas deux solutions réellement distinctes du problème de Green, puisque la fonction G n'entre dans l'égalité (3) que par ses dérivées premières.

Cette proposition nous montre que, si nous obtenons, par un procédé quelconque, une solution du problème de Green, nous en aurons obtenu par le fait même la solution générale. Nous allons obtenir de la manière suivante une solution du problème de Green.

Soit $\Gamma(x, y, z)$ *une fonction d'*x, y, z, *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *En tout point de l'espace considéré, elle est harmonique;*

2° *En tout point de la surface* S, *elle prend la valeur* $-\frac{1}{r}$;

La fonction

$$G(x, y, z) = \Gamma(x, y, z) + \frac{1}{r} \tag{4}$$

résout le problème de Green pour la surface S, *et le point* M_0.

Considérons, en effet, une fonction V quelconque, harmonique dans l'espace considéré; le théorème de Green donnera

$$\int_S \left(V \frac{\partial \Gamma}{\partial N_i} - \Gamma \frac{\partial V}{\partial N_i} \right) dS = 0,$$

ou bien, puisque la fonction Γ est égale à $-\frac{1}{r}$ en tout point de la surface S,

$$(a) \qquad \int_S V \frac{\partial \Gamma}{\partial N_i} dS = - \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial N_i} dS.$$

D'autre part, du point M_0 comme centre, traçons une surface sphérique σ avec un rayon R assez petit pour que cette surface soit tout entière à l'intérieur de l'espace considéré. La fonction $\frac{1}{r}$ sera, comme la fonction V, harmonique dans tout l'espace compris

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

entre la sphère σ et la surface S. Si donc on désigne par $d\sigma$ un élément de la surface sphérique σ, par ν_i la normale à l'élément $d\sigma$ vers l'intérieur de l'espace dont il s'agit, le théorème de Green donnera

$$(b) \qquad \mathbf{S}_{\mathrm{S}} \left(\mathrm{V} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{N}_i} \right) d\mathrm{S} + \mathbf{S}_{\sigma} \left(\mathrm{V} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \nu_i} \right) d\sigma = 0.$$

Mais on a, sur la surface σ,

$$r = \mathrm{R}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_i} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2}.$$

Si l'on désigne par $d\Theta$ l'angle sous lequel, du point M_0, on voit l'élément $d\sigma$, on a

$$d\sigma = \mathrm{R}^2 d\Theta.$$

Si l'on pose enfin

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \mathrm{U},$$

l'identité (b) deviendra

$$(c) \qquad \mathbf{S}_{\mathrm{S}} \left(\mathrm{V} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{N}_i} \right) d\mathrm{S} - 4\pi \mathrm{V}_0 - \mathbf{S} \left(\mathrm{U} - \mathrm{R} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \nu_i} \right) d\Theta = 0,$$

le dernier signe $\mathbf{S}$ indiquant une sommation qui s'étend aux éléments de la sphère de rayon 1 ayant pour centre le point M_0.

L'identité (c) a lieu quel que soit R. Faisons maintenant tendre R vers 0; au premier membre, les deux premiers termes ne varient pas; le troisième tend vers 0, car U tend vers 0 avec R, et $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \nu_i}$ demeure fini. Nous trouvons donc, incidemment, le résultat suivant.

Si une fonction V *est harmonique dans un espace clos limité par une surface fermée* S *et si* V_0 *est sa valeur en un point* M_0 *de cet espace, on a*

$$(5) \qquad 4\pi \mathrm{V}_0 = \mathbf{S}_{\mathrm{S}} \left(\mathrm{V} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}_i} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{N}_i} \right) \partial \mathrm{S}.$$

Cette identité est due à Green (1). Elle a une haute importance; nous aurons souvent à en faire usage.

---

(1) GEORGE GREEN, *An Essay...*, Art. 4 (*G. Green's Mathematical Papers*, p. 29).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La démonstration de la proposition que nous avons énoncée résulte immédiatement de la comparaison entre cette identité et l'identité (a), comparaison qui nous donne

$$4\pi V_0 = \int_S V \frac{\partial\left(\Gamma + \frac{1}{r}\right)}{\partial N_i} dS.$$

La proposition que nous venons de démontrer nous montre que :

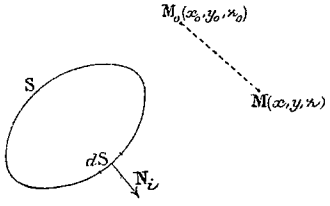
Si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour la région intérieure à une certaine surface S, *on sait déterminer la fonction de Green pour la surface* S *et un point quelconque* M_0 *intérieur à cette surface.*

Il suffit de se reporter à l'énoncé même du problème de Green pour voir que, *réciproquement, si l'on sait déterminer la fonction de Green pour une surface fermée* S, *quelle que soit la position du point* M_0 *à l'intérieur de la surface* S, *on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à cette surface.*

Ce que nous venons de dire met en évidence l'équivalence exacte du problème intérieur de Dirichlet avec le problème que nous avons énoncé au début de ce paragraphe, et que nous nommerons *le problème intérieur de Green.* De la même manière, on peut montrer l'exacte équivalence du problème extérieur de Dirichlet avec *le problème extérieur de Green,* que nous énoncerons de la manière suivante :

Un espace linéairement connexe illimité est extérieur à une certaine surface fermée S (*fig.* 24), *à connexion simple ou*

Fig. 24.



multiple; on donne un point fixe $M_0(x_0, y_0, z_0)$, *faisant partie de cet espace.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit $M(x, y, z)$ *un point variable du même espace et soit* r *la distance* MM_0.

On demande de trouver une fonction $G(x, y, z)$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

1° *La fonction* $\left[G(x, y, z) - \frac{1}{r}\right]$ *est harmonique dans tout l'espace considéré.*

2° *Lorsque la distance* R *du point* M *à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite, les quantités* RG, $R^2\frac{\partial G}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial G}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial G}{\partial z}$ *demeurent finies.*

3° *Soit* V *une fonction harmonique dans l'espace considéré, telle que les quantités* RV, $R^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial V}{\partial z}$, *demeurent finies lorsque* R *croît au delà de toute limite; soit* V_0 *sa valeur au point* M_0.

On a

$$4\pi V_0 = \int_S V \frac{\partial G}{\partial N_i} dS,$$

N_i *étant la normale à l'élément* dS *vers l'intérieur de l'espace considéré.*

Le problème extérieur donne prise aux mêmes remarques que le problème intérieur; une seule différence est à signaler : tandis que la solution du problème intérieur est déterminée seulement à une constante près, la solution du problème extérieur est entièrement déterminée, puisque, à l'infini, G prend la valeur o.

§ 2. — Propriété fondamentale de la fonction de Green.

Riemann (1), qui a montré l'équivalence du problème de Green et du problème de Dirichlet, a démontré une importante propriété de la fonction de Green, propriété que Green (2) avait énoncée.

Considérons une surface S (*fig.* 25); *dans son intérieur, deux points fixes* $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ *et un point*

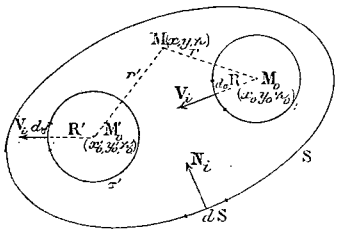
(1) RIEMANN, *Schwere, Elektricität und Magnetismus, bearbeitet von Hattendorff*, p. 142; Hanovre, 1876.

(2) G. GREEN, *Essay...*, Art. 6 (*Green's Mathematical Papers*, p. 36).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mobile $M(x, y, z)$. Soient $G(x, y, z)$ *la fonction de Green qui a son pôle en* M_0 *et* $G'(x, y, z)$ *la fonction de Green qui a son*

Fig. 25.



pôle en M'_0. *Ces deux fonctions peuvent être prises telles que*

$$G(x'_0, y'_0, z'_0) = G'(x_0, y_0, z_0). \tag{6}$$

Soient r et r' les distances du point M au point M_0 et au point M'_0. Nous pouvons prendre

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r}\Gamma(x, y, z),$$

$$G'(x, y, z) = \frac{1}{r'}\Gamma'(x, y, z),$$

les deux fonctions Γ et Γ' étant harmoniques en tout point intérieur à la surface S, et égales réciproquement à $-\frac{1}{r}$, $-\frac{1}{r'}$, sur la surface S; il suffit évidemment de prouver l'identité

$$\Gamma(x'_0, y'_0, z'_0) = \Gamma'(x_0, y_0, z_0). \tag{6 bis}$$

Or on a, d'après la définition des fonctions G et G',

$$4\pi\Gamma(x'_0, y'_0, z'_0) = \int_S \Gamma \frac{\partial G'}{\partial N_i}\, dS,$$

$$4\pi\Gamma'(x_0, y_0, z_0) = \int_S \Gamma' \frac{\partial G}{\partial N_i}\, dS.$$

Ces égalités donnent aisément

$$(d)\quad \begin{cases} 4\pi[\Gamma(x'_0, y'_0, z'_0) - \Gamma'_0(x_0, y_0, z_0)] \\ \quad = \displaystyle\int_S \left(\Gamma \frac{\partial \Gamma'}{\partial N_i} - \Gamma' \frac{\partial \Gamma}{\partial N_i}\right) dS + \int_S \left(\Gamma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial N_i} - \Gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_i}\right) dS. \end{cases}$$

Les fonctions Γ et Γ' étant harmoniques à l'intérieur de l'es-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pace que limite la surface S, on a, d'après le théorème de Green,

$$\mathbf{S}_{\mathrm{S}}\left(\Gamma\frac{\partial\Gamma'}{\partial \mathrm{N}_i}-\Gamma'\frac{\partial\Gamma}{\partial \mathrm{N}_i}\right)d\mathrm{S}=0.$$

Ces fonctions Γ et Γ' se réduisant à $-\frac{1}{r}$ et $-\frac{1}{r'}$ sur la surface S, l'égalité (d) devient

$$(e)\qquad 4\pi[\Gamma(x'_0,y'_0,z'_0)-\Gamma'(x_0,y_0,z_0)]=\mathbf{S}_{\mathrm{S}}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial \mathrm{N}_i}\right)d\mathrm{S}.$$

Pour calculer le second membre, traçons deux surfaces sphériques, σ et σ', ayant respectivement pour centres les points M_0 et M'_0 et des rayons R et R' assez petits pour que ces sphères soient intérieures à la surface S et extérieures l'une à l'autre. Les deux fonctions $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ étant harmoniques dans l'espace compris entre les surfaces S, σ, σ', si l'on désigne par ν_i, ν'_i les normales aux éléments $d\sigma$, $d\sigma'$, vers l'intérieur de cet espace, l'identité de Green donnera

$$(f)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathbf{S}_{\mathrm{S}}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial \mathrm{N}_i}\right)d\mathrm{S}+\mathbf{S}_{\sigma}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial\nu_i}\right)d\sigma\\&\qquad+\mathbf{S}_{\sigma'}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu'_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial\nu'_i}\right)d\sigma'=0.\end{aligned}\right.$$

Ceci a lieu quels que soient les rayons R et R'. Faisons-les tendre vers o, et nous verrons aisément, par un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir l'identité (5), que nous aurons

$$\lim\left[\mathbf{S}_{\sigma}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial\nu_i}\right)d\sigma\right]_{\mathrm{R}=0}=-\frac{4\pi}{\mathrm{M}_0\mathrm{M}'_0},$$

$$\lim\left[\mathbf{S}_{\sigma'}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu'_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial\nu'_i}\right)d\sigma\right]_{\mathrm{R}'=0}=\frac{4\pi}{\mathrm{M}_0\mathrm{M}'_0}.$$

L'identité (f) devient donc

$$\mathbf{S}_{\mathrm{S}}\left(\frac{1}{r'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \mathrm{N}_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial \mathrm{N}_i}\right)d\mathrm{S}=0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ce résultat, reporté dans l'identité (*d*), fournit de suite l'identité (6 *bis*) que nous voulions démontrer.

L'identité (6) peut se traduire d'une autre manière.

Soit $\gamma(x, y, z, x', y', z')$ une fonction telle que

$$\gamma(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \Gamma(x, y, z),$$
$$\gamma(x, y, z, x'_0, y'_0, z'_0) = \Gamma'(x, y, z),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Posons ensuite

$$g(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}} + \gamma(x, y, z, x', y', z').$$

Il est aisé de voir que nous aurons

$$g(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = G(x, y, z),$$
$$g(x, y, z, x'_0, y'_0, z'_0) = G'(x, y, z),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et que, par conséquent, cette fonction g de six variables définit toutes les fonctions de Green qui ont leur pôle à l'intérieur de l'espace considéré.

L'identité (6) peut s'écrire

$$g(x'_0, y'_0, z'_0, x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0).$$

En d'autres termes, elle exprime que *la fonction g est symétrique en* x, y, z et x', y', z'.

§. 3 — Détermination de la fonction de Green dans quelques cas simples.

Le problème de Green étant rigoureusement équivalent au problème de Dirichlet, la solution de l'un n'est pas plus facile que celle de l'autre. Toutefois, le changement de forme imposé au problème permet, dans certains cas, d'en apercevoir immédiatement la solution. Nous allons en donner quelques exemples simples.

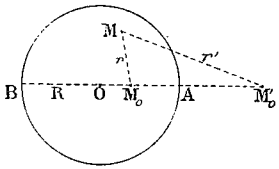
1° *La fonction de Green pour la sphère.*

Prenons une surface sphérique (*fig.* 26) et un pôle M_0 *intérieur* à la surface sphérique. Soit AB le diamètre qui passe par M_0. Sur ce diamètre prenons le point M'_0 conjugué harmonique

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du point M_0 par rapport à A, B. Soient r et r' les distances du point $M(x, y, z)$ aux points M_0, M'_0.

Fig. 26.



La sphère est, on le sait, le lieu des points M tels que

$$\frac{r}{r'} = \frac{R}{OM'_0},$$

R étant le rayon de la sphère.

Considérons donc la fonction

$$-\frac{OM'_0}{R}\frac{1}{r'}.$$

C'est une fonction des coordonnées x, y, z du point M, qui est harmonique en tout point intérieur à la sphère et qui, en tout point de la surface sphérique, prend la valeur $-\frac{1}{r}$. Elle représente donc la fonction que nous avons désignée par $\Gamma(x, y, z)$. La fonction de Green, pour le cas où le pôle M_0 est intérieur à la sphère, a pour valeur

$$G_i(x, y, z) = \frac{1}{r} - \frac{OM'_0}{R}\frac{1}{r'}. \tag{7}$$

Supposons maintenant le pôle M_0 extérieur à la sphère et soit M'_0 son conjugué harmonique par rapport aux points AB. Nous aurons encore en tout point de la sphère

$$\frac{r}{r'} = \frac{R}{OM'_0},$$

et la fonction de Green sera encore donnée par la formule (7).

La fonction de Green étant connue en toute circonstance pour la sphère, on saura résoudre le problème de Dirichlet aussi bien

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

pour l'espace extérieur à la sphère que pour l'espace intérieur.

La solution du problème de Lejeune-Dirichlet pour la sphère a été en effet donnée à l'origine de la Physique mathématique, par les travaux de Legendre et de Laplace (1).

Prenons, pour représenter la position d'un point dans l'espace, les coordonnées géographiques r, θ, φ. Lorsque l'on se donne la valeur de la fonction V sur la surface et que cette fonction est harmonique à l'intérieur de la sphère, elle s'exprime à l'intérieur de la sphère par une série de la forme

$$V = Y_0 + rY_1 + r^2Y_2 + \ldots + r^nY_n + \ldots.$$

Lorsqu'elle est harmonique à l'extérieur de la sphère, elle s'exprime dans l'espace extérieur à la sphère par une série de la forme

$$V = \frac{Y_0}{r} + \frac{Y_1}{r^2} + \frac{Y_2}{r^3} + \ldots + \frac{Y_n}{r^{n+1}} + \ldots,$$

Y_n étant une fonction homogène et de degré n des quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, renfermant $(2n+1)$ coefficients que déterminent les valeurs de V à la surface de la sphère.

Nous ne faisons qu'indiquer brièvement ce résultat sans insister sur les importantes propriétés des *fonctions* Y_n *de Laplace* (2) ou *fonctions sphériques,* fonctions qui ont joué un grand rôle dans les recherches de Laplace sur la Mécanique céleste et dans

---

(1) Cette forme de développement, obtenue par Laplace, est une conséquence très particulière de la proposition suivante :

Toute fonction V, *harmonique à l'intérieur d'un espace connexe, peut, d'une infinité de manières, à l'intérieur de cet espace, se mettre sous la forme*

$$V = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots,$$

P_n *étant un polynôme de degré n en* x, y, z, *satisfaisant à l'équation*

$$\Delta P_n = 0.$$

Ce beau théorème est dû à M. Paul Painlevé [Paul Painlevé, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, p. B.112; 1888)]. Dans le cas du développement en fonctions de Laplace, le polynôme P_n est *homogène* en x, y, z.

(2) V. Heine, *Handbuch der Kugelfunktionen.* 2e édition; Berlin, 1878.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

es travaux de Physique mathématique de Poisson, de Gauss, de Neumann, etc.

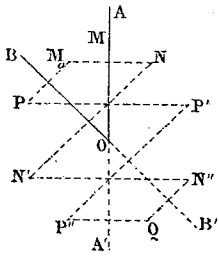
2° *La fonction de Green pour l'espace compris entre deux plans qui se coupent sous un angle commensurable avec* π.

La fonction de Green se trouve aisément pour l'espace intérieur à un dièdre commensurable avec π.

Prenons, par exemple, le cas du dièdre égal à $\frac{\pi}{4}$; on verra aisément que ce que nous allons en dire s'étend au cas général.

Soit AOB l'angle plan du dièdre (*fig.* 27) et M_0 le pôle.

Fig. 27.



Remplaçons les deux plans OA, OB par deux miroirs, et M_0 par un point lumineux. Soient

$$\begin{matrix} N, & N', & N'', & Q, \\ P, & P', & P'', & Q \end{matrix}$$

les deux suites d'images fournies par le point M_0.

Soit M un point variable.

Si le point M vient se placer sur le plan OA, on aura

$$\frac{1}{MM_0} - \frac{1}{MN} = 0,$$

$$\frac{1}{MP} - \frac{1}{MP'} = 0,$$

$$\frac{1}{MN'} - \frac{1}{MN''} = 0,$$

$$\frac{1}{MP''} - \frac{1}{MQ} = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

S'il vient se placer sur le plan OB, on aura

$$\frac{1}{MM_0} - \frac{1}{MP} = 0,$$

$$\frac{1}{MN} - \frac{1}{MN'} = 0,$$

$$\frac{1}{MP'} - \frac{1}{MP''} = 0,$$

$$\frac{1}{MN''} - \frac{1}{MQ} = 0.$$

L'expression

$$\frac{1}{MM_0} - \left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP}\right) + \left(\frac{1}{MP'} + \frac{1}{MN'}\right) - \left(\frac{1}{MN''} + \frac{1}{MP''}\right) + \frac{1}{MQ}$$

dont la loi de formation est bien facile à généraliser, est égale à 0 en tout point des deux plans OA, OB.

On voit donc qu'en tout point de la surface qui limite le dièdre la fonction

$$-\left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP}\right) + \left(\frac{1}{MP'} + \frac{1}{MN'}\right) - \left(\frac{1}{MN''} + \frac{1}{MP''}\right) + \frac{1}{MQ}$$

est égale à $\frac{1}{r}$; elle est d'ailleurs harmonique à l'intérieur du dièdre, et, à l'infini, se comporte comme une fonction potentielle. Elle représente donc la fonction $\Gamma(x, y, z)$ et la fonction de Green est représentée par

$$(8)\quad \begin{cases} G(x,y,z) = \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP}\right) \\ \qquad\qquad + \left(\frac{1}{MP'} + \frac{1}{MN'}\right) - \left(\frac{1}{MN''} + \frac{1}{MP''}\right) + \frac{1}{MQ}. \end{cases}$$

3° *La fonction de Green pour l'espace compris entre deux plans parallèles.*

Soient AA', BB' (*fig.* 28) les deux plans parallèles entre lesquels se trouve le point M_0. Remplaçons ces plans par deux miroirs et le point M_0 par un point lumineux. Soient α_1, β_1 les images du point M_0 par rapport aux miroirs AA', BB'; soient α_2, α_3, ... les images successives du point α_1 et β_2, β_3, ... les images successives du point β_1. Considérons la série

$$\frac{1}{MM_0} - \left(\frac{1}{M\alpha_1} + \frac{1}{M\beta_1}\right) + \left(\frac{1}{M\alpha_2} + \frac{1}{M\beta_2}\right) - \left(\frac{1}{M\alpha_3} + \frac{1}{M\beta_3}\right) + \dots$$

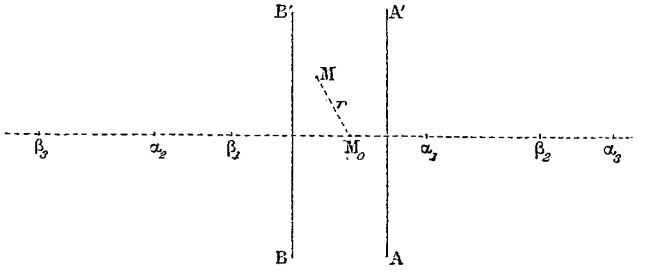
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette série à termes alternés dont le terme général tend vers o est absolument convergente. On peut l'écrire

$$\frac{1}{MM_0} - \frac{1}{M\alpha_1} - \frac{1}{M\beta_1} + \frac{1}{M\alpha_2} + \frac{1}{M\beta_2} - \frac{1}{M\alpha_3} - \dots,$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est égale à o lorsque le point M

Fig. 28.



se trouve sur le plan AA'. On peut aussi l'écrire

$$\frac{1}{MM_0} - \frac{1}{M\beta_1} - \frac{1}{M\alpha_1} + \frac{1}{M\alpha_2} + \frac{1}{M\beta_2} - \frac{1}{M\beta_3} - \dots,$$

et, sous cette forme, on voit qu'elle est égale à o lorsque le point M se trouve sur le plan BB'.

La quantité

$$-\left(\frac{1}{M\alpha_1} + \frac{1}{M\beta_1}\right) + \left(\frac{1}{M\alpha_2} + \frac{1}{M\beta_2}\right) - \left(\frac{1}{M\alpha_3} + \frac{1}{M\beta_3}\right) + \dots,$$

qui est uniformément convergente et harmonique en tout point de l'espace compris entre les deux plans, qui se comporte à l'infini comme une fonction potentielle, est égale à $-\frac{1}{r}$ sur chacun des deux plans. C'est donc la fonction $\Gamma(x, y, z)$ et la fonction de Green a pour valeur

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} G(x,y,z) = \frac{1}{r} &- \left(\frac{1}{M\alpha_1} + \frac{1}{M\beta_1}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{M\alpha_2} + \frac{1}{M\beta_2}\right) - \left(\frac{1}{M\alpha_3} + \frac{1}{M\beta_3}\right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VII.

TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION $\Delta V = 0$ EN COORDONNÉES ORTHOGONALES QUELCONQUES.—DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE SUR UN ELLIPSOIDE.

§ 1. — Transformation de l'équation $\Delta V = 0$ en coordonnées orthogonales quelconques.

Nous venons de voir comment, dans certains cas, on pouvait apercevoir, *a priori*, la forme de la fonction de Green, et, par conséquent, résoudre le problème de Dirichlet. Mais ce sont là des cas exceptionnels.

Une puissante méthode pour la recherche de la solution du problème de Dirichlet dans un certain nombre de cas consiste à remplacer les coordonnées cartésiennes rectangulaires qui servent à définir un point dans l'espace que l'on considère par des coordonnées curvilignes orthogonales convenablement choisies. L'équation aux dérivées partielles

$$\Delta V = 0$$

se transforme alors en une autre équation aux dérivées partielles dont l'intégration peut se laisser découvrir beaucoup plus aisément.

Cette méthode a été créée par Lamé (1) qui en a fait grand usage dans ses travaux (2) et en a tiré de magnifiques résultats. Après Lamé, on doit citer Jacobi (3) au premier rang de ceux qui ont traité d'une semblable transformation en général.

Soient u, v, w les coordonnées curvilignes d'un point ayant pour coordonnées cartésiennes x, y, z. Le changement de coor-

(1) LAMÉ, *Mémoire sur les surfaces isothermes...* (*Journal de Liouville*, t. II, p. 147; 1837).

(2) *Voir*, particulièrement, LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications;* Paris, 1839.

(3) JACOBI, *Ueber eine particulare Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\Delta V = 0$ (*Crelle's Journal*, Bd XXXVI, p. 113).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

données est défini par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = f_1(u, v, w), \\ z = f_2(u, v, w), \end{cases}$$

qui donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial x}{\partial w}\,dw, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial y}{\partial w}\,dw, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial z}{\partial w}\,dw, \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(3)\qquad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + 2\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\,\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\dfrac{\partial z}{\partial w}\right) dv\,dw \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

Soient

$$\mathrm{M}\begin{cases} (x, y, z), \\ (u, v, w) \end{cases}$$

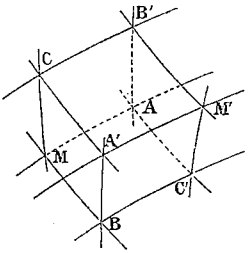
et

$$\mathrm{M}'\begin{cases} (x + dx, y + dy, z + dz), \\ (u + du, v + dv, w + dw) \end{cases}$$

deux points infiniment voisins.

La droite MM′ est la diagonale d'un parallélépipède (*fig.* 29)

Fig. 29.



dont les sommets autres que M et M′ ont pour coordonnées cur-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vilignes,

$$\begin{aligned} &A(u+du,\ v,\ w), \quad A'(u,\ v+dv,\ w+dw),\\ &B(u,\ v+dv,\ w), \quad B'(u+du,\ v,\ w+dw)\\ &C(u,\ v,\ w+dw), \quad C'(u+du,\ v+dv,\ w). \end{aligned}$$

Les longueurs des arêtes de ce parallélépipède sont données par les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} \overline{MA}^2 = \left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2,\\ \overline{MB}^2 = \left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2,\\ \overline{MC}^2 = \left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)^2\right] dw^2. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$(5)\qquad \overline{MM'}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Si les coordonnées curvilignes considérées sont *orthogonales,* le petit parallélépipède considéré doit être un parallélépipède rectangle. On doit donc avoir

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2;$$

et cela quels que soient du, dv, dw. Si l'on rapproche ce résultat des égalités (3), (4) et (5), on voit que, *pour que le système de coordonnées curvilignes soit orthogonal, il faut que l'on ait les relations*

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial w} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial w} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial w} = 0,\\ \dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0,\\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que, réciproquement, *si ces relations* (6) *sont vérifiées, le système de coordonnées curvilignes est orthogonal.*

Posons en effet, suivant la notation de Lamé,

$$(7)\qquad \begin{cases} H^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ H_1^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\\ H_2^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)^2. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'égalité (3) deviendra

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2\,du^2 + H_1^2\,dv^2 + H_2^2\,dw^2. \tag{8}$$

Convenons que les quantités H, H_1, H_2 définies par les égalités (7) sont essentiellement positives, et écrivons les égalités (2) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{1}{H}\frac{\partial x}{\partial u} H\,du + \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial v} H_1\,dv + \frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial w} H_2\,dw,\\ dy &= \frac{1}{H}\frac{\partial y}{\partial u} H\,du + \frac{1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial v} H_1\,dv + \frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial w} H_2\,dw,\\ dz &= \frac{1}{H}\frac{\partial z}{\partial u} H\,du + \frac{1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial v} H_1\,dv + \frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial w} H_2\,dw. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Dans ces égalités (9), les coefficients de $H\,du$, $H_1\,dv$, $H_2\,dw$, vérifient, comme le montrent les égalités (6) et (7), les mêmes relations que les coefficients d'un changement de coordonnées rectilignes et rectangulaires. $H\,du$, $H_1\,dv$, $H_2\,dw$ sont donc les coordonnées du point qui avait pour coordonnées dans le premier système d'axes dx, dy, dz, ce point étant rapporté à un nouveau système qui a pour origine le point (x, y, z) et dont les axes sont définis :

Le premier par $dv = 0$, $dw = 0$;

Le second par $dw = 0$, $du = 0$;

Le troisième par $du = 0$, $dv = 0$.

Le premier est tangent en (x, y, z) à l'intersection des surfaces

$$v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.}$$

Le second est tangent en (x, y, z) à l'intersection des surfaces

$$w = \text{const.}, \qquad u = \text{const.}$$

Le troisième est tangent en (x, y, z) à l'intersection des surfaces

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}$$

Les trois surfaces

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}, \qquad w = \text{const.},$$

qui passent par le point (x, y, z), se coupent donc orthogonalement comme nous l'avions annoncé.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La transformation représentée par les égalités (9) peut encore s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\ du &= \mathrm{H}\ \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \mathrm{H}\ \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \mathrm{H}\ \frac{\partial u}{\partial z}\,dz, \\ \mathrm{H}_1\,dv &= \mathrm{H}_1\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \mathrm{H}_1\frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \mathrm{H}_1\frac{\partial v}{\partial z}\,dz, \\ \mathrm{H}_2\,dw &= \mathrm{H}_2\frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \mathrm{H}_2\frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \mathrm{H}_2\frac{\partial w}{\partial z}\,dz; \end{aligned}$$

les coefficients de cette nouvelle transformation doivent encore vérifier les mêmes relations que les coefficients d'un changement d'axes rectilignes et rectangulaires, en sorte qu'au lieu des relations (6) et (7), on peut écrire les relations

(6 *bis*)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

(7 *bis*)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{H}^2} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \\ \dfrac{1}{\mathrm{H}_1^2} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2, \\ \dfrac{1}{\mathrm{H}_2^2} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \end{cases}$$

Appliquons ces propriétés de la transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées curvilignes orthogonales à la recherche de la forme que prend l'équation

$$\Delta \mathrm{V} = 0$$

dans le nouveau système de coordonnées.

Pour qu'en tout point d'un espace où la fonction V est régulière, on ait

$$\Delta \mathrm{V} = 0,$$

il faut et il suffit que l'intégrale

$$\mathrm{S}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{N}_i}\,d\mathrm{S},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

étendue à la surface qui limite un élément de volume quelconque de cet espace soit égale à 0.

Écrivons donc l'égalité

$$\mathrm{S} \frac{\partial V}{\partial N_i} dS = 0$$

pour le parallélépipède rectangle MABCA'B'C'M'.

L'élément superficiel MBA'C a pour aire

$$MBA'C' = MB \times MC = H_1 H_2 \, dv \, dw.$$

Pour ce même élément, la direction N_i coïncide avec MA. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = \frac{V(A) - V(M)}{MA}.$$

D'ailleurs,

$$V(A) - V(M) = \frac{\partial V}{\partial u} du,$$

$$MA = H \, du.$$

On a donc, pour l'élément MBA'C,

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} dS = \frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial V}{\partial u} du \, dw.$$

Pour l'élément M'B'AC', on aura

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} dS = -\left[\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial V}{\partial u}\right) du\right] dv \, dw.$$

Ces deux éléments fourniront donc à la somme considérée le terme

$$-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial V}{\partial u}\right) du \, dv \, dw.$$

On trouvera ainsi l'égalité

$$\mathrm{S} \frac{\partial V}{\partial N_i} dS = -\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_2 H}{H_1} \frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] du \, dv \, dw.$$

Pour que ΔV soit égal à 0 en tous les points de l'espace considéré, il faut et il suffit que l'on ait, en tous les points de cet espace,

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_2 H}{H_1} \frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0.$$

Si l'on a eu soin d'exprimer H, H_1, H_2 en fonction de u, v, w,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cette équation devient une relation entre les dérivées premières du premier et du second ordre de V par rapport à u, v, w, équivalente, dans le nouveau système de coordonnées orthogonales, à l'équation $\Delta V = 0$ dans l'ancien.

Cela étant, supposons que l'on veuille trouver une fonction harmonique dans l'espace limité par la surface S que représente l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

et prenant sur cette surface les mêmes valeurs que la fonction

$$f(x, y, z) = 0.$$

On remplace x, y, z par des coordonnées curvilignes orthogonales u, v, w. La surface S est, dans ce nouveau système de coordonnées, représentée par l'équation

$$\Phi(u, v, w) = 0.$$

Si l'on remplace x, y, z par leurs expressions en u, v, w, la fonction $f(x, y, z)$ se transforme en une fonction $\varphi(u, v, w)$.

Si l'on sait trouver une fonction de u, v, w qui vérifie l'équation (10) dans l'espace limité par la surface

$$\Phi(u, v, w) = 0,$$

et qui, sur cette surface, prenne les mêmes valeurs que la fonction $\varphi(u, v, w)$, il suffira, dans cette fonction, de remplacer u, v, w par leurs expressions en fonction de x, y, z, pour obtenir la fonction cherchée.

Nous avons dit que cette transformation du problème de Dirichlet s'était montrée extrêmement féconde en résultats.

§ 2. — Transformation de l'équation $\Delta V = 0$ en coordonnées géographiques et en coordonnées elliptiques.

Nous allons, à titre d'exemples, appliquer ce que nous venons de dire à la transformation de l'équation $\Delta V = 0$ en deux systèmes particuliers de coordonnées orthogonales.

Considérons d'abord les *coordonnées géographiques* ρ, θ, φ. Les formules de transformation sont

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ z &= \rho \sin\theta \sin\varphi. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a alors

$$H^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = 1,$$

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \rho^2,$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \rho^2 \sin^2\theta.$$

L'équation (10) devient donc

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \sin\theta \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0,$$

ou bien, en posant

$$\cos\theta = \mu,$$

$$(11\ bis) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Cette équation, transformée de l'équation $\Delta V = 0$, est due à Laplace; c'est même sous cette forme que Laplace [1] a fait tout d'abord connaître l'équation qui porte son nom. Cette équation est le fondement de toute la théorie des fonctions de Laplace, qui permettent, par des développements en série, de résoudre le problème de Dirichlet pour chacun des deux espaces limités par une surface sphérique.

Considérons maintenant le cas des *coordonnées elliptiques*.

Les fonctions u, v, w sont, dans ce cas, les trois racines de l'équation

$$(12) \qquad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} - 1 = 0,$$

que nous avons déjà considérée [Livre I, Chap. VI, § 2].

Nous savons que cette équation a trois racines réelles, séparant les quantités

$$-\infty, \quad -b^2, \quad a^2, \quad +\infty.$$

Nous prendrons :

Pour u la racine comprise entre $+a^2$ et $+\infty$;
Pour w la racine comprise entre $-b^2$ et a^2,, qui est négative;
Pour v la racine comprise entre $-\infty$ et $-b^2$.

---

[1] LAPLACE, *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences pour* 1782; Paris, 1785).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les surfaces $u =$ const. sont des ellipsoïdes;
Les surfaces $v =$ const. sont des hyperboloïdes à une nappe;
Les surfaces $w =$ const. sont des hyperboloïdes à deux nappes.

Toutes ces surfaces ont même centre, mêmes directions d'axes et mêmes foyers; on sait qu'elles forment trois familles de surfaces orthogonales.

Proposons-nous de calculer, pour un pareil système, les coefficients de Lamé H, H_1, H_2.

Différentions l'équation (12) par rapport à x, en y remplaçant successivement λ par u, v, w. Nous aurons

$$\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{u^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2+u},$$
$$\left[\frac{x^2}{(a^2+v)^2}+\frac{y^2}{(b^2+v)^2}+\frac{z^2}{v^2}\right]\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2x}{a^2+v},$$
$$\left[\frac{x^2}{(a^2+w)^2}+\frac{y^2}{(b^2+w)^2}+\frac{z^2}{w^2}\right]\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2x}{a^2+w}.$$

La différentiation par rapport à y ou par rapport à z fournit deux groupes de relations analogues. De ces relations, on déduit aisément

$$\frac{1}{H^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+u)^2}+\dfrac{z^2}{u^2}},$$
$$\frac{1}{H_1^2}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{\dfrac{x^2}{(a^2+v)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+v)^2}+\dfrac{z^2}{v^2}},$$
$$\frac{1}{H_2^2}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{\dfrac{x^2}{(a^2+w)^2}+\dfrac{z^2}{(b^2+w)^2}+\dfrac{z^2}{w^2}}.$$

Ces expressions de H, H_1, H_2 renferment à la fois les variables u, v, w et les variables x, y, z, tandis qu'il nous faut obtenir les expressions de H, H_1, H_2 en fonction des seules quantités u, v, w.

Remarquons, à cet effet, que l'on peut écrire

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}-1=\frac{(u-\lambda)(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\lambda};$$

prenons la dérivée de cette expression par rapport à λ et faisons

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$\lambda = u$; nous aurons

$$\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{u^2} = \frac{(v-u)(w-u)}{(a^2+u)(b^2+u)u}. \tag{13}$$

La première des égalités précédentes devient alors la première des égalités

$$\begin{cases} H^2 = \dfrac{(v-u)(w-u)}{4u(a^2+u)(b^2+u)}, \\ H_1^2 = \dfrac{(w-v)(u-v)}{4v(a^2+v)(b^2+v)}, \\ H_2^2 = \dfrac{(u-w)(v-w)}{4w(a^2+w)(b^2+w)}. \end{cases} \tag{14}$$

On aura donc

$$\begin{cases} \left(\dfrac{H_1 H_2}{H}\right)^2 = -\dfrac{(v-w)^2}{4} \dfrac{u(a^2+u)(b^2+u)}{v(a^2+v)(b^2+v)w(a^2+w)(b^2+w)}, \\ \left(\dfrac{H_2 H}{H_1}\right)^2 = -\dfrac{(w-u)^2}{4} \dfrac{v(a^2+v)(b^2+v)}{w(a^2+w)(b^2+w)u(a^2+u)(b^2+u)}, \\ \left(\dfrac{H H_1}{H_2}\right)^2 = -\dfrac{(u-v)^2}{4} \dfrac{w(a^2+w)(b^2+w)}{u(a^2+u)(b^2+u)v(a^2+v)(b^2+v)}. \end{cases} \tag{15}$$

Ces valeurs de $\frac{H_1 H_2}{H}$, $\frac{H_2 H}{H_1}$, $\frac{H H_1}{H_2}$, reportées dans l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_2 H}{H_1}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0, \tag{10}$$

donnent la transformée de l'équation

$$\Delta V = 0$$

en coordonnées elliptiques.

§ 3. — Distribution électrique sur un ellipsoïde soustrait à toute influence.

La transformation que nous venons d'indiquer va nous permettre de déterminer bien aisément la distribution d'une certaine charge électrique sur un ellipsoïde isolé et soustrait à toute influence.

Imaginons que l'équation de cet ellipsoïde soit, en coordonnées cartésiennes,

$$\frac{x^2}{a^2+c^2} + \frac{y^2}{b^2+c^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{16}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou, en coordonnées elliptiques,

(16 *bis*) $$u = c^2.$$

Imaginons que nous trouvions une fonction de la seule variable u, finie, continue et uniforme en tout point extérieur à l'ellipsoïde, égale à 0 à l'infini, et vérifiant, en tout point intérieur à l'ellipsoïde, l'équation (10). Cette fonction, ne dépendant que de u, prendra une certaine valeur constante sur l'ellipsoïde, et, par conséquent, sera la fonction potentielle d'une certaine quantité d'électricité distribuée à la surface de l'ellipsoïde soustrait à toute influence.

Or, lorsque la fonction V ne dépend que de la variable u, l'équation (10) se ramène à la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H}\frac{dV}{du}\right) = 0,$$

ou bien, en vertu de la première des égalités (15),

$$\sqrt{u(a^2+u)(b^2+u)}\,\frac{dV}{du} = -C,$$

C étant une certaine constante dont la valeur est liée à la quantité d'électricité distribuée sur l'ellipsoïde, et le radical étant pris en valeur absolue. Comme V doit être égal à 0 à l'infini, on aura

(17) $$V = C\int_u^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u(a^2+u)(b^2+u)}}.$$

Telle est la valeur de V au point de coordonnées (u, ρ, ω) extérieur à l'ellipsoïde.

La valeur de la fonction potentielle en tout point de la surface ou de l'intérieur de l'ellipsoïde s'obtient en donnant à u, dans cette expression, la valeur c^2 qui correspond aux points de la surface de l'ellipsoïde. Si nous désignons par A cette valeur de la fonction potentielle, nous aurons

(18) $$A = C\int_{c^2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u(a^2+u)(b^2+u)}}.$$

La densité électrique superficielle σ s'obtiendra par la formule

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La direction N_e de la normale extérieure à l'ellipsoïde est la direction de la tangente à la ligne $\rho = \text{const.}$, $\varpi = \text{const.}$, dans le sens où la quantité u va en croissant. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial N_e} = \frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial u},$$

u ayant la valeur c^2, et, par conséquent,

$$(19) \qquad \sigma = \frac{C}{2\pi}\frac{1}{\displaystyle\int_{c^2}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{u(a^2+u)(b^2+u)}}}\frac{1}{\sqrt{(c^2-\rho)(c^2-\varpi)}}.$$

Cette densité peut s'exprimer en coordonnées cartésiennes. Si nous faisons $u = c^2$ dans l'égalité (13), nous trouvons

$$(c^2-\rho)(c^2-\varpi) = c^2(a^2+c^2)(b^2+c^2)\left[\frac{x^2}{(a^2+c^2)^2}+\frac{y^2}{(b^2+c^2)^2}+\frac{z^2}{c^4}\right],$$

et l'égalité (19) devient

$$(9\,bis) \quad \sigma = \frac{C}{2\pi}\frac{1}{\displaystyle\int_{c^2}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{u(a^2+u)(b^2+u)}}}\frac{1}{\sqrt{c^2(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\sqrt{\dfrac{x^2}{(a^2+c^2)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+c^2)^2}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

Cette formule est susceptible d'une interprétation intéressante. Le plan tangent au point x, y, z à l'ellipsoïde est représenté par l'équation

$$\frac{xX}{a^2+c^2}+\frac{yY}{b^2+c^2}+\frac{zZ}{c^2}-1=0,$$

et la distance du centre à ce plan tangent par

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{(a^2+c^2)^2}+\dfrac{y^2}{(b^2+c^2)^2}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

La formule (19 *bis*) met donc en évidence ce théorème fondamental.

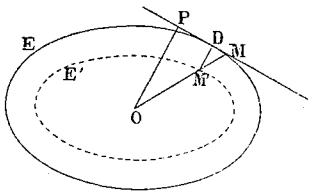
Lorsque l'électricité est distribuée en équilibre à la surface d'un ellipsoïde isolé et soustrait à toute influence, la densité superficielle est, en chaque point, proportionnelle à la distance du centre au plan tangent en ce point.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On peut encore donner de la formule (19 *bis*) une autre interprétation.

Considérons l'ellipsoïde E (*fig.* 30) et un second ellipsoïde E′,

Fig. 30.



infiniment voisin de l'ellipsoïde E, concentrique et homothétique à l'ellipsoïde E. Soit k le rapport d'homothétie.

Soit M un point de l'ellipsoïde E ; soit OP la distance du centre O au plan tangent en M à l'ellipsoïde E′.

Le rayon vecteur OM rencontre l'ellipsoïde E′ en un point M′ dont M′D est la distance au plan tangent considéré. On a évidemment

$$\frac{M'D}{OP} = \frac{1-k}{k}.$$

Mais M′D ne diffère que par un infiniment petit d'ordre supérieur de l'épaisseur e au point M de la couche comprise entre les deux ellipsoïdes E et E′. Il y a donc proportionnalité entre e et OP, et l'on peut dire que

Lorsque l'électricité est distribuée en équilibre à la surface d'un ellipsoïde isolé et soustrait à toute influence, la densité superficielle est en chaque point proportionnelle à l'épaisseur de la couche comprise entre cet ellipsoïde et un ellipsoïde concentrique, homothétique, infiniment voisin.

Sous cette forme, ce théorème était connu de Poisson (¹).

(¹) Poisson, *Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène*, lu à l'Académie le 7 octobre 1833 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XIII, p. 497; 1835).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Revenons maintenant à la formule générale

$$V = C \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{u(a^2+u)(b^2+u)}}, \tag{17}$$

et proposons-nous de trouver la relation qui existe entre la constante C et la charge électrique totale Q distribuée sur l'ellipsoïde.

Nous y parviendrons bien simplement par la remarque suivante. Posons

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et nous pourrons évidemment écrire

$$V = \frac{Q}{R} + \frac{\alpha}{R^2},$$

α demeurant fini lorsque R croît au delà de toute limite.

Considérons l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{u} = 1,$$

et faisons croître u au delà de toute limite, nous verrons sans peine que

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{u}$$

tend vers 1 lorsque u et R croissent au delà de toute limite, en sorte que l'on pourra écrire

$$V = \frac{Q}{\sqrt{u}} + \frac{\beta}{u},$$

β demeurant fini lorsque u croît au delà de toute limite.

D'autre part, on peut écrire l'égalité (17) sous la forme

$$V = C \int_u^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{\beta'}{u} = -\frac{2C}{\sqrt{u}} + \frac{\beta'}{u},$$

β' demeurant fini lorsque u croît au delà de toute limite. En identifiant ces deux expressions de V, on trouve la relation

$$Q = -2C, \tag{20}$$

qui détermine la constante C lorsque l'on connaît la charge totale Q de l'ellipsoïde.

Cette relation nous permet de déterminer la *capacité* K de l'el-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lipsoïde, c'est-à-dire la charge totale qu'il faut distribuer sur cet ellipsoïde pour lui donner le niveau potentiel $\frac{1}{\varepsilon}$. Dans ce cas, en effet, la relation (18) donne

$$\frac{1}{\varepsilon} = C \int_{c^2}^{\infty} \frac{du}{[u(a^2+u)(b^2+u)]^{\frac{1}{2}}},$$

et la relation (20) donne

$$K = 2C.$$

Ces égalités, combinées entre elles, donnent

$$K = \frac{2}{\varepsilon \int_{c^2}^{\infty} \frac{du}{[u(a^2+u)(b^2+u)]^{\frac{1}{2}}}}. \tag{21}$$

§ 4. — Cas particuliers.

La fonction potentielle de l'électricité répandue sur un ellipsoïde s'exprime, d'après l'égalité (17), par une intégrale elliptique de seconde espèce. Il existe deux cas où cette intégrale se ramène aux fonctions inverses des exponentielles. Ces deux cas sont :

1° Le cas où l'on a $c = b$. L'ellipsoïde est alors un ellipsoïde de révolution allongé.

2° Le cas où l'on a $a = c$. L'ellipsoïde est alors un ellipsoïde de révolution aplati.

1° *Ellipsoïde de révolution allongé.*

La formule (17) donne

$$V = \frac{Q}{2} \int_u^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{a^2+u}} = \frac{Q}{2a} \log \frac{\sqrt{a^2+u}+a}{\sqrt{a^2+u}-a}. \tag{22}$$

La capacité de l'ellipsoïde sera

$$K = \frac{2a}{\varepsilon \log \frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{\sqrt{a^2+c^2}-a}}. \tag{23}$$

2° *Ellipsoïde de révolution aplati.*

La formule (17) donne ici

$$V = \frac{Q}{2} \int_u^{\infty} \frac{du}{(a^2+u)\sqrt{u}}.$$

Posons $u = \xi^2$, et nous ramènerons de suite cette intégrale à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une forme qui s'intègre immédiatement; nous trouverons

$$V = Q\left[\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{u}}{a}\right]. \tag{24}$$

La capacité de l'ellipsoïde a pour valeur

$$K = \frac{1}{\varepsilon\left[\frac{\pi}{2a} - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{a}\right]}. \tag{25}$$

Si σ est la densité électrique en un point, cette densité est donnée par l'égalité (19), qui devient

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{4\pi Q}{\varepsilon K}\sqrt{(x^2+y^2)c^2 + \frac{z^2}{c^2}(a^2+c^2)^2}. \tag{26}$$

3° *Cercle plan.*

Si, dans les formules précédentes, on fait $c = 0$, on obtient les formules qui se rapportent à un cercle plan de rayon a. Dans ce cas, $\frac{z^2}{c^2}$ doit être remplacé par $1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}$, et l'on trouve

$$V = \frac{Q}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{u}}{a}\right], \tag{27}$$

$$K = \frac{2a}{\varepsilon\pi}, \tag{28}$$

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{2\pi^2}{\varepsilon a} Q\sqrt{a^2 - (x^2+y^2)}. \tag{29}$$

D'après l'égalité (29), la densité σ est infinie au bord du plateau. Aussi ce cas est-il purement théorique; mais, à ce point de vue théorique, nous verrons au prochain Chapitre qu'il présente un grand intérêt.

§ 5. — Solution géométrique du problème de la distribution sur un ellipsoïde isolé.

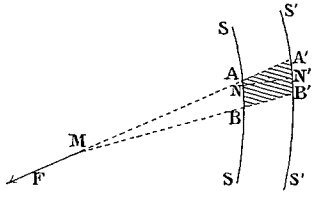
Nous avons vu que, lorsque l'équilibre électrique est établi sur un ellipsoïde soustrait à toute influence, la densité électrique superficielle est, en chaque point, proportionnelle à la distance du centre au plan tangent en ce point. Pour établir ce théorème, il n'est pas nécessaire d'avoir recours aux calculs précédents. Quelques considérations géométriques permettent de le déduire des premiers principes de l'Électrostatique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous allons tout d'abord démontrer un lemme fort simple.

Une couche très mince formée, d'une manière homogène, d'électricité dont la densité est ρ, se trouve comprise entre deux surfaces infiniment voisines S et S′ (*fig.* 31).

Fig. 31.



Du point M comme sommet, on mène un cône infiniment délié d'ouverture sphérique $d\omega$ et l'on se propose de trouver l'action F exercée au point M par l'électricité répandue dans le volume ABA′B′ que ce cône découpe dans la couche considérée.

Soit NN′ la normale à la surface S en un point de l'élément AB. Cette normale rencontre en N′ la surface S′. Le volume ABA′B′ a pour valeur

$$\frac{\overline{MA}^2 d\omega}{\cos(\widehat{MA, NN'})} NN'.$$

Il renferme une charge électrique

$$q = \rho \frac{\overline{MA}^2 d\omega}{\cos(\widehat{MA, NN'})} NN',$$

dont l'action au point M a pour valeur

$$F = \varepsilon \frac{q}{\overline{MA}^2}$$

ou bien

$$F = \varepsilon \rho AA' d\omega.$$

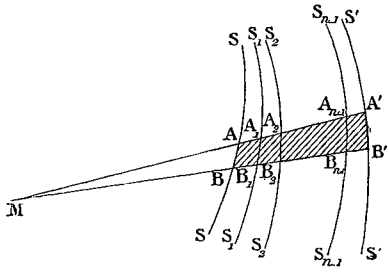
Cette remarquable expression s'étend immédiatement à l'action Φ exercée au point M par l'électricité répartie dans le volume ABA′B′ qu'un cône infiniment délié, d'ouverture $d\omega$, découpe dans une couche homogène, de densité ρ, d'épaisseur finie, comprise entre deux surfaces S et S′ (*fig.* 32).

En effet, par une série de surfaces S_1, S_2, ..., S_{n-1}, découpons

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

notre couche d'épaisseur finie en n couches infiniment minces. Notre cône infiniment délié découpe respectivement sur les surfaces S_1, S_2, ..., S_{n-1} des éléments A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$.

Fig. 32.



Le petit volume ABA_1B_1 exerce au point M une action

$$F_1 = \varepsilon\rho\, AA_1\, d\omega.$$

Le petit volume $A_1B_1A_2B_2$ exerce au point M une action

$$F_2 = \varepsilon\rho\, A_1A_2\, d\omega.$$

Il en est ainsi jusqu'au petit volume $A_{n-1}B_{n-1}A'B'$ qui exerce au point M une action

$$F_n = \varepsilon\rho\, A_{n-1}A'\, d\omega.$$

Toutes ces actions ayant sensiblement la même direction, leur résultante Φ est égale à leur somme et l'on a

$$\Phi = \varepsilon\rho(AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A')\, d\omega = \varepsilon\rho\, AA'\, d\omega.$$

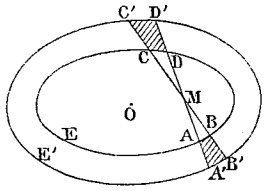
Si donc on remplit d'électricité avec la densité constante ρ *le volume qu'un cône infiniment délié découpe dans une couche quelconque, l'action que cette électricité exerce au sommet du cône est égale au produit de* $\varepsilon\rho$ *par l'ouverture sphérique du cône et par la longueur de génératrice comprise à l'intérieur de la couche.*

Ce lemme va nous servir à prouver que : *si l'on remplit d'électricité avec une densité constante* ρ *la couche comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques quelconques, cette couche exerce une action nulle en tout point situé à l'intérieur du plus petit des deux ellipsoïdes.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soient E le plus petit des deux ellipsoïdes (*fig.* 33) et E′ le plus grand. Prenons un point M à l'intérieur de l'ellipsoïde E. Menons de ce point les deux nappes d'un cône infiniment délié d'ouverture sphérique $d\omega$. L'une des nappes découpe sur la couche considérée un volume ABA′B′, et l'autre nappe un volume CDC′D′.

Fig. 33.



Les actions au point M de ces deux volumes sont directement opposées. Si nous démontrons qu'elles sont égales entre elles, nous aurons évidemment prouvé la proposition. Or ces deux actions ont respectivement pour valeur, d'après le lemme précédent,

$$\varepsilon\rho\,AA'\,d\omega, \quad \varepsilon\rho\,DD'\,d\omega.$$

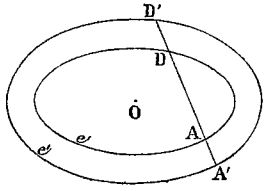
Il s'agit donc simplement de prouver que

$$AA' = DD'.$$

Par le centre commun O des deux ellipsoïdes E, E′, et la droite AD, menons un plan. Ce plan coupe les deux ellipsoïdes E, E′ suivant deux ellipses e, e', concentriques et homothétiques. La proposition à démontrer est donc ramenée à celle-ci :

Deux ellipses concentriques et homothétiques e, e' (*fig.* 34)

Fig. 34.

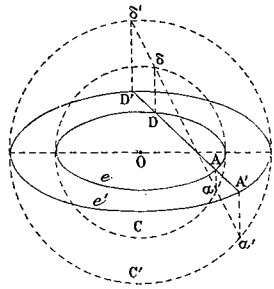


marquent sur une droite quelconque de leur plan deux segments AA′ DD′, *qui sont égaux entre eux.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette proposition est bien aisée à démontrer. Nos deux ellipses e, e' sont la projection orthogonale de deux cercles concentriques C, C' (*fig.* 35), et la droite A'ADD' est la projection de la droite

Fig. 35.

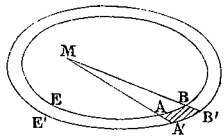


$\alpha'\alpha\delta\delta'$. Les deux segments $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$ étant égaux entre eux, il en est de même de leurs projections AA', DD'.

Si, en particulier, entre deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins on distribue de l'électricité avec une densité uniforme ρ, cette électricité n'exercera aucune action sur les points qu'enferme la couche infiniment mince qu'elle remplit.

Soit AB (*fig.* 36) un élément superficiel de l'ellipsoïde inté-

Fig. 36.



rieur E. Considérons le cône issu de M et circonscrit à AB. Il découpe dans la couche infiniment mince un élément de volume ABA'B'. Si δ désigne l'épaisseur normale de la couche au point A, cet élément aura pour volume AB.δ. Son action au point M sera une force dirigée de A vers M et ayant pour valeur

$$F = \varepsilon\rho \frac{AB.\delta}{\overline{AM}^2}.$$

Elle est égale à l'action qu'exercerait au point M de l'électricité

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

distribuée sur l'élément AB avec la densité superficielle

$$\sigma = \rho\delta.$$

Si l'on rapproche cette proposition de celle qui a été démontrée au sujet de l'action d'une couche comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques sur les points qu'elle enferme, on obtient le résultat suivant, auquel nous étions parvenu d'une autre manière :

Lorsque sur un ellipsoïde on distribue de l'électricité de telle manière que la densité superficielle en chaque point soit proportionnelle à la distance normale qui existe en ce point entre la surface de l'ellipsoïde et la surface d'un ellipsoïde concentrique, homothétique et infiniment voisin, on obtient une couche électrique en équilibre.

Nous verrons, plus tard, que cette proposition est susceptible d'être vérifiée expérimentalement.

§ 6. — Distribution électrique sur un ellipsoïde soumis à une influence quelconque.

Si la Géométrie suffit à étudier le problème de la distribution électrique sur un ellipsoïde soustrait à toute influence, elle ne saurait aborder le problème bien plus général de la distribution électrique sur un ellipsoïde soumis à des actions électriques quelconques. L'analyse, cependant, permet de résoudre complètement ce problème, et c'est l'un des beaux titres de gloire de Lamé (1) d'avoir donné cette solution, ou, en d'autres termes, d'avoir résolu le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace extérieur à un ellipsoïde.

Le problème qu'il s'agit de résoudre est le suivant :

Trouver une fonction V de u, v, w qui, pour $u = c^2$, se réduit à une fonction donnée Ω, et, pour toute valeur de u supérieure à c^2, est régulière et vérifie la condition

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_1 H_2}{H}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_2 H}{H_1}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0. \tag{10}$$

(1) LAMÉ, *Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* (*Journal de Liouville*, t. IV, p. 126; 1839).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Posons

$$\mathcal{R}(u) = u(a^2 + u)(b^2 + u).$$

Les égalités (15) nous donneront alors

$$\frac{H_1 H_2}{H} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mathcal{R}(u)}}{\sqrt{-\mathcal{R}(v)\mathcal{R}(w)}}(v - w),$$

$$\frac{H_2 H}{H_1} = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-\mathcal{R}(v)}}{\sqrt{\mathcal{R}(w)\mathcal{R}(u)}}(w - u),$$

$$\frac{H H_1}{H_2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\mathcal{R}(w)}}{\sqrt{-\mathcal{R}(u)\mathcal{R}(v)}}(u - v),$$

et l'égalité (10), transformée de $\Delta V = 0$ en coordonnées elliptiques, devient

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l} (v - w)\sqrt{\mathcal{R}(u)}\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\mathcal{R}(u)}\ \dfrac{\partial V}{\partial u}\right] \\ -(w - u)\sqrt{-\mathcal{R}(v)}\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{-\mathcal{R}(v)}\ \dfrac{\partial V}{\partial v}\right] \\ +(u - v)\sqrt{\mathcal{R}(w)}\ \dfrac{\partial}{\partial w}\left[\sqrt{\mathcal{R}(w)}\ \dfrac{\partial V}{\partial w}\right] = 0. \end{array}\right.$$

Soient

$\mathcal{U}$ une fonction de la seule variable u;
$\mathcal{V}$ une fonction de la seule variable v;
$\mathcal{W}$ une fonction de la seule variable w,

ces trois fonctions étant déterminées respectivement par les équations différentielles du second ordre

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}(u)}}{\mathcal{U}}\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\mathcal{R}(u)}\ \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial u}\right] = A + Bu, \\ -\dfrac{\sqrt{-\mathcal{R}(v)}}{\mathcal{V}}\ \dfrac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{-\mathcal{R}(v)}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial v}\right] = A + Bv, \\ \dfrac{\sqrt{\mathcal{R}(w)}}{\mathcal{W}}\ \dfrac{\partial}{\partial w}\left[\sqrt{\mathcal{R}(w)}\ \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial w}\right] = A + Bw, \end{array}\right.$$

dans lesquelles A et B sont deux constantes arbitraires.

Posons ensuite

$$(32)\qquad V = \mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{W}$$

et substituons cette expression dans l'égalité (30); celle-ci de-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

viendra

$$\mathfrak{O}\mathfrak{W}\mathfrak{V}[(A+Bu)(v-w)+(A+Bv)(w-u)+(A+Bw)(u-v)]=0.$$

Elle sera identiquement satisfaite.

Or, Lamé a montré que l'on pouvait intégrer les équations (31) par certains développements en série dont les coefficients peuvent en outre être déterminés de manière que la fonction V, obtenue par la combinaison (32), se réduise à Ω pour $u = c^2$. Le problème de Dirichlet se trouve donc ainsi résolu pour l'espace extérieur à l'ellipsoïde.

La voie féconde qui avait conduit Lamé à ce beau résultat, à savoir la transformation de l'équation $\Delta V = 0$ en coordonnées orthogonales, a permis à Lamé et à d'autres analystes de résoudre le problème de Dirichlet pour un grand nombre de cas, et notamment pour tout espace, limité ou illimité, qui confine seulement à une surface du second ordre (1).

(1) *Voyez* HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2e édition; Berlin, 1878-1881.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VIII.

LA MÉTHODE DE L'INVERSION.

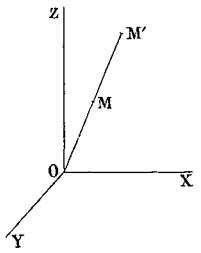
§ 1. — La méthode de l'inversion ou des images électriques.

On sait le rôle immense que jouent, dans la Géométrie moderne, les méthodes de transformation qui permettent, lorsqu'un problème est résolu pour une certaine figure, d'en déduire d'autres figures pour lesquelles on sache immédiatement résoudre le même problème ou des problèmes analogues.

Sir W. Thomson (1) a montré, et c'est assurément l'une des belles découvertes de ce grand géomètre, que, lorsqu'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour un certain espace, on peut former une infinité d'autres espaces pour lesquels on sait aussi résoudre immédiatement le problème de Dirichlet. La méthode de transformation qu'il a employée sous le nom de *méthode des images électriques* est connue également sous le nom de *transformation par inversion* ou de *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M d'un certain espace

Fig. 37.



et ρ sa distance à l'origine O (*fig.* 37). Faisons-lui correspondre

(1) *Extrait d'une lettre de M. William Thomson à M. Liouville* (*Journal de Liouville*, t. X, p. 364; 1845).—*Extrait de deux lettres adressées à M. Liouville par M. W. Thomson* (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 256; 1847). — Liou-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

un point $M'(x', y', z)$ d'un second espace par les formules suivantes

$$(1) \qquad x = \rho^2 \frac{x'}{k}, \qquad y = \rho^2 \frac{y'}{k}, \qquad z = \rho^2 \frac{z'}{k},$$

k étant un coefficient positif ou négatif.

Soit ρ' la distance OM'. Il est facile de déduire des formules (1) que le produit $\rho\rho'$ est égal en valeur absolue à k, et que le point M' se trouve sur la ligne OM, du même côté du point O que le point M si k est positif, et du côté opposé du point O si k est négatif. La transformation en question est réciproque, en ce qu'on peut écrire, au lieu des formules (1), les formules

$$(1\ bis) \qquad x' = \rho'^2 \frac{x}{k}, \qquad y' = \rho'^2 \frac{y}{k}, \qquad z' = \rho'^2 \frac{z}{k}.$$

On étudie, dans les cours élémentaires, quelques-unes des propriétés les plus simples de cette transformation.

On sait qu'un plan se transforme en une sphère en général, et en un plan dans le cas particulier où le pôle de transformation est sur le plan; une sphère se transforme en général en une autre sphère, qui est concentrique à la sphère donnée quand le pôle de transformation est le centre de la sphère donnée, et qui, lorsque le pôle est pris sur la sphère donnée, se réduit au plan tangent à la sphère donnée en ce point.

Cette transformation possède, au point de vue géométrique, une propriété fondamentale que nous allons tout d'abord mettre en évidence.

Soit MM_1 un élément linéaire du premier espace, joignant le point $M(x, y, z)$ au point $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$.

Il se transformera en un élément linéaire $M'M'_1$ du second espace, joignant le point $M'(x', y, z')$ au point $M'_1(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$. D'après les égalités (1), nous aurons

$$dx' = k\left(\frac{dx}{\rho^2} - \frac{2x\,d\rho}{\rho^3}\right),$$
$$dy' = k\left(\frac{dy}{\rho^2} - \frac{2y\,d\rho}{\rho^3}\right),$$
$$dz' = k\left(\frac{dz}{\rho^2} - \frac{2z\,d\rho}{\rho^3}\right),$$

VILLE, *Note au sujet de l'article précédent* (*ibid.*, p. 265). — Tous ces articles sont reproduits dans W. THOMSON, *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, Art. XIV

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui donne

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2=\frac{k^2}{\rho^4}\Big[dx'^2+dy'^2+dz'^2 - 4(x\,dx+y\,dy+z\,dz)\frac{d\rho}{\rho} + 4(x^2+y^2+z^2)(d\rho)^2\Big].$$

Mais on a

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2,$$
$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=\rho\,d\rho,$$

en sorte que l'égalité précédente se réduit à

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2=\frac{k^2}{\rho^4}(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{2}$$

ou

$$\overline{M'M'_1}^2=\frac{k^2}{\overline{OM}^4}\,\overline{MM_1}^2.$$

Voyons les conséquences de cette égalité.

Du point M, faisons rayonner une infinité d'éléments linéaires MM_1, MM_2, MM_3, ... Ils auront pour correspondants une infinité d'éléments linéaires $M'M'_1$, $M'M'_2$, $M'M'_3$, ..., tous issus du point M', et l'on aura

$$\frac{M'M'_1}{MM_1}=\frac{M'M'_2}{MM_2}=\frac{M'M'_3}{MM_3}=\ldots=\frac{|k|}{\overline{OM}^2}.$$

La figure infiniment petite formée par les points M_1, M_2, M_3, ... *se transformera en une figure infiniment petite semblable formée par les points* M'_1, M'_2, M'_3, ...

On exprime cette propriété en disant que l'espace (x', y', z') que la transformation par inversion fait correspondre à l'espace (x, y, z) en est une *représentation conforme*.

Il est aisé de voir que ce résultat entraîne les suivants :

Deux courbes ou deux surfaces qui se coupent au point M *sous un angle* α *se transforment par inversion en deux courbes ou deux surfaces qui se coupent sous le même angle* α *au point* M' *transformé du point M.*

En particulier, *trois familles de surfaces orthogonales se transforment en trois autres familles de surfaces orthogonales.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit un point M′ de l'espace transformé, et soient u, v, w ses coordonnées *cartésiennes*. La position du point M qui lui correspond dans le premier espace est fixée par la connaissance de ces trois quantités u, v, w. On peut donc regarder ces trois quantités comme trois coordonnées *curvilignes* fixant la position d'un point dans le premier espace.

Le point M′ est à la rencontre des trois plans orthogonaux

$$x' = z, \qquad y' = v, \qquad z' = w.$$

Le point M doit donc se trouver à la rencontre de trois sphères orthogonales. On le vérifie aisément, car les trois plans précédents donnent en se transformant, d'après les égalités (1 *bis*), les trois surfaces

$$\left(x - \frac{k}{2u}\right)^2 + y^2 + z^2 - \frac{k^2}{4u^2} = 0,$$

$$x^2 + \left(y - \frac{k}{2v}\right)^2 + z^2 - \frac{k^2}{4v^2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{k}{2w}\right)^2 - \frac{k^2}{4w^2} = 0,$$

qui sont trois sphères se coupant au point O et tangentes respectivement en ce point aux plans ZOY, XOZ, YOX.

Les coordonnées u, v, w constituent donc, pour le point M, un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Les équations précédentes fournissent les formules de transformation qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées curvilignes (u, v, w) ou inversement.

Ces formules peuvent s'écrire encore

$$(3) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{k}{u}\, x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{k}{v}\, y = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{k}{w}\, z = 0, \end{cases}$$

L'égalité (2) nous donne

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = \frac{\rho^4}{k^2}\,(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Mais, si nous posons

$$\rho'^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nous savons que

$$\rho^2\rho'^2 = k^2,$$

et l'égalité précédente devient

$$(2\ bis) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{k^2}{\rho'^4}(du^2 + dv^2 + dw^2).$$

Si l'on se reporte à l'égalité (8) du Chapitre précédent, on voit que l'on a, pour le changement de coordonnées que nous considérons,

$$(4) \qquad H^2 = H_1^2 = H_2^2 = \frac{k^2}{\rho'^4}.$$

Cela posé, considérons une fonction $V(x, y, z)$ qui est harmonique *à l'intérieur* d'une certaine surface S appartenant au premier espace; pour toutes les valeurs de x, y, z, qui correspondent aux points intérieurs à la surface S, on a

$$\Delta V(x, y, z) = 0.$$

Les points (x, y, z) intérieurs à la surface S correspondent à un ensemble de valeurs des quantités u, v, w. Soit $\Phi(u, v, w)$ ce que devient la fonction V lorsqu'on y remplace x, y, z par leurs expressions en fonction de u, v, w. Nous aurons, d'après les équations (1 *bis*),

$$(5) \qquad \Phi(u, v, w) = V\left(\frac{ku}{\rho'^2}, \frac{kv}{\rho'^2}, \frac{kw}{\rho'^2}\right).$$

Pour l'ensemble de valeurs de u, v, w, que nous avons défini, cette fonction vérifiera l'équation transformée de $\Delta V = 0$, c'est-à-dire, d'après les équations (4),

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho'^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho'^2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{\rho'^2}\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right) = 0.$$

Ceci peut encore s'écrire

$$\frac{1}{\rho'}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\Phi}{\rho'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\Phi}{\rho'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\Phi}{\rho'}\right)\right]$$
$$- \frac{\Phi}{\rho'}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{1}{\rho'} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\frac{1}{\rho'} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}\frac{1}{\rho'}\right] = 0.$$

Si l'on pose

$$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et si l'on remarque que

$$\Delta' \frac{1}{\rho'} = 0,$$

cette équation deviendra simplement

$$\Delta' \left(\frac{\Phi}{\rho'} \right) = 0. \tag{6}$$

Le résultat que nous venons d'obtenir est susceptible d'une interprétation qui en fait l'importance.

Les coordonnées u, v, w peuvent être considérées comme les coordonnées cartésiennes d'un point M′ dans un espace transformé par rayons vecteurs réciproques de l'espace auquel appartient le point $M(x, y, z)$. Cette transformation fait correspondre à la surface S une surface S′; à tout point intérieur à la surface S un point extérieur à la surface S′; aux points infiniment voisins de l'origine dans le premier espace les points infiniment éloignés de l'origine dans le second espace.

Si la fonction $V(x, y, z)$ est harmonique à l'intérieur de la surface S, la fonction

$$W(u, v, w) = \frac{1}{\rho'} \Phi(u, v, w) = \frac{1}{\rho'} V\left(\frac{ku}{\rho'^2}, \frac{kv}{\rho'^2}, \frac{kw}{\rho'^2} \right) \tag{7}$$

sera, d'après les égalités (6) et (5), harmonique à l'extérieur de la surface S′.

Si la fonction $V(x, y, z)$ prend, au point O, la valeur V_0, la fonction $W(u, v, w)$ tendra vers zéro comme $\frac{V_0}{\rho'}$ lorsque ρ' croîtra au delà de toute limite.

Si la fonction $V(x, y, z)$ prend la valeur A au point P de la surface S, la fonction $W(u, v, w)$ prendra au point P′, transformé de P, sur la surface S′, la valeur

$$\frac{OP'}{A} = \frac{OP}{k} A.$$

Ces résultats conduisent aisément à la proposition suivante :

Si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à une surface fermée S, *on sait le résoudre pour l'espace extérieur à la surface* S′ *transformée de* S *par rayons vecteurs réciproques.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit, en effet, Ω la fonction, définie en chaque point de S', à laquelle la fonction harmonique cherchée doit devenir égale en tout point de S'.

Formons, ce que nous savons faire par hypothèse, une fonction $V(x, y, z)$, harmonique à l'intérieur de la surface S, et prenant en tout point P de la surface S la valeur

$$V(P) = \frac{k\Omega(P')}{OP}.$$

Formons ensuite la fonction

$$W(u, v, w) = \frac{1}{\rho'} V\left(\frac{ku}{\rho'^2}, \frac{kv}{\rho'^2}, \frac{kw}{\rho'^2}\right).$$

La fonction $W(u, v, w)$ sera harmonique en tout point extérieur à la surface S'; elle deviendra égale à $\Omega(P')$ en tout point P' de la surface S'; elle se comportera à l'infini comme une fonction potentielle; elle résoudra donc le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à la surface S'.

On démontrerait de même que, *si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à une surface* S, *on sait le résoudre pour l'espace intérieur à la surface* S', *transformée de la surface* S *par rayons vecteurs réciproques.*

Quelques conséquences de cette importante proposition :

Nous avons vu que l'on savait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à une surface sphérique et aussi pour l'espace extérieur à cette même surface; par ce que nous venons de démontrer, chacune de ces deux solutions peut être déduite de l'autre.

On sait trouver la fonction de Green pour l'espace intérieur à un dièdre commensurable avec π; on sait donc résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à deux sphères qui se coupent sous un angle commensurable avec π.

On sait trouver la fonction de Green pour l'espace compris entre deux plans parallèles; on pourra donc déterminer la distribution électrique sur deux sphères égales ou inégales qui se touchent.

La détermination de la distribution électrique sur deux sphères qui se touchent est en effet un des beaux résultats auxquels est

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

parvenu Poisson (1). Un grand nombre de géomètres, parmi lesquels on peut citer surtout Plana, Sir W. Thomson, G. Kirchhoff, se sont ensuite occupés de ce problème. On trouvera un exposé remarquable de la solution dans l'Ouvrage consacrée par É. Mathieu à l'exposé de la Théorie du potentiel (2).

§ 2. — Application. — Distribution électrique sur une calotte sphérique.

L'une des belles applications que Sir W. Thomson (3) ait faites de la méthode de l'inversion est la détermination de la distribution électrique sur un conducteur infiniment mince ayant la forme d'une calotte sphérique. Nous allons exposer la solution de ce problème sous la forme que lui a donnée Lipschitz (4), en nous bornant au cas où la calotte sphérique est soustraite à toute influence.

La solution que nous allons développer repose sur quelques remarques que nous allons indiquer tout d'abord.

Soit S une surface sphérique ayant son centre à l'origine des coordonnées et un rayon égal à R. Soit W une fonction qui se comporte à l'infini comme une fonction potentielle, qui est harmonique à l'intérieur de la sphère, harmonique à l'extérieur de la sphère, mais discontinue sur la sphère, en sorte qu'au voisinage d'un point M de la surface de la sphère elle prenne à l'intérieur de la sphère une valeur voisine de $W_i(M)$ et à l'extérieur de la sphère une valeur voisine de $W_e(M)$.

Une pareille fonction n'est pas la fonction potentielle d'une cer-

---

(1) Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* (*Mémoires des Savants étrangers*, p. 1811, p. 1).

(2) E. Mathieu, *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme*, t. II, p. 65; Paris, 1886.

(3) W. Thomson, *Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville* (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 243; 1847. — W. Thomson, *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, 2e édition, p. 152). W. Thomson, *Determination of the distribution of Electricity on a circular segment of plane or spherical conducting surface, under any given influence* (W. Thomson, *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, 2e édition, p. 178).

(4) Lipschitz, *Ueber die Vertheilung der stätischen Electricität in einem kreisformig begrenzten Segment einer Kugelfläche* (*Borchardt's Journal*, Bd. LVIII, p. 152; 1861).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

taine quantité d'électricité distribuée sur la calotte sphérique.

Transformons l'espace par inversion en prenant le pôle d'inversion au centre de la sphère et le carré R^2 du rayon pour coefficient d'inversion ; tout point M de la sphère se transformera en lui-même ; tout point intérieur à la sphère se transformera en un point extérieur et inversement.

Considérons la fonction

$$W'(x', y', z') = \frac{1}{\rho'} W\left(\frac{R^2 x'}{\rho'^2}, \frac{R^2 y'}{\rho'^2}, \frac{R^2 z'}{\rho'^2}\right).$$

Elle sera harmonique à l'intérieur de la sphère S, harmonique à l'extérieur de la sphère S, mais discontinue sur la sphère S. Au voisinage du point M de la sphère S, elle prendra, à l'intérieur de la sphère une valeur voisine de $\frac{1}{R} W_e(M)$, et à l'extérieur de la sphère une valeur voisine de $\frac{1}{R} W_i(M)$.

Considérons alors la fonction

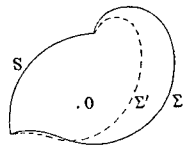
$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= W(x, y, z) + RW'(x, y, z) \\ &= W(x, y, z) + \frac{R}{\rho} W\left(\frac{R^2 x}{\rho^2}, \frac{R^2 y}{\rho^2}, \frac{R^2 z}{\rho^2}\right). \end{aligned}$$

Elle sera harmonique à l'intérieur de la sphère S, harmonique à l'extérieur de la sphère S, et continue sur la sphère S, en sorte que cette fonction sera la fonction potentielle d'une certaine quantité d'électricité distribuée sur la sphère S.

Une méthode analogue s'appliquerait au cas plus général que voici :

Une surface fermée est composée en partie par une portion S

Fig. 38.



de surface sphérique, en partie par une autre surface Σ de forme quelconque (*fig.* 38). La fonction $W(x, y, z)$ est harmonique tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de cette surface fermée ; elle se

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comporte à l'infini comme une fonction potentielle ; elle varie d'une manière continue au passage de la surface Σ et d'une manière discontinue au passage de la surface S. Soit O le centre de la sphère S pris pour origine des coordonnées ; soit R son rayon. La fonction

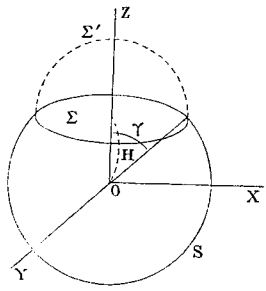
$$(8) \qquad W(x, y, z) + \frac{R}{\rho} W\left(\frac{R^2 x}{\rho^2}, \frac{R^2 y}{\rho^2}, \frac{R^2 z}{\rho^2}\right) = V(x, y, z)$$

sera la fonction potentielle d'une certaine quantité d'électricité distribuée sur la surface fermée que composent la surface S, la surface Σ et la surface Σ′ transformée de la surface S par rayons vecteurs réciproques.

C'est un procédé de ce genre qui va nous permettre de déterminer la fonction potentielle de l'électricité en équilibre sur une calotte sphérique.

Soit S cette calotte sphérique (*fig.* 39) ; soit R son rayon ; soit

Fig. 39.



H la distance du cercle de base Σ au centre O de la sphère.

Le cercle de base a pour rayon la quantité

$$(9) \qquad a = (R^2 - H^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons la quantité u définie par l'équation

$$(10) \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2 + u} + \frac{(z - H)^2}{u} = 1,$$

et considérons la fonction

$$(11) \qquad V(x, y, z) = K\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{a}\right).$$

où K est une constante quelconque.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'après ce que nous avons vu au Chapitre VII, § 3, cette fonction est harmonique dans tout l'espace, sauf sur le cercle de base de la calotte ; elle se comporte à l'infini comme une fonction potentielle ; elle varie d'une manière continue lorsqu'on traverse ce cercle, à une distance finie de ses bords ; sur ce cercle, elle prend la valeur $\frac{K\pi}{2}$. Lorsqu'on traverse le cercle, les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction changent de signe sans changer de valeur absolue.

Soit T la surface fermée formée par la calotte S et le plan Σ. Prenons une fonction $W(x, y, z)$ égale, à l'intérieur de la surface T, à

$$K\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a}\right)$$

et, à l'extérieur de la surface T, à

$$K\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a}\right).$$

Cette fonction sera harmonique à l'intérieur de la surface T : elle sera harmonique à l'extérieur de la surface T ; elle variera d'une manière continue à la traversée de la surface Σ et d'une manière discontinue à la traversée de la surface S. Ses dérivées du premier ordre ne subiront pas de discontinuité au passage de la surface Σ.

Envisageons la fonction

$$V(x, y, z) = W(x, y, z) + \frac{R}{\rho} W\left(\frac{R^2 x}{\rho^2}, \frac{R^2 y}{\rho^2}, \frac{R^2 z}{\rho^2}\right).$$

Si l'on définit la quantité u' par la relation

$$(10\ bis) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\rho^4 (a^2 + u')} + \left(\frac{u'}{1}\frac{z}{\rho^2} - H\right)^2 = \frac{1}{R^2},$$

il est facile de voir que l'on aura, à l'intérieur de la surface T,

$$(12) \quad V(x, y, z) = K\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a}\right) + \frac{KR}{\rho}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u'^{\frac{1}{2}}}{a}\right);$$

à l'intérieur du volume compris entre la surface Σ et la calotte Σ'

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en laquelle elle se transforme par inversion,

$$(12\ bis)\quad V(x,y,z) = K\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a}\right) + \frac{KR}{\rho}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u'^{\frac{1}{2}}}{a}\right);$$

et, à l'extérieur de la surface T′, formée par les calottes S et Σ′,

$$(12\ ter)\quad V(x,y,z) = K\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{a}\right) + \frac{KR}{\rho}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{u'^{\frac{1}{2}}}{a}\right).$$

Cette fonction sera, d'après ce qui précède, la fonction potentielle d'une certaine quantité d'électricité distribuée sur la surface S, sur la surface Σ et sur la calotte Σ′, en laquelle le plan Σ se transforme par inversion.

Mais les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction varient d'une manière continue lorsqu'on traverse soit la surface Σ, soit la surface Σ′; la densité électrique est donc nulle sur chacune des deux surfaces Σ, Σ′, et la fonction précédente est la fonction potentielle d'une certaine quantité d'électricité distribuée seulement sur la calotte S.

D'ailleurs, sur cette calotte, $V(x,y,z)$ prend la valeur constante $K\pi$. La distribution en question est donc une distribution d'équilibre.

Pour achever la détermination de la fonction potentielle d'une quantité Q d'électricité distribuée en équilibre sur la calotte S, il suffit d'établir la relation qui relie la constante K à la charge totale Q.

Nous allons, pour obtenir cette relation, écrire de deux manières la valeur de la fonction potentielle au point O.

Cette valeur pourra s'écrire, d'une part,

$$V_0 = \frac{Q}{R}.$$

D'autre part, elle pourra se déduire de la formule (12).

L'égalité (10) montre qu'au point O, on a

$$u = H^2.$$

L'égalité (10 *bis*) montre qu'au même point O on a

$$u' = \frac{R^2}{\rho^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a d'ailleurs

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u'^{\frac{1}{2}}}{a} = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{u'^{\frac{1}{2}}},$$

et, dans le calcul actuel,

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{u'^{\frac{1}{2}}}{a}\right) = \frac{a}{R}.$$

On a donc

$$V_0 = K\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{H}{a}\right) + K\frac{a}{R}.$$

Soit γ l'angle sous lequel le rayon du cercle de base est vu du centre de la calotte ; les égalités

$$\frac{a}{R} = \sin\gamma, \qquad \frac{a}{H} = \operatorname{tang}\gamma$$

permettent d'écrire

$$V_0 = K(\pi - \gamma + \sin\gamma).$$

Comparons les deux valeurs de V_0, et nous trouvons enfin

$$K = \frac{Q}{R(\pi - \gamma + \sin\gamma)}. \tag{13}$$

Cette égalité achève de déterminer la fonction potentielle d'une quantité Q d'électricité répandue en équilibre sur la calotte sphérique S.

Cette quantité d'électricité élève le niveau potentiel de la calotte sphérique à une valeur $K\pi$, ou, d'après l'égalité (13), à une valeur

$$\frac{Q}{R}\frac{\pi}{\pi - \gamma + \sin\gamma}.$$

La capacité de la calotte sphérique est donc

$$C = R\frac{\pi - \gamma + \sin\gamma}{\varepsilon\pi}. \tag{14}$$

§ 3. — Théorèmes de Liouville et de M. P. Painlevé.

On peut, d'une infinité de manières, obtenir une représentation conforme d'un plan (x, y) sur un autre plan (X, Y), c'est-à-dire

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

trouver des formules de transformation

$$\begin{cases} x = \varphi(X, Y), \\ y = \psi(X, Y), \end{cases} \tag{15}$$

telles que si les deux courbes représentées par rapport aux axes des x et des y par les équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$g(x, y) = 0$$

se coupent sous un angle α, les deux courbes transformées, représentées, par rapport aux axes des X et des Y, par les équations

$$F(X, Y) = f[\varphi(X, Y), \psi(X, Y)] = 0,$$
$$G(X, Y) = g[\varphi(X, Y), \psi(X, Y)] = 0,$$

se coupent aussi sous le même angle α.

Toutes ces transformations s'obtiennent de la manière suivante (¹) :

Soit une fonction analytique quelconque de la variable complexe

$$Z = X + iY.$$

Elle peut toujours se mettre sous la forme

$$\varphi(X, Y) + i\psi(X, Y).$$

Si l'on porte ces deux fonctions φ et ψ dans les égalités (15), on obtient la forme la plus générale des transformations qui nous occupent.

Supposons qu'une semblable représentation conforme transforme tous les points intérieurs à une courbe s du plan des x, y, en tous les points intérieurs à une courbe S du plan des X, Y, et tout point de la courbe s en tout point de la courbe S. Nous dirons alors que l'on sait effectuer la représentation conforme de l'aire a, limitée par la courbe s sur l'aire A, limitée par la courbe S.

Si la fonction $V(x, y)$ satisfait, à l'intérieur de l'aire a, à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

(¹) *Voyez* Livre V, Chap. V, § 1.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la fonction

$$W(X, Y) = V[\varphi(X, Y), \psi(X, Y)],$$

en laquelle les formules (15) transforment la fonction $V(x, y)$, satisfait, à l'intérieur de l'aire A, à l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} = 0.$$

Si donc on sait, pour l'aire a, résoudre le problème de Dirichlet réduit au cas de deux variables, on sait aussi le résoudre pour l'aire A.

Réciproquement, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour les deux aires a et A, on sait, en général, effectuer la représentation conforme de ces aires l'une sur l'autre.

Ces propositions, que nous nous contentons de rappeler, marquent le lien intime qui existe entre ces diverses questions :

Théorie des fonctions de variables imaginaires ;

Représentation conforme d'une aire plane sur une autre aire plane ;

Problème de Dirichlet réduit au cas de deux variables.

Un quatrième problème, celui de l'étude d'une surface d'aire minima passant par un contour donné, se relie également d'une manière intime aux trois précédents.

L'étude comparée de ces différents problèmes a permis à un grand nombre de géomètres, parmi lesquels on doit surtout citer B. Riemann et M. Schwarz (1) d'en pénétrer profondément la nature et d'en avancer la solution.

On est naturellement porté à chercher l'extension aux fonctions de trois variables de ces problèmes dont la liaison se montre si féconde dans l'étude des fonctions de deux variables. Cette tendance est fortifiée par la découverte de la transformation par rayons vecteurs réciproques qui offre, dans l'espace, les propriétés que toute représentation conforme possède dans le plan.

(1) On aura une idée précise des relations qui existent entre le problème de Dirichlet pour le cas de deux variables et la théorie de la représentation conforme d'une aire plane sur une autre par la lecture de Axel Harnack, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktionen in der Ebene* (Leipzig, 1887).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais cette tendance vient de suite se heurter à un obstacle infranchissable : il est en général impossible, lorsqu'on a un domaine limité par une surface fermée donnée, de le représenter d'une manière conforme en un autre domaine limité par une autre surface fermée donnée. Cela n'est possible que si le second domaine peut être obtenu en transformant le premier par rayons vecteurs réciproques et en déplaçant sans déformation le domaine transformé.

En d'autres termes, si nous cherchons des formules de transformation

$$x = \varphi(X, Y, Z),$$
$$y = \psi(X, Y, Z),$$
$$z = \chi(X, Y, Z),$$

telles que l'espace (X, Y, Z) offre une représentation conforme de l'espace (x, y, z), ces formules exprimeront simplement une transformation par rayons vecteurs réciproques suivie d'un changement d'axes de coordonnées rectangulaires.

Ce théorème, qui établit une différence radicale entre l'étude des fonctions harmoniques de deux variables et l'étude des fonctions harmoniques de trois variables, est dû à Liouville (¹).

Mais, s'il n'existe pas de transformation autre que la transformation par rayons vecteurs réciproques qui puisse fournir une représentation conforme d'un espace à trois dimensions en un autre espace à trois dimensions, on pourrait du moins espérer que des méthodes de transformation autres que la méthode de l'inversion sont capables de fournir la solution du problème de Dirichlet pour un domaine transformé lorsqu'on l'a déjà obtenue pour le domaine donné.

La question qui se pose alors est la suivante :

Trouver des formules de transformation

$$\begin{cases} x = \varphi(X, Y, Z), \\ y = \psi(X, Y, Z), \\ z = \chi(X, Y, Z), \end{cases}$$

et une fonction $F(\zeta)$ *telles que, si la fonction* $V(x, y, z)$ *est*

(¹) LIOUVILLE, Note VI à la Géométrie de Monge.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

régulière et satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

en tout point du domaine d pris dans l'espace des (x, y, z), *la fonction*

$$W(X, Y, Z) = F\{V[\varphi(X, Y, Z), \psi(X, Y, Z), \chi(X, Y, Z)]\}$$

soit régulière et satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = 0,$$

en tout point du domaine D, *transformé de d dans l'espace des* (X, Y, Z).

En réponse à cette question, on peut affirmer que *les formules de transformation cherchées représentent forcément une transformation par rayons vecteurs réciproques suivie d'un changement d'axes de coordonnées rectangulaires.*

Ce théorème important, en marquant bien le rôle exclusif de la méthode de l'inversion, limite étroitement le champ de l'Analyse dans la voie ouverte par Sir W. Thomson. Il est dû à M. Paul Painlevé (1).

---

(1) PAUL PAINLEVÉ, *Sur la transformation des fonctions* $V(x, y, z)$ *qui satisfont à l'équation* $\Delta V = 0$ *et sur les coordonnées curvilignes orthogonales* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. I, n° 1; 1889).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IX.

LA MÉTHODE DE M. CARL NEUMANN.

§ 1. — Le théorème de M. Vito Volterra.

La démonstration de Lejeune-Dirichlet ne permet pas d'affirmer avec une entière certitude que le problème auquel on a donné le nom de ce géomètre admette, dans tous les cas possibles, une solution. Cette démonstration a seulement pour effet de remplacer l'hypothèse que ce problème admet une solution par d'autres hypothèses plus vraisemblables peut-être, quoique aussi peu démontrées.

Green a posé le même problème sous une autre forme, mais sans en faire avancer la solution.

Ainsi donc, bien loin de posséder une méthode générale pour résoudre le problème de Dirichlet, on ne sait même pas démontrer l'existence générale d'une solution de ce problème.

Force est donc de chercher à le résoudre dans des cas particuliers.

Il existe un nombre très restreint de cas particuliers pour lesquels le problème de Dirichlet puisse être immédiatement résolu (Chap. VI).

L'emploi de coordonnées curvilignes orthogonales appropriées a permis à Lamé et à d'autres géomètres d'étendre considérablement le nombre des cas où il est possible de résoudre le problème de Dirichlet. Ces méthodes, toutefois, ne se sont guère montrées fécondes jusqu'ici que pour les surfaces qui font partie d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales et isothermes (Chap. VII).

La méthode de l'inversion, créée par Sir W. Thomson, a grandement accru le nombre des cas où l'on sait résoudre le problème de Dirichlet; mais la puissance de cette méthode ne peut être partagée par aucune autre méthode de transformation, comme l'a montré M. P. Painlevé (Chap. VIII).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les efforts dont nous venons de retracer le tableau permettent donc seulement de résoudre le problème de Dirichlet pour des classes particulières de surfaces, classes très étendues, il est vrai.

Les méthodes que nous allons maintenant exposer se distinguent profondément des précédentes, en ce que les corps auxquels elles s'appliquent sont tenus non pas d'appartenir à certaines classes, mais seulement de vérifier certaines restrictions. Elles ont donc une portée infiniment plus générale que celles que nous avons exposées jusqu'ici.

Elles ont, il est vrai, un désavantage sur les précédentes.

Pour résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour la sphère, pour l'ellipsoïde, etc., les méthodes que nous avons indiquées conduisent ou bien à intégrer sur toute la surface une combinaison analytique où figure la fonction donnée sur cette surface ; ou bien à déterminer, au moyen des valeurs connues, que la fonction cherchée prend sur la surface les coefficients d'un certain développement en série. L'emploi effectif de ces méthodes donne lieu à des calculs pénibles, mais cependant praticables. Ainsi les développements en séries de fonctions sphériques qui servent à résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur ou extérieur à une sphère donnent prise au calcul numérique en Mécanique céleste et dans l'étude du Magnétisme terrestre.

Il en est autrement pour les méthodes que nous allons exposer.

Ces méthodes conduisent à représenter la fonction cherchée par une série d'intégrales étendues à la surface donnée. Seule, la première de ces intégrales dépend directement des valeurs données sur la surface. Chacune des autres exige, pour être effectuée, que l'on connaisse celle qui la précède.

Un semblable procédé échappe sans doute à tout calcul numérique. Par là, il perd tout intérêt pratique ; mais il n'en garde pas moins un grand intérêt théorique, car il démontre, sans contestation possible, l'existence d'une solution du problème de Dirichlet pour les classes étendues de surfaces auxquelles il s'applique.

Une méthode, inventée en 1833 par Murphy (1) pour traiter les problèmes de l'influence électrique, a donné la première idée de

(1) MURPHY, *Elementary principles of the theories of electricity, heat, and molecular actions*, Part. I, Chap. V, p. 93; 1833.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cette classe de procédés. Cette idée fut poussée plus avant par Beer (1) en 1856. Mais c'est à M. Carl Neumann (2) que l'on doit d'avoir montré la légitimité de semblables procédés.

La convergence des séries employées peut toujours être démontrée au moyen d'un théorème fondamental qui, implicitement renfermé dans les travaux de M. Schwarz et de M. Carl Neumann, semble avoir été énoncé pour la première fois par M. Vito Volterra (3). M. Axel Harnack (4) et M. Paul Painlevé (5) ont insisté sur le rôle que ce théorème doit jouer dans l'étude des fonctions harmoniques de deux ou de trois variables.

Voici l'énoncé de ce théorème :

Soient $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ *une suite illimitée de fonctions harmoniques à l'intérieur d'un certain espace* E *limité par une surface* S. *Soient* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *les valeurs vers lesquelles tendent ces fonctions lorsque le point auquel elles se rapportent tend vers la surface* S. *Si la série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

converge uniformément en tout point de la surface S, *la série*

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots \tag{2}$$

converge uniformément en tout point de l'espace E *et représente, en tout point de cet espace, une fonction harmonique.*

Démontrons d'abord que la série (2) converge uniformément dans l'espace E.

---

(1) BEER, *Allgemeine Methode zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Induction* (*Poggendoff's Annalen*, B. XCVIII, p. 137; 1856).

(2) C. NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential* (Leipzig, 1876).

(3) VITO VOLTERRA, *Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa* (*Annali di Matematica*, série II, t. XI, p. 52; 1882).

(4) AXEL HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales un der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*, § 20; Leipzig, 1887.

(5) PAUL PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, p. B. 15; 1887).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Envisageons la fonction

$$\Phi_{np} = U_n + U_{n+1} + \ldots + U_{n+p}.$$

Il s'agit de prouver que l'on peut toujours prendre n assez grand pour que l'on ait, quel que soit p,

$$|\Phi_{np}| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif quelconque donné d'avance.

Or, la série (1) étant uniformément convergente, si l'on pose

$$\varphi_{np} = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p},$$

on pourra toujours prendre n assez grand pour que l'on ait, quel que soit p,

$$|\varphi_{np}| < \varepsilon.$$

D'autre part, la quantité Φ_{np}, somme d'un nombre limité de fonctions harmoniques dans l'espace E, est une fonction harmonique dans l'espace E. Les valeurs qu'elle prend dans l'espace E sont, d'après le théorème général de M. Carl Neumann (Livre II, Chap. III), comprises entre deux des valeurs qu'elle prend sur la surface S. Sur la surface S elle devient identique à φ_{np}. Si donc, en tout point de la surface S, on a

$$|\varphi_{np}| < \varepsilon,$$

quel que soit p, on aura, en tout point de l'espaceE,

$$|\Phi_{np}| < \varepsilon,$$

quel que soit p.

Soit donc

$$V = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

la fonction continue dont l'existence est maintenant démontrée. Il s'agit de prouver que cette fonction est harmonique en tout point intérieur à l'espace E.

Soit M un point intérieur à l'espace E. Prenons-le à l'intérieur d'une sphère Σ en entier contenue dans E. Soit G(M) la fonction de Green pour le point M et la sphère Σ, fonction qui est connue (*voir* Chap. VI).

Posons

$$W_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n,$$
$$V = W_n + R_n.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La fonction W_n étant évidemment harmonique à l'intérieur de la sphère S, sa valeur en tout point M intérieur à la sphère sera donnée par

$$4\pi W_n(M) = \int_\Sigma W_n \frac{\partial G(M)}{\partial N_i} d\Sigma.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$4\pi V(M) - \int_\Sigma V \frac{\partial G(M)}{\partial N_i} d\Sigma = 4\pi R_n(M) - \int_\Sigma R_n \frac{\partial G(M)}{\partial N_i} d\Sigma.$$

Le premier membre ne dépend pas de n ; d'autre part, on peut prendre n assez grand pour que R_n, et par conséquent le second membre, soient aussi voisins de O que l'on voudra. L'égalité précédente ne peut donc subsister que si l'on a

$$4\pi V(M) = \int_\Sigma V \frac{\partial G(M)}{\partial N_i} d\Sigma.$$

La fonction V est, par conséquent, une fonction harmonique en tout point intérieur à la sphère Σ.

La fonction V est harmonique à l'intérieur de toute sphère contenue dans l'espace E ; ce qui revient à dire qu'elle est harmonique en tout point de l'espace E.

Notre théorème est ainsi démontré.

Ajoutons à ce théorème la proposition suivante :

Lorsque le point M *de l'espace* E *tend vers le point* m *de la surface* S, *la valeur* $V(M)$ *que prend la série*

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

au point M *tend vers la valeur* $v(m)$ *que prend la série*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

au point m, *et elle atteint cette valeur lorsque le point* M *vient au point* m.

Pour le démontrer, posons

$$w_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$v = w_n + r_n.$$

Nous pouvons prendre n assez grand pour que l'on ait, pour

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

toute position du point M dans l'espace E, et pour toute position du point m sur la surface S,

$$|R_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |r_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quelque voisin de o que soit ε.

D'ailleurs, lorsque le point M tend vers le point m, U_1, U_2, ..., U_n tendant respectivement vers u_1, u_2, ..., u_n, W_n tend vers w_n. On peut donc, autour du point m, tracer dans l'espace E un domaine assez petit pour que, pour tout point M de ce domaine, on ait

$$|W_n(M) - w_n(m)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On voit alors que, pour tout point de ce domaine, on aura

$$|V(M) - v(m)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la première partie de la proposition énoncée.

La série $U_1 + U_2 + \ldots$ convergeant d'une manière uniforme, la seconde partie est alors évidente.

§ 2. — Le théorème de M. Axel Harnack.

Au théorème précédent, M. Axel Harnack (1) a joint un théorème qui, dans l'ordre de questions qui nous occupe, est aussi d'une continuelle application.

Ce théorème se démontre au moyen d'une proposition qui est la suivante :

Si une fonction V(M) *est harmonique à l'intérieur d'un certain espace* E *et a le même signe en tous les points de cet espace, sa valeur au point variable* M *de cet espace s'obtient en multipliant sa valeur en un certain point fixe* P *de cet espace par un facteur qui conserve une valeur finie pour tout point* M *de l'espace* E; *un théorème analogue est applicable*

(1) AXEL HARNACK, *Existenz-Beweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume*, §1 (*Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe*, 1886, p. 149).—*Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales...*, p. 67; Leipzig, 1887.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aux dérivées partielles de tous les ordres de la fonction V(M).

Supposons d'abord que le point M puisse être compris à l'intérieur d'une sphère ayant pour centre le point P et contenue tout entière dans l'espace E.

D'après le théorème de la moyenne de Gauss, nous aurons, en désignant par R le rayon de cette sphère et par $d\Sigma$ un élément de sa surface,

$$V(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\!\!\int V \, d\Sigma.$$

D'autre part, si G(M) désigne la fonction de Green pour le point M intérieur à la sphère Σ, nous aurons

$$V(M) = \int\!\!\int V \frac{\partial G(M)}{\partial N_i} d\Sigma.$$

Le signe de V étant le même pour tous les points de la surface de la sphère, puisque tous ces points sont intérieurs à l'espace E, si l'on désigne par λ une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de $\frac{\partial G(M)}{\partial N_i}$, on aura

$$V(M) = \lambda \int\!\!\int V \, d\Sigma = 4\pi\lambda R^2 V(P).$$

Or il est facile de voir, en se reportant à l'expression de G(M) donnée au Chapitre VI, que $\frac{\partial G(M)}{\partial N_i}$ est toujours fini, pour tout point M intérieur à la sphère ; il en est donc de même de λ, et l'égalité précédente démontre la proposition énoncée.

Il peut arriver qu'aucune sphère ayant le point P pour centre et contenue en entier dans l'espace E ne puisse renfermer le point M à son intérieur. Alors, on prendra le point P pour centre d'une sphère Σ enfermée dans l'espace E ; un point P′, intérieur à la sphère Σ, sera pris pour centre d'une nouvelle sphère Σ′ contenue dans l'espace E ; en continuant de la sorte, on pourra toujours, après avoir construit un nombre limité de sphères, en trouver une qui renferme le point M à son intérieur. La démonstration de la proposition énoncée se fera alors de proche en proche sans difficulté.

On démontrera sans peine que, si x, y, z désignent les coor-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

données du point M, les dérivées $\frac{\partial V(M)}{\partial x}, \frac{\partial V(M)}{\partial y}, \frac{\partial V(M)}{\partial z}, \frac{\partial^2 V(M)}{\partial x^2}, \ldots$ s'obtiennent en multipliant V(P) par des facteurs qui sont finis pour tout point M de l'espace E.

Ce lemme démontré, *envisageons des fonctions en nombre illimité*

$$U_1(M), \quad U_2(M), \quad U_3(M), \quad \ldots.$$

Supposons que chacune de ces fonctions soit harmonique à l'intérieur de l'espace E *et que chacune d'elles ait, dans tout cet espace, un signe constant qui soit le même pour toutes.*

Si la série

$$U_1(P) + U_2(P) + U_3(P) + \ldots$$

est convergente en un point quelconque P *de l'espace* E, *la série*

$$U_1(M) + U_2(M) + U_3(M) + \ldots$$

converge uniformément en tout point de cet espace et représente, dans cet espace, une fonction harmonique.

D'après la proposition précédente, nous avons

$$\begin{aligned}
&U_1(M) = \lambda_1 U_1(P), && U_2(M) = \lambda_2 U_2(P), && \ldots,\\
&\frac{\partial U_1(M)}{\partial x} = \mu_1 U_1(P), && \frac{\partial U_2(M)}{\partial x} = \mu_2 U_2(P), && \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots,\\
&\frac{\partial^2 U_1(M)}{\partial x^2} = \nu_1 U_1(P), && \frac{\partial^2 U_2(M)}{\partial x^2} = \nu_2 U_2(P), && \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots,
\end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ étant des facteurs finis pour tout point M de l'espace E.

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
&U_n(M) + U_{n+1}(M) + \ldots + U_{n+p}(M)\\
&\quad = \lambda_n U_n(P) + \lambda_{n+1} U_{n+1}(P) + \ldots + \lambda_{n+p} U_{n+p}(P),\\
&\frac{\partial U_n(M)}{\partial x} + \frac{\partial U_{n+1}(M)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial U_{n+p}(M)}{\partial x}\\
&\quad = \mu_n U_n(P) + \mu_{n+1} U_{n+1}(P) + \ldots + \mu_{n+p} U_{n+p}(P),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial^2 U_n(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{n+1}(M)}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U_{n+p}(M)}{\partial x^2}\\
&\quad = \nu_n U_n(P) + \nu_{n+1} U_{n+1}(P) + \ldots + \nu_{n+p} U_{n+p}(P),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais les fonctions $U_n(P)$, $U_{n+1}(P)$, ..., $U_{n+p}(P)$ ont toutes le même signe. Si donc $\mathcal{L}$ est un facteur fini compris entre la plus grande et la plus petite valeur de λ_n, λ_{n+1}, ..., λ_{n+p} ; si de même $\mathfrak{M}$ est un facteur fini compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs de μ_n, μ_{n+1}, ..., μ_{n+p} ; si enfin $\mathfrak{N}$ est un facteur fini compris entre la plus grande et la plus petite des valeurs de ν_n, ν_{n+1}, ..., ν_{n+p}, on aura

$$U_n(M) + U_{n+1}(M) + \ldots + U_{n+p}(M) = \mathcal{L}\,[U_n(P) + U_{n+1}(P) + \ldots + U_{n+p}(P)],$$

$$\frac{\partial U_n(M)}{\partial x} + \frac{\partial U_{n+1}(M)}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial U_{n+p}(M)}{\partial x} = \mathfrak{M}\,[U_n(P) + U_{n+1}(P) + \ldots + U_{n+p}(P)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 U_n(M)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_{n+1}(M)}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 U_{n+p}(M)}{\partial x^2} = \mathfrak{N}\,[U_n(P) + U_{n+1}(P) + \ldots + U_{n+p}(P)],$$

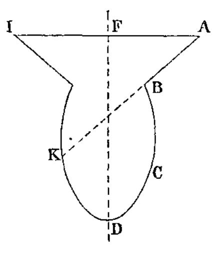
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces résultats obtenus, la démonstration du théorème énoncé s'achève sans aucune difficulté.

§ 3. — Quelques définitions.

Si l'on coupe une surface fermée par une droite quelconque, on peut obtenir comme intersection des points isolés les uns des autres et aussi des segments entiers de droite. Par exemple, si l'on considère la surface engendrée par la rotation de la ligne FABCD (*fig.* 40) dont le côté AF est perpendiculaire sur DF, une droite

Fig. 40.



quelconque la coupe en général en deux ou quatre points isolés ; à la droite AI correspondra comme intersection un segment ; à la droite AB, un segment AB et un point K, etc. Toutes les fois qu'en coupant la surface par une droite on obtiendra un ou plusieurs segments, on conviendra de ne compter comme points d'in-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tersection, pour chaque segment, que le point initial et le point final ; d'après cette convention, la droite AI coupera la surface en deux points seulement A et I ; la droite AB en trois points A, B, K, ... Dans ce qui suit, nous supposerons constamment qu'une surface fermée est coupée par une droite quelconque de l'espace en un nombre fini de points, dont le maximum est nécessairement pair et nous appellerons *rang de la surface* ce nombre maximum.

Les surfaces que nous étudierons spécialement sont les surfaces de *second rang*.

Nous admettrons que, sauf en certains points isolés ou le long de certaines lignes isolées, la surface étudiée admet un plan tangent variable d'un point à l'autre d'une manière continue. Il est facile de voir que, si la surface est de second rang, le plan tangent en chaque point laissera cette surface tout entière d'un même côté.

Aux points isolés où il n'existe pas de plan tangent, nous admettrons qu'il existe une nappe conique tangente ; si le long d'une ligne il n'existe pas de plan tangent, nous admettrons qu'en chaque point de cette ligne il existe un dièdre tangent.

Nous dirons qu'une surface, ouverte ou fermée, est *multiétoilée d'ordre n* lorsqu'il sera possible d'imaginer dans l'espace n points fixes tels que tout plan tangent à la surface passe par l'un d'entre eux, mais lorsqu'en même temps il ne sera pas possible d'assigner moins de n points fixes jouissant de cette propriété.

Une surface uniétoilée se compose nécessairement d'une portion de cône et, par suite, est nécessairement ouverte. Comme exemples de surfaces fermées biétoilées, on peut citer le parallélépipède, l'octaèdre, le tétraèdre, la surface engendrée par la révolution d'un losange autour d'une de ses diagonales, etc. Dans cette dernière surface, les deux *étoiles,* c'est-à-dire les deux points fixes de la définition, sont les extrémités de la diagonale considérée ; dans le parallélépipède et l'octaèdre, les extrémités d'une diagonale quelconque ; dans le tétraèdre, un sommet quelconque et un point quelconque de la face opposée.

Les surfaces de deuxième rang non biétoilées possèdent une propriété que nous allons démontrer et qui nous sera utile par la suite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenons un point μ sur une semblable surface ; soit m un autre point variable de cette surface ; soit dS un élément environnant le point m ; soit N_e la normale à l'élément dS vers l'intérieur de la surface S ; soit ρ la ligne $m\mu$. La quantité

$$\int_S \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} dS$$

a une valeur donnée par le troisième lemme de Gauss ; cette valeur est 2π si la surface S admet au point μ un plan tangent variable d'une manière continue ; si les tangentes en ce point forment une nappe conique d'ouverture sphérique α, elle a pour valeur α ; si, au point μ, elle admet un dièdre tangent dont l'ouverture soit $\frac{\alpha}{2}$, elle a encore pour valeur α. On peut donc écrire, dans tous les cas possibles,

$$\int_S \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} dS \leqq 2\pi.$$

Si l'on observe que, pour les surfaces considérées, $\cos(\rho, N_e)$ n'est jamais négatif, on voit que l'on aura aussi

$$\int_S \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma \leqq 2\pi,$$

l'intégration s'étendant seulement à une portion σ de la surface S.

Si μ et μ' sont deux points quelconques, distincts ou confondus, de la surface S, et si celle-ci est divisée en deux portions σ, σ', on aura

$$\int_S \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma + \int_S \frac{\cos(\rho', N_e)}{\rho'^2} d\sigma' \leqq 4\pi.$$

Voici maintenant la proposition que nous allons démontrer :

Si la surface fermée de second rang S *n'est pas biétoilée, on peut toujours, pour cette surface, assigner une quantité positive* θ *telle que l'on ait*

$$\int_S \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma + \int_S \frac{\cos(\rho', N_e)}{\rho'^2} d\sigma' \geqq \theta,$$

quelles que soient les positions des points μ *et* μ' *sur la surface* S *et de quelque manière que la surface* S *ait été divisée en deux segments* σ *et* σ'.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Supposons d'abord que les deux points μ et μ' aient, sur la surface S, une position particulière déterminée. Il peut arriver que le point μ soit le sommet de quelque portion de surface conique contenue dans S, et qu'il en soit de même pour le point μ'. Soit Σ la surface partielle déduite de S en enlevant ces portions de surfaces coniques. Σ ne peut se réduire à rien, car il faudrait pour cela, si μ et μ' coïncident, que la surface fût uni-étoilée, et par suite ouverte ou illimitée; et, s'ils ne coïncident pas, qu'elle fût biétoilée, ce qui est contre l'hypothèse. D'ailleurs, sur toute l'étendue de Σ, les quantités $\cos(\rho, N_e)$, $\cos(\rho', N_e)$ sont certainement positives, sauf en certains points isolés ou le long de certaines lignes isolées. Cela posé, retranchons de Σ une surface Σ'' telle que la portion restante Σ' ne se réduise pas à o, et qu'en aucun point de Σ', $\cos(\rho, N_e)$ et $\cos(\rho', N_e)$ ne soient égaux à o. Désignons par A la plus petite des valeurs que peuvent prendre sur Σ' les quantités $\cos(\rho, N_e)$ et $\cos(\rho', N_e)$. Les quantités Σ' et A ne dépendent pas de la manière dont la surface S a été divisée en deux portions σ et σ'; elles peuvent dépendre seulement de la position des points μ et μ'. Soient σ_1, σ'_1 les parties des segments σ, σ' que renferme la surface Σ''. Soit enfin L la distance la plus grande de deux points de la surface S. Nous aurons évidemment

$$\int \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma_1 \geq \frac{A\sigma_1}{L^2},$$

$$\int \frac{\cos(\rho', N_e)}{\rho'^2} d\sigma'_1 \geq \frac{A\sigma'_1}{L^2},$$

inégalités qui donnent certainement

$$\int \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma + \int \frac{\cos(\rho', N_e)}{\rho'^2} d\sigma' \geq \frac{A\Sigma''}{L^2}.$$

Cette inégalité est établie en supposant que les deux points μ et μ' aient une position donnée sur la surface S. Mais la quantité L a une valeur indépendante de la position des deux points μ et μ'. Il est d'ailleurs évident que l'on pourra toujours faire en sorte que les deux quantités A et Σ'' ne descendent pas au-dessous d'une certaine limite. On pourra donc, quelles que soient les positions des deux points μ et μ' et les deux segments σ, σ', en les-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quels on peut décomposer la surface S, assigner une quantité positive θ à laquelle la somme

$$\mathrm{S}\frac{\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}d\sigma + \mathrm{S}\frac{\cos(\rho', \mathrm{N}_e)}{\rho'^2}d\sigma'$$

ne pourra jamais devenir inférieure.

Réunissons le résultat que nous venons d'obtenir à celui que nous avions précédemment obtenu; posons

$$\lambda = 1 - \frac{\theta}{4\pi},$$

et nous voyons que nous pourrons toujours écrire

$$(1) \qquad \lambda \geqq 1 - \frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{S}\frac{\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}d\sigma + \mathrm{S}\frac{\cos(\rho', \mathrm{N}_e)}{\rho'^2}d\sigma'\right] \geqq 0,$$

λ désignant une constante positive, *inférieure à l'unité*.

Ces inégalités posées, nous allons aborder l'exposé d'une méthode qui permet de *résoudre le problème de Dirichlet pour les deux espaces, extérieur et intérieur à une surface fermée, de second rang et non biétoilée.*

Cette méthode, nommée *Méthode de la moyenne arithmétique,* a été communiquée par M. Carl Neumann, le 21 avril et le 31 octobre 1870, à l'Académie des Sciences de Saxe. Depuis, M. Carl Neumann (1) l'a exposée sous forme didactique; cet exposé a été également donné par M. Riquier (2) et par M. Axel Harnack (3).

§ 4. — Définition et propriétés de la fonction fondamentale.

Soit v une fonction variable d'une manière continue aux divers points m d'une surface fermée S; soit N_e la normale extérieure à cette surface; soit r la ligne qui va d'un point M de l'espace au point m. La méthode de M. Carl Neumann repose sur l'étude

(1) CARL NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.* Leipzig, 1877.

(2) C. RIQUIER, *Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann pour la résolution de problèmes relatifs aux fonctions de variables réelles qui vérifient l'équation différentielle* $\Delta \mathrm{F} = 0$. Thèse de doctorat. Paris, 1886.

(3) A. HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene.* Leipzig, 1887.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'une fonction des coordonnées du point M, que nous nommerons la *fonction fondamentale,* et qui est définie par l'égalité

$$U = \int\!\!\int \frac{\rho \cos(r, N_e)}{r^2} dS. \tag{2}$$

Cette fonction est évidemment régulière tant dans l'espace extérieur à la surface S que dans l'espace intérieur ; d'ailleurs, comme on peut évidemment écrire

$$U = \int\!\!\int \rho \left[\cos(N_e, x) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \cos(N_e, y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \cos(N_e, z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right] dS,$$

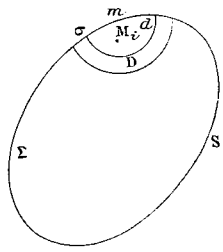
il est facile de voir que l'on a, tant à l'intérieur de la surface S qu'à l'extérieur de la surface S,

$$\Delta U = 0.$$

La fonction U est *discontinue* sur la surface S.

Prenons d'abord un point M_i intérieur à la surface S ; supposons

Fig. 41.



que ce point tende vers un point μ de la surface S où U a la valeur $u(\mu)$, et voyons vers quelle limite tend

$$U(M_i) - u(\mu).$$

Admettons d'abord qu'au point μ la surface S admette un plan tangent variable d'une manière continue.

La quantité ρ variant d'une manière continue au voisinage du point μ, on peut tracer autour de ce point un domaine D, découpant la surface S en deux segments, l'un σ, voisin du point μ, l'autre Σ, de telle manière que, pour tout point M_i du domaine D,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on ait

$$\left| \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(m)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\sigma - \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(\mu)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

quelque petit que soit ε.

D'ailleurs, le point μ étant à l'intérieur de ce domaine, si l'on désigne par ρ la ligne μm, on aura aussi

$$\left| \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(m)\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\sigma - \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(\mu)\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'autre part, la quantité

$$\mathbf{S}_\Sigma \frac{[\varphi(m) - \varphi(\mu)]\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\Sigma$$

varie évidemment d'une manière continue, même lorsque le point M traverse la surface σ. On pourra donc, autour du point μ, tracer un domaine d, contenu dans D, assez petit pour que, pour tout point M_i de ce domaine, on ait

$$\left| \mathbf{S}_\Sigma \frac{[\varphi(m) - \varphi(\mu)]\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\Sigma - \mathbf{S}_\Sigma \frac{[\varphi(m) - \varphi(\mu)]\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\Sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Observons maintenant que l'on a

$$\mathrm{U}(\mathrm{M}_i) = \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(m)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\sigma + \mathbf{S}_\Sigma \frac{\varphi(m)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\Sigma,$$

$$u(\mu) = \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(m)\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\sigma + \mathbf{S}_\Sigma \frac{\varphi(m)\cos(\rho, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\Sigma;$$

que les lemmes de Gauss donnent (Livre I, Chap. IV, § 1)

$$4\pi\varphi(\mu) = \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(\mu)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\sigma + \mathbf{S}_\Sigma \frac{\varphi(\mu)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{r^2}\, d\Sigma,$$

$$2\pi\varphi(\mu) = \mathbf{S}_\sigma \frac{\varphi(\mu)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\sigma + \mathbf{S}_\Sigma \frac{\varphi(\mu)\cos(r, \mathrm{N}_e)}{\rho^2}\, d\Sigma,$$

et nous trouverons que, pour tout point M_i du domaine d, on a

$$|\mathrm{U}(\mathrm{M}_i) - u(\mu) - 2\pi\varphi(\mu)| < \varepsilon,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim[\mathrm{U}(\mathrm{M}_i) - u(\mu)] = 2\pi\varphi(\mu). \tag{3}$$

Si, au point μ, la surface S admettait une nappe conique tan-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

gente d'ouverture sphérique α, ou un dièdre tangent dont l'angle plan eût pour valeur $\frac{\alpha}{2}$, on trouverait de même

$$\lim[U(M_i) - u(\mu)] = (4\pi - \alpha)\rho(\mu). \tag{3 bis}$$

Supposons maintenant que le point M tende vers le point μ en restant extérieur à la surface S. Nous aurons, dans le premier cas,

$$\lim[U(M_e) - u(\mu)] = -2\pi\rho(\mu), \tag{4}$$

et, dans le second,

$$\lim[U(M_e) - u(\mu)] = -\alpha\rho(\mu). \tag{4 bis}$$

Si les deux points M_i, M_e tendent vers un même point de la surface S, l'un en restant intérieur à cette surface, l'autre en lui restant extérieur, on a, dans tous les cas,

$$\lim[U(M_i) - U(M_e)] = 4\pi\rho(\mu). \tag{5}$$

§ 5. — Définition et propriétés des fonctions subordonnées.

Soit $\psi(m)$ une quantité définie de la manière suivante :

Si au point m la surface s admet un plan tangent unique variable d'une manière continue, on a $\psi(m) = 0$. Si, au contraire, le point m est un point singulier, on a $\psi(m) = 2\pi - \alpha$, α ayant le même sens que dans les formules (3 *bis*) et (4 *bis*).

Posons

$$2\pi\rho'(m) = u(m) + \psi(m) + \rho(m) \tag{6}$$

et

$$U'(M) = \int\!\!\int_S \frac{\rho'(m)\cos(r, N_e)}{r^2}\, dS. \tag{7}$$

Cette égalité définit une fonction qui existe en tout point de l'espace, et que nous nommerons la *fonction subordonnée* de la fonction U(M).

Il est facile de voir, d'après les inégalités (3) et (3 *bis*), que l'on a

$$2\pi\rho'(m) = \lim[U(M_i)] - 2\pi\rho(m).$$

La fonction subordonnée est donc une quantité variable d'une manière continue sur la surface S. Aussi la fonction U'(M), définie par l'égalité (7), est-elle une fonction de tout point analogue

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à la fonction U(M) définie par l'égalité (2). Elle est harmonique dans tout l'espace, sauf sur la surface S. Elle est discontinue sur cette surface ; si $u'(\mu)$ désigne la valeur qu'elle prend au point μ de cette surface, on a

$$(8)\qquad \begin{cases} \lim[U'(M_i) - u'(\mu)] = [2\pi \quad + \psi(\mu)]\rho'(\mu), \\ \lim[U'(M_e) - u'(\mu)] = [\psi(\mu) - 2\pi \quad]\rho'(\mu). \end{cases}$$

De même que l'on a formé la fonction subordonnée U'(M) de la fonction U(M), on peut former la fonction subordonnée intérieure U''(M) de la fonction U'(M), ... On aura alors un moyen régulier de former une suite illimitée de fonctions comme l'indique le Tableau suivant :

$$(I)\quad \begin{cases} U\ (M) = \mathbf{S} \dfrac{\rho(m)\cos(r, N_e)}{r^2}\, dS, \\ U'\ (M) = \mathbf{S} \dfrac{\rho'(m)\cos(r, N_e)}{r^2}\, dS, \\ U''\ (M) = \mathbf{S} \dfrac{\rho''(m)\cos(r, N_e)}{r^2}\, dS, \\ U'''(M) = \mathbf{S} \dfrac{\rho'''(m)\cos(r, N_e)}{r^2}\, dS, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{aligned} &2\pi\rho'\ (m) = u\ (m) + \psi(m)\rho\ (m), \\ &2\pi\rho''\ (m) = u'\ (m) + \psi(m)\rho'\ (m), \\ &2\pi\rho'''(m) = u''(m) + \psi(m)\rho''(m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

Il est facile de voir, par les égalités (3 *bis*), (8) et les égalités analogues, que l'on peut écrire

$$(II)\qquad \begin{cases} \lim[U\ (M_i)] = 2\pi[\rho\ (\mu) + \rho'\ (\mu)], \\ \lim[U'\ (M_i)] = 2\pi[\rho'\ (\mu) + \rho''\ (\mu)], \\ \lim[U''(M_i)] = 2\pi[\rho''(\mu) + \rho'''(\mu)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

D'autre part, d'après les égalités (4 *bis*), (8) et les égalités analogues, on peut écrire

$$(III)\qquad \begin{cases} \lim[U\ (M_e)] = 2\pi[\rho'\ (\mu) - \rho\ (\mu)], \\ \lim[U'(M_e)] = 2\pi[\rho''\ (\mu) - \rho'\ (\mu)], \\ \lim[U''(M_e)] = 2\pi[\rho'''(\mu) - \rho''(\mu)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Arrivons maintenant à la proposition fondamentale de toute cette théorie ; elle s'énonce ainsi :

Si G *est la plus grande et* H *la plus petite des valeurs que*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

prend $v(m)$ sur la surface S ; *si* μ *et* μ' *sont deux points quelconques de la surface* S, *on a toujours*

$$v'(\mu') - v'(\mu) \leqq \lambda(G - H),$$

λ *étant le facteur qui figure dans l'inégalité* (1).

Soit M la moyenne arithmétique des deux quantités G, H,

$$M = \frac{G + H}{2}.$$

Divisons la surface S en deux régions : l'une σ, dans laquelle $v(m)$ a en tout point une valeur égale ou supérieure à M, l'autre σ' dans laquelle $v(m)$ a en tout point une valeur inférieure à M.

La définition de $v'(\mu)$ nous donne

$$2\pi v'(\mu) = \mathrm{S} \frac{v(m)\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} dS + \psi(\mu) v(\mu).$$

On en déduit aisément

$$2\pi v'(\mu) \leqq \psi(\mu) G + G \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma + M \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma',$$

$$2\pi v'(\mu) \geqq \psi(\mu) H + M \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma + H \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho_2} d\sigma'.$$

Ces inégalités peuvent encore s'écrire

$$2\pi v'(\mu) \leqq G\left[\psi(\mu) + \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} dS\right] + (M - G) \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma',$$

$$2\pi v'(\mu) \geqq H\left[\psi(\mu) + \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} dS\right] + (M - H) \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma.$$

Mais on a, d'après le troisième lemme de Gauss,

$$\psi(\mu) + \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} dS = 2\pi,$$

et nos égalités deviennent

$$2\pi v'(\mu) \leqq 2\pi G + (M - G) \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma',$$

$$2\pi v'(\mu) \geqq 2\pi H + (M - H) \mathrm{S} \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma$$

ou enfin

$$(9) \quad \begin{cases} 2\pi v'(\mu) \leqq 2\pi G - \dfrac{G - H}{2} \mathrm{S} \dfrac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma', \\ 2\pi v'(\mu) \geqq 2\pi H + \dfrac{G - H}{2} \mathrm{S} \dfrac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2} d\sigma. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On peut, pour $v'(\mu')$, trouver deux inégalités analogues. On en déduira

$$v'(\mu') - v'(\mu) \leqq (G - H)\left\{1 - \frac{1}{4\pi}\left[\int \frac{\cos(\rho', N_e)}{\rho'^2}\, d\sigma' + \int \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2}\, d\sigma\right]\right\},$$

ou bien, en vertu de l'inégalité (1),

$$v'(\mu') - v'(\mu) \leqq \lambda(G - H),$$

ce qui est l'inégalité annoncée.

Soient, en particulier, G' la plus grande et H' la plus petite des valeurs que prendra $v'(m)$ sur la surface S ; on aura

$$(G' - H') \leqq \lambda(G - H).$$

Si G, G', G'', G''', ... *sont les plus grandes valeurs et* H, H', H'', H''', ... *les plus petites valeurs que prennent les fonctions* $v(m)$, $v'(m)$, $v''(m)$, $v'''(m)$, ... *sur la surface* S, *on aura*

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} (G' - H') \leqq \lambda(G - H), \\ (G'' - H'') \leqq \lambda(G' - H'), \\ (G''' - H''') \leqq \lambda(G'' - H''), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\text{(V)} \qquad G^{(n)} - H^{(n)} \leqq \lambda^n(G - H).$$

Enfin, comme les quantités

$$\int \frac{\cos(\rho, Ne)}{\rho^2}\, d\sigma', \quad \int \frac{\cos(\rho, N_e)}{\rho^2}\, d\sigma$$

ne peuvent jamais être négatives pour une surface de second rang, les inégalités (9) donnent

$$G \geqq v'(m) \geqq H,$$

et, de même,

$$G \geqq v''(m) \geqq H,$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

ou, en d'autres termes,

$$\text{(VI)} \qquad G \geqq v^{(n)}(m) \geqq H,$$

quel que soit n.

Des inégalités (V) et (VI) on déduit immédiatement le résultat que voici :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il existe une constante C *telle que l'on ait*

$$|\rho^{(n)}(m) - C| < \lambda^n (G - H), \tag{VII}$$

quel que soit n.

§ 6. — Solution du problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à une surface de second rang non biétoilée.

Ces préliminaires établis, considérons la série

$$[\rho(m) - \rho'(m)] + [\rho'(m) - \rho''(m)] + [\rho''(m) - \rho'''(m)] + \dots \tag{10}$$

dont le terme de rang $(n+1)$ est

$$T^{(n+1)} = \rho^{(n)}(m) - \rho^{(n+1)}(m).$$

Il est facile de voir, par l'inégalité (VII), que l'on a

$$|T^{(n+1)}| < 2\lambda^n (G - H),$$

en sorte que cette série (10) est uniformément convergente.

Il est facile d'en trouver la somme ; la somme des n premiers termes de cette série est en effet

$$\rho(m) - \rho^{(n)}(m),$$

et, lorsque n croît au delà de toute limite, cette quantité tend vers

$$\rho(m) - C.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que si, dans la série (10), on groupe les termes deux par deux, on obtient une nouvelle série qui converge uniformément et a même somme que la série (10).

La série

$$\left\{ \begin{array}{l} \{[\rho(m) - \rho'(m)] + [\rho'(m) - \rho''(m)]\} \\ + \{[\rho''(m) - \rho'''(m)] + [\rho'''(m) - \rho^{IV}(m)]\} + \dots \end{array} \right. \tag{10 bis}$$

converge donc uniformément et a pour somme

$$\rho(m) - C.$$

Considérons maintenant la série

$$\frac{1}{2\pi} \{[U(M_i) - U'(M_i)] + [U''(M_i) - U'''(M_i)] + [U^{IV}(M_i) - U^{V}(M_i)] + \dots\}. \tag{11}$$

Chacun de ses termes est une fonction harmonique à l'intérieur de la surface S. Lorsque le point M_i tend vers un point de la sur-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

face S, chacun des termes de la série (11) tend, d'après les égalités (II), vers le terme correspondant de la série (10 *bis*). Ainsi, d'après le théorème de M. Vito Volterra, cette série (11) représente une fonction harmonique à l'intérieur de la surface S prenant la valeur $[\varphi(m) - C]$ sur la surface S, et tendant d'une manière continue vers cette valeur lorsque le point M_i tend vers le point M.

Si donc on veut former une fonction harmonique à l'intérieur de la surface S, *continue jusqu'à la surface* S *et prenant en tout point m de cette surface une valeur donnée* $\varphi(m)$, *on formera les fonctions* $\varphi'(m)$, $\varphi''(m)$, ..., U, U', U'', ..., *d'après les règles indiquées au tableau* (I); *on cherchera la constante* C, *limite des valeurs des quantités* $\varphi(m)$, $\varphi'(m)$, $\varphi''(m)$, ... *et la fonction cherchée sera donnée par la série*

$$(\text{VIII}) \quad \left\{ V(M_i) = C + \frac{1}{2\pi} \left\{ [U(M_i) - U'(M_i)] + [U''(M_i) - U'''(M_i)] + [U^{IV}(M_i) - U^{V}(M_i)] + \ldots \right\}. \right.$$

Le problème de Dirichlet est ainsi résolu pour l'espace intérieur à toute surface de second rang non biétoilée.

§ 7. — Solution du problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à une surface de second rang non biétoilée.

On peut aussi résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à une surface de second rang non biétoilée; mais la solution présente quelques complications qui ne s'offraient pas dans le problème précédent.

Soit $\varpi(m)$ l'ensemble des valeurs données sur la surface S. Plaçons à l'intérieur de cette surface, en un point arbitrairement choisi, une charge électrique k. Au point m de la surface S, la fonction potentielle de cette charge prend la valeur $q(m)$. Posons

$$\varphi(m) = \varpi(m) + q(m),$$

et formons la fonction U et les fonctions subordonnées comme l'indique le tableau (I).

La fonction $\varphi(m)$ est la somme d'une fonction $\varpi(m)$, indépendante de k, et d'une fonction $q(m)$, proportionnelle à k; elle est donc fonction linéaire de k. On verra sans peine qu'il en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

est de même des fonctions $v'(m)$, $v''(m)$, ..., en sorte que ces fonctions ont pour limite, $L + Pk$, L et P étant deux constantes.

Considérons maintenant la série

$$-\frac{1}{2\pi}[U(M_e) + U'(M_e) + U''(M_e) + U'''(M_e) + \dots].$$

Chacun de ses termes est une fonction harmonique à l'extérieur de la surface S, se comportant à l'infini comme une fonction potentielle, et, d'après les égalités (III), lorsque le point M_e tend vers le point m de la surface S, chacun de ces termes tend d'une manière continue vers le terme correspondant de la série (10).

Par conséquent, la série considérée représente une fonction harmonique dans tout l'espace extérieur à la surface S, se comportant à l'infini comme une fonction potentielle, prenant sur la surface S la valeur

$$v(m) - C = w(m) + q(m) - L - Pk$$

et tendant d'une manière continue vers cette valeur lorsque le point M_e tend vers le point m.

Ce résultat nous conduit sans aucune peine à la règle suivante :

Si l'on veut former une fonction harmonique à l'extérieur de la surface S, *se comportant à l'infini comme une fonction potentielle, continue jusqu'à la surface* S *et prenant en tout point m de cette surface une valeur donnée* $w(m)$, *on opérera ainsi :*

En un point O *arbitrairement choisi à l'intérieur de la surface* S, *on placera une charge* K *dont la fonction potentielle prendra au point m la valeur* $q(m)$. *Posant*

$$v(m) = w(m) + q(m),$$

on formera le tableau (I).

Les fonctions $v'(m)$, $v''(m)$, ... *tendront vers une limite de la forme*

$$L + PK,$$

L *et* P *étant deux constantes.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans les fonctions U, U′, U″, ..., *on remplacera* K *par la valeur* $-\frac{L}{P}$. *Si l'on désigne par* R *la distance du point* M_c *au point* O, *et si l'on forme la fonction*

$$(IX) \qquad V(M_c) = \frac{L}{P}\frac{1}{R} - \frac{1}{2\pi}[U(M_c) + U'(M_c) + U''(M_c) + \dots].$$

elle résoudra le problème posé.

On voit donc que la méthode de M. Carl Neumann permet, étant donnée une surface de second rang non biétoilée, de résoudre effectivement le problème de Dirichlet tant pour l'espace intérieur à cette surface que pour l'espace qui lui est extérieur. Il s'en faut bien que l'on ait ainsi la solution du problème de Dirichlet pour tous les cas possibles ; mais, du moins, en obtient-on la solution pour un cas infiniment plus étendu que tous ceux où l'on avait pu la donner jusqu'ici.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE X.

LA DISTRIBUTION NATURELLE.

§ 1. — **Comment la solution du problème de Dirichlet pour tous les corps peut se ramener à la recherche de la distribution naturelle sur tous les corps.**

Si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à une certaine surface, on sait aussi le résoudre pour l'espace extérieur à la surface en laquelle la première se transforme par inversion. Si donc on sait, pour tous les corps, résoudre le problème intérieur de Lejeune-Dirichlet, on sait aussi, pour tous les corps, résoudre le problème extérieur de Lejeune-Dirichlet. On peut se proposer seulement de résoudre le premier problème.

On sait résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace intérieur à une certaine surface S, si l'on sait trouver la fonction de Green relative à cette surface S et à un pôle quelconque P intérieur à cette surface S.

Trouver la fonction de Green pour la surface S et le pôle P se ramène à trouver une fonction $\Gamma(x, y, z)$, harmonique à l'intérieur de la surface S et devenant égale à $\left(-\frac{1}{\overline{MP}}\right)$ en tout point M de la surface S.

Transformons la surface S par inversion en plaçant le pôle de transformation au point P et en prenant l'unité pour coefficient de transformation. Soit S′ la transformée de la surface S. Supposons que nous sachions trouver la fonction $\gamma(x', y', z')$, qui est harmonique dans l'espace extérieur à la surface S′, égale à l'unité sur la surface S′ et, à l'infini, égale à zéro à la manière d'une fonction potentielle. Si l'on transforme de nouveau par inversion la surface S′ en la surface S, la fonction $\gamma(x', y', z')$ se transforme en une fonction $g(x, y, z)$. Si l'on désigne par r la distance du point

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

(x, y, z) au point P, la fonction

$$-\frac{1}{r}g(x, y, z)$$

sera harmonique en tout point intérieur à la surface S et prendra la valeur $\left(-\frac{1}{\overline{MP}}\right)$ en tout point de cette surface. Ce sera donc la fonction cherchée $\Gamma(x, y, z)$.

On saura donc trouver la fonction $\Gamma(x, y, z)$ pour l'espace intérieur à toute surface et pour toute position du pôle en cet espace, si l'on sait trouver, pour toute surface, la fonction $\gamma(x, y, z)$ qui est harmonique dans tout l'espace extérieur à cette surface, qui prend la valeur 1 sur la surface, et devient, à l'infini, égale à zéro comme une fonction potentielle.

Cette fonction $\gamma(x, y, z)$ est la fonction potentielle d'une certaine quantité d'électricité distribuée en équilibre sur le conducteur soustrait à toute influence. La quantité d'électricité qui admet pour fonction potentielle la fonction $\gamma(x, y, z)$ est la quantité $\frac{C}{\varepsilon}$, C étant la capacité du condensateur et ε la constante des lois de Coulomb.

Supposons que nous sachions déterminer la distribution d'équilibre qu'affecte, sur le conducteur soustrait à toute influence, une charge électrique égale à l'unité. Nous pourrons alors calculer la fonction potentielle $u(x, y, z)$ de cette distribution. Cette fonction prend, en tout point de la surface du conducteur, une même valeur A. Nous aurons

$$A = \frac{\varepsilon}{C}$$

et

$$\gamma(x, y, z) = \frac{C}{\varepsilon}u(x, y, z) = \frac{u(x, y, z)}{A}.$$

Nous nommerons *distribution naturelle* sur un conducteur la distribution qu'affecte une charge égale à l'unité à la surface de ce conducteur soustrait à toute influence, et nous pourrons énoncer ce théorème :

On sait résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace tant intérieur qu'extérieur à une surface quelconque, si l'on sait déterminer la distribution naturelle sur tout conducteur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 2. — Méthode de M. G. Robin pour déterminer la distribution naturelle sur un conducteur.

Toute méthode propre à résoudre en général le problème de Lejeune-Dirichlet est évidemment propre à déterminer en particulier la distribution naturelle sur un conducteur; mais la recherche de la distribution naturelle donne prise à certaines méthodes qui ne peuvent s'étendre à la résolution du problème de Lejeune-Dirichlet en général.

De ce nombre est l'élégante méthode indiquée par M. G. Robin pour déterminer la distribution naturelle à la surface de tout corps limité par une surface de second rang.

Le point de départ des recherches de M. G. Robin est la considération d'une équation fonctionnelle remarquable à laquelle satisfait la densité électrique en tout point d'un conducteur en équilibre.

Soient

$\sigma(M)$ la densité électrique en un point M de la surface S d'un conducteur électrisé ;

N_e la normale à la surface S, au point M, vers l'extérieur du conducteur ;

Φ_{N_e} la composante suivant N_e de l'action électrostatique au point M.

On sait que l'on a (p. 88)

$$\Phi_{N_e} = 2\pi\varepsilon\sigma(M).$$

Soient

dS un élément de la surface S ;

P un point de l'élément dS ;

P_1 un point électrisé qui agit sur le conducteur ;

q_1 la charge électrique que porte ce point.

Nous aurons

$$\Phi_{N_e} = \varepsilon \int_S \frac{\sigma(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\, dS + \varepsilon \sum \frac{q_1 \cos(\overline{P_1M}, N_e)}{\overline{P_1M}^2}.$$

La fonction $\sigma(M)$ vérifie donc l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad 2\pi\sigma(M) = \int_S \frac{\sigma(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\, dS + \sum \frac{q_1 \cos(\overline{P_1M}, N_e)}{\overline{P_1M}^2}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Réciproquement, si la densité $\sigma(M)$ vérifie cette égalité, une couche électrique qui a pour densité $\sigma(M)$ en tout point M de la surface S met en équilibre le conducteur qui est limité par la surface S et qui est soumis à l'action des points électrisés P_i.

Soit, en effet, F_{N_i} la composante suivant la normale à la surface S, vers l'intérieur du conducteur, de l'action électrostatique en un point intérieur à la surface S et infiniment voisin du point M.

Nous aurons [Livre I, Ch. VII, égalité $(\frac{\cdot}{7})$]

$$\Phi_{N_e} + F_{N_i} - 2\pi\varepsilon\sigma(M) = 0.$$

Mais l'égalité (1) donne

$$\Phi_{N_e} - 2\pi\varepsilon\sigma(M) = 0.$$

Elle entraîne donc

$$F_{N_i} = 0,$$

ou bien, en désignant par V la fonction potentielle,

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0.$$

La fonction V est alors constante à l'intérieur du conducteur limité par la surface S et ce conducteur est en équilibre. L'équation fonctionnelle (1) détermine donc toute distribution d'équilibre sur la surface S.

M. G. Robin (1) a fait de fort belles applications de l'équation (1). Citons-en seulement une à titre d'exemple :

Une sphère de rayon R *est maintenue à un niveau potentiel* A, *en présence d'un point électrisé* P_1, *portant une charge* q_1 *et dont la distance au centre de la sphère est* D_1. *Quelle est la distribution électrique sur cette sphère ?*

Nous aurons

$$\cos(\overline{PM}, N_e) = \frac{\overline{PM}}{2R},$$

$$\cos(\overline{P_1M}, N_e) = \frac{\overline{P_1M}}{2R} - \frac{D_1^2 - R^2}{2R.\overline{P_1M}}.$$

(1) G. Robin, *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. III. Supplément; 1886).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'égalité (1) devient donc

$$2\pi\sigma(M) = \frac{1}{2R}\left(\int\!\!\int \frac{\sigma(P)}{\overline{PM}}\,dS + \frac{q_1}{\overline{P_1M}}\right) - \frac{D_1^2 - R^2}{2R}\,\frac{q_1}{\overline{P_1M}^3}.$$

Mais on a

$$\int\!\!\int \frac{\sigma(P)}{\overline{PM}}\,dS + \frac{q_1}{\overline{P_1M}} = A,$$

et, par conséquent,

$$\sigma(M) = \frac{A}{4\pi R} - \frac{D_1^2 - R^2}{4\pi R}\,\frac{q_1}{\overline{P_1M}^3},$$

résultat auquel Sir W. Thomson (1) était arrivé par des méthodes géométriques très élégantes, mais détournées.

Dans le cas où aucune influence ne s'exerce sur le conducteur limité par la surface S, l'égalité (1) se réduit à

$$2\pi\sigma(M) = \int\!\!\int \frac{\sigma(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\,dS. \tag{2}$$

C'est sur la considération de cette égalité que repose la méthode donnée par M. G. Robin (2) pour déterminer la distribution naturelle de l'électricité sur un conducteur limité par une surface de second rang.

Prenons une fonction $f(M)$ assujettie seulement à être uniforme, à demeurer finie, et à varier toujours d'une manière continue sur la surface S. Supposons en outre que cette fonction ait le même signe en tout point de la surface S.

Formons les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} f_1(M) &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int \frac{f(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\,dS,\\ f_2(M) &= \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int \frac{f_1(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\,dS,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les fonctions $f(M)$, $f_1(M)$, $f_2(M)$, ... forment une suite illi-

(1) Sir W. THOMSON, *Geometrical investigations with reference to the distribution of electricity on spherical conductor* (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1848, 1849, 1850 ; *Papers on electrostatics*, art. 89).

(2) G. ROBIN, *Distribution de l'Électricité sur une surface fermée convexe* (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 1834 ; 1887).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mitée. Nous allons prouver que, lorsque n croît au delà de toute limite, la fonction $f_n(\mathrm{M})$ tend vers une limite qui a pour valeur $\mathrm{K}e(\mathrm{M})$, $e(\mathrm{M})$ étant la densité superficielle au point M dans la distribution naturelle.

Écrivons en effet la première des égalités (3) sous la forme

$$(4) \qquad f_1(\mathrm{M}) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{S} \frac{f(\mathrm{P})}{e(\mathrm{P})} \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\mathrm{S}.$$

Soit G la limite supérieure des valeurs prises, sur la surface S, par le rapport $\frac{f(\mathrm{P})}{e(\mathrm{P})}$. Soit H la limite inférieure des mêmes valeurs. Posons

$$\mu = \frac{\mathrm{G} + \mathrm{H}}{2}.$$

Divisons la surface S en deux parties : l'une, σ, en tout point P de laquelle on ait

$$\frac{f(\mathrm{P})}{e(\mathrm{P})} \geq \mu,$$

l'autre, σ', en tout point P de laquelle on ait

$$\frac{f(\mathrm{P})}{e(\mathrm{P})} < \mu.$$

La surface étant de second rang, $\cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)$ n'est jamais négatif; $e(\mathrm{P})$ est positif en tout point (Chap. IV, théorème I). L'égalité (4) permet donc d'écrire

$$2\pi f_1(\mathrm{M}) \leq \mathrm{G} \mathrm{S}_\sigma \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\sigma + \mu \mathrm{S}_{\sigma'} \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\sigma',$$

$$2\pi f_1(\mathrm{M}) \geq \mu \mathrm{S}_\sigma \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\sigma + \mathrm{H} \mathrm{S}_{\sigma'} \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\sigma',$$

ou bien, d'après la définition de μ,

$$(5) \quad \begin{cases} 2\pi f_1(\mathrm{M}) \leq \mathrm{G} \mathrm{S}_\mathrm{S} \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\mathrm{S} - \frac{\mathrm{G} - \mathrm{H}}{2} \mathrm{S}_{\sigma'} \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\sigma', \\ 2\pi f_1(\mathrm{M}) \geq \mathrm{H} \mathrm{S}_\mathrm{S} \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\mathrm{S} + \frac{\mathrm{G} - \mathrm{H}}{2} \mathrm{S}_\sigma \frac{e(\mathrm{P}) \cos(\overline{\mathrm{PM}}, \mathrm{N}_e)}{\overline{\mathrm{PM}}^2} d\sigma. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais, d'après l'égalité (2), on doit avoir

$$2\pi e(M) = \int_S \frac{e(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\, dS.$$

Si l'on pose

$$(6)\qquad \begin{cases} \int_\sigma \dfrac{e(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\, d\sigma = 2\pi\theta\, e(M), \\ \int_{\sigma'} \dfrac{e(P)\cos(\overline{PM}, N_e)}{\overline{PM}^2}\, d\sigma' = 2\pi\theta'\, e(M), \end{cases}$$

les deux quantités θ et θ' seront positives ; leur somme sera égale à 1 et, par conséquent, chacune d'elles sera inférieure à l'unité.

L'introduction de ces relations permet d'écrire les égalités (5) sous la forme suivante :

$$\frac{f_1(M)}{e(M)} \leqq G - \theta' \frac{G - H}{2},$$

$$\frac{f_1(M)}{e(M)} \geqq G + \theta' \frac{G - H}{2}.$$

Soit Θ' la valeur de θ' qui correspond à la plus grande valeur G_1 que le rapport $\frac{f_1(M)}{e(M)}$ prenne sur la surface S. Soit Θ la valeur de θ qui correspond à la plus petite valeur H_1 que le rapport $\frac{f_1(M)}{e(M)}$ prenne sur la surface S. La seconde de ces quantités Θ et Θ' ne peut être égale à zéro, même si $f_1(M)$ est égal à $e(M)$ en tout point de la surface S ; chacune d'elles est inférieure à l'unité. Nous aurons, en vertu des inégalités précédentes,

$$G_1 \leqq G - \Theta' \frac{G - H}{2},$$

$$H_1 \leqq H + \Theta \frac{G - H}{2},$$

et, par conséquent,

$$G_1 - H_1 \leqq (G - H)\left(1 - \frac{\Theta + \Theta'}{2}\right).$$

En raisonnant de même sur les autres égalités (3), nous trou-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

verons

$$G_2 - H_2 \leqq (G_1 - H_1)\left(1 - \frac{\Theta_1 + \Theta'_1}{2}\right),$$

$$G_3 - H_3 \leqq (G_2 - H_2)\left(1 - \frac{\Theta_2 + \Theta'_2}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Chacune des quantités Θ_n, Θ'_n est positive et inférieure à 1 ; la quantité Θ_n ne peut tendre vers zéro. Le rapport

$$1 - \frac{\Theta_n + \Theta'_n}{2}$$

est donc positif et admet une limite supérieure λ inférieure à l'unité, en sorte que l'on a

$$G_1 - H_1 \leqq \lambda(G - H),$$
$$G_2 - H_2 \leqq \lambda(G_1 - H_1),$$
$$G_3 - H_3 \leqq \lambda(G_2 - H_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

et, par conséquent,

$$G_n - H_n \leqq \lambda^n(G - H).$$

De là on conclut que le rapport $\frac{f_n(M)}{e(M)}$ tend vers une limite K indépendante de la position du point M sur la surface S, et que, par conséquent,

$$\lim[f_n(M)]_{n=\infty} = K e(M).$$

Cette valeur K est d'ailleurs forcément différente de zéro si, comme nous l'avons supposé, la fonction $f(M)$ a même signe en tout point de la surface S.

La constante K se détermine aisément. Si l'on remarque que

$$\int_S e(M)\, dS = 1,$$

on voit que l'on a

$$\lim\left[\int_S f_n(M)\, dS\right]_{n=\infty} = K,$$

et, par conséquent,

$$e(M) = \lim\left[\frac{f_n(M)}{\int_S f_n(M)\, dS}\right]_{n=\infty},$$

formule qui détermine la distribution naturelle sur la surface S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

M. Poincaré (1) a donné une autre méthode qui permet de déterminer la distribution naturelle sur une surface fermée, convexe ou non convexe, ne présentant pas d'autres singularités qu'un nombre limité de points coniques.

---

(1) H. POINCARÉ, *Sur le problème de la distribution électrique* (*Comptes rendus*, t. CIV, p. 44 ; 1887) ; *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*American Journal of Mathematics*, t. XII, p. 211; 1890).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE XI.

LE PROCÉDÉ ALTERNÉ.

§ 1. — Extension du problème de Lejeune-Dirichlet.

Dans l'étude du problème de Lejeune-Dirichlet, nous avons supposé jusqu'ici qu'en tout point m de la surface S les valeurs données $v(m)$ étaient finies et variaient d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S. Cette supposition nous était dictée par la manière même dont le problème de Lejeune-Dirichlet s'introduit dans l'étude de la distribution électrique. Mais, pour l'étude d'une méthode qui sera exposée au paragraphe suivant, il nous est nécessaire d'étendre l'énoncé du problème de Dirichlet en admettant la possibilité de certaines discontinuités pour les valeurs données $v(m)$.

Nous admettrons donc que, sur la surface S, on puisse tracer une ligne L ne passant pas deux fois par le même point, et possédant les propriétés suivantes :

La fonction $v(m)$ est continue en tout point de la surface S, sauf aux points de la ligne L.

Soit μ un point de la ligne L. Si le point m tend vers le point μ en restant d'un côté déterminé de la ligne L, la fonction $v(m)$ tend vers une limite parfaitement déterminée $v_1(\mu)$. Si le point m tend vers le point μ en restant de l'autre côté de la ligne L, la fonction $v(m)$ tend vers une limite parfaitement déterminée, mais différente de la précédente, $v_2(\mu)$.

On ne suppose pas que l'on ait donné de valeurs à la fonction $v(m)$ aux divers points de la ligne L. *On suppose seulement que ces valeurs doivent être finies* (1).

Il est facile de voir que, dans ces conditions, la démonstration

(1) Cette restriction est essentielle. Si la fonction $v(m)$ n'est pas assujettie à être *finie* le long des lignes de discontinuité, le problème proposé peut admettre une infinité de solutions, comme M. Painlevé l'a démontré pour le problème analogue relatif aux fonctions de deux variables [PAUL PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II. p. B.22; 1888)]

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par laquelle on a prouvé, au Chapitre V, que le problème de Dirichlet ne pouvait admettre plus d'une solution demeure entièrement valable.

Mais une circonstance se présente sur laquelle il est nécessaire d'appeler l'attention.

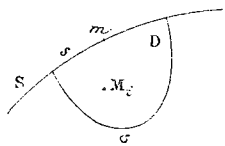
Prenons tout d'abord un point m au voisinage duquel les valeurs de $\varphi(m)$ n'éprouvent aucune discontinuité. Soit M_i un point intérieur à la surface S. Soit $V(M_i)$ une fonction qui résout pour cet espace le problème de Dirichlet. On peut toujours, autour du point m tracer un domaine D, compris à l'intérieur de la surface S, et assez petit pour que, pour tout point M_i de ce domaine, on ait

$$|V(M_i) - \varphi(m)| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive donnée d'avance.

Soit, en effet, s la partie de la surface S qui forme la limite du domaine D (*fig.* 42) avec une surface σ comprise à l'intérieur de

Fig. 42.



l'espace considéré. La fonction $V(M)$ est continue sur la surface σ et sur la surface s. Il en est de même de la fonction

$$U(M) = V(M) - \varphi(m),$$

puisque $\varphi(m)$ ne varie pas avec le point M. On peut donc prendre cette surface $(s + \sigma)$ assez petite pour que, pour tout point M de cette surface, on ait

$$|U(M)| < \varepsilon.$$

Alors, comme la fonction $U(M_i)$, harmonique à l'intérieur du domaine D, prend sa valeur absolue maxima en un point de la surface $(s + \sigma)$ qui limite le domaine D, on voit que l'on aura, comme nous l'avions annoncé,

$$|U(M_i)| < \varepsilon,$$

pour tout point du domaine D.

Ainsi, lorsque la fonction $\varphi(m)$ *est continue sur la surface* S

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

au voisinage du point m, la fonction $V(M_i)$ *qui résout le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à la surface* S, *et la fonction* $W(M_e)$ *qui résout le même problème pour l'espace extérieur à la surface* S, *tendent l'une et l'autre uniformément vers* $\varphi(m)$ *si le point* M_i *et le point* M_e *tendent vers le point m.*

La démonstration sur laquelle repose cette proposition ne se peut plus répéter si le point m se trouve coïncider avec un point μ de la ligne L le long de laquelle les valeurs de $\varphi(m)$ sont discontinues.

Dans ce cas, il peut arriver que, le point M_i tendant vers le point μ, la fonction $V(M_i)$ qui résout le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à la surface S, ne tende plus *d'une manière uniforme* vers aucune limite ; il peut arriver que *la limite vers laquelle tendent les valeurs de* $V(M_i)$ *dépende du chemin suivi par le point* M_i *pour venir rejoindre le point m.*

§ 2. — Extension de la méthode de la moyenne arithmétique.

La méthode de la moyenne arithmétique, créée par M. Carl Neumann pour résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet, peut-elle s'étendre au cas où les valeurs données $\varphi(m)$ présentent, sur la surface S, des discontinuités du genre de celles que nous venons de définir ?

Cette question a été complètement examinée, pour le cas de deux variables, par M. Axel Harnack (1) qui y a répondu affirmativement. Les raisonnements de M. Axel Harnack ne peuvent s'étendre au cas de trois variables que moyennant certaines restrictions, qui ne permettent pas de laisser à la conclusion son entière généralité.

Voici dans quelles conditions les raisonnements de M. Axel Harnack se laissent étendre au problème de Lejeune-Dirichlet dans l'espace :

La ligne L, *le long de laquelle les valeurs de* $\varphi(m)$ *sont discontinues, est tout entière tracée dans une région en tout point de laquelle la surface* S *admet un plan tangent unique variable d'une manière continue ; ou bien encore, en tout point de la ligne* L, *la surface* S *admet deux plans tangents*

(1) AXEL HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, ..., p. 96. Leipzig, 1887.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

distincts ; mais la ligne L *ne coupe jamais une arête de la surface* S, *ou ne passe jamais par un point conique de cette surface. De plus, la ligne* L *admet en chaque point une tangente unique, variable d'une manière continue.*

Moyennant ces conditions, la surface S étant en outre supposée une surface de second rang non biétoilée, la méthode de la moyenne arithmétique permet de résoudre le problème de Dirichlet tant pour l'espace extérieur à la surface S que pour l'espace intérieur.

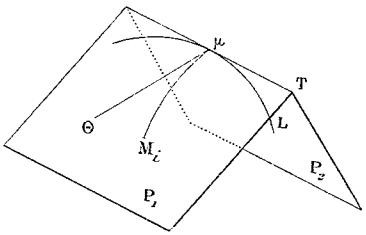
La solution ainsi trouvée possède une propriété qu'il est utile d'indiquer.

Soit, par exemple, $V(M_i)$ la fonction ainsi trouvée qui résout le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à la surface S.

Supposons que le point M_i tende vers un point m de la surface S où la fonction $\varphi(m)$ est continue; $V(M_i)$ tend alors d'une manière uniforme vers $\varphi(m)$, conformément à ce que nous avons dit au paragraphe précédent.

Supposons, au contraire, que le point M_i tende vers un point μ de la ligne de discontinuité L (*fig.* 43) ; soient $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$ les

Fig. 43.



deux valeurs limites vers lesquelles tend $\varphi(m)$ selon que le point m tend vers μ en demeurant d'un côté ou de l'autre de la ligne L. La surface S peut admettre au point μ deux plans tangents : l'un, P_1, à la région de la surface à laquelle correspond la limite $\varphi_1(\mu)$; l'autre, P_2, à la région de la surface à laquelle correspond la limite $\varphi_2(\mu)$. Ces deux plans font entre eux un angle α qui se réduit à π si la surface admet au point μ un seul plan tangent.

Soit μT la tangente en μ à la ligne L. Soit $\mu\Theta$ la tangente en μ à la ligne μM_i par laquelle le point M_i vient en μ. Les deux lignes μT, $\mu\Theta$ forment un plan Π. Le plan Π forme avec le plan P_1 un angle α_1 et avec le plan P_2 un angle α_2.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a

$$\lim V(M_i) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha}\right) \varphi_1(\mu) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\right) \varphi_2(\mu). \tag{1}$$

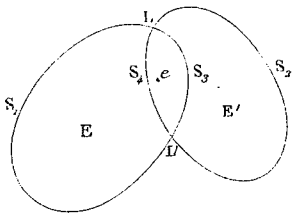
Ainsi, la valeur limite vers laquelle tend la fonction $V(M_i)$ dépend des angles α_1, α_2, et, par conséquent, du chemin suivi par le point M_i pour venir au point μ. Cela est d'accord avec ce que nous avons dit au précédent paragraphe.

La solution du problème extérieur de Lejeune-Dirichlet donne lieu à des remarques analogues.

§ 3. — Le procédé alterné; formation de la solution.

Imaginons deux surfaces fermées S et S′ qui se rencontrent (*fig.* 44).

Fig. 44.



Ces deux surfaces sont supposées se couper suivant une ligne LL′L″, de telle sorte que la surface S comprend une aire S_1 extérieure à S′ et une aire S_3 intérieure à S′; que la surface S′ comprend une aire S_2 extérieure à S et une aire S_4 intérieure à S.

Les deux surfaces S, S′ n'ont aucun point de contact; elles se rencontrent toujours sous un certain angle le long de la ligne LL′L″.

La ligne LL′L″ vérifie aussi bien sur la surface S que sur la surface S′ les restrictions imposées au paragraphe précédent à la ligne de discontinuité des valeurs de $\varphi(m)$.

Cela posé, imaginons que l'on ait une méthode pour résoudre le problème de Dirichlet à l'intérieur de la surface S, même dans le cas où les valeurs données sur cette surface seraient discontinues le long de la ligne LL′L″; que la solution ainsi trouvée possède, en tous les points de la ligne LL′L″, la propriété exprimée par

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'égalité (1). La méthode de la moyenne arithmétique satisfera à toutes ces conditions si la surface S est de second rang et non biétoilée.

Faisons une hypothèse analogue pour la surface S'.

Ces hypothèses admises, nous allons voir qu'il est possible de résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace compris entre les surfaces S_1 et S_2.

La méthode qui conduit à ce résultat important a été découverte en même temps par M. Schwarz (1) et par M. Carl Neumann (2). M. Carl Neumann (3) et M. Axel Harnack (4) en ont donné des exposés didactiques. M. Schwarz a donné à cette méthode le nom de *procédé alterné*.

Soient E l'espace compris entre les surfaces S_1, S_4 ; E' l'espace compris entre les surfaces S_2, S_3 ; e l'espace compris entre les surfaces S_1, S_2.

On se propose de trouver une fonction $V(M_i)$, harmonique dans tout l'espace $(E + E' + e)$ et prenant sur les surfaces S_1, S_2, qui limitent cet espace, des valeurs données $\varphi(m)$, variant d'un point à l'autre d'une manière continue.

Soit G la plus grande des valeurs de $\varphi(m)$ et soit K la plus petite.

Ces conventions posées, formons une fonction $U_1(x, y, z)$, harmonique à l'intérieur de l'espace $(E + e)$, prenant sur la surface S_1 les valeurs données $\varphi(m)$ et sur la surface S_3 la valeur constante K.

Cette fonction prend sur la surface S_4 des valeurs que nous désignerons par u_1^{IV}.

Formons ensuite une fonction $U_2(x, y, z)$, harmonique à l'intérieur de l'espace $(E' + e)$, prenant sur la surface S_2 les valeurs données $\varphi(m)$ et sur la surface S_4 les valeurs u_1^{IV}.

Cette fonction prend, sur la surface S_3, des valeurs que nous désignerons par u_2'''.

---

(1) SCHWARZ, *Programm der Polyteknikum-Schule in Zürich;* 1869-70.

(2) C. NEUMANN, *Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig ;* 21 avril et 31 octobre 1870.

(3) C. NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.* Leipzig, 1877.

(4) AXEL HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales,* .... Leipzig, 1887.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Formons de nouveau une fonction $U_3(x, y, z)$, harmonique dans l'espace $(E + e)$, prenant sur la surface S_1 les valeurs données $\varphi(m)$ et sur la surface S_3 les valeurs u_2'''.

Cette fonction prend, sur la surface S_4, des valeurs que nous désignerons par u_3^{IV}.

En continuant de la sorte, nous formerons successivement les fonctions contenues dans les deux Tableaux que voici :

I. — FONCTIONS HARMONIQUES DANS $(E + e)$.

	Valeurs sur		
Fonctions.	S_1.	S_3.	S_4.
$U_1(x, y, z)$.....	$\varphi(m)$	K	u_1^{IV}
$U_3(x, y, z)$.....	$\varphi(m)$	u_2'''	u_3^{IV}
$U_5(x, y, z)$.....	$\varphi(m)$	u_4'''	u_5^{IV}
.....	.....	...	...

II. — FONCTIONS HARMONIQUES DANS $(E' + e)$.

	Valeurs sur		
Fonctions	S_2.	S_4.	S_3.
$U_2(x, y, z)$.....	$\varphi(m)$	u_1^{IV}	u_2'''
$U_4(x, y, z)$.....	$\varphi(m)$	u_3^{IV}	u_4'''
$U_6(x, y, z)$.....	$\varphi(m)$	u_5^{IV}	u_6'''
.....	.....	...	...

On voit que l'on doit former alternativement une fonction du premier Tableau, puis une fonction du second, ce qui justifie le nom de *procédé alterné* donné par M. Schwarz à cette méthode.

Nous allons voir que la solution cherchée s'obtient en prenant, en tout point M_i de l'espace E,

$$(2)\quad V(M_i) = U_1(M_i) + [U_3(M_i) - U_1(M_i)] + [U_5(M_i) - U_3(M_i)] + \dots ;$$

en tout point M_i de l'espace E',

$$(3)\quad V(M_i) = U_2(M_i) + [U_4(M_i) - U_2(M_i)] + [U_6(M_i) - U_4(M_i)] + \dots ;$$

enfin en prenant arbitrairement, en tout point de l'espace e, l'une ou l'autre de ces deux expressions.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 4. — **Démonstration du théorème qui vient d'être énoncé.**

Pour démontrer que la méthode précédente fournit bien la solution du problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace $(E+E'+e)$, il suffit évidemment de démontrer les propositions suivantes :

1° La série donnée par l'égalité (2) est convergente et représente une fonction harmonique dans tout l'espace $(E+e)$.

2° La série donnée par l'égalité (3) est convergente et représente une fonction harmonique dans tout l'espace $(E'+e)$.

3° Ces deux fonctions harmoniques sont identiques dans tout l'espace e.

4° Lorsque le point M_i tend vers un point m de la surface S_1, la fonction $V(M_i)$, définie par l'égalité (2), tend uniformément vers $\varphi(m)$.

5° Lorsque le point M_i tend vers un point m de la surface S_2, la fonction $V(M_i)$, définie par l'égalité (3), tend uniformément vers $\varphi(m)$.

Le fait que la série donnée par l'égalité (2) est convergente dans l'espace $(E+e)$ et y représente une fonction harmonique peut se déduire du théorème de M. Axel Harnack, démontré au § 2 du Chapitre IX.

La fonction $U_1(x, y, z)$ prend sur la surface S_1 les valeurs $\varphi(m)$, qui sont toutes comprises entre G et K, et sur la surface S_3 la valeur K.

La valeur de $U_1(x, y, z)$ en tout point de l'espace $(E+e)$ est donc comprise entre G et K. Il en est ainsi en particulier des valeurs désignées par u_1^{IV}.

La fonction $U_2(x, y, z)$ a, dans tout l'espace $(E'+e)$, des valeurs comprises entre G et la plus petite valeur de $\varphi(m)$ ou de u_1^{IV}. Il en est ainsi en particulier des valeurs u_2''' qu'elle prend sur la surface S_3.

Il en résulte que la différence $[U_2(x, y, z) - U_1(x, y, z)]$ ne peut avoir de valeurs négatives en aucun point du domaine e ; en effet, sur la surface S_4, cette différence a une valeur égale à o ; sur la surface S_3, elle a pour valeur $u_2''' - K$, et nous venons de voir que u_2''' ne pouvait être inférieur à la plus petite des valeurs de $\varphi(m)$ ou de u_1^{IV} qui, elle-même, ne peut être inférieure à K.

La fonction $U_3(x, y, z)$ a, dans tout l'espace $(E+e)$ des va-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

leurs comprises entre G et la plus petite des valeurs de $v(m)$ ou de u_2'''. Nous venons de voir que la plus petite des valeurs de u_2''' ne peut être inférieure à K. Donc $U_3(x, y, z)$ est compris, dans tout l'espace $(E + e)$, entre G et K.

La différence $[U_3(x, y, z) - U_1(x, y, z)]$ ne peut en aucun point de l'espace $(E + e)$ avoir de valeurs négatives ; en effet, sur la surface S_1, cette différence prend la valeur o et, sur la surface S_3 la valeur $u_2''' - K$ qui, nous l'avons vu, ne peut être négative.

En continuant de la sorte, nous arriverons au résultat suivant :

1° Aucune des fonctions

$$U_1(x, y, z), \quad U_3(x, y, z), \quad U_5(x, y, z). \quad \ldots,$$

ne peut, en aucun point de l'espace $(E + e)$, surpasser G ;

2° Aucune des différences

$$[U_3(x, y, z) - U_1(x, y, z)], \quad [U_5(x, y, z) - U_3(x, y, z)], \quad \ldots$$

ne peut, en aucun point de l'espace $(E + e)$, prendre une valeur négative.

De là on conclut que les fonctions

$$U_1(x, y, z), \quad U_3(x, y, z), \quad U_5(x, y, z), \quad \ldots$$

tendent vers une limite supérieure $V(x, y, z)$, en sorte que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} V(x, y, z) - U_1(x, y, z) = {} & [U_3(x, y, z) - U_1(x, y, z)] \\ & + [U_5(x, y, z) - U_3(x, y, z)] + \ldots. \end{aligned}$$

La série qui forme le second membre converge en chaque point de l'espace $(E + e)$; aucun de ses termes n'éprouve de changement de signe lorsque le point (x, y, z) se déplace dans l'espace $(E + e)$; il n'y a jamais de changement de signe lorsqu'on passe d'un terme au suivant ; chacun de ces termes est harmonique dans l'espace $(E + e)$. La série converge donc uniformément et représente une fonction harmonique dans tout l'espace $(E + e)$.

On prouve ainsi que l'égalité (2) définit une fonction harmonique dans tout l'espace $(E + e)$.

On prouverait de même que la série (3) définit une fonction harmonique dans tout l'espace $(E' + e)$.

Cherchons maintenant quelles valeurs prend la fonction $V(M_i)$ définie par l'égalité (2) sur les surfaces S_1 et S_3.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous ne pouvons, pour trouver ces valeurs, employer le théorème de M. Vito Volterra, car les valeurs que prennent à la surface chacun des termes de la série (2) sont discontinues le long de la ligne LL'L''; il faut donc raisonner directement. Nous n'exposerons pas ici la suite un peu longue de ce raisonnement (1). Elle conduit à ce résultat que la valeur prise en un point quelconque m des surfaces S_1 et S_3 par la fonction $V(M_i)$ que définit la série (2) est représentée par la série que l'on obtient en remplaçant chacun des termes de la série (2) par la limite vers laquelle il tend lorsque le point M_i tend vers le point m.

Il suit immédiatement de là que, si le point M_i tend vers un point m de la surface S_1 qui ne fasse pas partie de la ligne LL'L'', la fonction $V(M_i)$ tend vers $\varphi(m)$.

On peut démontrer aisément qu'il en est encore ainsi lorsque le point M_i tend vers un point m de la ligne LL'L'' (2).

Des considérations analogues s'appliquent à la fonction définie par l'égalité (3).

Il nous reste à démontrer que les deux fonctions définies par les égalités (2) et (3) sont identiques dans l'espace e; et, pour cela, comme ces deux fonctions sont harmoniques dans l'espace e, il nous suffit de prouver qu'elles prennent des valeurs identiques en tout point des surfaces S_3, S_4 qui limitent l'espace e.

Considérons, par exemple, la surface S_3.

D'après ce qui vient d'être démontré, la valeur en un point de la surface S_3 de la fonction définie par l'égalité (2) est représentée par la série

$$K + (u_3''' - K) + (u_3''' - u_3''') + \dots,$$

qui peut s'écrire, en vertu des égalités

$$u_3''' = u_2''', \qquad u_3''' = u_4''', \qquad \dots,$$

qui résultent de l'inspection du Tableau I,

$$K + (u_2''' - K) + (u_4''' - u_2''') + \dots.$$

D'autre part, au même point, la fonction représentée par l'éga-

(1) On la trouvera dans AXEL HARNACK, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales,* ..., p. 103 et p. 111. Leipzig, 1887.

(2) *Ibid.*, p. 112. Leipzig, 1887.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lité (3) prend la valeur

$$u_2''' + (u_4''' - u_2''') + \dots,$$

qui est évidemment identique à la précédente.

Ainsi se trouve complètement justifiée la méthode définie au paragraphe précédent.

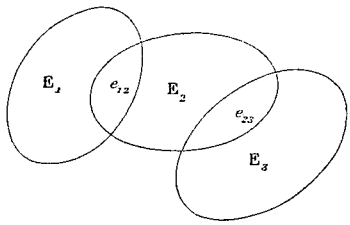
§ 5. — Applications successives de la méthode alternée.

On conçoit aisément l'importance du procédé alterné par lequel, lorsqu'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour deux corps, on sait le résoudre pour une infinité d'autres corps résultant de la combinaison des deux premiers. Mais la puissance de ce procédé est encore accrue par la remarque suivante.

Nous avons supposé les valeurs données $\varphi(m)$ continues sur l'ensemble des deux surfaces S_1, S_2. Mais le procédé alterné permettrait encore de déterminer une fonction $V(M_i)$, harmonique à l'intérieur de l'espace limité par les surfaces S_1, S_3 et prenant sur ces surfaces des valeurs qui admettent une ligne de discontinuité λ, tracée tout entière sur la surface S_1, ou tout entière sur la surface S_2. Cette ligne λ doit vérifier les conditions qui ont été précisées au § 2. Au voisinage de cette ligne λ, la fonction $V(M_i)$ présentera des propriétés analogues à celles que l'égalité (1) exprime pour la fonction $U(M_i)$.

Il résulte de là que, si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet

Fig. 45.



pour les espaces $E_1 + e_{12}$, $E_2 + e_{12} + e_{22}$, $E_3 + e_{23}$ (*fig.* 45), on saura le résoudre pour l'espace

$$E_1 + e_{12} + E_2 + e_{23} + E_3.$$

On arrivera ainsi, par une série d'applications de la méthode

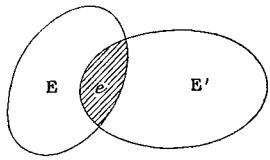
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

alternée, à le résoudre pour des espaces d'une extrême complication.

Dans le cas des fonctions de deux variables, M. Axel Harnack est parvenu à démontrer, en s'appuyant sur l'emploi de la méthode alternée, que le problème de Lejeune-Dirichlet admettait une solution pour l'aire que limite une courbe quelconque (1). Sa démonstration, malheureusement, ne peut, sans recherches nouvelles, être étendue au cas de trois variables; elle exigerait, en effet, pour être valable dans ce cas, que la méthode de la moyenne arithmétique fût légitime, même lorsque les valeurs données sont discontinues le long d'une ligne qui rencontre des arêtes ou des points coniques de la surface limite. Cette légitimité de la méthode de la moyenne arithmétique, quoique très probable, n'est pas prouvée jusqu'à ce jour.

Rappelons, en terminant, que M. Carl Neumann (2) a fait connaître une méthode analogue au procédé alterné, permettant de

Fig. 46.



résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace e (*fig.* 46), lorsqu'on sait le résoudre pour les espaces $(E + e)$ et $(E' + e)$.

---

(1) AXEL HARNACK, *Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume* (*Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe*, p. 144; 1886). — *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, ..., p. 109; Leipzig, 1887.

(2) CARL NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, p. 326; Leipzig, 1877.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE XII.

LE PROBLÈME DE MURPHY.

§ 1. — Le problème de Murphy.

La méthode de la moyenne arithmétique, combinée avec le procédé alterné, permet de résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à une infinité de conducteurs ; il est même probable que l'on peut, au moyen de ces procédés, démontrer d'une manière générale l'existence d'une solution au problème de Dirichlet à l'intérieur d'un espace linéairement connexe quelconque ; un point de détail arrête seul cette extension des raisonnements exposés par Axel Harnack dans le cas de deux variables

Les méthodes précédentes permettent aussi de résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à un nombre immense de conducteurs. Pour résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace *extérieur* à une surface fermée S, il suffit, en effet, de transformer par inversion cette surface en une surface S′, de résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace *intérieur* à la surface S′, et de répéter l'inversion une seconde fois.

On saura donc trouver pour un nombre immense de conducteurs linéairement connexes, et probablement pour tous, la distribution électrique engendrée par des charges données ; si les méthodes sont trop laborieuses, en général, pour permettre le calcul effectif de la distribution électrique, elles auront du moins l'avantage de démontrer l'existence de cette distribution.

Mais un nouveau problème s'offre maintenant à notre attention ; ce problème est le suivant :

Trouver la distribution électrique engendrée par des charges électriques données sur un système de plusieurs conducteurs dont les uns portent des charges connues tandis que les autres sont maintenus à des niveaux potentiels connus.

Nous allons voir que *ce problème peut toujours être résolu*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lorsqu'on sait résoudre le problème extérieur de Lejeune-Dirichlet pour chacun des conducteurs qui composent le système.

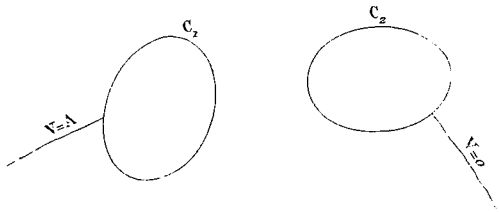
Nous donnerons le nom de *problème de Murphy* à la recherche des méthodes combinatoires propres à effectuer cette réduction, parce que la première méthode de ce genre, méthode qui a ensuite donné naissance aux recherches de Beer, de M. Carl Neumann, de M. Schwarz, sur le problème de Lejeune-Dirichlet, a été donnée par Murphy (1) en 1833.

§ 2. — Lois fondamentales de la condensation électrique.

La méthode de Murphy avait pour objet l'étude d'un problème spécial, le problème de la *condensation électrique,* qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Etant donnés un conducteur C_1 (*fig.* 47), *maintenu au*

Fig. 47.



niveau potentiel A; *un conducteur* C_2 *mis en communication avec le sol et, par conséquent, maintenu au niveau potentiel* O, *trouver la distribution de l'électricité sur ces deux conducteurs.*

Avant d'étudier la méthode par laquelle Murphy ramène ce problème à l'étude de la distribution engendrée par des charges données sur chacun des conducteurs mis en communication avec le sol, nous allons exposer les propriétés fondamentales de la distribution produite sur les deux conducteurs C_1 et C_2. Plusieurs de

(1) MURPHY, *Elementary principles of the theories of electricity, heat and moleculars actions,* Part. I, Chap. V, p. 93.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ces propriétés seront invoquées dans la justification de la méthode de Murphy.

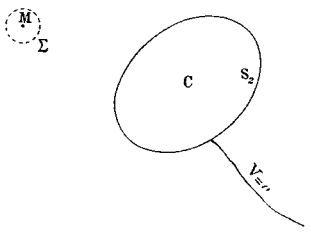
Nous savons déjà (Chapitre IV, théorème IX) que *la distribution doit être monogène sur chacun des deux conducteurs* C_1 *et* C_2. *Sur* C_1, *elle a le signe de* A *et un signe contraire sur* C_2.

Pour fixer les idées, nous supposerons A positif ; le conducteur C_1 sera alors chargé d'électricité positive, et le conducteur C_2 d'électricité négative.

LEMME I. — *Si le conducteur* C_2, *mis en communication avec le sol, est soumis à l'influence d'une masse électrique positive* μ *concentrée en un point extérieur* M, *il se recouvre d'une distribution monogène et négative.*

Soit S_2 (*fig.* 48) la surface du conducteur C_2. Entourons le

Fig. 48.



point M d'une petite surface Σ. La fonction potentielle, égale à 0 sur la surface S_2 et à l'infini, est positive et très grande sur la surface Σ. Elle est donc positive dans tout l'espace extérieur aux surfaces S_2 et Σ. La quantité $\frac{\partial V}{\partial N_e}$ est alors positive en tout point de la surface S_2, ce qui démontre le théorème énoncé :

LEMME II. — *Si le conducteur* C_2, *mis en communication avec le sol, est soumis à l'action des charges électriques* μ, μ', μ'', ... *concentrées aux points extérieurs* M, M', M'', ..., *il se recouvre d'une distribution qui est la superposition des distributions dont il se couvrirait, si on le soumettait successivement à l'action de la seule charge* μ *concentrée au point* M, *de la seule charge* μ' *concentrée au point* M', ...

La démonstration de ce lemme est immédiate.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

COROLLAIRE. — *Si l'on fixe aux divers points* M', M'', M''', ... *de la surface du conducteur* C_1 *des charges* μ', μ'', μ''', ... *toutes positives, dont la somme est égale à* Q_1, *ces charges induiront sur le conducteur* C_2, *mis en communication avec le sol, des charges toutes négatives dont la somme sera égale à* $(-Q_2)$, *et l'on aura*

$$Q_2 \leqq K Q_1, \tag{1}$$

K étant une constante positive, inférieure à l'unité, et qui dépend seulement de la position mutuelle des deux conducteurs C_1 et C_2.

Il est d'abord évident, d'après les lemmes I et II, que toutes les charges induites sur le conducteur C_2 sont négatives. La dernière partie de notre proposition a donc seule besoin de démonstration.

Une unité d'électricité positive, en équilibre d'elle-même sur le conducteur C_2 isolé, le porte au niveau potentiel positif A. Sa fonction potentielle a, aux points M', M'', M''', ..., des valeurs A', A'', A''', ... toutes positives, et inférieures à A. On a donc

$$A' \leqq KA, \qquad A'' \leqq KA, \qquad A''' \leqq KA, \qquad \ldots.$$

K étant une constante positive et inférieure à 1 qui dépend seulement de la position mutuelle des deux conducteurs C_1, C_2.

Si la charge Q_2 est en équilibre d'elle-même sur le même conducteur C_2, elle le porte à un niveau potentiel B ; sa fonction potentielle a, aux points M', M'', M''', ... des valeurs B', B'', B''', ... On a évidemment

$$B = AQ_2, \qquad B' = A'Q_2, \qquad B'' = A''Q_2, \qquad \ldots$$

et, par conséquent,

$$B' \leqq KB, \qquad B'' \leqq KB, \qquad B''' \leqq KB, \qquad \ldots. \tag{2}$$

Cela posé, appliquons l'identité de Gauss aux deux états suivants du système :

Premier état.

Conducteur C_2	charge totale ...	$-Q_2$
	niveau potentiel.	0
Point M'	charge	μ'
	niveau potentiel.	V'
Point M''	charge	μ''
	niveau potentiel.	V''
. . . . .		

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Deuxième état.

Conducteur C_2	charge totale.....	Q_2
	niveau potentiel ...	B
Point M'	charge.....	O
	niveau potentiel ...	B'
Point M''	charge.....	O
	niveau potentiel ...	B''
.....		

Cette identité de Gauss va nous donner

$$BQ_2 = B'\mu' + B''\mu'' + B'''\mu''' + \dots .$$

Toutes les quantités qui figurent dans cette égalité sont positives. D'ailleurs

$$\mu' + \mu'' + \mu''' + \dots = Q_1.$$

Les inégalités (2) nous donnent donc

$$Q_2 \leq KQ_1.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

On démontrerait de même que, *si l'on fixe aux divers points de la surface du conducteur* C_2 *des charges toutes négatives et dont la somme soit égale à* $(-Q_2)$, *ces charges induiront sur le conducteur* C_1, *mis en communication avec le sol, des charges toutes positives dont la somme sera égale à* Q_3, *et l'on aura*

$$Q_3 \leq K'Q_2, \tag{3}$$

K' *étant une constante positive, inférieure à l'unité et qui dépend de la position mutuelle des deux conducteurs* C_1 *et* C_2.

Ces propositions serviront à démontrer la légitimité de la méthode de Murphy. Elles nous fournissent aussi des renseignements sur les *coefficients de Gaugain* (1) dont nous allons donner la définition.

Ces coefficients se définissent au moyen de trois expériences.

Première expérience. — Le conducteur C_1 étant maintenu au

(1) Cette théorie est due à M. J. Moutier [J. MOUTIER, *Sur la condensation électrique* (*Bulletin de la Société Philomatique*, 1878)].

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

niveau potentiel A, le conducteur C_2 est mis en communication avec le sol. Le premier prend une charge positive a, le second une charge négative $-b$.

Posons

$$b = ma.$$

Le coefficient m dépend seulement de la situation des deux conducteurs C_1 et C_2 et pas du niveau potentiel A. C'est le *premier coefficient de Gaugain*. Si les deux conducteurs C_1, C_2 sont extérieurs l'un à l'autre, ce coefficient est au plus égal à K, et, par suite, inférieur à l'unité.

Deuxième expérience. — Le conducteur C_1, maintenu au niveau potentiel A, est mis en présence du conducteur C_2, isolé et portant une charge totale égale à O. Celui-ci se met au niveau potentiel B et le conducteur C_1 prend une charge totale a_0.

Gaugain nomme *force condensante* de l'appareil le rapport

$$F = \frac{a}{a_0}.$$

Troisième expérience. — On isole le conducteur C_2, porteur de la charge $-b$ et l'on met le conducteur C_1 au sol. Il prend une charge positive a_1.

Posons

$$a_1 = m'b.$$

Le coefficient m' dépend seulement de la situation des deux conducteurs C_1 et C_2 et pas de la charge b. C'est le *second coefficient de Gaugain*. Si les deux conducteurs C_1, C_2 sont extérieurs l'un à l'autre, ce coefficient est au plus égal à K', et, par suite, inférieur à l'unité.

Gaugain a trouvé, par l'expérience, que l'on avait

$$a = a_0 + a_1. \tag{4}$$

Ce résultat peut se retrouver par la théorie. L'identité de Gauss, appliquée aux deux premières expériences, donne

$$a_0 A = aA - bB.$$

Cette même identité, appliquée à la seconde expérience et à la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

troisième, donne

$$O = a_1 A - b_1 B.$$

Ces deux relations donnent l'égalité trouvée par Gaugain.

Comme on a évidemment

$$a_1 = mm'a,$$

la relation (4) donne

$$F = \frac{1}{1 - mm'},$$

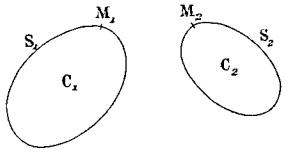
relation qui exprime la force condensante en fonction des deux coefficients de Gaugain.

Nous aurons plus tard, dans l'étude de la décharge du condensateur, l'importance de ces deux coefficients.

§ 3. — La méthode de Murphy.

La méthode de Murphy a pour but de trouver la distribution électrique sur deux conducteurs C_1, C_2 (*fig.* 49), dont l'un, C_1,

Fig. 49.



est maintenu au niveau potentiel A, tandis que l'autre, C_2, est maintenu au niveau potentiel o, lorsque l'on sait déterminer la distribution qu'engendrent des charges électriques *données* sur chacun de ces conducteurs, considéré isolément, et mis en communication avec le sol, ou maintenu à un niveau potentiel donné.

Le conducteur C_1, étant au niveau potentiel A et soustrait à l'action de toute charge électrique extérieure, est recouvert d'une distribution électrique que l'on sait déterminer par hypothèse. Soit Q_1 la quantité totale d'électricité qu'il renferme, quantité qui est positive si A est positif; soit Δ_1 la densité de cette distribution au point M_1 de la surface S_1 du conducteur C_1; nous savons que cette densité Δ_1 est positive.

Imaginons cette distribution *fixée* sur le conducteur C_1; plaçons en sa présence le conducteur C_2, mis en communication

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec le sol. Ce conducteur va se recouvrir d'une distribution électrique que nous savons, par hypothèse, déterminer ; cette distribution est monogène et négative ; $(-Q_2)$ est sa masse totale ; en un point M_2 de la surface S_2 du conducteur C_2, elle a une densité $(-\Delta_2)$.

Fixons cette distribution sur le conducteur C_2 et plaçons-le en présence du conducteur C_1 mis en communication avec le sol. Celui-ci se recouvre d'une distribution que nous savons déterminer par hypothèse. Cette distribution est monogène et positive. Soient Q_3 sa masse totale et Δ_3 sa densité au point M_1.

En continuant de la sorte, nous déterminerons, sur le conducteur C_1, une série de distributions monogènes et positives ayant respectivement pour masse totale

$$Q_1, \quad Q_3, \quad Q_5, \quad \ldots,$$

et pour densité au point M_1

$$\Delta_1, \quad \Delta_3, \quad \Delta_5, \quad \ldots.$$

Sur le conducteur C_2, nous déterminerons une série de distributions monogènes et négatives ayant respectivement pour masse totale

$$-Q_2, \quad -Q_4, \quad -Q_6, \quad \ldots,$$

et pour densité au point M_2

$$-\Delta_2, \quad -\Delta_4, \quad -\Delta_6, \quad \ldots.$$

La proposition énoncée par Murphy est la suivante :

Si le conducteur C_1, *maintenu au niveau potentiel* A, *est mis en présence du conducteur* C_2 *maintenu au niveau potentiel* o, *la densité électrique au point* M_1 *du conducteur* C_1 *aura pour valeur*

$$\delta_1 = \Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_5 + \ldots, \tag{5}$$

et la densité électrique au point M_2 *du conducteur* C_2 *aura pour valeur*

$$-\delta_2 = -\Delta_2 - \Delta_4 - \Delta_6 - \ldots. \tag{6}$$

Cette proposition, à laquelle Murphy a été évidemment conduit

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

par l'ancienne théorie dite de l'*électricité dissimulée,* est démontrée par M. Carl Neumann (1) de la manière suivante :

Les égalités (1) et (3) donnent

$$\begin{aligned} &Q_2 \leqq KQ_1, \qquad Q_4 \leqq KQ_3, \qquad Q_6 \leqq KQ_5, \qquad \ldots, \\ &Q_3 \leqq K'Q_2, \qquad Q_5 \leqq K'Q_4, \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} &Q_3 \leqq KK'Q_1, \qquad Q_5 \leqq KK'Q_3, \qquad \ldots, \\ &Q_4 \geqq KK'Q_2, \qquad Q_6 \leqq KK'Q_4, \qquad \ldots. \end{aligned}$$

Les deux séries

$$\begin{aligned} &Q_1 + Q_3 + Q_5 + \ldots, \\ &Q_2 + Q_4 + Q_6 + \ldots, \end{aligned}$$

sont donc convergentes.

Observons maintenant que l'on a

$$\begin{aligned} &Q_1 = \mathbf{S} \Delta_1 \, dS_1, \qquad Q_3 = \mathbf{S} \Delta_3 \, dS_1, \qquad Q_5 = \mathbf{S} \Delta_5 \, dS_1, \qquad \ldots, \\ &Q_2 = \mathbf{S} \Delta_2 \, dS_2, \qquad Q_4 = \mathbf{S} \Delta_4 \, dS_2, \qquad Q_6 = \mathbf{S} \Delta_6 \, dS_2, \qquad \ldots, \end{aligned}$$

et que les quantités $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, \ldots, \Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \ldots$ sont toutes positives, et nous verrons immédiatement que les séries (5) et (6) sont convergentes.

Ces séries déterminent donc une véritable distribution électrique sur les conducteurs C_1 et C_2. Il reste à prouver que la fonction potentielle de cette distribution est égale à A en tout point du conducteur C_1 et à o en tout point du conducteur C_2.

Soient

$$V_1, \quad V_3, \quad V_5, \quad \ldots$$

les fonctions potentielles des distributions

$$\Delta_1, \quad \Delta_3, \quad \Delta_5, \quad \ldots,$$

et

$$-V_2, \quad -V_4, \quad -V_6, \quad \ldots$$

les fonctions potentielles des distributions

$$-\Delta_2, \quad -\Delta_4, \quad -\Delta_6, \quad \ldots.$$

---

(1) CARL NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential,* p. 310. Leipzig, 1877.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est facile de voir que la fonction potentielle de la distribution donnée par les égalités (5) et (6) sera donnée par la formule

$$(7) \qquad v = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 - V_6 + \dots.$$

Mais, en se reportant à la détermination des distributions successives, on voit sans peine que l'on a, en tout point du conducteur C_1,

$$V_1 = A, \qquad V_3 - V_2 = 0, \qquad V_5 - V_4 = 0, \qquad \dots$$

et, en tout point du conducteur C_2,

$$V_1 - V_2 = 0, \qquad V_3 - V_4 = 0, \qquad V_5 - V_6 = 0, \qquad \dots.$$

La formule (7) montre donc que l'on a, en tout point du conducteur C_1,

$$V = A$$

et, en tout point du conducteur C_2,

$$v = 0,$$

ce qui achève de légitimer la méthode de Murphy.

§ 4. — Méthode combinatoire de M. Carl Neumann.

La méthode de Murphy résout, dans un cas particulier, le problème général auquel nous avons donné le nom de *problème de Murphy : sachant résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur au conducteur* C_1 *et pour l'espace extérieur au conducteur* C_2, *le résoudre pour l'espace extérieur à l'ensemble des conducteurs* C_1 et C_2. Lipschitz (1) et M. Carl Neumann (2) ont montré comment on pouvait étendre la méthode de Murphy, de manière à obtenir la solution générale du problème précédent. Mais, malgré cette généralisation, la méthode de Murphy laisse à désirer en un point : elle n'a pas d'analogue dans la théorie des fonctions harmoniques de deux variables (3) et, par conséquent, interrompt le parallélisme entre la théorie de la fonction

(1) LIPSCHITZ, *Crelle's Journal für reine und angevandte Mathematik*, Bd LXI, p. 12.

(2) CARL NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, p. 312. Leipzig, 1887.

(3) Le corollaire sur lequel repose la justification du procédé de Murphy n'a pas d'analogue dans le plan.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

potentielle logarithmique et la théorie de la fonction potentielle newtonienne.

M. Carl Neumann (1) a rétabli ce parallélisme en créant, pour résoudre le problème de Murphy, une méthode combinatoire qui s'applique également aux fonctions harmoniques de deux et de trois variables.

Soit E l'espace extérieur aux deux conducteurs C_1, C_2. Il s'agit de former une fonction V(M), harmonique dans l'espace E, et prenant aux divers points m_1 de la surface S_1 des valeurs données $\varphi(m_1)$, et aux divers points m_2 de la surface S_2 des valeurs également données $\varphi(m_2)$. Les valeurs $\varphi(m_1)$ varient d'une manière continue sur la surface S_1 et les valeurs $\varphi(m_2)$ varient d'une manière continue sur la surface S_2.

Supposons que nous ayons déterminé une fonction $W_1(M)$, harmonique dans l'espace E, prenant sur la surface S_1 les valeurs données $\varphi(m_1)$ et sur la surface S_2 la valeur o; puis une deuxième fonction $W_2(M)$, harmonique dans l'espace E, prenant sur la surface S_2 les valeurs données $\varphi(m_2)$ et sur la surface S_1 la valeur o.

La fonction

$$W_1(M) + W_2(M)$$

sera harmonique dans tout l'espace E, et prendra les valeurs données sur les surfaces S_1, S_2.

Le problème que nous cherchons à résoudre peut donc être ramené à deux problèmes du genre de celui-ci :

Trouver une fonction harmonique dans l'espace E, *prenant sur la surface* S_1 *des valeurs données, variables d'une manière continue,* $\varphi(m_1)$, *et sur la surface* S_2 *la valeur* o.

Soit G la plus grande valeur absolue des quantités $\varphi(m_1)$.

Formons une première fonction, $W_1(M)$, harmonique dans l'espace E, prenant sur la surface S_2 la valeur o et, sur la surface S_1, les valeurs, toutes positives, $\varphi(m_1) + G$; puis une seconde fonction, $W_2(M)$, harmonique dans l'espace E, prenant sur la surface S_2 la valeur o et, sur la surface S_1, la valeur constante et positive G. La fonction

$$W_1(M) - W_2(M)$$

résoudra évidemment le problème précédent.

---

(1) CARL NEUMANN, *Untersuchungen*, ..., p. 313.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous sommes donc ramenés, en dernière analyse, au problème dont voici l'énoncé :

Trouver une fonction $V(M)$, *harmonique dans l'espace* E, *prenant en tout point de la surface* S_2 *la valeur* o *et, aux divers points de la surface* S_1 *des valeurs positives données,* $\varphi(m_1)$, *variables d'une manière continue.*

Formons, ce que nous savons faire par hypothèse, une fonction $U_1(M)$, harmonique dans l'espace $(E + C_2)$ et prenant sur la surface S_1 les valeurs données $\varphi(m_1)$.

Aux divers points de la surface S_2, cette fonction prend certaines valeurs u''_1.

Formons ensuite, ce que nous savons également faire par hypothèse, une fonction $U_2(M)$, harmonique dans l'espace $(E + C_1)$ et prenant sur la surface S_2 les valeurs u''_1.

Aux divers points de la surface S_1, cette fonction prend certaines valeurs u'_2.

Formons une fonction $U_3(M)$, harmonique dans l'espace $(E + C_2)$ et prenant sur la surface S_1 les valeurs u'_2.

Aux divers points de la surface S_2, cette fonction prend certaines valeurs u''_3.

En continuant de la sorte, nous formerons alternativement les fonctions contenues dans les deux Tableaux que voici :

I. — FONCTIONS HARMONIQUES DANS L'ESPACE $(E + C_2)$.

	Valeurs sur	
Fonctions.	S_1.	S_2.
$U_1(M)$	$\varphi(m_1)$	u''_1
$U_3(M)$	u'_2	u''_3
$U_5(M)$	u'_4	u''_5
.....	...	...

II. — FONCTIONS HARMONIQUES DANS L'ESPACE $(E + C_1)$.

	Valeurs sur	
Fonctions.	S_2.	S_1.
$U_2(M)$.....	u''_1	u'_2
$U_4(M)$.....	u''_3	u'_4
$U_6(M)$.....	u''_5	u'_6
.....	...	...

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous allons démontrer que l'égalité

$$V(M) = U_1(M) - U_2(M) + U_3(M) - U_4(M) + \dots \tag{8}$$

définit une fonction harmonique dans l'espace E, prenant sur la surface S_1 les valeurs $\varphi(m_1)$ et sur la surface S_2 la valeur o.

D'après le théorème de M. Vito Volterra, il nous suffit de démontrer que, sur les surfaces S_1, S_2, cette série converge uniformément vers les valeurs que nous venons d'indiquer.

Supposons que la fonction W(M), harmonique dans tout l'espace $(E + C_2)$, prenne la valeur 1 en tout point de la surface S_1; elle prendra, en tout point de l'espace $(E + C_2)$, des valeurs inférieures à 1. En particulier, en tout point de la surface S_2, on aura l'inégalité

$$W \leq K,$$

K étant une quantité positive certainement inférieure à l'unité.

Désignons par G la plus grande des valeurs positives $\varphi(m)$ données sur la surface S_1. Il est facile de voir qu'en tout point de la surface S_2 on aura

$$u_1'' \leq KG.$$

Considérons en effet la fonction

$$GW(M) - U_1(M).$$

Elle est harmonique dans tout l'espace $(E + C_2)$; elle est égale à o à l'infini et ne peut avoir aucune valeur négative sur la surface S_1; elle ne peut donc prendre aucune valeur négative dans l'espace $(E + C_2)$, et en particulier sur la surface S_2, d'où résulte immédiatement la démonstration de l'inégalité précédente.

Nous avons donc, sur la surface S_1,

$$\varphi(m) \leq G,$$

et, sur la surface S_2,

$$u_1'' \leq KG.$$

Si nous désignons par K' une quantité positive, inférieure à 1 et analogue à K, nous déduirons aisément de l'égalité précédente qu'en tout point de la surface S_1 on a

$$u_2' \leq KK'G.$$

En continuant de la sorte, nous arriverons aux résultats contenus dans les Tableaux suivants :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

1° *Sur la surface* S_1,

La fonction	prend les valeurs positives	qui ont pour limite supérieure
$U_1(M)$.....	$\rho(m)$	G
$U_2(M)$.....	u'_2	KK'G
$U_3(M)$.....	$u'_3 = u'_2$	KK'G
$U_4(M)$.....	u'_4	$K^2K'^2G$
$U_5(M)$.....	$u'_5 = u'_4$	$K^2K'^2G$
$U_6(M)$.....	u'_6	$K^3K'^3G$
.....	.....	.....

2° *Sur la surface* S_2,

La fonction	prend les valeurs positives	qui ont pour limite supérieure
$U_1(M)$.....	u''_1	KG
$U_2(M)$.....	$u''_2 = u''_1$	KG
$U_3(M)$.....	u''_3	$K^2K'G$
$U_4(M)$.....	$u''_4 = u''_3$	$K^2K'G$
$U_5(M)$.....	u''_5	$K^3K'^2G$
$U_6(M)$.....	$u''_6 = u''_5$	$K^3K'^2G$
.....	.....	.....

L'inspection de ces deux Tableaux montre immédiatement que la série qui figure au second membre de l'égalité (8) converge uniformément aussi bien sur la surface S_1 que sur la surface S_2; qu'elle prend la valeur $\rho(m)$ en tout point m de la surface S_1 et la valeur o en tout point de la surface S_2; cette série représente donc la fonction harmonique cherchée.

Ainsi se trouve justifiée la méthode combinatoire de M. Carl Neumann. Il est à peine besoin de remarquer que cette méthode se prête indéfiniment à l'extension. Soient, par exemple, trois conducteurs C_1, C_2, C_3. Si l'on sait résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à chacun d'eux, on pourra, par une première application du procédé de M. Carl Neumann, le résoudre pour l'espace extérieur à l'ensemble des deux conducteurs C_1, C_2; puis, sachant le résoudre pour cet espace d'une part, et d'autre part pour l'espace extérieur au conducteur C_3, on le résoudra pour l'espace extérieur à l'ensemble des trois conducteurs C_1,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

C_2, C_3, par une nouvelle application du procédé de M. Carl Neumann. On arrive ainsi à ce beau théorème :

Étant donnés dans l'espace n conducteurs extérieurs les uns aux autres, si l'on sait déterminer la distribution que l'électricité prend, sur chacun d'eux isolément, sous l'action de charges fixes arbitrairement données, on sait déterminer la distribution de l'électricité sur l'ensemble de ces n conducteurs soumis à l'action de charges fixes arbitrairement données.

On sait, par exemple, déterminer, dans tous les cas possibles, la distribution de l'électricité sur une sphère soumise à une influence donnée. On saura donc déterminer la distribution de l'électricité sur deux sphères extérieures l'une à l'autre s'influençant mutuellement. Ce beau problème a été, en effet, résolu directement par Poisson (1), et a occupé, depuis, un grand nombre de géomètres, tels que Plana, W. Thomson et G. Kirchhoff (2).

---

(1) Poisson, *Second Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* (lu à l'Académie des Sciences le 6 septembre 1813).

(2) *Voir* Mathieu, *Théorie du potentiel.* 2e Partie, *Applications,* p. 65. Paris, 1886.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LIVRE III.

L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA DISTRIBUTION ÉLECTRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

LE CORPS D'ÉPREUVE.

§ 1. — Théorie du corps d'épreuve.

Après avoir vu comment Poisson avait, par des hypothèses contestables d'ailleurs et sur lesquelles nous aurons à revenir plus tard, ramené l'étude de la distribution de l'électricité sur les corps conducteurs à un problème d'Analyse, nous avons exposé, dans ses grands traits, la suite des efforts par lesquels les géomètres ont tenté de résoudre ce problème. Nous voici arrivé à une autre partie de notre tâche ; il s'agit de tirer parti des méthodes analytiques que nous avons étudiées, d'en déduire des conséquences qui puissent servir au contrôle expérimental de la théorie de la distribution électrique. L'étude de quelques-unes de ces conséquences et leur comparaison avec les faits fera l'objet du présent Livre.

Nous commencerons par examiner la méthode par laquelle Coulomb a étudié expérimentalement la distribution électrique sur un corps conducteur, la méthode du *corps d'épreuve*.

Si un très petit corps conducteur, porté par une aiguille isolante en gomme laque, est électrisé, la balance de torsion dans laquelle on prendra ce petit corps pour boule fixe, tandis que la boule mobile sera électrisée par son contact avec ce petit corps, permettra aisément de déterminer des nombres proportionnels aux charges électriques prises par ce petit corps dans diverses circonstances.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dès lors, on voit sans peine que l'on possédera une méthode pour déterminer la distribution qu'affecte l'électricité sur un conducteur, si l'on admet l'exactitude de la proposition suivante :

Un corps conducteur, de dimensions extrêmement petites, étant mis en contact avec un autre conducteur de dimensions finies, prend une charge électrique qui est le produit de deux facteurs : 1° *la densité électrique qui se trouvait au point du conducteur que touche le corps d'épreuve avant l'approche de ce corps ;* 2° *un coefficient qui dépend de la forme du corps d'épreuve et de sa situation par rapport au plan tangent au conducteur en son point de contact avec le corps d'épreuve.*

Cette proposition a été énoncée par Coulomb qui en a ébauché une démonstration (1). On peut, comme nous l'allons voir, donner à cette démonstration une forme plus précise, bien que l'on puisse encore opposer quelques critiques à son absolue rigueur.

Cette démonstration reposera sur le lemme suivant (2) :

On considère deux systèmes de conducteurs homothétiques l'un de l'autre, dont le rapport d'homothétie est λ. *On suppose que les charges électriques que ces conducteurs portent en leurs points homologues soient aussi dans le rapport* λ. *La fonction potentielle aura la même valeur en des points homologues de ces deux systèmes.*

Si, au lieu de placer aux points homologues des deux systèmes des charges qui soient entre elles dans le rapport d'homothétie, on considère deux systèmes renfermant seulement de l'électricité superficielle, et *si l'on suppose qu'aux points homologues de ces deux systèmes les densités superficielles soient les mêmes,* il est aisé de voir que des éléments homologues porteront des charges qui seront entre elles comme le carré du rapport d'homothétie ; aux points homologues des deux systèmes, les valeurs de la fonction potentielle seront entre elles comme le rapport d'ho-

(1) COULOMB, *Sixième Mémoire sur l'Électricité. Suite des recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps conducteurs; détermination de la densité électrique dans les différents points de la surface de ces corps.* (*Mémoire de l'Académie des Sciences pour* 1788, p. 676.)

(2) J. MOUTIER, *Cours de Physique*, t. I, p. 406.

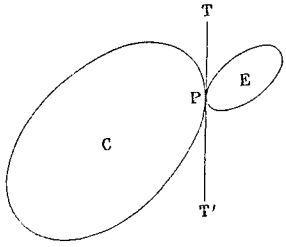
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mothétie ; les dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle auront les mêmes valeurs aux points homologues des deux systèmes.

Cette dernière conséquence nous montre que, si l'équilibre électrique est établi sur le premier système, il l'est aussi sur le second.

Cela posé, soit un corps électrisé et isolé C (*fig.* 50). Il porte

Fig. 50.



en chaque point une densité superficielle D. On en approche un corps isolé et à l'état neutre E qui vient le toucher au point P en occupant une position déterminée par rapport au plan tangent TT'. L'électricité se distribue d'une certaine manière sur le corps E. Soit Δ sa densité au point *m* de la surface du corps E.

Si l'on maintient invariable le corps C, mais si, par homothétie, on réduit les dimensions du corps E dans un certain rapport λ, le centre d'homothétie étant en P, la densité Δ tend vers une certaine limite *d* que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela, prenons l'état qui correspond à une certaine valeur λ du rapport d'homothétie. Le corps E a été transformé en un certain corps *e* dont les dimensions sont à celles du corps E dans le rapport λ. Soit δ la valeur que prend, dans cet état, la densité Δ.

Formons un système homothétique à celui-là, le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{\lambda}$. Le corps *e* redeviendra le corps E, mais le conducteur C sera remplacé par un conducteur semblable et plus grand. Si, sur ce dernier, la densité avant le contact du corps E est la même qu'au point homologue du corps C, on voit aisément qu'après le contact la densité sera la même aux points homologues des corps E et *e*.

On voit donc que, au lieu de traiter le problème primitivement énoncé, on peut traiter le problème suivant : sans changer les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dimensions du corps E, on transforme par homothétie le corps C, le centre d'homothétie étant en P et le rapport d'homothétie étant un certain nombre μ qui croît au delà de toute limite. On suppose que la densité électrique avant le contact du corps E soit la même en deux points homologues.

On demande vers quelle limite d tend la densité Δ en un point du corps E après le contact.

Or l'état limite du problème est le suivant :

Une masse conductrice indéfinie est bornée au plan illimité TT'; avant le contact du corps E, le plan TT' est recouvert d'une couche électrique ayant en tout point pour densité la densité D(P) de l'électricité qui était au point P du corps C avant le contact; on approche le corps E isolé et à l'état neutre; quelle est, après le contact, la densité électrique $d(m)$ au point m du corps E?

On peut admettre que l'on a

$$d(m) = k(m)\,\mathrm{D}(\mathrm{P}),$$

$k(m)$ étant une fonction de la position du point m, fonction dont la forme est fixée par la forme du corps E et par sa position à l'égard du plan TT'.

D'après cette expression de la charge électrique en chaque point de notre corps d'épreuve infiniment petit, on voit que la charge totale Q prise par notre corps d'épreuve aura pour valeur

$$\mathrm{Q} = \mathrm{K}\,\mathrm{D}(\mathrm{P}),$$

K étant un coefficient qui dépend seulement de la forme du corps d'épreuve et de sa position à l'égard du plan tangent au point touché. C'est le résultat que nous avions annoncé.

Quoique, pour déterminer la valeur du coefficient K, on puisse disposer arbitrairement de la forme du corps C et de la position du point P sur ce corps, le calcul de ce coefficient ne peut être effectué que pour un petit nombre de corps d'épreuve.

Poisson (1), ayant résolu le problème de la distribution électrique sur deux sphères en contact, a pu déterminer le coefficient K pour un corps d'épreuve formé par une petite sphère de rayon R.

---

(1) Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'Électricité à la surface des corps conducteurs* (*Savants étrangers*, p. 62; 1811).

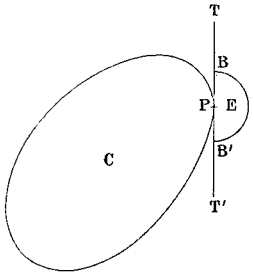
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il a trouvé

$$K = \frac{\pi^2}{6} 4\pi R^2 = \frac{4\pi^3 R^2}{6}.$$

M. Beltrami (1) a examiné le cas où le corps d'épreuve est formé par un hémisphère dont la base BB′ s'applique sur le plan

Fig. 51.



tangent TT′ (*fig.* 51). Il a trouvé, en désignant par R le rayon de l'hémisphère,

$$K = 3\pi R^2.$$

M. G. Robin (2) a traité un troisième cas. Le corps d'épreuve est le *corps de plus grande attraction,* dont l'équation polaire est

$$\frac{\cos\omega}{r^2} = \frac{1}{a^2}.$$

La constante a est le *diamètre ;* le corps, qui est de révolution autour de son diamètre, présente au pôle un aplatissement infini. On a alors

$$K = 2\pi a^2.$$

§ 2. — Emploi du corps d'épreuve.

Le calcul du coefficient K, souvent fort difficile, est heureusement inutile lorsqu'on se propose simplement de comparer, au

(1) BELTRAMI, *Sur la détermination expérimentale de la densité électrique à la surface des corps conducteurs* (*Il nuovo Cimento,* 3e série, t. I, p. 215 ; 1877).

(2) G. ROBIN, *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. III. *Supplément,* p. 9 ; 1886).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

moyen d'un même corps d'épreuve, les densités électriques aux divers points de la surface d'un même conducteur ou de conducteurs différents, sans chercher à connaître la valeur absolue qu'a cette densité en chaque point.

Les considérations précédentes suffisent donc à justifier l'usage que Coulomb a fait du corps d'épreuve dans ses recherches sur la distribution électrique (1).

Ces recherches présentent surtout l'intérêt d'avoir fourni les premières vérifications expérimentales de la théorie, imaginée par Poisson, de la distribution du fluide électrique sur les corps conducteurs.

Nous avons vu, par exemple (p. 191), que, d'après cette théorie, en chaque point d'un ellipsoïde électrisé, la densité électrique était en raison inverse de la distance du centre au plan tangent en ce point ; cette proposition est aisée à soumettre au contrôle de l'expérience. Bien que Coulomb n'ait rien laissé qui touche à ce contrôle, nous savons, par les écrits de Poisson (2), qu'il l'avait tenté et l'avait trouvé satisfaisant : « ... Cette loi, dit-il, a été, en effet, vérifiée par Coulomb sur un ellipsoïde en bois, recouvert d'une lame métallique. Cet ellipsoïde de révolution avait été fait au tour par le Président de Saron, membre honoraire de notre ancienne Académie. »

Nous avons vu également (p. 209) que Poisson (3) avait déterminé complètement la distribution électrique sur deux sphères conductrices, égales ou inégales, mises au contact. D'autre part, Coulomb (4) a fait de cette distribution une étude expérimentale

---

(1) COULOMB, *Cinquième Mémoire sur l'Électricité. De la manière dont le fluide électrique se partage entre deux corps conducteurs mis en contact et de la distribution de ce fluide sur les différentes parties de ces corps* (*Mémoires de l'Académie* pour 1787, p. 421). — *Sixième Mémoire sur l'Électricité. Suite des recherches sur la distribution du fluide électrique entre plusieurs corps conducteurs : détermination de la densité électrique dans les différents points de la surface de ces corps* (*Mémoires de l'Académie* pour 1788, p. 617).

(2) POISSON, *Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène*, lu à l'Académie le 7 octobre 1833 (*Mémoires de l'Académie*, t. XIII, p. 501).

(3) POISSON, *Mémoire sur la distribution de l'Électricité à la surface des corps conducteurs*, lu à l'Académie les 9 mai et 3 août 1812 (*Savants étrangers*, p. 1811, p. 1.)

(4) COULOMB, *Cinquième Mémoire sur l'Électricité*, ..., 1re Section, p. 427.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

très complète dont les résultats ont été comparés par Poisson aux nombres déduits de ses calculs.

Coulomb mettait en contact deux sphères dont les rayons étaient entre eux dans un certain rapport b. Après le contact, on les séparait et on les éloignait l'une de l'autre. L'électricité se distribuait uniformément sur chacune d'elles, prenant sur la plus petite une densité β fois plus grande que sur la sphère de plus grande dimension. Voici les valeurs de β données par le calcul et l'observation :

Rapport des rayons.	Rapport des densités électriques sur les deux sphères suivant le calcul.	Rapport des densités électriques sur les deux sphères suivant l'observation.	Différence entre le calcul et l'observation.
$b = \frac{1}{2}$.....	$\beta = 1,1601$	$\beta = 1,08$	$+ 0,07$
$b = \frac{1}{4}$.....	$\beta = 1,3168$	$\beta = 1,30$	$+ 0,01$
$b = \frac{1}{8}$.....	$\beta = 1,4443$	$\beta = 1,65$	$- 0,15$

« Les deux premières différences tombent dans les limites des erreurs dont sont susceptibles les observations de ce genre ; la troisième, qui se trouve en sens contraire des deux autres, peut encore être attribuée à ces erreurs et ne prouve rien contre la théorie. Cependant, il est bon d'observer que, dans le cas où l'un des rayons est le huitième de l'autre, Coulomb n'a pas déterminé immédiatement le rapport suivant lequel l'électricité se partage entre les deux sphères : pour rendre l'effet plus sensible, il a fait toucher la grande sphère par la petite vingt-quatre fois de suite ; puis il a conclu de cette expérience compliquée le partage de l'électricité dans chaque contact. C'est sans doute pour cette raison que la différence entre le calcul et l'observation est plus grande dans le cas de $b = \frac{1}{8}$ que pour les autres valeurs de b [1]. »

Plaçons deux sphères inégales au contact. Au pôle opposé au point de contact, sur la plus petite sphère, sera la densité électrique maximum. Soit γ le rapport de cette densité à la densité moyenne que prend l'électricité sur la grande sphère lorsque la petite a été éloignée. Les valeurs de γ observées par Coulomb et calculées par Poisson sont contenues dans le Tableau suivant :

---

[1] Poisson, *loc. cit.*, p. 61.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Valeurs de b.	Valeurs de γ suivant le calcul.	Valeurs de γ suivant l'expérience.	Différence entre le calcul et l'expérience.
$b = 1$	$\gamma = 1,322$	$\gamma = 1,27$	$+ 0,04$
$b = \frac{1}{2}$	$\gamma = 1,834$	$\gamma = 1,55$	$+ 0,15$
$b = \frac{1}{4}$	$\gamma = 2,477$	$\gamma = 2,35$	$+ 0,05$
$b = \frac{1}{8}$	$\gamma = 3,087$	$\gamma = 3,18$	$- 0,03$

Deux sphères égales étant au contact, si l'on désigne par h la densité électrique sur l'une d'elles à 90° du point de contact, la densité aura pour valeurs à 180°, 60° et 30°, αh, $\alpha' h$, $\alpha'' h$.

Une sphère S en touche une autre S′ de rayon double. Si l'on désigne par h la valeur de la densité sur la sphère à 90° du point de contact, la densité sur cette même sphère à 180° et à 60° du point de contact aura pour valeur βh, $\beta' h$. A 90° du point de contact, sur la sphère S′, cette densité aura la valeur $\beta'' h$.

Une sphère S en touche une autre S′ de rayon quadruple. Si, sur la sphère S, la densité électrique au point de contact a une valeur h à 90° du point de contact, sur la même sphère, à 180° du point de contact, elle aura la valeur γh.

Coulomb avait déterminé par l'expérience les quantités α, α', α'', β, β', β'', γ. Poisson les a calculées par ses formules. Le Tableau suivant résume la comparaison entre le calcul et l'expérience :

Rapports des densités électriques en différents points de deux sphères qui se touchent suivant le calcul.	Rapports des densités électriques en différents points de deux sphères qui se touchent suivant l'observation.	Différences entre le calcul et l'observation.
$\alpha = 0,877$	$\alpha = 0,95$	$- 0,08$
$\alpha' = 1,342$	$\alpha' = 1,25$	$+ 0,07$
$\alpha'' = 5,857$	$\alpha'' = 4,80$	$+ 1,06$
$\beta = 0,739$	$\beta = 0,75$	$- 0,01$
$\beta' = 1,797$	$\beta' = 1,70$	$+ 0,09$
$\beta'' = 1,238$	$\beta'' = 1,25$	$- 0,01$
$\gamma = 1,673$	$\gamma = 1,43$	$+ 0,24$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

LES CONDUCTEURS OUVERTS.

§ 1. — Distribution électrique sur un conducteur ouvert soumis à une influence quelconque.

Coulomb (1) a énoncé le premier, comme conséquence de l'expépérience, que l'électricité en équilibre sur un corps conducteur réside tout entière à la surface de ce corps. Comme cette proposition est l'une des conséquences les plus immédiates et les plus générales de la théorie de Poisson, on serait en possession d'une excellente vérification de cette théorie si l'on pouvait démontrer que, dans l'état d'équilibre, il n'y a pas d'électricité à l'intérieur de la substance conductrice. Mais on s'aperçoit sans peine que cette vérité ne peut être démontrée ni par les expériences de Coulomb, ni par aucune expérience. On peut bien, il est vrai, creuser dans un conducteur des cavités communiquant avec l'extérieur par de petites ouvertures et prouver que les parois de ces cavités ne sont pas électrisées; mais les points intérieurs à la masse conductrice elle-même sont inaccessibles et l'on ne peut prouver directement qu'ils sont à l'état neutre.

Les expériences que l'on décrit dans les Traités de Physique comme propres à vérifier la proposition de Coulomb sont, en réalité, des expériences propres à étudier la distribution de l'électricité sur des *conducteurs ouverts*, c'est-à-dire sur des conducteurs limités par deux surfaces infiniment voisines l'une de l'autre, bornées à un même contour que l'on nomme le *bord* du conducteur. Telle est une calotte sphérique formée par une feuille de clinquant.

Il est donc intéressant de chercher dans l'étude de la distribution

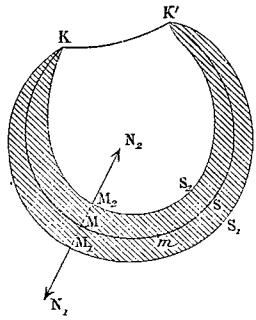
(1) COULOMB, *Quatrième Mémoire sur l'électricité, où l'on démontre deux principales propriétés du fluide électrique : la première, ...; la seconde, que, dans les corps conducteurs le fluide parvenu à l'état de stabilité est répandu sur la surface des corps et ne pénètre pas dans l'intérieur* (*Mémoires de l'Académie* pour 1786, p. 67).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

électrique sur les conducteurs ouverts l'explication des expériences en question ; cette explication résulte de quelques beaux théorèmes dus à M. G. Robin (¹).

Par le contour KK′ (*fig.* 52), nous faisons passer une aire limitée à deux côtés S. En tout point M de cette aire, nous élevons une normale sur laquelle nous prenons, de part et d'autre de la surface S, des longueurs infiniment petites MM_1, MM_2. Les points M_1, M_2 décrivent deux surfaces S_1, S_2, infiniment voisines de la surface S et passant par le contour KK′. L'intervalle entre les deux

Fig. 52.



surfaces S_1, S_2 est rempli par une matière conductrice. Ce conducteur étant chargé d'électricité et soumis à l'action de charges électriques données, l'électricité s'y distribue de manière que sa densité soit σ_1 au point M_1 et σ_2 au point M_2. Le problème de la distribution sur les conducteurs ouverts consiste à déterminer vers quelles limites Σ_1, Σ_2 tendent vers σ_1, σ_2, lorsque les deux surfaces S_1, S_2 tendent vers la surface S.

Soit $W(m)$ la fonction potentielle au point m de la surface S de toutes les charges agissantes. La fonction potentielle au point m sera

$$W(m) + \int_{S_1} \frac{\sigma_1(M_1)\, dS_1}{\overline{M_1 m}} + \int_{S_2} \frac{\sigma_2(M_2)\, dS_2}{\overline{M_2 m}}.$$

La surface S étant tout entière intérieure au conducteur, cette quantité doit avoir la même valeur en tout point m de la surface S.

(¹) G. Robin, *Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 2ᵉ série, t. III. *Supplément,* p. 9; 1886).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La limite vers laquelle elle tend lorsque les deux surfaces S_1, S_2 tendent à se confondre avec la surface S aura, elle aussi, une valeur indépendante de la position du point m sur la surface S. Cette limite étant évidemment

$$W(m) + \int_S \frac{[\Sigma_1(M) + \Sigma_2(M)]\, dS}{\overline{Mm}},$$

on obtient la proposition suivante :

Si, sur la surface S, *on distribue une couche électrique dont la fonction potentielle, ajoutée à la fonction potentielle des masses agissantes, forme une somme qui ait la même valeur en tout point de la surface* S, *et dont la masse totale soit égale à la charge électrique communiquée au conducteur ouvert, la densité de cette couche a pour valeur* $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$.

Ce principe servira à la détermination de $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$; c'est ainsi, par exemple, qu'au Chapitre VIII du Livre précédent nous avons pu déterminer cette quantité pour une calotte sphérique.

$(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ étant supposé connu, il reste à déterminer Σ_1 et Σ_2.

Soient N_1 la direction MM_1 et N_2 la direction MM_2.

Si une charge électrique égale à l'unité est placée au point M_1, elle subit, de la part de la couche de densité σ_1 distribuée sur S_1, une action dont la composante suivant N_1 est $f_1(M_1)$; de la part de la couche de densité σ_2 distribuée sur S_2, une action dont la composante suivant N_1 est $g_2(M_1)$; des charges extérieures, une action dont la composante suivant N_1 est $\psi(M_1)$. On a, d'après un théorème connu,

$$2\pi\varepsilon\sigma_1(M_1) = f_1(M_1) + g_2(M_1) + \psi(M_1).$$

Si une charge électrique égale à l'unité est placée au point M_2, elle subit, de la part de l'électricité distribuée sur la surface S_1 avec la densité σ_1, une action dont la composante suivant N_1 est $g_1(M_2)$; de la part de la couche de densité σ_2 distribuée sur la surface S_2, une action dont la composante suivant N_1 est $f_2(M_2)$; de la part des charges extérieures une action dont la composante suivant N_1 est $\psi(M_2)$. On a

$$2\pi\varepsilon\sigma_2(M_2) = -f_2(M_2) - g_1(M_2) - \psi(M_2).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Des deux égalités que nous venons d'écrire, on déduit

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\pi\varepsilon[\sigma_1(M_1)-\sigma_2(M_2)] = f_1(M_1)+f_2(M_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -g_2(M_1)+g_1(M_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\psi(M_1)+\psi(M_2). \end{cases}$$

Lorsque les deux surfaces S_1, S_2 tendent vers la surface S, le premier membre a pour limite

$$2\pi\varepsilon[\Sigma_1(M)-\Sigma_2(M)].$$

Cherchons vers quelle limite tend le second membre.

Si une charge électrique égale à l'unité était placée au point M, les composantes suivant N_t des actions qu'elle pourrait subir peuvent être désignées par les notations suivantes :

Composante de l'action exercée en M :				
Par la couche de densité	Σ_1	distribuée sur la surface	S....	$F_1(M)$;
»	Σ_2	»	S....	$F_2(M)$;
»	σ_1	»	S_1...	$G_1(M)$;
»	σ_2	»	S_2...	$G_2(M)$;
Par les charges extérieures.....				$\Psi(M)$.

On voit aisément que

$f_1(M_1)$ a pour limite $F_1(M)$;
$f_2(M_2)$ a pour limite $F_2(M)$;
$g_2(M_1)$ a même limite que $G_2(M)$;
$g_1(M_2)$ a même limite que $G_1(M)$;
$\psi(M_1)$ et $\psi(M_2)$ ont pour limite $\Psi(M)$.

De là on déduit en premier lieu que

$$g_1(M_2)+g_2(M_1)+\psi(M_1)$$

a même limite que

$$G_1(M)+G_2(M)+\Psi(M).$$

Mais, en vertu des lois de l'équilibre électrique, l'ensemble des charges réparties sur le système a une action nulle en tout point M intérieur au conducteur. On a donc, à tout instant,

$$G_1(M)+G_2(M)+\Psi(M)=0,$$

et, par conséquent,

$$\lim[g_1(M_2)+g_2(M_1)+\psi(M_1)]=0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le second membre de l'égalité (1) a donc même limite que

$$f_1(M_1) + f_2(M_2) + \psi(M_2),$$

et l'on a

$$2\pi\varepsilon[\Sigma_1(M) - \Sigma_2(M)] = F_1(M) + F_2(M) + \Psi(M). \tag{2}$$

Soient q une des charges agissantes et P le point où elle est concentrée. Nous aurons

$$F_1(M) = \varepsilon \int_S \frac{\Sigma_1(M')\cos(M'M, N_1)}{\overline{M'M}^2}\, dS,$$

$$F_2(M) = \varepsilon \int_S \frac{\Sigma_2(M')\cos(M'M, N_1)}{\overline{M'M}^2}\, dS,$$

$$\Psi(M) = \varepsilon \sum \frac{q\cos(PM, N_1)}{\overline{PM}^2},$$

et l'égalité (2) deviendra

$$\left\{\begin{aligned} &2\pi[\Sigma_1(M) - \Sigma_2(M)] = \sum \frac{q\cos(PM, N_1)}{\overline{PM}^2} \\ &\quad + \int_S \frac{[\Sigma_1(M') + \Sigma_2(M')]\cos(M'M, N_1)}{\overline{M'M}^2}\, dS. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

On arrive ainsi à ce théorème de M. G. Robin (1) :

Lorsque l'on a déterminé la somme $(\Sigma_1 + \Sigma_2)$ *des densités électriques aux points correspondants des deux faces d'un conducteur ouvert, une quadrature suffit pour déterminer séparément les densités* Σ_1 *et* Σ_2 *en ces deux points.*

Dans la démonstration précédente, nous avons confondu, pour plus de brièveté, les normales en M_1, M_2 aux surfaces S_1, S_2 avec

---

(1) Si la surface S_1 est fermée et que la surface S_2 lui soit intérieure, on a, en tout point de cette dernière, $\sigma_2 = 0$; partant $\Sigma_2 = 0$, et l'équation (3) devient

$$2\pi\Sigma_1(M) = \sum \frac{q\cos(PM, N_e)}{\overline{PM}^2} + \int_S \frac{\Sigma(M')\cos(M'M, N_e)}{\overline{M'M}^2}\, dS.$$

Cette équation fonctionnelle détermine la distribution électrique sur un conducteur fermé. M. G. Robin a fait un grand usage de cette équation. Elle lui a servi à résoudre la belle et difficile question de la distribution électrique sur un sphéroïde sensiblement différent de la sphère. Poisson s'était arrêté au cas du sphéroïde peu différent de la sphère (G. Robin, *loc. cit.*; voir aussi, plus haut, Livre II, Chap. X).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la normale en M à la surface S. Cette confusion est évidemment rendue légitime par la quasi-identité de direction de ces normales, sauf aux points très voisins du bord KK′ du conducteur. Comme d'ailleurs, au voisinage de ce bord, les densités Σ_1, Σ_2 peuvent être infinies, il est permis de se demander si la démonstration précédente n'est pas par là mise en défaut. Toutefois, il est aisé de voir que la démonstration précédente demeure valable si l'on admet, comme nous le ferons, qu'à une distance infiniment petite δ du bord KK′ les densités Σ_1, Σ_2, tout en étant infiniment grandes, sont infiniment petites par rapport à $\frac{1}{\delta}$. Dans tous les exemples connus, elles sont de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$.

§ 2. — Conducteur ouvert soustrait à toute influence.

Supposons, en particulier, qu'un conducteur ouvert et isolé, auquel on a communiqué une charge connue d'électricité, soit soustrait à toute influence, et cherchons la distribution électrique sur un semblable conducteur.

Nous savons, tout d'abord, que cette distribution sera monogène, et que la densité électrique aura en chaque point le signe de la charge totale.

L'équation (3) deviendra

$$(4)\quad 2\pi[\Sigma_1(M)-\Sigma_2(M)]=\int_S \frac{[\Sigma_1(M')+\Sigma_2(M')]\cos(M'M,N_1)}{\overline{M'M}^2}\,dS.$$

Supposons la surface S partout convexe dans le sens de la normale N_1. Le second membre de l'égalité (4) aura un signe constant qui sera celui de $[\Sigma_1(M')+\Sigma_2(M')]$, c'est-à-dire le signe de la charge totale distribuée sur le conducteur. D'où ce théorème :

Si un conducteur ouvert, dont la surface est convexe, est soustrait à toute influence, la densité électrique a une valeur absolue plus grande en un point de la face externe qu'au point correspondant de la face interne.

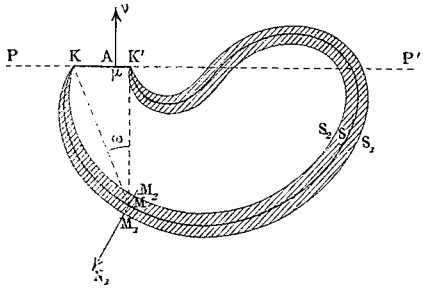
Si le conducteur ouvert porte une charge totale Q répartie en une charge Q_1 distribuée sur la face S_1 et une charge Q_2 répartie

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sur la face S_2, il est intéressant de connaître d'une manière simple les limites entre lesquelles est compris le rapport $\frac{Q_1}{Q_2}$. Ce résultat est obtenu par le théorème que nous allons démontrer.

Supposons, pour abréger, que l'ouverture du conducteur soit plane (*fig.* 53), bien que les théories qui seront exposées dans

Fig. 53.



l'étude des intégrales curvilignes (t. III, Livre XIII) permettent de généraliser la démonstration suivante. Sur le plan P de l'ouverture, le bord KK′ découpe une aire limitée A. Supposons que la surface S ne coupe pas le plan P à l'intérieur de l'aire A. Au voisinage du bord KK′, la surface S est tout entière d'un côté déterminé du plan P; supposons qu'elle soit au-dessous de ce plan.

L'action exercée au point M de la surface S par l'électricité distribuée sur les surfaces S_1, S_2 est égale à o ; il en est de même de la composante suivant N_1 de cette action et de la somme de ces composantes pour toute la surface S ; écrivons l'égalité à o de cette somme

$$\int_{S_1} \sigma_1(M'_1)\left[\int_S \frac{\cos(M'_1M, N_1)}{M'_1M^2}\,dS\right]dS_1$$
$$+\int_{S_2} \sigma_2(M'_2)\left[\int_S \frac{\cos(M'_2M, N_1)}{M'_2M^2}\,dS\right]dS_2 = 0.$$

Soient μ un point de l'aire A et ν la normale en ce point à la face supérieure du plan P. L'aire A et l'aire S réunies forment une surface fermée à laquelle le point M'_1 est extérieur et le point M'_2

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

intérieur. On a donc, d'après les lemmes de Gauss,

$$\mathbf{S}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_1\mathrm{M}, \mathrm{N}_1)}{\overline{\mathrm{M}'_1\mathrm{M}}^2}\, d\mathrm{S} + \mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_1\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'_1\mu}^2}\, d\mathrm{A} = 0,$$

$$\mathbf{S}_{\mathrm{S}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_2\mathrm{M}, \mathrm{N}_1)}{\overline{\mathrm{M}'_2\mathrm{M}}^2}\, d\mathrm{S} + \mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_2\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'_2\mu}^2}\, d\mathrm{A} = 4\pi.$$

L'égalité précédente devient alors

$$\mathbf{S}_{\mathrm{S}_1} \sigma_1(\mathrm{M}'_1) \left[\mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_1\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'_1\mu}^2}\, d\mathrm{A} \right] d\mathrm{S}_1$$

$$+ \mathbf{S}_{\mathrm{S}_2} \sigma_2(\mathrm{M}'_2) \left[\mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_2\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'_2\mu}^2}\, d\mathrm{A} - 4\pi \right] d\mathrm{S}_2 = 0.$$

Faisons tendre les deux surfaces S_1 et S_2 vers la surface S ; les deux quantités

$$\mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_1\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'_1\mu}^2}\, d\mathrm{A}, \quad \mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'_2\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'_2\mu}^2}\, d\mathrm{A},$$

tendent vers la limite commune

$$\mathbf{S}_{\mathrm{A}} \frac{\cos(\mathrm{M}'\mu, \nu)}{\overline{\mathrm{M}'\mu}^2}\, d\mathrm{A},$$

c'est-à-dire vers l'angle ω sous lequel du point M' on voit l'aire A, cet angle étant compté positivement ou négativement suivant que le point M' est au-dessous ou au-dessus du plan P. Nous avons donc

$$\mathbf{S}_{\mathrm{S}} \Sigma_1(\mathrm{M})\, \omega\, d\mathrm{S} = \mathbf{S}_{\mathrm{S}} \Sigma_2(\mathrm{M})(4\pi - \omega)\, d\mathrm{S}.$$

Soient Ω le maximum et Ω' le minimum des valeurs de ω.

L'égalité précédente nous donnera

$$\frac{4\pi - \Omega'}{\Omega'} > \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_2} > \frac{4\pi - \Omega}{\Omega}. \tag{5}$$

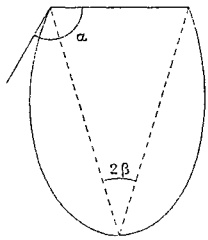
Ces inégalités peuvent encore s'écrire

$$\frac{\Omega'}{4\pi} < \frac{\mathrm{Q}_2}{\mathrm{Q}} < \frac{\Omega}{4\pi}. \tag{6}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Comme application des inégalités précédentes, proposons-nous de déterminer deux limites supérieure et inférieure du rapport $\frac{Q_2}{Q}$ pour une calotte conductrice résultant de la section d'un ellipsoïde de révolution allongé par le plan d'un parallèle (*fig.* 54).

Fig. 54.



Soient α l'angle du plan de base avec le plan tangent tout le long du contour ; 2β l'angle au sommet du cône de révolution circonscrit au contour à partir du pôle de la calotte. Il est aisé de voir que l'on a

$$\Omega = 2\alpha,$$
$$\Omega' = 2\pi(1 - \cos\beta)$$

et, par conséquent,

$$\frac{1 - \cos\beta}{2} < \frac{Q_2}{Q} < \frac{2\pi}{\alpha}.$$

On voit que, lorsque les dimensions de l'ouverture sont infiniment petites du premier ordre, la charge totale répartie à l'intérieur de la calotte devient infiniment petite du second ordre. Un corps d'épreuve, mis au contact des parois intérieures de la calotte, ne rapportera pas d'électricité.

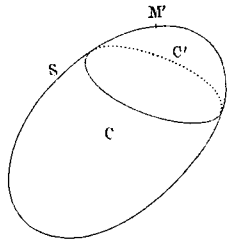
Aux théorèmes précédents, M. G. Robin en a joint un grand nombre d'autres ; nous renverrons à son Mémoire pour la démonstration des suivants que nous ne faisons qu'énoncer :

1° Une surface fermée S (*fig.* 55) est formée par deux calottes C et C' ; si l'on sait déterminer d'une part l'influence exercée par des charges électriques quelconques sur la surface S ; d'autre part, l'influence exercée sur la calotte C par une charge placée en un

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

point courant M′ de la calotte C′, une triple quadrature permet de

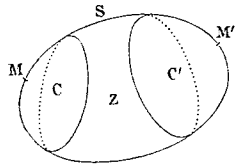
Fig. 55.



déterminer l'influence exercée sur la calotte C par une charge placée en un point quelconque de l'espace.

2° Une surface fermée S (*fig.* 56) est formée d'une zone Z et de deux calottes C et C′. Supposons que l'on connaisse : 1° la

Fig. 56.



distribution électrique sur la surface S soustraite à toute influence ; 2° l'influence sur la calotte (Z + C) d'un point variable M′ de la calotte C′ ; 3° l'influence sur la calotte (Z + C′) d'un point variable M de la calotte C. De ces données, on peut conclure la distribution de l'électricité en équilibre d'elle-même sur la zone Z.

Ce beau théorème a permis à M. Robin de déduire des résultats obtenus par Sir W. Thomson pour la calotte sphérique la distribution de l'électricité en équilibre d'elle-même sur la zone sphérique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE III.

LES SURFACES DE NIVEAU ET LEURS TRAJECTOIRES ORTHOGONALES.

§ 1. — Théorèmes généraux.

La fonction potentielle de certaines charges électriques est, dans tout l'espace, une certaine fonction finie, continue et uniforme des coordonnées

$$V = f(x, y, z).$$

Dans une région de l'espace où la fonction potentielle n'est point constante, elle prend certaines valeurs, parmi lesquelles la valeur C. L'équation

$$f(x, y, z) = C,$$

où C est traité comme une certaine constante, représente en général une certaine surface, variable d'une manière continue avec la valeur de la constante C.

La considération de semblables surfaces s'est d'abord présentée en Hydrostatique, dans la théorie de la figure des planètes, à Maclaurin et à Clairaut (1), qui leur ont donné le nom de *surfaces de niveau*. Chasles (2), qui en a introduit l'usage en Électrostatique, leur a conservé ce nom, auquel on substitue souvent celui de *surfaces équipotentielles*.

Supposons qu'une ligne rencontre une semblable surface en un point (ξ, η, ζ). Soient (x, y, z) les coordonnées courantes d'un

(1) MACLAURIN, *Treatise of fluxions*, Art. 640; 1742. — CLAIRAUT, *Théorie de la figure de la Terre*, p. 40-52; 1743.

(2) CHASLES, *Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XV, XXVe Cahier, p. 304-316; 1837). — *Énoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 209; 1839). — *Théorèmes généraux sur l'attraction des corps* (*Addition* à la *Connaissance des Temps pour* 1845, publiée en 1842).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

point de cette ligne, s l'arc compté sur cette ligne. La ligne rencontrera normalement la surface si l'on a

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}\frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}\frac{dz}{ds} - \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}\frac{dx}{ds} = 0,$$
$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}\frac{dy}{ds} = 0.$$

En intégrant deux des trois équations (elles se réduisent à deux distinctes)

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}dy - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}dz = 0,$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}dz - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}dx = 0,$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}dx - \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}dy = 0,$$

on obtiendra une famille de lignes dont chacune est normale à toutes les surfaces de niveau qu'elle rencontre.

Chasles, qui a introduit la considération de ces lignes dans le domaine de l'Électricité, leur a donné le nom de *trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau*. Aujourd'hui, on leur donne souvent, à l'imitation de Maxwell, le nom de *lignes de force*, créé par Faraday pour les lignes analogues que l'on rencontre dans l'étude de l'Électromagnétisme.

Ce dernier nom peut se justifier ainsi.

La force électrostatique en un point a pour composantes

$$X = -\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad Y = -\varepsilon\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad Z = -\varepsilon\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Il est aisé de voir qu'elle est, en tout point, normale à la surface de niveau et tangente à la trajectoire orthogonale qui passent par ce point. *La trajectoire orthogonale marque donc, en chaque point, la direction de la force.*

La force, normale en chaque point à la surface de niveau qui passe par ce point, est dirigée du côté de cette surface de niveau vers lequel la fonction potentielle va en diminuant.

La connaissance des surfaces de niveau permet donc de déter-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

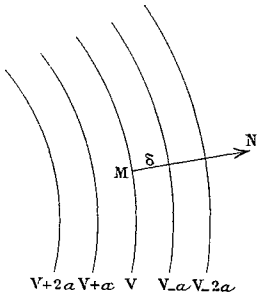
miner, en chaque point, la direction de la force électrostatique; elle permet aussi d'en déterminer la grandeur relative.

Traçons, en effet (*fig.* 57), les surfaces de niveau

$$V+2a,\quad V+a,\quad V,\quad V-a,\quad V-2a,\quad \ldots$$

qui correspondent à des valeurs de la fonction potentielle variant en progression arithmétique de raison infiniment petite $(-a)$. Soit M un point de la surface V; soit δ la distance normale du

Fig. 57.



point M à la surface $(V-a)$; soit N la direction de la normale au point M à la première surface menée vers la seconde; c'est la direction de la force électrique au point M, force qui a pour grandeur

$$F = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial N}.$$

Mais on peut, si l'on veut, prendre $dN = \delta$; on a alors $dV = -a$, et, par conséquent,

$$F = \varepsilon \frac{a}{\delta}.$$

La grandeur de la force électrostatique est, en chaque point, inversement proportionnelle à la distance entre la surface de niveau qui passe par ce point et la surface de niveau infiniment voisine.

La surface d'un conducteur électrisé est une surface de niveau. Supposons qu'elle corresponde à une certaine valeur V de la fonction potentielle. Dans l'espace qui environne ce corps, traçons une surface de niveau infiniment voisine de la surface du corps;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

elle correspond à une valeur $(V - a)$ de la fonction potentielle, a étant une quantité infiniment petite, positive ou négative. Soit δ la distance normale d'un point M de la surface du conducteur à cette surface de niveau. Nous aurons en ce point

$$\frac{\partial V}{\partial N_e} = -\frac{a}{\delta}.$$

Mais la densité superficielle de l'électricité a pour valeur au point M

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e}.$$

On a donc

$$\sigma = \frac{a}{4\pi\delta}.$$

La densité électrique est, en chaque point d'un conducteur électrisé, inversement proportionnelle à la distance normale entre ce point et la surface de niveau infiniment voisine de ce conducteur.

Donnons, dès maintenant, une application de ces théorèmes généraux.

Considérons un ellipsoïde électrisé et soustrait à toute influence. La fonction potentielle de cet ellipsoïde [Livre II, Chapitre VII, égalité (17)] dépend seulement, en coordonnées elliptiques, du paramètre u. Les surfaces de niveau de cet ellipsoïde sont donc les surfaces

$$u = \text{const.}$$

D'où ces deux propositions :

Les surfaces de niveau d'un ellipsoïde électrisé et soustrait à toute influence sont des ellipsoïdes homofocaux à celui-là.

Les trajectoires orthogonales sont des lignes d'intersection des deux familles d'hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde donné.

Le théorème général démontré en dernier lieu donne alors cette proposition :

En chaque point d'un ellipsoïde électrisé et isolé, la densité électrique est inversement proportionnelle à la distance entre cet ellipsoïde et l'ellipsoïde homofocal infiniment voisin.

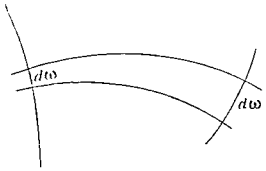
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Revenons aux propriétés générales des surfaces de niveau.

Considérons un élément $d\omega$ sur une surface de niveau (*fig.* 58). Par tous les points du contour de cet élément, menons des trajectoires orthogonales. Ces lignes engendrent une surface qui limite un canal infiniment délié. Chasles, qui a mis en évidence les remarquables propriétés d'un semblable canal, lui a donné le nom de *canal orthogonal;* on le nomme parfois aussi *tube de force.*

Coupons un semblable canal par deux sections normales $d\omega$

Fig. 58.



et $d\omega'$, sections qui sont évidemment situées sur deux surfaces de niveau. Le tronçon ainsi formé est limité par une surface fermée à laquelle nous pouvons appliquer les lemmes de Gauss. Si nous supposons que le canal orthogonal n'ait rencontré aucun corps électrisé entre les deux sections $d\omega$ et $d\omega'$, nous aurons

$$\mathrm{S} F_{N_e}\, dS = 0,$$

la sommation s'étendant à la surface considérée.

Les trajectoires orthogonales étant toujours tangentes à la force, on a en tout point des parois latérales du canal

$$F_{N_e} = 0.$$

Il reste donc, en désignant par $d\omega$ et $d\omega'$ les aires des deux bases du canal et par F_N, F'_N les composantes de la force électrostatique suivant les normales à ces bases extérieures au canal, composantes qui sont, en valeur absolue, égales à la force

$$F_N\, d\omega + F'_N\, d\omega' = 0. \tag{1}$$

De cette égalité il résulte, en premier lieu, que F_N et F'_N sont de signe contraire. Si donc, à une extrémité, la force entre dans le canal, elle en sort à l'autre. La direction de la force marque donc, dans le canal, un sens de parcours constant.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En second lieu, si l'on désigne par F et F′ les valeurs absolues de la force en un point des éléments $d\omega$ et $d\omega'$, l'égalité (1) peut s'écrire

$$F\,d\omega = F'\,d\omega'.$$

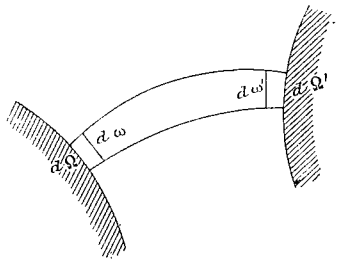
La quantité $F\,d\omega$ est donc la même pour toutes les sections du canal.

On peut exprimer ces diverses particularités en regardant un canal orthogonal comme rempli d'un certain fluide incompressible qui s'écoulerait d'un mouvement permanent dans le sens de la force électrostatique et dont la vitesse en chaque point serait proportionnelle à cette force; de là le nom de *flux de force* souvent donné au produit $F\,d\omega$.

L'égalité (1) nous montre que, dans une région extérieure aux masses agissantes, où la force électrique est partout finie, un canal orthogonal ne peut se fermer. Un canal orthogonal est donc limité seulement par des corps électrisés, ou bien encore il s'étend à l'infini ou se ferme sur lui-même.

Considérons un canal orthogonal aboutissant par ses deux extrémités aux surfaces de deux conducteurs (*fig.* 59). Les surfaces

Fig. 59.



des conducteurs étant des surfaces de niveau, le canal orthogonal les rencontre normalement. Soient $d\Omega$, $d\Omega'$ les éléments superficiels que le canal orthogonal rencontre normalement. Ces deux éléments sont dits *éléments correspondants*.

Prenons, dans le milieu non électrisé qui sépare ces deux conducteurs, deux sections normales du canal orthogonal : l'une, $d\omega$, infiniment voisine de $d\Omega$; l'autre, $d\omega'$, infiniment voisine de $d\Omega'$. Soient F_N, F'_N les forces en $d\omega$ et $d\omega'$ comptées vers l'intérieur du

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

canal, c'est-à-dire vers l'extérieur des conducteurs. Nous aurons, d'après l'égalité (1),

$$F_N\, d\omega + F'_N\, d\omega' = 0.$$

Si N_e, N'_e sont les normales vers l'extérieur des conducteurs en $d\Omega$ et $d\Omega'$, lorsque les éléments $d\omega$ et $d\omega'$ tendent respectivement vers $d\Omega$ et $d\Omega'$, F_N tend vers $-\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial N_e}$ et F'_N tend vers $-\varepsilon \dfrac{\partial V'}{\partial N'_e}$. L'égalité précédente devient donc, à la limite,

$$\frac{\partial V}{\partial N_e}\, d\Omega + \frac{\partial V}{\partial N'_e}\, d\Omega' = 0.$$

Soient σ et σ' les densités électriques superficielles en un point des éléments $d\Omega$ et $d\Omega'$. On a

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e},$$

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V'}{\partial N'_e},$$

et l'égalité précédente devient

$$\sigma\, d\Omega + \sigma'\, d\Omega' = 0.$$

Sur deux conducteurs en présence, deux éléments correspondants renferment des quantités d'électricité égales et de signes contraires.

Cette proposition peut être regardée comme la traduction théorique de la classique expérience sur l'influence électrique, où deux conducteurs électrisés mis en présence se chargent sur leurs faces en regard d'électricités de signes contraires.

§ 2. — Étude expérimentale des surfaces de niveau.

Faraday (1) a donné une méthode qui permet d'étudier expérimentalement les valeurs que prend la fonction potentielle aux divers points du champ qui environne un conducteur électrisé et, par conséquent, de déterminer les surfaces de niveau et leurs trajectoires orthogonales.

---

(1) FARADAY, *Experimental Researches on Electricity;* Série XI : *On Induction;* Art. IV. *Induction in curved lines* (lu à la Société Royale de Londres, le 21 décembre 1837. — Réimpression des *Exp. Researches,* p. 380).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En un point du champ où la fonction potentielle des charges agissantes avait une valeur V, on place le centre d'une très petite sphère de rayon R, tenue par une aiguille isolante en gomme laque. On met cette sphère en communication avec le sol par un fil fin. Elle prend une charge Q. On coupe la communication avec le sol, et l'on porte cette sphère dans la balance de Coulomb, qui fait connaître la charge Q. Cette détermination permet de connaître la valeur de V.

En effet, au moment où cette sphère est en communication avec le sol, la fonction potentielle en son centre doit avoir la valeur o, ce qui donne immédiatement la relation

$$V + \frac{Q}{R} = o.$$

Faraday a pu, par ce moyen, reconnaître l'existence des lignes de force. Leur forme courbe l'avait frappé; il y voyait la preuve que l'induction électrique se propageait par l'intermédiaire d'un milieu; selon lui, si cette action s'était exercée à distance, les lignes de force eussent été droites. Malgré les idées fécondes que renferment quelques parties du passage que nous avons cité, on ne peut méconnaître ce que les considérations qu'il contient ont de peu rigoureux.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IV.

LES COUCHES DE NIVEAU.

§ 1. — Une identité de Green.

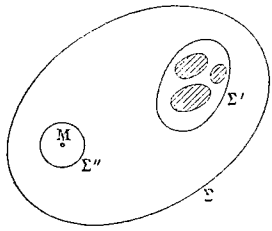
Les propositions que nous allons établir dans ce Chapitre sont la conséquence naturelle d'une importante identité, déduite par Green (1) du théorème qui porte son nom.

Si U et V sont deux fonctions régulières à l'intérieur d'une certaine surface S ; si N_i est la normale en un point de l'élément dS vers l'intérieur de la surface S, le théorème de Green nous donne l'identité [Liv. I, Chap. III, égalité (3)]

$$(1) \qquad \iiint (U\,\Delta V - V\,\Delta U)\,dx\,dy\,dz = -\int\!\!\int_S \left(U\frac{\partial V}{\partial N_i} - V\frac{\partial U}{\partial N_i}\right) dS.$$

Envisageons une surface Σ, fermée, et entourant un espace qui

Fig. 60.



peut contenir des masses électrisées, tandis que d'autres masses électrisées lui sont extérieures (*fig.* 60). Traçons une surface fermée, Σ' (qui peut, dans certains cas, être l'ensemble de plusieurs surfaces fermées), contenant à son intérieur toutes les masses

(1) GEORGE GREEN, *An Essay on the application of mathematical analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. General preliminary results*, Art. 4 (Nottingham, 1828. *Green's Mathematical Papers*, p. 29). Nous avons déjà rencontré cette identité au Livre II, Chap. VI.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

électriques que renferme l'espace clos considéré. Enfin, dans l'espace compris entre les surfaces Σ et Σ', considérons un point M et entourons-le d'une sphère de très petit rayon Σ''.

Examinons l'espace clos limité par les surfaces Σ, Σ', Σ''.

A l'intérieur de cet espace, la fonction potentielle V des masses agissantes est régulière et harmonique. Il en est de même de la fonction $U = \frac{1}{r}$, r étant la distance du point (x, y, z) au point M.

Appliquons à ces deux fonctions l'égalité (1) et nous trouverons

$$\mathbf{S}_{\Sigma}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)d\Sigma-\mathbf{S}_{\Sigma'}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)d\Sigma'+\mathbf{S}_{\Sigma''}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)d\Sigma''=0.$$

Considérons la troisième intégrale. Soit $d\Theta$ l'angle sous lequel, du point M, on voit l'élément $d\Sigma''$. Nous aurons

$$d\Sigma'' = R^2\,d\Theta,$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i} = -\frac{1}{R^2},$$

R étant le rayon de la sphère. Si ce rayon tend vers 0, on voit aisément que la troisième intégrale tend vers $-4\pi V(M)$, et l'égalité précédente devient

$$(2)\quad 4\pi V(M) = \mathbf{S}_{\Sigma}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)d\Sigma+\mathbf{S}_{\Sigma'}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_e}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_e}\right)d\Sigma'.$$

Dans la seconde intégrale, nous avons remplacé le symbole N_i désignant la normale à la surface Σ' vers l'intérieur de l'espace considéré par le symbole N_e désignant, ce qui revient au même, la normale vers l'extérieur de la surface Σ'.

Dans le cas particulier où la surface Σ ne renferme aucune charge agissante, l'égalité (2) devient

$$(3)\quad 4\pi V(M) = \mathbf{S}_{\Sigma}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)d\Sigma.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

De l'égalité (2), nous déduisons une autre égalité analogue. Appliquons-la, en effet, à l'espace compris entre une surface fermée Σ, à l'extérieur de laquelle peuvent se trouver certaines charges agissantes et une sphère de très grand rayon. Le terme relatif à la surface de cette sphère s'évanouira lorsque son rayon croîtra au delà de toute limite, et l'on aura l'égalité, vraie pour tout point extérieur à la surface Σ et aux charges agissantes,

$$(4)\quad 4\pi V(M) = \int_{\Sigma}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_e} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_e}\right)d\Sigma + \int_{\Sigma'}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_e} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_e}\right)d\Sigma'.$$

Si toutes les charges agissantes sont intérieures à la surface Σ, cette égalité devient simplement

$$(5)\qquad 4\pi V(M) = \int_{\Sigma}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_e} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_e}\right)d\Sigma.$$

Examinons le rôle de l'équation (3).

Lorsque l'on connaît l'existence, à l'intérieur de l'espace limité par la surface Σ, d'une fonction harmonique V, et que l'on connaît en outre les valeurs de V et de $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ sur la surface Σ, elle permet de calculer la valeur de V en tout point intérieur à Σ.

Les fonctions de trois variables réelles qui vérifient l'équation $\Delta V = 0$ jouissent de propriétés fort analogues, en bien des cas, à celles des fonctions de variables imaginaires (¹). Le théorème précédent constitue un des principaux éléments de ces analogies.

On sait que si une fonction $f(z)$ de la variable imaginaire z est finie, uniforme et continue à l'intérieur d'une certaine aire limitée par un contour fermé s et que si x désigne l'affixe d'un point intérieur à ce contour, on a

$$(6)\qquad 2i\pi f(x) = -\int_{s}\frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

(¹) Parmi les ouvrages importants pour l'étude de ces analogies, citons : P. APPELL, *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation* $\Delta F = 0$ (*Acta mathematica*, t. IV, p. 313; 1884). — P. PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II. B.; 1888).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le contour s étant parcouru de manière à laisser à gauche l'aire limitée.

La démonstration de ce théorème fondamental de Cauchy peut être calquée (1) sur la démonstration de l'égalité (3) donnée par Green et reproduite ci-dessus. Ce théorème montre que l'on peut calculer les valeurs de la fonction $f(z)$ en un point quelconque intérieur à une aire, si l'on connaît les valeurs de la fonction aux différents points du contour de cette aire.

Mais une différence importante est à signaler entre les égalités (3) et (6). L'égalité (6) détermine la fonction $f(x)$ à l'intérieur de l'aire lorsqu'on connaît seulement les valeurs de cette fonction aux divers points du contour. Au contraire, pour calculer la valeur de V en un point d'un certain espace, l'égalité (3) exige que l'on connaisse en tous les points de la surface qui limite cet espace, non seulement la valeur de V, mais encore la valeur de sa dérivée $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ suivant la normale à la surface.

Or, il est aisé de voir que l'on introduit ainsi, dans la détermination de V(M), des éléments superflus (2). Les démonstrations qui sont exposées au Livre I, Chapitre V, § 3, conduisent, nous l'avons vu, au résultat suivant :

Pour que la fonction harmonique V soit déterminée sans ambiguïté dans tout l'espace intérieur à la surface Σ, il suffit que l'on connaisse les valeurs de V en tous les points de la surface Σ ; ou bien les valeurs de V pour certaines régions de cette surface et les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ pour les autres régions. Si l'on connaissait seulement les valeurs de $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ en tout point de la surface Σ, la fonction V serait, à l'intérieur de cette surface, déterminée à une constante près.

Toutefois, cette différence apparente entre les égalités (3) et (6) se transforme de nouveau en une analogie par un examen plus approfondi, car le théorème de Cauchy exige, lui aussi, pour le

---

(1) V. HERMITE, *Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris*, rédigé par H. Andoyer.

(2) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische physik. Mechanik*, p. 185.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

calcul de $f(x)$, des éléments superflus. Pour déterminer $f(x)$, il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de $f(z)$ en tous les points du contour, mais seulement soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de $f(z)$.

Quoi qu'il en soit, la remarque précédente conduit à se proposer ce problème : Faire disparaître du second membre des égalités (3) et (5) soit $\frac{\partial V}{\partial N_i}$, soit V.

C'est pour faire disparaître $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ du second membre de ces égalités que Green a créé la fonction que nous avons étudiée au Chapitre VI du Livre II, et, par conséquent, posé pour la première fois le problème qui a reçu le nom de Lejeune-Dirichlet. Faire disparaître V en laissant seulement $\frac{\partial V}{\partial N_i}$ constitue l'objet d'un problème analogue, sur lequel nous aurons à revenir au Tome II du présent Ouvrage lorsque nous étudierons la distribution magnétique, et que nous nommerons le *problème dérivé* de Lejeune-Dirichlet. Selon que l'on veut faire disparaître V du second membre de l'équation (3) ou du second membre de l'équation (5), on se trouve en présence du *problème dérivé intérieur,* ou du *problème dérivé extérieur* de Lejeune-Dirichlet.

§ 2. — Propriétés fondamentales des couches de niveau.

Le problème dérivé extérieur de Lejeune-Dirichlet présente ordinairement des difficultés bien plus grandes que celles que présente le problème de Dirichlet. Nous allons voir, toutefois, qu'il existe un cas particulier où il peut être immédiatement résolu.

Imaginons *que la surface* Σ *soit une surface de niveau renfermant à son intérieur toutes les charges agissantes.* Soit A la valeur constante que prend, à sa surface, la fonction potentielle. L'égalité (5) donnera, pour tout point M_e, extérieur à la surface Σ,

$$4\pi V(M_e) = A \int_\Sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e} d\Sigma - \int_\Sigma \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial N_e} d\Sigma.$$

Mais on sait, par un des lemmes de Gauss, que la première des deux intégrales qui figure au second membre a la valeur o. On a

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

donc

$$4\pi V(M_e) = -\int_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_e}\,d\Sigma, \tag{7}$$

égalité qui résout immédiatement, dans ce cas, le problème dérivé extérieur de Lejeune-Dirichlet.

Par quelle égalité doit-on remplacer l'égalité (7), lorsque, au lieu de considérer un point M_e extérieur à la surface Σ, on considère un point M_i intérieur à la surface Σ, mais extérieur aux masses agissantes?

On peut toujours mener la surface Σ' de telle sorte que le point M_i lui soit extérieur; l'égalité (5) donnera alors

$$4\pi V(M_i) = \int_{\Sigma'}\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_e} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_e}\right)d\Sigma'.$$

L'égalité (2) deviendra alors

$$\int_\Sigma\left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)d\Sigma = 0,$$

ou bien, à cause de l'égalité

$$\int_\Sigma V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial N_i}\,d\Sigma = 4\pi A,$$

qui résulte immédiatement des lemmes de Gauss,

$$\int_\Sigma \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial N_i}\,d\Sigma = 4\pi A. \tag{8}$$

Cherchons une interprétation des égalités (7) et (8).

Nous nommerons *couche de niveau* une couche électrique distribuée sur la surface de niveau Σ et ayant en chaque point une densité superficielle déterminée par la formule

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_i}.$$

La fonction potentielle de cette électricité aura pour valeur en un point quelconque M de l'espace la quantité

$$U(M) = \int_\Sigma \frac{\sigma}{r}\,d\Sigma.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On aura alors, d'après l'égalité (8), en tout point intérieur à la surface Σ,

$$U = A, \tag{9}$$

et en tout point extérieur à la surface Σ, d'après l'égalité (7),

$$U = V. \tag{10}$$

On en conclut qu'*une couche de niveau exerce, à l'extérieur de la surface sur laquelle elle est répandue, la même action que les charges électriques situées à l'intérieur de cette surface et qu'elle n'exerce aucune action en un point intérieur à cette surface.*

L'égalité (9) montre que cette couche, distribuée sur un conducteur limité par la surface de niveau considéré, y formerait une couche électrique en équilibre. De là ce nouveau théorème :

Si l'on sait trouver les surfaces de niveau d'un système de masses électrisées, qui contiennent ces masses à leur intérieur, on sait trouver la distribution qu'affecterait d'elle-même l'électricité sur un conducteur limité par une quelconque de ces surfaces. Il suffit de donner à la densité en chaque point de cette surface une valeur en raison inverse de la distance de ce point à la surface de niveau infiniment voisine. Cette distribution admet les mêmes surfaces de niveau extérieures que les charges primitivement considérées.

La quantité totale d'électricité qui forme la couche de niveau a pour valeur

$$\mathbf{S}_{\Sigma} \sigma \, d\Sigma = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{S}_{\Sigma} \frac{\partial V}{\partial N_e} \, d\Sigma.$$

Les lemmes de Gauss conduisent immédiatement au théorème suivant :

La masse totale d'une couche de niveau a même grandeur et même signe que les masses dont elle peut remplacer l'action pour les points extérieurs.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

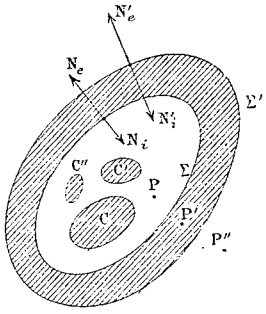
Ces beaux théorèmes ont été découverts par Green (1). Le Mémoire de Green était inconnu lorsque ces propositions furent retrouvées, presque simultanément, par Chasles (2), Gauss (3) et Sir W. Thomson (4).

§ 3. — Étude complète d'un cas d'influence électrique.

Les théorèmes précédents nous conduisent de suite à la solution d'un problème d'influence intéressant.

Les corps C, C′, C″ sont chargés d'électricité (*fig.* 61); Σ et Σ′

Fig. 61.



sont deux surfaces de niveau des charges distribuées sur C, C′, C″ : Σ enveloppe les corps électrisés et Σ′ enveloppe Σ. Ces deux surfaces limitent une couche conductrice. N_i, N_e sont les directions de

---

(1) G. Green, *An Essay on the application of mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Art. 12. Nottingham, 1828. — *Green's Mathematical Papers*, p. 63.

(2) Chasles, *Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince et les rapports qui ont lieu entre ces attractions et les lois de la chaleur dans un corps en équilibre de température* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XV, 25e Cahier, p. 304-316). — *Énoncé de deux théorèmes généraux sur l'attraction des corps et la théorie de la chaleur* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 209; 1839). — *Théorèmes généraux sur l'attraction des corps* (*Addition à la Connaissance des Temps pour* 1845; publié en 1842).

(3) Gauss, *Alegemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte.* Art 37 (*Magnetische Verein;* 1839. — *Gauss Werke,* Bd. V, p. 241).

(4) W. Thomson, *On the uniform motion of heat* (*Cambridge Mathematical Journal;* 1842. — *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism,* p. 1 et p. 131).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la normale à la surface Σ ; N'_i, N'_e sont les directions de la normale à la surface Σ'.

Sur la surface Σ', distribuons une couche de niveau ; sa densité en chaque point a pour valeur

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V'}{\partial N'_e} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V'}{\partial N'_i}.$$

Sur la surface Σ, distribuons une couche de niveau *changée de signe;* sa densité en chaque point a pour valeur

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_i}.$$

Soient :

U', U les fonctions potentielles des deux couches que nous venons de définir ;

A, A' les valeurs de V sur les surfaces Σ, Σ' ;

P un point intérieur à la surface Σ ;

P' un point compris entre les surfaces Σ, Σ' ;

P'' un point intérieur à la surface Σ'.

D'après les théorèmes du paragraphe précédent, nous aurons :

1° Au point P,

$$U(P) = -A, \qquad U'(P) = A'; \tag{11}$$

2° Au point P',

$$U(P') = -V(P'), \qquad U'(P') = A'; \tag{12}$$

3° Au point P'',

$$U(P'') = -V(P''), \qquad U'(P'') = V(P''). \tag{13}$$

Soit W la fonction potentielle totale, définie en chaque point par l'égalité

$$W = V + U + U'.$$

1° D'après les égalités (11), au point P, nous aurons

$$W(P) = V(P) + A' - A. \tag{14}$$

2° D'après les égalités (12), au point P', nous aurons

$$W(P') = A'. \tag{15}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° D'après les égalités (13), au point P″, nous aurons

$$W(P'') = V(P''). \tag{16}$$

L'égalité (15) entraîne le théorème suivant :

1° *L'équilibre électrique est établi sur la couche conductrice limitée par les surfaces* Σ, Σ′.

Les propriétés des couches de niveau donnent immédiatement ces propositions :

2° *La couche* σ′ *est égale en signe et en quantité à la charge* $\mathfrak{M}$ *répandue sur les conducteurs* C, C′, C″; *la couche* σ *est égale en grandeur et de signe contraire à la charge* $\mathfrak{M}$. *L'état d'équilibre obtenu sur le conducteur limité par ces deux surfaces est donc l'état d'équilibre de ce conducteur supposé isolé et à l'état neutre avant d'avoir subi l'influence des masses* $\mathfrak{M}$.

3° *La couche* σ′ *serait en équilibre d'elle-même sur le conducteur qui la porte.*

4° *La couche* σ *serait en équilibre d'elle-même sur un conducteur plein limité extérieurement par la surface* Σ.

Les égalités (14) et (16) donnent encore cette proposition :

5° *L'action électrostatique exercée soit en un point de l'espace clos que renferme le conducteur creux, soit en un point de l'espace qui lui est extérieur, se réduit à l'action des charges inductrices.*

§ 4. — Une classe particulière de condensateurs.

Les propriétés des couches de niveau vont nous permettre également d'étudier d'une manière complète un problème particulier de la condensation électrique (1).

Si l'électricité était en équilibre d'elle-même sur la masse conductrice C (*fig.* 62), elle admettrait certaines surfaces de niveau; soient Σ, Σ′ deux de ces surfaces de niveau, la surface Σ′ entourant la surface Σ; entre ces deux surfaces Σ, Σ′, coulons une matière conductrice C′. Nous aurons un système de deux conduc-

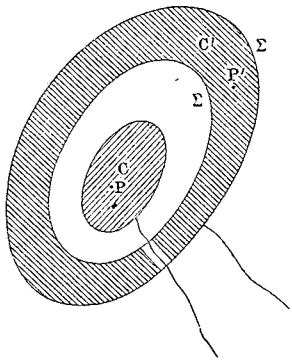
(1) J. MOUTIER, *Cours de Physique*, t. I; 1881.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

teurs dont l'un, C, porte le nom d'*armature interne,* l'autre, C', d'*armature externe*. La bouteille de Leyde sphérique réalise un semblable système ; une bouteille de Leyde cylindrique et très longue le réalise approximativement.

En mettant une des armatures en communication avec une

Fig. 62.



source à un niveau potentiel constant (1) et l'autre armature en communication avec le sol, nous aurons un condensateur; ce condensateur prendra deux formes différentes selon que l'on mettra en communication avec la source l'armature externe ou l'armature interne.

1° *L'armature interne est en communication avec la source au niveau potentiel* λ. *L'armature externe est en communication avec le sol.*

Pour déterminer la distribution électrique sur le système, désignons par v le niveau potentiel auquel serait porté le conducteur C par une charge égale à l'unité en équilibre d'elle-même à sa surface. Les surfaces Σ, Σ' seraient des surfaces de niveau de cette charge, et elles correspondraient à des valeurs u et u' de la fonction potentielle.

Cela posé, distribuons sur le conducteur C une charge a en

(1) L'armature interne ne peut être mise en communication avec la source ou avec le sol que si l'armature externe présente un petit orifice. Nous négligerons l'influence perturbatrice de ce petit orifice.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équilibre d'elle-même ; sur la surface Σ une couche de niveau changée de signe de masse $-b=-a$; sur la surface Σ′ ne plaçons aucune électricité.

Soit V la fonction potentielle de la charge a ; soit U la fonction potentielle de la charge b. Si l'on remarque que la fonction V prend la valeur av en un point de la surface C et une valeur au en un point de la surface Σ, on verra facilement, d'après les propriétés des couches de niveau, que la fonction potentielle totale a pour valeur o en tout point compris entre les surfaces Σ et Σ′, et $a(v-u)$ en tout point du conducteur C. Si donc on a eu soin de déterminer la charge a par l'égalité

$$a=\frac{A}{v-u}, \tag{17}$$

on aura obtenu la distribution électrique sur le condensateur.

Le premier coefficient de Gaugain [Liv. II, Chap. XI] est défini par l'égalité $m=\frac{b}{a}$. On a donc, dans le cas actuel,

$$m=1. \tag{18}$$

Pour obtenir le coefficient m', il nous faut isoler l'armature externe avec une charge $-b$, égale ici à $-a$, et mettre l'armature interne en communication avec le sol. Celle-ci prendra une charge a_1 et m' sera le rapport $\frac{a_1}{b}$. Nous pouvons aisément déterminer a_1.

Sur la surface du corps C, distribuons une charge a_1 en équilibre d'elle-même ; sur la surface Σ, une couche de niveau changée de signe de masse totale $-a_1$; sur la surface Σ′, une couche en équilibre d'elle-même, de masse totale $-b+a_1$. On voit sans peine que l'équilibre sera établi sur le système ; que le conducteur C′ portera une charge totale $-b$; qu'à l'intérieur du conducteur C, la fonction potentielle totale aura une valeur

$$a_1 v - a_1 u - (b-a_1)u'.$$

On déterminera a_1 en égalant cette valeur à o. On aura donc

$$m'=\frac{a_1}{b}=\frac{u'}{v+u'-u}. \tag{19}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La force condensante de l'appareil a pour valeur

$$F = \frac{1}{1 - mm'},$$

ou bien, d'après les égalités (18) et (19),

$$F = 1 + \frac{u'}{v - u}. \tag{20}$$

2° *L'armature externe est en communication avec la source au niveau potentiel* $\mathfrak{V}$; *l'armature interne est en communication avec le sol.*

On aura alors

$$a = \frac{\mathfrak{V}}{u'}, \tag{17 bis}$$

$$m = \frac{u'}{v + u' - u}, \tag{18 bis}$$

$$m' = 1, \tag{19 bis}$$

$$F = 1 + \frac{u'}{v - u}. \tag{20 bis}$$

La force condensante de l'appareil est la même dans les deux cas. Mais la charge prise par le collecteur n'est pas la même.

Appliquons les résultats précédents au cas où l'armature interne est une sphère de rayon R et les surfaces Σ, Σ' des sphères, concentriques à la première, de rayons ρ, ρ'. On a alors

$$v = \frac{1}{R}, \qquad u = \frac{1}{\rho}, \qquad u' = \frac{1}{\rho'}.$$

La force condensante de l'appareil a pour valeur

$$F = 1 + \frac{\frac{1}{\rho'}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}}.$$

Lorsqu'on prend l'armature interne pour collecteur, elle se charge d'une quantité d'électricité

$$a = \frac{\mathfrak{V}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on prend au contraire l'armature externe pour collecteur, elle se charge d'une quantité d'électricité

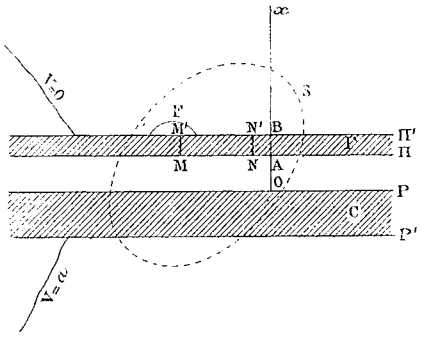
$$q = \rho' a.$$

§ 5. — Électromètre absolu de Sir W. Thomson.

On peut rapprocher l'électromètre de Sir W. Thomson des condensateurs dont nous venons de parler. Toutefois, nous exposerons directement la théorie de cet appareil comme dernière application des propriétés des surfaces de niveau.

Deux conducteurs C, Γ sont en présence (*fig.* 63). Ces deux

Fig. 63.



conducteurs sont en partie situés dans une région de l'espace limitée par une surface S, mais ils s'étendent à des distances de la surface S très grandes par rapport aux dimensions de cette surface.

Non seulement à l'intérieur de la surface S, mais encore à une grande distance de cette surface, la surface qui limite le conducteur C a la forme de deux plans parallèles P et P′, la surface qui limite le conducteur Γ a la forme de deux plans Π, Π′, parallèles à ces deux-là.

Le conducteur Γ est mis en communication avec le sol et le conducteur C avec une source au niveau potentiel a. Il est facile de trouver la distribution électrique sur ces deux conducteurs ; la distribution sur le conducteur Γ nous intéresse seule.

A l'intérieur de la surface S, les surfaces de niveau ne peuvent évidemment différer que très peu de plans parallèles. Soit x la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

distance d'un point au plan P. L'équation de Laplace, que la fonction potentielle doit vérifier en dehors des masses agissantes, se réduit alors, pour ceux de ces points qui sont intérieurs à la surface S, à la forme

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0.$$

Si l'on désigne par D la distance OA des deux plans P, Π ; par E l'épaisseur ΠΠ′ du plateau Γ, on voit sans peine que, dans l'espace compris entre les plans P et Π, on a

$$V = -\frac{a}{D}x + a. \tag{21}$$

Dans l'espace situé au delà du plan Π′, on voit aisément que

$$V = 0. \tag{22}$$

Soit N la normale extérieure au conducteur Γ en un point du plan Π. Soit N′ la normale extérieure au même conducteur en un point du plan Π′. L'égalité (21) donnera

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{a}{D},$$

et l'égalité (22),

$$\frac{\partial V}{\partial N'} = 0.$$

Le plateau Γ ne porte pas d'électricité sur sa face Π′. Sur sa face Π, il porte une couche électrique dont la densité en chaque point a pour valeur

$$\sigma = -\frac{a}{4\pi D}.$$

Supposons qu'un cylindre MM′NN′, normal aux plans Π, Π′, divise le conducteur Γ de façon à isoler un disque mobile. Pour que ce disque et la partie restante du conducteur Γ (anneau de garde) continuent à ne former qu'un seul conducteur, électrisé comme nous venons de l'indiquer, un fil F réunit le disque à l'anneau de garde. Soit Σ la surface de base du disque mobile. Ce disque, ne portant d'électricité que sur sa base inférieure, est soumis à une force, dirigée suivant N, et ayant pour grandeur

$$2\pi\varepsilon\sigma^2\Sigma.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En d'autres termes, le disque mobile est attiré par le disque fixe, et l'attraction a pour valeur

$$F = \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{\Sigma}{D^2} a^2.$$

Il suffira de faire équilibre à cette attraction par une force connue, pour obtenir la détermination de la valeur absolue du niveau potentiel a.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE V.

LE PROBLÈME DE GREEN ET LES THÉORÈMES DE FARADAY.

§ 1. — Le problème intérieur de Green. — Solution de Green.

Les propriétés des couches de niveau donnent la solution immédiate, dans un cas étendu, du problème suivant :

Étant données des masses électrisées et une surface qui entoure ces masses, distribuer sur cette surface une couche électrique exerçant, en tout point extérieur à la surface, la même action que les masses données.

Ce problème a été pour la première fois abordé par Green (1); Green a montré que ce problème pouvait être résolu lorsqu'on savait trouver, pour l'espace intérieur à la surface donnée, la fonction à laquelle Riemann a donné le nom de *fonction de Green*.

Démontrons, tout d'abord, que le problème qui vient d'être énoncé ne peut admettre plusieurs solutions.

Imaginons, en effet, que, sur la même surface, on ait distribué deux couches distinctes, ayant pour densité au point M l'une σ, l'autre σ'. Soient V la fonction potentielle de la première distribution et V' la fonction potentielle de la seconde.

Les deux distributions exercent la même action en un point extérieur à la surface; donc, à l'extérieur de la surface, les deux fonctions V et V' admettent les mêmes dérivées partielles. Si l'on ajoute qu'elles sont toutes deux égales à 0 à l'infini, on voit qu'en tout point extérieur à la surface, on a

$$V - V' = 0.$$

(1) G. GREEN, *An Essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. Art. 5. Nottingham; 1828 (*Green's Mathematical Papers*, p. 31).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les deux fonctions V et V′ ayant la même valeur sur la surface en question et étant toutes deux harmoniques à l'intérieur de cette surface sont identiques entre elles à l'intérieur de cette surface. On a donc, dans tout l'espace, l'identité

$$V - V' = 0.$$

Soient N_i, N_e les directions intérieure et extérieure de la normale en M à la surface donnée. Nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_e} = -4\pi\sigma, \qquad \frac{\partial V'}{\partial N_i} + \frac{\partial V'}{\partial N_e} = -4\pi\sigma',$$

ou bien, en vertu de l'égalité précédente,

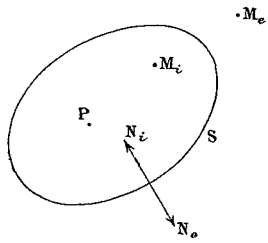
$$\sigma - \sigma' = 0;$$

c'est ce que nous avions annoncé.

Assurés ainsi de l'équivalence de toutes les solutions du problème de Green qui pourront être obtenues par divers procédés, exposons tout d'abord la solution de Green.

Proposons-nous, en premier lieu, de résoudre le problème de Green pour le cas où la surface S ne renferme qu'un seul point électrisé P (*fig.* 64) portant une charge m.

Fig. 64.



Soit $G(M_i)$ la valeur au point M_i, intérieur à la surface S, de la fonction de Green de pôle P. Nous savons que, si r désigne la distance M_iP, on peut écrire (Liv. II, Chap. VI, § 2)

$$G(M_i) = \Gamma(M_i) + \frac{1}{r},$$

$\Gamma(M_i)$ étant une fonction harmonique à l'intérieur de la surface S et égale à $\left(-\frac{1}{r}\right)$ sur la surface S.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cela étant, considérons une fonction V(M) ainsi définie :

1° En tout point M_i, intérieur à la surface S, on a

$$V(M_i) = -m\Gamma(M_i);$$

2° en tout point M_e, intérieur à la surface S, on a

$$V(M_e) = \frac{m}{r}.$$

La fonction V(M) est continue dans tout l'espace, égale à o à l'infini, harmonique à l'extérieur de la surface S, harmonique à l'intérieur de la surface S; c'est donc la fonction potentielle d'une couche électrique distribuée sur la surface S avec la densité

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_e} + \frac{\partial V}{\partial N_i}\right)$$
$$= \frac{m}{4\pi}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial N_i} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N_e}\right).$$

Cette couche ayant, aux points extérieurs à la surface S, la même fonction potentielle que la masse m, résout le problème de Green pour le cas où la surface S renferme une seule masse agissante.

Si la surface S renferme plusieurs masses agissantes, on résoudra le problème de Green en superposant les distributions qui résoudraient ce problème pour chacune des masses prise en particulier.

On voit donc que l'on sait résoudre le problème de Green si l'on sait trouver la fonction de Green pour l'espace intérieur à la surface S. Il est bien aisé de reconnaître l'exactitude de la réciproque.

§ 2. — Solution de Gauss.

Sans connaître le Mémoire de Green, Gauss fut amené, de son côté, à se poser le même problème (1); il proposa le premier une démonstration générale de l'existence d'une et d'une seule solution de ce problème; d'après ce que nous venons de dire, c'est là, par

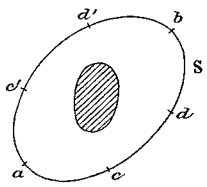
(1) GAUSS, *Allgemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte.* Art. 29-34 [*Magnetische Verein*, 1839 (*Gauss Werke*, Bd. V, p. 231)].

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

contre-coup, une démonstration de l'existence de la fonction de Green et de l'exactitude du principe dit *de Lejeune-Dirichlet*. Cette démonstration de Gauss n'est pas exempte de toute critique; néanmoins, elle présente moins de points litigieux (1) que la démonstration de Lejeune-Dirichlet, rapportée au Livre II, Chap. V, § 2. Nous allons donc exposer ici cette démonstration.

THÉORÈME I. — *Une surface* S (*fig.* 65) *renferme à son intérieur des charges électriques dont la fonction potentielle est* U. *On peut toujours, sur la surface* S, *distribuer une couche monogène de masse totale donnée* $\mathfrak{M}$, *de telle manière que la différence entre la fonction potentielle* V *de cette couche et la fonction* U *ait la même valeur en tous les points de la surface* S.

Fig. 65.



Considérons, en effet, une distribution monogène, de masse donnée $\mathfrak{M}$, sur la surface S; supposons, pour fixer les idées, que cette distribution soit positive. Soit σ la densité qu'offre cette distribution au point M de la surface S.

La quantité V sera certainement positive en tout point de la surface S. Il en sera de même de la quantité

$$\int_S V\sigma\, dS.$$

Cette quantité est donc limitée inférieurement. Il en est de même de la quantité

$$-\int_S 2U\sigma\, dS,$$

(1) *Voir*, à ce sujet, CARL NEUMANN, *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, p. XI et p. 107; Leipzig, 1877.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

car cette dernière ne peut jamais devenir inférieure à

$$-2\alpha\mathfrak{M},$$

α étant la plus grande des valeurs de U sur la surface S.

La quantité

$$\Omega = \int\!\!\int (V - 2U)\sigma\, dS$$

est donc une quantité limitée inférieurement. Gauss admet, et *c'est le seul point douteux de sa démonstration,* que, parmi toutes les couches monogènes de masse totale $\mathfrak{M}$ distribuées sur la surface S, il en est une pour laquelle la quantité Ω atteint sa limite inférieure et devient par conséquent minimum.

Ce point admis, la démonstration du théorème énoncé ne souffre plus de difficulté.

Imaginons que la densité σ ait pris en tout point la valeur qui correspond à ce minimum de Ω; puis imposons-lui une variation infiniment petite compatible avec la condition de laisser invariable la masse donnée $\mathfrak{M}$, condition qui s'exprime par l'égalité

$$\int\!\!\int \delta\sigma\, dS = 0. \tag{1}$$

Ω doit éprouver une variation nulle ou positive. Or on a

$$\delta\Omega = \int\!\!\int \delta V \sigma\, dS + \int\!\!\int (V - 2U)\,\delta\sigma\, dS.$$

Mais δV peut être regardé comme la fonction potentielle d'une couche distribuée sur la surface S avec la densité $\delta\sigma$. La célèbre identité de Gauss donne donc

$$\int\!\!\int \delta V \sigma\, dS = \int\!\!\int V\,\delta\sigma\, dS$$

et, par conséquent,

$$\delta\Omega = 2\int\!\!\int (V - U)\,\delta\sigma\, dS.$$

Ainsi, pour toutes les variations $\delta\sigma$ qui vérifient l'égalité (1), on doit avoir

$$\int\!\!\int (V - U)\,\delta\sigma\, dS \geq 0. \tag{2}$$

Il est aisé de voir que cette condition ne peut être remplie si la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quantité (V — U) n'a pas la même valeur en tout point de la surface S.

Supposons, en effet, que la quantité (V — U) ait des valeurs variables d'un point à l'autre de la surface S. Soit A une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs de (V — U). Comme les deux quantités V et U varient d'une manière continue sur la surface S, on pourra toujours diviser cette surface en deux régions : l'une, *acdb*, en tout point de laquelle (V — U) a une valeur égale ou supérieure à A; l'autre, $ac'd'b$, en tout point de laquelle (V — U) a des valeurs inférieures à A. Prenons, en ces deux régions, deux aires égales entre elles, *cd*, $c'd'$. Divisons l'aire *cd* en éléments, et l'aire $c'd'$ en éléments correspondants aux précédents, deux éléments qui se correspondent étant égaux entre eux. En un point de l'élément dS de l'aire *cd*, la densité électrique diminuera de $\delta\sigma$; en un point de l'élément correspondant de l'aire $c'd'$, elle augmentera de la même quantité; elle ne variera pas sur le reste de la surface S. Une semblable variation sera évidemment soumise à la condition (1), et cependant, contrairement à ce qui a été démontré, elle donnera une valeur négative au premier membre de l'inégalité (2).

Donc, comme nous l'avions annoncé, parmi toutes les distributions monogènes de masse totale $\mathfrak{M}$, il en est évidemment une pour laquelle (V — U) prend une même valeur en tous les points de la surface S. Cette valeur, évidemment fonction de $\mathfrak{M}$, sera désignée par $C(\mathfrak{M})$. La densité de cette distribution en un point P sera $\sigma(\mathfrak{M})$.

THÉORÈME II. — *On peut, sur la surface* S, *trouver une distribution monogène, de masse totale égale à* 1, *dont la fonction potentielle ait une valeur constante sur la surface* S.

Ce théorème se déduit immédiatement de celui qui précède, en supposant que la surface S ne renferme aucune masse électrique.

Soit θ la densité de cette distribution au point P; soit K la valeur constante de la fonction potentielle sur la surface S.

Il est maintenant aisé de résoudre le problème de Green.

Formons, sur la surface S, une distribution dont la densité au

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

point P ait pour valeur

$$\Sigma = \sigma(\mathfrak{M}) - \frac{C(\partial\mathfrak{U})}{K}\theta. \tag{3}$$

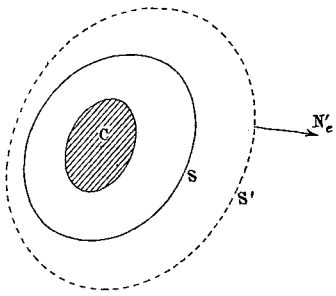
Soit W la fonction potentielle de cette distribution. La fonction (W — U), harmonique à l'extérieur de la surface S, sera égale à o sur la surface S et à l'infini, et, par conséquent, dans tout l'espace extérieur à la surface S. La distribution définie par l'égalité (3) a, à l'extérieur de la surface S, la même fonction potentielle que les masses que renferme la surface S; elle résout le problème de Green.

A cette solution, Gauss a joint le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La couche électrique qui, distribuée sur la surface* S, *exerce à l'extérieur de cette surface des actions égales à celles des charges que la surface renferme a même masse totale que ces charges.*

Entourons la surface S d'une surface fermée S' (*fig.* 66), dont

Fig. 66.



N'_e est la normale extérieure; soient U la fonction potentielle des charges C contenues à l'intérieur de la surface S et W la fonction potentielle des charges réparties sur cette surface. Ces deux fonctions étant identiques en tout point extérieur à la surface S, on a

$$-\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \frac{\partial U}{\partial N'_e}\,dS' = -\frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \frac{\partial W}{\partial N'_e}\,dS.$$

Or le premier membre représente, d'après les lemmes de Gauss, la masse électrique intérieure à la surface S et le second membre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

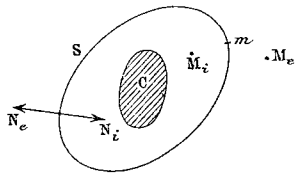
la masse de la couche répandue sur la surface S; ces deux masses sont donc égales entre elles.

§ 3. — Solution de Lejeune-Dirichlet.

Le problème de Green peut être étudié directement, comme l'a fait Gauss, ou être ramené à la détermination de la fonction de Green pour l'espace intérieur à la surface donnée. On peut encore le ramener à la résolution du problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace intérieur à la surface donnée. C'est ce qu'a fait Lejeune-Dirichlet (1).

Gardons les notations du paragraphe précédent. Soient m (*fig.* 67) un point de la surface S et $u(m)$ la valeur que prend U

Fig. 67.



au point m. Déterminons une fonction V, harmonique à l'intérieur de la surface S et prenant sur la surface S les valeurs $u(m)$. Déterminons ensuite, dans tout l'espace, une fonction W(M) par les conditions suivantes :

En tout point M_i, intérieur à la surface S, on a

$$W(M_i) = V(M_i).$$

En tout point M_e, extérieur à la surface S, on a

$$W(M_e) = U(M_e).$$

La fonction W, continue dans tout l'espace, harmonique à l'intérieur de la surface S, harmonique à l'extérieur de cette surface, est la fonction potentielle d'une couche électrique distribuée sur la surface S. Cette couche a pour densité, en chaque point de la

(1) LEJEUNE-DIRICHLET, *Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte,* rédigées par F. Grube, Ch. VI; Leipzig, 1876.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

surface S,

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial W}{\partial N_i} + \frac{\partial W}{\partial N_e}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial U}{\partial N_e}\right).$$

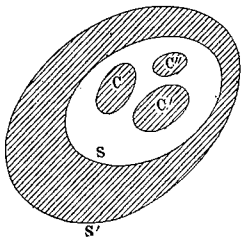
Elle résout évidemment le problème de Green.

§ 4. — Application aux questions d'influence électrique. Premier théorème de Faraday.

Des corps C, C′, C″, ... portent une quantité totale Q d'électricité. On les entoure de deux surfaces fermées, S, S′ (*fig.* 68), cette dernière enveloppant la première. Ces deux surfaces limitent un conducteur creux.

Soit σ la densité de la couche qui, répandue sur la surface S, résoudrait, pour les corps électrisés C, C′, C″, ..., le problème

Fig. 68.



de Green. Soit σ' la densité d'une couche, de masse totale $(Q+q)$, en équilibre d'elle-même sur un conducteur limité par la surface S′. Soit A la valeur constante que prend la fonction potentielle de cette dernière couche aux divers points de la surface S′ et à son intérieur.

Distribuons sur la surface S une couche de densité $-\sigma$, et sur la surface S′ une couche de densité σ'.

En un point compris entre les surfaces S et S′, les charges distribuées sur les corps C, C′, C″, ... auront une fonction potentielle égale et de signe contraire à la fonction potentielle de la couche distribuée sur la surface S. La couche distribuée sur la surface S′ aura, en ce point, une fonction potentielle égale à A.

Le conducteur compris entre les deux surfaces S et S′ sera donc

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en équilibre électrique. Son niveau potentiel sera A. Sa charge totale sera q, car, d'après le théorème III du § 2, la masse totale de la couche distribuée sur la surface S a pour valeur $(-Q)$.

Nous obtenons donc ainsi l'état d'équilibre d'un conducteur creux soumis à l'influence de charges contenues dans sa cavité, que ce conducteur soit isolé et porte une charge donnée d'électricité, ou qu'il soit maintenu à un niveau potentiel donné.

Les lois de cet équilibre sont les suivantes :

1° *Les parois de la cavité se recouvrent d'une couche électrique dont la masse est égale et de signe contraire à la somme des masses agissantes.*

2° *La surface externe du conducteur se recouvre d'une couche qui serait en équilibre d'elle-même sur un conducteur plein limité par cette surface et soustrait à toute influence.*

Si le conducteur creux est maintenu à un certain niveau potentiel, la masse de cette couche est la même que celle de la couche qui porterait le conducteur plein à ce niveau potentiel.

Si le conducteur creux porte une charge donnée, la masse de cette couche est la somme de cette charge et des charges qui exercent l'influence.

3° *A l'extérieur du conducteur creux, l'action exercée se réduit à celle de la couche qui recouvre la surface externe de ce conducteur.*

Les deux premières propositions permettent d'expliquer l'expérience suivante, qui est due à Faraday (1).

Une cloche conductrice C, étroite et creuse (*fig.* 69), est reliée à un électroscope à feuille d'or E. Dans la cloche C, descend une boule électrisée B. Lorsque cette boule est assez loin de l'ouverture de la cloche, on peut regarder cette cloche comme formant sensiblement un conducteur fermé. A partir de ce moment, la divergence des feuilles de l'électroscope ne variera plus si la boule descend davantage dans la cloche ; car la surface externe de la cloche

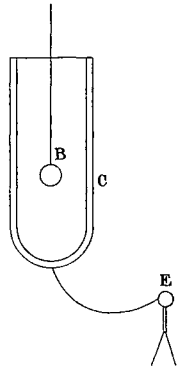
(1) FARADAY, *On static electrical inductive action* (*London and Edinburgh Philosophical Magazine*, Vol. XXII; 1843. — Réimprimé dans *Faraday's Experimental researches on Electricity*, t. II, p. 279).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'électroscope portent une charge totale égale à celle de la boule B et cette charge, en équilibre d'elle-même, a une distribution indépendante de la position de la boule B.

Si la boule B vient à toucher la surface interne de la cloche, sa

Fig. 69.



charge neutralisera exactement la charge de cette surface interne, et la surface externe conservant une charge égale à celle de la boule B, en équilibre d'elle-même, la divergence des feuilles de l'électroscope demeurera ce qu'elle était avant le contact de la boule B avec les parois de la cloche.

§ 5. — Le problème extérieur de Green. — Le second théorème de Faraday. — Les écrans électriques.

Le problème que nous venons d'étudier sous le nom de *problème intérieur de Green* est corrélatif d'un autre problème, que nous nommerons *problème extérieur de Green* et qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant données une surface fermée S *et des charges électriques qui sont toutes situées à l'extérieur de cette surface, distribuer sur cette surface une couche électrique qui, aux points intérieurs à la surface* S, *exerce même action que les masses données.*

Soient U la fonction potentielle de la masse donnée et V la fonction potentielle de la distribution cherchée. Pour que le problème

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

soit résolu, il faut et il suffit qu'en tout point intérieur à la surface S ou situé sur la surface S on ait

$$A + U = V,$$

A étant une constante arbitraire. On voit sans peine, d'après cela, que le problème admettra une infinité de solutions, chacune des valeurs de A correspondant à une et une seule solution. Une solution étant donnée, on en déduira toutes les autres en superposant à la couche trouvée une couche quelconque en équilibre d'elle-même sur un conducteur limité par la surface S.

Pour trouver une solution de ce problème, celle par exemple qui correspond à la valeur o de la constante A, formons une fonction W, harmonique dans tout l'espace extérieur à la surface S, égale à o à l'infini et égale à U sur la surface S. En tout point M_i, intérieur à la surface S, prenons

$$V(M_i) = U(M_i),$$

et en tout point M_e, extérieur à la surface S, prenons

$$V(M_e) = W(M_e).$$

La fonction V, continue dans tout l'espace, égale à o à l'infini, harmonique à l'extérieur de la surface S, harmonique à l'intérieur de la surface S, est la fonction potentielle d'une couche électrique distribuée sur la surface S avec la densité

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_i} + \frac{\partial V}{\partial N_e}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial N_i} + \frac{\partial W}{\partial N_e}\right).$$

Cette distribution résout le problème posé.

La solution de ce problème est ainsi ramenée à la solution du problème de Lejeune-Dirichlet pour l'espace extérieur à la surface S.

Y a-t-il lieu de chercher à simplifier cette solution dans le cas où la surface S serait une surface de niveau pour les charges données? Si la fonction potentielle avait une valeur constante sur la surface S, elle aurait aussi une valeur constante à l'intérieur de cette surface, car elle ne peut, à l'intérieur de cette surface, présenter ni maximum ni minimum. Les charges données exerceraient

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une action nulle à l'intérieur de la surface S et le problème précédent serait immédiatement résolu en distribuant sur la surface S une couche de densité nulle.

Il n'y a donc pas lieu de chercher, dans le cas actuel, de théorèmes analogues à ceux qui ont été développés au Chapitre précédent.

Il est à peine besoin de remarquer que si un conducteur, plein ou creux, limité à la surface S, est soumis à l'action des charges données, extérieures à la surface S, il se recouvrira d'une couche électrique résolvant le problème posé au début de ce paragraphe. Cela est évident, s'il n'existe aucune charge électrique à l'intérieur de la surface S. Dans le cas où le conducteur est plein, nous savons qu'il en est ainsi. Il reste à examiner si, dans le cas où le conducteur est un conducteur creux, compris entre les deux surfaces S et S′, la paroi S′ de la cavité peut être électrisée.

Or, entre les deux surfaces S et S′, d'après la loi fondamentale de l'équilibre électrique, la fonction potentielle a une valeur constante. Comme elle ne peut présenter ni maximum ni minimum à l'intérieur de la surface S′, elle aura à l'intérieur de cette surface la même valeur constante. La surface S′, séparant deux régions de l'espace en lesquelles la fonction potentielle a la même valeur constante, est à l'état neutre.

Ce que nous venons de dire nous montre qu'à l'intérieur d'une cavité entourée par des parois conductrices isolées ou mises en communication avec une source à un niveau potentiel fixe, aucune action électrostatique ne peut être exercée par des charges électriques quelconques placées à l'extérieur. La paroi conductrice jouera le rôle d'*écran* interceptant les actions électrostatiques. En tout point intérieur à la cavité, un électromètre demeurera au repos. C'est ce que Faraday a démontré par la célèbre expérience de la cage.

L'usage a prévalu de donner le nom de *théorèmes de Faraday* aux lois fondamentales de l'électrisation par influence des conducteurs creux. On doit cependant remarquer que, dès 1824, Poisson (¹) qui, par le moyen des fonctions de Laplace, savait résoudre

(¹) Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité dans une sphère creuse, électrisée par influence* (*Bulletin de la Société Philomathique*, p. 49; 1824).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le problème de Lejeune-Dirichlet pour les espaces limités par une surface sphérique, avait étudié complètement le problème de l'électrisation d'une sphère creuse sous l'action de charges données, tant intérieures qu'extérieures. Il avait énoncé les théorèmes de Faraday pour ce cas, restreint il est vrai, avec une grande précision. Citons ici ces énoncés :

« ... La distribution de l'électricité sera connue sur les deux faces de la sphère creuse. On peut remarquer : 1° que l'épaisseur de la couche électrique sur la surface intérieure est indépendante des forces extérieures... et du rayon a de la surface extérieure; 2° que l'épaisseur relative à cette dernière surface ne dépend que de son rayon, des forces extérieures, et de la totalité $E + E'$ du fluide appartenant à la partie pleine de la sphère et aux corps compris dans son intérieur. Si, par exemple, les forces extérieures étaient toutes nulles, on aurait..., de sorte qu'elle resterait la même quelles que fussent l'épaisseur de la sphère creuse, et la disposition des corps électrisés placés dans son intérieur; elle ne changerait pas si l'électricité passait par étincelle de l'un de ces corps dans un autre, ou dans la partie pleine de la sphère. »

« ... Les actions totales exercées sur les points extérieurs ne dépendront, comme l'épaisseur de la couche électrique à la surface extérieure, que du rayon de cette surface, des forces extérieures, et de la totalité du fluide appartenant à la sphère et aux corps placés dans son intérieur; elles seront indépendantes de la distribution de l'électricité dans ces corps, et les mêmes, abstraction faite des forces extérieures, que si les deux fluides étaient réunis au centre de la sphère creuse. »

« ... L'action exercée sur les points situés dans l'intérieur de la sphère creuse ne dépendra que de son rayon intérieur et des forces intérieures. Si toutes ces forces étaient nulles, il n'y aurait aucune action exercée sur ces points; de manière qu'un électromètre, placé quelque part que ce soit dans l'intérieur de la sphère creuse, n'indiquerait aucun signe d'électricité, quelles que soient d'ailleurs l'épaisseur de cette sphère et la grandeur des forces extérieures. Comme un plan peut être regardé comme une sphère d'un rayon infini, il en résulte qu'une feuille métallique d'une très grande étendue, et d'une épaisseur quelconque et partout la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

même, doit empêcher l'action de ces corps de se transmettre; ou, pour parler plus exactement, son action devra neutraliser celle de ces corps; de telle sorte que des corps légers n'éprouveront ni attraction ni répulsion lorsqu'une feuille métallique sera interposée entre eux et des corps électrisés, pourvu que les uns et les autres soient très éloignés du bord de cette feuille. »

« Il serait à désirer que les théorèmes que nous venons de démontrer fussent vérifiés par l'expérience. Pour que les résultats relatifs aux points intérieurs soient conformes à l'observation, il suffira que la surface intérieure du corps que nous avons considéré soit sphérique, quelle que soit d'ailleurs sa forme extérieure ; et réciproquement les propositions qui se rapportent aux points extérieurs devront s'accorder avec l'expérience, lorsque ce corps sera une sphère renfermant un espace vide de forme quelconque. »

Les restrictions indiquées par Poisson lui étaient imposées par ce fait qu'il ne savait résoudre le problème de Lejeune-Dirichlet que pour l'espace terminé à une sphère. Elles disparaissaient aussitôt que l'on admettait l'existence générale d'une solution de ce problème. Green indiqua sommairement, en 1828, comment on pouvait traiter l'électrisation par influence d'un conducteur creux. Faraday n'a donc fait que vérifier expérimentalement les prévisions de Poisson et de Green.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LIVRE IV.

LE POTENTIEL THERMODYNAMIQUE INTERNE D'UN SYSTÈME ÉLECTRISÉ.

CHAPITRE PREMIER.

QUELQUES NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE.

§ 1. — Du potentiel thermodynamique.

La théorie de la distribution électrique a été fondée par Coulomb et Poisson sur quelques hypothèses fort arbitraires; l'étude des conséquences de ces hypothèses a amené les géomètres à créer l'une des plus belles et des plus fécondes branches de l'Analyse moderne. Parmi les conclusions auxquelles ont conduit ces recherches mathématiques, il en est qui ont reçu de l'expérience une pleine confirmation; mais il en est d'autres qui ne s'accordent pas avec l'expérience.

La proposition fondamentale de la théorie de l'équilibre électrique est celle-ci : lorsque l'équilibre électrique est établi sur un corps conducteur, la fonction potentielle a la même valeur en tous les points à l'intérieur de ce corps. Or, cette proposition fondamentale n'est exacte, on le sait aujourd'hui, que si l'on ajoute les restrictions suivantes : le conducteur sur lequel l'équilibre électrique est établi est homogène; il a la même température en tous les points; l'électricité peut s'y mouvoir sans provoquer aucune décomposition chimique.

La théorie de Coulomb et de Poisson ne peut, d'aucune manière, nous faire comprendre la nécessité de ces restrictions. La représentation qu'elle fournit des phénomènes électrostatiques donne une image satisfaisante des propriétés des conducteurs homogènes, mais pas des propriétés des autres conducteurs. Cette

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

théorie doit donc, d'après les principes qui dominent la Physique théorique, être remplacée par une autre. Cette substitution, heureusement, n'affaiblira en rien l'importance des développements mathématiques auxquels la théorie de Poisson a donné lieu.

Les propositions fondamentales de la Thermodynamique nous seront d'un grand secours dans l'établissement de la nouvelle théorie.

Rappelons brièvement ces propositions.

La Thermodynamique repose sur deux principes expérimentaux : le *principe de l'équivalence de la chaleur et du travail* et le *principe de Carnot-Clausius*. L'énoncé de chacun de ces deux principes peut être donné de la manière suivante pour un système dont tous les points sont à la même température.

Soit Q la quantité de chaleur dégagée par un système durant une modification quelconque; sa force vive a augmenté durant cette modification, et les forces extérieures qui lui sont appliquées ont effectué un travail $\mathfrak{T}_e$. Entre ces quantités on a la relation

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{EQ} + \sum \frac{mv_1^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = \mathfrak{T}_e - \mathrm{E}(\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0),$$

E étant une constante positive, l'*équivalent mécanique de la chaleur*, et $(\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0)$ la variation subie par une certaine quantité U, fonction uniforme des paramètres qu'il est nécessaire et suffisant de connaître pour toute valeur du temps pour que l'état du système soit, à chaque instant, déterminé sans ambiguïté. On donne à cette fonction le nom d'*énergie interne du système*.

Tel est l'énoncé du principe de l'équivalence de la chaleur et du travail.

Pour énoncer le principe de Carnot, désignons par T la température absolue qui est commune à tous les points du système, pendant que ce système subit une modification qui dégage une quantité de chaleur dQ. Lorsque le système passe d'un état initial o à un état final 1, on a

$$\text{(2)} \qquad \int_0^1 \frac{dQ}{T} + \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_0 = \mathrm{P};$$

$(\mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_0)$ est la variation subie par une certaine fonction uniforme de l'état du système à laquelle on donne le nom d'*entropie du système*. P est une quantité essentiellement positive à laquelle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on donne le nom de *transformation non compensée* relative à la modification considérée. Si la modification, au lieu d'être une modification réalisable, est une modification *réversible,* on a

$$P = 0.$$

Le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail semble absolument général. Au contraire, l'énoncé que nous avons donné du principe de Carnot et Clausius n'est valable que moyennant certaines restrictions. Il importe, pour la suite de ce cours, de signaler les suivantes (1); les travaux de M. Brillouin ont montré l'importance de la seconde; la première jouera un grand rôle en Électrodynamique :

1° Le système étant pris dans un certain état, défini par une certaine valeur de la température T et par certaines valeurs des paramètres α, β, ..., λ qui le caractérisent, étant placé dans une enceinte de température égale à la sienne, il existe un système de forces extérieures qui, lui étant appliqué, est susceptible de le maintenir dans cet état.

2° Ce système de forces est défini d'une manière uniforme lorsqu'on connaît les quantités α, β, ..., λ, T.

Posons

$$d\tau = ET\,dP,$$

dP étant la transformation non compensée relative à une modification infiniment petite accomplie à la température absolue T. Cette quantité $d\tau$, positive comme dP, est ce que nous nommerons le *travail non compensé* relatif à la modification considérée.

Si la modification est *isothermique,* le travail non compensé est susceptible d'une expression très simple. On a, en effet, dans ce cas,

$$d\tau = -E\,\delta(U - TS) + d\mathfrak{T}_e.$$

Posons

$$\mathfrak{F} = E(U - TS). \tag{3}$$

(1) Nous avons montré comment ces restrictions s'introduisent dans la démonstration du principe en question, dans une étude sur la Thermodynamique professée à la Faculté des Sciences de Lille en 1888. Cette étude est encore inédite. Il nous est impossible de reprendre ici cette longue démonstration.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La fonction $\mathcal{F}$ est une fonction uniforme des paramètres qui définissent l'état du système; nous lui donnerons le nom de *potentiel thermodynamique interne* du système.

La raison de cette dénomination se trouve dans les propositions que nous allons énoncer et qui rapprochent les propriétés du potentiel thermodynamique interne des propriétés que présente, en Mécanique, dans l'étude d'un système soumis à des forces intérieures, le potentiel de ces forces intérieures (Liv. I, Chap. VIII).

D'après l'expression de $\mathcal{F}$, on a, en général, pour valeur du travail non compensé qui accompagne une modification isothermique,

$$d\tau = -\delta\mathcal{F} + d\mathcal{C}_e. \tag{4}$$

Si les forces extérieures admettent un potentiel Ω, on aura

$$d\mathcal{C}_e = -\delta\Omega$$

et alors le travail non compensé $d\tau$ aura pour valeur

$$d\tau = -\delta(\mathcal{F} + \Omega). \tag{5}$$

Dans toute transformation isothermique, $d\tau$ doit être positif.

Donc, pour qu'un système soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que, dans toute modification isothermique virtuelle de ce système, on ait

$$\delta\mathcal{F} - d\mathcal{C}_e > 0. \tag{6}$$

Si les forces extérieures qui sollicitent le système admettent un potentiel, cette proposition pourra se transformer en la suivante :

Pour l'équilibre du système, il est nécessaire et suffisant que la valeur du potentiel thermodynamique total

$$\mathcal{F} + \Omega$$

soit un minimum parmi toutes les valeurs que cette quantité peut prendre à la même température.

Le potentiel thermodynamique interne présente un grand nombre de propriétés dont quelques-unes nous seront utiles par la suite.

1° Supposons l'état du système défini par la température T et par un certain nombre de paramètres indépendants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Posons

$$(7) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1} = P_1, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_2} = P_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_n} = P_n.$$

Pour maintenir le système en équilibre dans l'état défini par le système de valeurs

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad T,$$

il est, par hypothèse, nécessaire et suffisant de le placer dans une enceinte à la même température que lui et de lui appliquer certaines forces extérieures. Ces forces doivent être telles que le travail effectué par elles dans une modification isothermique quelconque du système ait pour valeur

$$P_1 \delta\alpha_1 + P_2 \delta\alpha_2 + \ldots + P_n \delta\alpha_n.$$

En particulier, pour maintenir en équilibre un corps homogène dont le volume spécifique est v, il faut lui appliquer une pression normale et uniforme dont la valeur est

$$(8) \qquad P = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}.$$

2° Supposons les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ choisis de façon que, si T varie, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ demeurant constants, aucun travail extérieur ne soit effectué, et aucune force vive prise par le système. C'est ce qui aura lieu si tous les paramètres dont dépend la forme du système figurent parmi les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Nous aurons alors

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = -ES,$$

$$(10) \qquad \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = EU.$$

3° Dans ces conditions, soit dQ la quantité de chaleur dégagée par le système durant une modification isothermique quelconque. Nous aurons

$$(11) \qquad E\,dQ = -\delta\left(\mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right) + d\mathcal{E}_e - \delta\sum\frac{mv^2}{2}.$$

Dans le cas particulier où la modification est réversible, on a

$$\delta\sum\frac{mv^2}{2} = 0, \qquad \delta\mathcal{F} + d\mathcal{E}_e = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'égalité précédente devient simplement

$$\mathrm{E}\,dQ = \delta\left(\mathrm{T}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{T}}\right). \tag{12}$$

4° Nous donnerons souvent le nom de *travail compensé* accompli dans une modification à la quantité

$$d\mathfrak{T} = -\,\mathrm{ET}\,\delta\mathrm{S}. \tag{13}$$

Si nous posons

$$\mathrm{H} = \mathrm{ETS}, \tag{14}$$

dans toute modification isothermique, nous aurons

$$d\mathfrak{T} = -\,\delta\mathrm{H}. \tag{15}$$

D'après l'égalité (9), nous aurons

$$\mathrm{H} = -\mathrm{T}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{T}}. \tag{16}$$

Telles sont les principales propositions de Thermodynamique générale dont nous aurons à faire usage dans ce qui va suivre. Ces principes sont dus, pour la plupart, à M. Massieu, à M. Gibbs et à M. H. von Helmholtz (1).

§ 2. — Propriétés des déplacements sans changement d'état.

Dans la détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système, nous aurons à faire usage d'un lemme fondamental qui joue un grand rôle dans l'étude des relations de la Thermo-

---

(1) F. Massieu, *Sur les fonctions caractéristiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXIX, p. 858 et 1057; 1869). — *Mémoire sur les fonctions caractéristiques des divers fluides et sur la théorie des vapeurs* (*Mémoires des Savants étrangers,* t. XXII; 1876.—*Journal de Physique,* t. VI, p. 216; 1877).

J. Willard Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions Connecticut Acad.,* t. III, pp. 108 et 343; 1875 à 1878. — *Sillimann's Journal,* t. XVI, p. 441; 1878. — *American Journal of Arts and Sciences,* t. XVIII; 1879).

H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* p. 23; 1882).

P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et ses applications;* Paris, 1886.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dynamique et de la Mécanique (¹). Donnons l'énoncé et la démonstration de ce lemme :

Imaginons un système décomposé en un nombre limité ou illimité de corps finis ou infiniment petits, susceptibles d'être déplacés les uns par rapport aux autres. Imaginons qu'à chacun de ces corps on ait invariablement lié un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Pour connaître complètement l'état du système, il faudra connaître la position de l'origine de chacun de ces systèmes d'axes et l'orientation des axes. En général, il faut aussi connaître un certain nombre d'autres quantités : forme et volume de chacun des corps, état physique et chimique dans lequel il se trouve, température, charge électrique, aimantation en ses divers points, etc. Lorsque les premiers paramètres varieront seuls, les autres demeurant invariables, nous dirons que *l'on déplace les uns par rapport aux autres les divers corps du système sans changer leur état.*

Pour un semblable déplacement, les propositions données par la Thermodynamique doivent être compatibles avec les propositions établies par la Mécanique rationnelle pour les déplacements d'un système de solides invariables.

Dans un déplacement sans changement d'état, le potentiel thermodynamique interne du système éprouve une variation $\delta\mathcal{F}$. En même temps, les actions mécaniques internes (*données*) que les divers corps du système exercent les uns sur les autres effectuent un certain travail $d\mathcal{E}_i$, et l'on a

$$d\mathcal{E}_i = -\delta\mathcal{F}, \tag{17}$$

égalité que l'on peut énoncer ainsi :

Dans toute modification qui déplace les uns par rapport aux autres les divers corps qui constituent un système sans changer leur état, le travail effectué par les actions mécaniques internes du système est la variation changée de signe d'un potentiel, et ce potentiel ne diffère du potentiel thermo-

(¹) P. DUHEM, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 194 ; Paris, 1886. — *Sur l'aimantation par influence*, p. 4 (*Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse;* 1887).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dynamique interne que d'une quantité qui peut bien dépendre de l'état des divers corps, mais qui ne dépend pas de leur position.

La démonstration de cette proposition est extrêmement simple.

Imposons à chacun des corps qui constituent le système la liaison de demeurer dans un état invariable, et appliquons au système, devenu ainsi incapable d'éprouver aucune modification autre que les déplacements que nous avons en vue d'étudier :

1° Des forces égales et directement opposées aux forces extérieures données qui agissent sur lui ;

2° Des forces qui, dans tout déplacement du genre de ceux que nous considérons, effectuent un travail $d\mathfrak{T}'_i$ égal ou inférieur à

$$\delta\mathfrak{F} = \mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U} - \mathrm{TS}),$$

de telle façon que, pour tout déplacement de ce genre, on ait

$$\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) - d\mathfrak{T}'_i \geqq 0. \tag{18}$$

Soit Υ l'énergie interne du système ainsi modifié ; soit Σ son entropie ; soit $d\Theta$ le travail effectué dans un déplacement du genre de celui que nous considérons par les forces extérieures qui agissent maintenant sur le système. Dans un semblable déplacement, le travail non compensé effectué a pour valeur, d'après l'égalité (4),

$$d\tau = -\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + d\Theta. \tag{19}$$

Mais, par hypothèse, l'état du système a été maintenu le même avant et après l'addition des nouvelles forces ; on a donc

$$\Upsilon = \mathrm{U}, \qquad \Sigma = \mathrm{S}.$$

D'autre part, les forces extérieures données qui agissent sur le système après l'addition des nouvelles forces se composent :

1° Des forces extérieures données qui agissaient auparavant sur le système ; dans la modification considérée, elles effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$;

2° Du premier groupe de forces ajoutées ; dans la modification considérée, ces forces effectuent le travail $-d\mathfrak{T}_e$;

3° Du second groupe de forces ajoutées ; dans la modification considérée, ces forces effectuent, par hypothèse, le travail $d\mathfrak{T}'_i$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On a donc

$$d\Theta = d\mathfrak{C}_e - d\mathfrak{C}_e + d\mathfrak{C}'_i = d\mathfrak{C}'_i,$$

et l'égalité (19) devient

$$d\tau = -\,\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + d\mathfrak{C}'_i.$$

D'après l'inégalité (18), cette quantité est nulle ou négative ; dès lors, d'après les propositions de Thermodynamique que nous rappelions au commencement de ce paragraphe, la modification correspondante, entraînant un travail non compensé nul ou négatif, ne peut se produire ; le système, soumis aux actions mécaniques qui agissent réellement sur lui et à celles que nous y avons adjointes, ne peut subir aucun déplacement qui n'altère pas l'état de ses diverses parties ; les liaisons qui lui interdisent toute modification autre que des déplacements de ce genre assurent l'équilibre du système.

Mais, grâce à ces liaisons par lesquelles chacun des corps qui constituent le système est supposé maintenu dans un état invariable, les propositions de la Mécanique rationnelle relatives aux systèmes formés de corps solides sont applicables au système précédent. On peut, en particulier, lui appliquer le principe des vitesses virtuelles.

D'après ce qui précède, le système est en équilibre sous l'action de quatre systèmes de forces données :

1° Les forces mécaniques extérieures, qui agissaient primitivement sur lui ;

2° Les actions mécaniques intérieures, que les divers corps qui le constituent exercent les uns sur les autres ;

3° Des forces égales et directement opposées aux forces extérieures ;

4° Des forces effectuant, dans tout déplacement virtuel, un travail $d\mathfrak{C}'_i$ égal ou inférieur à $\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U} - \mathrm{TS})$.

Le premier et le troisième système de forces se détruisent. On peut donc dire que le système est en équilibre sous l'action du second et du quatrième groupe de forces.

Mais, dans toute modification du système où ses diverses parties changent de position sans changer d'état, les forces du second groupe effectuent un travail virtuel $d\mathfrak{C}_i$; les forces du quatrième groupe effectuent un travail virtuel $d\mathfrak{C}'_i$; en vertu du principe des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

vitesses virtuelles, le système ne peut être en équilibre sous l'action de ces deux groupes de forces si l'on n'a

$$d\mathfrak{C}_i + d\mathfrak{C}'_i \leqq 0.$$

Cela doit avoir lieu toutes les fois que $d\mathfrak{C}'_i$ vérifie l'inégalité (18). On doit donc avoir

$$d\mathfrak{C}_i \leqq - \mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U} - \mathrm{TS}).$$

Si l'on suppose maintenant qu'à tout déplacement virtuel des diverses parties du système on puisse faire correspondre le déplacement inverse, on verra aisément que l'inégalité précédente se réduit à l'égalité (17),

$$d\mathfrak{C}_i = - \delta\mathcal{F}.$$

On remarquera que *cette proposition et celles qui en découleront sont soumises aux mêmes restrictions que l'existence du potentiel thermodynamique interne.* C'est une remarque dont nous verrons l'importance en étudiant l'Électrodynamique.

Ce théorème fondamental entraîne quelques conséquences qui en dérivent immédiatement et que nous pouvons indiquer ici :

Corollaire I. — L'égalité (4)

$$d\tau = - \delta\mathcal{F} + d\mathfrak{C}_e$$

devient, en vertu de l'égalité (17),

$$d\tau = d\mathfrak{C}_i + d\mathfrak{C}_e,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

Lorsqu'un système subit un déplacement sans changement d'état de ses diverses parties, le travail non compensé produit dans le système est égal au travail produit par les actions mécaniques données, tant externes qu'internes, qui agissent sur les diverses parties du système.

Corollaire II. — Nous avons vu que l'entropie du système était liée à son potentiel thermodynamique interne par l'égalité (9),

$$\mathrm{ES} = - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{T}}.$$

Si donc $d\mathfrak{S}$ désigne le travail compensé qui accompagne une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

modification sans changement d'état, on aura

$$d\mathfrak{I} = \mathrm{T}\,\delta\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{T}}\right) = \mathrm{T}\,\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\,\delta \mathfrak{F}.$$

Mais $(-\delta\mathfrak{F})$ peut, dans ce cas, être remplacé par la variation que subit le potentiel des actions mécaniques internes du système. Si ces actions mécaniques sont indépendantes de la température, il en sera de même de leur potentiel et l'on aura, par conséquent,

$$d\mathfrak{I} = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\delta \mathrm{S} = 0.$$

Ainsi, *lorsque les actions mécaniques que les diverses parties d'un système exercent les unes sur les autres ne subissent aucune variation pendant un échauffement du système qui laisse invariable le volume, la forme et la position des diverses parties, un déplacement sans changement d'état des diverses parties de ce système n'engendre aucun travail compensé et ne fait pas varier l'entropie du système.*

Corollaire III. — Dans une modification isothermique quelconque, on a

$$d\tau = -\delta\mathfrak{F} + d\mathfrak{C}_e = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + \mathrm{ET}\,\delta\mathrm{S} + d\mathfrak{C}_e.$$

Dans les conditions moyennant lesquelles le théorème précédent est exact, on a

$$d\tau = d\mathfrak{C}_i + d\mathfrak{C}_e,$$
$$\delta \mathrm{S} = 0.$$

On a donc

$$d\mathfrak{C}_i = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U},$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

Dans les conditions précédentes, le travail exercé par les actions mécaniques internes est égal à la variation changée de signe du produit de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'énergie interne du système.

Ces divers théorèmes constituent le véritable lien de la Thermodynamique avec la Mécanique.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DU POTENTIEL THERMODYNAMIQUE INTERNE D'UN SYSTÈME ÉLECTRISÉ.

§ 1. — Comment, dans l'étude d'un système, on peut tenir compte de la disposition mutuelle de ses parties.

Nous allons, en nous appuyant sur les principes exposés dans le Chapitre précédent, reprendre l'étude des systèmes électrisés et, en particulier, déterminer la forme du potentiel thermodynamique d'un semblable système. Pour effectuer cette détermination, nous ne retiendrons de ce qui a été exposé dans les trois Livres précédents que les lois et les définitions contenues au premier Chapitre du Livre I, d'une part, et, d'autre part, les théorèmes purement analytiques que renferment les autres Chapitres.

Considérons un système dans un état donné. Découpons ce système en une infinité de parcelles infiniment petites, égales ou inégales, de forme quelconque. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les volumes de ces parcelles.

Par la pensée, éloignons infiniment les unes des autres toutes ces parcelles, tout en maintenant invariable l'état de chacune d'elles. Chacune d'elles admettra un potentiel thermodynamique interne. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ces potentiels. Le système formé par toutes ces parcelles ainsi dispersées aura un potentiel thermodynamique interne que l'on peut prendre égal à

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n.$$

f_1 dépend des paramètres qui déterminent l'état de la parcelle v_1 supposée prise isolément. *Si l'on suppose cette parcelle formée par une substance isotrope,* ces paramètres seront les suivants :

1° Le volume de la particule;

2° La forme de la surface qui la limite;

3° La température qui y règne;

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

4° Les paramètres, tels que les densités, qui définissent l'état physique et chimique de cet élément;

5° L'état d'électrisation de la particule. L'électricité peut être distribuée avec une densité solide finie dans toute la masse de ce petit cube; ou avec une densité superficielle finie sur certains éléments de sa surface, ou sur certains éléments superficiels contenus à son intérieur. On pourrait admettre que, pour définir l'état d'électrisation de la particule v_1, il est nécessaire de connaître complètement cette distribution. C'est donc une *hypothèse* nullement nécessaire que nous ferons en admettant que, *pour définir l'état d'électrisation d'un élément infiniment petit v_1, il suffit d'indiquer la charge électrique totale q_1 qu'il porte, sans préciser de quelle manière elle y est distribuée.*

Si l'état d'un système ne dépendait pas de la disposition mutuelle de ses parties, le potentiel thermodynamique interne du système donné serait le même que si les diverses parcelles en lesquelles on l'a décomposé étaient infiniment éloignées les unes des autres. Il aurait donc pour valeur

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n.$$

Mais on doit admettre que ce potentiel dépend de la disposition mutuelle des différentes parties en lesquelles on a décomposé le système, en sorte qu'il a pour valeur

$$\mathcal{F} = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \mathcal{F}', \tag{1}$$

$\mathcal{F}'$ dépendant de l'arrangement des diverses parcelles et devenant égal à o lorsqu'on les éloigne infiniment les unes des autres.

Nous fonderons la détermination de $\mathcal{F}'$ sur l'*hypothèse fondamentale* que voici :

$\mathcal{F}'$ est décomposable de la manière suivante en une somme de termes

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}' = {} & \Phi_{12} + \Phi_{13} + \ldots + \Phi_{1n} \\ & + \Phi_{23} + \ldots + \Phi_{2n} \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + \Phi_{n-1n}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Φ_{ij} dépendant uniquement des paramètres qui déterminent le système des deux éléments v_i et v_j.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces paramètres comprennent non seulement ceux qui définissent chacun des éléments i et j considérés isolément et qui sont énumérés sous les chiffres 1 à 5, mais encore :

6° La distance r_{ij} des deux éléments v_i, v_j;

7° L'orientation des surfaces qui limitent ces deux éléments l'une par rapport à l'autre.

La quantité Φ_{ij} ne dépend pas de la distribution électrique sur le volume v_i; elle ne dépend que de la charge électrique totale q_i que renferme ce volume; nous pouvons donc, pour déterminer Φ_{ij}, supposer cette charge distribuée uniformément dans le volume v_i. Cela posé, il est aisé de démontrer que *la quantité Φ_{ij} ne dépend ni de la forme de la surface qui limite le volume v_i, ni de l'orientation de cette surface par rapport à celle qui limite le volume v_j.*

Quelle que soit la forme de la surface qui limite le volume v_i, quelle que soit l'orientation de cette surface par rapport à celle qui limite le volume v_j, nous pouvons toujours subdiviser le volume v_i en un nombre illimité k de cubes infiniment petits a, b, ..., l, tous égaux entre eux et à un cube infiniment petit pris pour type, ayant tous, par rapport à la surface qui limite v_j, une même orientation indépendante de l'orientation de la surface qui limite v_j.

Soit φ_{aj} la quantité analogue à Φ_{ij} relative au cube a et au volume v_j. Il est évident que nous devons avoir

$$\Phi_{ij} = \varphi_{aj} + \varphi_{bj} + \ldots + \varphi_{lj}.$$

La quantité d'électricité que renferme chacun des petits cubes a, b, ..., l a pour valeur $\frac{q_i}{k}$. Elle est la même pour tous. Les paramètres qui définissent respectivement les systèmes

$$a,\ j;\quad b,\ j;\quad \ldots;\quad l,\ j$$

ont donc la même valeur ou sensiblement la même valeur pour chacun d'eux; partant, on a sensiblement

$$\varphi_{aj} = \varphi_{bj} = \ldots = \varphi_{lj}$$

et

$$\Phi_{ij} = k\varphi_{aj}.$$

Il est facile de voir que le second membre ne dépend ni de la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

forme de la surface qui limite le volume v_i, ni de l'orientation de cette surface par rapport à la surface qui limite v_j; la proposition énoncée est donc démontrée.

On verrait de même que Φ_{ij} ne dépend ni de la forme de la surface qui limite v_j, ni de l'orientation de cette surface par rapport à la surface qui limite v_i.

Soient m_i, m_j les masses des deux parcelles v_i, v_j; soit T leur température; soient α, β, ... les paramètres, tels que les densités, qui fixent leur état physique et chimique. D'après ce qui précède, nous aurons

$$\Phi_{ij} = \Phi(m_i, m_j, q_i, q_j, r_{ij}, \mathrm{T}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Nous allons montrer que *la quantité Φ_{ij} est une fonction linéaire et homogène de la masse m_i de la parcelle v_i et de la charge électrique q_i qu'elle porte.*

Divisons le volume v_i d'une manière quelconque en un certain nombre de volumes égaux ou inégaux a, b, ..., l. Soient m_a, m_b, ..., m_l les masses de ces éléments; soient q_a, q_b, ..., q_l les charges électriques qu'ils portent. Pour tous ces éléments, les paramètres T, α, β, ... sont sensiblement les mêmes; on a sensiblement aussi

$$r_{aj} = r_{bj} = \ldots = r_{lj} = r_{ij}.$$

On doit donc avoir

$$\Phi(m_i, q_i) = \Phi(m_a, q_a) + \Phi(m_b, q_b) + \ldots + \Phi(m_l, q_l),$$

égalité dans laquelle nous avons mis seulement en évidence les paramètres qui n'ont pas la même valeur pour tous les éléments. Mais :

1° Les masses m_a, m_b, ..., m_l sont assujetties à cette seule condition que

$$m_a + m_b + \ldots + m_l = m_i;$$

2° Comme la distribution de la charge q_i sur l'élément v_i a pu être choisie arbitrairement, on voit que q_a, q_b, ..., q_l sont assujettis à cette seule condition que

$$q_a + q_b + \ldots + q_l = q_i.$$

L'égalité précédente prouve donc la proposition énoncée.

On verra de même que Φ_{ij} est une fonction linéaire et homo-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

gène de la masse m_j de l'élément v_j, et de la charge électrique q_j qu'il porte.

Les résultats que nous venons d'obtenir s'expriment par la formule suivante

$$\Phi_{ij} = m_i m_j \varphi_{ij}(r_{ij}) + m_j q_i \psi_{ij}(r_{ij}) + m_i q_j \psi_{ji}(r_{ij}) + q_i q_j \chi_{ij}(r_{ij}), \tag{3}$$

dans laquelle il faut remarquer :

1° *Que les fonctions* φ, χ, ψ *peuvent changer de forme lorsque les paramètres* T, α, β, ... *changent de valeur;*

2° *Que l'on a bien, par raison de symétrie,*

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \qquad \chi_{ij} = \chi_{ji},$$

mais non pas

$$\psi_{ij} = \psi_{ji}.$$

Il est facile de voir que, pour former la quantité $\mathcal{F}'$, donnée par l'égalité (2), on pourra, en vertu de l'égalité (3), opérer de la manière suivante.

On formera d'abord, pour le volume v_1, la quantité

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}'_1 = {} & \tfrac{1}{2} m_1 [m_2 \varphi_{12}(r_{12}) + m_3 \varphi_{13}(r_{13}) + \ldots + m_n \varphi_{1n}(r_{1n})] \\ & + q_1 [m_2 \psi_{12}(r_{12}) + m_3 \psi_{13}(r_{13}) + \ldots + m_n \psi_{1n}(r_{1n})] \\ & + \tfrac{1}{2} q_1 [q_2 \chi_{12}(r_{12}) + q_3 \chi_{13}(r_{13}) + \ldots + q_n \chi_{1n}(r_{1n})]. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Puis on formera de même pour les volumes v_2, v_3, ..., v_n les quantités $\mathcal{F}'_2$, $\mathcal{F}'_3$, ..., $\mathcal{F}'_n$. On aura alors

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_1 + \mathcal{F}'_2 + \ldots + \mathcal{F}'_n. \tag{5}$$

Supposons que l'élément de volume v_1 fasse partie d'un corps dont Δ' est la densité au point de coordonnées (x', y', z'). Supposons en outre que l'électricité soit répandue à l'intérieur du corps et que ρ' soit sa densité solide au point (x', y', z'). Nous aurons, en vertu de l'égalité (4),

$$\mathcal{F}'_1 = \tfrac{1}{2} m_1 \iiint \Delta' \varphi(r)\, dx'\, dy'\, dz' + q_1 \iiint \Delta' \psi(r)\, dx'\, dy'\, dz' + \tfrac{1}{2} q_1 \iiint \rho' \chi(r)\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Chacune des trois intégrales

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \iiint \Delta' \varphi(r)\, dx'\, dy'\, dz', \\ \mathrm{V} = \iiint \Delta' \psi(r)\, dx'\, dy'\, dz', \\ \mathrm{W} = \iiint \rho' \chi(r)\, dx'\, dy'\, dz', \end{cases}$$

dans lesquelles r désigne la distance du point (x', y', z') à un point de l'élément v_1, doit exister; ce qui exige que *chacune de ces intégrales, étendue à un volume infiniment petit quelconque comprenant un point* M *à son intérieur tende vers* o *lorsque ce volume vient, d'une manière quelconque, s'évanouir au point* M.

Cela posé, venons à la détermination des quantités $f_1, f_2, \ldots, f_n$, qui figurent dans l'égalité (1).

La quantité f_1 ne dépend pas de la forme de la surface qui limite le volume v_1.

Pour démontrer cette première proposition, nous nous appuierons sur un lemme qui résulte immédiatement de la proposition que nous venons d'établir.

Imaginons qu'on divise l'élément v_1 d'une manière quelconque en une infinité d'autres éléments a, b, ..., l, de volumes u_a, $u_b, \ldots, u_l$. Soit f_a ce que devient la quantité f_1 pour l'élément a. Soient U_a, V_a, W_a les valeurs, en un point de l'élément a, des intégrales données par les égalités (6), ces intégrales s'étendant au volume v_1. Il est facile de voir que nous aurons

$$f_1 = f_a + f_b + \ldots + f_l + \frac{1}{2}(m_a \mathrm{U}_a + m_b \mathrm{U}_b + \ldots + m_l \mathrm{U}_l)$$
$$+ q_a \mathrm{V}_a + q_b \mathrm{V}_b + \ldots + q_l \mathrm{V}_l + \frac{1}{2}(q_a \mathrm{W}_a + q_b \mathrm{W}_b + \ldots + q_l \mathrm{W}_l);$$

mais

$$\begin{matrix} \mathrm{U}_a, & \mathrm{U}_b, & \ldots & \mathrm{U}_l, \\ \mathrm{V}_a, & \mathrm{V}_b, & \ldots & \mathrm{V}_l, \\ \mathrm{W}_a, & \mathrm{W}_b, & \ldots & \mathrm{W}_l \end{matrix}$$

sont, d'après ce qui vient d'être démontré, des quantités infini-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ment petites comme v_1. On peut donc écrire

$$f_1 = f_a + f_b + \ldots + f_l. \tag{7}$$

Ce lemme posé, démontrons la proposition énoncée.

La distribution de la charge q_1 sur le volume v_1 étant indifférente, supposons-la uniforme et divisons le volume v_1 en k petits cubes a, b, ..., l égaux entre eux et à un cube pris d'avance comme type. Ces cubes seront identiques. Nous aurons donc

$$f_a = f_b = \ldots = f_l,$$

et, en vertu de l'égalité (7),

$$f_1 = k f_a.$$

Le nombre k dépend du volume de l'élément v_1, mais point de sa forme; il en est de même de f_a; donc, de même de f_1, ce qu'il fallait démontrer.

La quantité f_1 est une fonction linéaire et homogène de la masse m_1 et de la charge q_1 de l'élément v_1.

Pour démontrer cette proposition, nous divisons d'une manière quelconque l'élément v_1 en k autres éléments a, b, ..., l, ayant des masses m_a, m_b, ..., m_l et portant des charges q_a, q_b, ..., q_l. L'égalité (7) nous donnera, en mettant seulement en évidence, parmi les paramètres dont dépend f_1, ceux qui varient d'un élément à l'autre,

$$f_1(m_1, q_1) = f_1(m_a, q_a) + f_1(m_b, q_b) + \ldots + f_1(m_l, q_l).$$

Mais on remarquera :

1° Que les masses m_a, m_b, ..., m_l sont assujetties à cette seule condition que l'on ait

$$m_a + m_b + \ldots + m_l = m_1;$$

2° Que la distribution de la charge q_1 sur l'élément v_1 étant arbitraire, on pourra toujours disposer des charges q_a, q_b, ..., q_l, en les assujettissant à cette seule condition

$$q_a + q_b + \ldots + q_l = q_1.$$

Dès lors, l'égalité obtenue démontre la proposition précédemment énoncée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En résumé, on a

$$f_1 = m_1 F_1 + q_1 G_1, \tag{8}$$

F_1, G_1 dépendant de la température de l'élément v_1, de sa densité et des paramètres qui fixent son état physique et chimique.

L'ensemble des égalités (1), (4), (5), (8) détermine la forme du potentiel thermodynamique d'un système électrisé.

§ 2. — Introduction de l'hypothèse fondamentale relative à la compressibilité.

Nous avons vu que, si l'on déplaçait les unes par rapport aux autres les diverses parties qui composent un système sans altérer l'état de chacune de ces parties, les forces données intérieures au système effectuaient un travail $d\mathfrak{T}_i$ lié à la variation du potentiel thermodynamique interne par l'égalité

$$d\mathfrak{T}_i = -\delta\mathfrak{F}. \tag{9}$$

Appliquons ici ce théorème. Déplaçons les uns par rapport aux autres les éléments de volume v_1, v_2, ..., v_n en lesquels on a décomposé un système électrisé, sans modifier l'état de ces divers éléments. Nous aurons, d'après les égalités (1), (4), (5),

$$\delta\mathfrak{F} = \delta\mathfrak{F}'_1 + \delta\mathfrak{F}'_2 + \ldots + \delta\mathfrak{F}'_n$$

et

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{F}'_1 = {} & \frac{m_1}{2}\left[m_2\frac{\partial\varphi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}}\delta r_{12} + m_3\frac{\partial\varphi_{13}(r_{13})}{\partial r_{13}}\delta r_{13} + \ldots + m_n\frac{\partial\varphi_{1n}(r_{1n})}{\partial r_{1n}}\delta r_{1n}\right] \\ & + q_1\left[m_2\frac{\partial\psi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}}\delta r_{12} + m_3\frac{\partial\psi_{13}(r_{13})}{\partial r_{13}}\delta r_{13} + \ldots + m_n\frac{\partial\psi_{1n}(r_{1n})}{\partial r_{1n}}\delta r_{1n}\right] \\ & + \frac{q_1}{2}\left[q_2\frac{\partial\chi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}}\delta r_{12} + q_3\frac{\partial\chi_{13}(r_{13})}{\partial r_{13}}\delta r_{13} + \ldots + q_n\frac{\partial\chi_{1n}(r_{1n})}{\partial r_{1n}}\delta r_{1n}\right].\end{aligned}$$

L'égalité (9) entraîne alors la conséquence suivante :

Les forces intérieures données qui agissent dans un système dont les diverses parties sont électrisées se rangent en trois classes :

1° *Deux masses matérielles m_1, m_2, électrisées ou non, exercent l'une sur l'autre une attraction*

$$m_1 m_2 \frac{\partial\varphi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

proportionnelle au produit des deux masses, dépendant de leur distance et de leur état physique et chimique; cette force est soumise à la règle de l'égalité de l'action et de la réaction.

2° *Deux masses électrisées, portant des charges* q_1, q_2, *exercent l'une sur l'autre une attraction*

$$q_1 q_2 \frac{\partial \chi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}}$$

proportionnelle au produit des deux charges, dépendant de leur distance et de leur état physique et chimique; cette force est soumise à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction.

3° *Une masse matérielle* m_2 *exerce sur un élément de volume portant une charge électrique* q_1 *une attraction*

$$q_1 m_2 \frac{\partial \psi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}}$$

proportionnelle au produit de la masse par la charge électrique, dépendant de la distance des deux éléments et de leur état physique et chimique; cette force est soumise à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction.

Considérons, d'une part, l'élément de volume v_1, et, d'autre part, tous les corps qui composent l'univers, moins cet élément de volume.

Il est évident que, pour définir complètement les propriétés de l'élément v_1 à un instant donné, il faut connaître complètement l'état et la position relative de tous les corps qui composent l'univers.

Mais, en Thermodynamique, *on admet en général que, pour que la densité d'un élément de volume soit déterminée, il suffit de connaître :*

1° *Les autres paramètres qui définissent l'état de cet élément supposé isolé par la pensée de tous les autres corps qui composent l'univers;*

2° *Les forces données que les autres corps de l'univers exercent sur lui;*

3° *Les liaisons que lui imposent les corps qui l'avoisinent.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cela posé, imaginons que l'élément v_1, que, pour abréger, nous supposerons à l'état neutre, et un certain nombre d'éléments $v_2, \ldots, v_n$ qui l'avoisinent forment un *système;* les parties de l'univers exclues de ce système exercent sur lui des *forces extérieures*. Imaginons que l'élément v_1 se dilate de δv_1. Les autres éléments du système sont déplacés sans que le volume et l'état de chacun d'eux subisse aucune variation. La densité Δ_1 en un point de l'élément v_1 varie de $\delta\Delta_1$. Le potentiel thermodynamique interne du système augmente de

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} = {} & m_1 \frac{\partial F_1(\Delta_1)}{\partial \Delta_1}\delta\Delta_1 \\ & + m_1\left(m_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\Delta_1} + m_3\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\Delta_1} + \ldots + m_n\frac{\partial\varphi_{1n}}{\partial\Delta_1}\right)\delta\Delta_1 \\ & + m_1\left(q_2\frac{\partial\psi_{21}}{\partial\Delta_1} + q_3\frac{\partial\psi_{31}}{\partial\Delta_1} + \ldots + q_n\frac{\partial\psi_{n1}}{\partial\Delta_1}\right)\delta\Delta_1 - d\tau,\end{aligned}$$

$d\tau$ désignant le travail effectué par celles des forces intérieures au système qui ont leur point d'application aux divers éléments de volume du corps autres que v_1.

Les forces extérieures appliquées au système effectuent en même temps un travail $d\mathcal{E}_e$. Si le système est en équilibre, on doit avoir

$$d\mathcal{E}_e - \delta\mathcal{F} = 0.$$

Soit p_1 la pression en un point de l'élément v_1. On verra sans peine que l'on doit avoir

$$d\tau + d\mathcal{E}_e = -p_1\,\delta v_1.$$

Les égalités précédentes nous donnent

$$\begin{aligned}p_1\,\delta v_1 + {} & m_1\frac{\partial F_1(\Delta_1)}{\partial\Delta_1}\delta\Delta_1 \\ & + m_1\left(m_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\Delta_1} + m_3\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\Delta_1} + \ldots + m_n\frac{\partial\varphi_{1n}}{\partial\Delta_1}\right)\delta\Delta_1 \\ & + m_1\left(q_2\frac{\partial\psi_{21}}{\partial\Delta_1} + q_3\frac{\partial\psi_{31}}{\partial\Delta_1} + \ldots + q_n\frac{\partial\psi_{n1}}{\partial\Delta_1}\right)\delta\Delta_1 = 0.\end{aligned}$$

Cette égalité définit la pression p qu'il faudrait appliquer à la particule v_1 pour lui conserver la densité Δ_1, si, supprimant toutes les forces données qui agissent sur elle, on supprimait les liaisons que lui impose la présence des corps voisins.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous avons obtenu cette égalité en supposant que la molécule m_2 fît partie du système; mais nous aurions aussi bien pu considérer la molécule m_2 comme ne faisant pas partie du système et les forces qu'elle exerce comme extérieures au système. D'après l'hypothèse indiquée, les propriétés de la molécule φ_1 devraient être les mêmes que dans le cas précédent; la pression nécessaire pour lui garder la densité Δ_1 devrait garder la valeur p_1.

Or cette pression est maintenant donnée par l'égalité

$$\begin{aligned} p_1\,\delta v_1 + m_1 \frac{\partial F_1(\Delta_1)}{\partial \Delta_1}\,\delta\Delta_1 \\ + m_1\left(m_3\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial \Delta_1} + \ldots + m_n\frac{\partial \varphi_{1n}}{\partial \Delta_1}\right)\delta\Delta_1 \\ + m_1\left(q_3\frac{\partial \psi_{31}}{\partial \Delta_1} + \ldots + q_n\frac{\partial \psi_{n1}}{\partial \Delta_1}\right)\delta\Delta_1 = 0. \end{aligned}$$

Pour qu'elle ait la même valeur que dans le cas précédent, il faut et il suffit que l'on ait

$$m_2\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \Delta_1} + q_2\frac{\partial \psi_{21}}{\partial \Delta_1} = 0,$$

quelles que soient les quantités m_2 et q_2. Les deux fonctions φ_{12}, ψ_{21} sont donc indépendantes de Δ_1.

On arrive ainsi aux conclusions suivantes :

1° *Deux masses matérielles m_1, m_2 exercent l'une sur l'autre une attraction*

$$m_1 m_2 \frac{\partial \varphi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}},$$

la fonction φ_{12} pouvant changer de forme avec la nature physique et chimique et avec la température des deux molécules m_1 et m_2, mais ne pouvant pas dépendre de leur densité.

2° *Une masse matérielle m_1 et un élément portant une charge électrique q_2 exercent une attraction mutuelle*

$$m_1 q_2 \frac{\partial \psi_{21}(r_{12})}{\partial r_{12}},$$

la fonction ψ_{21} pouvant changer de forme avec la nature physique et chimique et avec la température des deux molécules,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

avec la densité de la molécule qui porte la charge q_2, *mais ne dépendant pas de la densité de la masse* m_1.

Si l'on répétait les mêmes raisonnements sans supposer ρ_1 à l'état neutre, on trouverait encore :

3° *Que la fonction* ψ_{21} *ne peut dépendre de la densité* Δ_2 *de l'élément qui porte la charge* q_2.

4° *Que la fonction* χ_{12} *ne peut dépendre des densités* Δ_1, Δ_2 *des éléments qui portent les charges* q_1, q_2.

Les résultats que nous venons d'obtenir ont, indiquons-le en passant, une première application à la Mécanique céleste.

Pour expliquer la forme de la queue des comètes, M. Faye a supposé que l'action mutuelle de deux particules matérielles s'exprimait par une formule renfermant un terme de plus qu'on ne l'avait cru jusqu'à ce jour. Ce terme représenterait une force répulsive dont la grandeur dépendrait du volume spécifique des particules entre lesquelles elle agit; très petite pour les corps dont la densité est mesurable par les moyens qu'emploie le physicien, cette force deviendrait grande pour les gaz très raréfiés qui composent la queue des comètes. M. Resal, dans son *Traité de Mécanique céleste,* a développé la théorie de semblables forces.

Il résulte de ce qui précède que la supposition d'une semblable force est incompatible avec l'hypothèse généralement admise que, pour connaître la densité d'un corps, il est permis de remplacer la connaissance des autres corps par la seule connaissance des forces données qu'ils exercent et des liaisons qu'ils imposent. Il resterait à connaître celle de ces deux suppositions qui doit être rejetée.

Nous avons indiqué l'importance de l'hypothèse généralement admise sur la compressibilité des corps. Nous aurons plus tard à revenir sur cette hypothèse. Mais, pour le moment, les résultats que nous avons à établir en sont indépendants.

§ 3. — Introduction de la loi de la gravitation universelle et de la loi de Coulomb.

Nous allons maintenant, pour achever la détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé, intro-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

duire la proposition suivante qui résume les lois de la gravitation universelle et de Coulomb :

Si deux particules de masse m_1, m_2, portant des charges électriques q_1, q_2, sont situées à une distance r_{12} supérieure à une certaine longueur très petite λ que nous nommerons le rayon d'activité moléculaire, leur attraction mutuelle se réduit à

$$k\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} - \varepsilon\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}.$$

Il en résulte que, lorsque r_{12} surpasse λ, la quantité ψ_{12} ne diffère de

$$-k\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \varepsilon\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

que par un terme indépendant de r_{12}, et ce terme est nul, puisque ψ_{12} doit s'annuler lorsque r_{12} devient infini. Nous avons ainsi

$$\varphi_{12}(r_{12}) = -\frac{k}{r_{12}}\mathfrak{F}_{12}(r_{12}),$$

$$\chi_{12}(r_{12}) = \frac{\varepsilon}{r_{12}}\mathfrak{G}_{12}(r_{12}),$$

les quantités $\mathfrak{F}_{12}$, $\mathfrak{G}_{12}$, ψ_{12} dépendant de l'état physique et chimique, de la température des éléments v_1, v_2, mais point de leur densité dans le cas où l'on admet l'hypothèse indiquée au paragraphe précédent. Ces quantités deviennent égales à o lorsque r_{12} surpasse λ.

Ajoutons enfin cette hypothèse :

La somme

$$\mathfrak{G}_{12}(r_{12})q_2 + \mathfrak{G}_{13}(r_{13})q_3 + \ldots + \mathfrak{G}_{1n}(r_{1n})q_n,$$

étendue à toutes les charges situées à une distance inférieure à λ de l'élément v_1 est, en général, une quantité très petite de l'ordre de λ.

En d'autres termes, les choses se passent en toutes circonstances comme si l'action mutuelle de deux particules électrisées était donnée par la loi de Coulomb même aux distances infiniment petites. C'est encore une hypothèse purement gratuite; on pourrait parfaitement supposer que la somme précédente a une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur finie comme les sommes analogues

$$\mathcal{F}_{12}(r_{12})m_2 + \mathcal{F}_{13}(r_{13})m_3 + \ldots + \mathcal{F}_{1n}(r_{1n})m_n,$$
$$\psi_{12}(r_{12})m_2 + \psi_{13}(r_{13})m_3 + \ldots + \psi_{1n}(r_{1n})m_n.$$

Réunissons les résultats contenus dans les égalités (1), (4), (5), (8) et dans celles que nous venons d'obtenir. Posons

$$\Omega_1 = \frac{m_2}{r_{12}} + \frac{m_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{m_n}{r_{1n}}, \tag{10}$$

$$V_1 = \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{1n}}, \tag{11}$$

les sommes étant étendues à tous les éléments du système autres que l'élément ρ_1. Posons ensuite

$$P_1 = 2F_1 + \mathcal{F}_1(r_{12})m_2 + \mathcal{F}_{13}(r_{13})m_3 + \ldots + \mathcal{F}_{1n}(r_{1n})m_n, \tag{12}$$

$$\Theta_1 = G_1 + \psi_1(r_{12})m_2 + \psi_{13}(r_{13})m_3 + \ldots + \psi_{1n}(r_{1n})m_n, \tag{13}$$

les sommes s'étendant à tous les éléments situés dans une sphère de rayon λ ayant son centre en un point de l'élément ρ_1. Nous aurons, en vertu des égalités (1), (4), (5), (8),

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F} = &-\frac{k}{2}(m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \ldots + m_n\Omega_n) \\ &+\frac{\varepsilon}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2 + \ldots + q_n V_n) \\ &+\frac{1}{2}(m_1 P_1 + m_2 P_2 + \ldots + m_n P_n) \\ &+ (q_1\Theta_1 + q_2\Theta_2 + \ldots + q_n\Theta_n). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Chacune des quatre sommations qui figurent au second membre s'étend au système tout entier.

Chacun des quatre termes du second membre a une signification remarquable.

Les actions intérieures qui s'exercent dans un système électrisé sont, en vertu des hypothèses faites, de quatre sortes :

1° Deux masses matérielles exercent l'une sur l'autre une attraction donnée par la loi de la gravitation universelle; le potentiel de ces actions est le terme

$$-\frac{k}{2}(m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \ldots + m_n\Omega_n).$$

L'étude de ce terme constitue la Mécanique céleste.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

2° Deux masses matérielles, situées à une distance inférieure au rayon d'activité moléculaire, exercent l'une sur l'autre une attraction qui dépend de leur état physique et chimique et de leur température. Ces forces, dites *forces capillaires,* ont pour potentiel le terme

$$\frac{1}{2}(m_1 P_1 + m_2 P_2 + \ldots + m_n P_n).$$

L'étude de ce terme constitue l'étude de la capillarité, au sens général que l'on peut aujourd'hui donner à ce mot. Nous avons esquissé ailleurs (1) comment la Thermodynamique pouvait faire sortir de ce point de départ toute l'étude de la capillarité.

3° Deux masses électrisées exercent l'une sur l'autre une répulsion donnée par la loi de Coulomb. Ces forces ont pour potentiel le terme

$$\frac{\varepsilon}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2 + \ldots + q_n V_n).$$

4° Deux masses m_1, m_2, portant des charges électriques q_1, q_2, et situées à une distance inférieure au rayon d'activité moléculaire, exercent l'une sur l'autre une attraction

$$q_1 m_2 \frac{\partial \psi_{12}(r_{12})}{\partial r_{12}} + m_2 q_1 \frac{\partial \psi_{21}(r_{12})}{\partial r_{12}},$$

qui dépend de leur état physique et chimique et de leur température. Ces forces ont pour potentiel le terme

$$\Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n.$$

Nous allons, aux Livres suivants, étudier, en partie seulement, les propriétés de ce potentiel. Nous laisserons de côté les conséquences que l'on peut déduire de son étude dans les recherches relatives à la pression électrique et aux phénomènes électrocapillaires, nous bornant à renvoyer le lecteur au Mémoire que nous avons publié à ce sujet (2).

Les forces dont nous venons de parler ont été pour la première

(1) P. DUHEM, *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes capillaires* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. II, p. 207; 1885).

(2) P. DUHEM, *Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. V, p. 97; 1888. — T. VI, p. 183; 1889).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

fois considérées par M. H. von Helmholtz : « En effet, dit-il (¹), tous les phénomènes qui se passent dans les conducteurs de la première classe (c'est-à-dire dans ceux où le courant a lieu sans électrolyse) peuvent évidemment se déduire de l'hypothèse que les différentes substances chimiques exercent des attractions différentes sur les deux électricités, et que ces attractions n'agissent qu'à des distances inappréciables, tandis que les deux électricités agissent aussi l'une sur l'autre à de plus grandes distances. »

Soient Υ et Σ l'énergie interne et l'entropie qu'aurait le système si, le ramenant à l'état neutre, on conservait la disposition, la densité, la température et l'état physique ou chimique de ses diverses parties. Nous aurons évidemment

$$\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) = -\frac{k}{2}(m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \ldots + m_n\Omega_n) + \frac{1}{2}(m_1\mathrm{P}_1 + m_1\mathrm{P}_1 + \ldots + m_n\mathrm{P}_n).$$

D'autre part, soit W le potentiel électrostatique du système; nous aurons

$$\mathrm{W} = \frac{\varepsilon}{2}(q_1\mathrm{V}_1 + q_2\mathrm{V}_2 + \ldots + q_n\mathrm{V}_n).$$

Moyennant ces notations, l'égalité (14) deviendra

$$(15) \qquad \mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n.$$

C'est la forme du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé à laquelle nous étions parvenus dès 1886 (²).

Les formules (9) et (10) du Chapitre précédent nous donnent immédiatement l'énergie interne et l'entropie d'un système électrisé. Si nous posons

$$(16) \qquad \mathrm{H} = -\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}},$$

$$(17) \qquad \mathrm{K} = \Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}},$$

(¹) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 47 (Berlin, 1847. — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 48).

(²) P. DUHEM, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 209.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nous aurons

$$ES = E\Sigma + H_1 q_1 + H_2 q_2 + \ldots + H_n q_n, \tag{18}$$

$$EU = E\Upsilon + W + K_1 q_1 + K_2 q_2 + \ldots + K_n q_n. \tag{19}$$

Nous aurons souvent, dans ce qui va suivre, à faire usage de ces formules (15), (18), (19).

§ 4. — De la continuité de la quantité Θ.

En nous appuyant sur les principes que nous venons d'exposer, nous arriverons, au prochain Chapitre, à cette conséquence :

La quantité

$$\Theta_1 = G_1 + \psi_{12}(r_{12})\, m_2 + \psi_{13}(r_{13})\, m_3 + \ldots + \psi_{1n}(r_{1n})\, m_n \tag{13}$$

varie d'une manière continue avec les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point de l'élément v_1, même lorsque ce point franchit la surface de discontinuité qui sépare deux corps de nature différente.

Voyons, dès maintenant, ce que l'exactitude d'une semblable proposition fait supposer des quantités G et ψ_{12}.

Nous avons vu (§ 1) que, si Δ' est la densité de l'élément $dx'\,dy'\,dz'$, l'intégrale

$$\iiint \Delta' \psi(r)\, dx'\, dy'\, dz',$$

dans laquelle r désigne la distance d'un point de l'élément $dx'\,dy'\,dz'$ à un point de l'élément v_1, et qui est étendue à un volume infiniment petit comprenant l'élément v_1, doit être infiniment petite quelle que soit la forme de ce volume.

En s'appuyant sur ce lemme, on montrera facilement que la proposition précédente est en effet exacte si l'on admet les deux hypothèses que voici :

1° *La quantité G_1 est une constante absolue qui ne dépend d'aucune des propriétés particulières de l'élément v_1.*

2° *La quantité ψ_{12}, tout en dépendant de l'état physique et chimique de la température de la masse m_2, ne dépend d'aucune des propriétés de l'élément v_1 qui porte la masse q_1.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous admettrons ces hypothèses, dont la seconde est conforme à la manière de voir d'Helmholtz exposée à la fin du paragraphe précédent.

Nous admettrons aussi, dans ce qui va suivre :

1° *Que les dérivées partielles du premier ordre de la quantité* Θ *varient d'une manière continue dans tout l'espace;*

2° *Que les dérivées du second ordre de la quantité* Θ *n'éprouvent de discontinuité qu'aux points où la matière est discontinue.*

Il est aisé de montrer que l'on peut faire sur la fonction ψ_{12} des hypothèses qui entraînent les deux résultats que nous venons d'énoncer (1); nous ne nous y arrêterons pas.

---

(1) P. DUHEM, *Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires.* 1re Partie : *De la pression électrique,* Chap. I, § II (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. V, p. 103; 1888).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LIVRE V.

L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE ET LES COURANTS PERMANENTS SUR LES CONDUCTEURS MÉTALLIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

LOIS FONDAMENTALES DE L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE SUR LES CONDUCTEURS MÉTALLIQUES.

§ 1. — **Condition de l'équilibre électrique.**

Le potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé est donné par l'égalité (15) du Chapitre précédent

$$(1) \qquad \mathcal{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n.$$

Supposons que l'on se donne la disposition des diverses parties du système, leur état physique et chimique, et proposons-nous de savoir suivant quelle loi se distribuera sur un semblable système une charge électrique donnée.

Imaginons pour cela que l'on fasse varier la distribution électrique sans déplacer les diverses parties du système ; une semblable modification n'engendrant aucun travail externe, on voit que l'on obtiendra la condition d'équilibre électrique en écrivant que, pour toute modification de ce genre,

$$\delta \mathcal{F} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad E\,\delta(\Upsilon - T\Sigma) + \delta W + \delta(\Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n) = 0.$$

Supposons que *le système soit formé de conducteurs sur lesquels on peut modifier la distribution électrique sans modifier l'état physique et chimique d'aucun d'entre eux,* ce que nous exprimerons brièvement en disant qu'il est formé de *conducteurs*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

métalliques. Alors, dans tout changement de distribution électrique, nous pourrons supposer invariable l'état physique et chimique des diverses parties du système, ce qui nous donnera

$$\delta(\Upsilon - T\Sigma) = 0,$$
$$\delta\Theta_1 = 0, \qquad \delta\Theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta\Theta_n = 0,$$

et réduira l'égalité (2) à

$$\delta W + \Theta_1 \delta q_1 + \Theta_2 \delta q_2 + \ldots + \Theta_n \delta q_n = 0. \tag{3}$$

Imaginons en premier lieu la modification suivante :

La charge δq passe de l'élément e_1 en un point de l'élément e_2. Nous aurons

$$\delta q_1 = -\delta q, \qquad \delta q_2 = \delta q, \qquad \delta q_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta q_n = 0. \tag{4}$$

Calculons δW.

La valeur initiale de W est

$$\varepsilon\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{1n}}\right) + q_2\left(\frac{q_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{2n}}\right) + \ldots\ldots\ldots + \frac{q_{n-1}q_n}{r_{n-1n}}\right].$$

La valeur finale est

$$\varepsilon\left[(q_1 - \delta q)\left(\frac{q_2 + \delta q}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{1n}}\right) + (q_2 + \delta q)\left(\frac{q_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{2n}}\right) + \ldots\ldots\ldots + \frac{q_{n-1}q_n}{r_{n-1n}}\right].$$

Nous avons donc

$$\delta W = -\varepsilon\frac{(\delta q)^2}{r_{12}} + \varepsilon\,\delta q\left(\frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{2n}}\right) - \varepsilon\,\delta q\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{12}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{1n}}\right).$$

Soient V_1, V_2 les niveaux potentiels respectifs des éléments

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

v_1, v_2. Nous aurons

$$V_1 = \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{1n}},$$

$$V_2 = \frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{q_n}{r_{2n}},$$

ce qui donnera, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\delta W = \varepsilon(V_2 - V_1)\,\delta q. \tag{5}$$

En vertu des égalités (4) et (5), l'égalité (3) devient

$$\varepsilon(V_2 - V_1) + \Theta_2 - \Theta_1 = 0.$$

La modification particulière que nous venons de considérer entraîne donc la conséquence suivante :

Pour que l'électricité soit en équilibre sur un conducteur métallique dont tous les points sont à la même température, il faut que la quantité $(\varepsilon V + \Theta)$ *ait la même valeur en tous les points du conducteur.*

Nous allons montrer maintenant que *cette condition est suffisante,* c'est-à-dire que, si elle est remplie, l'égalité (3) a lieu pour une variation quelconque de distribution électrique.

Pour le prouver, remarquons en premier lieu que, dans une modification quelconque de la distribution électrique, on a

$$\delta W = \varepsilon(V_1\,\delta q_1 + V_2\,\delta q_2 + \ldots + V_n\,\delta q_n), \tag{6}$$

égalité qui se démontre comme on a démontré l'égalité (5). L'égalité (3) devient alors

$$(\varepsilon V_1 + \Theta_1)\,\delta q_1 + (\varepsilon V_2 + \Theta_2)\,\delta q_2 + \ldots + (\varepsilon V_n + \Theta_n)\,\delta q_n = 0.$$

Supposons que les éléments $v_1, \ldots, v_k$ forment un premier conducteur C, en tout point duquel $(\varepsilon V + \Theta)$ a une même valeur A ; que les éléments $v_{k+1}, \ldots, v_l$ forment un second conducteur C′, isolé du premier, en tout point duquel $(\varepsilon V + \Theta)$ a une même valeur A′, etc.

L'égalité précédente deviendra

$$A(\delta q_1 + \ldots + \delta q_k) + A'(\delta q_{k+1} + \ldots + \delta q_l) + \ldots = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or, d'après la loi de la conservation de l'électricité (Liv. I, Chap. I), on a

$$\delta q_1 + \ldots + \delta q_k = 0,$$
$$\delta q_{k+1} + \ldots + \delta q_l = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

l'égalité précédente est donc démontrée.

Ainsi l'égalité

$$\varepsilon V + \Theta = \text{const.} \tag{7}$$

constitue la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre électrique sur un conducteur métallique dont tous les points sont à la même température.

Peut-on trouver une distribution électrique ayant aux divers points des conducteurs une densité solide finie, sauf sur certaines surfaces en tout point desquelles elle aurait une densité superficielle finie, et satisfaisant à cette condition? Cela serait impossible si la fonction Θ n'était pas une fonction continue dans toute l'étendue d'un même conducteur; si, de plus, elle n'était pas régulière dans tout l'espace occupé par ce conducteur, sauf peut-être sur certaines surfaces. On est ainsi conduit à faire sur la quantité Θ la première des hypothèses indiquées au § 4 du Chapitre précédent.

Si l'on admet, sur la quantité Θ, les hypothèses indiquées au paragraphe en question, on verra sans peine que l'égalité (7) entraîne les conséquences suivantes :

1° *A l'intérieur d'un conducteur sur lequel l'équilibre électrique est établi, il n'existe pas de surface électrisée;*

2° *En tout point à l'intérieur d'un tel conducteur, l'électricité a une densité solide finie et donnée par l'égalité*

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Delta\Theta. \tag{8}$$

Cette densité dépend uniquement de la constitution du conducteur au voisinage du point considéré; elle ne varie d'une manière discontinue que si ce point traverse une surface de discontinuité de la substance conductrice.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Considérons une région d'un conducteur remplie par une substance homogène. Θ aura alors la même valeur en tout point dont la distance aux limites de cette région sera supérieure au rayon d'activité moléculaire. Les égalités (7) et (8) deviendront alors

$$V = \text{const.}, \qquad \rho = 0.$$

C'est donc seulement dans une région formée par une substance homogène que la fonction potentielle a une valeur constante et la densité électrique une valeur nulle. Nous retrouvons ainsi les lois fondamentales de la théorie de Poisson, mais nous les retrouvons entourées de restrictions que la théorie de Poisson n'aurait pu nous faire prévoir.

§ 2. — Stabilité de l'équilibre électrique.

L'équilibre électrique est-il toujours stable? En d'autres termes, une distribution électrique qui satisfait à la condition (7) correspond-elle a un minimum de potentiel thermodynamique interne? Pour résoudre cette question, cherchons le signe de $\delta^2 \mathcal{F}$.

Nous avons

$$\delta \mathcal{F} = \delta W + \Theta_1 \delta q_1 + \Theta_2 \delta q_2 + \ldots + \Theta_n \delta q_n.$$

Comme $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont les variables indépendantes, nous aurons

$$\delta^2 \mathcal{F} = \delta^2 W.$$

Cherchons donc l'expression de $\delta^2 W$.

L'égalité (6) nous donne

$$\delta^2 W = \varepsilon(\delta V_1 \delta q_1 + \delta V_2 \delta q_2 + \ldots + \delta V_n \delta q_n).$$

D'ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}
\delta V_1 &= \frac{\delta q_2}{r_{12}} + \frac{\delta q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{\delta q_n}{r_{1n}}, \\
\delta V_2 &= \frac{\delta q_1}{r_{21}} + \frac{\delta q_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{\delta q_n}{r_{2n}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\delta V_n &= \frac{\delta q_1}{r_{n1}} + \frac{\delta q_2}{r_{n2}} + \ldots + \frac{\delta q_n}{r_{n-1n}}.
\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous trouvons donc aisément l'égalité

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}\delta W = 2\varepsilon\Big[&\delta q_1\left(\frac{\delta q_2}{r_{12}}+\frac{\delta q_3}{r_{13}}+\ldots+\frac{\delta q_n}{r_{1n}}\right)\\ &+\delta q_2\left(\frac{\delta q_3}{r_{23}}+\ldots+\frac{\delta q_n}{r_{2n}}\right)\\ &+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{\delta q_{n-1}\,\delta q_n}{r_{n-1\,n}}\Big].\end{aligned}\right.$$

Imaginons que l'on place, en l'élément v_1, une charge δq_1 ; en l'élément v_2, une charge δq_2, ..., en l'élément v_n, une charge δq_n ; cette distribution électrique admettra un potentiel électrostatique $\mathfrak{V}$, et l'on verra sans peine que l'égalité (9) peut s'écrire

$$\delta^2 W = 2\mathfrak{V}.$$

Or nous avons vu [Liv. I, Chap. IX] que *le potentiel électrostatique de tout système électrisé était positif ;* la quantité $\delta^2 W$ est donc positive ; il en est de même de $\delta^2 \mathcal{F}$, et, toute distribution d'équilibre rendant nécessairement minimum le potentiel thermodynamique interne, *l'équilibre électrique sur un système de conducteurs métalliques dont tous les points sont à la même température est assurément un équilibre stable.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE SUR LES CONDUCTEURS HOMOGÈNES. LOIS DE LA DÉCHARGE ÉLECTRIQUE.

§ 1. — L'équilibre électrique sur les conducteurs homogènes.

Nous n'entendrons pas ici par conducteur homogène un conducteur ayant la même constitution physique et chimique et la même densité en tous ses points. Nous admettrons que les corps qui nous semblent homogènes ont sensiblement la même densité en tous les points dont la distance aux surfaces terminales est supérieure à une quantité μ qui est de l'ordre du rayon d'activité moléculaire; mais si un point M se trouve à l'intérieur d'un pareil corps A à une distance l, inférieure à μ, de la surface qui sépare le corps A d'un autre corps B, homogène en apparence, nous admettrons que la densité au point M dépend :

1° De la nature du corps A, de sa température, de la densité qu'il présente loin des surfaces terminales;

2° De la nature du corps B, de sa température, de la densité qu'il présente loin des surfaces terminales;

3° De la distance l du point M à la surface qui sépare les deux corps A et B.

Ces hypothèses sont celles que Poisson a introduites en 1830 dans la théorie de l'action capillaire.

Nous allons nous proposer de chercher les lois de l'équilibre électrique sur un système de conducteurs métalliques constitués comme nous venons de l'indiquer. Dans le présent Chapitre, nous nous limiterons au cas où tous les conducteurs sont formés du même métal 1 et confinent au même isolant 0.

Soit un point M, situé à une distance l, inférieure à $(\lambda + \mu)$, de la surface qui limite un semblable conducteur. Il est bien aisé de voir, en se reportant à la définition de la quantité Θ, que Θ aura en ce point une valeur $\Theta(l)$, variable avec l. La forme de la fonc-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion $\Theta(l)$ dépend de la nature du conducteur 1 et de l'isolant 0, de leurs densités, de leur température.

D'après l'égalité (8) du Chapitre précédent, nous aurons en ce point une densité électrique solide donnée par la formule

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Delta\Theta(l). \tag{1}$$

D'après cette égalité, ρ est une fonction de l qui s'annule lorsque l devient supérieur à $(\lambda+\mu)$ et qui dépend de la nature du conducteur (1) et de l'isolant (0) sans dépendre des actions électriques auxquelles ils sont soumis. Nous arrivons donc aux propositions suivantes :

Lorsque l'équilibre électrique est établi sur un conducteur homogène, il n'existe pas d'électricité aux points intérieurs à ce conducteur dont la distance aux surfaces terminales surpasse $(\lambda+\mu)$.

Les points dont la distance aux surfaces terminales est inférieure à $(\lambda+\mu)$ *sont électrisés. La densité électrique est la même en tous les points d'une surface parallèle à la surface terminale.*

La loi suivant laquelle varie l'électrisation, lorsque l'on passe d'une surface parallèle à la surface terminale à une autre semblable surface, dépend seulement de la nature et de l'état du conducteur et de l'isolant loin des surfaces terminales; mais non de leur forme ni des actions électriques particulières auxquelles le conducteur est soumis.

Prenons un point M sur la surface qui sépare le conducteur de l'isolant; en ce point, la normale à la surface vers l'intérieur du conducteur a la direction N_i et la normale vers l'extérieur la direction N_e. Si V est la fonction potentielle, la densité superficielle au point M a pour valeur

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_e}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial\Theta(0)}{\partial N_i} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e}.$$

Si nous posons

$$\Sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial\Theta(0)}{\partial N_i}, \tag{2}$$

$$\Delta = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e}, \tag{3}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la densité au point M aura pour valeur

$$\sigma = \Sigma + \Delta. \tag{4}$$

La densité électrique superficielle en un point de la surface d'un conducteur homogène en équilibre est la somme :

1° *D'une densité* Σ, *donnée par l'égalité* (2), *qui dépend seulement de la nature que le conducteur et l'isolant présentent loin des surfaces terminales, mais non de leur forme et des actions électriques particulières auxquelles le conducteur est soumis ;*

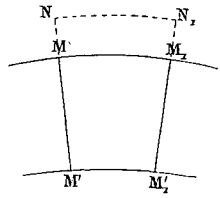
2° *D'une densité* Δ, *donnée par l'égalité* (3), *qui dépend des actions électriques qui s'exercent dans le système et de la forme des conducteurs qui le composent.*

Nous donnerons à l'ensemble de la couche de densité Σ répandue d'une manière uniforme à la surface du conducteur et des couches électrisées qui se succèdent dans l'intérieur de ce conducteur jusqu'à une distance $(\lambda + \mu)$ de la surface le nom d'*électricité naturelle du conducteur*. La couche électrique de densité Δ sera l'*électricité communiquée*.

Étudions les propriétés de l'électricité naturelle du conducteur.

Prenons, sur la surface S, un élément dS (*fig.* 70). Par tous

Fig. 70.



les points M, M_1, ... du contour de cet élément, menons des normales à la surface S. Prolongeons-les, vers l'intérieur du contour, d'une même longueur MM', $M_1M'_1$, ... infiniment peu supérieure à $(\lambda + \mu)$ et, vers l'extérieur du conducteur, d'une même longueur infiniment petite MN, M_1N_1, ... Par les points M', M'_1, ... d'une part et les points N, N_1, ... d'autre part, menons deux surfaces parallèles à la surface S. Cherchons la quantité totale

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'électricité contenue dans la petite surface fermée $NN_1M'M'_1$.

Si l'on observe :

1° Que les faces latérales de ce petit cylindre sont normales aux surfaces d'égal niveau potentiel;

2° Que la surface $M'M'_1$ est située dans une région où la fonction potentielle a la valeur constante $-\frac{1}{\varepsilon}\Theta(\lambda+\mu)$; on trouvera sans peine, d'après les lemmes de Gauss, que la quantité totale d'électricité contenue dans la surface fermée dont il s'agit a pour valeur

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e}dS = \Delta\, dS.$$

De là, on conclut aisément la proposition suivante :

Si, par un cylindre normal à la surface du conducteur, on découpe une portion de la région naturellement électrisée du conducteur, l'électricité naturellement répandue dans cette région renferme toujours autant de fluide positif que de fluide négatif.

Nous exprimerons ce fait en disant que l'*électricité naturelle du conducteur forme une couche double* (1).

Soit U la fonction potentielle de cette couche double prise isolément. La fonction U vérifie, comme on le voit aisément, les propriétés suivantes :

1° Elle est continue dans tout l'espace;

2° Elle est régulière dans tout l'espace, sauf sur la surface qui limite le conducteur;

3° Elle est égale à zéro à l'infini;

4° Elle est harmonique dans tout l'espace extérieur au conducteur;

---

(1) Le nom de *double couche* ou *couche limite* (*Doppelschicht, Grenzschicht*) a été donné par M. H. von Helmholtz à l'ensemble de deux couches de même densité superficielle, mais de signes contraires, distribuées sur deux surfaces parallèles infiniment voisines [H. HELMHOLTZ, *Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche* (*Pogg. Ann.* Bd LXXXIX, p. 226; 1853). — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 489. — *Studien über elektrische Grenzschichten* (*Wiedemann's Annalen*, Bd VII, p. 337; 1879). — HELMHOLTZ, *Wiss. Abhandl.*, t. I, p. 855]. Ce nom est pris ici dans un sens peu différent.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

5° En tout point intérieur au conducteur, on a, d'après l'égalité (1),

$$\Delta U = -\frac{1}{\varepsilon}\Delta\Theta;$$

6° En tout point de la surface qui limite le conducteur, on a, d'après l'égalité (2),

$$\frac{\partial U}{\partial N_e} = \frac{\partial U}{\partial N_i} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Theta(o)}{\partial N_i}.$$

On démontre sans peine que ces conditions définissent une seule fonction U et que c'est la fonction

$$U = -\frac{1}{\varepsilon}[\Theta - \Theta(o)] \tag{5}$$

à l'intérieur du conducteur et

$$U = o \tag{6}$$

à l'extérieur du conducteur.

Si l'on désigne par P la fonction potentielle de la seule électricité communiquée, on aura

$$V = U + P.$$

La condition de l'équilibre électrique sur le conducteur, donnée par la condition

$$\varepsilon V + \Theta = C, \tag{7}$$

deviendra, en vertu de l'égalité (5),

$$\varepsilon P = C - \Theta(o), \tag{8}$$

tandis qu'à l'extérieur du conducteur on aura, en vertu de l'égalité (6),

$$V = P. \tag{9}$$

Ainsi la couche électrique communiquée à la surface d'un conducteur serait en équilibre, dans la théorie de Poisson, sur ce conducteur. Elle porte l'intérieur de ce conducteur au niveau potentiel constant

$$\frac{C - \Theta(o)}{\varepsilon}.$$

Les actions extérieures de ce conducteur se réduisent aux actions de l'électricité communiquée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces propositions ont une importance capitale puisqu'elles nous prouvent :

1° Que les actions qu'exerce dans l'espace isolant un système de conducteurs homogènes, tous du même métal, se réduisent aux actions de l'électricité communiquée à leur surface);

2° Que la distribution de cette électricité est donnée par la théorie de Poisson.

Par là, toutes les méthodes analytiques, exposées aux Livres II et III, qui résolvent le problème de la distribution électrique dans la théorie de Poisson, reprennent l'importance physique que la ruine de la théorie de Poisson semblait devoir leur faire perdre.

§ 2. — Théorie de la décharge électrique. — Théorème de Clausius.

Considérons un système de conducteurs métalliques, tous formés du même métal, tous rigides. Supposons que l'on prenne ce système dans un état d'équilibre, puis qu'on fasse subir aux conducteurs qui le composent certains déplacements, aux charges électriques qu'il porte certaines modifications de distribution, de manière à faire passer le système à un autre état d'équilibre. Cherchons la variation que subit, dans une semblable transformation, le potentiel thermodynamique interne.

Cette variation est donnée par la formule générale

$$\delta\mathcal{F} = \mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \delta\mathrm{W} + \delta(\Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n). \tag{10}$$

Évaluons successivement les divers termes qui figurent au second membre de cette égalité.

Si le système avait été au préalable ramené à l'état neutre et maintenu dans cet état pendant toute la durée de la modification, celle-ci eût constitué pour le système un déplacement sans changement d'état. Si donc on désigne par $\delta\mathfrak{T}_i$ le travail qu'effectueraient, durant le déplacement imposé au système, les actions qui s'exerceraient entre les diverses parties du système ramenées à l'état neutre, nous aurons

$$\mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) = -\delta\mathfrak{T}_i. \tag{11}$$

La quantité

$$\Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n$$

pourra, d'après les égalités (1), (2), (4), s'écrire de la manière

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

suivante :

$$(12) \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum \Theta\,\Delta\Theta\,dv + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum \Theta(0)\frac{\partial\Theta(0)}{\partial N_i}\,dS + \sum \Theta(0)\,\Delta\,dS,$$

le premier signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments de volume des conducteurs qui composent le système, et les deux autres à tous les éléments des surfaces qui limitent ce système.

La quantité Θ aura, pour chacun des points du système, la même valeur au commencement de la modification et à la fin ; les deux premiers termes de l'expression précédente auront donc aussi la même valeur au commencement de la modification et à la fin.

Comme tous les conducteurs sont formés du même métal plongé dans le même isolant, $\Theta(0)$ a la même valeur pour tous les éléments dS. Le dernier terme de l'expression (12) peut donc s'écrire

$$\Theta(0)\sum \Delta\,dS.$$

Or $\sum \Delta\,dS$ représente la quantité totale d'électricité communiquée au système ; comme l'électrisation naturelle est composée uniquement de couches doubles, la quantité totale d'électricité naturelle répandue sur le système est égale à 0 ; on peut donc dire que $\sum \Delta\,dS$ représente la quantité totale d'électricité, tant naturelle que communiquée, répandue sur le système ; cette quantité étant essentiellement invariable, le troisième terme de l'expression (12) a la même valeur au commencement de la modification et à la fin. On a donc

$$(13) \qquad \delta(\Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n) = 0.$$

Calculons enfin la variation du potentiel électrostatique du système.

Nous aurons évidemment

$$(14) \qquad W = \frac{\varepsilon}{2}\sum U\rho\,dv + \frac{\varepsilon}{2}\sum U\Sigma\,dS + \varepsilon\sum U\,\Delta\,dS + \frac{\varepsilon}{2}\sum P\,\Delta\,dS,$$

le premier signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments de volume du système et les trois autres à tous les éléments des surfaces qui limitent les conducteurs.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les égalités (1), (2), (5), (6) donnent

$$\sum U\rho\, dv = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\sum [\Theta - \Theta(0)]\Delta\Theta\, dv,$$

$$\sum U\Sigma\, dS = 0,$$

$$\sum U\Delta\, dS = 0.$$

Les trois premiers termes de l'expression de W donnée par l'égalité (14) ont donc la même valeur au commencement et à la fin de la modification et l'on a

$$\delta W = \frac{\varepsilon}{2}\,\delta\sum P\Delta\, dS. \tag{15}$$

Les égalités (10), (11), (13) et (15) donnent cette égalité très simple

$$\delta\mathcal{F} = -\delta\mathcal{E}_i + \frac{\varepsilon}{2}\,\delta\sum P\Delta\, dS. \tag{16}$$

Lorsqu'on change la disposition d'un certain nombre de conducteurs métalliques homogènes tous formés du même métal et la distribution électrique sur ces conducteurs, la variation subie par le potentiel thermodynamique interne du système pendant que ce système passe d'un état d'équilibre à un autre, augmentée du travail des forces intérieures qui agiraient dans le système à l'état neutre, donne la variation subie par le potentiel électrostatique de la seule électricité communiquée.

Supposons les conducteurs tous immobiles; la modification qui change la distribution sur ces conducteurs sera alors une *décharge*. L'égalité (16) deviendra

$$\delta\mathcal{F} = \frac{\varepsilon}{2}\,\delta\sum P\Delta\, dS, \tag{17}$$

et pourra s'énoncer ainsi :

Lorsqu'une décharge électrique se produit entre des conducteurs immobiles tous formés du même métal, elle engendre un travail non compensé égal à la diminution du potentiel électrostatique de la seule distribution communiquée au système.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'entropie S et l'énergie interne U du système sont liées au potentiel thermodynamique interne par les relations [Liv. IV, Chap. I, égalités (9) et (10)]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = -ES,$$

$$\mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = EU.$$

On déduit alors de l'égalité (17)

(18) $$\delta S = 0,$$

$$E\,\delta U = \frac{\varepsilon}{2}\,\delta \int P\,\Delta\,dS.$$

Si l'on désigne par dQ la quantité de chaleur dégagée dans le système immobile, la dernière égalité devient

(19) $$E\,dQ = -\frac{\varepsilon}{2}\,\delta \int P\,\Delta\,dS.$$

Les égalités (18) et (19) équivalent aux propositions suivantes :

Lorsqu'une décharge électrique se produit entre des conducteurs immobiles tous formés du même métal, elle n'engendre aucun travail compensé.

Elle engendre une quantité de chaleur qui équivaut à la diminution subie par le potentiel électrostatique de la seule électricité communiquée au système.

Cette dernière proposition, préparée par les idées de M. H. von Helmholtz (1), a été obtenue sous sa forme générale par Clausius (2) en 1852.

§ 3. — Thermomètre de Snow Harris.

Le théorème de Clausius, très important par sa généralité, acquiert une importance plus grande encore en ce qu'il fournit

(1) H. VON HELMHOLTZ, *Ueber die Erhaltung der Kraft* (Berlin, 1847. — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 41).

(2) R. CLAUSIUS, *Ueber das mechanische Œquivalent einer elektrischen Entladung und die dabei stattfindende Erwärmung des Leitungsdrahtes* [*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Bd LXXXVI, p. 337; 1852. — *Théorie mécanique de la chaleur*. Traduction Folie (1re édition), p. 41].

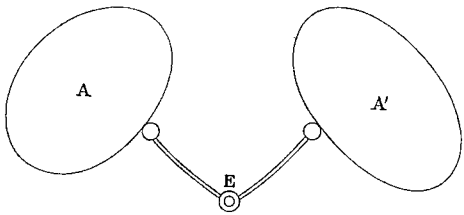
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une belle vérification expérimentale des lois de la distribution électrique.

L'explication des expériences dont résulte cette vérification repose sur quelques remarques.

Première remarque. — Deux conducteurs fixes A et A′ (*fig.* 71) sont chargés d'une distribution communiquée. *Si cette*

Fig. 71.



distribution existait seule, elle porterait le premier au niveau potentiel V, le second au niveau potentiel V′. Le premier conducteur renferme une charge totale M et le second une charge totale M′. Un troisième conducteur E, de petites dimensions (l'*excitateur*), est à l'état neutre et infiniment éloigné. Le potentiel électrostatique de l'électricité communiquée au système a pour valeur initiale

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{2}(MV + M'V').$$

On approche l'excitateur de manière qu'il touche les deux conducteurs. La distribution électrique est modifiée sur chacun d'eux : le conducteur A prend une charge $\mathfrak{M}$; le conducteur A′, une charge $\mathfrak{M}'$; l'excitateur E, une charge m. On éloigne infiniment l'excitateur; les niveaux potentiels des trois conducteurs deviennent $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}'$, v. La valeur finale du potentiel électrostatique de l'électricité communiquée est

$$W_1 = \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{M}\mathfrak{V} + \mathfrak{M}'\mathfrak{V}' + mv).$$

Nous avons supposé l'excitateur de petite dimension. Par conséquent, la masse m est très petite. L'égalité

$$M + M' = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + m,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

qui exprime que la charge communiquée est demeurée invariable pendant toute la durée du phénomène, se réduit sensiblement à

$$M + M' = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}'.$$

Les niveaux potentiels des deux conducteurs A et A′, après que l'excitateur a été éloigné, sont sensiblement les mêmes qu'au moment où l'excitateur les touchait tous deux. Or, à ce moment, ils étaient égaux entre eux. On a donc sensiblement

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}$$

et

$$W_1 = \frac{\varepsilon}{2}(M + M')\mathcal{V}.$$

Si le système était ramené à l'état neutre, les forces intérieures à ce système n'effectueraient, dans le déplacement considéré, aucun travail. On aurait donc

$$\int \delta\mathcal{F} = W_1 - W_0 = \frac{\varepsilon}{2}[M(\mathcal{V} - V) + M'(\mathcal{V} - V')]$$

et, partant,

$$E\int \delta U = \frac{\varepsilon}{2}[M(\mathcal{V} - V) + M'(\mathcal{V} - V')].$$

L'excitateur n'ayant jamais porté que des charges faibles, il a suffi d'un très petit travail extérieur pour le mettre en mouvement. D'ailleurs sa force vive est nulle au commencement comme à la fin de la modification. Si donc Q est la quantité de chaleur dégagée dans la modification en question, nous aurons

$$EQ = \frac{\varepsilon}{2}[M(V - \mathcal{V}) + M'(V' - \mathcal{V})]. \tag{20}$$

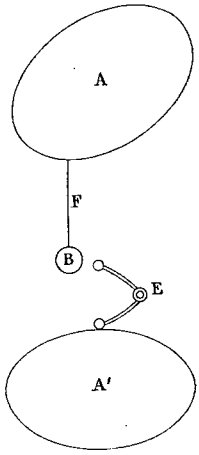
Elle est la même que la quantité de chaleur qui serait donnée par le théorème de Clausius, si l'on supposait que le système fût demeuré immobile et que l'électricité eût passé directement de l'un des conducteurs A, A′ sur l'autre.

Seconde remarque. — On suppose que l'un des deux conducteurs soit formé d'une partie massive A (*fig.* 72), reliée par un fil extrêmement fin F, à une boule de petites dimensions B. On met l'une des extrémités de l'excitateur en contact avec le conducteur A′, et l'autre avec la boule B. L'expérience

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

montre que la chaleur dégagée par la décharge est presque exclusivement cédée au milieu qui avoisine le fil F. Ce fait se relie à la loi de Joule, que nous étudierons dans un prochain Chapitre.

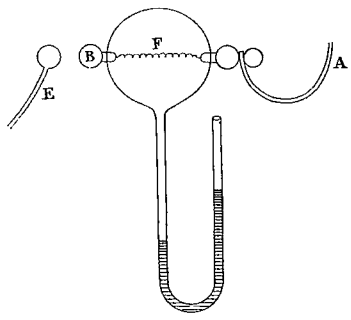
Fig. 72.



Il permet de déterminer expérimentalement la quantité de chaleur dégagée dans la décharge.

Il suffit pour cela d'employer une sorte de calorimètre à air

Fig. 73.



inventé par Snow Harris en 1827 (¹). Le fil F (*fig.* 73) est enfermé dans une enveloppe de verre terminée par un manomètre à

(¹) Snow Harris, *On the relative powers of various metallic substances as conductors of electricity* (*Philosophical Transactions*, t. CLVIII, p. 18; 1827).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

air libre. Au moment de la décharge, le fil, d'abord échauffé, se met rapidement en équilibre de température avec l'air contenu dans l'enveloppe de verre. Si l'on désigne par T_0 la température initiale du fil et de la masse d'air; par T_1 leur température finale; par ϖ le poids réduit en eau du fil et de la masse d'air, la quantité de chaleur dégagée a pour valeur $\varpi(T_1 - T_0)$. Grâce à la présence du manomètre, l'appareil forme un thermomètre à air sous volume sensiblement constant. Si nous désignons par $(P_1 - P_0)$ la variation de pression, nous aurons

$$P_1 - P_0 = \alpha P_0 (T_1 - T_0),$$

α étant le coefficient de dilatation de l'air; nous aurons donc

$$Q = \varpi \frac{P_1 - P_0}{P_0 \alpha}.$$

La quantité ϖ demeurant constante dans les diverses expériences, cette égalité nous fera connaître des nombres proportionnels aux quantités de chaleur dégagées dans ces expériences.

Riess (1), qui a perfectionné le manomètre de Snow Harris, en a fait usage pour déterminer, dans des circonstances variées, la quantité de chaleur dégagée par la décharge électrique. Clausius (2) a comparé les résultats des expériences de Riess aux conséquences de la théorie. Nous allons indiquer ici quelques-unes de ces expériences.

§ 4. — Décharge complète d'un condensateur. Expériences de Riess.

Un condensateur est chargé; l'armature interne a reçu une quantité d'électricité a; l'armature externe porte une charge communiquée $-b$. Le niveau potentiel de la distribution communiquée est V sur le premier conducteur et o sur le second. On a d'ailleurs (Liv. II, Chap. XI, § 2)

$$b = ma,$$

m étant le premier coefficient de Gaugain.

Mettons les deux armatures en communication l'une avec l'autre;

(1) RIESS, *Lehre der Reibungs-Elektricität;* Berlin, 1863.
(2) CLAUSIUS, *loc. cit.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il se produira une décharge dégageant une quantité de chaleur Q qui, d'après la formule (20), est donnée par l'égalité

$$EQ = \frac{\varepsilon}{2}[aV + (a-b)\Psi]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}a[V + (1-m)\Psi].$$

Supposons, en particulier, que l'armature externe enveloppe complètement l'armature interne. Alors, d'après les principes exposés au Livre II, Chapitre V, nous aurons

$$a = b, \qquad m = 1$$

et, par conséquent,

$$EQ = \frac{\varepsilon}{2}aV. \tag{21}$$

Imaginons une batterie formée de n bouteilles identiques, disposées d'une manière quelconque, chacune ayant son armature interne en communication avec la source et son armature externe au sol. D'après les principes posés au Livre III, Chapitre V, *chacune de ces bouteilles exerce une action électrostatique nulle à l'extérieur;* par conséquent, *chacune d'elles s'électrisera comme si elle existait seule.* Si donc on décharge la batterie, la quantité de chaleur dégagée aura pour valeur

$$Q = \frac{\varepsilon}{2E}naV.$$

D'ailleurs, on peut écrire

$$a = \varepsilon CV,$$

C étant une constante (capacité de la bouteille) qui dépend de la construction de la bouteille. On aura donc, en désignant par A la charge totale, égale à na, des armatures intérieures,

$$Q = \frac{1}{2E}\frac{1}{C}\frac{A^2}{n}. \tag{22}$$

La quantité de chaleur dégagée par la décharge d'une batterie de jarres identiques entre elles est proportionnelle au carré de la charge totale prise par les armatures intérieures, et en raison inverse du nombre des jarres.

Riess a vérifié cette loi par les expériences suivantes. Il a d'a-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

bord pris une batterie de cinq jarres, à laquelle il a communiqué des charges variables; il a ensuite comparé le nombre D de divisions dont le liquide du thermomètre s'élevait, à la suite des différentes décharges, au nombre D′ dont il devrait s'élever d'après la formule (22); il a trouvé les résultats suivants :

A.	D (observé).	D′ (calculé).
3	1,5	1,6
4	3,0	2,8
5	4,5	4,4
6	6,5	6,3
7	8,8	8,6
8	11,3	11,3
9	14,3	14,3
10	16,7	17,6

Il a ensuite fait varier le nombre n des bouteilles en conservant à l'armature interne de la batterie une charge A constante, et il a trouvé les résultats suivants :

n.	D (observé).	D′ (calculé).
2	13,4	15,8
3	9,7	10,6
4	7,3	7,9
5	6,5	6,3
6	5,5	5,5

On voit que l'accord de la formule (22) avec l'expérience est, en général, très satisfaisant, et de nature à ne laisser aucun doute sur l'exactitude de la loi que nous venons d'énoncer.

Nous avons supposé seulement, jusqu'ici, que l'armature externe de la bouteille de Leyde enveloppait complètement l'armature interne. Supposons maintenant, comme nous l'avons déjà fait (Liv. III, Chap. IV, § 4), que la surface intérieure de l'armature externe soit une surface de niveau de l'armature interne.

Dans ce cas, la charge a de l'armature interne a pour valeur [*loc. cit.*, équation (17)]

$$a = \frac{V}{v - u}, \tag{23}$$

v étant le niveau potentiel auquel serait portée l'armature interne si l'on distribuait sur cette armature, prise isolément, une charge électrique égale à l'unité; u étant la valeur qu'aurait la fonc-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion potentielle de cette distribution en tout point de la face intérieure de l'armature externe.

Supposons les deux armatures très voisines; soit M un point de l'armature interne; soit N_e la normale en ce point à l'armature interne dirigée vers l'extérieur de ce conducteur; soit σ la densité que prend en ce point une charge électrique égale à l'unité distribuée sur l'armature interne; soit δ la distance très petite des deux armatures; soit dS un élément, tracé autour du point M, de la surface S de l'armature interne. Nous aurons les diverses égalités

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial v}{\partial N_e},$$

$$\int \sigma \, dS = 1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial N_e} = \frac{u - v}{\delta},$$

qui donnent

$$\frac{1}{v - u} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dS}{\delta}.$$

Soit Δ l'*épaisseur moyenne de la couche isolante comprise entre les deux armatures,* épaisseur donnée par l'égalité

$$\frac{S}{\Delta} = \int \frac{dS}{\delta}.$$

L'égalité précédente deviendra

$$\frac{1}{v - u} = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{\Delta}.$$

L'égalité (23) deviendra alors

$$a = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{\Delta}V,$$

et l'égalité (21),

$$EQ = 2\pi\varepsilon\Delta\frac{a^2}{S}. \tag{24}$$

Des bouteilles de Leyde, formées comme nous venons de l'indiquer, dans lesquelles les deux armatures sont à une même distance moyenne très petite, donnent, quelle que soit leur forme, lorsqu'on les décharge, une quantité d'électricité proportionnelle au carré de la charge de l'armature interne, et en raison inverse de la surface de cette armature.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette loi a été trouvée expérimentalement par Riess (1). M. Helmholtz (2) et Clausius (3) l'ont établie theoriquement. La démonstration précédente est due à M. J. Moutier (4).

§ 5. — Décharge d'un condensateur par étincelles successives.

On peut décharger un condensateur par des étincelles successives : il suffit d'isoler le condensateur et de mettre en communication avec le sol, d'abord l'armature interne, puis l'armature externe, puis de nouveau l'armature interne, et ainsi de suite.

Cette décharge n'a pas donné lieu à des expériences de mesure; la théorie en est très simple; elle a été donnée par M. J. Moutier (5).

Cherchons les quantités d'électricité qui s'écoulent dans le sol à chaque étincelle.

Soient A l'armature interne et B l'armature externe.

Initialement, le conducteur A possède une charge électrique a et le conducteur B une charge électrique $-b$. Lorsque nous mettons le conducteur A au sol, le conducteur B demeurant isolé, nous réalisons la troisième expérience de Gaugain (Liv. II, Chap. III, § II). Après cette première décharge, le conducteur A demeure chargé de la quantité $a_1 = mm'a$ d'électricité positive. La première étincelle emmène donc au sol une quantité

$$q_1 = (1 - mm')a$$

d'électricité positive.

Lorsque ensuite nous isolons le conducteur A, porteur de la charge $a_1 = mm'a$, et que nous mettons le conducteur B en communication avec le sol, nous réalisons la deuxième expérience de Gaugain, mais en y supposant la charge du corps A réduite dans

---

(1) RIESS, *Ueber die Erwärmung in Schliessungsbogen der electrischen Batterie* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. XLIII, p. 47; 1838). *Lehre der Reibungs-Elektricität;* Berlin, 1853.

(2) H. HELMHOLTZ, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 43 (Berlin, 1847. — *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 45).

(3) R. CLAUSIUS, *Sur l'équivalent mécanique d'une décharge électrique et l'échauffement qu'elle produit dans le fil conducteur* (*Théorie mécanique de la chaleur*. Traduction Folie, t. II, p. 60).

(4) J. MOUTIER, *Cours de Physique*, t. I, p. 499; Paris, 1883.

(5) J. MOUTIER, *Cours de Physique*, t. I, p. 459 et p. 486; Paris, 1883.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le rapport mm'. Une réduction pareille doit porter sur la charge du conducteur B, qui renferme ainsi, après la seconde étincelle, une charge négative $b_1 = mm'b$. La seconde étincelle emmène donc au sol une quantité d'électricité

$$q_2 = m(1 - mm')a$$

d'électricité négative.

Au moment de produire la troisième étincelle, on se trouve en présence d'un état analogue à l'état initial, mais où toutes les charges ont été réduites dans le rapport mm'. La troisième étincelle emmène donc au sol une quantité d'électricité positive

$$q_3 = mm'(1 - mm')a.$$

On verra de la sorte que l'étincelle d'ordre $(2n + 1)$ emmènera au sol une quantité d'électricité positive

$$q_{2n+1} = m^n m'^n (1 - mm')a,$$

tandis que l'étincelle d'ordre $(2n + 2)$ emmène au sol une quantité d'électricité négative

$$q_{2n+2} = m^{n+1} m'^n (1 - mm')a.$$

Cherchons les quantités de chaleur que chacune de ces étincelles dégagerait dans le thermomètre de Riess.

Avant la première étincelle, le potentiel électrostatique a pour valeur

$$W_0 = \frac{\varepsilon}{2} aV.$$

Après la première étincelle, le conducteur B est au niveau potentiel V'; le potentiel électrostatique a pour valeur W_1, et l'on a

$$W_1 = -\frac{\varepsilon}{2} bV'.$$

L'identité de Gauss, appliquée à l'état initial et à l'état final, donne, en remarquant que a_1 est la charge finale du conducteur A,

$$a_1 V = -bV'.$$

On a donc

$$W_0 - W_1 = \frac{\varepsilon}{2}(1 - mm')aW.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La quantité de chaleur dégagée par la première étincelle a pour valeur

$$Q_1 = \frac{\varepsilon}{2E}(1 - mm')a V.$$

Pour trouver la quantité de chaleur dégagée dans la seconde étincelle, nous remarquons qu'avant cette étincelle le conducteur A est au niveau potentiel o et porte une charge a_1; le conducteur B est au niveau potentiel V′ et porte une charge $-b$. Le potentiel électrostatique a pour valeur

$$W_1 = -\frac{\varepsilon}{2} b V'.$$

Après la décharge, le conducteur A porte la charge a_1 et est au niveau potentiel V″. Le conducteur B porte une charge $-b_1$ et est au niveau potentiel o.

La quantité b_1 est donnée par

$$b_1 = mm' b.$$

Le potentiel électrostatique a pour valeur

$$W_2 = \frac{\varepsilon}{2} a_1 V''.$$

D'ailleurs, l'identité de Gauss donne

$$a_1 V'' = -b_1 V'.$$

On a donc

$$W_2 = -\frac{\varepsilon}{2} b_1 V'$$

et

$$W_1 - W_2 = -\frac{\varepsilon}{2}(b - b_1)V'$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} mm'(1 - mm')a V.$$

La quantité de chaleur dégagée par la deuxième étincelle a pour valeur

$$Q_2 = \frac{\varepsilon}{2E} mm'(1 - mm')a V = mm' Q_1.$$

On trouverait de même que la quantité de chaleur dégagée par la troisième étincelle a pour valeur

$$Q_3 = m^2 m'^2 Q_1.$$

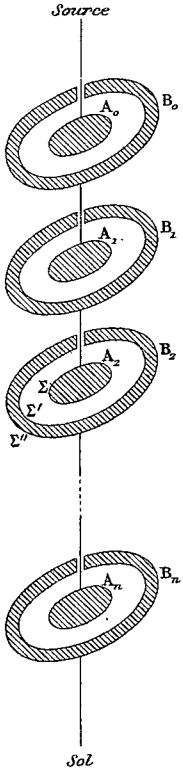
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les quantités de chaleur dégagées par les étincelles successives décroissent en progression géométrique de raison mm'.

§ 6. — Batteries montées en cascade.

Supposons que nous ayons $(n+1)$ bouteilles, identiques entre elles, et assez éloignées les unes des autres pour n'exercer les unes sur les autres aucune influence. L'armature interne A_0 de la

Fig. 74.



première (*fig.* 74) est mise en communication avec la source au niveau potentiel V_0. L'armature externe B_0 est mise en communication avec l'armature A_1 de la seconde, et ainsi de suite. L'ar-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mature externe de la dernière est au sol. On a ainsi une batterie *chargée en cascade.*

La théorie de la charge en cascade a fait l'objet des recherches de Green (1), Clausius et Beer. M. J. Moutier a donné à cette théorie une forme très élégante (2), dans le cas où les deux surfaces Σ', Σ'' qui limitent l'armature externe de chaque bouteille sont des surfaces de niveau de l'armature interne Σ.

Soient V_0, V_1, V_2, ..., V_n les niveaux potentiels des armatures A_0, A_1, A_2, ..., A_n.

Considérons en premier lieu la dernière bouteille.

Elle ne porte pas de charge électrique sur la surface Σ''; sur la surface Σ' elle porte une charge $-a_n$ et sur la surface Σ une charge a_n.

Une charge électrique égale à l'unité, en équilibre sur la surface Σ, porterait cette surface au niveau potentiel v; une charge égale à l'unité, distribuée sur la surface Σ', porterait tout point intérieur à cette surface au niveau potentiel v' (3); enfin une charge égale à l'unité, distribuée sur la surface Σ'', porterait tout point intérieur à la surface Σ'' au niveau potentiel v''.

Moyennant ces notations, nous pouvons déjà écrire

$$a_n v - a_n v' = V_n.$$

Pour la $(n-1)^{\text{ième}}$ bouteille, l'armature interne porte une charge a_{n-1}; la surface Σ' une charge $-a_{n-1}$, et comme les deux corps B_{n-1} et A_n forment un conducteur isolé portant une charge totale nulle, la surface Σ'' porte une charge $(a_{n-1} - a_n)$. Les principes posées au Liv. III, Chap. IV, donnent aisément

$$(a_{n-1} - a_n) v'' = V_n,$$
$$a_{n-1} v - a_{n-1} v' + (a_{n-1} - a_n) v'' = V_{n-1}.$$

On arrivera ainsi de proche en proche à avoir les deux séries

---

(1) GREEN, *An essay of the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism,* Art. 8 (Nottingham, 1828, *Green's mathematical Papers,* p. 47).

(2) J. MOUTIER, *Cours de Physique,* t. I, p. 491; Paris, 1883.

(3) Pour faire coïncider les formules que nous allons écrire avec celles qui ont été obtenues au Livre III, Chap. IV, il faudrait poser $v' = u$, $v'' = u'$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'équations

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{rl} a_n v - a_n v' & = V_n, \\ a_{n-1}(v - v' + v'') - a_n v'' & = V_{n-1}, \\ a_{n-2}(v - v' + v'') - a_{n-1} v'' & = V_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ a_2(v - v' + v'') - a_3 v'' & = V_2, \\ a_1(v - v' + v'') - a_2 v'' & = V_1, \\ a_0(v - v' + v'') - a_1 v'' & = V_0. \end{array}\right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{rl} (a_{n-1} - a_n) v'' & = V_n, \\ (a_{n-2} - a_{n-1}) v'' & = V_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ (a_1 - a_2) v'' & = V_2, \\ (a_0 - a_1) v'' & = V_1. \end{array}\right.$$

Entre les égalités (25) et (26), on peut éliminer les fonctions potentielles; on a alors

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_0 - a_1) v'' = a_1(v - v' + v'') - a_2 v'', \\ (a_1 - a_2) v'' = a_2(v - v' + v'') - a_3 v'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ou bien

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a_0 + a_2}{a_1} = \dfrac{v''}{v - v' + 2v''}, \\ \dfrac{a_1 + a_3}{a_2} = \dfrac{v''}{v - v' + 2v''}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Les charges des armatures intérieures des bouteilles sont soumises à la loi suivante : *Si l'on prend trois bouteilles consécutives, la somme des charges des armatures internes des deux bouteilles extrêmes est dans un rapport constant avec la charge de l'armature interne de la bouteille moyenne.*

Les équations (25) donnent

$$V_0 + V_2 = (a_0 + a_2)(v - v' + v'') - (a_2 + a_3) v'',$$

ou bien, d'après les égalités (28),

$$\begin{aligned} V_0 + V_2 &= \frac{a_1 v''(v - v' + v'')}{v - v' + 2v''} - \frac{a_2 v''^2}{v - v' + 2v''} \\ &= [a_1(v - v' + v'') - a_2 v''] \frac{v''}{v - v' + 2v''}. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'après les égalités (25), celle-là peut s'écrire

$$\frac{V_0 + V_2''}{V_1} = \frac{\varphi''}{\varphi - \varphi' + 2\varphi''}. \tag{29}$$

Les niveaux potentiels des armatures internes suivent donc la même loi que les charges.

Ajoutons membre à membre la dernière des équations (25) et les équations (27). Nous trouverons

$$V_0 = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(\varphi - \varphi'). \tag{30}$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (23), met en évidence le théorème suivant :

La somme des charges des armatures internes d'une batterie chargée en cascade est égale à la charge que prendrait l'armature interne de la première bouteille si on la chargeait seule.

Ce beau théorème est dû à Green.

Supposons qu'on laisse au sol l'armature externe de la dernière bouteille et que l'on mette l'armature interne de la première bouteille en communication avec le sol. La batterie sera ramenée à l'état neutre. Si W désigne le potentiel électrostatique initial du système, on aura, pour expression de la chaleur dégagée par cette décharge,

$$EQ = W.$$

Or, la formule générale

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \sum q V$$

donne aisément

$$W = \frac{\varepsilon}{2} a_0 V_0.$$

La chaleur dégagée a donc pour valeur

$$Q = \frac{\varepsilon}{2E} a_0 V_0. \tag{31}$$

Si l'on avait chargé seulement la première bouteille, et si on l'avait déchargée comme on vient de le faire pour la batterie, la décharge aurait, d'après les égalités (21), (23) et (30), dégagé une

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quantité de chaleur

$$Q' = \frac{\varepsilon}{2E}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)V_0.$$

En comparant cette égalité à l'égalité (31), on voit que *la chaleur dégagée par la décharge complète d'une batterie chargée en cascade est d'autant plus petite que le nombre des bouteilles est plus grand.*

Dans le cas particulier où les deux surfaces Σ', Σ'' diffèrent extrêmement peu, comme il arrive si l'armature externe est formée par une simple feuille métallique, on a sensiblement

$$\rho' = \rho''.$$

On trouve alors sans peine les égalités

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\rho}{\rho'}, \tag{32}$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{V_1}{V_2} = \ldots = \frac{V_{n-1}}{V_n} = \frac{\rho}{\rho'}. \tag{33}$$

Si les armatures externes sont très minces, les charges des armatures internes et leurs niveaux potentiels décroissent en progression géométrique.

Beer (1) a énoncé par erreur que, dans ce cas, les charges des armatures internes étaient toutes égales entre elles et que leurs niveaux potentiels décroissaient en progression arithmétique.

Dans ce cas, la quantité de chaleur dégagée par la décharge complète de la batterie a pour valeur

$$Q = \frac{\varepsilon}{2E}\,\frac{\rho^{n+1} - \rho'^{n+1}}{\rho^n}\,a_0^2.$$

Posons

$$A = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Nous aurons

$$A = \frac{1}{\rho - \rho'}\,\frac{\rho^{n+1} - \rho'^{n+1}}{\rho^n}\,a_0. \tag{34}$$

On peut donc encore écrire, en désignant par Q' la quantité de chaleur que dégagerait la décharge complète d'une bouteille

(1) BEER, *Einleitung in die Elektrostatik* ..., p. 102 (Brunswick, 1865).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

unique,

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{1}{\rho - \rho'} \frac{\rho^{n+1} - \rho'^{n+1}}{\rho^n}. \tag{35}$$

Dans le cas particulier où les deux armatures sont très voisines, on trouve aisément que cette égalité devient

$$Q' = (n + 1)Q.$$

Si l'on forme une batterie en cascade au moyen de bouteilles dont l'armature externe est très mince et dont les deux armatures sont très rapprochées, la quantité de chaleur dégagée par la décharge complète est en raison inverse du nombre des bouteilles.

Cette loi a été trouvée expérimentalement par Riess (*loc. cit.*) et théoriquement par Clausius (*loc. cit.*).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE III.

L'INTENSITÉ DES COURANTS.

§ 1. — Courants circulant dans la masse d'un conducteur.

Lorsque, sur un conducteur, la distribution électrique varie, il ne suffit plus, pour déterminer l'état de ce conducteur à un instant déterminé, de connaître la distribution électrique qu'il porte à cet instant; en effet, si l'état d'un conducteur à l'instant t était entièrement déterminé par la distribution électrique qu'il porte à cet instant t, les propriétés de ce corps devraient demeurer les mêmes, soit que cette distribution électrique restât après le temps t ce qu'elle est au temps t, soit qu'elle subît des changements après le temps t. Or il n'en est pas ainsi. Le conducteur sur lequel la distribution varie exercera certaines actions sur un aimant que n'exerce pas un conducteur sur lequel la distribution est invariable, quelle que soit d'ailleurs cette distribution.

Il est donc nécessaire, pour définir un système électrisé, de faire usage d'une représentation plus compliquée que celle qui nous a servi jusqu'ici; d'adjoindre aux variables qui déterminent la distribution électrique de nouvelles variables, ces dernières disparaissant dans le cas particulier où, sur le conducteur, la distribution demeure indépendante du temps.

La définition de ces nouvelles variables est due surtout à G.-S. Ohm (1), à Smaasen (2) et à G. Kirchhoff (3).

(1) G.-S. Ohm, *Die galvanische Kette, mathematisch behandelt* (Berlin, 1827. — Traduit en français par Gaugain; Paris, 1860).

(2) Smaasen, *Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektricität in einer Ebene oder in einem Körper* (*Pogg. Annalen*, Bd. LXIX, p. 161; 1846). — *Vom dynamischen Gleichgewicht der Electricität in einem Körper und in unbegränztem Raume* (*Pogg. Annal.*, Bd. LXXII, p. 435; 1847).

(3) G. Kirchhoff, *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisformige* (*Pogg. Ann.* Bd. LXIV, p. 497; 1845. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 1). — *Nachtrag zu dem vorigen Auf-*

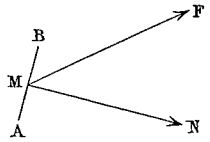
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces physiciens ont été conduits à la définition des variables dont il s'agit par la comparaison du mouvement de l'électricité avec le mouvement des fluides; une comparaison de ce genre avait déjà conduit Fourier à la définition des principales quantités qui figurent dans la théorie de la propagation de la chaleur.

Soit M un point pris à l'intérieur d'un conducteur. Nous supposerons que ce point M correspond à une grandeur géométrique F que nous nommerons le *flux électrique au point* M à l'instant t. Cette grandeur est liée à la variation que subit la distribution électrique à l'intérieur du conducteur par la convention suivante :

Autour du point M (*fig.* 75), traçons dans la masse du con-

Fig. 75.



ducteur un élément $AB = d\omega$. Soit N la normale à cet élément dans un sens déterminé. Soit F le flux au point M. *La variation subie par la distribution électrique sur le conducteur dans le temps dt est la même que si, pendant ce temps, l'élément* $d\omega$ *avait été traversé, dans le sens de la normale* N, *par une quantité d'électricité positive dq, donnée en grandeur et en signe par*

$$dq = F\cos(F, N)\, d\omega\, dt. \tag{1}$$

Cette égalité (1) peut s'écrire d'une manière un peu différente.

---

satze (*Pogg. Ann.* Bd LXVII, p. 344; 1846. — *K. Abhandl.*, p. 17). — *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Strömen geführt wird* (*Pogg. Ann.*, Bd. LXXII, p. 497; 1847. — *K. Abhandl.*, p. 22). — *Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Strömen in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen* (*Pogg. Ann.*, Bd. LXXV, p. 189; 1848. — *K. Abhandl.*, p. 33). — *Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst* (*Pogg. Ann.* Bd. LXXVIII, p. 506; 1849. — *K. Abhandl.*, p. 49). — *Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche* (*Monatsber. der Akad. der Wissenschaften zu Berlin,* 19 juillet 1875. — *K. Abhandl.*, p. 56).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires; soient u, v, w les composantes du flux F suivant ces trois axes. Nous pourrons écrire

$$(2) \qquad dq = [u\cos(N, x) + v\cos(N, y) + w\cos(N, z)]\, d\omega\, dt.$$

Cette égalité (2) va nous conduire à une formule qui mettra nettement en évidence la relation entre le flux et le changement de distribution électrique.

Traçons, à l'intérieur du conducteur, une surface fermée S. Soient M un point de cette surface et N_i la normale à cette surface au point M; cette normale est dirigée vers l'intérieur de l'espace limité par la surface S.

Le changement de distribution électrique sur le conducteur est le même que si chacun des éléments dS de la surface S laissait, dans le temps dt, pénétrer à l'intérieur de cette surface une quantité d'électricité

$$dq = [u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + v\cos(N_i, z)]\, dS\, dt.$$

Le changement de distribution électrique sur le conducteur doit donc avoir pour effet, pendant le temps dt, d'accroître de

$$dt \int_S [u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS$$

la quantité d'électricité positive que renferme la surface S.

Mais, d'autre part, si l'on désigne par ρ la densité électrique au point (x, y, z) à l'instant t, densité que nous supposons finie en tout point intérieur à la surface S, le changement de distribution électrique pendant le temps dt accroîtra la charge électrique totale renfermée dans la surface S de

$$dt \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz,$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace intérieur à la surface S.

On doit donc avoir, quelle que soit la forme de la surface S,

$$\int_S [u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Cette égalité peut se transformer. Supposons que les quantités u, v, w soient continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre dans tout l'espace enfermé par la surface S; qu'il

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en soit de même de ρ et de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. L'égalité précédente deviendra

$$\int\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dx\,dy\,dz=0.$$

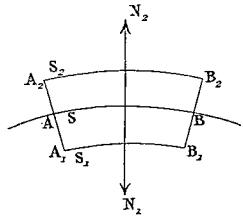
Moyennant les hypothèses faites, elle ne peut avoir lieu pour toute surface S, à moins que l'on n'ait, en tout point où sont vérifiées les conditions indiquées,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{3}$$

Cette égalité ne s'applique pas aux divers points d'une surface le long de laquelle les quantités u, v, w, ρ peuvent être discontinues. Examinons ce cas, en supposant que cette surface puisse porter une électrisation superficielle variable de densité σ.

Une semblable surface S (*fig.* 76) sépare deux régions 1 et 2

Fig. 76.



du conducteur. Sur cette surface prenons une aire et, par le contour AB de cette aire, menons des droites normales à la surface S. Nous limitons ces droites par deux surfaces S_1, S_2, parallèles à la surface S, situées l'une dans la région 1, l'autre dans la région 2, toutes deux infiniment voisines de la surface S. Soient A_1B_1, A_2B_2 les aires découpées sur ces deux surfaces par la surface réglée considérée.

Aux termes près de l'ordre de A_1A_2, la quantité d'électricité positive qui entre dans la surface fermée $A_1B_1A_2B_2$ pendant le temps dt peut s'écrire

$$-dt\int_{AB}[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et aussi

$$dt \int_{AB} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS.$$

En égalant ces deux quantités, on voit aisément que l'on doit avoir, en tout point de la surface de discontinuité S,

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{cases}$$

Les égalités (3) et (4) nous montrent jusqu'à quel degré les flux d'une part et les densités électriques d'autre part peuvent être regardés comme des variables indépendantes. On peut toujours, pour une valeur particulière de t, se donner arbitrairement la grandeur et la direction du flux électrique en chaque point du conducteur, et la grandeur de la densité solide ou superficielle de l'électricité en chaque point du conducteur. Mais, pour les valeurs ultérieures du temps t, il n'est plus permis de se donner arbitrairement autre chose que la grandeur et la direction du flux électrique en chaque point du conducteur; car les densités, tant solides que superficielles, sont alors déterminées, pour toutes les valeurs de t, par les égalités (3) et (4).

A la surface qui sépare le conducteur du milieu isolant qui l'environne, on a, d'après l'égalité (4),

$$(5) \quad u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Quelques auteurs ont admis que l'on avait toujours, dans ce cas,

$$u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z) = 0.$$

Mais alors aucun courant ne pourrait faire varier la distribution électrique à la surface d'un conducteur; celle-ci ne pourrait jamais changer, ce qui est inadmissible.

§ 2. — Courants uniformes.

Si le flux électrique est nul en tout point d'un corps conducteur, on dit que l'*équilibre électrique est établi* sur ce corps conducteur.

D'après les égalités (3), (4) et (5), la densité électrique solide

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ou superficielle conserve alors une valeur indépendante du temps en tout point du conducteur.

Mais la densité électrique solide ou superficielle peut conserver, en tout point du conducteur, une valeur indépendante du temps sans que, pour cela, le flux électrique soit nul en tout point. Il suffit en effet, pour que les courants n'entraînent aucune variation de distribution à la surface du conducteur ou dans son intérieur, que l'on ait à tout instant, pour tout point intérieur au conducteur,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{6}$$

pour tout point de la surface qui sépare le conducteur de l'isolant,

$$u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z) = 0; \tag{7}$$

enfin, pour tout point d'une surface de discontinuité du conducteur,

$$\begin{cases} u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z) \\ + u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Un pareil courant qui, à chaque instant, amène en tout point de l'intérieur du conducteur ou de sa surface autant d'électricité qu'il en emporte, est dit *courant uniforme*.

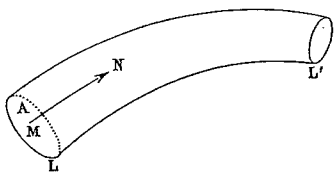
Lorsqu'en tout point d'un conducteur le flux électrique est indépendant du temps, le courant est dit *constant*.

Un courant qui est à la fois uniforme et constant est dit *permanent*.

§ 3. — Courants linéaires.

Imaginons qu'une aire plane infiniment petite A (*fig.* 77), va-

Fig. 77.



riable de grandeur et de forme, se déplace de manière à demeurer constamment normale à une ligne LL'. Elle balaye un volume que nous supposerons rempli de matière conductrice et que nous nom-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

merons un *fil*. Si ce fil est parcouru par des flux électriques quelconques, nous dirons qu'il est parcouru par un *courant linéaire*.

Soit N la normale à l'aire A, d'un côté déterminé de cette aire. C'est en même temps la tangente en L à la courbe LL'. L'aire A est traversée, dans le sens indiqué par la normale N, pendant le temps dt, par une quantité d'électricité

$$dQ = dt \int [u\cos(N, x) + v\cos(N, y) + w\cos(N, z)]\, dA.$$

Si nous posons

$$J = \int [u\cos(N, x) + v\cos(N, y) + w\cos(N, z)]\, dA, \tag{9}$$

nous aurons

$$dQ = J\, dt.$$

On dit alors que J est l'*intensité* au point L du courant linéaire.

Supposons, tout d'abord, que le fil LL' ne présente aucune surface de discontinuité entre les points L et L'. Il est facile de voir que, dans ces conditions, l'intensité J est continue entre les deux points L, L'. *Entre deux sections du conducteur, comprenant entre elles une longueur ds de la courbe* LL', *il s'accumule pendant le temps dt une quantité totale d'électricité*

$$-\frac{dJ}{ds}\, ds\, dt.$$

Supposons maintenant que le fil présente une surface de discontinuité, et, pour ne pas compliquer outre mesure nos raisonnements, imaginons que cette surface coïncide avec une section normale A. Cette section partage le fil en deux régions 1 et 2.

Lorsqu'on passe de la première à la seconde, l'intensité varie brusquement de la valeur J_1 à la valeur J_2. Dans le temps dt, il s'accumule sur la surface A une quantité d'électricité

$$(J_1 - J_2)\, dt.$$

Si Σ désigne la densité superficielle *moyenne* sur l'aire A, nous aurons

$$\frac{d\Sigma}{dt} = \frac{1}{A}(J_1 - J_2). \tag{10}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Considérons, d'autre part, une portion LL′ du fil, le long de laquelle ne se trouve aucune surface de discontinuité. Soient J, J′ les valeurs de l'intensité à l'origine et à l'extrémité de ce segment, dans le temps dt, ce segment acquiert une quantité d'électricité

$$(J - J')\,dt.$$

Soient A la section moyenne du segment LL; C le périmètre moyen de cette section; σ la densité électrique superficielle moyenne; ρ la densité solide moyenne. Nous aurons

$$LL'\left(A\frac{d\rho}{dt} + C\frac{d\sigma}{dt}\right) = J - J'.$$

Si nous admettons que les densités ρ et σ soient, en général, du même ordre de grandeur, A étant négligeable devant C, nous aurons

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{C.LL'}(J - J'). \tag{11}$$

Comparons les égalités (10) et (11). A étant négligeable devant C, si nous voulons que les densités électriques Σ et σ soient constamment du même ordre de grandeur, il faudra que $(J_1 - J_2)$ soit négligeable en présence de $\frac{J - J'}{LL'}$. Ainsi, la variation brusque que subit l'intensité d'un courant linéaire au voisinage d'une surface de discontinuité du fil est négligeable en comparaison de la variation que subit cette intensité d'une extrémité à l'autre d'un segment de longueur finie, ne présentant pas de surface de discontinuité. On peut donc énoncer la proposition suivante :

L'intensité d'un courant linéaire varie d'une manière continue tout le long du fil conducteur, lors même que celui-ci présente des surfaces de discontinuité.

Un raisonnement analogue au précédent conduit aux propositions suivantes :

Si un fil conducteur parcouru par un courant linéaire n'est pas fermé, l'intensité du courant est égale à O *à ses deux extrémités.*

Supposons que plusieurs fils conducteurs 1, 2, ..., *n viennent se réunir en un même point* S; *désignons par* $J_1, J_2, \ldots,$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

J_n *les intensités des courants qui les parcourent, chacune de ces intensités étant comptée positivement lorsqu'elle correspond à un courant qui se dirige vers le point* S *et négativement lorsqu'elle correspond à un courant qui s'éloigne du point* S ; *nous aurons*

$$J_1 + J_2 + \ldots + J_n = 0. \tag{12}$$

La proposition exprimée par cette égalité (12) porte le nom de *lemme de G. Kirchhoff*. Kirchhoff (1) l'a en effet énoncée le premier et en a montré l'importance dans l'étude des courants qui parcourent des réseaux de fils.

Il arrivera souvent, en particulier dans l'étude de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme, que nous parlerons d'un *élément de courant linéaire*. Il ne faudra pas entendre par là une longueur infiniment petite de fil conducteur entouré de toute part par l'isolant. En effet, d'après ce qui précède, un semblable élément ne pourra jamais être parcouru par un courant fini. Il faudra seulement entendre par là que nous portons notre attention sur la partie du courant linéaire qui se trouve comprise entre deux sections infiniment voisines du fil, sans que nous supposions pour cela cette partie réellement séparée du reste du courant. Cette remarque a une importance capitale pour l'intelligence de l'Électrodynamique.

Un conducteur en forme de fil peut être parcouru par des flux uniformes. On a alors affaire à un *courant linéaire uniforme*. On voit sans peine que *l'intensité d'un courant linéaire uniforme a la même valeur en tous les points du fil.*

L'intensité d'un courant ouvert étant nulle aux extrémités du fil, on voit qu'*un courant linéaire uniforme ne peut se présenter que dans un fil fermé, à moins que son intensité ne soit identiquement nulle en tout point.*

Ajoutons, pour terminer ce qui concerne la définition de l'intensité d'un courant linéaire, qu'il est possible de comparer entre elles les intensités de courants linéaires permanents.

---

(1) G. KIRCHHOFF, *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird* (*Poggendorff's Annalen*, Bd LXXII, p. 497; 1847. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 22).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On peut obtenir un courant linéaire en déchargeant un condensateur à travers un fil métallique; la théorie du condensateur étant faite, et cette théorie ayant ramené l'étude des phénomènes produits par la décharge à la détermination de certaines constantes pour lesquelles il existe des appareils de mesure, nous pouvons savoir quel est le signe et la grandeur de la quantité d'électricité qu'une armature du condensateur cède à l'autre.

Supposons que l'on effectue la décharge du condensateur, non point au travers d'un fil continu, de cuivre par exemple, mais au travers d'un fil coupé dont les deux bouts plongent dans une dissolution de sulfate de cuivre. On observe alors que, pendant la décharge, il y a, dans ce *voltamètre,* une action chimique; un des fils de cuivre se dissout, tandis que l'autre se recouvre d'un dépôt de cuivre.

En faisant varier de toutes les manières possibles les circonstances de la décharge, on observe la constance des deux lois suivantes :

1° *Le cuivre se dépose toujours du côté où se trouve l'armature qui reçoit de l'électricité positive;*

2° *Le poids de cuivre déposé dépend exclusivement de la quantité d'électricité qui a traversé le voltamètre; il est exactement proportionnel à cette quantité.*

Ce sont là des conséquences particulières d'une loi générale due à Faraday, que nous étudions au Livre VI.

L'appareil que nous venons de décrire, étant placé sur le trajet d'un courant linéaire permanent, fournit évidemment un moyen de mesurer l'intensité de ce courant linéaire.

Le *galvanomètre* fournit un second moyen de mesurer cette intensité. Un courant permanent, lancé dans le cadre d'un galvanomètre, donne à l'aiguille de cet instrument une déviation permanente. En faisant traverser à la fois un galvanomètre et un voltamètre, on pourra déterminer l'intensité du courant qui correspond à une déviation donnée de l'aiguille et, par conséquent, graduer empiriquement le galvanomètre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IV.

LA LOI D'OHM.

§ 1. — Énoncé de la loi d'Ohm.

La loi d'Ohm a pour but de fournir les équations du *mouvement permanent de l'électricité dans un conducteur homogène.*

Cette loi constitue l'une des *hypothèses fondamentales* de la théorie des phénomènes électriques; c'est par voie d'analogie que les physiciens ont été amenés à l'énoncer.

Dans la théorie de la propagation de la chaleur à l'intérieur d'un corps homogène bon conducteur, les composantes u, v, w du flux calorifique au point (x, y, z) sont reliées à la conductibilité k et à la température T par les relations

$$u = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad v = -k\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad w = -k\frac{\partial T}{\partial z}.$$

G.-S. Ohm a admis [1] que les équations du mouvement permanent de l'électricité devaient présenter une forme analogue. Il donnait au coefficient analogue à la conductibilité calorifique le nom de *conductibilité électrique,* et à la fonction analogue à la température les noms de *force électroscopique, manifestation électroscopique, pouvoir, énergie, état électrique.*

La multiplicité même de ces dénominations montre assez qu'Ohm n'avait aucune idée précise sur la nature de cette fonction dont il admettait l'existence.

En 1849, G. Kirchhoff remarqua [2] que, dans la théorie d'Ohm,

---

[1] G.-S. Ohm, *Die galvanische Kette, mathematisch behandelt* (Berlin, 1827; traduit en français par Gaugain, avec une Préface et des Notes. Paris, 1860).

[2] G. Kirchhoff, *Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXXVIII, p. 506; 1849).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la condition de l'équilibre électrique à l'intérieur d'un conducteur homogène est exprimée par la constance de la force électroscopique; tandis que, dans la théorie de Poisson, la même condition est exprimée par la constance de la fonction potentielle. Cette remarque le conduisit à admettre la proportionnalité de la force électroscopique avec la fonction potentielle, et à énoncer l'hypothèse suivante, qui a conservé le nom de *loi d'Ohm :*

En tout point (x, y, z) *pris à l'intérieur d'un conducteur homogène parcouru par des courants permanents, c'est-à-dire uniformes et constants, on a*

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}u = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ \mathcal{R}v = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ \mathcal{R}w = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

V *étant la fonction potentielle au point* (x, y, z); u, v, w *les composantes du flux électrique au même point;* $\mathcal{R}$ *un coefficient qui dépend de la nature du conducteur et de sa température au point* (x, y, z) *et que l'on nomme sa* résistance spécifique.

On donne à la grandeur géométrique qui, en un point d'un conducteur quelconque, parcouru par des courants quelconques, a pour composantes $\mathcal{R}u, \mathcal{R}v, \mathcal{R}w$, le nom de *force électromotrice au point considéré*. On peut alors énoncer comme suit la loi d'Ohm :

En un point d'un conducteur homogène parcouru par des courants permanents, la force électromotrice est identique en grandeur et direction à la force électrostatique donnée par les lois de Coulomb.

La loi d'Ohm est susceptible d'un énoncé, différent des précédents, qui nous sera commode lorsque nous aurons, ultérieurement, à étendre cette loi.

Prenons le système que nous avons à étudier. A l'instant t, il porte certaines charges électriques. Si l'on se contentait, pour définir l'état de ce système, de connaître ces charges électriques

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sans y joindre, à titre de nouvelles variables, les flux électriques, ce système admettrait un potentiel thermodynamique interne que, pour abréger, nous appellerons le *potentiel thermodynamique interne du système supposé sans courant.*

D'après les notations adoptées au Livre III, Chapitre II, ce potentiel a pour valeur

$$\mathcal{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \sum \Theta q.$$

Supposons qu'une charge dq passe par un point (x, y, z) au point $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, ces deux points étant à l'intérieur d'un même conducteur homogène qui laisse circuler l'électricité sans éprouver de changement d'état; la quantité $\mathcal{F}$ subira une variation $\delta\mathcal{F}$, et l'on aura

$$\delta\mathcal{F} = \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z \right) dq.$$

De là on déduit aisément l'énoncé que voici :

Si $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ *sont les composantes de la force électromotrice en un point* (x, y, z) *d'un conducteur homogène, non électrolysable, parcouru par des courants permanents, on a*

$$\delta\tau = (\mathcal{E}_x \delta x + \mathcal{E}_y \delta y + \mathcal{E}_z \delta z)\, dq, \tag{2}$$

$\delta\tau$ *étant le travail non compensé produit dans le système supposé sans courant, lorsqu'on y transporte la charge* dq *du point* (x, y, z) *au point* $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$.

Cette proposition constitue, comme nous le verrons par la suite, l'*hypothèse fondamentale fournissant, dans tous les cas possibles, la loi des courants permanents* (1).

§ 2. — Énoncé de la loi d'Ohm pour les courants linéaires.

L'intensité d'un courant linéaire est donnée par l'égalité [Chap. III, égalité (9)]

$$J = \int [u \cos(N, x) + v \cos(N, y) + w \cos(N, z)]\, dA.$$

(1) P. DUHEM, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 223 (Paris, 1886).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Supposons le conducteur homogène et le courant permanent. En vertu des égalités (1), l'égalité précédente deviendra

$$J = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}} \int\!\!\int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \right] dA.$$

La direction N coïncide avec la tangente à la courbe LL′, dont ds est l'élément de longueur. On a sensiblement, en tout point de l'aire A,

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) = \frac{\partial V}{\partial s}$$

et, par conséquent,

$$J = -\varepsilon \frac{A}{\mathcal{R}} \frac{\partial V}{\partial s}. \tag{3}$$

Nous nommerons *résistance électrique de l'élément ds* la quantité $R\,ds$ définie par

$$R\,ds = \frac{\mathcal{R}}{A} ds. \tag{4}$$

L'égalité (3) deviendra alors

$$JR\,ds = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial s} ds. \tag{5}$$

Cette égalité exprime la loi d'Ohm pour chaque élément d'un conducteur linéaire parcouru par un courant permanent.

Soit LL′ un segment de longueur finie de conducteur linéaire. La quantité

$$K = \int_L^{L'} R\,ds \tag{6}$$

est ce que nous nommerons la *résistance électrique du segment* LL′. On voit que, d'après cette définition :

1° *La résistance d'un fil homogène de section constante est proportionnelle à la longueur du fil et en raison inverse de sa section ; elle dépend, en outre, de la nature du fil et de sa température ;*

2° *La résistance de plusieurs fils mis bout à bout est égale à la somme des résistances de chacun de ces fils.*

Des égalités (5) et (6), on déduit encore le résultat suivant :

Soit LL′ un segment de fil homogène parcouru par un courant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

permanent d'intensité J. Soit k sa résistance. Soient V et V′ les niveaux potentiels en L et en L′. On a

$$J = \varepsilon \frac{V - V'}{k}. \tag{7}$$

Cette égalité a été, pour un grand nombre de physiciens, l'objet de vérifications expérimentales très précises qu'il serait trop long d'exposer ici.

§ 3. — Courants permanents parcourant la masse d'un conducteur.

En tout point d'un conducteur parcouru par des courants uniformes, on a [Chap. III, égalité (6)]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Si le conducteur est homogène et si les courants sont constants, u, v, w sont donnés par les égalités (1), qui transforment l'égalité précédente en

$$\Delta V = 0. \tag{7}$$

Ainsi, *à l'intérieur d'un conducteur homogène parcouru par des courants permanents, la fonction potentielle de l'électricité libre satisfait à l'équation de Laplace.*

De là, on déduit immédiatement cette autre proposition :

A l'intérieur d'un conducteur homogène parcouru par des courants permanents il n'y a pas d'électricité libre; celle-ci se trouve uniquement à la surface du conducteur.

A la surface qui sépare le conducteur de l'isolant, on a, en désignant par N_i la normale avec l'intérieur du conducteur [Chap. III, égalité (7)],

$$u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z) = 0.$$

En vertu des égalités (1), cette dernière égalité devient

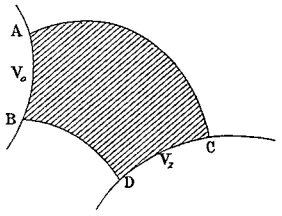
$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0. \tag{8}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces divers résultats sont dus à Smaasen (1) et à G. Kirchhoff (2). Ils nous permettent d'aborder le problème suivant :

Une masse conductrice ABCD (*fig.* 78) *est en contact, par une partie* AC, BD *de sa surface avec l'isolant; la partie* AB

Fig. 78.



est maintenue au niveau potentiel V_0 *et la partie* CD *au niveau potentiel* V_1. *Déterminer les courants permanents qui parcourent cette masse.*

1° Si cette masse est parcourue par des courants permanents, elle portera à sa surface de l'électricité libre dont la fonction potentielle V satisfera aux conditions suivantes :

Elle sera harmonique dans tout l'espace ABCD;

Elle sera égale à V_0 en tout point de la surface AB;

Elle sera égale à V_1 en tout point de la surface CD;

On aura $\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0$ en tout point de la surface AC, BD.

Nous savons (Liv. II, Chap. V, § 3) qu'il peut exister au plus une fonction V satisfaisant à toutes ces conditions. Nous admettrons qu'il en existe une.

---

(1) SMAASEN, *Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektricität in einer Ebene oder in einem Körper* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXIX, p. 161; 1846). — *Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektricität in einem Körper und in unbegränztem Raume* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXXII, p. 435; 1847).

(2) G. KIRCHHOFF, *Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der Galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen* (*Poggendorff's Annalen*, Bd LXXV, p. 189; 1848. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 33). — *Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXXVIII, p. 506; 1849. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 49).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette fonction V étant supposée trouvée, et le conducteur étant supposé parcouru par des courants permanents, les flux de ces courants seront donnés, à l'intérieur du conducteur, par les égalités (1).

2° Les flux ainsi trouvés résolvent le problème, si l'on admet une hypothèse : c'est qu'il est possible de trouver des courants permanents parcourant le système. On sera donc assuré de l'exactitude de la solution précédente, si l'on démontre que les courants qu'elle détermine sont permanents.

Comme ces courants sont évidemment constants, il suffit de prouver qu'ils sont uniformes.

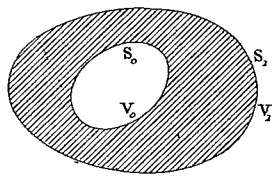
Ils sont uniformes en tout point intérieur au conducteur; car les égalités (1) donnent, en un pareil point,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}}\Delta V,$$

et le second membre est égal à O, puisque la fonction V est harmonique à l'intérieur du conducteur.

Le problème qui consiste à étudier le régime permanent de l'électricité dans un conducteur d'étendue finie en toutes dimensions se ramène, comme nous venons de le voir, à un problème

Fig. 79.



analogue à celui de Lejeune-Dirichlet, mais plus général. Il est un cas particulier où il se ramène au problème même de Lejeune-Dirichlet. C'est le cas où le corps conducteur n'a aucune surface de contact avec le milieu isolant. Il faut, dans ce cas, que l'une des deux surfaces maintenues à un niveau potentiel donné, surfaces auxquelles on donne le nom d'*électrodes*, soit une surface fermée entourant le conducteur, tandis que l'autre électrode forme une seconde surface fermée entourée par le conducteur (*fig.* 79).

Dans ce cas on a, pour déterminer V, à chercher une fonction harmonique entre les deux surfaces S_0 et S_1, prenant sur l'élec-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

trode S_0 la valeur V_0, et sur l'électrode S_1 la valeur V_1. C'est le problème auquel on serait conduit si l'on voulait chercher la distribution électrique sur les faces en regard d'un condensateur dont l'armature interne S_0 serait maintenue au niveau potentiel V_0 et l'armature externe S_1 au niveau potentiel V_1. Les résultats obtenus dans les deux derniers Chapitres du Livre III pourront immédiatement être transportés à l'étude du régime permanent de l'électricité dans le cas particulier que nous venons de définir.

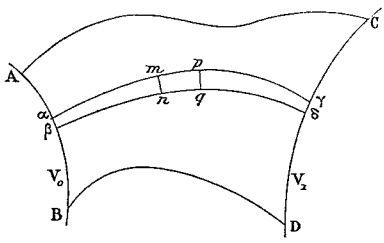
Revenons au cas général.

Nommons *ligne de flux* une ligne dont la tangente en chaque point (x, y, z) a même direction et même sens que le flux électrique au même point. D'après les égalités (1), les *lignes de flux coïncident en chaque point d'un conducteur homogène avec les trajectoires orthogonales aux surfaces d'égal niveau potentiel.*

Les théorèmes établis au Livre III, Chapitre III, fourniront immédiatement les propriétés des lignes de flux.

Sur l'électrode AB, maintenue au niveau potentiel V_0 (*fig.* 80),

Fig. 80.



prenons un élément $\alpha\beta$ d'aire $d\Omega$. Considérons le canal orthogonal $\alpha\beta\gamma\delta$ qui passe par le contour de cet élément. Soit i le flux électrique en un point de $\alpha\beta$. Ce flux est normal à la surface AB qui est une surface de niveau.

Menons, au travers du canal orthogonal, deux sections normales infiniment voisines mn, pq. Soit $d\omega$ l'aire de l'élément mn. Soit j le flux au point m.

Les propriétés des éléments correspondants nous fournissent aisément l'égalité

$$i\,d\Omega = j\,d\omega.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Posons $\alpha m = s$, $\alpha p = s + ds$; soient V et $\left(V + \frac{\partial V}{\partial s} ds\right)$ les niveaux potentiels en m et p. On déduira aisément de la loi d'Ohm

$$\mathcal{R} j = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial s}.$$

De ces deux égalités, on tire

$$\frac{\mathcal{R}\, ds}{d\omega}\, i\, d\Omega = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial s}\, ds.$$

Écrivons des égalités analogues pour tous les éléments $mnpq$ en lesquels on peut partager le canal $\alpha\beta\gamma\delta$, et nous obtiendrons, en les ajoutant membre à membre,

$$i\, d\Omega \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\mathcal{R}\, ds}{d\omega} = -\varepsilon (V_1 - V_0).$$

La quantité $\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{\mathcal{R}\, ds}{d\omega}$ est la résistance du canal orthogonal $\alpha\beta\gamma\delta$ assimilé à un conducteur linéaire. Désignons-la par $\frac{\rho}{d\Omega}$. L'égalité précédente deviendra

$$i\, d\Omega = \varepsilon (V_0 - V_1) \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Écrivons des égalités analogues pour tous les éléments $d\Omega$ de la surface AB et ajoutons-les membre à membre. La somme des premiers membres

$$J = \mathbf{S}\, i\, d\Omega$$

sera la quantité d'électricité qui, par unité de temps, traverse l'électrode AB, c'est-à-dire l'*intensité* du courant qui parcourt le conducteur ABCD. Si l'on pose

$$\frac{1}{R} = \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\rho},$$

on aura

$$J = \varepsilon \frac{V_0 - V_1}{R}. \tag{9}$$

L'analogie de cette égalité avec l'égalité (7) relative aux courants linéaires a fait donner à la quantité R le nom de *résistance électrique* du conducteur ABCD.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'après la manière dont nous l'avons définie, cette quantité R est donnée par l'égalité

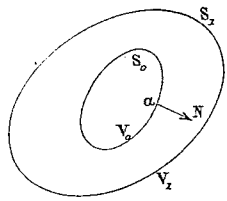
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\mathcal{R}} \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\Omega}{d\omega} ds}. \tag{10}$$

Pour la connaître, il faut non seulement connaître la forme du conducteur homogène ABCD et sa résistance spécifique, mais encore la grandeur, la forme et la position des deux régions AB, CD de sa surface qui servent d'électrodes.

Cette résistance se relie fort simplement à une quantité déjà définie en Électrostatique, dans le cas particulier où le conducteur forme une couche entièrement limitée par les deux électrodes S_0, S_1 (*fig.* 81).

Soit α un point de la surface S_0. En ce point, menons la nor-

Fig. 81.



male N à la surface S_0 vers l'extérieur de cette surface. Le flux au point α, étant normal à la surface S_0, aura pour valeur, d'après les égalités (1),

$$i = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}} \frac{\partial V}{\partial N}.$$

La formule (9) nous donnera donc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{1}{V_1 - V_0} \mathbf{S} \frac{\partial V}{\partial N} d\Omega.$$

D'autre part, si les deux surfaces S_0 et S_1 sont prises pour armatures d'un condensateur et portées aux niveaux potentiels V_0 et V_1, l'armature interne S_0 prendra une charge

$$Q = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{S} \frac{\partial V}{\partial N} d\Omega,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et le condensateur aura pour capacité

$$C = \frac{Q}{\varepsilon(V_0 - V_1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{1}{V_1 - V_0}\,S\,\frac{\partial V}{\partial N}\,d\Omega.$$

Ainsi, *entre la résistance d'un conducteur entièrement compris entre les deux électrodes et la capacité du condensateur qui aurait pour armatures ces mêmes électrodes, existe cette remarquable relation*

$$\frac{1}{R} = \frac{4\pi\varepsilon C}{\mathcal{R}}. \tag{11}$$

Nous n'examinerons pas ici l'application des théories précédentes à des conducteurs de forme particulière. É. Mathieu (1) a intégré les équations du mouvement permanent de l'électricité à l'intérieur de conducteurs en forme de sphère, d'ellipsoïde planétaire, de parallélépipède rectangle. Nous renvoyons le lecteur à son important Ouvrage.

---

(1) Émile Mathieu, *Théorie de l'Électrodynamique*, Chapitres IV et V (Paris, 1888).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE V.

LE MOUVEMENT PERMANENT DE L'ÉLECTRICITÉ DANS UNE LAME MÉTALLIQUE.

§ 1. — Le mouvement permanent de l'électricité dans une lame plane.

L'étude expérimentale des conducteurs d'étendue finie en toutes dimensions est à peu près inabordable; ce n'est donc pas de cette étude qu'il est possible de déduire des vérifications expérimentales de la loi d'Ohm. Il est, au contraire, facile d'étudier les conducteurs linéaires; mais ce cas est si particulier, que la vérification expérimentale de la loi d'Ohm dans ce cas pourrait laisser des doutes sur la valeur générale de la loi. G. Kirchhoff (1) a donc comblé une lacune en montrant comment on pouvait étudier, au double point de vue théorique et expérimental, le mouvement permanent de l'électricité dans un conducteur métallique dont une seule des dimensions est très petite, c'est-à-dire dans une lame métallique. M. Smaasen (2) est parvenu presque en même temps à des résultats théoriques conformes à ceux de Kirchhoff.

Commençons par supposer l'une des faces de la lame, que nous prendrons pour face supérieure, rigoureusement plane. La face inférieure, très voisine de celle-là, sera rigoureusement ou approximativement plane.

Sur la face supérieure, prenons un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 82).

Soit $AB = ds$ un élément linéaire pris sur la face supérieure de la plaque. Par tous les points de cet élément, menons des normales

(1) G. KIRCHHOFF, *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXIV, p. 497; 1845. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 1). — *Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXVII, p. 344; 1846).

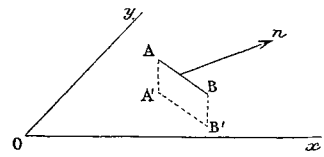
(2) W. SMAASEN, *Vom dynamischen Gleichgewicht der Elektricität in einer Ebene oder in einem Körper* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXIX, p. 161; 1846).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

à la face supérieure de la plaque. Elles engendrent, dans l'intérieur de la plaque, un petit rectangle ABA′B′ dont l'aire est $\delta\, ds$, δ étant l'épaisseur très petite de la plaque au point A.

Soit n la normale à cet élément, c'est-à-dire la normale à l'élé-

Fig. 82.



ment ds dans le plan de la face supérieure de la plaque. Soit $d\omega$ un des éléments de second ordre en lesquels on peut décomposer l'élément ABA′B′. Le rectangle ABA′B′ sera traversé, dans le sens de la normale n, pendant le temps dt, par une quantité d'électricité

$$dQ = dt \sum_{ABA'B'} [u\cos(n, x) + v\cos(n, y)]\, d\omega.$$

Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} \mho\, ds = \sum_{ABA'B'} u\, d\omega, \\ \mho'\, ds = \sum_{ABA'B'} v\, d\omega, \end{cases}$$

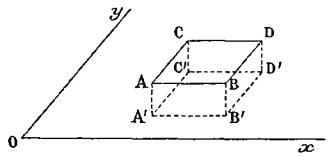
et l'égalité précédente pourra s'écrire

$$(2)\qquad dQ = [\mho\cos(n, x) + \mho'\cos(n, y)]\, ds\, dt.$$

Les quantités $\mho$ et $\mho'$, définies par les égalités (1), sont ce que nous nommerons les *composantes du flux superficiel au point* A.

A la face supérieure de la plaque, traçons un petit rectangle

Fig. 83.



ABCD (*fig.* 83), dont les côtés $AB = dx$ et $AC = dy$ soient pa-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rallèles aux axes Ox, Oy. Par le contour de ce petit rectangle, menons des normales à la plaque, qui y découpent un parallélépipède ABCDA'B'C'D'. Ce petit parallélépipède renferme une quantité totale $\mathfrak{Q}$ d'électricité répandue à son intérieur, ou bien sur ses faces ABCD, A'B'C'D'.

Nous poserons

$$\mathfrak{Q} = P\,dx\,dy,$$

et nous nommerons P *la densité électrique en un point* A *de la plaque.*

On voit sans peine que l'on a

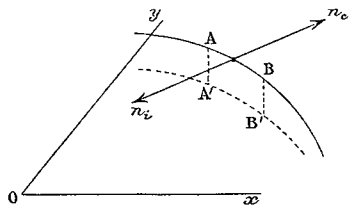
$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{3}$$

Cette égalité montre que, si les courants sont uniformes, on devra avoir

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Soit ABA'B' un élément rectangulaire compris entre deux génératrices AA', BB' de la tranche de la plaque (*fig.* 84). Soit N_e la

Fig. 84.



normale à cet élément vers l'extérieur de la plaque. Soit *ds* la longueur AB. Soit $\Sigma\,ds$ la quantité d'électricité qu'il renferme. On trouvera facilement

$$\mathfrak{V}\cos(n_e, x) + \mathfrak{Y}\cos(n_e, y) = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}. \tag{5}$$

Si les courants sont uniformes, le second membre sera nul, et l'on aura, en désignant par n_i la direction opposée à n_e,

$$\mathfrak{V}\cos(n_i, x) + \mathfrak{Y}\cos(n_i, y) = 0. \tag{6}$$

Les lignes de flux superficiel doivent être tangentes au bord de la plaque.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Supposons la plaque homogène et les courants permanents. Soit $\mathcal{R}$ la résistance spécifique de la substance qui forme la plaque. Soit V la fonction potentielle. Nous aurons, en vertu de la loi d'Ohm,

$$u = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}}\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}}\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Les égalités (1) deviendront alors

$$\mathcal{U}\,ds = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}}\sum_{ABA'B'}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\omega,$$

$$\mathcal{V}\,ds = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}}\sum_{ABA'B'}\frac{\partial V}{\partial y}\,d\omega.$$

Mais les quantités $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ varient d'une manière continue, non seulement à l'intérieur de la plaque, mais encore à la traversée de ses faces. Chacune de ces quantités aura, en tout point de l'élément ABA'B', sensiblement la même valeur qu'au point A. On peut donc remplacer les égalités précédentes par

$$\mathcal{U} = -\varepsilon\frac{\delta}{\mathcal{R}}\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \mathcal{V} = -\varepsilon\frac{\delta}{\mathcal{R}}\frac{\partial V}{\partial y},$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ désignant ici les valeurs que prennent ces quantités au point A.

La quantité

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathcal{R}}{\delta} \tag{7}$$

est ce que nous nommerons la *résistance spécifique de la plaque au point* A; l'introduction de cette quantité nous permet d'écrire

$$\mathcal{U} = -\frac{\varepsilon}{\mathfrak{R}}\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \mathcal{V} = -\frac{\varepsilon}{\mathfrak{R}}\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{8}$$

Supposons maintenant que la plaque *ait une épaisseur constante,* de manière que la quantité $\mathfrak{R}$ ait la même valeur en tout point. L'égalité (4) deviendra

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \tag{9}$$

elle doit avoir lieu en tout point de la plaque, tandis qu'en tout

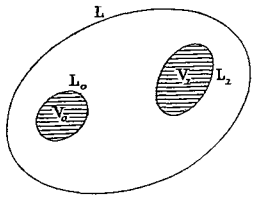
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

point du bord de la plaque on doit avoir, en vertu de l'égalité (6),

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} = 0. \tag{10}$$

Considérons donc une plaque dont L soit le bord (*fig.* 85). Sur cette plaque, deux aires, l'une limitée par la ligne L_0, l'autre limitée par la ligne L_1, sont maintenues respectivement aux niveaux potentiels V_0 et V_1. Pour déterminer les courants perma-

Fig. 85.



nents qui parcourent cette plaque, on commencera par chercher une fonction V vérifiant tout point de l'aire comprise entre les lignes L, L_0, L_1, l'équation aux dérivées partielles (9), prenant la valeur V_0 en tout point de la ligne L_0, la valeur V_1 en tout point de la ligne L_1 et satisfaisant à la condition (10) en tout point de la ligne L. Les composantes du flux seront alors déterminées en chaque point par les égalités (8).

Le problème ainsi posé se présente sous la même forme que le problème du mouvement permanent de l'électricité dans un conducteur à trois dimensions. Mais on possède, pour le résoudre, des méthodes qui n'ont pas d'équivalent dans le cas de trois variables. Ces méthodes, que nous ne pouvons détailler ici (1), reposent essentiellement sur quelques théorèmes que nous allons indiquer.

Considérons une variable complexe

$$z = x + iy.$$

Soit

$$Z = F(x + iy)$$

une fonction analytique quelconque de cette variable. Cette fonc-

(1) *Voir,* pour l'exposé de ces méthodes, G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik-Mechanik*, Leçon XXI (Leipzig, 1877).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tion peut toujours être mise sous la forme

$$Z = X + iY,$$

X et Y étant deux fonctions *analytiques* réelles de x et de y. La première est la *partie réelle* de Z; nous la désignerons par $\mathfrak{R}Z$. La seconde est le *coefficient de la partie imaginaire* de Z. Nous la désignerons souvent par $\mathfrak{I}Z$.

La quantité Z ne devant dépendre de x et de y que par $(x+iy)$, on aura

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

égalité qui devient

$$\frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = -i\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

ou bien

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

De là, on déduit aisément

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

Les égalités (11) montrent que, *si l'on désigne par* $F(x+iy)$ *une fonction quelconque de la variable imaginaire* $(x+iy)$, *les expressions*

$$(13)\qquad V = \mathfrak{R}\,F(x+iy),$$

$$(13\ bis)\qquad V = \mathfrak{I}\,F(x+iy)$$

représentent deux intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

L'égalité (12) montre que *les deux équations*

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}\,F(x+iy) = \text{const.}, \\ \mathfrak{I}\,F(x+iy) = \text{const.} \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

représentent deux familles de lignes qui se coupent orthogonalement. Si l'une de ces familles représente les lignes équipotentielles, l'autre représente les lignes de flux et inversement.

Ces belles propositions montrent que tous les théorèmes importants de la théorie des fonctions de variables imaginaires trouveront une image dans l'étude du mouvement permanent de l'électricité dans une plaque (1).

Toute fonction de la variable complexe $(x - iy)$, conjuguée de la précédente, présentera des propriétés analogues. On peut démontrer la proposition suivante :

Soient $F(x + iy)$, $G(x - iy)$ *deux fonctions analytiques quelconques de deux variables complexes conjuguées; le symbole*

$$\mathfrak{R}\, F(x + iy) + \mathfrak{R}\, G(x - iy)$$

représente l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Les relations de la théorie des fonctions de variables imaginaires avec la théorie de la représentation conforme conduisent au théorème suivant, que nous ne ferons qu'énoncer :

Soient données deux plaques P *et* P', *dont l'une est la représentation conforme de l'autre,* ce qui signifie qu'à tout point de l'une on peut faire correspondre tout point de l'autre de manière que :

1° Tout point du contour de la plaque P corresponde à un point du contour de la plaque P' et réciproquement;

2° Tout point du contour des électrodes de la plaque P corresponde à un point du contour des électrodes de la plaque P' et réciproquement;

3° Si un point M de la plaque P tend vers un point m du contour de la plaque, le point M', qui correspond à M sur la plaque P', tend uniformément vers le point m' qui correspond à m sur le contour de la plaque P';

(1) *Voir* F. KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

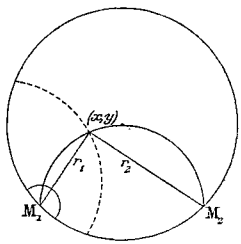
4° Toute figure infiniment petite tracée sur la plaque P correspond à une figure semblable tracée sur la plaque P′ et réciproquement;

Si l'on sait trouver le mouvement permanent de l'électricité dans la plaque P, *on sait le trouver dans la plaque* P′ *et réciproquement. Les lignes équipotentielles et les lignes de flux de l'une des plaques ont respectivement pour représentation les lignes équipotentielles et les lignes de flux de l'autre plaque.*

Faisons l'application du premier de ces théorèmes à un cas particulier intéressant.

Les deux électrodes se réduisent à deux points : l'un M_1 (*fig.* 86),

Fig. 86.



de coordonnées (a_1, b_1), l'autre M_2, de coordonnées (a_2, b_2). La fonction potentielle en ces deux points ne sera pas donnée, ni même assujettie à avoir une valeur finie. Nous nous donnerons seulement l'intensité J du courant amené par la première électrode et emmené par la seconde.

Posons

$$c_1 = a_1 + ib_1, \qquad c_2 = a_2 + ib_2, \qquad z = x + iy,$$

$$Z = \log \frac{z - c_1}{z - c_2}.$$

Cherchons la partie réelle et le coefficient de i dans la partie imaginaire de Z.

Si nous posons

$$x - a_1 = r_1 \cos\theta_1, \qquad x - a_2 = r_2 \cos\theta_2,$$
$$y - b_1 = r_1 \sin\theta_1, \qquad y - b_2 = r_2 \sin\theta_2,$$

nous aurons

$$\mathfrak{R}Z = \log \frac{r_1}{r_2}, \qquad \mathfrak{I}Z = \theta_1 - \theta_2.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous aurons donc une intégrale particulière de l'équation (10) en posant

$$V = K \log \frac{r_1}{r_2}, \tag{15}$$

K désignant une constante. Les lignes de flux, représentées par l'équation

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{const.},$$

seront des arcs de cercle joignant les points M_1, M_2. Par conséquent, si l'on prend deux de ces arcs de cercle pour limiter la plaque et, en particulier, les deux arcs qui forment un même cercle, on sera assuré que la condition (10), relative aux bords de la plaque, sera satisfaite.

Ainsi, la formule (15) déterminera le mouvement permanent de l'électricité dans une plaque métallique circulaire, sur le bord de laquelle se trouvent deux électrodes, M_1, M_2, pourvu seulement que la valeur de la constante K concorde avec la valeur J de l'intensité du courant amené par l'électrode M_1.

Or il est aisé de déterminer la constante K de manière qu'il en soit ainsi.

Autour du point M_1, traçons sur la plaque un demi-cercle de rayon très petit R_1 ; soit ds un élément de ce cercle. Nous devrons avoir

$$J = -\frac{\varepsilon}{\mathfrak{A}} \int \frac{\partial V}{\partial R_1} ds.$$

La formule (15) donne

$$\frac{\partial V}{\partial R_1} = \frac{K}{R_1}.$$

On doit donc avoir

$$K = -\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon\pi} J.$$

Ce résultat, reporté dans la formule (15), donne (1)

$$V = \frac{\mathfrak{A} J}{\varepsilon\pi} \log \frac{r_2}{r_1}. \tag{16}$$

Comme nous l'avons vu, les lignes de flux sont des arcs de cercle unissant les deux électrodes. Les lignes d'égal niveau po-

(1) La fonction V est ici déterminée *à une constante près*.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

tentiel sont données par

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const.}; \tag{17}$$

ce sont d'autres cercles coupant orthogonalement les premiers.

G. Kirchhoff a vérifié par l'expérience ce dernier résultat.

Imaginons que l'on unisse deux points M, M′ de la plaque par un fil métallique renfermant un galvanomètre. Pour que le galvanomètre n'accuse aucun courant, c'est-à-dire pour que l'équilibre électrique demeure établi sur le fil, il faut que les deux points M et M′ soient au même niveau potentiel. On a donc ainsi un moyen de reconnaître expérimentalement si divers points sont sur une même ligne de niveau.

D'autre part, d'après l'égalité (17), si le niveau potentiel est le même en divers points de la plaque, on doit pouvoir, par ces points, faire passer un cercle qui ait son centre sur la ligne M_1M_2, et coupe cette ligne en deux points conjugués harmoniques par rapport à M_1M_2. G. Kirchhoff cherchait à tracer un pareil cercle, passant aussi près que possible des divers points qu'il avait reconnus expérimentalement être au même niveau potentiel. Dans le Tableau suivant, la première colonne donne le rayon de semblables cercles. Les colonnes suivantes donnent la distance des divers points étudiés au cercle auquel ils correspondent. L'unité de longueur employée est le centième de pouce.

Rayon.	Écarts.											
114....	+1	−1	−1	+1	»	»	»	»	»	»	»	»
278....	0	0	0	0	0	+1	»	»	»	»	»	»
604....	+1	+1	+1	0	−1	−1	−3	−2	0	−4	+7	»
590....	−1	−2	−1	0	0	0	+3	»	»	»	»	»
285....	0	−1	−1	−1	0	−2	+7	»	»	»	»	»
117....	0	0	−1	+1	»	»	»	»	»	»	»	»
∞.....	+2	+2	0	−2	−3	0	0	+2	+4	+6	+3	0

La dernière série se rapporte au diamètre de la plaque, normal à M_1M_2.

Ces recherches mettent en évidence ce premier résultat, conforme à la théorie : les lignes d'égal niveau potentiel sont représentées par l'égalité (17), en sorte que la fonction potentielle est une simple fonction du rapport $\frac{r_2}{r_1}$. G. Kirchhoff a poussé plus

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

loin, et a démontré par l'expérience que la fonction potentielle était proportionnelle à $\log\frac{r_2}{r_1}$, et cela de la manière suivante :

Soient, sur la plaque, deux points M et M′, entre lesquels existe une différence de niveau potentiel donnée $V - V' = A$; pour que la fonction potentielle soit proportionnelle à $\log\frac{r_2}{r_1}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{r'_2}{r'_1} = \text{const.}, \tag{18}$$

de quelque manière que les deux points M et M′ soient situés sur la plaque.

Voici comment G. Kirchhoff a vérifié l'exactitude de cette relation :

Dans le fil du galvanomètre était intercalée une pile thermo-électrique, entretenant entre les deux extrémités du fil une différence de niveau potentiel constante. Pour que le galvanomètre n'accusât, dans ce cas, aucun courant, il fallait, comme le montre l'étude des courants thermo-électriques, que les deux extrémités du fil touchassent deux points M, M′ de la plaque, dont la différence de niveau potentiel soit égale et de signe contraire à celle que la pile thermo-électrique entretient entre les deux extrémités du fil. Pour deux couples de tels points, quelle que soit leur position sur les plaques, l'égalité (18) doit être vérifiée.

G. Kirchhoff a d'abord étudié ainsi des couples de points situés sur la ligne M_1M_2. On avait, dans ce cas,

$$r_1 + r_2 = r'_1 + r'_2 = M_1M_2 = 39,$$

relation qui, jointe à l'égalité (18), permettait de calculer r'_1 lorsqu'on connaissait r_1. G. Kirchhoff a comparé les valeurs de r'_1 ainsi calculées aux valeurs de r'_1 observées, et il a trouvé les résultats suivants :

r_1	5	10	15	20	25	30
r'_1 obs.	10,4	17,3	22,8	28	31,5	34,4
r'_1 obs. — r'_1 calc.	+ 0,4	— 0,1	— 0,4	+ 0,2	0,0	— 0,2

G. Kirchhoff a ensuite étudié les couples situés sur un cercle de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

5 pouces de rayon, passant par les deux points M′, M_2, dont la distance était, dans cette expérience, de 1 pouce. Il a trouvé :

r_1.....	10	20	30	40	50	60	70	80
r'_1 obs.....	25,4	48,3	62,5	70,9	78,7	84	88,75	92
r'_1 obs. — r'_1 calc....	+ 0,2	+ 0,3	— 0,4	— 1,4	0,0	— 0,3	0,6	0,

Ces expériences, on le voit, fournissent une vérification très complète et très précise de la loi d'Ohm.

On peut résoudre, pour un grand nombre de cas, le problème du mouvement permanent de l'électricité dans une plaque (1). M. Quincke et M. Adams ont donné un grand nombre de vérifications expérimentales des résultats théoriques obtenus (2). La loi d'Ohm se trouve, par ces vérifications, placée hors de toute contestation.

§ 2. — Courants dans une lame courbe.

On peut étudier le mouvement permanent de l'électricité dans un conducteur limité par deux surfaces courbes très voisines, comme on a étudié le mouvement de l'électricité dans une plaque.

Considérons la face supérieure de la plaque et, à sa surface, traçons un système de coordonnées curvilignes orthogonales. Ce système est formé par deux familles de lignes : les lignes β, que représente l'équation

$$\alpha = \text{const.},$$

et les lignes α, que représente l'équation

$$\beta = \text{const.}$$

Si ds désigne la distance du point (α, β) au point

$$(\alpha + d\alpha,\ \beta + d\beta),$$

on a

$$ds^2 = A^2\, d\alpha^2 + B^2\, d\beta^2, \tag{19}$$

A et B étant deux fonctions positives de α, β.

---

(1) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik-Mechanik*, XXIe Leçon (Leipzig, 1877). — E. MATHIEU, *Théorie de l'Électrodynamique*, Chap. IV et V. Paris, 1888.

(2) QUINCKE, *Ueber die Verbreitung eines electrischen Stromes in Metall-platten* (*Poggendorff's Annalen*, t. XCVII, p. 382; 1856). — ADAMS, *Proceedings of the royal Society of London, Bakerian Lecture*, t. XXIV, p. 1; 1875.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Le petit rectangle, dont les sommets sont les points

$$(\alpha, \beta), \quad (\alpha + d\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta + d\beta), \quad (\alpha + d\alpha, \beta + d\beta),$$

a pour aire

$$d\omega = \mathrm{AB}\, d\alpha\, d\beta. \tag{20}$$

Les flux superficiels, dans une semblable lame, se définissent comme dans une plaque. Au point (α, β), nous désignerons par f la composante du flux suivant la ligne α, et par g la composante du flux suivant la ligne β.

Soit P la densité moyenne de l'électricité au point (α, β) de la plaque. Nous trouverons sans peine que

$$\mathrm{AB}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathrm{B} f}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{A} g}{\partial \beta}\right). \tag{21}$$

Si Σ désigne la densité moyenne sur le bord de la plaque et n_i la ligne tangente à la plaque, normale au bord, et dirigée vers l'intérieur de la plaque, on aura

$$f\cos(n_i, \alpha) + g\cos(n_i, \beta) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial t}. \tag{22}$$

Si les courants sont permanents, on devra, d'après l'égalité (21), avoir, en tout point de la plaque,

$$\frac{\partial \mathrm{B} f}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{A} g}{\partial \beta} = 0, \tag{23}$$

et, d'après l'égalité (22), avoir, en tout point du bord,

$$f\cos(n_i, \alpha) + g\cos(n_i, \beta) = 0. \tag{24}$$

Il est facile de voir que cette dernière égalité peut encore s'écrire, en désignant par dl un élément du bord de la plaque,

$$\mathrm{B} f\frac{d\beta}{dl} + \mathrm{A} g\frac{d\alpha}{dl} = 0. \tag{25}$$

Supposons non seulement que les courants soient permanents, mais encore que la plaque soit homogène; soit $\mathfrak{R}$ la résistance spécifique de la matière qui la forme; soit δ son épaisseur au point (α, β). Posons

$$\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{R}}{\delta}. \tag{26}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La loi d'Ohm va nous donner, comme on le voit sans peine,

$$(27)\qquad \begin{cases} f = -\dfrac{\varepsilon}{\mathfrak{A}}\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}, \\ g = -\dfrac{\varepsilon}{\mathfrak{A}}\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial V}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Supposons que la plaque ait en tout point la même épaisseur; $\mathfrak{A}$ sera indépendant de (α, β). En vertu des équations (27), l'équation (23) deviendra

$$(28)\qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial V}{\partial \beta}\right) = 0,$$

tandis que l'égalité (25) deviendra

$$(29)\qquad \frac{B}{A}\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{d\beta}{dl} + \frac{A}{B}\frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{d\alpha}{dl} = 0.$$

Si l'on adjoint à ces équations la condition de prendre des valeurs données le long du contour des électrodes, on aura obtenu toutes les conditions qui déterminent la fonction potentielle V. Une fois cette fonction déterminée, les égalités (27) donneront les composantes du flux superficiel en chaque point de la lame.

La détermination de la fonction V se simplifie notablement, si l'on sait trouver à la surface de la plaque un système de coordonnées curvilignes pour lequel on ait constamment $A = B$. Un pareil système porte le nom de *système isotherme*. On lui donne encore le nom de *système isométrique*, qui est dû à M. O. Bonnet et qui rappelle le fait suivant : *Si l'on convient de prendre toujours* $d\alpha = d\beta$, *un système de coordonnées isothermes partage la surface en carrés infiniment petits.*

Supposons que nous ayons choisi un système isotherme pour système de coordonnées curvilignes relatives à notre surface, et voyons ce que deviennent les conditions (28) et (29) qui déterminent la fonction V :

1° En tout point de la lame, nous aurons

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0;$$

2° En tout point du bord de la lame, nous aurons

$$(31)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{d\beta}{dl} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\frac{d\alpha}{dl} = 0;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

3° Le long des bords l_1, l_2 des électrodes, nous aurons

$$V - V_1, \qquad V = V_2. \tag{32}$$

Le problème analytique auquel se ramène maintenant la détermination de la fonction V est identique au problème auquel nous avait amené l'étude du mouvement permanent de l'électricité dans une plaque. *Si donc on sait trouver, à la surface d'une lame courbe, un système de coordonnées isothermes, l'étude du mouvement permanent de l'électricité dans cette lame est ramenée au même problème analytique que l'étude du mouvement de l'électricité dans une plaque.*

Cette relation va devenir plus claire encore par les développements suivants :

Rappelons d'abord les propriétés géométriques des systèmes isothermes, telles que Gauss les a établies (1).

Supposons que, sur une surface, on connaisse un système isotherme. Au point $P(\alpha, \beta)$ de la surface, faisons correspondre sur un plan un point $p(x, y)$, dont les coordonnées rectangulaires x, y aient pour valeurs respectives

$$x = \alpha, \qquad y = \beta.$$

A toute figure infiniment petite tracée sur la surface cette loi fait correspondre une figure infiniment petite semblable tracée sur le plan. On dit qu'une semblable correspondance fournit une *représentation conforme* ou un *tracé géographique* de la surface sur le plan. L'angle de deux lignes tracées sur la surface est égal à l'angle des deux lignes qui les représentent sur le tracé géographique.

Réciproquement, si l'on a le tracé géographique d'une surface sur un plan, tout système de coordonnées rectilignes et rectangulaires sur ce plan est la représentation d'un système isotherme de la surface.

Ces propositions montrent que la recherche d'un système iso-

(1) GAUSS, *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (GAUSS, *Werke*, Bd. IV, p. 193). — G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 146.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

therme sur une surface est équivalente à la recherche d'un mode de représentation conforme de cette surface sur un plan.

Si donc, à la surface de la lame en laquelle nous voulons étudier le mouvement permanent de l'électricité, nous savons trouver un système isotherme, nous savons, par cela même, faire le tracé géographique de la lame sur un plan. Ce tracé nous dessinera une *plaque,* dont le bord et les électrodes seront les images du bord et des électrodes de la *lame* étudiée.

On peut toujours supposer que la correspondance entre la lame et sa représentation ait été obtenue en égalant respectivement à x et à y les paramètres α, β du système isotherme pris, sur la lame, pour système de coordonnées. La fonction $V(\alpha, \beta)$ se transformera par là en une fonction $V(x, y)$, qui présentera les propriétés suivantes :

1° En vertu de l'égalité (30), en tout point de la *plaque*, image de la *lame,* on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0;$$

2° En tout point du contour des *électrodes de la plaque,* images des *électrodes de la lame,* on aura, en vertu des égalités (32),

$$V = V_1, \qquad V = V_2;$$

3° En tout point du *bord de la plaque,* image du *bord de la lame,* on aura, en vertu de l'égalité (31),

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = 0,$$

N_i étant la normale au bord de la plaque vers l'intérieur de cette plaque.

Ainsi, la fonction $V(\alpha, \beta)$, qui résout sur la lame le problème du mouvement permanent de l'électricité, est identique à la fonction $V(x, y)$ qui résout le même problème pour la plaque, représentation conforme de la lame, et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'on sait faire sur un plan le tracé géographique d'une lame courbe et trouver le mouvement permanent de l'électricité dans une plaque coulée sur ce tracé, on sait trou-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ver le mouvement permanent de l'électricité dans la lame courbe.

Ces théorèmes, dont il serait difficile de citer l'inventeur, tant ils sont intimement liés à une foule de questions d'analyse, ont été donnés explicitement par G. Kirchhoff (1).

Démontrons encore, pour terminer cette étude, ce beau théorème :

Lorsque l'électricité se meut dans une lame d'un mouvement permanent, les lignes d'égal niveau potentiel et les lignes de flux forment toujours un système isotherme.

Ces deux familles de lignes, lignes équipotentielles et lignes de flux, forment toujours, en effet, un système orthogonal. Nous pouvons donc supposer que l'on ait pris ces lignes comme système de coordonnées curvilignes à la surface de la lame, les lignes α coïncidant avec les lignes équipotentielles, et les lignes β avec les lignes de flux.

On devra toujours avoir l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{dV}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)=0. \tag{28}$$

Mais, pour que les lignes équipotentielles coïncident avec les lignes

$$\beta = \text{const.},$$

il faut que V ne dépende que de α, ce qui réduit l'équation (28) à

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)=0.$$

On a donc, en désignant par $\Psi(\beta)$ une certaine fonction de β,

$$\frac{B}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha}=\Psi(\beta).$$

(1) G. KIRCHHOFF, *Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche* (*Monatsber. der Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* 19 juillet 1875. — *Kirchhoff's Abhandlungen,* p. 56). — Sur les relations que ces théorèmes présentent avec la théorie des fonctions analytiques, *voir* l'Ouvrage déjà cité de M. F. KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'ailleurs, $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ ne dépend que de α; si nous désignons cette fonction de α par $\Phi(\alpha)$, nous aurons

$$\frac{B}{A} = \frac{\Psi(\beta)}{\Phi(\alpha)} = \lambda(\alpha, \beta),$$

et l'égalité (19) deviendra

$$ds^2 = \lambda^2(\alpha, \beta)\,[\Phi^2(\alpha)\,d\alpha^2 + \Psi^2(\beta)\,d\beta^2].$$

Faisons maintenant le changement de variables suivant, changement qui ne modifiera pas les lignes coordonnées :

$$\alpha' = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Phi(\alpha)\,d\alpha,$$

$$\beta' = \int_{\beta_0}^{\beta} \Psi(\beta)\,d\beta.$$

La fonction $\lambda(\alpha, \beta)$ se transformera en une fonction $\mathcal{L}(\alpha', \beta')$, et nous aurons

$$ds^2 = \mathcal{L}(\alpha', \beta')\,(d\alpha'^2 + d\beta'^2).$$

Le système des lignes

$$\alpha' = \text{const.}, \qquad \beta' = \text{const.}$$

forme donc un système isotherme; et, comme ce système coïncide avec le système

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.},$$

le théorème énoncé se trouve démontré.

M. Boltzmann (1), G. Kirchhoff (2), É. Mathieu (3) ont résolu complètement, au moyen de ces principes, le problème du mouvement de l'électricité dans certaines surfaces. Nous renvoyons le lecteur à leurs travaux, et notamment au Traité de É. Mathieu.

---

(1) BOLTZMANN, *Ueber die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen* (*Sitzungsber. der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien*, t. LII, p. 214; 1865).

(2) G. KIRCHHOFF, *loc. cit.*

(3) É. MATHIEU, *Théorie de l'Électrodynamique*. Paris, 1888.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VI.

LA LOI DE JOULE.

Lorsqu'un conducteur linéaire est traversé par un courant permanent, il s'échauffe; les lois de cet échauffement ont été déterminées expérimentalement, à partir de 1840, par Joule (1), Lenz (2) et M. Edmond Becquerel (3). Le résultat auquel ils sont parvenus peut se résumer dans la loi suivante, qui porte le nom de *loi de Joule :*

Lorsqu'un conducteur linéaire et homogène, ayant en tout point la même température, est parcouru par un courant permanent, chaque élément ds de ce fil devient une source de chaleur. Dans le temps dt, cet élément dégage une quantité de chaleur dont la valeur dQ est donnée par l'égalité

$$\text{(1)} \qquad E\,dQ = RJ^2\,ds\,dt,$$

E *étant l'équivalent mécanique de la chaleur,*
R *ds la résistance de l'élément ds,*
J *l'intensité du courant.*

Cette loi peut également se mettre sous une autre forme.

Soient V la valeur de la fonction potentielle à l'origine de l'élément ds et $\left(V + \frac{dV}{ds}\,ds\right)$ sa valeur à l'extrémité du même élément; la loi d'Ohm nous donne

$$RJ\,ds = -\varepsilon\frac{dV}{ds}\,ds.$$

(1) JOULE, *On the heat evolved by metallic conductors of electricity, and in the cells of a battery during electrolysis* (*Proceedings of the Royal Society*, 17 décembre 1840; *Philosophical Magazine*, 3e série, t. XIX, p. 260; 1841, et t. XX, p. 204; 1843).

(2) LENZ, *Ueber die Gezetze der Wärme-Entwickelung durch den galvanischen Strom* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXI, p. 44; 1844).

(3) EDMOND BECQUEREL, *Des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. IX, p. 21; 1843).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

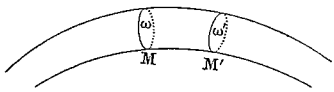
L'égalité (1) peut être alors remplacée par la suivante :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{E}\,dQ = -\varepsilon \frac{dV}{ds}\,\mathrm{J}\,ds\,dt.$$

G. Kirchhoff (1) a montré comment on pouvait étendre l'énoncé de la loi de Joule aux courants permanents qui parcourent un conducteur étendu en toutes dimensions.

Considérons, à l'intérieur d'un conducteur homogène, parcouru par des courants permanents, un canal infiniment délié dont les parois sont engendrées par une suite de lignes de flux (*fig.* 87).

Fig. 87.



Il est naturel d'assimiler un semblable canal à un conducteur linéaire parcouru par un courant permanent.

Coupons ce canal par deux sections normales ω, ω', dont la distance infiniment petite, MM', soit égale à *ds*. Si nous assimilons notre petit canal à un conducteur linéaire, l'intensité du courant qui le traverse en M aura pour valeur

$$\mathrm{J} = i\omega,$$

i étant le flux électrique au point M ; la résistance de l'élément MM sera

$$\mathrm{R}\,ds = \frac{\mathfrak{R}}{\omega}\,ds,$$

$\mathfrak{R}$ étant la résistance spécifique de la substance qui forme le conducteur. Nous sommes donc amenés, en appliquant la formule (1) au segment compris entre les deux sections ω, ω', à supposer que ce segment dégage, dans le temps *dt*, une quantité de chaleur donnée par l'égalité

$$\mathrm{E}\,dQ = \mathfrak{R}\,\omega\,i^2\,ds\,dt.$$

---

(1) G. Kirchhoff, *Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem System linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXXV, p. 189; 1888. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 33).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais, d'autre part, si l'on désigne par u, v, w les composantes du flux électrique au point M, on a

$$i^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

La quantité $\omega\, ds$ n'est autre chose que le volume du petit segment compris entre les sections ω et ω'. On arrive donc ainsi à l'énoncé suivant, qui est l'extension de la loi de Joule à un conducteur d'étendue finie en toutes dimensions :

Lorsqu'un conducteur homogène, dont tous les points sont à la même température, est parcouru par un courant permanent, chaque élément de volume dx dy dz de ce conducteur dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ donnée par la formule

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{E}\, dQ = \mathcal{R}(u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Cette égalité peut se transformer comme nous avons transformé l'égalité (1); en effet, la loi d'Ohm donne

$$\mathcal{R}\, u = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\mathcal{R}\, v = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\mathcal{R}\, w = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z}.$$

En vertu de ces relations, l'égalité (3) peut s'écrire :

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{E}\, dQ = -\varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) dx\, dy\, dz\, dt.$$

R. Clausius (1) a donné des équations (2) et (4) un énoncé qu'il est intéressant de connaître.

Le potentiel électrostatique d'un système ayant pour expression

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \sum V q,$$

expression dans laquelle la sommation s'étend à toutes les charges

(1) R. Clausius, *Ueber die bei einem stationären elektrischen Strome in dem Leiter gethane Arbeit und erzeugte Wärme* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXXXVII, p. 415; 1852. — Mémoires sur la *Théorie mécanique de la chaleur*, traduits par Folie, t. II, p. 114).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du système, lorsque la distribution électrique subit une variation infiniment petite, ce potentiel éprouve une variation

$$\delta W = \varepsilon \sum V \delta q, \tag{5}$$

δq étant la variation de la charge électrique au point où la fonction potentielle a la valeur V.

Cela posé, envisageons tout d'abord un segment MM′ de conducteur linéaire et homogène, traversé de M en M′ par un courant permanent d'intensité J. Dans le temps dt, ce segment dégage, d'après l'égalité (2), une quantité de chaleur dQ donnée par

$$E\, dQ = -\varepsilon(V' - V) J\, dt.$$

Imaginons que, pendant le temps dt, le segment MM′ ait été parcouru par le courant uniforme d'intensité J, mais que l'électricité soit demeurée en repos sur tout le reste du système. La distribution électrique sur le système aurait alors, dans le temps dt, subi une variation; la charge au point M aurait diminué de $J\, dt$, et la charge au point M′ aurait augmenté de la même quantité. D'après l'égalité (5), le potentiel électrostatique du système aurait augmenté de

$$\delta W = \varepsilon(V' - V) J\, dt.$$

La comparaison des deux égalités que nous venons d'écrire conduit à la proposition suivante :

Soit MM′ *un segment linéaire, homogène, d'un conducteur parcouru par un courant permanent. Il dégage, dans le temps dt, la quantité de chaleur dQ que l'on peut calculer de la manière suivante : supposons que, dans le temps dt, le segment* MM′ *ait été parcouru par le courant permanent qui le parcourt en réalité, tandis que le reste du système n'aurait été parcouru par aucun courant. La distribution électrique sur le système aurait subi un certain changement, entraînant une certaine variation* δW *du potentiel électrostatique du système, et l'on aurait*

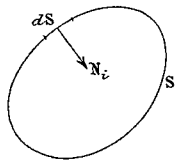
$$E\, dQ = -\delta W. \tag{6}$$

Ce théorème peut s'étendre de la manière suivante aux conducteurs à trois dimensions :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

A l'intérieur d'un conducteur homogène, ayant en tout point la même température, parcouru par des courants permanents, traçons une surface fermée S (*fig.* 88). La partie du conducteur si-

Fig. 88.



tuée à l'intérieur du conducteur dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ, et l'on a, d'après l'égalité (4),

$$\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = -\varepsilon\,dt \iiint \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}w\right) dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume que limite la surface S.

Soit N_i la normale à la surface S vers l'intérieur de cette surface. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\iiint \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}w\right) dx\,dy\,dz \\ = -\int \mathrm{V}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\mathrm{S} \\ -\iiint \mathrm{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Si l'on remarque d'ailleurs que, les courants étant permanents, on a, en tout point intérieur à la surface S,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on voit que l'on peut écrire

$$(7)\quad \mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \varepsilon\,dt \int \mathrm{V}[u\cos(\mathrm{N}_i, x) + v\cos(\mathrm{N}_i, y) + w\cos(\mathrm{N}_i, z)]\,d\mathrm{S}.$$

Imaginons, d'autre part, que l'espace intérieur à la surface S demeure traversé, pendant le temps dt, par les courants permanents qui le traversent en réalité, tandis que l'électricité serait en repos sur le reste du système. La distribution électrique sur le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

système subirait un certain changement que nous pouvons déterminer.

La charge électrique en un point extérieur à la surface S ne subirait aucun changement, puisque, en ce point, il n'y aurait aucun courant.

La charge électrique en un point intérieur à la surface S ne subirait non plus aucun changement, puisque, en ce point, le courant serait uniforme.

Mais il n'en serait plus de même en un point de la surface S. L'élément dS de la surface S acquerrait, dans le temps dt, une charge

$$\delta q = -\,dt[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\mathrm{S}.$$

Ce changement de distribution électrique entraînerait une variation du potentiel électrostatique, ayant pour valeur, d'après la formule (5),

$$(8)\qquad \delta \mathrm{W} = -\,\varepsilon\,dt \int\!\!\int \mathrm{V}[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\mathrm{S}.$$

Le rapprochement des égalités (7) et (8) conduit à énoncer le théorème suivant :

A l'intérieur d'un conducteur homogène, ayant en tout point la même température et parcouru par des courants permanents, traçons une surface fermée. La partie du conducteur qu'enferme cette surface dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ que l'on peut calculer de la manière suivante : supposons que, dans le temps dt, cette portion du conducteur ait été parcourue par les courants qui la parcourent en réalité, tandis que le reste du système n'aurait été parcouru par aucun courant. La distribution électrique sur le système aurait subi une certaine modification, entraînant une variation δW *du potentiel électrostatique, et l'on aurait*

$$(6\ bis)\qquad \mathrm{E}\,dQ = -\,\delta \mathrm{W}.$$

Sir W. Thomson (1) et R. Clausius (2) ont cherché à prouver

(1) Sir W. Thomson, *Applications of the principle of mechanical effect to the measurement of electro-motive forces and of galvanic resistances, in absolute units* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. II, p. 551; 1851. — *Thomson's mathematical and physical papers*, Vol. I, p. 490).

(2) R. Clausius, *loc. cit.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

que ce théorème fondamental était une conséquence directe du principe de la conservation de l'énergie et des lois de Coulomb. Comme ce théorème établit un lien entre la loi de Joule, énoncée par les égalités (1) et (3), et la loi d'Ohm, on voit que, d'après ces physiciens, la loi de Joule est une conséquence du principe de la conservation de l'énergie, des lois de Coulomb et de la loi d'Ohm, et qu'elle ne constitue pas une quatrième loi, essentiellement distincte des trois premières.

Bien que leur manière de voir ait été adoptée par la plupart des physiciens, on ne saurait cependant regarder leurs déductions comme valables. Il est, en effet, impossible d'appliquer le principe de la conservation de l'énergie à un courant permanent, alors que nous ne possédons encore aucun renseignement sur la forme de l'énergie interne d'un système qui renferme des courants; aussi l'étude des raisonnements donnés par Sir W. Thomson et par Clausius révélera-t-elle au lecteur attentif un grand nombre d'hypothèses admises implicitement par ces auteurs.

Toutefois, les recherches de Sir W. Thomson et de R. Clausius suggèrent l'idée de faire subir une transformation au théorème que nous venons de démontrer; et cette transformation est utile, car elle nous fournira une proposition qui peut s'étendre sans erreur à des cas auxquels la loi d'Ohm et la loi de Joule ne sont plus applicables.

A l'intérieur d'un conducteur homogène, dont tous les points sont à la même température et qui est parcouru par des courants permanents, traçons encore une surface fermée S. Imaginons que, pendant le temps dt, les courants demeurent, à l'intérieur de cette surface, ce qu'ils sont en réalité, tandis qu'à l'extérieur ils seraient tous égaux à 0.

Si l'on définissait l'état du conducteur sans faire entrer en ligne de compte les variables qui fixent le flux en chaque point (ce que nous nommerons l'état du *conducteur supposé sans courant*), cet état aurait subi, pendant le temps dt, une certaine modification; dans le cas actuel, cette modification se réduirait à un changement de distribution électrique.

Cette modification ferait subir une variation δU à l'énergie interne du système supposé sans courant.

Or on connaît la forme de l'énergie interne U du système sup-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

posé sans courant; cette forme est donnée par l'égalité (19) du Chapitre II du Livre IV :

$$EU = E\Upsilon + W + K_1 q_1 + K_2 q_2 + \ldots + K_n q_n.$$

Il est aisé de voir que, dans la modification considérée, on a simplement

$$E\,\delta U = \delta W.$$

En rapprochant cette égalité de l'égalité (6 *bis*), on est conduit à énoncer le théorème suivant :

Un conducteur métallique, homogène, ayant en tout point la même température, est parcouru par des courants permanents. Une surface fermée S *isole, à son intérieur, une certaine région. Cette région dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ que l'on peut calculer de la manière suivante :*

Imaginons que les courants demeurent ce qu'ils sont à l'intérieur de la surface S *et s'annulent à l'extérieur de cette surface; il y aurait alors, dans le temps dt, une certaine variation dans l'ensemble des variables qui définissent l'état du système supposé sans courant; ce changement entraînerait un dégagement de chaleur dQ' dans le système supposé sans courant, et l'on aurait*

$$dQ = dQ'. \tag{9}$$

Dans les Chapitres suivants, nous étendrons cette proposition à tous les systèmes conducteurs parcourus par des courants permanents, qu'ils soient électrolysables ou non, homogènes ou non, qu'ils aient ou non en tout point la même température. Cette proposition, jointe à la proposition énoncée à la fin du § 1 du Chapitre IV, constitue l'*ensemble des lois fondamentales de l'état permanent* (1).

(1) P. DUHEM, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 223; Paris, 1886.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VII.

LA DIFFÉRENCE DE NIVEAU POTENTIEL ENTRE DEUX MÉTAUX EN CONTACT.

§ 1. — L'équilibre électrique sur un conducteur métallique hétérogène.

Nous avons déjà établi, au Chapitre I, la condition d'équilibre électrique sur un conducteur formé de diverses substances métalliques. Nous avons vu que cette condition était la suivante :

La quantité $(\varepsilon V + \Theta)$ *doit avoir la même valeur en tous les points d'un même conducteur métallique.*

Supposons que, parmi les substances diverses dont l'assemblage forme un conducteur métallique, se trouvent deux métaux, a et b, parfaitement définis de nature et d'état. Soient Θ_a, Θ_b les valeurs que prend la quantité Θ en des points intérieurs à chacun de ces métaux. Lorsque l'équilibre est établi sur le conducteur, la fonction potentielle a une même valeur V_a en tous les points intérieurs au premier, et une même valeur V_b en tous les points intérieurs au second. D'après ce qui précède, on a

$$(1) \qquad V_b - V_a = -\frac{1}{\varepsilon}(\Theta_b - \Theta_a).$$

Donc, *entre les points intérieurs à deux métaux réunis directement ou par l'intermédiaire d'autres métaux, il s'établit, lorsque l'équilibre électrique est réalisé, une différence de niveau potentiel qui dépend exclusivement de la nature des deux métaux, et qui est indépendante de leur forme, de leur grandeur; de la forme et de la grandeur de leur surface de contact; des charges électriques distribuées sur chacun d'eux; enfin des métaux interposés entre eux, s'ils ne sont pas directement au contact.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces diverses lois ont été énoncées pour la première fois par Volta (1).

Observons tout d'abord ce qui se passe, en vertu de cette loi, aux divers points d'un conducteur homogène ou d'un conducteur hétérogène dont la nature varie d'un point à l'autre d'une manière continue. Dans ce cas, d'après les hypothèses faites sur la quantité Θ (Liv. IV, Chap. II), la quantité Θ est, en tout point du conducteur, une fonction régulière des coordonnées de ce point. Dès lors, la condition d'équilibre

$$\varepsilon V + \Theta = \text{const.} \tag{2}$$

nous permet d'écrire

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon}\Delta\Theta,$$

ou bien, en désignant par ρ la densité électrique au point considéré,

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Delta\Theta.$$

Ainsi, dans toute région où Θ demeure constant, il n'y a pas d'électricité. Mais, dans les régions où Θ varie, il peut se trouver de l'électricité. Par conséquent, à l'intérieur d'un conducteur sur lequel l'équilibre électrique est établi, il peut y avoir de l'électricité :

1° Si la nature du conducteur varie ;

2° Si le conducteur est homogène, à une distance inférieure à $(\lambda + \mu)$ des surfaces terminales.

Examinons particulièrement ce dernier cas.

Nous avons déjà vu (Chap. II) comment, sur un corps métallique homogène jusqu'au voisinage des surfaces terminales, l'électricité se distribue à l'approche de l'isolant qui confine au

(1) VOLTA, *Sur l'Électricité dite galvanique* (*Annales de Chimie et de Physique*, 1re série, t. XL, p. 225; 1801). Volta employait, dans l'énoncé des lois qu'il a découvertes, le terme, quelque peu obscur, de *différence de tension électrique* entre deux métaux. Cette différence a été, pour la première fois, regardée comme une différence de niveau potentiel par G. Kirchhoff, dans son Mémoire : *Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. LXXVIII, p. 506; 1849. — *Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 49).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

corps. Voyons maintenant comment elle se distribue dans les régions voisines de la surface par laquelle le métal confine à un autre métal, homogène, lui aussi, jusqu'au voisinage de ses limites.

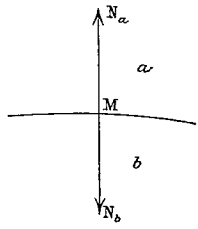
Nous admettrons qu'en un point M du corps a, situé à une distance l, inférieure à $(\lambda + \mu)$ de la surface qui sépare le corps a du corps b, surface dont le rayon de courbure est supposé très grand par rapport à $(\lambda + \mu)$, Θ et $\Delta\Theta$ ont des valeurs qui dépendent seulement de la nature des deux corps a et b et de la distance l. Nous désignerons ces valeurs par $\Theta(a, b, l)$ et $\Delta\Theta(a, b, l)$. Il en résulte qu'une surface parallèle à la surface de séparation des deux corps a et b est à la fois une surface de niveau et une surface d'égale densité électrique. La densité électrique y a une valeur $\rho(a, b, l)$ qui, elle aussi, dépend uniquement de la nature des deux corps a et b et de la distance l de la surface considérée à la surface de séparation.

Lorsque l égale ou surpasse $(\lambda + \mu)$, $\rho(a, b, l)$ prend la valeur o et $\Theta(a, b, l)$ prend la valeur Θ_a, qui dépend uniquement de la nature du corps a.

La surface de séparation des deux corps a et b peut-elle renfermer une distribution électrique superficielle?

Par un point M de cette surface (*fig.* 89), menons une nor-

Fig. 89.



male N_a vers l'intérieur du corps a, et une normale N_b vers l'intérieur du corps b. S'il existe au point M une distribution superficielle, elle a pour densité

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial N_a} + \frac{\partial V}{\partial N_b}\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Mais la condition (2) donne

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial N_a}\Theta(a, b, o),$$

$$\frac{\partial V}{\partial N_b} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial N_b}\Theta(b, a, o);$$

on a donc

$$\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial N_a}\Theta(a, b, o) + \frac{\partial}{\partial N_b}\Theta(b, a, o)\right].$$

D'ailleurs, par hypothèse (Liv. IV, Chap. II), les dérivées partielles du premier ordre de la quantité Θ sont continues, même à la traversée de la surface de contact de deux conducteurs. On a donc

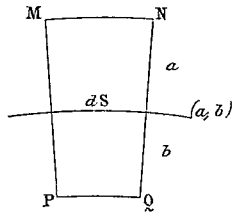
$$\sigma = o.$$

Il n'y a pas d'électricité sur la surface de séparation a, b; il y en a seulement au voisinage de cette surface.

Nous avons vu comment l'électricité était distribuée à l'intérieur du corps a au voisinage du corps b; elle est distribuée d'une manière analogue à l'intérieur du corps b au voisinage du corps a; l'ensemble de ces deux distributions possède une propriété remarquable.

Prenons un élément dS de la surface de séparation (a, b) (*fig.* 90); au contour de cet élément, circonscrivons un petit cy-

Fig. 90.



lindre, normal à la surface, et limitons-le, de part et d'autre de la surface (a, b), par deux bases MN, PQ, parallèles à la surface (a, b), et dont la distance à cette surface dépasse un peu $(\lambda + \mu)$.

A ce petit cylindre, appliquons les lemmes de Gauss.

Pour tout élément superficiel $d\omega$ de la partie latérale du petit cylindre, on a $\frac{\partial V}{\partial N} = o$, puisque les générations de ce petit cylindre

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sont normales aux surfaces parallèles à (a, b), qui sont les surfaces de niveau. Pour tout élément superficiel des deux bases MN, PQ, qui limitent ce petit cylindre, nous avons $\frac{\partial V}{\partial N} = 0$, puisque, à une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ de la surface (a, b), Θ, et par conséquent V, ne varient plus. Nous avons donc, pour le petit cylindre tout entier,

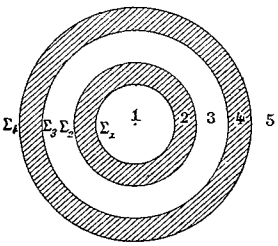
$$S \frac{\partial V}{\partial N} d\omega = 0,$$

ce qui prouve qu'il renferme autant d'électricité positive que d'électricité négative.

Ainsi, *l'électricité distribuée au voisinage de la surface de contact de deux métaux homogènes forme une couche double, lorsque l'équilibre électrique est établi* (1).

Ces remarques vont nous permettre d'expliquer théoriquement une expérience, due à M. Pellat (2), par laquelle on peut, dans les cours, mettre en évidence l'existence de la différence de niveau

Fig. 91.



potentiel au contact de deux métaux. L'expérience en question se fait ordinairement avec un condensateur à plateaux. Pour en faire la théorie, nous remplacerons le condensateur à plateaux par un condensateur sphérique.

Imaginons quatre sphères concentriques Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 (*fig.* 91).

(1) *Voyez* H. VON HELMHOLTZ, *Studien über elektrische Grenzschichten* (*Wiedemann's Annalen*, t. VII, p. 337; 1879. — *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 885). — P. DUHEM, *Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires;* Ire Partie, *De la pression électrique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. V, p. 97; 1888).

(2) PELLAT, *Différence de potentiel des couches électriques qui recouvrent deux métaux au contact* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 5; 1881).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Elles partagent l'espace en cinq régions, que nous numérotons, à partir du centre, 1, 2, 3, 4, 5. La région 5 est illimitée.

Nous supposerons la région 2 remplie d'une matière conductrice a, la région 4 remplie d'une autre matière conductrice b, et les régions 1, 3 et 5 remplies d'un même isolant i.

Supposons que, dans une première expérience, les surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 ne portent que leur électricité naturelle et que les deux sphères soient isolées l'une de l'autre. Il est aisé de voir que le système sera en équilibre.

Les diverses surfaces sphériques portant chacune une couche double, la fonction potentielle, en tout point de la région 5, aura la valeur

$$V_5 = 0.$$

Au moment où l'on franchit la surface Σ_4, la fonction potentielle commence à varier de telle façon que l'on ait constamment

$$\varepsilon V + \Theta = \Theta(b, i, 0).$$

Si l'on pose

$$K_b = \frac{\Theta(b, i, 0) - \Theta(b, i, \lambda + \mu)}{\varepsilon},$$

à une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ de la surface Σ_4, dans la région 4, on aura

$$V_4 = K_b.$$

Au moment où l'on approchera de la surface Σ_3, V variera de nouveau pour atteindre, une fois cette surface franchie, la valeur

$$V_3 = 0.$$

Si l'on pose

$$K_a = \frac{\Theta(a, i, 0) - \Theta(a, i, \lambda + \mu)}{\varepsilon},$$

dans la région 2, à une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ des surfaces Σ_1 et Σ_2, on aura

$$V_2 = K_a.$$

Enfin, dans la région 1, on aura

$$V_1 = 0.$$

Supposons maintenant que, dans une seconde expérience, l'on mette les deux sphères conductrices 2 et 4 en communication

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

l'une avec l'autre par un fil métallique quelconque, et la sphère 2 en communication avec le sol. On devra alors avoir, pour l'équilibre,

$$V'_4 - V'_2 = \frac{\Theta(a, i, \lambda + \mu) - \Theta(b, i, \lambda + \mu)}{\varepsilon}.$$

Pour que la distribution ne fût pas changée, il faudrait que l'on eût

$$V'_2 = V_2, \qquad V'_4 = V_4$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Theta(a, i, \lambda + \mu) - \Theta(b, i, \lambda + \mu)}{\varepsilon} = K_b - K_a,$$

ce qui entraînerait

$$\Theta(a, i, o) = \Theta(b, i, o),$$

condition qui ne sera pas réalisée, en général, si les deux métaux a et b ne sont pas identiques.

Si cette condition n'est pas réalisée, l'état d'équilibre qui s'établit dans la seconde expérience n'est pas identique à celui qui s'établit dans la première. Il est aisé de voir que, dans le nouvel état d'équilibre, les deux surfaces Σ_1 et Σ_4 ne portent que leur électricité naturelle; mais les deux surfaces Σ_2 et Σ_3 portent, outre leur électrisation naturelle, des quantités d'électricité libre égales et de signe contraire. Soient Q_a la charge distribuée sur la surface Σ_2 et $-Q_a$ la charge distribuée sur la surface Σ_3. Soient R_2, R_3 les rayons de ces surfaces. On verra aisément que l'on a

$$V'_4 = V_4 = K_b,$$

$$V'_2 = K_a + Q_a\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right).$$

On a donc

$$V'_4 - V'_2 = K_b - K_a - Q_a\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right),$$

ou bien

$$Q_a\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = \frac{\Theta(b, i, o) - \Theta(a, i, o)}{\varepsilon}.$$

Supposons que l'on enlève la sphère extérieure et que l'on mesure la charge totale de la sphère intérieure, charge qui se réduit à Q_a, puisque, outre Q_a, la sphère intérieure ne renferme que des couches doubles. On obtiendra ainsi une détermination expérimentale de

$$\Theta(b, i, o) - \Theta(a, i, o).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On voit que ce procédé ne détermine pas la valeur de

$$\Theta(b, i, \lambda + \mu) - \Theta(a, i, \lambda + \mu),$$

qui serait, dans certaines questions, la plus intéressante à connaître. Cet inconvénient se retrouve dans les diverses méthodes de détermination de la différence de niveau potentiel de deux métaux en contact, comme l'ont signalé Maxwell (1) et M. Pellat (2).

La méthode précédente déterminant seulement la différence de niveau potentiel des couches électriques superficielles distribuées sur les deux métaux, on conçoit sans peine que la moindre altération superficielle d'un de ces métaux fasse varier la quantité déterminée par ce procédé; au contraire, la différence de niveau potentiel entre les points intérieurs aux deux métaux n'est point modifiée par cette altération.

§ 2. — Quelques théorèmes sur l'attraction des couches électriques doubles.

Les considérations développées au paragraphe précédent achèvent de nous montrer l'importance des couches électriques doubles que nous avions déjà eu à considérer au Chapitre II. Aussi est-il indispensable d'établir ici quelques propositions très simples sur l'attraction de semblables couches.

Ces théorèmes reposent sur l'expression de la fonction potentielle d'une couche électrique double, expression que nous allons établir tout d'abord.

Considérons une couche double de très petite épaisseur $(\lambda + \mu)$. Soit S la surface terminale qui limite cette couche double; la surface S porte de l'électricité dont la densité superficielle est σ; à l'intérieur de la couche double, la densité solide de l'électricité a une valeur ρ. Les quantités σ et ρ ont, en général, des valeurs très grandes de l'ordre de $\frac{1}{\lambda + \mu}$.

Prenons sur la surface S un élément dS. Par le contour de cet

(1) MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme,* traduit par Seligmann-Lui, t. I, p. 324.

(2) PELLAT, *Différence de potentiel des couches électriques qui recouvrent deux métaux au contact* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIV, p. 8; 1881).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

élément, menons des normales à la surface S; elles découpent dans la couche double un petit volume A, sensiblement cylindrique, de base dS et de hauteur $(\lambda + \mu)$. Soit dv un élément de ce volume.

Ce volume doit renfermer autant d'électricité positive que d'électricité négative, en sorte que l'on doit avoir

$$\sigma\, d\mathrm{S} + \mathbf{S}\, \rho\, dv = 0. \tag{1}$$

Cherchons la fonction potentielle de ce petit volume en un point M qui lui est extérieur. Cette fonction aura pour valeur

$$\mathrm{V} = \frac{\sigma}{r}\, d\mathrm{S} + \mathbf{S}\, \frac{\rho}{r'}\, dv,$$

r étant la distance de l'élément dS au point M, r' la distance de l'élément dv au même point.

Soient l la distance de l'élément dS à l'élément dv, n_i la direction de la ligne qui va du premier au second. Nous aurons

$$r' = [r^2 + l^2 + 2rl\cos(r, n_i)]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\mathrm{V} = \frac{\sigma}{r}\, d\mathrm{S} + \frac{1}{r}\, \mathbf{S}\, \frac{\rho}{\left[1 + 2\frac{l}{r}\cos(r, n_i) + \frac{l^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}}\, dv.$$

Mais on a

$$\frac{1}{\left[1 - 2\frac{l}{r}\cos(r, n_i) + \frac{l^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{V}_0[\cos(r, n_i)] + \mathrm{V}_1[\cos(r, n_i)]\frac{l}{r} + \mathrm{V}_2[\cos(r, n_i)]\frac{l^2}{r^2} + \ldots,$$

$\mathrm{V}_n[\cos(r, n_i)]$ désignant le polynôme de Legendre de rang n.

Supposons que la distance r soit toujours très grande par rapport à $(\lambda + \mu)$. Remarquons que, ρ étant de l'ordre de $\frac{1}{\lambda + \mu}$, la quantité $\frac{\rho l}{r}$ est en général finie, mais que la quantité $\frac{\rho l^2}{r^2}$ est toujours extrêmement petite. Observons, enfin, que

$$\mathrm{V}_0[\cos(r, n_i)] = 1,$$
$$\mathrm{V}_1[\cos(r, n_i)] = \cos(r, n_i),$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et nous aurons

$$V = \frac{1}{r}\left(\sigma\, dS + \int\!\!\int \rho\, dv\right) - \frac{\cos(r, n_i)}{r^2}\int\!\!\int \rho\, l\, dv.$$

Si l'on tient compte de l'égalité (1), si l'on observe que

$$\frac{\cos(r, n_i)}{r^2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i},$$

si l'on pose enfin

$$\mathfrak{M}\, dS = \int\!\!\int \rho\, l\, dv, \tag{2}$$

on aura

$$V = \mathfrak{M}\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i}\, dS.$$

S'il s'agit de calculer la fonction potentielle, non plus du petit élément A, mais de la couche tout entière, nous aurons pour expression de cette fonction potentielle

$$V = \int\!\!\int \mathfrak{M}\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i}\, dS. \tag{3}$$

Cette expression n'est valable qu'autant que le point M, auquel se rapporte la fonction V, est à une distance de la surface S grande par rapport à $(\lambda + \mu)$.

$\mathfrak{M}$ sera nommé l'*intensité* de la couche double en un point de l'élément dS.

Supposons que la couche double considérée soit celle qui se trouve, dans l'état d'équilibre, à la surface de séparation d'un corps conducteur A et d'un isolant o. Dans l'égalité (2), nous devrons faire

$$dv = dl\, dS,$$
$$\rho = \rho(A, o, l),$$

et $\mathfrak{M}$ sera défini par l'égalité

$$\mathfrak{M}(A, o) = \int_0^{\lambda+\mu} l\, \rho(A, o, l)\, dl,$$

ou bien

$$\mathfrak{M}(A, o) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\lambda+\mu} l\, \Delta\Theta(A, o, l)\, dl. \tag{4}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette égalité nous montre que *la quantité* $\mathfrak{M}(A, o)$ *est entièrement définie lorsqu'on connaît la nature du métal* A *et de l'isolant* o.

Considérons de même la couche double qui se forme, dans l'état d'équilibre électrique, à la surface de séparation de deux métaux A et B. Supposons que la direction, désignée dans ce qui précède par n_i, soit la normale n_A vers l'intérieur du métal. Nous aurons encore

$$dv = dS\, dl;$$

l devra varier de $-(\lambda+\mu)$ à $+(\lambda+\mu)$; l variant de $-(\lambda+\mu)$ à o, ρ prendra la détermination $\rho(B, A, -l)$; au contraire, l variant de o à $(\lambda+\mu)$, ρ prendra la détermination $\rho(A, B, l)$. On aura donc

$$\mathfrak{M} = \int_{-(\lambda+\mu)}^{0} l\,\rho(B, A, -l)\,dl + \int_{0}^{\lambda+\mu} l\,\rho(A, B, l)\,dl,$$

ou bien

$$\mathfrak{M} = \int_{0}^{\lambda+\mu} l\,\rho(A, B, l)\,dl - \int_{0}^{\lambda+\mu} l\,\rho(B, A, l)\,dl,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(7)\qquad \mathfrak{M}(A, B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_{0}^{\lambda+\mu} l\,\Delta\Theta(A, B, l)\,dl - \int_{0}^{\lambda+\mu} l\,\Delta\Theta(B, A, l)\,dl\right].$$

Cette égalité nous montre encore que *la quantité* $\mathfrak{M}(A, B)$ *est entièrement définie lorsqu'on connaît la nature des deux métaux* A *et* B.

Ces deux quantités, $\mathfrak{M}(A, o)$, $\mathfrak{M}(A, B)$, sont encore susceptibles d'une autre expression.

Considérons d'abord la quantité $\mathfrak{M}(A, o)$. La quantité Θ varie très rapidement, dans le sens de la normale à la surface S; au contraire, ses variations sont très lentes suivant une parallèle au plan tangent à cette surface. On peut donc réduire sensiblement $\Delta\Theta(A, o, l)$ à $\frac{\partial^2\Theta(A, o, l)}{\partial l^2}$.

On aura donc

$$\mathfrak{M}(A, o) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{0}^{\lambda+\mu} l\,\frac{\partial^2\Theta(A, o, l)}{\partial l^2}\,dl.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Une intégration par parties transforme cette égalité en

$$\mathfrak{M}(A, o) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[l\frac{\partial\Theta(A, o, l)}{\partial l}\right]_0^{\lambda+\mu} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta(A, o, l)}{\partial l}\,dl.$$

Si l'on observe que

$$\left[\frac{\partial\Theta(A, o, l)}{\partial l}\right]_{l=\lambda+\mu} = o$$

et si l'on intègre le dernier terme, on trouvera

$$(8)\qquad \mathfrak{M}(A, o) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\Theta(A, o, o) - \Theta(A, o, \lambda+\mu)].$$

D'une manière analogue, l'égalité (7) peut se transformer en

$$\mathfrak{M}(A, B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[l\frac{\partial\Theta(A, B, l)}{dl} - l\frac{\partial\Theta(B, A, l)}{dl}\right]_0^{\lambda+\mu} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\int_0^{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta(A, B, l)}{dl}dl - \int_0^{\lambda+\mu}\frac{\partial\Theta(B, A, l)}{dl}dl\right]_0^{\lambda+\mu}$$

Si l'on observe que

$$\left[\frac{\partial\Theta(A, B, l)}{\partial l}\right]_{l=\lambda+\mu} = o,$$
$$\left[\frac{\partial\Theta(B, A, l)}{\partial l}\right]_{l=\lambda+\mu} = o,$$
$$\Theta(A, B, o) = \Theta(B, A, o),$$

l'égalité précédente deviendra

$$(9)\qquad \mathfrak{M}(A, B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\Theta(B, A, \lambda+\mu) - \Theta(A, B, \lambda+\mu)].$$

Revenons à l'expression de la fonction potentielle d'une couche double quelconque, donnée par l'égalité (5).

Supposons que la surface S soit fermée et que la couche double ait la même constitution en tous les points de cette surface. La quantité $\mathfrak{M}$ aura alors la même valeur en tous les points de la surface S, et l'égalité (5) pourra s'écrire

$$V = \mathfrak{M}\int\!\!\int_S \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}\,dS.$$

Mais les lemmes de Gauss nous apprennent qu'en tout point M,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

extérieur à la surface S, on a

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS = 0,$$

et qu'en tout point M, intérieur à la surface S, on a

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS = 4\pi.$$

On a donc en tout point M, *extérieur à la surface* S, *et dont la distance à cette surface est grande par rapport à* λ,

$$V = 0 \tag{10}$$

et en tout point M, *intérieur à la surface* S, *et dont la distance à cette surface est grande par rapport à* λ,

$$V = 4\pi \mathfrak{M}. \tag{11}$$

Faisons quelques applications de ces égalités (10) et (11).

1° Considérons un conducteur homogène. La distribution naturelle forme sur ce conducteur une couche double homogène (*voir* p. 376) pour laquelle $\mathfrak{M}$ est donné par l'une des égalités (6) ou (8). La fonction potentielle de cette distribution naturelle aura pour valeur, à l'extérieur du conducteur, la valeur 0 et, à l'intérieur du conducteur, la valeur

$$4\pi \mathfrak{M}(A, 0) = \frac{1}{\varepsilon}[\Theta(A, 0, 0) - \Theta(A, 0, \lambda + \mu)].$$

C'est ce que nous avions déjà trouvé précédemment [Chap. II, égalités (5) et (6)].

2° Considérons un conducteur hétérogène, formé de deux métaux A et B. Si nous désignons par $S_{A,0}$, $S_{B,0}$ les deux portions de surface fermée qui limitent le conducteur, et par $S_{A,B}$ la surface de contact des deux métaux, l'égalité (5) pourra s'écrire plus explicitement

$$V = \mathfrak{M}(A, 0) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \mathfrak{M}(B, 0) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} + \mathfrak{M}(A, B) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_A} dS_{A,B}.$$

Cette expression peut se simplifier, au moyen des égalités (8) et (9).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on observe que l'on a

$$\Theta(A, o, \lambda + \mu) = \Theta(A, B, \lambda + \mu) = \Theta(A),$$
$$\Theta(B, o, \lambda + \mu) = \Theta(B, A, \lambda + \mu) = \Theta(B),$$

$$\mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_A} dS_{A,B} + \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_B} dS_{A,B} = o,$$

on pourra écrire

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} V = {} & \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\Theta(A, o, o) \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \Theta(B, o, o) \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Theta(A) \left[\mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_A} dS_{A,B} \right] \\ & - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \Theta(B) \left[\mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} + \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_B} dS_{A,B} \right]. \end{aligned} \right.$$

Considérons d'abord un point extérieur au conducteur. Les lemmes de Gauss nous donnent

$$\mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_A} dS_{A,B} = o,$$

$$\mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} + \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_B} dS_{A,B} = o,$$

en sorte que l'égalité (12) se réduit à

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left[\Theta(A, o, o) \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \Theta(B, o, o) \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} \right].$$

Posons

$$\mu = \frac{\Theta(A, o, o) - \Theta(B, o, o)}{2}$$

et

$$\mathfrak{M} = \frac{\Theta(A, o, o) - \mu}{4\pi\varepsilon} = \frac{\mu - \Theta(B, o, o)}{4\pi\varepsilon}.$$

Si nous observons que, pour tout point extérieur au conducteur, on a

$$\mu \left[\mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \mathbf{S} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} \right] = o,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

nous pourrons écrire

$$V = \mathfrak{M} \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} - \mathfrak{M} \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0}.$$

La distribution naturelle de deux métaux en contact agit donc sur les points extérieurs au conducteur comme deux couches doubles distribuées sur les deux surfaces par lesquelles les deux métaux en contact confinent à l'isolant, ces deux couches doubles ayant des intensités égales en valeur absolue, mais de signe contraire.

L'égalité

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} = 0$$

permet de transformer l'égalité précédente en

$$V = 2\,\mathfrak{M} \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0}.$$

Il est facile de voir que $\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0}$ est l'angle positif ou négatif ω sous lequel, du point M, on voit la face confinant au métal A de la surface $S_{A,0}$.

Si les deux métaux sont en contact par une surface $S_{A,B}$ très petite, la surface $S_{A,0}$ est sensiblement fermée; on a

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} = 0$$

et

$$V = 0.$$

Donc, lorsque deux métaux sont en contact par une surface fort petite, leur distribution naturelle exerce à l'extérieur une action fort petite, ce qui devait se prévoir d'après les théorèmes démontrés pour un conducteur formé d'un seul métal.

Considérons maintenant un point intérieur au conducteur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si ce point est à l'intérieur du conducteur A, on a

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_A} dS_{A,B} = 4\pi,$$

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} + \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_B} dS_{A,B} = 0,$$

et l'égalité (12) devient

$$(13)\qquad \left\{ V(M_A) + \varepsilon\,\Theta(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\Theta(A,0,0) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \Theta(B,0,0) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} \right]. \right.$$

De même, pour un point M_B intérieur au métal B, elle donne

$$(13\,bis)\qquad \left\{ V(M_B) + \varepsilon\,\Theta(B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\Theta(A,0,0) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \Theta(B,0,0) \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} \right]. \right.$$

Les seconds membres de ces égalités ne sont évidemment pas constants. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que $\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0}$ et $\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0}$ sont les angles sous lesquels, du point M, on voit les faces internes des surfaces $S_{A,0}$, $S_{B,0}$. Or, pour que la distribution naturelle sur les deux métaux A et B au contact fût une distribution d'équilibre, il faudrait que l'on eût

$$V(M_A) + \varepsilon\,\Theta(A) = V(M_B) + \varepsilon\,\Theta(B) = C,$$

C étant une constante.

Les deux métaux au contact devront donc s'électriser.

Si l'on observe que

$$\int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} + \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{B,0} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on voit sans peine que l'électricité *communiquée* devra se distribuer de telle sorte que l'on ait, à l'intérieur du conducteur,

$$\frac{\Theta(A, o, o) - \Theta(B, o, o)}{4\pi\varepsilon} \int\!\!\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i} dS_{A,0} = C.$$

L'étude de cette distribution, faite par un moyen quelconque, ne pourra jamais faire connaître que la quantité

$$\Theta(A, o, o) - \Theta(B, o, o),$$

et non la quantité

$$\Theta(A) - \Theta(B).$$

§ 3. — Les courants permanents dans les conducteurs métalliques hétérogènes.

Les considérations précédentes s'appliquent seulement au cas où l'équilibre électrique est établi sur des conducteurs métalliques hétérogènes. Nous allons maintenant étudier le cas où ces conducteurs sont traversés par des courants permanents.

Pour obtenir les lois fondamentales du mouvement permanent de l'électricité dans les conducteurs métalliques hétérogènes, nous allons leur étendre la première hypothèse fondamentale relative au régime permanent, hypothèse qui, dans le cas des conducteurs homogènes, n'est qu'une autre forme de la loi d'Ohm [Chap. IV, égalité (2)].

Considérons l'ensemble des variables, autres que les flux électriques, qui définissent l'état du système à l'instant t (ce que nous nommons le *système supposé sans courant*). A ce système supposé sans courant on peut appliquer les conséquences du principe de Carnot; une transformation virtuelle quelconque de ce système correspond à un certain travail non compensé.

Soient (x, y, z) un point du système et $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ un point voisin. Si une charge électrique dq passait du premier point au second, un certain travail non compensé serait engendré dans le système. Désignons-le par $d\tau$. Désignons par $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ les composantes de la force électromotrice au point (x, y, z). *Par hypothèse,* on a

$$d\tau = (\mathcal{E}_x \delta x + \mathcal{E}_y \delta y + \mathcal{E}_z \delta z)\, dq, \tag{14}$$

quels que soient δx, δy, δz.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or on peut calculer $d\tau$. Le système supposé sans courant a un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$. Le changement de position de la charge électrique dq ne déplace aucune partie du système et, par conséquent, n'entraîne aucun travail externe. On a donc

$$d\tau = -\delta\mathcal{F}. \tag{15}$$

D'ailleurs, on a [Liv. IV, Chap. II, égalité (15)]

$$\mathcal{F} = E(\Upsilon - T\Sigma) + W + \Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n,$$

les diverses lettres qui figurent dans cette formule ayant une signification qui a été expliquée à l'endroit cité. Comme le déplacement de la charge dq n'entraîne aucun changement dans l'état physique ou chimique des divers conducteurs du système, on voit que la variation subie par le potentiel thermodynamique interne se réduit à

$$\left\{\begin{aligned} \delta\mathcal{F} = {} & \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dq, \\ & + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Theta}{\partial x}\delta y + \frac{\partial\Theta}{\partial x}\delta z\right) dq. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Les égalités (14), (15) et (16) devant avoir lieu, quels que soient δx, δy, δz, donnent

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \\ \mathcal{E}_y &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \\ \mathcal{E}_z &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial\Theta}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Ces égalités donnent les composantes de la force électromotrice en un point d'un conducteur métallique hétérogène dont la constitution varie d'une manière continue et qui est traversé par des courants permanents. Les termes $-\frac{\partial\Theta}{\partial z}$, $-\frac{\partial\Theta}{\partial y}$, $-\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ représentent la correction qui doit être apportée à la loi d'Ohm dans le cas où le conducteur n'est pas homogène.

Si nous désignons par $\mathcal{R}$ la résistance spécifique du conducteur au point de coordonnées x, y, z et par u, v, w les composantes

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du flux électrique en ce point, les égalités (17) deviendront

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}u = -\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \mathcal{R}v = -\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \mathcal{R}w = -\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{cases}$$

Voyons comment est distribuée l'électricité à l'intérieur d'un semblable conducteur.

Divisons les deux membres de chacune des équations (18) par $\mathcal{R}$; différentions les deux membres de la première par rapport à x, les deux membres de la deuxième par rapport à y, les deux membres de la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en observant que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous trouvons

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathcal{R}}(\varepsilon\Delta V + \Delta\Theta) \\ \quad + \dfrac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x}\dfrac{\partial \frac{1}{\mathcal{R}}}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial y}\dfrac{\partial \frac{1}{\mathcal{R}}}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial z}\dfrac{\partial \frac{1}{\mathcal{R}}}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Si ρ désigne la densité électrique au point (x, y, z), on a

$$\Delta V = -4\pi\rho,$$

et les égalités (18) et (19) donnent

$$(20)\qquad \rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Delta\Theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(u\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z}\right),$$

tandis que, dans l'état d'équilibre, la densité électrique au même point aurait pour valeur

$$\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Delta\Theta.$$

A l'intérieur d'un conducteur métallique hétérogène parcouru par des courants permanents, la densité n'a pas la même valeur que dans l'état d'équilibre. C'est seulement à l'inté-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rieur d'un conducteur homogène que ces deux valeurs deviennent égales entre elles, et égales à 0.

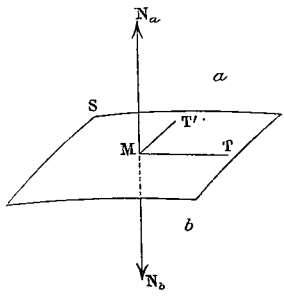
Considérons maintenant une surface de discontinuité séparant deux régions a et b où le conducteur a des propriétés différentes (*fig.* 92).

Nous savons qu'en tout point M de cette surface on doit avoir

$$(21)\quad \left\{ \begin{array}{l} u_a \cos(N_a, x) + v_a \cos(N_a, y) + w_a \cos(N_a, z) \\ + u_b \cos(N_b, x) + v_b \cos(N_b, y) + w_b \cos(N_b, z) = 0, \end{array} \right.$$

ou bien, en désignant par i_a la composante suivant N_a du flux à

Fig. 92.



l'intérieur du conducteur a en un point infiniment voisin du point M; par i_b la composante suivant N_b du flux à l'intérieur du conducteur b en un point infiniment voisin du point M,

$$(21\ bis)\qquad i_a + i_b = 0.$$

La composante normale du flux a la même valeur de part et d'autre de la surface.

En est-il de même des composantes tangentielles?

Par le point M, menons deux directions T, T′, rectangulaires entre elles et situées dans le plan tangent à la surface S. En un point du conducteur a voisin du point M, le flux f_a a pour composantes, suivant MT, MT′, t_a et t'_a; en un point du conducteur b voisin du point M, le flux f_b a pour composantes, suivant les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mêmes droites, t_b et t'_b. Les égalités (18) donnent

$$\mathcal{R}_a t_a = -\varepsilon \frac{\partial V_a}{\partial T} - \frac{\partial \Theta_a}{\partial T},$$

$$\mathcal{R}_a t'_a = -\varepsilon \frac{\partial V_a}{\partial T'} - \frac{\partial \Theta_a}{\partial T'},$$

$$\mathcal{R}_b t_b = -\varepsilon \frac{\partial V_b}{\partial T} - \frac{\partial \Theta_b}{\partial T},$$

$$\mathcal{R}_b t'_b = -\varepsilon \frac{\partial V_b}{\partial T'} - \frac{\partial \Theta_b}{\partial T'}.$$

Les propriétés bien connues des dérivées premières de la fonction potentielle donnent

$$\frac{\partial V_a}{\partial T} = \frac{\partial V_b}{\partial T}, \qquad \frac{\partial V_a}{\partial T'} = \frac{\partial V_b}{\partial T'}.$$

D'autre part, par hypothèse, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction Θ varient d'une manière continue, même au passage d'une surface de discontinuité, ce qui donne

$$\frac{\partial \Theta_a}{\partial T} = \frac{\partial \Theta_b}{\partial T}, \qquad \frac{\partial \Theta_a}{\partial T'} = \frac{\partial \Theta_b}{\partial T'}.$$

On a donc

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathcal{R}_a t_a - \mathcal{R}_b t_b = 0, \\ \mathcal{R}_a t'_a - \mathcal{R}'_b t'_b = 0. \end{cases}$$

Les flux électriques, de part et d'autre d'une surface de discontinuité, sont dans un même plan avec la normale à la surface de discontinuité. Les projections de ces deux flux sur le plan tangent à la surface ont la même direction.

De la comparaison des égalités (21 *bis*) et (22) on déduit l'égalité

$$\mathcal{R}_a \operatorname{tang}(f_a, N_a) + \mathcal{R}_b \operatorname{tang}(f_b, N_b) = 0,$$

qui indique comment varie la direction du flux électrique au passage d'une surface de discontinuité.

L'ensemble des propositions que nous venons de démontrer a reçu de Maxwell (1) le nom de *lois de la réfaction du flux électrique au passage d'une surface de discontinuité.*

(1) MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit par G. Seligmann-Lui, t. I, p. 492. Paris, 1885.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Revenons à l'équation (21), qui peut s'écrire, en vertu des égalités (18),

$$\frac{1}{\mathcal{R}_a}\frac{\partial}{\partial N_a}(\varepsilon V+\Theta)+\frac{1}{\mathcal{R}_b}\frac{\partial}{\partial N_b}(\varepsilon V+\Theta)=0, \tag{23}$$

ou bien

$$\frac{\varepsilon}{\mathcal{R}_a}\left(\frac{\partial V}{\partial N_a}+\frac{\partial V}{\partial N_b}\right)+\frac{1}{\mathcal{R}_a}\left(\frac{\partial \Theta_a}{\partial N_a}+\frac{\partial \Theta_b}{\partial N_b}\right)+\left(\frac{1}{\mathcal{R}_b}-\frac{1}{\mathcal{R}_a}\right)\frac{\partial}{\partial N_b}(\varepsilon V+\Theta)=0.$$

Si l'on désigne par σ la densité superficielle au point M de la surface de discontinuité, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial N_a}+\frac{\partial V}{\partial N_b}=-4\pi\sigma,$$

$$\frac{\partial \Theta_a}{\partial N_a}+\frac{\partial \Theta_b}{\partial N_b}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial N_b}(\varepsilon V+\Theta)=-\mathcal{R}_b i_b=-\mathcal{R}_b i_a,$$

et l'égalité précédente deviendra

$$\sigma=\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\mathcal{R}_a-\mathcal{R}_b)i_a=\frac{1}{4\pi\varepsilon}(\mathcal{R}_b-\mathcal{R}_a)i_b. \tag{24}$$

Ainsi, *à la surface de séparation de deux conducteurs métalliques a et b, traversés par des courants permanents, existe une distribution électrique superficielle dont l'intensité en chaque point est proportionnelle à l'excès de la résistance du conducteur a sur la résistance du conducteur b et à la composante, suivant la normale à la surface, du flux qui pénètre dans le conducteur a.*

Des considérations analogues s'appliquent à la surface de séparation d'un conducteur a et de l'isolant i. Dans ce cas, le flux électrique est nul en tout point de l'isolant i, et de plus on a, en tout point de la surface de séparation,

$$u_a\cos(N_a,x)+v_a\cos(N_a,y)+w_a\cos(N_a,z)=0,$$

ce qui donne, en vertu des égalités (18),

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial N_a}+\frac{\partial \Theta}{\partial N_a}=0. \tag{25}$$

La densité électrique en un point de la surface qui sépare un conducteur d'un isolant est donc, en désignant par N_e la normale

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

extérieure au conducteur,

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N_e} + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial \Theta}{\partial N_a}. \tag{26}$$

Lorsque la constitution du conducteur est connue, l'équation (19) devient une équation aux dérivées partielles qui, jointe aux conditions aux limites (23) et (25), détermine la fonction V. Cette fonction une fois déterminée, les égalités (18) déterminent les composantes du flux électrique en chaque point.

Appliquons les considérations qui précèdent à un conducteur traversé par des courants permanents, dans lequel deux métaux a et b, homogènes jusqu'à une petite distance μ des surfaces terminales, sont en contact l'un avec l'autre.

1° A une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ des surfaces qui limitent chacun des deux métaux, il n'y a pas d'électricité libre répandue à l'intérieur de ces métaux; les équations du mouvement de l'électricité sont celles qui sont données par la loi d'Ohm.

2° Au voisinage de la surface qui sépare les deux métaux a et b, il y a de l'électricité répandue à l'intérieur de chacun des deux métaux. La distribution de cette électricité dépend de l'intensité du courant qui traverse le conducteur.

3° Sur la surface même, il y a une distribution superficielle dont la densité a pour valeur

$$\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\mathcal{R}_a(0) - \mathcal{R}_b(0)]\, i_a, \tag{27}$$

$\mathcal{R}_a(l)$, $\mathcal{R}_b(l)$ étant les résistances spécifiques des métaux a et b, à une distance l de leur surface de contact.

L'électricité ainsi distribuée sur la surface de contact de deux métaux traversés par des courants permanents ne forme plus une couche double, comme dans l'état d'équilibre.

Pour démontrer ce théorème, convenons de représenter par $\Theta(a, b, l)$, $\mathcal{R}(a, b, l)$, $i(a, b, l)$ les valeurs de Θ_a, $\mathcal{R}_a$, i_a, en un point du conducteur a situé à la distance l de la surface qui sépare le conducteur a du conducteur b. En ce point, la densité électrique

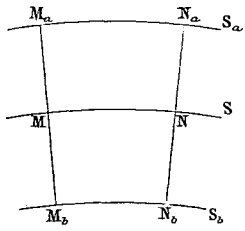
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

a pour valeur, d'après les égalités (20) et (18),

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}\rho(a,b,l) = {}& \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Delta\Theta(a,b,l)\\ & - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{\mathcal{R}(a,b,l)}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{R}(a,b,l)}{\partial x}\,\frac{\partial[\varepsilon V + \Theta(a,b,l)]}{\partial x}\\ &+ \frac{\partial\mathcal{R}(a,b,l)}{\partial y}\,\frac{\partial[\varepsilon V + \Theta(a,b,l)]}{\partial y}\\ &+ \frac{\partial\mathcal{R}(a,b,l)}{\partial z}\,\frac{\partial[\varepsilon V + \Theta(a,b,l)]}{\partial z}\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Menons deux surfaces parallèles à la surface S (*fig.* 93), qui sépare les deux métaux a et b, ces deux surfaces étant situées à

Fig. 93.



une distance un peu supérieure à $(\lambda + \mu)$ de la surface S, l'une, S_a, à l'intérieur du conducteur a; l'autre, S_b, à l'intérieur du conducteur b. Sur la surface S, prenons un élément MN, d'aire dS. Par tous les points du contour de cet élément, menons des normales à la surface S. Ces normales détachent sur la surface S_a un élément M_aN_a et sur la surface S_b un élément M_bN_b. Cherchons la quantité d'électricité que renferme la surface fermée $M_aN_aM_bN_b$, en négligeant dans ce calcul le rapport de $(\lambda + \mu)$ aux rayons de courbure des surfaces S_a, S_b.

L'élément dS porte une quantité d'électricité qui a pour valeur, d'après l'égalité (27),

$$Q_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\mathcal{R}(a,b,0) - \mathcal{R}(b,a,0)]\,i(a,b,0).$$

La surface MNM_aN_a renferme, à son intérieur, une quantité d'électricité

$$Q_a = d\mathrm{S}\int_0^{\lambda+\mu}\rho(a,b,l)\,dl.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La surface MNM_bN_b renferme à son intérieur une quantité d'électricité

$$Q_b = dS \int_0^{\lambda+\mu} \rho(b, a, l)\, dl.$$

La quantité que nous voulons calculer a pour valeur

$$Q = Q_a + Q_b + Q_s.$$

Si l'on se reporte à l'égalité (28), on voit sans peine que l'on peut écrire

$$\rho(a, b, l) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\Delta\Theta(a, b, l) + i(a, b, l)\,\frac{\partial \mathcal{R}(a, b, l)}{\partial l}\right]$$

et de même

$$\rho(b, a, l) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\Delta\Theta(b, a, l) + i(b, a, l)\,\frac{\partial \mathcal{R}(b, a, l)}{\partial l}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned} Q = \frac{dS}{4\pi\varepsilon}\Bigg\{ & \int_0^{\lambda+\mu} [\Delta\Theta(a, b, l) + \Delta\Theta(b, a, l)]\, dl \\ & + \mathcal{R}(a, b, o)\, i(a, b, o) + \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial \mathcal{R}(a, b, l)}{dl}\, i(a, b, l)\, dl \\ & + \mathcal{R}(b, a, o)\, i(b, a, o) + \int_0^{\lambda+\mu} \frac{\partial \mathcal{R}(b, a, l)}{dl}\, i(b, a, l)\, dl \Bigg\}. \end{aligned}$$

La quantité

$$\frac{dS}{4\pi\varepsilon} \int_0^{\lambda+\mu} [\Delta\Theta(a, b, l) + \Delta\Theta(b, a, l)]\, dl$$

représente la quantité d'électricité que renfermerait la surface $M_aN_aM_bN_b$, si le système n'était parcouru par aucun courant. Or, dans ce cas, l'électricité distribuée au voisinage de la surface de contact des deux métaux formerait une couche double. La quantité précédente est donc égale à o.

Une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{\lambda+\mu} i(a, b, l)\, \frac{\partial \mathcal{R}(a, b, l)}{\partial l}\, dl \\ & = -\int_0^{\lambda+\mu} \mathcal{R}(a, b, l)\, \frac{\partial i(a, b, l)}{\partial l}\, dl \\ & \quad + i(a, b, \lambda+\mu)\, \mathcal{R}(a, b, \lambda+\mu) - i(a, b, o)\, \mathcal{R}(a, b, o). \end{aligned}$$

Mais il est facile de voir que l'intégrale qui figure au second membre est de l'ordre de $(\lambda+\mu)$ et peut, par conséquent, être

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

négligée. Nous avons donc

$$i(a,b,o)\,\mathcal{R}(a,b,o)+\int_0^{\lambda+\mu} i(a,b,l)\,\frac{\partial\mathcal{R}(a,b,l)}{\partial l}\,dl = i(a,b,\lambda+\mu)\,\mathcal{R}(a,b,\lambda+\mu)$$

et, semblablement,

$$i(b,a,o)\,\mathcal{R}(b,a,o)+\int_0^{\lambda+\mu} i(b,a,l)\,\frac{\partial\mathcal{R}(b,a,l)}{\partial l}\,dl = i(b,a,\lambda+\mu)\,\mathcal{R}(b,a,\lambda+\mu).$$

Si l'on remarque que

$$i(a,b,\lambda+\mu)=i(a,b,o),$$
$$i(b,a,\lambda+\mu)=i(b,a,o),$$

aux quantités près de l'ordre de $(\lambda+\mu)$, et que d'ailleurs, d'après l'égalité (21 *bis*),

$$i(a,b,o)+i(b,a,o)=o,$$

on voit que l'on aura

$$(19)\qquad \begin{cases} Q=\dfrac{dS}{4\pi\varepsilon}\,[\mathcal{R}(a,b,\lambda+\mu)-\mathcal{R}(b,a,\lambda+\mu)]\,i(a,b,o) \\ \quad=\dfrac{dS}{4\pi\varepsilon}\,[\mathcal{R}(b,a,\lambda+\mu)-\mathcal{R}(a,b,\lambda+\mu)]\,i(b,a,o). \end{cases}$$

Si le flux électrique n'est pas tangent à la surface de discontinuité, et si la résistance spécifique n'a pas la même valeur à l'intérieur des deux conducteurs, cette quantité ne peut pas être égale à o.

Il est intéressant de comparer les résultats que nous venons d'obtenir, en étudiant un conducteur métallique hétérogène parcouru par des courants permanents, et les résultats que nous avons obtenus au § 1, en étudiant l'équilibre électrique sur un semblable conducteur.

Lorsque l'équilibre électrique est établi sur le système qui renferme les deux métaux a et b, la densité électrique en un point de la surface de contact a pour valeur

$$\sigma=o,$$

et la quantité d'électricité que renferme le volume $M_aN_aM_bN_b$ a pour valeur

$$Q=o.$$

Lorsque le système est traversé par des courants uniformes, on

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

a, en vertu des égalités (17) et (19),

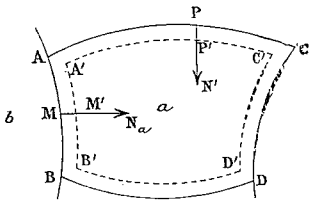
$$\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\mathcal{R}(a, b, o) - \mathcal{R}(b, a, o)]\, i(a, b, o),$$

$$Q = \frac{dS}{4\pi\varepsilon}[\mathcal{R}(a, b, \lambda + \mu) - \mathcal{R}(b, a, \lambda + \mu)]\, i(a, b, o).$$

L'analogie des expressions obtenues pour σ et Q dans le premier cas se retrouve dans le second.

Supposons que ABCD (*fig.* 94) soit un métal a homogène jus-

Fig. 94.



qu'à la distance $(\lambda + \mu)$ des surfaces qui le terminent. Par la face AB, ce métal confine à un autre conducteur métallique, formé d'un métal b, qui maintient tous les points de la surface AB à un même niveau potentiel V_1. De même, par la face CD, il confine à un autre conducteur métallique, formé d'un métal c, qui maintient tous les points de la surface CD à un même niveau potentiel V_2. La surface ABCD confine avec l'isolant. Proposons-nous de trouver la distribution des courants uniformes qui parcourent ce conducteur. C'est un problème que nous avons déjà traité en supposant le conducteur homogène jusqu'aux surfaces terminales.

Menons une surface A'B'C'D', située à l'intérieur du conducteur a, à une distance $(\lambda + \mu)$ de la surface ABCD.

Soit M un point de AB. Par ce point, menons une normale N_a à la surface AB vers l'intérieur du corps a. Elle rencontre en M' la surface A'B'. Soit V_1' le niveau potentiel en M', niveau que nous nous proposons de déterminer.

En un point situé entre M et M', à une distance l du point M, on a, en conservant les notations dont nous venons de faire usage,

$$\mathcal{R}(a, b, l)\, i(a, b, l) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial l} - \frac{\partial \Theta(a, b, l)}{\partial l}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, par conséquent,

$$\varepsilon(V_1 - V_1') + \Theta(a, b, o) - \Theta(a, b, \lambda + \mu) = -\int_0^{\lambda+\mu} \mathcal{R}(a, b, l)\, i(a, b, l)\, dl.$$

Le second membre est une quantité de l'ordre de $(\lambda + \mu)$; il est, par conséquent, négligeable; donc tous les points de la surface A'B' sont à un même niveau potentiel

$$V_1' = V_1 + \frac{1}{\varepsilon}[\Theta(a, b, o) - \Theta(a, b, \lambda + \mu)].$$

De même, tous les points de la surface C'D' sont à un même niveau potentiel

$$V_2' = V_2 + \frac{1}{\varepsilon}[\Theta(a, c, o) - \Theta(a, c, \lambda + \mu)].$$

Soit P un point de la surface AC, par laquelle le conducteur a confine à l'isolant. Par ce point, menons une normale PN' à la surface AC. Elle rencontre en P' la surface A'C'.

Au point P, on a

$$u\cos(N', x) + v\cos(N', y) + w\cos(N', z) = o.$$

A cause de la continuité des composantes du flux électrique, au point P', les quantités u', v', w' ne différeront de u, v, w que de quantités de l'ordre de $(\lambda + \mu)$. On aura donc sensiblement

$$u'\cos(N', x) + v'\cos(N', y) + w'\cos(N', z) = o.$$

Mais le point P' se trouve dans la région homogène du conducteur où la loi d'Ohm devient applicable; en sorte que la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{\partial V}{\partial N'} = o.$$

Cette égalité sera vérifiée en tout point de la surface A'C'B'D'.

Enfin, à l'intérieur de la surface fermée A'C'B'D', le conducteur étant homogène, on aura

$$\Delta V = o.$$

La fonction V est donc harmonique en tout point intérieur à la surface fermée A'C'D'B'; elle prend, sur les surfaces A'B', C'D', des valeurs données V_1', V_2'; sur la surface A'C'B'D', elle vérifie l'égalité

$$\frac{\partial V}{\partial N'} = o.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On voit donc que la détermination des courants qui circulent dans notre conducteur à une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ des surfaces terminales s'obtiendra précisément par la méthode analytique formée au Chapitre IV, pour déterminer les courants qui circulent dans un conducteur homogène jusqu'aux surfaces terminales. D'ailleurs, une fois les composantes du fluide électrique connues jusqu'à une distance $(\lambda + \mu)$ des surfaces terminales, il sera facile, par continuité, de connaître leurs valeurs jusqu'aux surfaces terminales.

Le résultat que nous venons d'obtenir montre que les conséquences auxquelles, aux Chapitres IV et V, nous avions été conduits en appliquant la loi d'Ohm à des conducteurs absolument homogènes, demeurent valables pour des conducteurs qui perdent leur homogénéité à une très petite distance des surfaces terminales.

§ 4. — Méthode de M. Pellat pour déterminer les différences de niveau potentiel de deux métaux au contact.

L'étude de l'équilibre électrique et du mouvement permanent de l'électricité sur des conducteurs métalliques hétérogènes comporterait encore l'examen d'un grand nombre de questions qu'il ne nous est pas possible d'aborder ici. Nous bornant donc aux principes exposés dans les paragraphes précédents, nous renverrons, pour l'examen des conséquences générales de ces principes, à un Mémoire que nous avons publié sur ce sujet (1).

Néanmoins, avant d'abandonner cet ordre de questions, nous allons exposer la méthode suivie par M. Pellat (2) pour déterminer la différence de niveau potentiel de deux conducteurs métalliques en contact.

Reprenons les deux conducteurs sphériques concentriques que nous avons déjà considérés au § 1, et que, dans la pratique, on

---

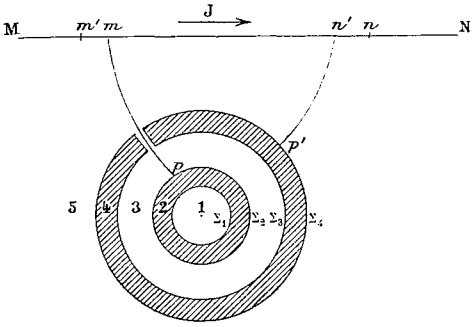
(1) P. DUHEM, *Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires;* première Partie, *De la pression électrique* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. V, p. 97; 1888); seconde Partie, *Des phénomènes électrocapillaires* (*Ibid.*, 3e série, t. VI, p. 183; 1889).

(2) H. PELLAT, *Différence de potentiel des couches électriques qui recouvrent deux métaux au contact* (*Annales de Chimie et de Physique,* 5e série, t. XXIV, p. 5; 1881).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

remplacera par deux plateaux parallèles. Imaginons qu'à ces sphères on adjoigne (*fig.* 95) un fil MN traversé par un courant. Du point m de ce fil, qui est formé d'un métal quelconque, part un autre fil mp, formé également d'un métal quelconque, et rejoi-

Fig. 95.



gnant en p la sphère conductrice 2, formée par la substance a. De même, la sphère conductrice 4, formée par la substance b, est reliée par un fil de nature quelconque $p'n$ au point n du fil MN.

Supposons le régime permanent établi sur le système.

Je dis en premier lieu que, dans ce régime permanent, il n'existe aucun courant en dehors du fil MN.

S'il existait dans le fil mp un courant dont l'intensité j diffère de 0, il entrerait, durant le temps dt dans la partie du système formée par le fil mp et le conducteur 2, une quantité d'électricité jdt qui n'en sortirait pas. Il faudrait donc que la distribution électrique fût modifiée sur la partie considérée du système. Ainsi, le fil mp n'est traversé par aucun courant, et il en de même du fil np'.

Peut-il arriver que des courants permanents existent soit dans la masse du conducteur 2, soit dans la masse du conducteur 4?

Ces conducteurs, nous venons de le voir, peuvent être regardés comme isolés.

Soient u, v, w les composantes du flux électrique en un point d'un système isolé formé par des conducteurs métalliques homogènes ou hétérogènes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous aurons, d'après les égalités (7),

$$\mathcal{R}u = -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta),$$

$$\mathcal{R}v = -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta),$$

$$\mathcal{R}w = -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta),$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathcal{R}(u^2 + v^2 + w^2) = -\left[u\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + v\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial y} + w\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial z}\right].$$

Intégrons les deux membres de cette équation pour l'espace occupé par l'ensemble des conducteurs 2 et 4, et nous aurons

$$\iiint \mathcal{R}(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\iiint\left[u\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + v\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial y} + w\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz.$$

Une intégration par parties permet de transformer le second membre en

$$\iiint(\varepsilon V + \Theta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+ \mathbf{S}(\varepsilon V + \Theta)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\Sigma.$$

Le premier signe d'intégration s'étendant à toutes les parties métalliques dont la nature varie d'un point à l'autre d'une manière continue, et le second à toutes les surfaces qui bornent ces diverses parties, on déduit aisément de là

$$\iiint \mathcal{R}(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\iiint(\varepsilon V + \Theta)\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz - \mathbf{S}(\varepsilon V + \Theta)\frac{\partial\sigma}{\partial t}\,d\Sigma.$$

Au second membre, la première sommation s'étend à tous les volumes électrisés et la seconde à toutes les surfaces électrisées.

Mais, si le régime permanent est établi, on a, en tout point,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'égalité précédente exige que l'on ait aussi, en tout point,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

Ainsi, *sur un système isolé, formé exclusivement de métaux homogènes ou hétérogènes tous à la même température, il ne peut y avoir d'autre régime permanent que l'équilibre électrique.*

Si nous faisons l'application de ce théorème général au cas qui nous occupe, nous voyons que les conducteurs (2) et (4) seront en équilibre électrique.

Soit m' un point du conducteur MN précédant infiniment peu la dérivation m; soit n' un point du même conducteur suivant de très près la dérivation n; soient $U(m')$, $U(n')$, $\Theta(m')$, $\Theta(n')$ les valeurs de la fonction potentielle et de la fonction Θ en ces points; soient R la résistance du segment $m'n'$ et J l'intensité du courant qui traverse ce segment. Nous aurons

$$RJ = \varepsilon U(m') + \Theta(m') - \varepsilon U(n') - \Theta(n').$$

A l'intérieur du conducteur 2, nous aurons

$$\varepsilon V'_2 + \Theta(a, i, \lambda + \mu) = \varepsilon U(m') + \Theta(m'),$$

et à l'intérieur du conducteur 4, nous aurons

$$\varepsilon V'_4 + \Theta(b, i, \lambda + \mu) = \varepsilon U(n') + \Theta(n'):$$

d'où la relation

$$\varepsilon(V'_2 - V'_4) + \Theta(a, i, \lambda + \mu) - \Theta(b, i, \lambda + \mu) = RJ.$$

Pour que nos deux sphères ne portent pas d'électricité, il est nécessaire et suffisant, nous l'avons vu au § 1, que les deux surfaces Σ_2 et Σ_3 soient au même niveau potentiel T, c'est-à-dire que l'on ait à la fois

$$\varepsilon V'_2 + \Theta(a, i, \lambda + \mu) = \varepsilon T + \Theta(a, i, 0),$$
$$\varepsilon V'_4 + \Theta(b, i, \lambda + \mu) = \varepsilon T + \Theta(a, i, 0)$$

et, par conséquent, d'après l'égalité précédente

$$\Theta(a, i, 0) - \Theta(b, i, 0) = RJ. \tag{20}$$

Si donc on règle la résistance R de manière que, dans l'expérience précédente, la sphère intérieure ne prenne aucune charge

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

électrique (ce qu'un électroscope permettra toujours de constater), la détermination de cette résistance R et de l'intensité J du courant permettra de déterminer la différence

$$\Theta(a, i, 0) - \Theta(b, i, 0).$$

Ce procédé ne permet, pas plus que celui qui a été indiqué au § 1, de déterminer la différence

$$\Theta(a, i, \lambda + \mu) - \Theta(b, i, \lambda + \mu).$$

On trouvera, dans le Mémoire de M. Pellat, les précautions expérimentales dont doit être entouré l'emploi de ce procédé.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE VIII.

L'EFFET PELTIER.

§ 1. — L'effet Peltier.

Nous avons dit que l'étude du mouvement permanent de l'électricité découlait tout entière de deux hypothèses fondamentales: l'une, à laquelle on parvient en généralisant la loi d'Ohm, a été indiquée au Chapitre IV; l'autre, que l'on obtient en généralisant la loi de Joule, a été indiquée au Chapitre VI.

Au Chapitre précédent, nous avons appliqué la première de ces deux hypothèses à un conducteur formé de différents métaux qui ont tous la même température, et nous en avons déduit une série de conséquences sur les lois des courants permanents dans un semblable conducteur. Nous allons maintenant appliquer à ce même conducteur la seconde hypothèse.

Considérons une surface fermée S tracée à l'intérieur d'un conducteur métallique hétérogène, dont tous les points sont à la même température, et qui est traversée par des courants permanents. Dans le temps dt, la partie du conducteur que renferme cette surface dégage une quantité de chaleur dQ que nous voulons calculer.

Pour cela, en vertu de l'hypothèse indiquée au Chapitre VI, nous pouvons opérer de la manière suivante.

Nous supposerons que, pendant le temps dt, les courants qui parcourent la partie du système enfermée à l'intérieur de la surface S soient conservés, mais que les courants qui parcourent le reste du système soient réduits à 0. Il en résulterait, pendant le temps dt, un changement de distribution électrique sur le système. Ce changement consiste, comme on le voit aisément, à amener sur l'élément dS de la surface S une charge électrique

$$-[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS\,dt.$$

Prenons l'énergie interne du système supposé sans courant.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette énergie interne a une valeur U donnée par [Livre IV, Chapitre II, égalité (19)]

$$EU = E\Upsilon + W + K_1 q_1 + K_2 q_2 + \ldots + K_n q_n.$$

Dans la modification que nous venons de considérer, cette énergie interne subirait une variation δU donnée par l'égalité

$$E\,\delta U = -\,dt \int\!\!\int_S (\varepsilon V + K)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS,$$

la sommation s'étendant à tous les éléments dS de la surface S. Le système supposé sans courant dégagerait une quantité de chaleur $dQ' = -\delta U$.

L'hypothèse que nous voulons appliquer consiste à supposer que $dQ = dQ'$, ce qui peut encore s'écrire

$$dQ = -\delta U.$$

La quantité de chaleur que nous voulons calculer est donc donnée par la formule

$$(1)\quad E\,dQ = dt \int\!\!\int_S (\varepsilon V + K)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS.$$

Cette égalité peut se transformer. Les quantités V et K sont finies et continues en tout point intérieur à la surface S. Leurs dérivées partielles du premier ordre existent et sont finies en tous ces points; on peut donc écrire l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int_S (\varepsilon V + K)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS \\
&\quad = -\int\!\!\int\!\!\int (\varepsilon V + K)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\
&\qquad -\int\!\!\int\!\!\int \left[u\,\frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial x} + v\,\frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial y} + w\,\frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz,
\end{aligned}$$

les sommations qui figurent au second membre s'étendant à tout l'espace que renferme la surface S.

Les courants sont uniformes; on a donc en tout point de cet espace

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'égalité (1) peut s'écrire

$$E\,dQ = -dt \iiint \left[u \frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial x} + v \frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial y} + w \frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial z} \right] dx\,dy\,dz.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la surface S ; on arrive donc au résultat suivant :

Lorsqu'un conducteur métallique hétérogène, dont tous les points sont à la même température, est traversé par des courants permanents, chaque élément de volume de ce conducteur dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ donnée par

$$(2) \quad E\,dQ = -dt \left[u \frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial x} + v \frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial y} + w \frac{\partial(\varepsilon V + K)}{\partial z} \right] dx\,dy\,dz.$$

Cette égalité peut encore se mettre sous une autre forme.

Soit $\mathcal{R}$ la résistance spécifique du conducteur au point (x, y, z). On a [Chap. VII, égalités (7)]

$$\mathcal{R}u = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$\mathcal{R}v = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$\mathcal{R}w = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Si donc, conformément aux notations indiquées ailleurs [Livre IV, Chapitre II, égalités (16) et (19)], nous posons

$$(3) \qquad K = \Theta + HT,$$

T étant la température absolue, nous pourrons remplacer l'égalité (2) par l'égalité

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} E\,dQ = {} & \mathcal{R}(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz\,dt \\ & - T \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + w \frac{\partial H}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz\,dt. \end{aligned} \right.$$

Lorsqu'un conducteur métallique hétérogène, dont tous les points sont à la même température, est traversé par des courants permanents, chaque élément de ce conducteur dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur qui est la somme de deux parties :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La première partie

$$\frac{J}{E}\,\mathcal{R}\,(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz\,dt$$

est donnée par la loi Joule; elle est toujours positive; elle est proportionnelle au carré du flux électrique en un point de l'élément et à la résistance spécifique en ce point.

La deuxième partie

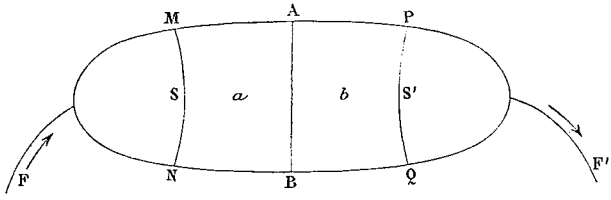
$$-\frac{T}{E}\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}+w\frac{\partial H}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

serait égale à 0 *si l'élément était homogène; elle change de signe si l'on renverse le sens du flux électrique en un point de l'élément; elle est, en grandeur, proportionnelle à ce flux; elle dépend de sa direction.*

Ce second dégagement de chaleur porte le nom de *phénomène de Peltier* ou d'*effet Peltier*. C'est en effet Peltier (¹) qui, en 1834, a mis le premier en évidence les phénomènes calorifiques particuliers que présentent les conducteurs hétérogènes. Voyons comment on peut, de la loi précédente, déduire des conséquences susceptibles d'être vérifiées expérimentalement.

Considérons un conducteur (*fig.* 96), formé par deux métaux a et b, soudés entre eux le long de la surface AB au moyen d'une soudure métallique de nature quelconque. Au métal a est fixé un

Fig. 96.



fil F, de nature quelconque, amenant un courant uniforme d'intensité J. Ce courant est emmené par un fil F′, de nature quelconque, fixé au métal b.

(¹) PELTIER, *Nouvelles expériences sur la caloricité des courants électriques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 1re série, t. LVI, p. 371; 1834).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Notre conducteur est parcouru par des courants uniformes.

Menons, à l'intérieur de ce conducteur, deux surfaces normales aux lignes de flux : l'une MN, ou S, à l'intérieur du métal a, l'autre PQ, ou S', à l'intérieur du métal b. Chacune de ces surfaces présente cette propriété que $(\varepsilon V + \Theta)$ a la même valeur en tous ses points. Chacune d'elles coupe normalement la surface du conducteur.

Appliquons à la surface fermée Σ ou MPQN l'égalité (1), en y remplaçant K par $(\Theta + TH)$. La partie du conducteur intérieure à cette surface fermée dégagera, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ donnée par

$$E\,dQ = dt \int (\varepsilon V + \Theta + TH)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,d\Sigma.$$

Mais, en tout point de la surface par laquelle le conducteur confine à l'isolant, on a

$$u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z) = 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(5)\quad \begin{cases} E\,dQ = & dt \int (\varepsilon V + \Theta + TH)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS \\ & + dt \int (\varepsilon V + \Theta + TH)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS. \end{cases}$$

En tous les points de la surface S, $(\varepsilon V + \Theta)$ a une même valeur, que nous désignerons par $(\varepsilon V + \Theta)$; en tous les points de la surface S', $(\varepsilon V + \Theta)$ a une même valeur que nous désignerons par $(\varepsilon V' + \Theta')$. D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} J &= \int [u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS \\ &= -\int [u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS'. \end{aligned}$$

On a donc

$$(6)\quad \begin{cases} \int (\varepsilon V + \Theta)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS \\ + \int (\varepsilon V + \Theta)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS' \\ \quad = [(\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta')]J. \end{cases}$$

Imaginons un conducteur filiforme mm', dans lequel $(\varepsilon V + \Theta)$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

aurait la valeur $(\varepsilon V + \Theta)$ au point m et la valeur $(\varepsilon V' + \Theta')$ au point m'. Pour qu'il soit parcouru de m et m' par un courant d'intensité J, il faudrait lui donner une résistance R définie par l'égalité

$$(\varepsilon V + \Theta) - (\varepsilon V' + \Theta') = RJ. \tag{7}$$

Cette quantité R est ce que nous nommerons la *résistance du tronçon de conducteur* MNPQ *pour la distribution particulière des courants que nous considérons.* Il est facile de voir qu'elle est susceptible d'une définition analogue à celle qui a été donnée, pour un tronçon homogène, au Chapitre IV, § 3.

Le long de la surface S, la quantité H a en tout point la valeur h_a qu'elle a à l'intérieur du métal a à une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ des surfaces terminales, sauf dans une couronne de largeur $(\lambda + \mu)$ confinant au contour MN. On voit alors que l'on aura, aux termes près de l'ordre de $(\lambda + \mu)$,

$$\int TH[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS' = T h_a J \tag{8}$$

et de même

$$\int TH[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS' = -T h_b J. \tag{9}$$

h_b étant la valeur de H, à l'intérieur du métal b, à une distance supérieure à $(\lambda + \mu)$ des surfaces terminales.

Les égalités (5), (6), (7), (8), (9) donnent

$$E\, dQ = RJ^2 dt + (h_a - h_b) TJ\, dt. \tag{10}$$

Telle est l'expression de la quantité de chaleur dégagée par un courant uniforme dans un tronçon de conducteur formé de deux métaux soudés.

Si le tronçon MNPQ est pris gros et court, sa résistance R sera une quantité extrêmement petite. Si le courant n'a pas une très grande intensité, on pourra négliger le terme RJ^2 et écrire simplement

$$E\, dQ = (h_a - h_b) TJ\, dt. \tag{11}$$

Ainsi, *lorsqu'un courant d'intensité qui n'est pas très grande traverse la soudure de deux métaux, il dégage une quantité*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de chaleur qui dépend uniquement de la nature que les deux métaux présentent à une certaine distance des surfaces terminales et qui ne dépend pas de la forme et de la grandeur de la surface de contact ni de la nature de la soudure.

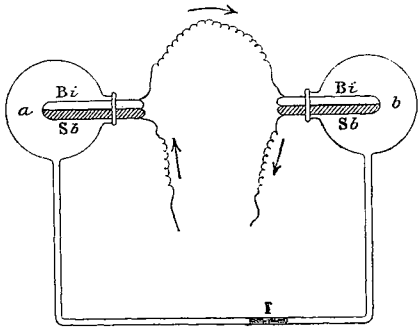
Ce phénomène calorifique est, en grandeur, proportionnel à l'intensité du courant. Il change de signe si l'on renverse le courant.

C'est là le phénomène constaté d'abord par Peltier au moyen de l'expérience suivante, que l'on peut facilement répéter dans les cours.

L'effet le plus marqué s'obtient avec le bismuth et l'antimoine. Le courant dégage de la chaleur lorsqu'il passe de l'antimoine au bismuth et en absorbe lorsqu'il passe du bismuth à l'antimoine.

Deux soudures antimoine-bismuth sont placées respectivement dans les deux boules *a*, *b* d'un thermoscope de Rumford (*fig.* 97).

Fig. 97.



Un même courant traverse ces deux soudures; mais, dans la boule *a*, il passe de l'antimoine au bismuth et du bismuth à l'antimoine dans la boule *b*. Un dégagement de chaleur a lieu dans la boule *a* et une absorption dans la boule *b*. Les deux effets s'ajoutent pour déplacer l'index I du thermoscope de la boule *a* vers la boule *b*. Si l'on renverse le courant, le déplacement de l'index a lieu en sens inverse.

Soient trois métaux *a*, *b*, *c*; un courant d'intensité J, passant du métal *a* au métal *b*, produit dans le temps *dt*, un dégagement

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de chaleur dQ_1 donné par

$$E\,dQ_1 = T(h_a - h_b)J\,dt.$$

Ce même courant, passant du métal b au métal c, produit, dans le même temps, un dégagement de chaleur dQ_2 donné par

$$E\,dQ_2 = T(h_b - h_c)J\,dt.$$

Enfin, ce même courant, passant du métal a au métal c, produit, dans le même temps, un dégagement de chaleur dQ_3 donné par

$$E\,dQ_3 = T(h_a - h_c)J\,dt.$$

On voit sans peine que l'on a

$$dQ_3 = dQ_1 + dQ_2.$$

Cette relation montre que, dans l'étude expérimentale de l'effet Peltier, il n'est pas nécessaire d'étudier les soudures que l'on peut former avec tous les métaux pris deux à deux; il suffit d'étudier les soudures que l'on peut former en joignant successivement chacun des métaux avec un même métal étalon. La relation précédente fera connaître alors l'effet Peltier qui se produit à la soudure de deux métaux quelconques.

L'étude expérimentale de l'effet Peltier a donné lieu à de nombreuses recherches que l'on trouvera exposées dans les traités de Physique.

§ 2. — Relation entre l'effet Peltier et la différence de niveau potentiel entre deux métaux en contact.

Nous donnerons le nom de *coefficient de l'effet Peltier pour la soudure* a, b à la quantité

$$P_a^b = \frac{(h_a - h_b)T}{E}, \tag{12}$$

qui représente la quantité de chaleur dégagée pendant l'unité de temps par un courant d'intensité égale à l'unité passant du métal a au métal b.

Soient Θ_a, Θ_b les valeurs de la quantité Θ à l'intérieur des métaux a, b, à une distance suffisante des surfaces terminales. Pour que l'équilibre électrique soit établi sur un conducteur renfermant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les deux métaux a et b, il faut que la fonction potentielle ait, à l'intérieur de ces deux métaux, des valeurs constantes V_a, V_b, liées par la relation

$$(\varepsilon V_a + \Theta_a) = \varepsilon(V_b + \Theta_b).$$

La quantité

$$D_a^b = -\frac{\Theta_a - \Theta_b}{\varepsilon} \tag{13}$$

est la *différence de niveau potentiel entre les régions intérieures des deux métaux a et b* réunis métalliquement.

Mais, d'autre part, d'après la définition de la quantité H [Livre II, Chap. II, égalité (16)], on a

$$h_a = -\frac{\partial\Theta_a}{\partial T}, \qquad h_b = -\frac{\partial\Theta_b}{\partial T}.$$

Les égalités (12) et (13) donnent donc

$$P_a^b = \frac{\varepsilon}{E} T \frac{dD_a^b}{dT}. \tag{14}$$

Le coefficient de l'effet Peltier à la soudure de deux métaux a, b mesure le produit de la température absolue par la dérivée par rapport à la température de la chute qu'éprouve, dans l'état d'équilibre, le niveau potentiel lorsqu'on passe de l'intérieur du métal a à l'intérieur du métal b.

Cette relation fondamentale a été obtenue pour la première fois par M. Lorentz (1).

Cette relation ne peut être vérifiée par l'expérience, du moins d'une manière directe. En effet, on a

$$\Theta_a = \Theta(a, i, \lambda + \mu),$$
$$\Theta_b = \Theta(b, i, \lambda + \mu)$$

(1) H.-A. LORENTZ, *Sur l'application aux phénomènes thermo-électriques de la seconde loi de la Théorie mécanique de la chaleur* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, t. XX, p. 129; 1885). — Pour l'historique, *voir* P. DUHEM, *Sur la relation qui lie l'effet Peltier à la différence de niveau potentiel de deux métaux au contact* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XII, p. 433; 1887). — Les principes de la théorie exposée dans le présent Chapitre sont indiqués dans ce dernier Mémoire et dans P. DUHEM, *Le Potentiel thermodynamique et ses applications*, 3e Partie (Paris, 1886).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, par conséquent, l'égalité (14) peut s'écrire

$$P_a^b = \frac{T}{E}\frac{\partial}{\partial T}[\Theta(b, i, \lambda + \mu) - \Theta(a, i, \lambda + \mu)].$$

Le premier membre de cette égalité peut être déterminé expérimentalement; mais il n'en est pas de même du second, car, ainsi que nous l'avons fait remarquer au Chapitre précédent, les méthodes de détermination de la différence de niveau potentiel au contact de deux métaux déterminent la quantité

$$\Theta(b, i, 0) - \Theta(a, i, 0)$$

et non la quantité

$$\Theta(b, i, \lambda + \mu) - \Theta(a, i, \lambda + \mu).$$

Clausius (1) avait admis que la relation entre le coefficient de l'effet Peltier et la chute de niveau potentiel était la suivante

$$P_a^b = \varepsilon D_a^b. \tag{15}$$

Il croyait que cette égalité résultait nécessairement de la Thermodynamique. Cette relation, admise par Clausius et par un grand nombre d'autres physiciens, doit être remplacée, en général, par la relation (14). Toutefois, il se peut que, pour certains métaux particuliers, la relation (14) puisse prendre la forme particulière (15).

(1) R. CLAUSIUS, *Ueber Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermo-elektrischen Erscheinungen* (*Poggendorff's Annalen*, t. XC, p. 513; 1853. — *Théorie mécanique de la chaleur*, traduite en français par Folie, t. II).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE IX.

LES COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

§ 1. — Conditions dans lesquelles se produisent les courants thermo-électriques.

Nous avons jusqu'ici étudié des systèmes formés de métaux dont tous les points étaient à la même température. Nous allons maintenant étudier les propriétés de systèmes formés par des conducteurs métalliques dont la température varie d'un point à l'autre.

Nous supposerons que la forme et la position des divers conducteurs soient données, ainsi que la constitution physique et chimique de chacun des éléments de volume qui les composent, en sorte que, pour connaître complètement l'état d'un élément de volume du système, il suffira de se donner les coordonnées x, y, z d'un point de cet élément, et la température absolue T en ce point.

L'énergie interne U et l'entropie S du système seront données par les égalités [Livre II, Chap. II, égalités (18) et (19)]

$$(1) \qquad \mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \mathrm{K}_1 q_1 + \mathrm{K}_2 q_n + \ldots + \mathrm{K}_n q_n,$$

$$(2) \qquad \mathrm{ES} = \mathrm{E}\Sigma \qquad + \mathrm{H}_1 q_1 + \mathrm{H}_2 q_2 + \ldots + \mathrm{H}_n q_n.$$

D'après ce que nous venons de dire, les quantités H et K seront des fonctions continues de x, y, z, T,

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}(x, y, z, \mathrm{T}),$$
$$\mathrm{K} = \mathrm{K}(x, y, z, \mathrm{T}).$$

Imaginons qu'une charge électrique δq passe du point de coordonnées (x, y, z) au point de coordonnées

$$(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z),$$

l'énergie interne et l'entropie du système subissent des variations

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

δU et δS données par les égalités

$$\begin{aligned}
E\,\delta U = \Big[&\Big(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\delta x \\
&+ \Big(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\delta y \\
&+ \Big(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial K}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\Big)\delta z\Big]\,dq, \\
E\,\delta S = \Big[&\Big(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\delta x \\
&+ \Big(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\delta y \\
&+ \Big(\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\Big)\delta z\Big]\,\delta q.
\end{aligned}$$

Le travail non compensé qu'entraîne cette modification a pour valeur

$$\delta\tau = ET\,\delta S - E\,\delta U.$$

Si l'on observe d'ailleurs que l'on a [Livre II, Chap. II, égalités (16) et (17)]

$$K = \Theta + TH,$$

on voit que l'on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\delta\tau = -\Big[&\Big(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + H\frac{\partial T}{\partial x}\Big)\delta x \\
&+ \Big(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + H\frac{\partial T}{\partial y}\Big)\delta y \\
&+ \Big(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} + H\frac{\partial T}{\partial z}\Big)\delta z\Big]\,dq.
\end{aligned}\right.$$

Cette égalité est fondamentale ; elle fournit les lois de l'équilibre et du mouvement permanent de l'électricité sur les conducteurs métalliques dont la température n'a pas la même valeur en tout point.

On obtiendra les conditions de l'équilibre électrique sur un semblable conducteur en écrivant que le travail non compensé $\delta\tau$, donné par l'égalité (3), est égal à 0, quels que soient δx, δy, δz ; ces conditions sont donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + H\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\
&\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + H\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\
&\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} + H\frac{\partial T}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si le système est parcouru par des courants permanents, il résulte de l'hypothèse fondamentale relative aux courants permanents, qui a été obtenue au Chapitre IV, en généralisant la loi d'Ohm, que l'on doit avoir

$$\delta\tau = (\mathcal{E}_x\,\delta x + \mathcal{E}_y\,\delta y + \mathcal{E}_z\,\delta z)\,dq,$$

$\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ étant les composantes de la force électromotrice au point (x, y, z). Si donc $\mathcal{R}$ est la résistance spécifique au point (x, y, z), et u, v, w les composantes du flux en ce point, on aura, d'après l'égalité (3),

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}\,u = -\left(\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial x} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial x} + H\dfrac{\partial T}{\partial x}\right), \\ \mathcal{R}\,v = -\left(\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial y} + H\dfrac{\partial T}{\partial y}\right), \\ \mathcal{R}\,w = -\left(\varepsilon\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + \dfrac{\partial\Theta}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial z} + H\dfrac{\partial T}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Ces égalités nous feront connaître les lois des courants thermo-électriques.

L'étude théorique des circonstances dans lesquelles ces courants peuvent prendre naissance comprend trois théorèmes; nous avons déjà démontré le premier de ces trois théorèmes au Chapitre VII, § 3; il s'énonce ainsi :

Première loi. — *Un système formé uniquement de conducteurs métalliques, homogènes ou hétérogènes, dont tous les points sont à la même température, ne peut être le siège de courants permanents.*

Le second de ces théorèmes peut s'énoncer ainsi :

Deuxième loi. — *Si chacun des conducteurs, isolés les uns des autres, qui constituent un système, est homogène en tous les points dont la distance aux surfaces terminales surpasse* $(\lambda + \mu)$, *ce système ne peut être le siège de courants permanents sensibles, quelle que soit la distribution des températures sur ce système.*

Multiplions, en effet, les deux membres de la première des équations (5) par u, les deux membres de la seconde par v, les deux membres de la troisième par w, et intégrons pour le volume entier

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'un des conducteurs qui constituent le système. Nous aurons

$$\begin{aligned}\iiint \mathcal{R}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz \\ = -\iiint\Big[&\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}+H\frac{\partial T}{\partial x}\right)u \\ &+\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}+H\frac{\partial T}{\partial y}\right)v \\ &+\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}+H\frac{\partial T}{\partial z}\right)w\Big]\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Prenons une fonction $\mathfrak{H}(x, y, z, T)$ définie par l'égalité

$$H(x, y, z, T) = \frac{\partial \mathfrak{H}(x, y, z, T)}{\partial T}. \tag{6}$$

Aux divers points situés à l'intérieur du conducteur, à une distance supérieure à $(\lambda+\mu)$ des surfaces terminales, H et $\mathfrak{H}$ deviennent, à cause de l'homogénéité supposée du conducteur, de simples fonctions de T, $h(T)$ et $\mathfrak{H}(T)$.

L'égalité précédente peut alors s'écrire

$$\left\{\begin{aligned}&\iiint \mathcal{R}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= -\iiint\Big\{\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{H}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right]u \\ &\quad+\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{H}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\right]v \\ &\quad+\left[\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{H}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right]w\Big\}\,dx\,dy\,dz \\ &\quad-\iiint[H(x,y,z,T)-h(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Soient dS un élément de la surface S qui limite le conducteur et N_i la normale à cet élément vers l'intérieur du conducteur. Une intégration par parties nous donnera

$$\begin{aligned}\iiint\Big[&\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{H}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)u \\ &+\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{H}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)v \\ &+\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial\mathfrak{H}(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)w\Big]\,dx\,dy\,dz \\ = -\mathbf{S}&[\varepsilon V+\Theta+\mathfrak{H}(T)]\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS \\ -\iiint&[\varepsilon V+\Theta+\mathfrak{H}(T)]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les courants étant permanents, on a, en tout point du conducteur,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

et, en tout point de la surface S,

$$u\cos(N_i, x) - v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z) = 0.$$

L'égalité (7) devient donc

$$\iiint \mathfrak{R}(u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz$$
$$= -\iiint [H(x, y, z, T) - h(T)] \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Les deux quantités $H(x, y, z, T)$ et $h(T)$ ne diffèrent l'une de l'autre d'une quantité finie qu'aux divers points d'une couche d'épaisseur $(\lambda + \mu)$ confinant à la surface terminale; le second membre est donc une quantité très petite de l'ordre de $(\lambda + \mu)$, et il en doit être de même du premier, ce qui montre que le flux électrique ne peut atteindre une valeur sensible en tout point d'un volume d'étendue sensible.

Cette loi, dont nous venons de démontrer la nécessité théorique, n'a pas toujours été admise par les expérimentateurs. Antoine-César Becquerel (1) avait cru mettre en évidence la production de courants uniformes dans un circuit formé d'un seul métal dont les diverses parties étaient à des températures différentes. En un point d'un fil de platine homogène il formait un nœud ou une spirale. En chauffant alors le fil à droite ou à gauche de la spirale, il avait un courant allant directement de la partie chaude à la partie froide. Il en déduisait le principe suivant : pendant la propagation de la chaleur dans un corps, si cette propagation se fait uniformément autour du point chauffé, aucun effet ne se produit; mais, si la propagation se fait d'une manière dyssymétrique, il se produit aussitôt un courant électrique.

---

(1) A.-C. Becquerel, *Du développement de l'électricité par le contact de deux portions d'un même métal dans un état suffisamment inégal de température* (*Ann. de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XXIII, p. 135; 1823). — *Du pouvoir thermo-électrique des métaux* (*Ann. de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XLI, p. 353; 1829).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

M. Magnus (1) a montré que ces phénomènes devaient s'expliquer par l'écrouissage, c'est-à-dire par un changement d'état physique que l'on fait éprouver au métal en le tordant.

La troisième loi fondamentale des phénomènes thermo-électriques peut s'énoncer de la manière suivante :

Troisième loi. — *Lorsqu'un conducteur métallique hétérogène présente une température variable d'un point à l'autre, l'équilibre électrique est en général impossible sur ce conducteur.*

Pour le démontrer, remarquons que les conditions d'équilibre (4) peuvent s'écrire

$$\mathrm{H}\,dT = -d(\varepsilon V + \Theta), \tag{8}$$

le symbole d désignant une différentielle totale par rapport aux quantités x, y, z, T, regardées comme des variables indépendantes.

Le conducteur n'étant pas homogène, H est une fonction non seulement de T, mais encore de x, y, z. Le premier membre ne peut donc être une différentielle totale par rapport aux quatre variables T, x, y, z regardées comme indépendantes. On ne peut donc supposer l'existence de l'équilibre électrique sur le conducteur, quelle que soit la distribution des températures sur le système. Cet équilibre ne peut subsister que si la distribution des températures sur le système satisfait à certaines conditions.

Ainsi, en général, si l'on chauffe certaines régions d'un conducteur formé de plusieurs métaux différents, ou d'un métal dont les diverses parties sont dans des états physiques différents, on obtiendra sur ce conducteur un mouvement permanent de l'électricité. Telle est l'origine des courants découverts par Seebeck (2) en 1822 et 1823 et nommés *courants thermo-électriques*.

---

(1) Magnus, *Ueber thermo-electrische Ströme* (*Poggendorff's Annalen*, t. LXXXIII, p. 469; 1851).

(2) Dr T.-J. Seebeck, *Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperatur-Differenz* (*Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 1822 et 1823; — *Poggendorff's Annalen*, t. VI, p. 1, 133 et 253; 1826).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 2. — Propriétés des chaînes thermo-électriques.

Supposons que nous ayons une suite de métaux a, b, c, d, ..., l, dont chacun est homogène, sauf à une distance très petite $(\lambda + \mu)$ des surfaces qui le terminent.

Avec ces métaux, formons une chaîne de telle façon que chacun d'eux soit en contact seulement avec celui qui le précède dans la série et avec celui qui le suit.

Admettons que chacune des surfaces de contact ait la même température en tous ses points, cette température n'étant pas forcément la même pour les différentes surfaces de contact.

Nous aurons *une chaîne thermo-électrique ouverte.*

Si, de plus, nous supposons les deux métaux a et l mis en contact par une surface ayant la même température en tous ses points, nous aurons *une chaîne thermo-électrique fermée.*

La théorie, fondée sur la Thermodynamique, des chaînes thermo-électriques, a été donnée en 1852 par Sir W. Thomson (1). Les principes précédents fournissent sans peine les résultats obtenus par Sir W. Thomson (2), et permettent même de leur donner une forme un peu plus générale, qui n'oblige pas à réduire la chaîne à un simple fil.

Première loi. — *Une chaîne thermo-électrique ouverte ne peut être le siège d'aucun courant permanent sensible.*

Considérons une chaîne ouverte, formée, par exemple, de quatre métaux a, b, c, d (*fig.* 98), séparés les uns des autres par les surfaces S_1, S_2, S_3, dont les températures sont T_1, T_2, T_3.

Si le métal a est parcouru par des courants permanents, il doit recevoir à chaque instant autant d'électricité qu'il en laisse échapper, et, comme ces échanges ne peuvent avoir lieu que par l'in-

(1) Sir W. Thomson, *On a mechanical theory of thermo-electric currents* (*Philosophical Magazine,* 4e série, t. III, p. 529; 1852. — *W. Thomson's Mathematical and physical papers,* t. I, p. 316).

(2) P. Duhem, *Applications de la Thermodynamique aux phénomènes thermo-électriques et pyro-électriques.* Ire Partie : *Phénomènes thermo-électriques* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 3e série, t. II, p. 405; 1885).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

termédiaire de la surface S_1, on voit que l'on aura

$$(\alpha) \qquad \mathrm{S}\,[u\cos(N_a, x) + v\cos(N_a, y) + w\cos(N_a, z)]\,dS_1 = 0.$$

Le métal b doit, lui aussi, recevoir à chaque instant autant d'électricité qu'il en perd, ce qui donne

$$\mathrm{S}\,[u\cos(N_b, x) + v\cos(N_b, y) + w\cos(N_b, z)]\,dS_1$$
$$+ \mathrm{S}\,[u\cos(N_b, x) + v\cos(N_b, y) + w\cos(N_b, z)]\,dS_2 = 0.$$

Mais l'égalité (α) donne

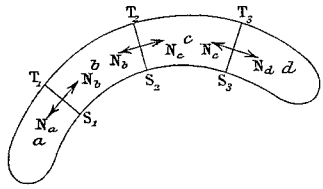
$$(\beta) \qquad \mathrm{S}\,[u\cos(N_b, x) + v\cos(N_b, y) + w\cos(N_b, z)]\,dS_1 = 0,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$(\gamma) \qquad \mathrm{S}\,[u\cos(N_b, x) + v\cos(N_b, y) + w\cos(N_b, z)]\,dS_2 = 0.$$

On verra ainsi, de proche en proche, que chaque surface S_1,

Fig. 98.



S_2, S_3 livre passage, à chaque instant, à une quantité totale d'électricité égale à 0.

Cela posé, écrivons, pour le métal a, une égalité analogue à l'égalité (γ), et transformons-la de la même manière. Soient $\mathfrak{H}_a(T)$, $h_a(T)$, les fonctions $\mathfrak{H}(T)$, $h(T)$, particulières au métal a, nous aurons

$$\iiint_a \Re(u^2 + v^2 + w^2)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\mathrm{S}\,[\varepsilon V + \Theta + \mathfrak{H}_a(T)]\,[u\cos(N_a, x) + v\cos(N_a, y) + w\cos(N_a, z)]\,dS_1$$
$$- \iiint_a [H(x, y, z, T) - h_a(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si l'on observe que la température T et, par conséquent, la fonction $\mathfrak{H}_a(T)$ ont même valeur en tout point de la surface S_1, et si l'on tient compte de l'égalité (α), on aura

$$\begin{aligned}
&\iiint_a \mathfrak{R}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz \\
&= -\mathbf{S}(\varepsilon V+\Theta)\,[u\cos(N_a,x)+v\cos(N_a,y)+w\cos(N_a,z)]\,dS_1 \\
&\quad -\iiint_a [H(x,y,z,T)-h_a(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Les métaux b, c, d donnent des égalités analogues. En les ajoutant membre à membre et en remarquant qu'on a, en tout point de S_1,

$$\begin{aligned}
&u\cos(N_a,x)+v\cos(N_a,y)+w\cos(N_a,z) \\
&+u\cos(N_b,x)+v\cos(N_b,y)+w\cos(N_b,z)=0,
\end{aligned}$$

et des égalités analogues en tout point des surfaces S_2, S_3, on trouve

$$\begin{aligned}
&\iiint \mathfrak{R}(u^2+v^2+w^2)\,dx,\,dy,\,dz \\
&= -\iiint_a [H(x,y,z,T)-h_a(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \\
&\quad -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad -\iiint_d [H(x,y,z,T)-h_d(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

L'intégration qui figure au premier membre s'étend à la chaîne tout entière.

Le second membre étant une quantité très petite de l'ordre de $(\lambda+\mu)$, il doit en être de même du premier; les courants ne peuvent donc avoir une intensité sensible en aucune région d'étendue sensible du système.

L'équilibre électrique s'établira sur le système. On aura, en tout point, d'après l'égalité (8),

$$H(x,y,z,T)\,dT = -d(\varepsilon V+\Theta).$$

Prenons un point M (*fig.* 99) à l'intérieur du premier métal a de la chaîne, et un point M′ à l'intérieur du dernier métal d de la chaîne. Soient T et T′ leurs températures. Joignons les deux

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

points M, M′ par une ligne l rencontrant les surfaces S_1, S_2, S_3, en P_1, P_2, P_3. L'égalité (8) nous donnera

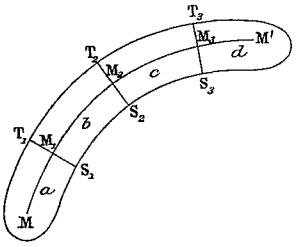
$$\varepsilon V(M) + \Theta_a(T) - \varepsilon V(M') - \Theta_d(T') = \int_M^{M'} H(x, y, z, T)\, dT.$$

Mais le second membre peut s'écrire

$$\int_T^{T_1} \frac{\partial_a \mathfrak{H}(T)}{\partial T}\, dT + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial \mathfrak{H}_b(T)}{\partial T}\, dT + \int_{T_2}^{T_3} \frac{\partial \mathfrak{H}_c(T)}{\partial T}\, dT + \int_{T_3}^{T'} \frac{\partial \mathfrak{H}_d(T)}{\partial T}\, dT$$
$$+ \int_M^{M_1} [H(x, y, z, T) - h_a(T)]\, dT + \ldots + \int_{M_3}^{M'} [H(x, y, z, T) - h_d(T)]\, dT.$$

Si l'on effectue les intégrations indiquées aux quatre premiers

Fig. 99.



termes, et si l'on néglige les termes suivants, qui sont des quantités très petites de l'ordre de $(\lambda + \mu)$, on trouve

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon V(M) + \Theta_a(T) - \varepsilon V(M') - \Theta_d(T') \\ \quad = \mathfrak{H}_a(T_1) - \mathfrak{H}_a(T) + \mathfrak{H}_b(T_2) - \mathfrak{H}_b(T_1) \\ \quad + \mathfrak{H}_c(T_3) - \mathfrak{H}_c(T_2) + \mathfrak{H}_d(T') - \mathfrak{H}_d(T_3). \end{array} \right.$$

Supposons, en particulier, que les deux métaux a et d soient identiques; que les deux températures T et T′ soient identiques. Entre les points M et M′ existera une différence de niveau potentiel donnée par l'égalité

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon[V(M) + V(M')] = \mathfrak{H}_a(T_1) - \mathfrak{H}_b(T_1) \\ \qquad\qquad + \mathfrak{H}_b(T_2) - \mathfrak{H}_c(T_2) \\ \qquad\qquad + \mathfrak{H}_c(T_3) - \mathfrak{H}_a(T_3), \end{array} \right.$$

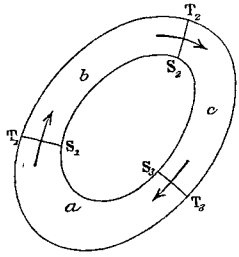
tandis que cette différence eût été égale à o, si les deux métaux avaient été réunis par des conducteurs métalliques ayant la même température en tous leurs points.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME LOI. — *Une chaîne thermo-électrique fermée, dont toutes les soudures sont à la même température, ne peut, quelle que soit la distribution des températures entre les soudures, être parcourue par des courants permanents sensibles.*

Soit une chaîne thermo-électrique fermée, formée, par exemple, de trois métaux a, b, c (*fig.* 100); soient S_1, S_2, S_3 les surfaces

Fig. 100.



qui séparent ces trois métaux, et T_1, T_2, T_3 leurs températures. Comptons comme sens de parcours positif le sens $abcda$. On démontre sans peine que, dans le temps dt, chacune des surfaces S_1, S_2, S_3 est forcément traversée dans le sens positif par une même quantité totale d'électricité $J\,dt$. Cela posé, en raisonnant comme nous l'avons fait pour établir la loi précédente, nous trouverons sans peine

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\iiint \mathfrak{R}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz \\
&\quad=[\mathfrak{H}_a(T_1)-\mathfrak{H}_a(T_3)+\mathfrak{H}_b(T_2)-\mathfrak{H}_b(T_1)+\mathfrak{H}_c(T_3)-\mathfrak{H}_c(T_2)]\,J \\
&\quad-\iiint_a[H(x,y,z,T)-h_a(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \\
&\quad-\iiint_b[H(x,y,z,T)-h_b(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \\
&\quad-\iiint_c[H(x,y,z,T)-h_c(T)]\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois derniers termes du second membre sont des quantités très petites de l'ordre de $(\lambda+\mu)$; le premier terme du second membre disparaît si l'on a

$$T_1=T_2=T_3.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si donc les soudures d'une chaîne thermo-électrique fermée sont toutes à la même température, cette chaîne ne peut présenter de flux électrique sensible en tout point d'une région d'étendue sensible.

TROISIÈME LOI. — *L'équilibre électrique est, en général, impossible sur une chaîne thermo-électrique dont toutes les soudures ne sont pas à la même température.*

En effet, si l'équilibre électrique était établi sur une semblable chaîne, on aurait en tout point

$$d(\varepsilon V + T) = -H(x, y, z, T)\, dT. \tag{8}$$

Traçons une ligne qui passe du métal a au métal b, du métal b au métal c, et vient se refermer au sein du métal a.

Intégrons l'égalité précédente le long de cette ligne fermée et nous trouverons

$$\int H(x, y, z, T)\, dT = 0.$$

Transformons cette égalité par un calcul analogue à celui qui nous a fourni l'égalité (9) et nous verrons qu'elle devient, en négligeant les quantités petites de l'ordre $(\lambda + \mu)$,

$$\mathfrak{H}_a(T_1) - \mathfrak{H}_a(T_3) + \mathfrak{H}_b(T_2) - \mathfrak{H}_b(T_1) + \mathfrak{H}_c(T_3) - \mathfrak{H}_c(T_2) = 0. \tag{12}$$

La condition nécessaire pour que l'équilibre électrique puisse subsister sur une chaîne thermo-électrique est que les températures des soudures vérifient l'égalité (12) *aux quantités près de l'ordre de* $(\lambda + \mu)$.

Cette condition est en même temps suffisante, car, si elle est vérifiée, le second membre de l'égalité (11) est une quantité très petite de l'ordre de $(\lambda + \mu)$ et, par conséquent, la chaîne ne peut présenter aucun courant d'intensité sensible dans une région d'étendue sensible.

Lorsque les températures des soudures ne vérifient pas l'égalité (12), la chaîne thermo-électrique devient le siège d'un courant permanent dont nous allons étudier les lois.

QUATRIÈME LOI. — *Sur une chaîne thermo-électrique parcou-*

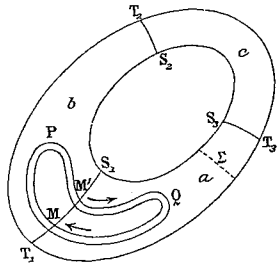
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rue par des courants permanents, aucune ligne de flux ne se ferme sans avoir parcouru toute la chaîne.

Dans tout système limité, parcouru par des courants permanents, toute ligne de flux se ferme forcément sur elle-même.

Peut-il arriver qu'une ligne de flux fermée se présente, sur notre chaîne thermo-électrique, comme la ligne MPM'QM dans la *fig.* 101,

Fig. 101.



de telle façon qu'il soit possible d'ouvrir la chaîne par une section Σ qui ne coupe pas cette ligne de flux?

Supposons pour un instant que cela soit possible. Notre ligne de flux peut rencontrer certaines soudures; imaginons qu'elle rencontre la soudure S_1 en deux points M, M'.

Prenons cette ligne pour directrice d'un petit canal de flux de section $d\omega$. Soit f le flux en un point, et posons

$$i = f\,d\omega.$$

Les égalités (5) nous donneront

$$\int \mathfrak{R} f\,ds = -\int d(\varepsilon V + \Theta) - \int H(x, y, z, T)\,dT,$$

les intégrations s'étendant à la ligne fermée MPM'QM.

La quantité i ayant la même valeur en tous les points de cette ligne, nous aurons

$$\int \mathfrak{R} f\,ds = i \int \frac{\mathfrak{R}\,ds}{d\omega}.$$

Nous aurons aussi

$$\int d(\varepsilon V + \Theta) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

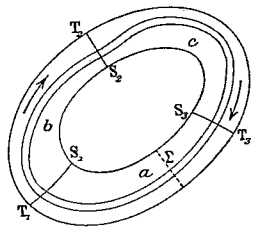
Enfin nous trouverons sans peine

$$\int \mathrm{H}(x,y,z,\mathrm{T})\,d\mathrm{T} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} [\mathrm{H}(x,y,z,\mathrm{T}) - h_a(\mathrm{T})]\,d\mathrm{T} + \int_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{M}} [\mathrm{H}(x,y\ z,\mathrm{T}) - h_b(\mathrm{T})]\,d\mathrm{T}.$$

Le second membre de cette expression est une quantité très petite de l'ordre $(\lambda + \mu)$. Il en est donc de même de $i\int \frac{\Re\, ds}{d\omega}$, ce qui démontre qu'aucune ligne de la forme indiquée ne peut être parcourue par un flux sensible.

Considérons un petit canal formé par des lignes de flux. D'après ce que nous venons de démontrer, il parcourt toute la chaîne thermo-électrique comme le représente la *fig.* 102. Prenons pour sens

Fig. 102.



de parcours de ce canal le sens *abca*. Soit $d\omega$ sa section en un point; soit f le flux en ce point. La quantité

$$i = f\,d\omega$$

a la même valeur tout le long de ce canal. Supposons, pour fixer les idées, qu'il soit possible de mener au travers de la chaîne une section Σ, qui rencontre normalement une et une seule fois toutes les lignes de flux. On trouvera sans peine alors, aux quantités près de l'ordre de $(\lambda + \mu)$, l'égalité

$$i\int \frac{\Re\, ds}{d\omega} = \mathfrak{H}_a(\mathrm{T}_3) - \mathfrak{H}_a(\mathrm{T}_1) + \mathfrak{H}_b(\mathrm{T}_1) - \mathfrak{H}_b(\mathrm{T}_2) + \mathfrak{H}_c(\mathrm{T}_2) - \mathfrak{H}_c(\mathrm{T}_3).$$

Soit $d\Omega$ l'élément que notre canal découpe sur la surface Σ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La quantité

$$J = \mathbf{S} i \, d\Omega$$

représentera la quantité totale d'électricité qui, pendant l'unité de temps, traverse, dans le sens positif, la surface Σ ou toute autre section qui ouvre la chaîne.

Comme nous l'avons fait au Chapitre IV, définissons la *résistance totale* R de la chaîne pour la distribution de flux que nous considérons par l'égalité

$$\frac{1}{R} = \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\int_{\mathcal{R}} \frac{d\Omega}{d\omega} ds},$$

le signe $\mathbf{S}$ indiquant une sommation qui s'étend à tous les éléments de la surface Σ, et le signe $\int$ une sommation qui s'étend à tous les éléments d'une ligne de flux fermée issue d'un point de l'élément $d\Omega$. Nous aurons, en vertu de cette définition,

$$(13) \quad \begin{cases} RJ = & \mathfrak{H}_a(T_3) - \mathfrak{H}_a(T_1) \\ & + \mathfrak{H}_b(T_1) - \mathfrak{H}_b(T_2) \\ & + \mathfrak{H}_c(T_2) - \mathfrak{H}_c(T_3). \end{cases}$$

Telle est la formule fondamentale obtenue par Sir W. Thomson. Si nous donnons au second membre de cette égalité le nom de *force électromotrice de la chaîne,* nous pouvons énoncer la loi suivante :

Cinquième loi. — *La force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique dépend exclusivement de la nature des métaux qui composent la chaîne et de la température des soudures.*

L'expression

$$(14) \quad \mathcal{E} = \mathfrak{H}_a(T_3) - \mathfrak{H}_a(T_1) + \mathfrak{H}_b(T_1) - \mathfrak{H}_b(T_2) + \mathfrak{H}_c(T_2) - \mathfrak{H}_c(T_3)$$

de la force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique fournit aisément toutes les propriétés de semblables chaînes.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

§ 3. — Propriétés des chaînes bimétalliques.

L'égalité (14) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \quad & \mathfrak{H}_a(T_3) - \mathfrak{H}_a(T_1) + \mathfrak{H}_b(T_1) - \mathfrak{H}_b(T_3) \\ & + \mathfrak{H}_b(T_3) - \mathfrak{H}_b(T_2) - \mathfrak{H}_c(T_2) - \mathfrak{H}_c(T_3).\end{aligned}$$

Les termes de la première ligne représentent la force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique formée par les deux métaux a et b seulement, ayant ses soudures aux températures T_1 et T_3, et comptée positivement lorsqu'elle fait marcher le courant du métal a au métal b au travers de la soudure dont la température est T_1.

Les termes de la seconde ligne représentent la force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique formée par les deux métaux b et c seulement, ayant ses soudures aux températures T_2 et T_3, et comptée positivement lorsqu'elle fait marcher le courant du métal b au métal c au travers de la soudure dont la température est T_2.

On voit donc que l'étude d'une chaîne thermo-électrique formée de plusieurs métaux peut toujours se ramener à l'étude d'un certain nombre de chaînes thermo-électriques dont chacune est formée seulement de deux métaux.

Moyennant cette règle, obtenue par A.-C. Becquerel (1), il suffit d'étudier les propriétés des chaînes thermo-électriques bimétalliques.

Cette règle a été soumise à une vérification expérimentale très précise par MM. Chassagny et Abraham (2).

Il n'est pas nécessaire d'étudier les propriétés d'une chaîne bimétallique pour toutes les combinaisons possibles des températures des deux soudures.

Supposons, en effet, que nous voulions connaître la force électromotrice d'une chaîne formée par les deux métaux a et b dont les soudures sont aux températures T_1 et T_2. Désignons cette

(1) A.-C. Becquerel, *Du pouvoir thermo-électrique des métaux* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XLI, p. 353; 1829).

(2) Chassagny et Abraham, *Recherches de Thermo-électricité* (*Comptes rendus*, t. CXI, p. 477; 1890).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

force électromotrice, comptée positivement lorsqu'elle tend à faire passer le courant du métal a au métal b au travers de la soudure dont la température est T_1, par $\mathcal{E}_a^b(T_1, T_2)$.

Nous aurons

$$\mathcal{E}_a^b(T_1, T_2) = \mathfrak{H}_a(T_2) - \mathfrak{H}_a(T_1) + \mathfrak{H}_b(T_1) - \mathfrak{H}_b(T_2).$$

Soit T_0 une troisième température arbitraire. Nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_a^b(T_1, T_2) = {} & \mathfrak{H}_a(T_2) - \mathfrak{H}_a(T_0) + \mathfrak{H}_b(T_0) + \mathfrak{H}_b(T_2) \\ & - [\mathfrak{H}_a(T_1) - \mathfrak{H}_a(T_0) - \mathfrak{H}_b(T_0) - \mathfrak{H}_b(T_1)] \\ = {} & \mathcal{E}_a^b(T_0, T_2) - \mathcal{E}_a^b(T_0, T_1).\end{aligned}$$

Moyennant cette relation, due à A.-C. Becquerel (¹), on voit qu'il suffira, en maintenant fixe la température T_0 de la soudure froide, d'étudier la force électromotrice de la chaîne bimétallique pour toutes les valeurs T_1 de la température de la soudure chaude.

Pour étudier la force électromotrice $\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)$, comptée positivement lorsqu'elle fait passer le courant du métal a au métal b au travers de la soudure à la température T_0, nous opérerons de la manière suivante.

D'après l'égalité (6), nous avons

$$h_a(T) = \frac{\partial \mathfrak{H}_a(T)}{\partial T}, \qquad h_b(T) = \frac{\partial \mathfrak{H}_b(T)}{\partial T},$$

et, par conséquent, l'égalité (14) peut s'écrire

$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = \int_{T_0}^{T_1} [h_a(T) - h_b(T)]\, dt. \tag{14'}$$

Choisissons un métal étalon, toujours facile à reproduire identique à lui-même à une même température, le plomb, par exemple. Désignons ce métal par l'indice o. Ce métal une fois choisi, la quantité

$$h_a(T) - h_0(T)$$

sera une quantité dépendant uniquement de la température et de la nature du métal a. Nous poserons

$$\gamma_a(T) = h_a(T) - h_0(T), \tag{15}$$

(¹) A.-C. Becquerel, *loc. cit.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et nous dirons que $y_a(T)$ *est, à la température* T, *le pouvoir thermo-électrique du métal a rapporté au plomb.*

L'égalité qui donne $\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)$ deviendra alors

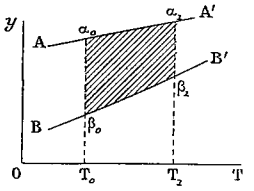
$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = \int_{T_0}^{T_1} [y_a(T) - y_b(T)]\, dt. \tag{16}$$

On voit donc que *si, pour chaque métal, on connaît le pouvoir thermo-électrique rapporté au plomb, et cela à toute température, on sait, en toutes circonstances, prévoir les effets d'une chaîne thermo-électrique quelconque.*

Nous verrons, au § 5, comment on peut déterminer les pouvoirs thermo-électriques rapportés au plomb. Pour le moment, discutons les conséquences de l'égalité (16).

Sur l'axe des abscisses d'un système de coordonnées rectangulaires (*fig.* 103), portons les températures absolues T. Portons les pouvoirs thermo-électriques en ordonnées. Soient AA′, BB′, les

Fig. 103.



courbes qui représentent les pouvoirs thermo-électriques $y_a(T)$, $y_b(T)$, des métaux a et b.

Menons par les points d'abscisses T_0, T_1, des parallèles $T_0\beta_0\alpha_0$, $T_1\beta_1\alpha_1$, à OY. Il est aisé de voir que l'aire $\beta_0\alpha_0\alpha_1\beta_1$ représente en valeur absolue la force électromotrice $\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)$, et cette force sera positive ou négative selon que la ligne AA′ sera au-dessus ou au-dessous de BB′.

Pour étudier les variations de la force électromotrice $\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)$ avec la température T_1, il suffira de laisser invariable la ligne $T_0\beta_0\alpha_0$ et d'étudier les variations que subit l'aire $\beta_0\alpha_0\alpha_1\beta_1$ lorsqu'on déplace parallèlement à elle-même l'ordonnée $T_1\beta_1\alpha_1$.

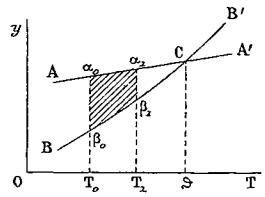
Il peut arriver que, dans toute l'étendue du champ où se font les expériences, la ligne BB′ soit constamment au-dessus ou constamment au-dessous de la ligne AA′; l'aire précédente, et par consé-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

quent la force électromotrice du couple, gardent un signe constant, et leur valeur absolue croît en même temps que la différence entre la température de la soudure chaude et la température de la soudure froide.

Beaucoup de couples présentent ces phénomènes simples; mais

Fig. 104.



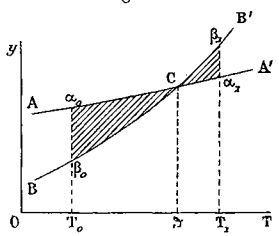
il peut arriver que les deux lignes AA′, BB′ se coupent en un point C (*fig.* 104), dont la température $\mathfrak{S}$ soit comprise dans le champ des expériences.

Supposons, pour fixer les idées, qu'aux températures inférieures à $\mathfrak{S}$ la courbe AA′ soit au-dessus de la courbe BB′. Prenons la température T_0 inférieure à $\mathfrak{S}$.

1° La température T_1, partant de T_0, demeure d'abord, elle aussi, inférieure à $\mathfrak{S}$ (*fig.* 104). La force électromotrice est alors positive. Le courant va du métal *a* au métal *b* au travers de la soudure froide. La force électromotrice croît en même temps que la température de la soudure chaude, mais d'autant moins vite que cette température est plus élevée.

2° La température T_1 atteint, puis dépasse la température $\mathfrak{S}$,

Fig. 105.



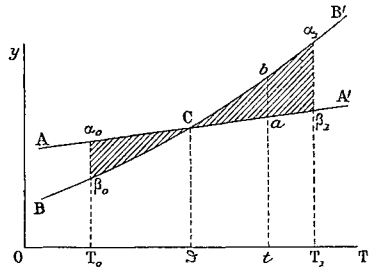
que l'on nomme le *point neutre*. A partir de ce moment (*fig.* 105), la force électromotrice cesse de croître, car l'aire $C\alpha_1\beta_2$ doit être

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

comptée négativement et retranchée de l'aire $C\alpha_0\beta_0$. Toutefois la force électromotrice demeure d'abord positive.

3° Mais T_1, continuant à croître, peut atteindre une valeur t (*fig.* 106) pour laquelle l'aire *cab* est égale à l'aire $C\alpha_0\beta_0$. Pour

Fig. 106.



cette *température d'inversion,* la force électromotrice s'annule. Lorsque la température de la soudure chaude devient supérieure à la température d'inversion, l'aire à retrancher $C\alpha_1\beta_1$ devient supérieure à l'aire $C\alpha_0\beta_0$ dont on la retranche. La force électromotrice devient négative, et le courant passe du métal *b* au métal *a* au travers de la soudure froide.

Au moment où la température de la soudure chaude est égale à la température d'inversion, l'équilibre électrique est établi sur le système, car, on le voit aisément, l'égalité (12) est alors vérifiée.

La température du point neutre dépend seulement de la nature des deux métaux *a* et *b* ; mais il n'en est pas de même de la température d'inversion, qui dépend en outre de la température T_0 de la soudure froide, et est d'autant plus élevée que la température de la soudure froide est plus basse.

Si, sur deux axes de coordonnées rectangulaires, on porte en abscisses les températures T_1 de la soudure chaude, et en ordonnées les forces électromotrices $\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)$, on obtiendra une courbe représentée par la *fig.* 107.

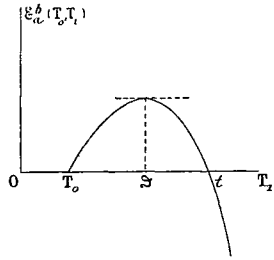
Le couple fer-cuivre a, le premier, offert aux physiciens de semblables propriétés ; lorsque la température de la soudure chaude est peu élevée, le courant va du fer au cuivre au travers de la soudure froide ; mais, lorsqu'on élève au rouge la température de la soudure chaude, en laissant la soudure froide à la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

température ordinaire, le courant change de sens. Ce phénomène a été constaté pour la première fois par Cumming (1).

A.-C. Becquerel (2) a montré qu'on obtenait les mêmes phénomènes avec les couples zinc-or et zinc-argent. Mais c'est à

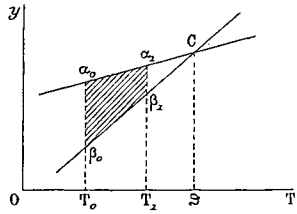
Fig. 107.



Gaugain (3) que l'on doit d'avoir complètement éclairci le phénomène de l'inversion.

La théorie ne fournit aucune indication sur la forme des courbes AA′, BB′, qui représentent, pour chacun des deux métaux a et b, le pouvoir thermo-électrique rapporté au plomb. On

Fig. 108.



peut, comme première approximation, confondre ces courbes avec deux lignes droites (*fig.* 108).

Dans ce cas, l'aire du trapèze $\beta_0\,\alpha_0\,\alpha_1\,\beta_1$, qui représente la force électromotrice $\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)$ s'exprime aisément en fonction des températures T_0, T_1 et de la température $\mathfrak{S}$ du point neutre. On

(1) THOMSON, *Ann. phil.*, 2e série, t. VI, p. 321; 1823.

(2) A.-C. BECQUEREL, *Traité d'Électricité* en 3 volumes, t. I, p. 160.

(3) GAUGAIN, *Mémoire sur les courants thermo-électriques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXV, p. 5; 1862).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

trouve

$$(17) \qquad \mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = [\gamma_a(T_0 - \gamma_b(T_0)](T_1 - T_0)\left(\vartheta - \frac{T_0 + T_1}{2}\right).$$

Cette formule représente fort exactement les résultats des diverses expériences de Gaugain. Elle a été donnée d'abord par M. Avenarius (1). Peu d'années après, elle a été retrouvée par M. Tait (2). La méthode suivie par M. Tait pour y parvenir est reproduite dans tous les traités de Physique. Elle pourrait aisément, par sa forme, induire en erreur sur le caractère de la formule (17) et lui faire attribuer la valeur d'une formule rigoureusement exacte, tandis qu'elle n'est qu'approchée.

Les recherches très précises de MM. Chassagny et Abraham (3) montrent que les écarts entre les résultats de l'expérience et la formule de MM. Avenarius et Tait surpassent la limite des erreurs d'observation, du moins si l'on admet que l'on puisse confondre la température lue sur le thermomètre à hydrogène avec la température absolue.

Si le point neutre est très éloigné du champ des expériences, les deux lignes AA′, BB′ peuvent être assimilées à deux droites parallèles, et l'on a

$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = [\gamma_a(T_0) - \gamma_b(T_0)](T_1 - T_0).$$

La force électromotrice du couple thermo-électrique est proportionnelle à la différence des températures absolues des deux soudures. Un tel couple est dit *couple à marche régulière*. Le couple antimoine-bismuth a une marche sensiblement régulière.

§ 4. — Relation entre les phénomènes thermo-électriques et les différences de niveau potentiel au contact.

La force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique formée par les deux métaux a et b et dont les deux soudures sont aux

---

(1) AVENARIUS, *Ueber electrische Differenzen der Metalle bei verschiedenen Temperaturen* (*Poggendorff's Annalen*, t. CXXII, p. 193; 1864).

(2) TAIT, *On thermo-electricity* (*British Association Repertorium*, t. XLI, p. 48; 1871).

(3) CHASSAGNY et ABRAHAM, *Recherches de thermo-électricité* (*Comptes rendus*, t. CXI, p. 477, 602 et 732; 1890).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

températures T_0 et T_1 est représentée par la formule

$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = \int_{T_0}^{T_1} [h_a(T) - h_b(T)]\, dT.$$

Soient $\Theta_a(T)$, $\Theta_b(T)$ les valeurs de la quantité Θ à la température T, à l'intérieur des deux métaux a et b. On sait que l'on a [Livre IV, Ch. II, égalité (16)]

$$h_a(T) = -\frac{\partial \Theta_a(T)}{\partial T}, \qquad h_b(T) = -\frac{\partial \Theta_b(T)}{\partial T},$$

ce qui donne

$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = [\Theta_a(T_0) - \Theta_b(T_0)] - [\Theta_a(T_1) - \Theta_b(T_1)].$$

Mais, d'autre part, lorsque les deux métaux a et b sont au contact, que tous leurs points sont à une même température T, que l'équilibre est établi sur le conducteur qu'ils forment, le niveau potentiel à l'intérieur du conducteur a surpasse le niveau potentiel à l'intérieur du conducteur b d'une quantité

$$D_a^b(T) = \frac{\Theta_b(T) - \Theta_a(T)}{\varepsilon}.$$

On a donc

$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = \varepsilon [D_a^b(T_1) - D_a^b(T_0)]. \tag{18}$$

Cette relation simple s'étend à une chaîne formée d'un nombre quelconque de métaux a, b, c, d. Soient T_0, T_1, T_2, T_3 les températures des soudures (a, b), (b, c), (c, d), (d, a). Nous aurons, en comptant positivement la force électromotrice ε lorsqu'elle tend à faire marcher le courant dans le sens *abcda*

$$\mathcal{E} = -\varepsilon [D_a^b(T_0) + D_b^c(T_1) + D_c^d(T_2) + D_d^a(T_3)]. \tag{19}$$

Donc, *au facteur* ε *près, la force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique est égale et de signe contraire à la somme des* CHUTES *qu'éprouve le niveau potentiel lorsqu'on traverse les couches d'épaisseur* $2(\lambda + \mu)$ *qui avoisinent les soudures, dans le sens de parcours où la force électromotrice est comptée positivement.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Telle est la relation (1) très simple qui lie les phénomènes thermo-électriques aux chutes de niveau potentiel qui caractérisent l'équilibre entre deux métaux au contact.

Le signe du second membre de cette relation a quelque chose de paradoxal. Clausius (2), qui s'est occupé le premier de rechercher au point de vue théorique une relation entre les phénomènes thermo-électriques et les chutes de niveau potentiel au contact, avait été amené à écrire une relation qui devient, par l'emploi de nos notations,

$$\mathcal{E} = \varepsilon[\mathrm{D}_a^b(\mathrm{T}_0) + \mathrm{D}_b^c(\mathrm{T}_1) + \mathrm{D}_c^d(\mathrm{T}_2) + \mathrm{D}_d^a(\mathrm{T}_3)]. \tag{20}$$

D'après Clausius, *au facteur* ε *près, la force électromotrice d'une chaîne thermo-électrique est égale et de signe contraire à la somme des* ACCROISSEMENTS *qu'éprouve le niveau potentiel lorsqu'on traverse les couches qui avoisinent les soudures, dans le sens de parcours où la force électromotrice est comptée positivement.*

La formule de Clausius donnerait, pour la force électromotrice thermo-électrique, une valeur exacte, mais un signe faux. Cette remarque a d'autant plus d'importance qu'un grand nombre d'auteurs prennent la relation (20) comme point de départ de la théorie des courants thermo-électriques.

La relation (19) ne peut être soumise au contrôle direct de l'expérience. La force électromotrice $\mathcal{E}$ est mesurable ; mais il n'en est pas de même des quantités qui figurent au second membre. On a, en effet,

$$\mathrm{D}_a^b(\mathrm{T}_0) = \frac{1}{\varepsilon}[\Theta_b(\mathrm{T}_0) - \Theta_a(\mathrm{T}_0)]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}[\Theta(b, i, \lambda + \mu, \mathrm{T}_0) - \Theta(a, i, \lambda + \mu, \mathrm{T}_0)]$$

---

(1) P. DUHEM, *Sur la relation qui lie l'effet Peltier à la différence de niveau potentiel de deux métaux au contact* (*Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XII, p. 433; 1887). Dans ce travail j'ai, par erreur, regardé la relation (19) comme étant identique à la relation (20).

(2) R. CLAUSIUS, *Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermoelektrischen Erscheinungen*, équation 15 (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. XC, p. 513; 1853. — *Théorie mécanique de la chaleur*, traduite en français par F. Folie, t. II).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et nous avons vu que les méthodes employées pour déterminer les différences de niveau potentiel au contact de deux métaux fournissaient seulement la mesure de la quantité

$$\Theta(b, i, o, T_0) - \Theta(a, i, o, T_0).$$

§ 5. — Relation entre les phénomènes thermo-électriques et l'effet Peltier.

C'est à Sir W. Thomson que l'on doit d'avoir donné, dans le Mémoire que nous avons cité au début du § 2, la relation qui lie les phénomènes thermo-électriques à l'effet Peltier.

Nous avons vu que l'effet Peltier produit pendant le temps dt, par un courant d'intensité J qui passe du métal a au métal b, était donné par les formules [Chapitre VIII, égalité (12)]

$$(21) \qquad \begin{cases} dQ = P_a^b J\, dt, \\ P_a^b = \dfrac{T}{E}[h_a(T) - h_b(T)]. \end{cases}$$

1° Supposons que l'on considère le plomb o et le métal a, la seconde égalité (21) donnera, en vertu de l'égalité (15),

$$(22) \qquad \gamma_a(T) = -\frac{E}{T} P_0^a(T).$$

Si donc, à toute température T, *on mesure l'effet Peltier produit par le passage d'un courant du plomb au métal a, on aura, par l'égalité* (22), *le pouvoir thermo-électrique du métal a rapporté au plomb.*

M. Leroux (1) a employé cette méthode pour déterminer le pouvoir thermo-électrique d'un grand nombre de métaux par rapport au plomb.

2° L'égalité (14 *bis*)

$$\mathcal{C}_a^b(T_0, T_1) = \int_{T_0}^{T_1} [h_a(T) - h_b(T)]\, dt$$

(1) F.-P. Leroux, *Recherches sur les courants thermo-électriques,* Mémoire lu à l'Académie des Sciences le 20 avril 1866 (*Annales de Chimie et de Physique,* 4e série, t. X, p. 201; 1867).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

devient, en vertu des égalités (1),

$$\frac{\partial \mathcal{E}_a^b(T_0, T_1)}{\partial T_1} = \frac{E}{T_1} P_a^b(T_1). \tag{23}$$

Cette remarquable relation prête à des vérifications expérimentales. Par exemple, M. Bellati (1) a étudié avec grand soin la force électromotrice thermo-électrique du couple fer-zinc dont la soudure froide est maintenue à 0° C. ($T_0 = 273$), tandis que la température de la soudure chaude varie de 0° C. à 120° C. Il a trouvé que cette force électromotrice pouvait être représentée par la formule

$$\mathcal{E}(T_0, T_1) = 917,77(T_1 - 273) - 1,9488(T_1 - 273)^2.$$

Pour $T_1 - 273 = 13°,8$, cette formule, jointe à l'égalité (23), donne

$$P(T_1) = 0^{cal},006065.$$

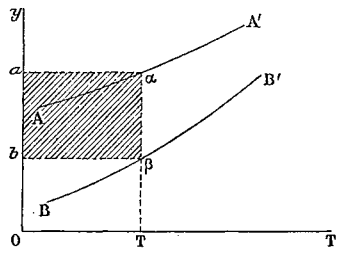
La mesure directe de l'effet Peltier à cette température donne

$$P(T_1) = 0^{cal},005923.$$

L'erreur est inférieure à $\frac{1}{40}$ du nombre à mesurer; cette concordance paraîtra très satisfaisante si l'on tient compte des nombreuses données expérimentales nécessaires pour effectuer la comparaison et de la difficulté que présente la détermination de chacune d'elles.

3° Les diagrammes (*fig.* 109) qui représentent par les courbes

Fig. 109.



AA', BB' les pouvoirs thermo-électriques de deux métaux par rapport au plomb fournissent immédiatement, à chaque tempéra-

(1) BELLATI, *Atti del R. Istituto Veneto*, 5e série, t. V; 1879.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ture, le coefficient de l'effet Peltier entre ces deux métaux. En effet, les relations (15) et (21) donnent

$$P_a^b(T) = \frac{T}{E}[\gamma_a(T) - \gamma_b(T)];$$

à l'inspection de la *fig.* 109, on voit que cette relation peut s'écrire

$$P_a^b(T) = \frac{1}{E}\text{aire } ba\alpha\beta,$$

l'aire $ba\alpha\beta$ étant comptée positivement lorsque le point a est au-dessus du point b.

Cette représentation géométrique nous permet de prévoir le sens des phénomènes thermiques qui se produiront au voisinage des deux soudures d'une chaîne bimétallique. Nous supposerons que la température varie peu dans les régions qui avoisinent les deux soudures, de façon à pouvoir appliquer dans ces régions les lois relatives au phénomène de Peltier.

Supposons en premier lieu la courbe AA′ constamment au-dessus de la courbe BB′ dans le champ des expériences (*fig.* 103). Nous savons que, dans ce cas, le courant passe du métal a au métal b au travers de la soudure froide. Donc, d'après la règle précédente, le courant échauffe la soudure froide et refroidit la soudure chaude.

Considérons maintenant le cas où les deux courbes AA′, BB′ se coupent en un point neutre C, la courbe AA′ étant au-dessus de la courbe BB′ lorsque la température est inférieure au point neutre. Supposons la température T_0 de la soudure froide maintenue au-dessous du point neutre.

Tant que la température T_1 de la soudure chaude est aussi inférieure au point neutre (*fig.* 104), le courant échauffe la soudure froide et refroidit la soudure chaude.

Lorsque la température T_1 (*fig.* 105) est comprise entre le point neutre et la température d'inversion, le courant échauffe les deux soudures.

Lorsque la température T_1 surpasse la température d'inversion (*fig.* 106), le courant refroidit les deux soudures.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE X.

L'EFFET THOMSON.

§ 1. — Le transport électrique de la chaleur.

La théorie des courants permanents repose, dans tous les cas, sur deux principes hypothétiques dont l'un est obtenu au Chapitre IV, en généralisant la loi d'Ohm, l'autre au Chapitre VI, en généralisant la loi de Joule. L'application du premier aux conducteurs métalliques dont la température n'est pas uniforme nous a fourni l'ensemble des conséquences exposées au Chapitre précédent. Appliquons maintenant notre second principe à ces mêmes conducteurs.

Considérons un conducteur métallique dont tous les points ne sont pas à la même température et, à l'intérieur de ce conducteur, traçons une surface fermée S. Soit N_i la normale en un point à cette surface, normale dirigée vers l'intérieur de l'espace qu'enferme cette surface.

Supposons qu'on conserve à l'intérieur de cette surface, pendant le temps dt, les courants uniformes qui parcourent le système, mais qu'on supprime tout courant à l'extérieur de cette surface. Dans cette hypothèse, le système éprouverait pendant le temps dt un changement de distribution électrique. Chaque élément dS de la surface S prendrait une charge

$$-[u\cos(N_i, x) + w\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS\, dt.$$

Ce changement de distribution électrique ferait éprouver une variation δU à l'énergie interne du système supposé sans courant; ce système dégagerait une quantité de chaleur $dQ' = -\delta U$. Le principe que nous voulons appliquer énonce que le volume que limite la surface dégage dans le temps dt une quantité de chaleur

$$dQ = dQ',$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui peut encore s'écrire

$$dQ = -\delta U.$$

Or l'égalité (1) du Chapitre précédent permet de calculer δU et l'on obtient ainsi

$$E\,dQ = dt \int\!\!\!\int_S (\varepsilon V + K)[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\,dS.$$

Si nous remarquons que l'on a [Livre IV, Chap. II, égalités (16) et (17)]

$$K = \Theta + TH,$$

que l'on a en outre, en tout point intérieur à la surface S,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on verra sans peine que l'on peut écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} E\,dQ = -dt \iiint \Bigg[& \left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} + T\frac{\partial H}{\partial x}\right.\\ & \left. + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + H\frac{\partial T}{\partial x}\right) u\\ & + \left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} + T\frac{\partial H}{\partial y}\right.\\ & \left. + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + T\frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + H\frac{\partial T}{\partial y}\right) v\\ & + \left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} + T\frac{\partial H}{\partial z}\right.\\ & \left. + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} + T\frac{\partial H}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} + H\frac{\partial T}{\partial z}\right) w \Bigg] dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité, devant avoir lieu quelle que soit la forme de la surface S, fournit l'expression de la quantité de chaleur dégagée dans le temps dt par un élément de volume du conducteur.

Si l'on observe que l'on a [Chap. IX, égalité (5)]

$$\mathcal{R}\,u = -\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + H\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

$$\mathcal{R}\,v = -\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + H\frac{\partial T}{\partial y}\right),$$

$$\mathcal{R}\,w = -\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \Theta}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} + H\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

on voit sans peine que la quantité de chaleur dégagée pendant le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

temps dt, par un élément d'un conducteur métallique dont la température n'est pas uniforme et que parcourent des courants permanents, est donnée par l'égalité

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E}\,dQ = {} & \mathcal{R}(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy\,dz\,dt \\ & -\mathrm{T}\left(u\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt \\ & -\mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{T}}\left(u\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}+v\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}+w\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme du second membre représente le dégagement de chaleur donné par la loi de Joule.

Le deuxième terme représente l'effet Peltier. Il disparaît si la matière du conducteur est homogène autour de l'élément $dx\,dy\,dz$; mais il ne change pas de valeur selon que la distribution des températures est uniforme ou non autour de l'élément $dx\,dy\,dz$.

Le troisième terme, au contraire, demeure le même, que la matière du conducteur soit homogène ou non autour de l'élément $dx\,dy\,dz$; mais il s'évanouirait si la température était distribuée d'une manière uniforme autour de cet élément.

Soit f le flux électrique au point (x, y, z). Soit F le flux calorifique au même point. Si l'on désigne par K la conductibilité calorifique de la substance qui forme le conducteur, ce dernier flux aura pour composantes

$$-\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x},\quad -\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y},\quad -\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z},$$

et le troisième terme de $\mathrm{E}\,dQ$ pourra s'écrire

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{K}}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{T}}\mathrm{F}f\cos(\mathrm{F}, f).$$

On voit qu'il change de signe selon que la direction du flux calorifique et la direction du flux électrique font entre elles un angle aigu ou un angle obtus. Toutes choses égales d'ailleurs, il est proportionnel en grandeur à chacun de ces deux flux.

Le phénomène auquel correspond la présence de ce terme dans l'expression de $\mathrm{E}\,dQ$ porte le nom d'*effet Thomson*.

C'est en effet Sir W. Thomson (1) qui, dans sa belle étude

(1) Sir W. Thomson, *On a mechanical theory of thermo-electric currents* (*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, Déc. 1851. — *Philosophical*

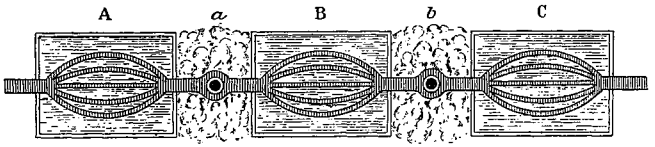
Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

théorique sur les courants thermo-électriques, a énoncé, comme conséquence de la Thermodynamique, cette proposition : *Un courant électrique produit des effets thermiques différents selon qu'il passe du chaud au froid ou du froid au chaud dans un même métal.*

Peu d'années après, Sir W. Thomson (1) a vérifié expérimentalement cette conséquence de la théorie, en employant le procédé suivant.

Un paquet de fils de fer, serré en a et b (*fig.* 110), s'épanouit

Fig. 110.



dans trois cuves identiques A, B, C. Les cuves extrêmes A et C contiennent de l'eau froide et la cuve médiane B, de l'eau bouillante. Les portions a et b, entourées de coton cardé pour atténuer le rayonnement, contiennent chacune un thermomètre très sensible. Dans ce paquet de fils de fer, lançons un courant dans la direction ABC. En a, ce courant va du froid au chaud, tandis qu'en b il marche du chaud au froid. En a et b, les flux de chaleur seront sensiblement les mêmes; mais, en a, le flux de chaleur sera dirigé en sens contraire du courant électrique et en b il sera dirigé dans le sens du courant. Soient T la température extérieure, T_a la température du thermomètre a, T_b la température du thermomètre b. Soit J l'intensité du courant. Soit $\mathfrak{R}$ la résistance spécifique du métal. Posons enfin

$$\mu(T) = T\frac{\partial H}{\partial T}. \tag{3}$$

Magazine, 4e série, t. III, p. 529; 1852. — *W. Thomson's mathematical and physical Papers*, t. I, p. 316).

(1) Sir W. Thomson, *Experimental researches in thermo-electricity* (*Proceedings of the Royal Society*, t. VII; 1854. — *Thomson's Papers*, t. I, p. 460). — *On the Electrodynamic qualities of metals* (*The Bakerian Lecture*) (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, t. III, p. 661; 1856. — *Thomson's Papers*, t. II, p. 189).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous aurons évidemment

$$T_a - T = K_a \mathcal{R}(T_a) J^2 + K'_a \mu(T_a) J,$$
$$T_b - T = K_b \mathcal{R}(T_b) J^2 - K'_b \mu(T_b) J,$$

K_a, K'_a, K_b, K'_b étant quatre coefficients positifs qui dépendent de la température des cuves et de la construction de l'appareil.

Faisons maintenant passer le courant en sens contraire; les deux thermomètres marqueront des températures T'_a et T'_b et nous aurons

$$T'_a - T = K_a \mathcal{R}(T'_a) J^2 - K'_a \mu(T'_a) J,$$
$$T'_b - T = K_b \mathcal{R}(T'_b) J^2 + K'_b \mu(T'_b) J.$$

L'observation montre que T_a diffère très peu de T'_a et T_b très peu de T'_b. On a alors sensiblement

$$\mu(T_a) = \mu(T'_a), \qquad \mathcal{R}(T_a) = \mathcal{R}(T'_a),$$
$$\mu(T_b) = \mu(T'_b), \qquad \mathcal{R}(T_b) = \mathcal{R}(T'_b)$$

et, par conséquent

$$(T_a - T_b) + (T'_b - T'_a) = 2[K'_a \mu(T_a) + K'_b \mu(T_b)] J.$$

Le premier membre serait égal à o si l'effet Thomson n'existait pas. Sir W. Thomson a trouvé que, pour le fer, le premier membre a une valeur positive fort petite. Donc, pour le fer, l'effet Thomson existe, mais est très petit; de plus, $\mu(T)$ est positif, ce qui prouve, en se reportant aux égalités (2) et (3), qu'un courant dégage plus de chaleur dans le fer en passant du froid au chaud qu'en passant du chaud au froid. L'inverse a lieu pour le cuivre.

En remplaçant les thermomètres par des soudures thermo-électriques, M. Leroux (1) a donné au procédé une plus grande sensibilité, qui lui a permis de constater la proportionnalité de l'effet Thomson à l'intensité du courant. De plus, en faisant usage de l'égalité

$$T_a - T'_a = 2 K'_a \mu(T_a) J,$$

il a pu déterminer, pour différents métaux, des nombres proportionnels au coefficient $\mu(T)$; il lui a suffi pour cela de donner, pour tous ces métaux, même valeur au coefficient K'_a, ce qu'il a

(1) LEROUX, *Recherches sur les courants thermo-électriques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. X, p. 201; 1867).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

obtenu en disposant de la section des fils employés et du vernis qui les recouvre de manière à leur donner même coefficient de conductibilité interne et même pouvoir émissif.

Il a trouvé ainsi les nombres suivants, proportionnels au facteur $\mu(T)$:

Bismuth	31
Fer	31
Maillechort	25
Alliage d'antimoine d'Edmond Becquerel	24
Platine	18
Aluminium	0,1
Étain	0,1
Plomb	0
Laiton	— 0,3
Cuivre	— 2
Argent	— 6
Bronze d'aluminium	— 6
Zinc	—11
Cadmium	—31
Antimoine	—64
Alliage de 10 parties de bismuth pour 1 partie d'antimoine	—73

La théorie nous fournit une relation entre les effets Thomson présentés par différents métaux et les effets Peltier, produits par le passage de l'électricité de l'un à l'autre de ces métaux.

En effet, le coefficient de l'effet Peltier a pour valeur [Chapitre VIII, égalité (12)]

$$P_a^b = \frac{(H_a - H_b)T}{E}.$$

On a donc, d'après l'égalité (3)

$$(4) \qquad \frac{\mu_a(T) - \mu_b(T)}{T} = E\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{P_a^b(T)}{T}\right].$$

La petitesse de l'effet Thomson n'a pas permis, jusqu'ici, de soumettre cette relation à une vérification expérimentale.

§ 2. — Remarque sur la théorie de Clausius.

R. Clausius (1) a donné, en 1853, une théorie des phénomènes

(1) R. CLAUSIUS, *Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermo-electrischen Erscheinungen* (*Poggendorff's Annalen*, t. XC, p. 513; 1853. — *Théorie mécanique de la chaleur*. Trad. en français par F. Folie, t. II).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

thermo-électriques qui ne concordait nullement avec celle de Sir W. Thomson. Dans cette théorie, il prenait pour point de départ les propositions suivantes :

1° La différence de niveau potentiel entre les parties internes de deux métaux en contact est, à une température déterminée, proportionnelle au coefficient de l'effet Peltier qui se produit entre ces deux métaux à cette température.

2° L'effet Thomson n'existe pas.

De ces points de départ, Clausius déduisait deux conséquences fondamentales :

1° Tous les couples thermo-électriques sont à marche régulière.

2° La grandeur de l'effet Peltier à la soudure de deux métaux est proportionnelle à la température absolue de cette soudure.

Bien que ces conséquences ne puissent être acceptées d'une manière générale et que, par conséquent, la théorie de R. Clausius ne puisse être conservée dans son intégrité, il est intéressant de dire un mot de cette théorie qui a exercé une grande influence sur les travaux des physiciens.

Voyons donc quelles sont les conséquences logiques de chacun des deux postulats de R. Clausius.

Supposons, en premier lieu, que *l'effet Thomson n'existe pas* pour deux métaux a et b.

Les égalités

$$\mu_a(T) = 0, \qquad \mu_b(T) = 0, \tag{5}$$

jointes à l'égalité (4), donnent alors

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{P_a^b(T)}{T}\right] = 0.$$

Le coefficient de l'effet Peltier qui se produit entre ces deux métaux est proportionnel à la température absolue.

Les égalités (4) et (5) donnent d'ailleurs

$$H_a(T) - H_b(T) = (K_a - K_b),$$

K_a et K_b étant deux quantités indépendantes de la température; on a alors [Chapitre IX, égalité (14 *bis*)],

$$\mathcal{C}_a^b(T_0, T_1) = (K_a - K_b)(T_1 - T_0).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La force électromotrice d'un couple thermo-électrique formé avec ces deux métaux est proportionnelle à la différence des températures absolues des deux soudures.

L'égalité [Chapitre VIII, égalité (14)]

$$P_a^b(T) = \frac{E}{\varepsilon} T \frac{\partial D_a^b(T)}{dT}$$

devient

$$\frac{dD_a^b(T)}{dT} = \frac{K_a - K_b}{\varepsilon}.$$

On a donc

$$D_a^b(T) = \frac{K_a - K_b}{\varepsilon} T + \lambda,$$

λ étant une quantité indépendante de la température, et, par conséquent,

$$D_a^b(T) = \frac{E}{\varepsilon} P_a^b(T) + \lambda.$$

La différence de niveau potentiel des deux métaux subit des variations proportionnelles aux variations de la température absolue et mesurée par les variations du coefficient de l'effet Peltier. La proportionnalité de la différence de niveau potentiel avec le coefficient de l'effet Peltier est compatible avec cette loi sans être nécessitée par elle.

Ainsi, en prenant seulement pour point de départ la non-existence de l'effet Thomson, on est conduit à toutes les propositions qui constituent la théorie de Clausius, sauf à la proportionnalité des différences de niveau potentiel au phénomène de Peltier.

Inversement, supposons qu'on prenne pour point de départ unique la *proportionnalité de l'effet Peltier à la différence de niveau potentiel de deux métaux en contact,* comme l'a fait M. Potier (1).

L'égalité

$$P_a^b(T) = \frac{\varepsilon}{E} T \frac{dD_a^b(T)}{dT}$$

devant se réduire maintenant à

$$P_a^b(T) = \frac{\varepsilon}{E} D_a^b(T),$$

(1) POTIER, *Sur la théorie du contact* (*Journal de Physique,* 2e série, t. IV, p. 220; 1885).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on aura forcément

$$D_a^b(T) = \frac{K_a - K_b}{\varepsilon} T.$$

La différence de niveau potentiel entre deux métaux en contact, et, partant, le coefficient de l'effet Peltier, sont proportionnels à la température absolue.

L'égalité (14 *bis*) du Chapitre IX va donner

$$\mathcal{E}_a^b(T_0, T_1) = (K_a - K_b)(T_1 - T_0).$$

La force électromotrice thermo-électrique est proportionnelle à la différence des températures absolues des deux soudures.

Enfin, on trouve sans peine

$$\mu_a(T) = \mu_b(T).$$

L'effet Thomson suit la même loi pour tous les métaux; il n'est pas nécessairement nul.

On retrouve encore, dans ce cas, toutes les propositions de R. Clausius, sauf l'égalité à o de l'effet Thomson.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LIVRE VI.

LES ÉLECTROLYTES.

CHAPITRE PREMIER.

LA FORCE ÉLECTROMOTRICE D'UNE PILE.

§ 1. — La loi de Faraday.

Nous avons vu que, lorsqu'on faisait passer un courant au travers d'un voltamètre contenant du sulfate de cuivre, le sulfate de cuivre était décomposé; une certaine quantité de cuivre se déposait sur ce que nous avons nommé l'*électrode négative*, tandis que l'électrode positive, supposée en cuivre, était rongée.

Ce fait n'est pas isolé; la plupart des liquides composés, lorsqu'ils sont traversés par l'électricité, subissent une décomposition chimique. Ce phénomène est ce qu'on nomme l'*électrolyse*.

L'électrolyse a été étudiée avec beaucoup de soin par Faraday, qui est parvenu à mettre en lumière une loi fondamentale très simple à laquelle obéit ce phénomène.

Dans un voltamètre où le passage de l'électricité dans un sens déterminé peut donner lieu seulement à une réaction chimique de formule bien déterminée, le poids des corps mis en jeu par la réaction produite dans un temps déterminé dépend exclusivement de la quantité d'électricité qui a passé au travers du voltamètre pendant ce temps et est rigoureusement proportionnel à cette quantité. Il est indépendant de l'intensité du courant; de la forme, de la grandeur du voltamètre; de l'état dans lequel se trouvent les corps entrant en réaction. Pourvu que la formule de la réaction demeure la même, toutes les autres circonstances peuvent changer sans altérer le coefficient qui, multiplié par la quantité

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'électricité mise en mouvement, donne le poids de chaque corps entré en combinaison ou mis en liberté.

Telle est la première loi de Faraday. A cette loi, Faraday en a joint une seconde indiquant comment ce nombre varie avec la nature de la réaction qui peut se produire dans l'électrolyte. Mais cette seconde loi, dont l'énoncé donne lieu à certaines difficultés, ne nous sera pas utile par la suite; la première nous suffira pour donner la définition de l'*électrolyte*.

Le *conducteur métallique* était caractérisé par ce fait que l'électricité pouvait se déplacer en toute direction dans son intérieur sans y produire aucun changement d'état physique ou chimique.

Le *conducteur électrolytique,* au contraire, sera caractérisé par ce fait que le transport d'une charge électrique d'un bout à l'autre de ce conducteur dans un sens déterminé y donne lieu à une réaction chimique de formule déterminée, et que cette réaction met en jeu des poids des divers corps proportionnels à la quantité d'électricité mise en mouvement.

Ainsi, pour définir un électrolyte, il faut connaître non seulement l'état physique et chimique de ses diverses parties, mais encore la nature de la réaction que produit une unité d'électricité positive traversant cet électrolyte, soit dans un sens, soit dans l'autre.

Cette définition appelle de suite une remarque. La manière dont l'électrolyte est défini ne nous permettra pas d'étudier des modifications réelles ou virtuelles dans lesquelles l'électricité serait transportée seulement d'un point de l'électrolyte en un point voisin, car nous n'avons pas défini la manière dont se comporte l'électrolyte pour un semblable déplacement. Nous devrons toujours supposer notre électrolyte compris entre deux électrodes métalliques et envisager seulement des modifications dans lesquelles l'électricité passe d'une électrode à l'autre en traversant tout l'électrolyte.

Cela nous montre d'avance que la théorie des électrolytes que nous allons développer ne pourra pénétrer aussi loin dans l'étude de ces corps que nous l'avons fait pour l'étude des conducteurs

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

métalliques. Malgré cette restriction, nous pourrons établir un certain nombre de propositions qui sont, en Physique, d'un haut intérêt.

§ 2. — Propriétés d'une pile ouverte.

Dans un liquide électrolysable plongent deux conducteurs métalliques qui ne sont mis en communication électrique l'un avec l'autre que par l'intermédiaire de l'électrolyte. Le système est soumis à des forces données. Cherchons à quelle condition l'équilibre électrique sera établi sur un semblable système.

Le potentiel thermodynamique interne du système a pour valeur [Livre IV, Ch. II, égalité (15)]

$$(1) \qquad \mathcal{F} = \mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{W} + \Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n,$$

les diverses lettres ayant la signification indiquée au Chapitre que nous venons de citer.

Une modification réelle ou virtuelle du système fait varier $\mathcal{F}$ de $\delta\mathcal{F}$. En même temps, les forces extérieures appliquées au système effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$. On obtiendra les conditions d'équilibre du système en écrivant que, pour toute modification réelle ou virtuelle imposée à ce système, on a

$$(2) \qquad \delta\mathcal{F} - d\mathfrak{T}_e = 0.$$

Considérons d'abord, comme modification virtuelle, le passage d'une quantité d'électricité *positive* dq du point M situé à l'intérieur de l'une des électrodes A au point N situé à l'intérieur de l'autre électrode B.

Ce passage donne lieu à une réaction chimique de grandeur déterminée et proportionnelle à dq. Cette réaction fait éprouver à $\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma)$ une variation $\mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma)$. Les forces extérieures appliquées au système effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$. On peut écrire

$$(3) \qquad \mathrm{E}\,\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) - d\mathfrak{T}_e = -\mathfrak{C}\,dq,$$

$\mathfrak{C}$ étant une quantité qui dépend de la nature de la réaction que produit l'électricité positive en passant de M en N, de l'état physique où se trouvent les divers corps qui prennent part à cette réaction et des forces extérieures qui agissent sur le système.

La variation $\delta\mathrm{W}$ peut se partager en deux ; une première partie

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de cette variation est représentée par le terme

$$\varepsilon(V_B - V_A)\,dq,$$

V_A et V_B étant les niveaux potentiels à l'intérieur des deux électrodes A et B; une deuxième partie $\delta'_1 W$ provient du déplacement qu'ont dû subir les unes par rapport aux autres les diverses parties électrisées de l'électrolyte. Cette partie ne pourrait être calculée sans une connaissance complète des lois de la distribution électrique sur l'électrolyte. Or, pour les raisons indiquées à la fin du paragraphe précédent, nous ne pouvons espérer d'acquérir cette connaissance. Nous prendrons donc le parti de négliger $\delta'_1 W$, ce qui, comme nous le verrons, n'empêchera pas les résultats obtenus d'être très conformes à l'expérience pour les piles et les voltamètres de dimensions ordinairement employées.

Pour la même raison, nous réduirons la quantité

$$\delta(\Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n)$$

à

$$(\Theta_B - \Theta_A)\,dq,$$

négligeant les termes qui peuvent provenir du changement d'état de l'électrolyte.

Le travail non compensé $d\tau$, engendré par la modification que nous venons de considérer, aura pour valeur

$$d\tau = [\mathcal{E} + (\varepsilon V_A + \Theta_A) - (\varepsilon V_B + \Theta_B)]\,dq, \tag{4}$$

et cette modification sera impossible si l'on a

$$\mathcal{E} + (\varepsilon V_A + \Theta_A) - (\varepsilon V_B + V_B) \leq 0. \tag{5}$$

Prenons maintenant une autre modification virtuelle : le passage d'une quantité d'électricité *positive* dq du point N au point M. Nous aurons, dans ce cas,

$$\delta(W + \Theta_1 q_1 + \Theta_2 q_2 + \ldots + \Theta_n q_n) = [(\varepsilon V_A + \Theta_A) - (\varepsilon V_B + V_B)]\,dq.$$

Le passage de la charge électrique produit une certaine réaction chimique qui peut être différente de celle qui est produite par le transport en sens contraire. Cette réaction fait varier $E(\Upsilon - T\Sigma)$ de $E\delta'(\Upsilon - T\Sigma)$; les forces extérieures effectuent un travail $d\mathfrak{T}'_e$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous poserons

$$\mathrm{E}\,\delta'(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) - d\mathfrak{E}'_e = -\mathcal{C}'\,dq, \tag{6}$$

$\mathcal{C}'$ étant une quantité analogue à $\mathcal{C}$.

Notre modification donnera naissance à un travail non compensé $d\tau'$ ayant pour valeur

$$d\tau' = [\mathcal{C}' - (\varepsilon \mathrm{V_A} + \Theta_\mathrm{A}) + (\varepsilon \mathrm{V} + \Theta_\mathrm{B})]\,dq, \tag{7}$$

et cette modification sera impossible si l'on a

$$\mathcal{C}' - (\varepsilon \mathrm{V_A} + \Theta_\mathrm{A}) + (\varepsilon \mathrm{V_B} + \Theta_\mathrm{B}) \leqq 0. \tag{8}$$

Pour qu'il puisse y avoir équilibre sur le système, il faut que l'électricité ne puisse traverser l'électrolyte ni dans un sens ni dans l'autre. Il faut, par conséquent, que l'on puisse trouver deux valeurs $\mathrm{V_A}$, $\mathrm{V_B}$, du nouveau potentiel satisfaisant à la fois aux deux conditions (5) et (8).

Trois cas sont à distinguer :

1° On a

$$-\mathcal{C}' < \mathcal{C}. \tag{9}$$

Dans ce cas, *aucun équilibre électrique n'est possible sur le système*. Prenons un exemple de ce cas.

On plonge deux morceaux de fer dans l'acide chlorhydrique. L'électricité, en passant de l'un à l'autre dans quelque sens que ce soit, tend à ronger l'une des électrodes de fer pour former du chlorure de fer et à dégager de l'hydrogène sur l'autre. La réaction étant la même dans les deux sens, on a

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}'.$$

D'ailleurs, la transformation du fer et de l'acide chlorhydrique en chlorure de fer et hydrogène est, par elle-même et sans aucun transport d'électricité, un phénomène possible et non réversible. Ce phénomène entraînerait donc, dans le système supposé à l'état neutre, un travail non compensé positif. On a donc

$$\delta\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) - d\mathfrak{E}_e < 0$$

ou, d'après l'égalité (3),

$$\mathcal{C} > 0.$$

L'inégalité (9) sera donc vérifiée dans le cas actuel; il sera im-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

possible de trouver sur le système une distribution électrique qui empêche la réaction chimique de se produire.

2° On a

$$-\mathcal{E}' > \mathcal{E}. \tag{10}$$

Dans ce cas, *l'équilibre électrique est assuré sur le système pour une infinité de valeurs de la différence de niveau potentiel entre les deux électrodes.*

Il suffit, en effet, pour que cet équilibre ait lieu, que l'on ait

$$-\mathcal{E}' \geqq (\varepsilon V_B + \Theta_B) - (\varepsilon V_A + \Theta_A) \geqq \mathcal{E},$$

ou, en d'autres termes, que $(V_B - V_A)$ soit au moins égal à

$$\frac{\mathcal{E} + \Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon},$$

et au plus égal à

$$\frac{-\mathcal{E}' + \Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon}.$$

Un semblable système est dit *polarisable;* lorsque l'équilibre est établi, le système est dit *polarisé*.

Prenons-en un exemple.

Deux électrodes de platine plongent dans l'eau acidulée. Dans quelque sens qu'une charge électrique passe de l'une à l'autre, l'eau est décomposée; de l'hydrogène se dégage sur l'une des électrodes et de l'oxygène sur l'autre. La réaction étant la même dans les deux sens, on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}'.$$

Sans transport électrique, dans les conditions ordinaires, l'eau ne peut se décomposer en oxygène et hydrogène; elle est dans un état stable. La décomposition en question correspond donc à un travail non compensé négatif; on a

$$E\delta(\Upsilon - T\Sigma) - d\mathfrak{E}_e > 0,$$

ou

$$\mathcal{E} < 0.$$

L'inégalité (10) est vérifiée, et le couple en question est polarisable.

3° On a

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}'. \tag{11}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans ce cas, *l'équilibre électrique a lieu sur le système pour une valeur bien déterminée de la différence du niveau potentiel entre les deux électrodes*. Cette valeur est donnée par l'égalité

$$V_B - V_A = \frac{\mathcal{E} + \Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon}.$$

Prenons-en un exemple.

Une lame de zinc et une lame de cuivre plongent dans une dissolution de sulfate de zinc et de sulfate de cuivre. Si une certaine quantité d'électricité positive passe du zinc au cuivre, une certaine quantité de zinc est dissoute, tandis qu'une quantité équivalente de sulfate de cuivre se décompose et que le cuivre se précipite. Si, au contraire, une quantité d'électricité positive passe du cuivre au zinc, la réaction inverse se produit. On a donc bien $\mathcal{E} = -\mathcal{E}'$.

De tels systèmes sont dits *non polarisables*.

Les systèmes non polarisables jouissent donc de cette propriété que, dans l'état d'équilibre électrique, la différence de niveau potentiel entre les deux électrodes surpasse d'une quantité $\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}$ parfaitement déterminée la différence de niveau potentiel

$$\frac{\Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon},$$

qui s'établirait entre ces deux électrodes si elles étaient réunies l'une à l'autre, non par l'électrolyte, mais par des métaux ayant tous la même température.

Cette propriété est employée pour obtenir des différences de niveaux potentiels étalons; la pile de Daniell, la pile de Latimer-Clark, servent constamment à cet usage.

§ 3. — Propriétés d'une pile fermée.

Laissons maintenant de côté les systèmes du premier genre, sur lesquels l'équilibre électrique ne peut s'établir, et étudions seulement les systèmes des deux autres genres : *polarisables* et *non polarisables*.

Étant donné un de ces systèmes, réunissons les deux métaux A et B par une chaîne formée d'un seul métal ou de plusieurs métaux à la même température et demandons-nous si l'équilibre électrique est possible sur le système ainsi formé.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Aux conditions d'équilibre déjà obtenues, il faut joindre la condition que l'on obtient en exprimant que le potentiel thermodynamique interne ne varie pas lorsqu'une charge dq passe du point M au point N ou inversement au travers du circuit métallique. Cette condition est

$$\varepsilon V_A + \Theta_A = \varepsilon V_B + \Theta_B. \tag{12}$$

Voyons si elle est compatible avec les conditions trouvées précédemment.

1° *Couples non polarisables.*

Les deux conditions d'équilibre

$$\begin{aligned} \varepsilon V_A + \Theta_A - \varepsilon V_B - \Theta_B + \mathcal{E} &= 0, \\ \varepsilon V_A + \Theta_A - \varepsilon V_B - \Theta_B &= 0 \end{aligned}$$

sont incompatibles si l'on n'a pas

$$\mathcal{E} = 0.$$

D'après la définition de $\mathcal{E}$ donnée par l'égalité (3), cette égalité ne peut avoir lieu à moins que la réaction, dont la pile est le siège, supposée effectuée sans aucun phénomène électrique, ne soit un phénomène réversible. Excluons ce cas particulier et nous arrivons à cette proposition :

Si l'on ferme par une chaîne métallique un couple non polarisable, l'équilibre électrique ne pourra plus subsister sur le système.

2° *Couples polarisables.*

Pour tous les couples polarisables, on a

$$\mathcal{E}' > \mathcal{E}. \tag{10}$$

On peut alors ranger ces couples en trois classes :

α. Ceux pour lesquels on a

$$-\mathcal{E}' > 0 > \mathcal{E};$$

β. Ceux pour lesquels on a

$$0 > -\mathcal{E}' > \mathcal{E};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

γ. Ceux pour lesquels on a

$$-\mathcal{E}' > \mathcal{E} > 0.$$

Les deux conditions d'équilibre

$$-\mathcal{E}' \geqq (\varepsilon V_B + \Theta_B) - (\varepsilon V_A + \Theta_A) \geqq \mathcal{E},$$
$$(\varepsilon V_B + \Theta_B) - (\varepsilon V_A + \Theta_A) = 0$$

ne sont compatibles que pour les couples de la première classe.

Ainsi, parmi les trois catégories de couples polarisables, les couples de la catégorie α sont les seuls sur lesquels puisse s'établir l'équilibre électrique si l'on ferme le circuit. Sur les autres, l'équilibre électrique est impossible. Le couple polarisable pris comme exemple au § 2 rentre dans cette catégorie α.

Nous réserverons proprement aux couples polarisables de la catégorie α le nom de *voltamètres*.

Les couples non polarisables et les couples polarisables des catégories β et γ sont tels que l'équilibre électrique, possible sur un tel couple en circuit ouvert, devient impossible en circuit fermé. On donne à ces couples le nom d'*éléments voltaïques*.

Si l'on ferme le circuit d'un élément voltaïque, le système dont cet élément fait partie va devenir le siège d'un courant permanent. Quelle sera l'intensité de ce courant?

Pour répondre à cette question, nous ferons usage du premier des deux principes hypothétiques qui dominent toute la théorie des courants permanents, du principe obtenu au Chap. IV du Liv. V en généralisant la loi d'Ohm.

Rappelons ce principe :

En un point (x, y, z) d'un conducteur traversé par des courants permanents, le flux électrique a pour composantes u, v, w, et la résistance spécifique a pour valeur $\mathcal{R}$. Si une charge électrique dq passait du point (x, y, z) au point

$$(x + dx, y + dy, z + dz),$$

dans le système supposé sans courant, elle donnerait lieu à une modification qui engendrerait un travail non compensé $d\tau$ et l'on a, quels que soient dx, dy, dz,

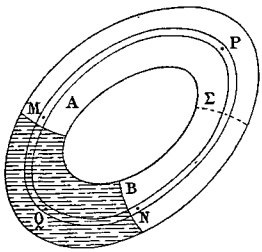
$$d\tau = \mathcal{R}(u\,dx + v\,dy + w\,dz)\,dq. \tag{13}$$

Cela posé, considérons le circuit fermé que nous voulons étu-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dier. Admettons que toutes les lignes de flux qui doivent être fermées se ferment après avoir parcouru la chaîne tout entière (*fig.* 111). Considérons un canal de flux infiniment délié. Soit $d\omega$

Fig. 111.



l'aire de sa section en un point, f le flux en ce point. Le produit

$$i = f\,d\omega$$

garde la même valeur tout le long du canal de flux; le flux a même direction tout le long de ce canal.

Le courant peut, dans ce canal, marcher dans le sens MQNP ou bien dans le sens MPNQ. Discutons ces deux hypothèses :

1° Le courant marche dans le sens MQNP.

Supposons qu'une charge positive dq décrive un élément ds de ce chemin. Dans le système supposé sans courant, elle produirait un travail non compensé $d\tau$, et l'on aurait, d'après l'égalité (13),

$$d\tau = \mathcal{R}\,f\,ds\,dq,$$
$$= \frac{\mathcal{R}}{d\omega}\,i\,ds\,dq.$$

En intégrant les deux membres tout le long de la ligne fermée MQNPM, on aurait

$$\delta\tau = i\,dq\int\frac{\mathcal{R}}{d\omega}\,ds,$$

$\delta\tau$ étant le travail non compensé produit, dans le système supposé sans courant, par le passage d'une charge d'électricité positive dq au travers de la ligne fermée MQNPM.

Or ce travail se compose du travail non compensé produit par la charge dq en parcourant le chemin MQN, travail qui a pour valeur, d'après l'égalité (4),

$$[\mathcal{E} + \varepsilon V(M) + \Theta_A - \varepsilon V(N) + \Theta_B]\,dq$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et du travail non compensé produit par la même charge en parcourant le chemin NPM, travail qui a pour valeur

$$[\varepsilon V(N) + \Theta_B - \varepsilon V(M) - \Theta_A]\,dq.$$

On a donc

$$\delta\tau = \mathcal{E}\,dq,$$

et, par conséquent, si le courant, dans le canal de flux considéré marche dans le sens MQNPM, on a

$$\mathcal{E} = i\int \frac{\mathcal{R}}{d\omega}\,ds. \tag{14}$$

2° Le courant marche dans le sens MPNQ. On trouve alors, de la même manière,

$$\mathcal{E}' = i'\int \frac{\mathcal{R}}{d\omega}\,ds. \tag{15}$$

Les quantités qui figurent aux seconds membres des égalités (14) et (15) sont toutes positives. Chacune de ces égalités n'est donc possible que si son premier membre est positif. Voyons les divers cas qui se peuvent présenter :

1° *Couples non polarisables.*

On a alors

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}'.$$

Si $\mathcal{E}$ est positif, l'égalité (15) est impossible; dans toutes les lignes de flux, le courant marche dans le sens MQNPM.

Si $\mathcal{E}$ est négatif, l'égalité (14) est impossible; dans toutes les lignes de flux, le courant marche dans le sens MPNQM.

2° *Couples polarisables.*

Si le couple appartient à la classe β, on a

$$\mathcal{E} < 0, \qquad \mathcal{E}' > 0.$$

L'égalité (14) est impossible; dans toutes les lignes de flux, le courant marche dans le sens MPNQM.

Si le couple appartient à la classe γ, on a

$$\mathcal{E} > 0, \qquad \mathcal{E}' < 0.$$

L'égalité (15) est impossible; dans toutes les lignes de flux, le courant marche dans le sens MQNPM.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Ces résultats peuvent se réunir en l'énoncé suivant :

Dans une pile dont le circuit est fermé, toutes les lignes de flux sont parcourues par un courant de même sens. Ce courant marche de manière à engendrer dans la pile une réaction qui serait possible d'elle-même, dans un système à l'état neutre.

Supposons dorénavant, pour fixer les idées, $\mathcal{E}$ positif et $\mathcal{E}'$ négatif. Si l'inverse avait lieu, il suffirait, dans ce qui va suivre, de permuter B et A.

Dans toute ligne de flux, le courant marche dans le sens MQNP, et l'on a

$$\mathcal{E} = i \int \frac{\mathcal{R}\, ds}{d\omega}. \tag{14}$$

Coupons la chaîne par une surface Σ normale à toutes les lignes de flux. Soit $d\Omega$ la section par cette surface du canal de flux considéré dans ce qui précède.

L'égalité précédente peut s'écrire

$$\mathcal{E} \frac{d\Omega}{\int \frac{d\Omega}{d\omega} \mathcal{R}\, ds} = i.$$

Faisons la somme des deux membres pour tous les éléments $d\Omega$ de la surface Σ. Si nous désignons par J l'intensité du courant qui traverse la chaîne, et si nous nommons *résistance de la chaîne* la quantité R définie par l'égalité

$$\frac{1}{R} = \mathrm{S} \frac{d\Omega}{\int \frac{d\Omega}{d\omega} \mathcal{R}\, ds},$$

nous aurons

$$\mathrm{J} = \frac{\mathcal{E}}{\mathrm{R}}. \tag{15}$$

Telle est l'égalité très simple qui nous donne l'intensité du courant parcourant la chaîne.

Nous donnerons à $\mathcal{E}$ le nom de *force électromotrice* de l'élément voltaïque, et nous énoncerons la proposition suivante :

L'intensité du courant qui parcourt une chaîne hydro-électrique fermée s'obtient en divisant la force électromotrice de l'élément voltaïque par la résistance de la chaîne.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

On peut comparer les propriétés d'une pile ouverte et les propriétés d'une pile fermée; voici les résultats de cette comparaison :

1° *Couple non polarisable.*

Lorsque cette pile est ouverte, il existe entre les deux électrodes une différence de niveau potentiel

$$V_B - V_A = \frac{\mathcal{C} + \Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon},$$

tandis que, si les deux électrodes étaient seulement réunies par une chaîne métallique ayant la même température en tous ses points, elles présenteraient une différence de niveau potentiel

$$V'_B - V'_A = \frac{\Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon}.$$

Nous aurons alors l'énoncé suivant :

Prenez, dans une pile non polarisable ouverte, la différence de niveau potentiel qui existe entre les deux électrodes. Retranchez-en la différence de niveau potentiel que présenteraient ces deux électrodes en contact direct. Multipliez le résultat par ε. *Vous aurez la valeur de la force électromotrice de la pile fermée.*

2° *Couple polarisable.*

Lorsque l'équilibre électrique est établi sur ce couple, nous avons, entre les deux électrodes, une différence de niveau potentiel qui vérifie la double inégalité

$$\frac{\mathcal{C} + \Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon} \leqq V_B - V_A \leqq \frac{-\mathcal{C}' + \Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon},$$

tandis que, si elles étaient directement en contact, on aurait, entre ces deux électrodes, une différence de niveau potentiel

$$V'_B - V'_A = \frac{\Theta_A - \Theta_B}{\varepsilon}.$$

D'ailleurs le couple appartient à la classe γ, pour laquelle

$$\mathcal{C} < -\mathcal{C}'.$$

On arrive donc à l'énoncé suivant :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenez toutes les valeurs que peut avoir, dans la pile ouverte, l'excès du niveau potentiel de l'électrode B *sur le niveau potentiel de l'électrode* A. *Retranchez-en la valeur que prend ce même excès lorsque les deux électrodes sont directement au contact. Prenez, parmi tous les résultats ainsi obtenus, celui qui a la plus petite valeur absolue. Multipliez-le par* ε. *Vous aurez la force électromotrice de la pile fermée.*

Dans tous les cas possibles, on peut, par l'étude de la pile ouverte, déterminer le sens du courant dans la pile fermée, au moyen du théorème suivant :

Si, dans la pile ouverte en équilibre, l'excès du niveau potentiel de l'électrode B *sur le niveau potentiel de l'électrode* A *est toujours plus grand que lorsque les deux métaux sont directement au contact, lorsqu'on fermera la pile, le courant ira de* B *en* A *au travers du circuit extérieur. L'inverse aura lieu si cet excès est toujours plus petit que lorsque les deux métaux sont directement en contact.*

Nous avons étudié les chaînes fermées renfermant une seule pile. On pourra, sans aucune difficulté, soumettre à des considérations analogues les chaînes renfermant plusieurs piles, ou bien des piles et des voltamètres.

§ 4. — **Vérifications expérimentales.**

Les propositions précédentes nous permettent de calculer la force électromotrice d'une pile lorsque nous connaissons la réaction dont elle est le siège, au moyen du théorème suivant, qui n'est que la traduction, en langage ordinaire, de la définition de $\mathcal{E}$ donnée par l'égalité (3) :

Considérons la réaction qui se produit dans la pile pendant qu'une quantité d'électricité égale à l'unité parcourt le circuit. Produite dans un système identique, mais à l'état neutre, elle donnerait naissance à un certain travail non compensé. Ce travail non compensé représente la force électromotrice de la pile.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette proposition a été donnée en 1878 par M. Gibbs (1). Elle constitue l'un des plus beaux résultats qu'ait obtenus la Thermodynamique. M. Gibbs, en l'énonçant, a redressé une des graves erreurs qui aient régné en Physique. Cette erreur consistait à calculer la force électromotrice d'une pile au moyen du théorème suivant :

Envisagez la réaction dont la pile est le siège pendant que le circuit est parcouru par une charge électrique égale à l'unité. Dans un système identique, mais à l'état neutre, cette réaction dégagerait une certaine quantité de chaleur. Cette quantité, multipliée par l'équivalent mécanique de la chaleur, représente la force électromotrice de la pile.

Cette loi avait été énoncée d'abord par M. Edm. Becquerel (2), puis par M. Helmholtz (3) et par Sir W. Thomson (4). Nous renverrons, pour l'histoire des recherches par lesquelles elle a été reconnue inexacte, à notre livre sur *le Potentiel thermodynamique et ses applications*.

La loi de M. Gibbs a une telle importance que l'on doit regarder comme très désirable d'en avoir une vérification expérimentale directe. Cette vérification est fournie par les recherches de M. H. von Helmholtz et James Moser.

Dans un couple hydro-électrique, la force électromotrice dépend de la concentration plus ou moins grande des liquides qui baignent les électrodes. Afin de préciser l'influence que la concentration des liquides exerce sur la force électromotrice, M. James Moser (5) entreprit l'étude de piles dans lesquelles la réaction

(1) J. WILLARD GIBBS, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of the Academy of Arts and Sciences of Connecticut*, p. 501; 1878).

(2) EDM. BECQUEREL, *Des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. IX, p. 21; 1843).

(3) HELMHOLTZ, *Ueber die Erhaltung der Kraft*, p. 49; Berlin, 1847 (*Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 50).

(4) SIR W. THOMSON, *On the mechanical theory of electrolysis* (*Philosophical magazine*, 4e série, t. II, p. 177; 1851. — *W. Thomson's mathematical and physical papers*, t. I, p. 472).

(5) J. MOSER, *Galvanische Ströme zwischen verschieden concentrirten Lösungen desselben Körpers und Spannungsreihen* (*Naturforsch. Vers.*; Munich, sept. 1877. — *Monatsber. der Berl. Akad.*, 8 nov. 1877. — *Wiedemann's Annalen*, t. III, p. 216; 1878).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

produite à un pôle est renversée à l'autre pôle. La force électromotrice dépend alors uniquement de la concentration des liquides. Deux vases, mis en communication par un siphon, renfermaient des dissolutions inégalement concentrées d'un même sel métallique. Deux électrodes, formées du métal qui entrait dans la constitution de ce sel, plongeaient dans ces vases. Tel était le type des piles dont M. J. Moser mesura la force électromotrice.

En même temps que M. Moser publiait les résultats de ces recherches expérimentales exécutées au laboratoire de M. Helmholtz, ce dernier (1) appliquait les propositions de la Thermodynamique aux phénomènes étudiés par M. Moser.

Les dissolutions renfermées dans les deux vases dont se composait chacune des piles étudiées par M. Moser avaient des tensions de vapeur différentes. M. Helmholtz montra que, de la variation que subit la tension de vapeur de ces dissolutions lorsqu'on fait varier leur concentration, on pouvait déduire la valeur de leur force électromotrice. Ce théorème de M. Helmholtz peut être regardé comme un cas particulier de la loi de M. Gibbs.

La comparaison de la valeur ainsi calculée à la valeur observée conduisait à un accord satisfaisant. Quelques années plus tard, cette comparaison était poursuivie avec le même succès dans un nouveau Mémoire de M. James Moser (2). Enfin, en 1882, M. von Helmholtz (3) étudiait les piles obtenues en opposant l'un à l'autre deux couples non polarisables, formés tous deux de mercure, calomel, chlorure de zinc dissous et zinc, mais renfermant des dissolutions de chlorure de zinc de concentration différente. Il obtint l'accord le plus complet entre la valeur

---

(1) H. HELMHOLTZ, *Ueber galvanische Ströme verursacht durch Concentration-Unterschiede. Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie* (*Monatsber. der Berl. Akad.*, 26 nov. 1877. — *Wiedemann's Annalen*, t. III, p. 201; 1878).

(2) J. MOSER, *Der Kreisprocess, erzeugt durch den Reactionsstrom der electrolytischen Ueberführung und durch Verdampfung und Condensation* (*Nova acta der K. Leop. Carol. Deutsch. Akad. der Naturforschern.*, t. XLI, Ire Partie, n° 1. — *Wiedemann's Annalen*, t. XIV, p. 62; 1881).

(3) H. VON HELMHOLTZ, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. II. Studien über Chlorzink-Calomel-Elemente* (*Sitzungsber. der Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, 1882, p. 825).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

observée de la force électromotrice et la valeur calculée par la théorie de M. Gibbs.

Dans un espace de treize jours, la valeur électromotrice de la pile étudiée par M. H. von Helmholtz oscilla entre

$$0,11648$$

et

$$0,11428;$$

la valeur moyenne de cette force fut

$$0,11541.$$

D'autre part, deux méthodes de calcul différentes, appliquées à la règle de M. Gibbs, donnaient

$$0,11579 \quad \text{et} \quad 0,11455.$$

Une semblable concordance fournit une belle vérification de la théorie de M. Gibbs.

Nous ne pouvons entrer ici dans l'étude des courants produits par les différences de concentration; nous renverrons le lecteur aux Mémoires que nous avons cités et à l'exposé que nous avons donné ailleurs (1).

(1) P. DUHEM, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 117. Paris, 1886.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

CHAPITRE II.

LA CHALEUR CHIMIQUE ET LA CHALEUR VOLTAIQUE.

§ 1. — **Distinction entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque.**

Nous avons, au Chapitre précédent, appliqué aux courants permanents qui traverse une pile voltaïque le premier des deux principes qui régissent les courants permanents. Nous allons maintenant appliquer à ces mêmes courants le second de ces principes, celui que l'on obtient en généralisant la loi de Joule.

Ce principe est le suivant :

A l'intérieur du système que parcourent les courants permanents, traçons une surface fermée. Supposons que, pendant le temps dt, le système ainsi formé éprouve une certaine modification. Si le système était supposé sans courant, cette modification dégagerait une certaine quantité de chaleur. Cette quantité de chaleur est aussi celle qui est dégagée, dans le temps considéré, par la partie du système renfermée à l'intérieur de la surface que l'on a tracée.

Appliquons ce principe à des surfaces fermées convenablement choisies.

Commençons par considérer une surface S enfermant tout le système à son intérieur.

Si nous remarquons que les courants permanents qui parcourent le système ne modifient pas la distribution électrique sur le système, nous voyons que la modification considérée ferait varier l'énergie interne du système supposé sans courant de

$$\mathrm{E}\,\delta\Upsilon + q_1\delta\left(\Theta_1 - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\mathrm{T}}\right) + \ldots + q_n\delta\left(\Theta_n - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta_n}{\partial\mathrm{T}}\right).$$

Convenons de négliger, comme au Chapitre précédent, les termes

$$q_1\delta\left(\Theta_1 - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta_1}{\partial\mathrm{T}}\right), \quad \ldots, \quad q_n\delta\left(\Theta_n - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta_n}{\partial\mathrm{T}}\right);$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

désignons par $d\mathfrak{T}_e$ le travail produit, pendant le temps dt, par les forces extérieures appliquées au système, et nous trouverons, pour expression de la quantité de chaleur dQ dégagée par le système pendant le temps dt,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{E}\, d\mathrm{Q} = -\mathrm{E}\, \delta\Upsilon + d\mathfrak{T}_e.$$

Cette égalité conduit à la loi suivante :

La quantité de chaleur dégagée pendant un certain temps dans un circuit fermé renfermant une pile hydro-électrique est égale à la quantité de chaleur que dégagerait la réaction chimique dont le système est le siège, pendant ce temps, si elle s'accomplissait, sous l'action des mêmes forces extérieures, dans un système à l'état neutre.

Cette loi fondamentale est due à M. Edmond Becquerel (1); elle a été vérifiée avec grand soin par Favre (2).

La réaction que produit le système pendant que le courant transporte une quantité d'électricité égale à l'unité dégagerait, dans un système à l'état neutre, soumis aux mêmes forces extérieures, une quantité de chaleur L. La quantité de chaleur que le système dégage dans le temps dt a alors pour valeur

$$\text{(2)} \qquad d\mathrm{Q} = \mathrm{L}\mathrm{J}\, dt,$$

J étant l'intensité du courant.

La quantité L est ce que nous nommerons la *chaleur chimique*.

Considérons une pile formée par un électrolyte E dans lequel plongent deux métaux A et B reliés l'un à l'autre par un troisième métal C, homogène, ayant la même température en tous ses points (*fig.* 112).

A l'intérieur du métal C, menons deux surfaces coupant le cir-

---

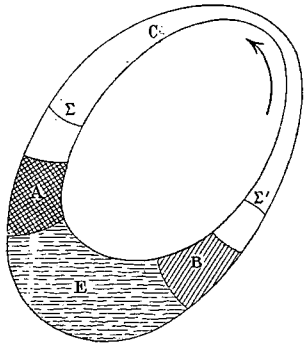
(1) Edmond Becquerel, *Des lois du dégagement de la chaleur pendant le passage des courants électriques à travers les corps solides et liquides* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. IX, p. 21; 1843).

(2) P.-A. Favre, *Notes sur les effets calorifiques développés dans le circuit voltaïque dans leur rapport avec l'action chimique qui donne naissance au courant* (*Comptes rendus*, t. XXXVI, p. 342, 1853; t. XXXIX, p. 1212, 1854; t. XLV, p. 56; 1857). *Recherches thermiques sur les courants hydro-électriques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, t. XL, p. 293; 1854).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

cuit, l'une Σ au voisinage de l'électrode A, l'autre Σ′ au voisinage de l'électrode B. Nous supposerons ces surfaces normales aux lignes de flux; comme elles sont tracées à l'intérieur d'un métal homogène, elles seront, par cela même, surfaces d'égal niveau po-

Fig. 112.



tentiel. La fonction potentielle aura, en tous les points de la surface Σ, une même valeur V, et, en tous les points de la surface Σ′, une même valeur V′.

Le courant sera supposé marcher de la surface Σ′ à la surface Σ au travers du métal C.

Les deux surfaces Σ, Σ′, jointes à la surface qui limite le circuit, forment deux surfaces fermées simplement connexes. Nous nommerons les parties du système que renferment ces surfaces : *la pile* et le *circuit extérieur* à la pile.

Cherchons la quantité de chaleur dégagée par chacune de ces parties.

Si les courants subsistaient dans le circuit extérieur à la pile, mais étaient anéantis dans la pile, la seule modification que le système éprouverait dans le temps *dt* consisterait dans le transport d'une quantité d'électricité *dt* de la surface Σ′ à la surface Σ. Dans le système supposé sans courant, cette modification dégagerait une quantité de chaleur dQ_1 donnée par

$$\text{(3)} \qquad E\,dQ_1 = \varepsilon(V' - V)J\,dt.$$

dQ_1 représente la quantité de chaleur dégagée, dans le temps dt, par le circuit extérieur.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette quantité peut encore s'exprimer autrement. Si nous désignons par ρ la résistance du circuit extérieur, définie comme au Livre V, Chapitre IV, nous aurons

$$\varepsilon(V' - V) = \rho J \tag{4}$$

et, par conséquent,

$$E\,dQ_1 = \rho J^2\,dt. \tag{5}$$

Si les courants subsistaient dans la pile et s'annulaient dans le circuit extérieur, pendant le temps dt, la charge de la surface Σ diminuerait de $J\,dt$; celle de la surface Σ' augmenterait de la même quantité. En même temps le système éprouverait une certaine transformation chimique. Si ces modifications avaient lieu dans le système supposé sans courant, on voit sans peine qu'elles dégageraient une quantité de chaleur dQ_2 donnée par

$$E\,dQ_2 = ELJ\,dt + \varepsilon(V - V')\,J\,dt. \tag{6}$$

dQ_2 représente la quantité de chaleur dégagée, dans le temps dt, par la pile.

Cette égalité peut se mettre sous une autre forme. Soit R la résistance de la pile, définie comme nous définissons habituellement la résistance d'un conducteur à trois dimensions. Nous trouverons sans peine l'égalité

$$RJ = \varepsilon(V - V') + \mathcal{E}. \tag{7}$$

L'égalité (6) peut donc s'écrire

$$E\,dQ_2 = ELJ\,dt - \mathcal{E}J\,dt + RJ^2\,dt. \tag{8}$$

Nous donnerons à la quantité

$$\lambda = \frac{\mathcal{E}}{E} \tag{9}$$

le nom de *chaleur voltaïque*. L'origine de cette détermination peut s'expliquer de la manière suivante. D'après les égalités (4) et (7), on a

$$(R + \rho)\,J^2\,dt = E\lambda J\,dt.$$

$\lambda J\,dt$ représente donc le dégagement de chaleur que donnerait, pour le temps dt, l'application de la loi de Joule au système.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La quantité

$$\mathfrak{A} = L - \lambda \tag{10}$$

est la *différence entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque.*

Désignons par $\mathfrak{Q}_2$ la quantité de chaleur que dégage la pile pendant que le courant transporte une quantité d'électricité égale à l'unité. D'après les égalités (8), (9) et (10), nous aurons

$$E\mathfrak{Q}_2 = E\mathfrak{A} + RJ.$$

Supposons que l'on fasse croître indéfiniment la résistance ρ du circuit extérieur en laissant constante la résistance de la pile. La résistance totale du circuit augmentant au delà de toute limite, l'intensité du courant tendra vers o et l'égalité précédente deviendra, à la limite,

$$\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{A}.$$

Lorsqu'on fait croître au delà de toute limite la résistance du circuit extérieur, la quantité de chaleur que dégage la pile pendant le passage d'une quantité d'électricité égale à l'unité tend vers une limite positive ou négative qui est la différence entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque.

Cette proposition a été trouvée expérimentalement par P.-A. Favre (1). M. Gibbs en a donné l'exposé théorique (2).

La chaleur chimique est, par définition, *la chaleur totale que dégagerait la réaction produite dans le système par le passage d'une charge électrique égale à l'unité, si cette réaction avait lieu, sous l'action des mêmes forces extérieures, dans un système à l'état neutre.*

D'autre part, si l'on rapproche l'égalité (9) de la définition de la force électromotrice d'une pile donnée au Chapitre précédent, on voit que :

---

(1) P. A. Favre, *Recherches thermiques sur les courants hydro-électriques* (*Comptes rendus,* t. XLVI, p. 662; 1858).

(2) J. Willard Gibbs, *On equilibrium of heterogeneous substances* (*Transactions of Academy of Connecticut,* t. III, p. 516; 1878).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La chaleur voltaïque est la chaleur non compensée que dégagerait la réaction produite dans le système par le passage d'une charge électrique égale à l'unité, si cette réaction avait lieu, sous l'action des mêmes forces extérieures, dans un système à l'état neutre.

Le rapprochement de ces deux propositions donne cette troisième :

La différence entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque représente la chaleur compensée que dégagerait la réaction produite dans le système par le passage d'une charge électrique égale à l'unité, si cette réaction avait lieu, sous l'action des mêmes forces extérieures, dans un système à l'état neutre.

On voit par là qu'en étudiant non seulement la chaleur dégagée dans une réaction, mais encore la force électromotrice de la pile qu'elle peut produire, on peut faire expérimentalement le départ entre la chaleur compensée et la chaleur non compensée que dégage cette réaction.

§ 2. — Relation d'Helmholtz.

La dernière proposition obtenue au paragraphe précédent s'exprime par l'égalité suivante

$$\mathcal{A}\mathrm{J}\,dt = -\,\mathrm{T}\delta\Sigma, \tag{11}$$

$\delta\Sigma$ étant la variation que ferait subir à l'entropie du système, supposé à l'état neutre, la réaction produite dans le système pendant le temps dt.

Nous avons aussi

$$\mathcal{E}\mathrm{J}\,dt = -\,\mathrm{E}\delta(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + d\mathfrak{T}_e, \tag{12}$$

$d\mathfrak{T}_e$ étant le travail accompli, dans les mêmes conditions, par les forces extérieures auxquelles le système est soumis.

Supposons le système soumis seulement à une pression normale, uniforme et constante P. Nous aurons alors

$$\mathcal{E}\mathrm{J}\,dt = -\,\delta[\mathrm{E}(\Upsilon - \mathrm{T}\Sigma) + \mathrm{P}v], \tag{13}$$

v étant le volume du système.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

D'autre part, on trouve sans peine les relations

$$E\Sigma = -\frac{\partial}{\partial T}[E(\Upsilon - T\Sigma) + P\rho]$$

$$\rho = \frac{\partial}{\partial P}[E(\Upsilon - T\Sigma) + P\rho],$$

en sorte que les égalités (11) et (13) nous donnent les relations

$$\mathcal{A} = -\frac{T}{E}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} J\,dt = -\delta\rho. \tag{15}$$

La première de ces deux relations, qui supposent les variables P et T prises pour variables indépendantes, est due à M. H. von Helmholtz (1).

Cette relation conduit aux conséquences suivantes :

Si, dans une pile, la chaleur chimique est supérieure à la chaleur voltaïque, la force électromotrice de la pile diminue lorsqu'on augmente la température sous pression constante.

Si, dans une pile, la chaleur chimique est inférieure à la chaleur voltaïque, la force électromotrice de la pile augmente avec la température, la pression demeurant constante.

Si, dans une pile, la chaleur chimique est égale à la chaleur voltaïque, la force électromotrice de la pile, sous pression constante, demeure indépendante de la température.

L'élément Daniell est dans ce dernier cas.

M. Siegfried Czapski (2), M. Hans Jahn (3), M. Lucien Poincaré (4) ont vérifié l'exactitude de la relation de M. H. von Helm-

---

(1) H. von Helmholtz, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1882, p. 2).

(2) S. Czapski, *Ueber die thermische Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft galvanischer Elemente und ihrer Beziehung zur freien Energie derselben* (*Wiedemann's Annalen*, t. XXI, p. 209; 1884).

(3) H. Jahn, *Ueber die Æquivalenz von chemischer Energie und Stromenergie* (*Wiedemann's Annalen*, t. XXVIII, p. 491; 1886).

(4) L. Poincaré, *Sur les piles à électrolytes fondus et sur les forces thermoélectriques à la surface de contact d'un métal et d'un sel fondu* (*Comptes rendus*, t. CX, p. 339; 1890).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

holtz pour des piles diverses, renfermant des électrolytes dissous ou fondus.

Supposons que, dans une pile, la différence entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque soit indépendante de la température; ou, ce qui revient au même, d'après la formule (14), que la force électromotrice de la pile puisse être représentée, en fonction de la température, par une expression de la forme

$$\mathcal{E} = K \log T + K'.$$

Dans ce cas, la relation (11) donne

$$\delta \frac{\partial \Sigma}{\partial T} = 0.$$

Or, si l'on désigne par C la capacité calorifique sous pression constante du système, on a

$$C = T \frac{\partial \Sigma}{\partial T}.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\delta C = 0.$$

Donc, *pour que la différence entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque soit indépendante de la température, il faut et il suffit que la réaction qui se produit dans le système n'en altère pas la capacité calorifique.*

Si, en particulier, la chaleur chimique est constamment égale à la chaleur voltaïque, cas auquel la force électromotrice est indépendante de la température, la réaction dont le système est le siège n'en fait pas varier la capacité calorifique. Cette proposition est due à M. Lippmann (1). La réciproque de cette proposition n'est pas exacte.

Nous avons, dans l'élément Daniell, un exemple auquel s'applique la proposition de M. Lippmann. L'élément Daniell ayant, comme nous l'avons vu, une force électromotrice indépendante de la température, la capacité calorifique de cet élément ne doit pas varier par la réaction dont il est le siège.

---

(1) LIPPMANN, *De l'action de la chaleur sur les piles et de la loi de Kopp et Wœstyne* (*Comptes rendus*, t. XCIX, p. 895; 1884).

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

En effet, la chaleur spécifique moléculaire du cuivre est sensiblement égale, d'après la loi de Dulong et Petit, à la chaleur spécifique moléculaire du zinc. La capacité calorifique d'une solution de sulfate de cuivre et de sulfate de zinc ne varie pas lorsqu'on remplace un poids de sulfate de cuivre par un poids équivalent de sulfate de zinc. Les réactions qui se produisent dans l'élément Daniell ne font donc pas varier sa capacité calorifique.

M. L. Poincaré (1) a donné un autre exemple de couple auquel s'applique le théorème de M. Lippmann.

Venons maintenant à l'examen de la relation (15).

Cette relation entraîne les conséquences suivantes (2) :

Si la réaction dont la pile est le siège est accompagnée d'une augmentation de volume, la force électromotrice de la pile décroît lorsque la pression croît.

Si, au contraire, la réaction dont la pile est le siège est accompagnée d'une diminution de volume, la force électromotrice croît avec la pression.

Si la réaction n'est pas accompagnée d'une variation sensible de volume, la force électromotrice est sensiblement indépendante de la pression.

Les piles qui dégagent des gaz, telles que la pile de Volta, sont le siège d'une réaction chimique accompagnée d'une augmentation de volume considérable; la force électromotrice de semblables piles est d'autant plus faible que la pile fonctionne sous une pression plus considérable. Les piles à gaz sont, au contraire, le siège d'une réaction chimique accompagnée d'une grande contraction; la force électromotrice de ces piles augmente avec la pression. Enfin, dans les piles où aucun élément gazeux n'entre en jeu, telles que la pile de Daniell, la réaction chimique n'entraîne qu'une faible variation de volume; ces piles ont donc une force électromotrice sensiblement indépendante de la pression.

Telles sont les propriétés les plus générales des éléments vol-

(1) L. Poincaré, *loc. cit.*

(2) P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, p. 117 Paris, 1886.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

taïques. Pour pénétrer dans leur étude plus profondément que nous ne l'avons fait dans le Chapitre précédent et dans celui-ci, il eût fallu faire des propriétés des dissolutions un examen qui nous eût entraîné trop loin.

§ 3. — De deux conséquences générales de la théorie des courants permanents.

La théorie des courants permanents repose sur deux principes que nous avons constamment appliqués dans ce qui précède. Ces principes entraînent certaines conséquences qui, généralisées, nous seront d'un grand usage dans l'étude des courants quelconques. Nous terminerons ce Volume par l'énoncé de ces conséquences.

Le second des deux principes dont nous avons fait usage dans l'étude des courants permanents est le suivant :

Traçons une surface fermée contenant une partie du système. Imaginons que les courants permanents demeurent ce qu'ils sont à l'intérieur de cette surface fermée et s'annulent à l'extérieur. Le système éprouverait alors, dans le temps dt, une modification faisant varier de δU l'énergie interne du système supposé sans courant et donnant lieu à un travail $d\mathcal{E}_e$ des forces extérieures. La partie du système qui se trouve à l'intérieur de la surface S dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur dQ donnée par

$$E\,dQ = -E\,\delta U + d\mathcal{E}_e.$$

Cette équation peut s'appliquer en particulier à une surface fermée contenant tout le système à son intérieur. Elle donne alors le résultat suivant :

L'énergie interne d'un système traversé par des courants permanents subit à chaque instant une variation égale à la variation de l'énergie du système supposé sans courant.

Cette proposition peut être regardée comme un cas particulier de la suivante, qui nous servira d'hypothèse fondamentale dans l'étude de l'Électrodynamique :

Lorsqu'un système éprouve une modification dans laquelle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

les divers conducteurs qu'il renferme ne changent pas de position et dans laquelle le flux électrique en chaque point de ces conducteurs demeure invariable, son énergie interne éprouve une variation égale à celle que cette modification ferait éprouver à l'énergie interne du même système supposé sans courant.

Le premier des deux principes qui régissent l'étude des courants permanents est le suivant :

Soient (x, y, z) et $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ deux points voisins d'un système traversé par des courants permanents. Faisons passer une charge dq du premier au second. Ce transport produirait, dans le système supposé sans courant, un travail non compensé $d\tau$, et l'on aurait

$$d\tau = (\mathcal{E}_x \delta x + \mathcal{E}_y \delta y + \mathcal{E}_z \delta z)\, dq,$$

$\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ étant les composantes de la force électromotrice au point x, y, z.

Imaginons que les diverses masses matérielles qui constituent le système ne subissent, dans le transport de la charge dq, aucun déplacement. Soient U l'énergie interne du système supposé sans courant et $\mathcal{F}$ son potentiel thermodynamique interne. Nous aurons

$$\mathrm{EU} = \mathcal{F} - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathrm{T}}, \qquad d\tau = -\delta \mathcal{F}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{E}\,\delta \mathrm{U} = -d\tau + \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial t}(d\tau).$$

Le transport de la charge dq du point (x, y, z) au point $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ fait donc varier l'énergie interne du système supposé sans courant de δU et l'on a

$$\mathrm{E}\,\delta \mathrm{U} = \left[\left(\mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \mathrm{T}} - \mathcal{E}_x\right)\delta x + \left(\mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \mathrm{T}} - \mathcal{E}_y\right)\delta y + \left(\mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \mathrm{T}} - \mathcal{E}_z\right)\delta z\right] dq.$$

Cette égalité a lieu quelles que soient la charge dq et la direction du déplacement.

Prenons en particulier un canal infiniment délié formé par des

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

lignes de flux. Soient Σ, Σ' deux sections normales de ce canal. Supposons que le point (x, y, z) appartienne à la première et le point $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ à la seconde. Soit i le flux allant de la première à la seconde. Soit $d\omega$ l'aire de la section Σ. Soit ds la distance des deux sections.

Transportons de la première à la seconde une quantité d'électricité $i\,d\omega\,dt$. C'est précisément la quantité d'électricité qui serait transportée de l'une à l'autre si les courants demeuraient ce qu'ils sont à l'intérieur du petit segment que les deux sections découpent dans le tube de flux, en s'annulant partout à l'extérieur de ce segment. On peut donc, dans ce cas, remplacer $(-\delta U)$ par la quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$ que ce petit segment dégage dans le temps dt, en sorte que l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \Big[&\left(\mathcal{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)\cos(i, x)\\ &+\left(\mathcal{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)\cos(i, y)\\ &+\left(\mathcal{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)\cos(i, z)\Big]\, i\,d\omega\,ds\,dt,\end{aligned}$$

$d\omega\,ds$ représentant le volume $d\varpi$ du petit segment considéré. On a d'ailleurs

$$u = i\cos(i, x), \qquad v = i\cos(i, y), \qquad w = i\cos(i, z).$$

On arrive donc à l'énoncé suivant :

Lorsqu'un système formé de corps immobiles est traversé par des courants permanents, chaque élément de volume $d\varpi$ de ce système dégage, dans le temps dt, une quantité de chaleur $d\mathrm{Q}$ liée aux composantes du flux et de la force électromotrice en un point de cet élément par la relation

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = \Big[&\left(\mathcal{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\mathcal{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v\\ &+\left(\mathcal{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\Big]\,d\varpi\,dt.\end{aligned}\right.$$

Cette relation générale renferme comme cas particuliers, d'une part la relation établie par Sir W. Thomson entre la force électro-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

motrice d'une chaîne thermo-électrique et les phénomènes thermiques dont elle est le siège; d'autre part, la relation établie par M. von Helmholtz entre la chaleur chimique, la chaleur voltaïque et la force électromotrice d'une pile hydro-électrique.

Nous verrons plus tard que l'on peut l'étendre à des systèmes traversés par des courants quelconques, dans l'étude desquels elle se montrera féconde en conséquences.

FIN DU TOME PREMIER.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

LABORATOIRE PHYSIQUE SORBONNE

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

Pages.

INTRODUCTION 1

LIVRE I.

Les forces électrostatiques et la fonction potentielle.

CHAPITRE I. — *Premières définitions. Les lois de Coulomb* 1

§ 1. — Premières définitions 1
§ 2. — Lois de Dufay et de Coulomb 3

CHAPITRE II. — *Définition de la fonction potentielle. — Propriétés de cette fonction en un point intérieur aux charges agissantes* 6

CHAPITRE III. — *Théorème de Green* 16

CHAPITRE IV. — *Lemmes de Gauss. Attraction d'une couche sphérique homogène* 22

§ 1. — Les trois lemmes de Gauss 22
§ 2. — Existence de la force d'attraction en un point intérieur aux charges agissantes. Conséquence des lemmes de Gauss 27
§ 3. — Attraction exercée en un point par une couche sphérique homogène 35

CHAPITRE V. — *Propriétés de la fonction potentielle en un point intérieur aux charges agissantes* 38

§ 1. — Existence et continuité de la fonction potentielle en un point intérieur aux charges agissantes 38
§ 2. — Existence des dérivées partielles du premier ordre de la fonction potentielle. Leur relation avec les composantes de la force 43
§ 3. — Existence des dérivées partielles du second ordre de la fonction potentielle en un point intérieur aux charges agissantes 48
§ 4. — Équation de Poisson 51
§ 5. — Historique 52

CHAPITRE VI. — Criteria *de la fonction potentielle d'un volume électrisé. Attraction des ellipsoïdes* 57

§ 1. — *Criteria* de la fonction potentielle d'un volume électrisé 57
§ 2. — Fonction potentielle d'un ellipsoïde homogène 62

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

CHAPITRE VII. — *Action électrostatique et fonction potentielle d'une surface électrisée* 71

§ 1. — Étude de la composante normale de l'action exercée en un point par une surface électrisée 71
§ 2. — Étude des composantes tangentielles de l'action exercée en un point par une surface électrisée 79
§ 3. — Réfraction de la force au passage d'une surface électrisée 83
§ 4. — Fonction potentielle d'une surface électrisée 88
§ 5. — *Criteria* de la fonction potentielle d'une surface électrisée 92
§ 6. — Historique 94

CHAPITRE VIII. — *Rappel de quelques notions de Mécanique* 99

§ 1. — Énoncé du principe des vitesses virtuelles 99
§ 2. — Énoncé du principe de d'Alembert. Formule fondamentale de la Dynamique 103
§ 3. — Remarques diverses sur les liaisons 105
§ 4. — Théorème des forces vives 108
§ 5. — Du potentiel 110
§ 6. — *Critérium* de la stabilité de l'équilibre 114

CHAPITRE IX. — *Du potentiel électrostatique* 117

LIVRE II.

La distribution électrique sur les corps conducteurs et le problème de Lejeune-Dirichlet.

CHAPITRE I. — *Condition de l'équilibre électrique. L'électricité réside à la surface des corps conducteurs* 125

§ 1. — Principes de la théorie de Poisson 125
§ 2. — Dans l'état d'équilibre, l'électricité réside à la surface des corps conducteurs 128

CHAPITRE II. — *Il existe un et un seul état d'équilibre électrique* 133

§ 1. — Traduction analytique du principe de Poisson 133
§ 2. — Existe-t-il un état d'équilibre électrique? 134
§ 3. — S'il existe une distribution d'équilibre, il n'en existe qu'une seule 136

CHAPITRE III. — *L'identité de Gauss et le théorème de la moyenne arithmétique* 140

§ 1. — L'identité de Gauss 140
§ 2. — Le théorème de la moyenne arithmétique 142
§ 3. — Théorèmes sur la variation de la fonction potentielle hors des charges agissantes 143

CHAPITRE IV. — *Quelques théorèmes sur le signe de la densité électrique à la surface d'un conducteur* 149

CHAPITRE V. — *Le problème de Lejeune-Dirichlet* 154

§ 1. — Le problème de la distribution électrique se ramène au problème de Lejeune-Dirichlet 154

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.
§ 2. — Essai de démonstration du principe de Lejeune-Dirichlet..... 159
§ 3. — Énoncé d'un problème plus général que celui de Lejeune-Dirichlet..... 163

CHAPITRE VI. — *La fonction de Green*..... 165

§ 1. — Le problème de Green équivaut au problème de Lejeune-Dirichlet..... 165
§ 2. — Propriété fondamentale de la fonction de Green..... 171
§ 3. — Détermination de la fonction de Green dans quelques cas simples..... 174

CHAPITRE VII. — *Transformation, en coordonnées orthogonales quelconques, de l'équation* $\Delta V = 0$. *Distribution électrique sur un ellipsoïde*.. 180

§ 1. — Transformation de l'équation $\Delta V = 0$ en coordonnées orthogonales quelconques..... 180
§ 2. — Transformation de l'équation $\Delta V = 0$ en coordonnées géographiques et en coordonnées elliptiques..... 186
§ 3. — Distribution électrique sur un ellipsoïde soustrait à toute influence..... 189
§ 4. — Cas particuliers..... 194
§ 5. — Solution géométrique du problème de la distribution sur un ellipsoïde isolé..... 195
§ 6. — Distribution électrique sur un ellipsoïde soumis à une influence quelconque..... 200

CHAPITRE VIII. — *La méthode de l'inversion*..... 203

§ 1. — La méthode de l'inversion ou des images électriques..... 203
§ 2. — Application. Distribution électrique sur une calotte sphérique. 210
§ 3. — Théorèmes de Liouville et de M. P. Painlevé..... 215

CHAPITRE IX. — *La méthode de M. Carl Neumann*..... 220

§ 1. — Le théorème de M. Vito Volterra..... 225
§ 2. — Le théorème de M. Axel Harnack..... 228
§ 3. — Quelques définitions..... 232
§ 4. — Définition et propriétés de la fonction fondamentale..... 232
§ 5. — Définition et propriétés des fonctions subordonnées..... 235
§ 6. — Solution du problème de Dirichlet pour l'espace intérieur à une surface de second rang, non biétoilée..... 239
§ 7. — Solution du problème de Dirichlet pour l'espace extérieur à une surface de second rang, non biétoilée..... 240

CHAPITRE X. — *La distribution naturelle*..... 243

§ 1. — Comment la solution du problème de Lejeune-Dirichlet pour tous les corps se ramène à la détermination de la distribution naturelle sur tous les corps..... 243
§ 2. — Méthode de M. G. Robin pour déterminer la distribution naturelle sur un conducteur..... 245

CHAPITRE XI. — *Le procédé alterné*..... 252

§ 1. — Extension du problème de Lejeune-Dirichlet..... 252
§ 2. — Extension de la méthode de la moyenne arithmétique..... 254

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.
§ 3. — Le procédé alterné; formation de la solution..... 256
§ 4. — Démonstration du théorème qui vient d'être énoncé... 259
§ 5. — Applications successives de la méthode alternée..... 262

CHAPITRE XII. — *Le problème de Murphy*..... 264

§ 1. — Le problème de Murphy..... 265
§ 2. — Lois fondamentales de la condensation électrique..... 269
§ 3. — La méthode de Murphy..... 270
§ 4. — La méthode combinatoire de M. Carl Neumann..... 273

LIVRE III.

L'étude expérimentale de la distribution électrique.

CHAPITRE I. — *Le corps d'épreuve*..... 279

§ 1. — Théorie du corps d'épreuve..... 279
§ 2. — Emploi du corps d'épreuve..... 283

CHAPITRE II. — *Les conducteurs ouverts*..... 287

§ 1. — Distribution électrique sur un conducteur ouvert soumis à une influence quelconque..... 287
§ 1. — Conducteur ouvert soustrait à toute influence..... 291

CHAPITRE III. — *Les surfaces de niveau et leurs trajectoires orthogonales*..... 297

§ 1. — Théorèmes généraux..... 297
§ 2. — Étude expérimentale des surfaces de niveau..... 303

CHAPITRE IV. — *Les couches de niveau*..... 305

§ 1. — Une identité de Green..... 305
§ 2. — Propriétés fondamentales des couches de niveau..... 309
§ 3. — Étude complète d'un cas d'influence électrique..... 312
§ 4. — Une classe particulière de condensateurs..... 314
§ 5. — Électromètre absolu de Sir W. Thomson..... 318

CHAPITRE V. — *Le problème de Green et les théorèmes de Faraday*..... 321

§ 1. — Le problème intérieur de Green; solution de Green..... 321
§ 2. — Solution de Gauss..... 323
§ 2. — Solution de Lejeune-Dirichlet..... 328
§ 4. — Application aux questions d'influence électrique; premier théorème de Faraday..... 329
§ 5. — Le problème extérieur de Green; le second théorème de Faraday; les écrans électriques..... 331

LIVRE IV.

Le potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé.

CHAPITRE I. — *Quelques notions de Thermodynamique*..... 337

§ 1. — Du potentiel thermodynamique..... 337
§ 2. — Propriétés des déplacements sans changement d'état..... 342

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

CHAPITRE II. — *Détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé* 348

§ 1. — Comment, dans l'étude d'un système, on peut tenir compte de la disposition mutuelle de ses parties 348
§ 2. — Introduction de l'hypothèse fondamentale relative à la compressibilité 355
§ 3. — Introduction de la loi de la gravitation universelle et de la loi de Coulomb 359
§ 4. — De la continuité de la quantité Θ 364

LIVRE V.

L'équilibre électrique et les courants permanents sur les conducteurs métalliques.

CHAPITRE I. — *Lois fondamentales de l'équilibre électrique sur les conducteurs métalliques* 367

§ 1. — Condition de l'équilibre électrique 367
§ 2. — Stabilité de l'équilibre électrique 371

CHAPITRE II. — *L'équilibre électrique sur les conducteurs homogènes, lois de la décharge électrique* 373

§ 1. — L'équilibre électrique sur les conducteurs homogènes 373
§ 2. — Théorie de la décharge électrique; théorème de Clausius 378
§ 3. — Thermomètre de Snow Harris 381
§ 4. — Décharge complète d'un condensateur; expériences de Riess 385
§ 5. — Décharge d'un condensateur par étincelles successives 389
§ 6. — Batteries montées en cascade 392

CHAPITRE III. — *L'intensité des courants* 398

§ 1. — Courants circulant dans la masse du conducteur 398
§ 2. — Courants uniformes 402
§ 3. — Courants linéaires 403

CHAPITRE IV. — *La loi d'Ohm* 408

§ 1. — Énoncé de la loi d'Ohm 408
§ 2. — Énoncé de la loi d'Ohm pour les courants linéaires 410
§ 3. — Courants permanents dans la masse d'un conducteur 412

CHAPITRE V. — *Le mouvement permanent de l'électricité dans une lame métallique* 419

§ 1. — Le mouvement permanent de l'électricité dans une lame plane. 419
§ 2. — Courants dans une lame courbe 430

CHAPITRE VI. — *La loi de Joule* 437

CHAPITRE VII. — *La différence de niveau potentiel de deux métaux en contact* 445

§ 1. — L'équilibre électrique sur un conducteur métallique hétérogène. 445
§ 2. — Quelques théorèmes sur l'attraction des couches électriques doubles 452

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pages.

§ 3. — Des courants permanents dans les conducteurs métalliques hétérogènes 461
§ 4. — Méthode de M. Pellat pour déterminer les différences de niveau potentiel de deux métaux en contact 473

CHAPITRE VIII. — *L'effet Peltier* 478

§ 1. — L'effet Peltier 478
§ 2. — Relation entre l'effet Peltier et la différence de niveau potentiel de deux métaux au contact 485

CHAPITRE IX. — *Les courants thermo-électriques* 488

§ 1. — Conditions dans lesquelles se produisent les courants thermo-électriques 488
§ 2. — Propriétés des chaînes thermo-électriques 494
§ 3. — Propriétés des chaînes bimétalliques 503
§ 4. — Relation entre les phénomènes thermo-électriques et les différences de niveau potentiel au contact 509
§ 5. — Relation entre les phénomènes thermo-électriques et l'effet Peltier 512

CHAPITRE X. — *L'effet Thomson* 515

§ 1. — Le transport électrique de la chaleur 515
§ 2. — Remarques sur la théorie de Clausius 520

LIVRE VI.

Les électrolytes.

CHAPITRE I. — *La force électromotrice d'une pile* 525

§ 1. — La loi de Faraday 525
§ 2. — Propriétés d'une pile ouverte 527
§ 3. — Propriétés d'une pile fermée 531
§ 4. — Vérifications expérimentales 538

CHAPITRE II. — *La chaleur chimique et la chaleur voltaïque* 542

§ 1. — Distinction entre la chaleur chimique et la chaleur voltaïque ... 542
§ 2. — Relation d'Helmholtz 547
§ 3. — De deux conséquences générales de la théorie des courants permanents 551

TABLE DES MATIÈRES 555

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

16226 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC