COURS
DE MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Eleves & des Aspirans au Corps Royal de l'Artillerie; & Censeur Royal.

QUATRIEME PARTIE,

CONTENANT les Principes généraux de la MÉCHANIQUE, précédés des Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-Mathématiques.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES, Premier Imprimeur du Roi, rue S. Jacques.

M. DCC. LXXXIV.

Avec Approbation & Privilége du Roi

PRÉFACE.

Je me ſuis propoſé dans cet Ouvrage, de mettre les Lecteurs en état d'entendre & d'appliquer la Méchanique. L'étude des principes généraux de cette ſcience, eſt facile, & n'exige gueres d'autres connoiſſances mathématiques, que l'Arithmétique & la Géométrie ordinaires. Les abſtractions qu'on s'y permet, & avec raiſon d'abord, ſimplifient l'objet : & une Méchanique qui ſe borneroit à ces connoiſſances générales, feroit, ſans doute, à la portée des Lecteurs; mais les Lecteurs ne ſeroient encore, que peu en état d'appliquer la Méchanique.

Dès qu'on voudra rendre la Méchanique utile, il faut ſortir des ſuppoſitions par leſquelles on eſt obligé de commencer dans l'étude des principes généraux ; il faut ceſſer de faire abſtraction de la maſſe des machines, de leur peſanteur, du frottement, &c. ceſſer de conſidérer l'action des corps comme toujours réunie à leur centre de gravité, &c. ceſſer de regarder les machines comme ne partageant point l'action de la force motrice, &c; en un mot, avoir égard à l'état réel & phyſique où ſont les choſes dans la nature. Dès-lors le nombre des éléments qui entrent dans chaque queſtion, étant augmenté, il devient néceſſaire d'employer pour la réſolution de ces queſtions, des méthodes plus efficaces; c'eſt dans cette vue que nous avons fait précéder la Méchanique, d'une courte expoſition des principes de Calcul qui ſervent d'introduction aux Sciences Phyſico-Mathématiques. Nous nous y sommes déterminés d'autant plus volontiers qu'indépendamment de ce que ces principes deviennent souvent d'un usage indispensable, même dans des questions qui auroient paru fort simples, ils sont d'ailleurs (si l'on en excepte ce qu'on trouvera en petit caractere, & dont l'usage est moins fréquent) une suite si naturelle des connoissances exposées dans la troisieme Partie, qu'ils ne peuvent qu'être entendus avec facilité, dès qu'on possédera celle-ci.

A l'égard de la Méchanique elle-même, les objets que nous y avons examinés sont trop nombreux pour pouvoir être passés ici en revue, avec quelque détail. Nous avons renfermé dans ce premier Volume, tout ce que nous avons compris sous le nom de Principes généraux de la Méchanique. C'est-à-dire, les loix du mouvement simple uniforme ou varié, les loix du mouvement composé, la composition & décomposition des forces; l'usage des moments pour cette composition & cette décomposition; l'application de cette théorie, à la recherche des centres de gravité, & des propriétés de ce centre. Ces principes généraux, dont nous donnons d'ailleurs, par anticipation, diverses applications, particulièrement au navire, sont suivis des loix de l'équilibre des fluides, & des corps qui y sont plongés; cette partie a un rapport trop direct au navire, pour ne pas trouver place dans cet Ouvrage.

Le second Volume renferme l'application de ces principes généraux, à différents cas de mouvement & d'équilibre. Nous y avons examiné un très-grand nombre d'objets; & si les bornes qu'il faut enfin ſe preſcrire, ne nous ont pas permis d'y en comprendre un plus grand nombre, nous eſpérons que ce que nous y avons dit, ne remplira pas moins les vues que nous nous ſommes propoſées, de mettre les Lecteurs en état d'entendre & d'appliquer la Méchanique.

Au reſte, on ne doit pas perdre de vue que cet Ouvrage étant un Ouvrage de principes, on n'a pu ni dû ſe livrer à beaucoup de détails dont pourroient être ſuſceptibles quelques-unes des queſtions méchaniques qu'on y a traitées. Il en eſt pluſieurs qu'il ſuffit d'examiner avec un peu d'attention, pour voir qu'elles doivent faire matiere d'un ouvrage à part : nous nous ſommes bornés à en expoſer les principes. Telles ſont la plupart des queſtions concernant le navire : cette machine qui fait tant d'honneur à l'eſprit humain, dans l'état où elle eſt, ne lui en laiſſe peut-être pas encore moins à acquérir ; ſur-tout ſi l'on conſidére que l'état où elle eſt parvenue, eſt en grande partie le fruit d'un très-long tâtonnement ; mais que ce qui reſte à faire pour la perfectionner, ne doit être attendu que du concours de l'obſervation avec la théorie.

Les travaux de M. Bouguer, que l'on ne peut trop conſulter ſur cet objet, ont déja préparé de très-grands ſecours ; & les progrès actuels de la Phyſique & du Calcul, donnent lieu d'eſpérer que l'on fera encore des pas très-utiles dans cette carriere.

TABLE
DES MATIERES.

Principes généraux de la Méchanique.

PRINCIPES

PRINCIPES DE CALCUL

Qui servent d'Introduction aux Sciences Physico-mathématiques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Nous avons donné dans la troisième Partie, les regles nécessaires pour calculer les quantités, dans tel état de grandeur qu'on puisse les supposer. Mais nous n'avons point considéré les variations par lesquelles ces quantités arrivent à tel ou tel état de grandeur. Ce nouvel objet à considérer dans les quantités, donne lieu à une autre branche de l'Analyse, qui est de la plus grande utilité dans les Sciences Physico-Mathématiques & principalement dans la Méchanique, où

l'on ne parvient ſouvent à déterminer les rapports des quantités qui entrent dans les queſtions relatives à cette ſcience, qu'après avoir conſidéré les rapports de leurs variations, c'eſt-à-dire, des accroiſſements ou des diminutions qu'elles reçoivent à chaque inſtant.

Nous allons donc, avant que d'entrer en Méchanique, nous arrêter quelques moments ſur cette partie du calcul qui a pour objet de décompoſer les quantités juſques dans leurs Eléments, & de revenir de ces Eléments aux quantités mêmes. A proprement parler, ce n'eſt point une nouvelle méthode de calcul, que nous allons expoſer; c'eſt une application des méthodes de la troiſieme Partie, & même une ſimplification de ces regles.

2. Nous nous propoſons deux objets: le premier, d'enſeigner à deſcendre des quantités, à leurs Eléments; & la méthode, pour y parvenir, s'appelle calcul *différentiel*. Le ſecond, nous montrera la route pour revenir des Eléments des quantités, aux quantités mêmes, & nous appellerons cette méthode, calcul *intégral*.

La partie de ces deux calculs qui nous importe véritablement, n'eſt qu'un corollaire des méthodes de la troſieme Partie de ce Cours,

& peut être ſaiſie avec facilité, dès qu'on eſt inſtruit de ces méthodes. Quant à la partie de ces mêmes calculs, qui exige des recherches plus délicates, ou d'une application moins fréquente, nous la diſtinguerons, à l'ordinaire, par un caractère d'impreſſion plus petit.

3. Comme nous allons conſidérer les quantités relativement à leurs Eléments, c'eſt-à-dire, relativement à leurs accroiſſements infiniment petits il convient, avant que d'aller plus loin, d'expoſer ce que nous entendons par quantités infiniment petites, infinies, &c. & de faire connoître la ſubordination qu'on doit mettre entre ces quantités, dans le calcul.

4. Nous diſons qu'une quantité eſt infinie ou infiniment petite à l'égard d'une autre, lorſqu'il n'eſt pas poſſible d'aſſigner aucune quantité aſſez grande ou aſſez petite pour exprimer le rapport de ces deux-là, c'eſt-à-dire, le nombre de fois que l'une contient l'autre.

Comme une quantité ne peut, ſans ceſſer d'être quantité, ceſſer d'être ſuſceptible d'augmentation ou de diminution, il n'y a point de quantité ſi petite ou ſi grande à l'égard d'une autre, que l'on ne puiſſe en concevoir une troiſième infiniment plus petite ou plus grande. Par exemple, ſi x eſt infini à l'égard de a, quoique dès-lors il ſoit impoſſible d'aſſigner leur rapport, cela n'empêche point que je ne puiſſe concevoir une troiſieme quantité qui ſoit à l'égard de x, ce que x eſt à l'égard de a; c'eſt-à-dire, qui ſoit le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers ſeroient $a : x :: x :$; ce quatrième terme qui eſt $\frac{x^2}{a}$ ſera donc infiniment plus grand que x, puiſqu'il contient x autant que x eſt ſuppoſé contenir a. De même, rien ne m'empêche de concevoir le quatrieme terme de cette proportion $x : a :: a :$; & ce quatrieme terme qui ſera $\frac{a^2}{x}$ ſera infiniment plus petit que a, puiſqu'il doit être contenu dans a, autant que celui-ci eſt ſuppoſé contenu dans x. Rien ne borne l'imagination à cet égard, & l'on peut concevoir, de même, une nouvelle quantité qui ſoit encore infiniment plus petite à l'égard de $\frac{a^2}{x}$ que celle-ci ne l'eſt à l'égard de a. On appelle cela des infinis ou des infiniment petits de différents ordres.

En général le produit de deux quantités infinies ou infiniment petites du premier ordre eſt infiniment plus grand ou infiniment plus petit que chacun de ſes deux facteurs : en effet $xy : y :: x : 1$; or ſi x eſt infini, il contient une infinité de fois l'unité, donc xy contient une infinité de fois y. Un raisonnement semblable fait voir qu'un produit ou une puissance de tant de dimensions qu'on voudra, & dont tous les facteurs sont infinis, est d'un ordre d'infini marqué par le nombre de ses facteurs; ainsi lorsque x est infini, x^4 est infini du quatrieme ordre, c'est-à-dire, infiniment plus grand que x^3, qui est infiniment plus grand que x^2, qui lui-même est infiniment plus grand que x. En effet $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$. Ce seroit le contraire si x étoit infiniment petit; alors x^4 seroit infiniment petit du quatrieme ordre, c'est-à-dire, infiniment plus petit que x^3; celui-ci infiniment plus petit que x^2; & ce dernier, infiniment plus petit que x.

Au contraire, une fraction dont le numérateur est une quantité finie, & dont le dénominateur est une puissance quelconque d'une quantité infinie, seroit d'un ordre d'infiniment petit, marqué par l'exposant de cette puissance. C'est-à-dire, par exemple, que $\frac{b}{x^2}$ est infiniment petit du second ordre, si x est infini; $\frac{b}{x^3}$ est infiniment petit du 3^e^ ordre. En effet, $\frac{b}{x^2} : \frac{b}{x} :: \frac{1}{x} : 1 :: 1 : x$.

Mais ſi un produit n'a pas tous ſes facteurs infinis, alors ſon ordre d'infini ne doit ſe déterminer que par le nombre de ſes facteurs infinis : ainſi axy n'eſt que du même ordre que xy ; en effet $axy : xy :: a : 1$, & ce dernier rapport peut être évalué, ſi a eſt une quantité finie.

Remarquons bien cette différence dans la comparaiſon des infinis ou infiniment petits, entr'eux ou à l'égard des quantités relativement auxquelles ils ſont infinis ou infiniment petits. Si x eſt infini à l'égard de a, rien ne peut meſurer leur rapport ; mais dans la même ſuppoſition, le rapport de x à x multiplié ou diviſé par tel nombre fini que l'on voudra, eſt un rapport fini ; ainſi, x infini ou infiniment petit eſt incomparable à l'égard de a, ſuppoſé un nombre fini ; mais il ne l'eſt point à l'égard de ax, puiſque x eſt à $ax :: 1 : a$.

5. Pour exprimer par le calcul qu'une quantité x eſt infinie à l'égard d'une autre quantité a ; ou, ce qui eſt la même choſe, pour exprimer que a eſt infiniment petit à l'égard de x, il faut, dans l'expreſſion algébrique où ces quantités ſe trouveroient enſemble, rejetter toutes les puiſſances de x inférieures à la plus élevée, & par conſéquent, auſſi, tous les termes ſans x. Par

exemple, ſi dans $\frac{3x+a}{5x+b}$, on ſuppoſe x infini à l'égard de a & de b, on ſupprimera a & b & l'on aura $\frac{3x}{5x}$ ou $\frac{3}{5}$ pour la valeur de $\frac{3x+a}{5x+b}$, lorſque x eſt infini. En effet $\frac{3x+a}{5x+b}$, eſt la même choſe que $\dfrac{3+\frac{a}{x}}{5+\frac{b}{x}}$, (en diviſant, haut & bas, par x); or dès qu'on ſuppoſe que x eſt infini à l'égard de a & de b, les fractions $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$ qui repréſentent les rapports de a & de b à x, doivent néceſſairement être ſupprimées, puiſque, par cette ſuppoſition même, ces rapports ſont au-deſſous de toute quantité, ſi petite qu'on veuille la ſuppoſer; donc dans ce cas la quantité propoſée doit ſe réduire à $\frac{3}{5}$.

Pareillement, ſi l'on avoit $x^2 + ax + b$, on le réduiroit à x^2, ſi l'on a deſſein de ſavoir ce que vaut cette quantité, lorſque x eſt infini. En effet, on vient de voir que dans cette ſuppoſition on devoit ſupprimer b vis-à-vis de ax; or x^2 eſt lui-même infini à l'égard de ax, puiſque $x^2 : ax :: x : a$; donc par la même raiſon on doit rejetter ax vis-à-vis de x^2; donc la quantité doit, alors, être réduite à x^2.

Au contraire, ſi x étoit infiniment petit, il ne faudroit conſerver que les termes où l'expoſant de x eſt le plus petit; ainſi $x^2 + ax$ ſe réduit à ax, lorſque x eſt infiniment petit. $\frac{ax+b}{cx+d}$ ſe réduit à $\frac{b}{d}$, lorſque x eſt infiniment petit.

On ne doit pas craindre que ces omiſſions alterent les conſéquences que l'on tirera des calculs auxquels on les appliquera. Au contraire, ce n'eſt que par ces omiſſions que l'on exprime ce que l'on a deſſein d'exprimer, c'eſt-à-dire, que x eſt infini ou infiniment petit : ce n'eſt que par elles qu'on peut arriver à une concluſion conforme à la ſuppoſition qu'on a faite. Or ſi lorſqu'on ſuppoſe x infini, on ne rejettoit point les termes que nous venons de preſcrire, ſi, par exemple, dans $\frac{3x+a}{5x+b}$ ou $\frac{3+\frac{a}{x}}{5+\frac{b}{x}}$ on ne rejettoit pas $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$, le calcul n'exprimant point alors que $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$ ſont des rapports au-deſſous de toute quantité aſſignable, ne répondroit point à ce que l'on demande, ſavoir quelle eſt la valeur de cette quantité lorſque x eſt infini : en un mot en attribuant encore à $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$ quelque influence ſur la valeur cherchée, on contrediroit la ſuppoſition que l'on a faite.

Nous ne manquerons pas d'occaſions de vérifier l'exactitude de ce principe ſur l'omiſſion des quantités infinies des ordres inférieurs ; mais en attendant, voici un exemple qui peut venir à l'appui du raiſonnement que nous venons de faire. Concevons la ſuite $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, &c : les termes de cette ſuite, comme on le voit, approchent de plus en plus de l'unité, & on conçoit que jamais ils ne peuvent paſſer cette limite. Chaque terme peut être repréſenté par $\frac{x}{x+1}$, en mettant pour x le numéro de ce terme. Puis donc que les termes approchent ſans ceſſe de l'unité, & d'autant plus qu'ils s'éloignent plus de l'origine, ils n'atteindront donc cette limite qu'à une diſtance infinie de l'origine ; donc pour avoir le dernier terme de cette ſérie, il faut ſuppoſer dans $\frac{x}{x+1}$, que x eſt infini ; or conformément au principe, cette quantité ſe réduit alors à $\frac{x}{x}$, c'eſt-à-dire à 1 ; donc l'omiſſion du terme $+1$ dans $\frac{x}{x+1}$, loin d'altérer la concluſion, eſt au contraire ce qui la donne telle qu'elle doit être. En un mot en faiſant cette omiſſion, on agit conſéquemment à la ſuppoſition qu'on a faite.

Telle eſt la ſubordination qu'on doit mettre dans le calcul, entre les quantités infinies ou infiniment petites de différents ordres. Mais dans l'application de ce principe ſur l'omiſſion des quantités, il peut ſe préſenter quelques cas ſur leſquels il eſt bon de prévenir le lecteur.

Suppoſons qu'on ait les deux quantités $xx + ax + b$, & $xx + ax + c$: lorſque x eſt infini, il eſt indubitable que chacune ſe réduit à xx; enſorte que leur différence, dans ce cas ſemble être zéro. Cependant ſi l'on veut avoir leur différence, on trouve qu'elle eſt $b - c$ ou $c - b$, quelque ſoit x, infini ou non. Voici la ſolution de cette difficulté apparente.

La différence de ces deux quantités eſt réellement $b - c$ ou $c - b$; mais lorſqu'on cherche cette différence après avoir ſuppoſé x infini dans chacune; c'eſt demander ce que cette différence eſt par rapport à ces quantités mêmes; or comme elles ſont alors infinies, chacune, on doit trouver comme on le trouve en effet, que cette différence eſt zéro par rapport à elles. Lors donc qu'on demande ce que devient, par la ſuppoſition de x infini, le réſultat de certaines opérations ſur pluſieurs quantités, c'eſt dans le réſultat même qu'on doit exécuter la regle donnée ci-deſſus, & non pas dans chacune des quantités ſéparément priſes. C'eſt ainſi qu'on trouvera que la ſomme de $-xx+ax+b$ & $xx+bx+c$, lorſque x eſt infini, ſe réduit à $ax+bx$; car, en général, elle eſt $ax+bx+b+c$ qui lorſque x eſt infini, ſe réduit à $ax+bx$. Pareillement ſi l'on avoit.... $x-\sqrt{xx-bb}$; cette quantité lorſque x eſt infini, ſemble être zéro. Mais comme $\sqrt{xx-bb}$ n'eſt qu'une indication de la racine de $xx-bb$, il faut pour avoir ſa différence avec x réduire $\overline{xx-bb}$ en ſérie (*Alg.* 149); alors la quantité $x-\sqrt{xx-bb}$ ſera $x-x+\frac{bb}{2x}+\frac{b^4}{8x^3}$ &c. ou $\frac{bb}{2x}+\frac{b^4}{8x^3}+$ &c., qui lorſque x eſt infini par rapport à b, ſe réduit à $\frac{bb}{2x}$.

ÉLÉMENTS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

6. LORSQUE l'on conſidere une quantité variable comme croiſſant par degrés infiniment petits, ſi l'on veut connoître la valeur

de ces accroiſſements, ce qui ſe préſente de plus naturel, eſt de déterminer la valeur de cette quantité pour un inſtant quelconque, & la valeur de cette même quantité pour l'inſtant immédiatement ſuivant : alors la différence de ces deux valeurs eſt l'accroiſſement ou la diminution que cette quantité reçoit : c'eſt auſſi ce qu'on appelle la *différence* ou *la différentielle* de cette quantité.

7. Pour marquer la différentielle d'une quantité variable ſimple, comme x ou y, on écrit dx, ou dy; c'eſt-à-dire, qu'on fait précéder cette variable, de la lettre d initiale du mot différence. Mais lorſqu'on veut indiquer la différentielle d'une quantité composée comme x^2, ou $5x^3 + 3x^2$, ou $\sqrt{x^2 - aa}$, &c. on renferme cette quantité entre deux parenthèſes que l'on fait précéder de la lettre d; ainſi l'on écrit $d(x^2)$, $d(5x^3 + 4x^2)$, $d(\sqrt{x^2 - a^2})$, &c.

Dorénavant nous repréſenterons les quantités variables, par les dernieres lettres t, u, x, y, z de l'Alphabet ; & les conſtantes, ou celles qui conſervent toujours la même valeur, nous les repréſenterons par les premieres lettres a, b, c, &c. & lorſque nous en uſerons autrement, nous en avertirons. Quant à la lettre d elle ne ſera employée à d'autre uſage qu'à déſigner la différentielle de la quantité qu'elle précédera.

8. Suivant l'idée que nous venons de donner de la différentielle d'une quantité, on voit que pour avoir la différentielle lorſque la quantité ne renferme que des variables au premier degré & non multipliées ni diviſées les unes par les autres, il n'y a autre choſe à faire qu'à affecter chaque variable de la caractériſtique d, en conſervant d'ailleurs le ſigne de chacune; par exemple, la différentielle de $x+y-z$ ſera $dx+dy-dz$. En effet, pour avoir cette différentielle, il faudroit conſidérer x comme devenant $x+dx$; y comme devenant $y+dy$; & z comme devenant $z+dz$; alors la quantité propoſée qui eſt actuellement $x+y-z$, deviendroit $x+dx+y+dy-z-dz$; prenant donc la différence de ces deux états, on aura $x+dx+y+dy-z-dz-x-y+z$; c'eſt-à-dire, $dx+dy-dz$ pour la différentielle.

Il en feroit de même, ſi les variables qui entrent dans la quantité propoſée, avoient des coëfficients ou multiplicateurs conſtants: ainſi la différentielle de $5x+3y$, eſt $5dx+3dy$; celle de $ax+by$, eſt $adx+bdy$; en effet, lorſque x & y deviennent $x+dx$ & $y+dy$, la quantité $ax+by$ devient $a(x+dx)+$

$b(y+dy)$, c'eſt-à-dire, $ax+adx+by+bdy$; donc la différence des deux états, ou la différentielle, eſt $adx+bdy$; c'eſt-à-dire qu'en général, il faut affecter chaque variable de la caractériſtique d.

Si dans la quantité propoſée il y avoit un terme tout conſtant, la différentielle ſeroit la même que s'il n'y étoit point. C'eſt-à-dire, que la différentielle de ce terme ſeroit zéro; cela eſt évident, puiſque la différentielle n'étant autre choſe que l'accroiſſement, une quantité conſtante ne peut avoir de différentielle ſans ceſſer d'être conſtante; ainſi la différentielle de $ax+b$ eſt ſimplement adx.

9. Lorſque les quantités variables ſont ſimples, mais multipliées entr'elles, alors il faut ſuivre cette regle... *Différenciez ſucceſſivement par rapport à chaque variable, comme ſi tout le reſte étoit un multiplicateur conſtant* *.

Par exemple, pour différencier xy, je différencie d'abord comme ſi x étoit conſtant, & j'ai xdy; puis je différencie la même quantité xy comme ſi y étoit conſtant, & j'ai ydx, enſorte que la différentielle totale de xy eſt $xdy+ydx$.

* Pour éviter l'équivoque dans la maniere d'écrire, il conviendra d'écrire la derniere, la variable qui devra être affectée de la caractériſtique d.

La raiſon de cette regle ſe trouvera en remontant au principe. Pour avoir la différentielle de xy, il faut conſidérer x comme devenant $x+dx$, c'eſt-à-dire, augmentant de la quantité infiniment petite dx; & y comme devenant $y+dy$, c'eſt-à-dire, augmentant de la quantité infiniment petite dy; alors xy devient $(x+dx)\times(y+dy)$, c'eſt-à-dire, $xy+xdy+ydx+dydx$; donc la différence des deux états, ou la différentielle, eſt $xy+xdy+ydx+dydx-xy$, ou $xdy+ydx+dydx$; mais pour que le calcul exprime que dy & dx ſont des quantités infiniment petites comme on le ſuppoſe, il faut (5) omettre $dydx$ qui (4) eſt infiniment petit du ſecond ordre, & par conſéquent infiniment petit à l'égard de xdy & ydx qui ſont infiniment petits du premier; donc enfin la différentielle de xy ou $d(xy)$ eſt $xdy+ydx$, comme le donne la regle.

On trouvera de même, en ſuivant la regle, que, la différentielle de xyz eſt $xydz+xzdy+yzdx$, en différenciant d'abord comme ſi xy étoit conſtant, puis comme ſi xz étoit conſtant, & enfin comme ſi yz étoit conſtant. Et on le démontrera comme ci-deſſus en regardant x, y & z comme devenus $x+dx$, $y+dy$, & $z+dz$; auquel cas xyz devient $(x+dx)(y+dy)(z+dz)$ ou $xyz+$

$xydz + xzdy + yzdx + ydxdz + zdydx + xdzdy + dxdydz$; donc la différence des deux états fera, après avoir réduit, & rejetté les infiniments petits du second & du troisieme ordre, $xydz + xzdy + yzdx$, ainsi que le donne la regle.

10. Si la quantité proposée est une puissance quelconque d'une quantité variable, alors suivez cette regle : *Multipliez par l'exposant, diminuez cet exposant d'une unité, & multipliez par la différentielle de la variable.*

Ainsi, pour appliquer la regle à x^2 j'aurai $2xdx$, en multipliant par l'exposant 2, diminuant l'exposant 2 de 1, & multipliant enfin par la différentielle dx de la variable x. On trouvera de même que la différentielle de x^3 est $3x^2dx$; celle de x^4, $4x^3dx$; celle de x^{-1}, $-x^{-2}dx$; celle de x^{-3}, $-3x^{-4}dx$; celle de $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; celle de $x^{\frac{4}{3}}$ est $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$; &, en général, celle de x^m, est $mx^{m-1}dx$, quel que soit d'ailleurs l'exposant m, positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

Pour trouver la raison de cette regle, remontons encore au principe. Regardons x comme devenant $x + dx$, (dx étant infiniment petit); alors x^m devient $(x + dx)^m$; c'est-à-dire, en appliquant les regles données

nées (*Alg.* 149), devient $x^m + mx^{m-1}dx + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}dx^2 +$ &c. ou (parce que le terme $m.\frac{m-1}{2}.x^{m-2}dx^2$ eſt infiniment petit du ſecond ordre, & que les ſuivants ſeroient encore d'ordres inférieurs,) devient $x^m + mx^{m-1}dx$; donc la différence des deux états, ou la différentielle de x^m, eſt $x^m + mx^{m-1}dx - x^m$, c'eſt-à-dire, $mx^{m-1}dx$.

S'il y avoit un coëfficient ou multiplicateur conſtant, cela n'apporteroit aucun changement ; il reſteroit dans la différentielle tel qu'il eſt dans la quantité ; ainſi $d(ax^m)$ eſt $max^{m-1}dx$.

11. Voilà tout ce qu'il eſt néceſſaire de ſavoir pour être en état de différencier toutes ſortes de quantités algébriques ; ainſi tout ce qui va ſuivre, ne ſera plus qu'une application de ces regles.

12. Si l'on avoit $\frac{x}{y}$, c'eſt-à-dire, une fraction, on écriroit ainſi cette quantité xy^{-1}, ſelon ce qui a été enſeigné (*Alg.* 141) ; & alors appliquant la regle donnée (9) on auroit $d(xy^{-1}) = xd(y^{-1}) + y^{-1}dx$, & par conſéquent (10) $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$.

Si l'on réduit cette quantité, on aura $-\frac{xdy}{y^2} + \frac{dx}{y}$ ou $\frac{ydx - xdy}{y^2}$; où l'on voit que la différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$, eſt égale à la différentielle dx du numérateur multipliée par le dénominateur y, moins la différentielle dy du dénominateur, multipliée par le numérateur x, le tout diviſé par le quarré du dénominateur ; & c'eſt la regle que l'on donne ordinairement pour différencier les fractions ; mais on peut ſe diſpenſer, comme on le voit, de charger encore ſa mémoire de cette nouvelle regle : il ſuffit de faire paſſer le dénominateur au numérateur, ſelon la regle donnée (*Alg.* 141) & de différencier enſuite.

13. Si l'on veut différencier ax^3y^2, on regardera d'abord x^3 & y^2 comme deux variables ſimples, & (9) on aura $d(ax^3y^2) = ax^3 d(y^2) + ay^2 d(x^3)$; puis (10) on aura $d(ax^3y^2) = 2ax^3y\,dy + 3ay^2x^2\,dx$. En général $d(ax^my^n) = ax^m d(y^n) + ay^n d(x^m) = nax^my^{n-1}\,dy + may^nx^{m-1}\,dx$.

14. Si la quantité qu'on veut différencier, eſt complexe, mais ſans renfermer de puiſſances de quantités complexes, on différenciera ſéparément chacun des termes qui la compoſent : ainſi $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2\,dx + 2bx\,dx + cx\,dy + cy\,dx$. De même $d(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}) = d(ax^2 + bx + cx^{-2}y) = 2ax\,dx + b\,dx - 2cx^{-3}y\,dx + cx^{-2}\,dy$. De même $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2y\,dx + x^3\,dy + 2ay\,dy$, en ſe rappellant que la conſtante b^3

n'a point de différentielle, ou que sa différentielle est zéro.

15. S'il y a un exposant total, comme dans $(a+bx+cx^2)^5$ on regardera toute la quantité affectée de cet exposant, comme une seule variable que l'on différenciera selon la regle donnée (10) pour les puissances: ainsi $d(a+bx+cx^2)^5 = 5(a+bx+cx^2)^4 \times d(a+bx+cx^2) = 5(a+bx+cx^2)^4 \times (bdx+2cxdx)$. De même $d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a+bx^2) = \frac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}} \times 2bxdx = \frac{10}{3} bxdx(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16. Si la quantité étant toujours complexe, étoit d'ailleurs composée de différents facteurs, on regarderoit chaque facteur comme une variable simple, & l'on suivroit la regle qui a été donnée (9) pour un produit de plusieurs variables simples: ainsi $x^3(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$ qu'on peut regarder comme composé des deux facteurs x^3 & $(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$, donnera $d(x^3(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}) = (a+bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$ qui, par les regles précédentes, devient $3x^2dx(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3} bx^4dx(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Pareillement $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) = d((x+a)^3 \times (x+b)^{-2})$.

$=(x+a)^3 d(x+b)^{-2}+(x+b)^{-2} d(x+a)^3$; c'eſt-à-dire $=-2(x+a)^3(x+b)^{-3}dx+3(x+b)^{-2}(x+a)^2 dx$, qui ſe change en $-\frac{2(x+a)^3 dx}{(x+b)^3}+\frac{3(x+a)^2 dx}{(x+b)^2}$, & ſe réduit à $\frac{(x+3b-2a)(x+a)^2 dx}{(x+b)^3}$.

17. Si la quantité propoſée eſt radicale, on ſubſtituera aux radicaux, des expoſants fractionnaires, comme il a été enſeigné (*Alg.* 128), & l'on différenciera enſuite ſelon les regles ci-deſſus. Ainſi $d(\sqrt{x})=d(x^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; $d(\sqrt[5]{x^3})=d(x^{\frac{3}{5}})=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$; $d(\sqrt{aa-xx})=d(aa-xx)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}d(aa-xx)=-xdx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-xdx}{\sqrt{aa-xx}}$; $d(x^m\sqrt[q]{(a+bx^n)^p})=d\left(x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\right)=x^m d(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}+(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}d(x^m)=\frac{pnb}{q}x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}+mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

Des Différences ſecondes, troiſiemes, &c.

18. INDÉPENDAMMENT des différentielles que nous venons de conſidérer, & qu'on appelle *Différences premieres*, on conſidere auſſi les différences *ſecondes*, *troiſiemes*, &c. Pour marquer celles-ci, on fait précéder la variable de deux lettres d, s'il s'agit d'une différence ſeconde; de trois lettres d, s'il s'a-

git d'une différence troisieme, & ainsi de suite; par exemple, ddx marque la différence seconde de x.

Lorsqu'il s'agit des différences secondes, on regarde la variable comme augmentant par degrés inégaux, mais dont la différence est infiniment petite à l'égard de ces accroissements mêmes. Ainsi ddx est infiniment petite à l'égard de dx. De même dans les différences troisiemes, $dddx$ ou $d^3 x$ (car on les marque également de ces deux manieres) est infiniment petite à l'égard de ddx; & ainsi de suite.

Pour marquer le quarré de dx, on devroit naturellement écrire $(dx)^2$; mais pour simplifier, on écrit dx^2, ce qui ne peut causer de méprise, & être pris pour la différentielle de x^2, que nous sommes convenus de marquer ainsi $d(x^2)$.

Observons bien que quoique ddx & dx^2 soient tous deux infiniment petits du second ordre, ces deux quantités ne sont pas égales entr'elles; ddx est la différence seconde de x, ou la différence de deux différences consécutives de x; & dx^2 est le quarré de dx.

Pour déterminer les différences secondes, ce qui se présente naturellement est de considérer la quantité variable, dans trois états consécutifs, infiniment voisins; prendre la différence du second état au premier, celle du troisieme au second; & enfin prendre la différence de ces deux différences. Par exemple, le premier état de x est x; au second instant, x augmente de la quantité dx & devient $x + dx$; dans l'instant suivant $x + dx$ augmente de la quantité $dx + d(dx)$, $d(dx)$ marquant ce dont l'accroissement du second instant surpasse celui du premier, ou la différence de dx. Ainsi les trois états consécutifs de la quantité x sont x, $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. La différence du second & du premier est dx; celle du troisieme & du second est $dx + d(dx)$; enfin la différence de ces deux différences ou la différence seconde de x, est $d(dx)$; on a donc $ddx = d(dx)$. Donc *pour avoir les différences secondes, il faut différencier les différences premieres selon les regles qui ont été données pour avoir celles-ci.*

Par exemple, pour avoir la différence seconde de xy, je prends sa différence premiere qui est $xdy + ydx$; je différencie maintenant celle-ci, comme si x & dx, y & dy étoient autant de variables différentes, & j'ai $xddy + dydx + dydx + yddx$, ou $xddy + 2dydx + yddx$. Pareillement, la différence seconde de x^2 se trouvera en différenciant d'abord x^2, ce qui donne $2 x dx$; puis différenciant $2 x dx$ comme si x & dx étoient deux variables finies, ce qui donnera $2 x ddx + 2 dx^2$. On trouvera de même que $dd(ax^m) = d(max^{m-1} dx) = m, m\text{-}1\, ax^{m-2} dx^2 + max^{m-1} ddx$ *.

Si l'on avoit à différencier une quantité dans laquelle il entre déja des différences premieres, soit qu'elle vînt ou ne vînt pas d'une différenciation exacte, on suivroit la même méthode. Ainsi $d(x dy) = x ddy + dx dy$. Pareillement $d\left(\frac{dy}{x}\right) = d(x^{-1} dy) = -x^{-2} dx dy + x^{-1} ddy$. De même $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d(dx dy^{-1}) = ddx\, dy^{-1} - dx dy^{-2} ddy = \frac{ddx}{dy} - \frac{dx ddy}{dy^2}$.

19. Il arrive souvent que dans les calculs où il entre plusieurs variables, on suppose constante la différence premiere de l'une de ces variables. Cette supposition qui est permise, parce qu'on peut toujours prendre une des différences premieres pour terme fixe de comparaison des autres différences premieres, cette supposition, dis-je, simplifie les calculs, en ce que les termes affectés de la différence seconde de cette variable, ne se trouvent plus dans le calcul, puisque si dx est constant, on a $ddx = 0$, ce qui fait disparoître tous les termes affectés de ddx. Il n'y a d'autre attention à avoir dans ce cas que de ne point différencier dx (ou la différentielle constante), dans les termes où elle se rencontre. Ainsi, la différentielle de $\frac{dx}{dy}$, prise en supposant dx constant, ou $d(dx dy^{-1})$ dans cette même supposition, est $-dxdy^{-2} ddy$ ou $-\frac{dx ddy}{dy^2}$. Si, au contraire,

* Il peut se présenter, sur cette maniere de prendre les différences secondes, une difficulté qu'il est bon de prévenir. Quand on détermine les différences premieres, on rejette les quantités infiniment petites du second ordre ; or, les différences secondes étant aussi infiniment petites du second ordre, ne doit-on pas craindre que ce qu'on a rejetté dans l'évaluation des premieres, ne rende les secondes défectueuses ? Non ; parce que cet infiniment petit du second ordre, qu'on a rejetté, ne peut donner pour sa différentielle qu'un infiniment petit du troisieme ordre, qui doit être rejetté vis-à-vis de la différence seconde, puisque celle-ci est infiniment petit du second.

on ſuppoſe dy conſtant, elle eſt $\frac{ddx}{dy}$.

20. A l'égard des différences troiſiemes, on voit, en raiſonnant comme ci-deſſus, que pour les avoir il faut de même différencier comme à l'ordinaire, les différences ſecondes, en regardant les variables, leurs différences premieres, & leurs différences ſecondes, comme autant de variables différentes; & ainſi des autres différences plus élevées. Il faut ſeulement obſerver que ſi dans le paſſage des premieres différences aux ſecondes, l'une des différences premieres a été ſuppoſée conſtante, on doit la regarder comme conſtante dans toutes les autres différenciations.

Remarques.

21. Nous avons ſuppoſé, dans tout ce qui précede, que les variables x, y, &c, augmentoient toutes en même temps; c'eſt-à-dire, que x devenant $x + dx$, y devenoit $y + dy$, & ainſi des autres. Mais il peut arriver que les unes diminuent pendant que les autres augmentent. Dans ce cas, il faut, après la différenciation, changer dans le réſultat, le ſigne de la différentielle de la variable qui va en diminuant. Ou bien, on peut laiſſer la différentielle telle que la donnent les regles précédentes; mais dans l'application qu'on en fera à une queſtion, il faudra avoir ſoin de prendre négativement la quantité que repréſente la différentielle de la variable qui va en diminuant. En effet, ſi y vient à diminuer d'une quantité q, & que par la différenciation

vous ayez supposé tacitement que y devenoit $y+dy$, il faut donc que $y-q=y+dy$, ou que $-q=dy$, ou que $q=-dy$; ainsi dans ces cas, ce que vous auriez appellé dy, vous l'appellerez $-dy$, par-tout ailleurs que dans la différenciation : nous verrons des exemples de cela, par la suite.

Il en sera de même des différences secondes à l'égard des différences premieres. Si la différence premiere va en diminuant, vous n'en différencierez pas moins comme à l'ordinaire, mais dans l'application à quelque question, vous appellerez $-ddy$, ce que vous auriez appellé ddy, si dy est la différence dont il s'agit.

Telles sont les regles pour différencier les quantités, lorsqu'elles sont présentées immédiatement. Mais il arrive souvent que ce n'est pas tant sur les quantités mêmes, que sur certaines expressions de ces quantités que l'on a à opérer. Par exemple, au lieu des angles on emploie souvent leurs sinus, tangentes, &c, de même, on est souvent forcé d'employer les logarithmes des quantités, au lieu des quantités mêmes. Voyons donc comment on doit différencier ces sortes d'expressions.

Des Différentielles de Sinus, Cosinus, &c.

22. LORSQU'ON a à différencier une quantité telle que $\sin z$ (ou sinus de l'angle

ou de l'arc z), il faut concevoir que l'angle z devient $z + dz$, & alors $\sin(z + dz) - \sin z$ est la différentielle de $\sin z$. Or selon ce qui a été dit (*Géom.* 284), $\sin(z + dz) = \sin z \cos dz + \sin dz \cos z$, en supposant le rayon $= 1$. Mais le sinus d'un arc infiniment petit dz est cet arc lui-même, & son cosinus ne differe point du rayon; on a donc $\sin dz = dz$ & $\cos dz = 1$; donc $\sin(z + dz) = \sin z + dz \cos z$; donc $\sin(z + dz) - \sin z$, ou $d(\sin z) = dz \cos z$; c'est-à-dire, qu'*on a la différentielle du sinus d'un angle ou d'un arc dont le rayon est l'unité, en multipliant la différentielle de l'angle, par le cosinus de ce même angle.*

23. Pareillement la différentielle de $\cos z$ ou $\cos(z + dz) - \cos z = \cos z \cos dz - \sin z \sin dz - \cos z$, puisque (*Géom.* 285) $\cos(z + dz) = \cos z \cos dz - \sin z \sin dz$; donc, eu égard à ce que $\sin dz = dz$, & $\cos dz = 1$, on a $d(\cos z) = \cos z - dz \sin z - \cos z = - dz \sin z$; c'est-à-dire, qu'*on a la différentielle du cosinus d'un angle dont le rayon est 1, en multipliant la différentielle de l'angle (prise avec un signe contraire), par le sinus de ce même angle.*

Ainsi pour récapituler, on a $d(\sin z) = dz \cos z$, & $d(\cos z) = - dz \sin z$.

A l'aide de ces deux principes, on peut

différencier toute quantité composée de sinus & de cosinus, & cela en appliquant les regles données précédemment.

Ainsi, pour différencier $cos\,3\,z$ on aura $d(cos\,3\,z) = -3\,dz\,sin\,3\,z$. De même $d\,(cos\,mz)$ (m étant un nombre constant) $= -\,m\,dz\,sin\,mz$; & $d\,(sin\,mz) = m\,dz\,cos\,mz$. Pareillement $d\,(sin\,z\,cos\,t) = cos\,t\,d\,(sin\,z) + sin\,z\,d\,(cos\,t) = dz\,cos\,t\,cos\,z - dt\,sin\,z\,sin\,t$. De même $d\,(sin\,z)^m = m\,(sin\,z)^{m-1}\,d\,(sin\,z) = m\,dz\,cos\,z\,(sin\,z)^{m-1}$.

24. Si l'on avoit $\frac{sin\,z}{cos\,z}$ qui est l'expression de la tangente de l'angle z lorsque le rayon est 1, (puisque (*Géom.* 278) on a $cos\,z : 1 :: sin\,z : tang\,z$), on auroit $d\left(\frac{sin\,z}{cos\,z}\right) = d\,((sin\,z)\,(cos\,z)^{-1}) = dz\,cos\,z\,(cos\,z)^{-1} + dz\,(sin\,z)^2\,(cos\,z)^{-2} = \frac{dz\,cos\,z}{cos\,z} + \frac{dz\,(sin\,z)^2}{(cos\,z)^2} = \frac{dz\,cos\,z)^2 + dz\,(sin\,z)^2}{(cos\,z)^2} = \frac{dz}{cos\,z^2}$, parce que (*Géom.* 281) $(cos\,z)^2 + (sin\,z)^2 = 1$.

Donc *la différentielle de la tangente d'un angle dont le rayon est* 1, *est égale à la différentielle de l'angle, divisée par le quarré du cosinus de ce même angle.*

D'où l'on peut conclure aussi que la différentielle d'un angle, est égale à la différentielle de la tangente de cet angle, multipliée par le quarré de ſon coſinus ; en effet, puiſque $d\left(\frac{\mathit{ſin}\, z}{\mathit{coſ}\, z}\right)$ ou $d\,(\mathit{tang}\, z) = \frac{dz}{(\mathit{coſ}\, z)^2}$, on a $dz = (\mathit{coſ}\, z)^2\, d\,(\mathit{tang}\, z)$.

25. Si l'on avoit au contraire $\frac{\mathit{coſ}\, z}{\mathit{ſin}\, z}$ qui eſt la cotangente de l'angle z, on auroit $d\left(\frac{\mathit{coſ}\, z}{\mathit{ſin}\, z}\right) = d\,((\mathit{coſ}\, z)\,(\mathit{ſin}\, z)^{-1}) = -dz\, \mathit{ſin}\, z\,(\mathit{ſin}\, z)^{-1} - dz\,(\mathit{coſ}\, z)^2\,(\mathit{ſin}\, z)^{-2} = -\frac{dz\, \mathit{ſin}\, z}{\mathit{ſin}\, z} - \frac{dz\,(\mathit{coſ}\, z)^2}{(\mathit{ſin}\, z)^2} = \frac{-dz\,(\mathit{ſin}\, z)^2 - dz\,(\mathit{coſ}\, z)^2}{(\mathit{ſin}\, z)^2} = \frac{-dz}{(\mathit{ſin}\, z)^2}$; donc *la différentielle de la cotangente d'un angle, eſt égale à la différentielle de l'angle (priſe négativement) diviſée par le quarré du ſinus de ce même angle*. Nous verrons, par la ſuite, l'uſage de ces différenciations.

Des Différentielles logarithmiques.

26. RAPPELLONS-NOUS (*Arith.* 216) que les logarithmes ſont une ſuite de nombres en progreſſion arithmétique quelconque, qui répondent, terme à terme, à une ſuite de nombres en progreſſion géométrique quelconque.

Cela poſé, ſoient y & y' deux termes conſécutifs d'une progreſſion géométrique, dont r ſoit la raiſon, & a, a', les deux premiers termes. Soient pareillement x & x'

deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, dont b & b' soient les deux premiers termes. Supposons de plus que x & x' sont à même place dans la progression arithmétique, que y & y' dans la progression géométrique ; auquel cas, x & x' sont les logarithmes de y & y'.

Par la nature de la progression géométrique (*Arith.* 211) on a $y' = ry$, & $a' = ra$; substituant dans la premiere équation, la valeur de r tirée de la seconde, on a $y' = \frac{a'y}{a}$, ou $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$. Supposons maintenant que la différence de y' à y est z, ou que $y' = y + z$; nous aurons $\frac{y+z}{y}$ ou $1 + \frac{z}{y} = \frac{a'}{a}$, & par conséquent $\frac{z}{y} = \frac{a'}{a} - 1 = \frac{a'-a}{a}$, ou $\frac{az}{y} = a' - a$.

D'un autre côté, la nature de la progression arithmétique (*Arith.* 204), donne $x' - x = b' - b$.

Pour avoir maintenant la relation de ces deux progressions, supposons que la différence $a' - a$ des deux premiers termes de la premiere, soit à la différence $b' - b$ des deux premiers termes de la seconde, comme l'unité est à un nombre quelconque m, c'est-à-dire, que $a' - a : b' - b :: 1 : m$; nous aurons $m(a' - a) = b' - b$; mettant donc dans cette derniere équation, pour $a' - a$ & $b' - b$, les valeurs qu'on vient de trouver, on aura $\frac{maz}{y} = x' - x$, qui exprime généralement la relation d'une progreſſion géométrique quelconque, à la progreſſion arithmétique quelconque correſpondante.

Imaginons que dans l'une & dans l'autre progreſſion, les termes conſécutifs ſoient infiniment voiſins; alors z qui marque la différence de y' à y, ſera dy, & $x' - x$ qui marque la différence de x' à x, ſera dx; d'où l'équation ſe changera en $\frac{mady}{y} = dx$. A l'égard de m qui marque le rapport de la différence des deux premiers termes de la progreſſion arithmétique, à la différence des deux premiers termes de la progreſſion géométrique, il n'en ſera pas moins un nombre fini, quoique ces deux différences ſoient alors infiniment petites, parce que l'on conçoit aiſément, que deux quantités infiniment petites peuvent ſe contenir l'une l'autre, autant de fois que deux quantités finies.

L'équation $\frac{mady}{y} = dx$ nous apprend donc que la différentielle dx du logarithme d'un nombre marqué par y, eſt égale à la différentielle dy de ce nombre, diviſée par ce même nombre y, & multipliée par le premier terme a de la progreſſion géométrique fondamentale, & par le nombre m qui marque le rapport de la différence des deux premiers termes de la progreſſion arithmétique, à la différence des deux premiers termes de la progreſſion géométrique. Comme ce nombre m fixe, en quelque ſorte, le rapport des deux progreſſions, on l'appelle le *module*.

On voit donc que ſelon la valeur que l'on ſuppoſera à m & au premier terme a de la progreſſion géométrique, un même nombre y peut avoir différents logarithmes. Mais entre tous ces différents ſyſtêmes de logarithmes, celui qui eſt le plus commode dans les calculs algébriques, eſt celui où le premier terme de la progreſſion géométrique eſt 1, & où le module eſt 1. Alors l'équation $\frac{madу}{y} = dx$ qui renferme tous les différents ſyſtêmes de logarithmes, devient $\frac{dy}{y} = dx$.

27. Donc, dans le ſyſtême de logarithmes, en uſage dans le calcul algébrique, *la différentielle* d x *du logarithme* x *d'un nombre quelconque* y, *eſt égale à la différentielle* d y *de ce nombre, diviſée par ce même nombre* y. C'eſt-là le principe d'après lequel on peut trouver facilement la différentielle du logarithme de toute quantité algébrique ; mais avant d'en faire uſage, nous obſerverons 1°. que les lo-

garithmes dont il s'agit ici, ne ſont point ceux des tables; mais on peut facilement paſſer des uns aux autres, comme nous le verrons par la ſuite.

2°. Que puiſque le premier terme b de la progreſſion arithmétique, ne ſe trouve point dans l'équation $\frac{m\,a\,dy}{y} = dx$, cette équation ainſi que l'équation particuliere $\frac{dy}{y} = dx$ que nous venons d'en déduire, ont toujours lieu quel que ſoit ce premier terme b, c'eſt-à-dire, le logarithme du premier terme a de la progreſſion géométrique. Donc nous ſommes les maîtres de ſuppoſer pour plus de ſimplicité, que le logarithme du premier terme de la progreſſion arithmétique eſt zéro : & comme nous avons ſuppoſé que la progreſſion géométrique à laquelle nous nous arrêtons, a pour premier terme l'unité, nous prendrons donc zéro pour logarithme de l'unité ; mais il faut bien remarquer qu'on en eſt abſolument maître.

En prenant ainſi l'unité pour premier terme de la progreſſion géométrique, & zéro pour premier terme de la progreſſion arithmétique, ou pour le logarithme de l'unité, les regles que nous avons données (*Arith.* 227 & *ſuiv.*) pour l'uſage des logarithmes, s'appliqueront également ici ; ainſi, en ſe les rappellant & les généralisant, on verra que au lieu de $l(ab)$ on peut prendre $la + lb$, l, marquant *logarithme*. De même $l\frac{a}{b} = la - lb$. Pareillement $la^m = mla$; enfin $l\sqrt[n]{a^m} = la^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}\, la$.

Cela posé, appliquant le principe que nous venons d'établir concernant la différentielle du logarithme d'un nombre, on trouvera que $dlx = \frac{dx}{x}$; $dl\,(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d(la - l(a+x)) = -\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, en faisant attention que la différentielle de la constante la, est zéro.

Pareillement, $dl\frac{1}{x} = d\,(l1 - lx) = -\frac{dx}{x}$; $dl(x^2) = d(2lx) = \frac{2dx}{x}$; $dl\,(xy) = d\,(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$; $d\,(l\frac{x}{y}) = d(lx - ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $dl\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = d(l(a+x) - l(a-x)) = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$; $d(l(aa+xx)) = \frac{d(aa+xx)}{aa+xx} = \frac{2xdx}{aa+xx}$; $dl\sqrt{aa+xx} = \frac{d\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}\sqrt{aa+xx}} = \frac{xdx}{aa+xx}$; ou

plus

plus commodément, $dl\sqrt{aa+xx} = d(\frac{1}{2}l(aa+xx)) = \frac{xdx}{aa+xx}$; $dl(x^m(a+bx^n)^p) = d(lx^m+l(a+bx^n)^p = d(mlx+pl(a+bx^n)) = \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}$. Ces exemples suffisent pour faire voir comment on doit différencier toutes les autres quantités logarithmiques.

Des Différentielles des quantités exponentielles.

28. On rencontre encore quelquefois des quantités de cette forme, c^x, x^y; c'est-à-dire, des quantités dont l'exposant est variable. On les appelle des quantités *Exponentielles*.

Pour savoir comment on doit les différencier, posons $x^y = z$; alors, en prenant les logarithmes de chaque membre, nous aurons $lx^y = lz$, & par conséquent $dl(x^y) = \frac{dz}{z}$; donc $dz = zdl(x^y)$, ou (en mettant pour z & dz, leurs valeurs) $d(x^y) = x^y dl(x^y)$; c'est-à-dire, que *la différentielle d'une quantité exponentielle, se trouve en multipliant cette quantité exponentielle, par la différentielle de son logarithme.*

Ainsi $d(x^y) = x^y d(lx^y) = x^y d(ylx) = x^y (dylx + \frac{ydx}{x})$. Pareillement $d(a^x + y^z) = d(a^x) + d(y^z) = a^x d(la^x) + y^z d(ly^z) = a^x d(xla) + y^z d(zly) = a^x dxla + y^z(dzly + \frac{zdy}{y})$. De même $d(aa+xx)^x = (aa+xx)^x dl(aa+xx)^x = (aa+xx)^x d(xl(aa+xx)) = (aa+xx)^x (dxl(aa+xx) + \frac{2x^2dx}{aa+xx})$; & ainsi des autres.

On fait assez souvent usage, dans le calcul, de la quantité exponentielle c^x, c étant le nombre dont le logarithme $= 1$. La différentielle de cette quantité, eſt, ſelon ce qui vient d'être enſeigné, $c^x\, d(l c^x)$, ce qui revient à $c^x\, d(x l c) = c^x\, dx lc$; donc puiſque lc eſt ſuppoſé $= 1$, on a ſimplement $d(c^x) = dx\, c^x$. C'eſt-à-dire, que cette exponentielle particuliere, a pour différentielle, cette exponentielle même, multipliée par la différentielle de ſon expoſant. Nous la retrouverons par la ſuite.

Applications des Regles précédentes.

29. Pour faire connoître, par quelques exemples, l'uſage des regles que nous venons de donner, & leur avantage ſur l'Algebre ordinaire, nous allons les appliquer aux objets que nous connoiſſons; c'eſt-à-dire, à des queſtions de Géométrie & de Calcul.

Application aux Soutangentes, Tangentes, Sounormales, &c., des Lignes courbes.

30. Pour mener une tangente à une ligne courbe quelconque AM (*Fig.* 1.), on ſe repréſente cette ligne courbe, comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits: le prolongement MT de l'un Mm de ces côtés, eſt la tangente, que l'on détermine pour chaque point M, en calculant la valeur de la ſoutangente PT, ou de la

partie de la ligne ſur laquelle ſe comptent les abſciſſes, compriſe entre l'ordonnée PM & la rencontre T de cette tangente. Voici comment on détermine cette ſoutangente.

Par les deux extrémités M & m du côté infiniment petit Mm, on imagine les deux ordonnées MP, mp, & par le point M, la ligne Mr parallele à AP axe des abſciſſes. Le triangle infiniment petit Mrm eſt alors ſemblable au triangle fini TPM, & donne cette proportion $rm : rM :: PM : PT$. Or ſi l'on nomme AP, x; PM, y; il eſt évident que Pp ou ſon égal rM ſera dx, & que rm ſera dy; on aura donc $dy : dx :: y\ PT = \frac{y\,dx}{dy}$.

C'eſt-là la formule générale pour déterminer la ſoutangente de quelque courbe que ce ſoit, ſoit que les y & les x ſoient perpendiculaires entr'elles, ſoit qu'elles ne le ſoient pas, pourvu que les y ſoient toujours paralleles entr'elles. Voyons maintenant comment on applique cette formule, à chaque courbe dont on a l'équation.

Suppoſons que la nature de la courbe quelconque AM, ſoit exprimée par une équation telle qu'on voudra, où entrent x, y & des quantités conſtantes. Si l'on différencie cette équation, il n'y aura jamais que deux ſortes de termes, les uns multipliés par dx, les autres multipliés par dy. Il ſera donc facile, par les regles ordinaires de l'Algebre, de tirer de cette équation différentielle, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle ne contiendra que des x, des y, & des conſtantes: ſubſtituant cette valeur dans la formule $\frac{ydx}{dy}$ ou $y\times\frac{dx}{dy}$, on aura la valeur de la ſoutangente, en x, y & en conſtantes; enfin mettant pour y ſa valeur exprimée en x, que l'on tirera de l'équation de la courbe même, on aura la ſoutangente exprimée ſimplement en x & en conſtantes; ainſi pour déterminer la ſoutangente pour quelque point M que ce ſoit, il ne s'agira plus que de mettre dans ce dernier réſulat, au lieu de x, la valeur de l'abſciſſe AP qui répond à ce point M.

Suppoſons, par exemple, que la courbe dont il s'agit, eſt une ellipſe dont l'équation (*Alg.* 294) eſt $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Je différencie cette équation, ce qui me donne $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$ ou $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$; j'en tire la valeur de $\frac{dx}{dy}$, en diviſant d'abord par dy, puis par le multiplicateur de dx, & j'ai $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$; ſubſtituant dans $\frac{ydx}{dy}$, j'aurai $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; enfin mettant pour y^2, ſa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$ que donne l'équation de la courbe, & réduiſant, j'ai $\frac{ydx}{dy}$ ou $PT = \frac{2(ax - xx)}{a - 2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$, valeur qui eſt préciſément la même que celle que nous avons trouvée (*Alg* 301), mais que l'on trouve ici, d'une maniere bien plus expéditive. Remarquons en paſſant, combien ce réſultat juſtifie ce que nous avons dit (5) touchant les quantités que l'on rejette dans le calcul ; car en employant ici le calcul différentiel, dont les regles, dans cet exemple, ſuppoſent l'omiſſion des quantités infiniment petites du ſecond ordre, vis-à-vis de celles du premier, nous arrivons au même réſultat que dans l'application de l'Algebre à la Géométrie, où nous avions déterminé cette ſoutangente de la maniere la plus directe & la plus rigoureuſe. On voit donc qu'en rejettant ainſi les quantités que nous avons preſcrit de rejetter, on ne fait qu'imprimer au calcul, le caractere qu'il doit avoir pour exprimer l'état de la queſtion.

On s'y prendra d'une maniere ſemblable pour déterminer les tangentes, les ſounormales, les normales, &c.

Suppoſons, pour plus de ſimplicité, que

les x & les y font perpendiculaires entre elles ; pour avoir la tangente, on comparera de nouveau le triangle Mmr, au triangle TPM, & l'on aura $rm : Mm :: PM : TM$; or à caufe du triangle rectangle Mrm : on a $Mm = \sqrt{\overline{rM}^2 + \overline{rm}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; donc $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y : TM$; donc $TM = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dy^2}} = y\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}} = y\sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1}$; ainfi, différenciant l'équation de la courbe, on en tirera la valeur de $\frac{dx}{dy}$, dont on fubftituera le quarré dans cette expreffion de la tangente ; après quoi, mettant pour y fa valeur en x & en conftantes, tirée de l'équation de la courbe, on aura la tangente exprimée en x & en conftantes. On peut en faire l'application à l'équation à l'ellipfe ; on retrouvera la même valeur que nous avons donnée (*Alg.* 303).

Si l'on veut avoir la founormale, on imaginera la ligne MQ perpendiculaire à la tangente TM, & l'on remarquera que les triangles Mrm, MPQ, qui ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, font femblables ; on aura donc $Mr : rm :: PM : PQ$;

c'eſt-à-dire, $dx : dy :: y : PQ = \frac{y\,dy}{dx}$. Donc, après avoir différencié l'équation de la courbe, on en tirera la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que l'on ſubſtituera dans $\frac{y\,dy}{dx}$, & achevant comme ci-deſſus, on aura la valeur de la ſounormale, en x & en conſtantes.

Par exemple, pour l'ellipſe, l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ étant différenciée, nous donne $2ydy = \frac{bb}{aa}(a\,dx - 2x\,dx)$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa}(a-2x)}{2y}$; par conſéquent la ſounormale $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{bb}{aa} \times \frac{a-2x}{2} = \frac{bb}{aa}.(\frac{1}{2}a - x)$, la même choſe que l'on a trouvé (*Alg.* 300).

Si l'on vouloit la normale MQ, on la trouveroit en comparant de nouveau le triangle Mrm, au triangle MPQ.

Prenons pour ſecond exemple de la formule des ſoutangentes, & de celle des ſounormales, l'équation à la parabole, qui (*Alg.* 356) eſt $yy = px$. En différenciant, nous aurons $2ydy = p\,dx$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$: donc la ſoutangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; & la ſounormale $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$, ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé (*Alg.* 363 & 364).

Pour troisieme exemple, nous prendrons l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$ qui exprime généralement les paraboles de tous les genres.

On est convenu d'appeller parabole, toute courbe dont l'équation telle que $y^{m+n} = a^m x^n$ n'a que deux termes, mais où les exposants de x & y dans différents membres, sont de même signe.

En différenciant cette équation, nous aurons $\overline{m+n}\, y^{m+n-1}\, dy = n a^m x^{n-1}\, dx$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{\overline{m+n}\, y^{m+n-1}}{n a^m x^{n-1}}$; donc la soutangente $\frac{y\,dx}{dy}$ sera $\frac{\overline{m+n}.\, y^{m+n}}{n a^m x^{n-1}}$, ou (en mettant pour y^{m+n} sa valeur $a^m x^n$); $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{\overline{m+n}\, a^m x^n}{n a^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n} x$; d'où l'on voit que la soutangente, dans ces courbes, est égale à autant de fois l'abscisse x, qu'il y a d'unités dans l'exposant de y divisé par l'exposant de x, ce qui a lieu, comme nous le savions déja, dans la parabole ordinaire, où la soutangente est $2x$, & où l'exposant de y divisé par l'exposant de x est en effet $\frac{2}{1} = 2$.

Prenons maintenant, pour exemple, une courbe dont la nature soit exprimée par une équation entre les différentielles des coordonnées. Suppoſons, par exemple, que la courbe BM (*Fig.* 4.) ſoit telle, que les abſciſſes AP, Ap, &c. étant priſes en progreſſion arithmétique, les ordonnées correſpondantes PM, pm, &c, ſoient en progreſſion géométrique : cette courbe qu'on appelle *logarithmique*, parce que les ordonnées repréſentant ſucceſſivement tous les nombres imaginables, les abſciſſes repréſentent leurs logarithmes, cette courbe, dis-je, aura pour équation $\frac{amdy}{y} = dx$, puiſque nous avons vu (26) que cette équation exprimoit la relation des nombres à leurs logarithmes. On aura donc $\frac{dx}{dy} = \frac{am}{y}$, & par conſéquent la ſoutangente $\frac{ydx}{dy}$ deviendra $\frac{amy}{y}$ ou am; c'eſt-à-dire, que pour chaque point d'une même logarithmique, la ſoutangente PT eſt toujours la même, & égale à autant de fois la premiere ordonnée AB, ou a, qu'il y a d'unités dans le module m.

31. Lorſque l'équation de la courbe eſt telle, que x croiſſant, y diminue, comme dans la figure 2, alors la ligne rM doit être exprimée par $-dy$ (21); & la proportion $rM : rm :: PM : PT$ qui ſert à trouver la ſoutangente, devient $-dy : dx :: y : PT = -\frac{ydx}{dy}$; ainſi il n'y aura aucune différence

pour le calcul : le ſeul changement eſt que la tangente au lieu de tomber du côté de l'origine A des abſciſſes, par rapport à l'ordonnée PM, tombera du côté oppoſé ; c'eſt pourquoi on peut toujours prendre $\frac{ydx}{dy}$ pour la formule des ſoutangentes : ſi les ordonnées vont en décroiſſant, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ ſe préſentera ſous une forme négative qui indiquera qu'il faut porter cette valeur du côté oppoſé à l'origine des x.

Par exemple, ſi on prend l'équation au cercle, l'origine étant priſe au centre, c'eſt-à-dire (*Alg.* 285) l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, il eſt évident que CP ou x (*Fig.* 3) croiſſant, y ou PM diminue ; auſſi la ſoutangente PT tombe-t-elle du côté de PM oppoſé à l'origine C des abſciſſes ; & c'eſt ce que le calcul dit auſſi ; car ſi l'on différencie, on a $2ydy = -2xdx$, & par conſéquent $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$, donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = \frac{-(\frac{1}{4}aa - xx)}{x}$, valeur dont le ſigne — indique qu'elle doit être portée du côté oppoſé à celui que l'on a ſuppoſé en prenant $\frac{ydx}{dy}$ pour formule de la ſoutangente.

Prenons encore pour exemple, l'équation $xy = aa$ qui eſt à l'hyperbole entre ſes aſymptotes (*Alg.* 347) : nous aurons $ydx + xdy = 0$,

& par conféquent $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$; donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{-xy}{y} = -x$; ce qui nous apprend que pour mener une tangente à l'hyperbole confidérée entre fes afymptotes, il faut prendre fur l'afymptote voifine du point M en queftion (*Fig.* 7) & du côté de PM oppofé au point A origine des x, la ligne $PT = AP = x$.

On voit avec quelle facilité toutes ces chofes fe déterminent par le calcul différentiel.

A l'imitation des paraboles de tous les genres, on appelle *Hyperboles*, rapportées à leurs afymptotes, toutes les courbes dont l'équation telle que $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ n'a que deux termes, mais où les expofants de y & de x dans différents membres, font de fignes contraires. On peut encore prendre ces courbes pour exemple; nous le laiffons à faire au Lecteur. On trouvera la foutangente $= -\frac{m}{n}x$; c'eft-à-dire, qu'elle tombe du côté oppofé à l'origine des x, & qu'elle eft égale à autant de fois l'abfciffe qu'il y a d'unités dans l'expofant de y divifé par l'expofant de x.

En général, par ce calcul, on détermine à la fois toutes les foutangentes, tangentes,

&c. de toutes les courbes d'une même famille : on appelle ainſi les courbes dont l'équation eſt formée de la même manière, & ne différe que par la grandeur des expoſants ; c'eſt ainſi qu'on appelle *Cercles*, en général, toutes les courbes dans leſquelles une puiſſance quelconque de l'ordonnée, eſt égale au produit de deux puiſſances quelconques des deux diſtances de cette ordonnée aux extrémités d'une ligne a, ſur laquelle ſe comptent les abſciſſes. Leur équation eſt $y^{m+n} = x^m (a - x)^n$ qui comprend le cercle proprement dit, lorſque $m = n = 1$. L'équation $y^{m+n} = \frac{c}{b} x^m (a - x)^n$ repréſente les ellipſes de tous les genres ; & $y^{m+n} = \frac{c}{b} x^m (a + x)^n$, ainſi que $y^{m+n} = \frac{c}{b} (x - a)^n$ repréſente les hyperboles de tous les genres. On détermine la figure de ces courbes, par le moyen de leur équation, comme nous l'avons vu pour les ſections coniques (*Alg.* 283) ; mais en obſervant que y n'a qu'une valeur réelle, lorſque ſon expoſant eſt impair, & deux lorſqu'il eſt pair, voyez (*Alg.* 172) ; ce qui fait qu'à une même abſciſſe, il ne répond qu'une branche de courbe, dans le premier cas, & deux dans le ſecond, mais qui tombent de différents côtés de ce même axe.

32. Lorsqu'on sait déterminer les tangentes, normales, &c. on peut facilement résoudre les deux questions suivantes 1°. *d'un point donné hors d'une courbe, mener une tangente à cette courbe.* 2°. *D'un point donné partout où l'on voudra dans le plan d'une ligne courbe, mener une perpendiculaire à cette courbe.*

En effet, concevons que DM (*Fig.* 8) est la tangente demandée. La valeur générale de PT ou $\frac{ydx}{dy}$ sera facile à trouver par le moyen de l'équation de la courbe. Si l'on mene DB parallele aux ordonnées PM, la ligne DB & sa distance BA à l'origine A des abscisses, sont censées connues, puisque le point D est supposé donné. Nommant donc DB, h; AB, g; AP, x; & PM, y; on aura $BP = g + x$, & $TB = PT - BP = \frac{ydx}{dy} - x - g$. Or les triangles semblables TBD, TPM, donnent $TB : BD :: TP : PM$; c'est-à-dire, $\frac{ydx}{dy} - x - g : h :: \frac{ydx}{dy} : y$ ou $:: \frac{dx}{dy} : 1$; donc $\frac{ydx}{dy} - x - g = \frac{hdx}{dy}$. Mettant donc dans cette équation, la valeur de $\frac{dx}{dy}$ tirée de l'équation de la courbe différenciée, on aura une équation en x, y & constantes, dans laquelle mettant pour y sa valeur en x & constantes, tirée de l'équation même de la courbe, on aura l'équation qui donnera la valeur de x, qui répond au point M où doit aboutir la tangente; & s'il est possible de mener du point D plus d'une tangente, l'équation donnera les valeurs de x qui conviennent aux différents points où doivent aboutir ces tangentes.

S'il s'agit d'une perpendiculaire, alors imaginant que ce soit DQ (*Fig.* 5); PQ sera $\frac{y\,dy}{dx}$ (30); or les triangles semblables DBQ & MPQ donnent $DB : BQ :: PM : PQ$, c'est-à-dire, (en employant les mêmes dénominations que ci-dessus) $h : g + x + \frac{y\,dy}{dx} :: y : \frac{y\,dy}{dx}$ ou $:: 1 : \frac{dy}{dx}$; donc $\frac{h\,dy}{dx} = g + x + \frac{ydy}{dx}$, équation dont on fera le même usage que dans le cas précédent.

Les deux solutions que nous venons de donner, peuvent être simplifiées en faisant passer l'axe des abscisses par le point donné D, & le laissant parallele à sa premiere position; c'est-à-dire, en prenant DK (*Fig.* 8) pour axe des abscisses, ce qui n'exige autre chose en faisant $KM = z$, & par conséquent $z = y - h$, ou $y = z + h$, que de substituer, tant dans l'équation de la courbe, que dans celle du problême, $z + h$ au lieu de y. On peut aussi prendre le point D pour origine des abscisses.

Lorsque la courbe a un centre, comme le cercle, l'ellipse, &c. on peut toujours supposer que le point D est sur un diametre, alors la solution devient beaucoup plus simple.

33. Remarquons encore que $\frac{dx}{dy}$ exprime

la tangente de l'angle que la courbe fait en chaque point, avec l'ordonné; & $\frac{dy}{dx}$ exprime celle de l'angle que la courbe fait avec l'axe des abſciſſes. En effet, dans le triangle rectangle Mmr (*Fig.* 1), on a (en ſuppoſant le rayon des tables $= 1$) $rm : rM :: 1 : tang\ rmM$, donc $tang\ rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$ Donc ſi l'on veut ſavoir en quel endroit une courbe, ou ſa tangente, fait avec l'ordonnée, un angle donné, ou dont la tangente eſt connue, ayant repréſenté cette tangente par m, on aura $m = \frac{dx}{dy}$; ainſi déterminant, par différenciation de l'équation de la courbe, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & l'égalant à m, on aura une équation dans laquelle ſubſtituant pour y ſa valeur en x & conſtantes tirée de l'équation de la courbe, on aura la valeur ou les valeurs de x, qui répondent aux points où la courbe fait un pareil angle avec l'ordonnée; & ſi la courbe ne fait nulle part avec l'ordonnée un angle égal à l'angle donné, on trouvera que la valeur ou les valeurs de x feront imaginaires, ou bien l'équation indiquera une abſurdité manifeſte. Par exemple, dans l'hyperbole qui auroit pour équation $yy = 2(ax + xx)$ on trouvera $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a+4x}$, lequel étant égalé à m, donne $\frac{2y}{2a+4x}$ ou $\frac{y}{a+2x}$ $m =$; d'où l'on tire $y = ma + 2mx$: mais l'équation de la courbe donne $y = \sqrt{2(ax+xx)}$; donc $ma + 2mx = \sqrt{2(ax+xx)}$ ou, en quarrant $mmaa + 4mmax + 4mmxx = 2ax + 2xx$. Si l'on demande maintenant, en quel endroit cette hyperbole fait, avec l'ordonnée, un angle de 45°; comme la tangente de 45° eſt égale au rayon, on aura $m = 1$, ce qui réduit l'équation à $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$ ou $2xx + 2ax + aa = 0$, qui étant réſolue donne $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}aa}$, valeurs imaginaires, & qui font voir que l'hyperbole dont l'équation particuliere eſt $yy = 2(ax+xx)$, ne fait nulle part, avec l'ordonnée, un angle de 45°.

Quoique ce que nous venons de dire dans cette derniere remarque, & dans la réſolution des deux queſtions précédentes, ſemble s'appliquer également aux courbes dont on auroit l'équation differencielle ; en y faiſant attention, on verra cependant que pour celle-ci, le calcul ne peut pas ſatisfaire entiérement comme pour celles dont on a l'équation en termes finis. En effet, lorſque l'équation qui réſout la queſtion, renferme encore x & y après la ſubſtitution de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, l'équation de la courbe ne peut ſervir à chaſſer y, puiſque par la ſuppoſition elle renferme dx & dy. Et quand même elle ne renfermeroit que x, on ne ſeroit pas sûr que cette valeur de x ſatisfît à la queſtion, il faudroit, pour cela, mettre cette valeur de x dans l'équation de la courbe, & en déduire pour y une

valeur

valeur réelle; or on ne peut en aucune maniere, tirer de cette équation la valeur de y.

La ſeule maniere de réſoudre ces queſtions, en pareil cas, eſt (en ſuppoſant la courbe déja conſtruite,) de conſtruire auſſi l'équation que l'on a eue en exprimant les conditions de la queſtion, ce qui donne une ſeconde ligne dont l'interſection, ou les interſections avec la premiere, donnent la ſolution ou les ſolutions demandées.

34. On peut encore, par les mêmes principes, déterminer les aſymptotes rectilignes des lignes courbes.

En effet une courbe a une aſymptote rectiligne, lorſqu'ayant quelque branche qui s'étend à l'infini, la tangente à l'extrémité de cette branche, rencontre l'axe des abſciſſes ou celui des ordonnées, à une diſtance finie de l'origine. Ainſi (*Fig.* 6) ſi de la ſoutangente PT ou $\frac{y\,dx}{dy}$ on retranche l'abſciſſe AP ou x on aura $\frac{y\,dx}{dy} - x$ pour la valeur de AT ou de la diſtance de l'origine A juſqu'à la rencontre de la tangente : il n'y aura donc, après avoir calculé la valeur de $\frac{y\,dx}{dy} - x$, qu'à égaler cette valeur à une quantité finie s; par le moyen de cette équation, on chaſſera y pour avoir une équation en x & s, ou bien on chaſſera x pour avoir une équation en y & s. Alors ſuppoſant y ou x infinie, s'il en réſulte une ou pluſieurs valeurs finies pour s, ce ſeront les diſtances AC où doivent paſſer les aſymptotes de la courbe. Mais comme une ſeule diſtance n'en détermine pas la poſition, on imaginera, par l'origine A, la ligne AK parallele aux ordonnées, & on remarquera que les triangles ſemblables TPM, TAK, donnent $TP : PM :: TA : AK$; c'eſt-à-dire, $\frac{y\,dx}{dy} : y :: \frac{y\,dx}{dy} - x : AK = y - \frac{x\,dy}{dx}$. On calculera donc, de même, la valeur de $y - \frac{x\,dy}{dx}$, & l'ayant ſuppoſée égale à une quantité finie t, par le moyen de cette équation & de celle de la courbe, on éliminera x ou y; & ſuppoſant y ou x infinie, la valeur ou les valeurs de t qui en réſulteront, donneront les diſtances AR où paſſe l'aſymptote.

Par exemple, ſi l'équation de la courbe étoit $y^3 = x^2 (a + x)$, on auroit $3y^2 dy = 2\,x\,dx\,(a + x) + x^2 dx = 2\,ax\,dx + 3x^2 dx$, donc $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3}{2ax+3x^2} - x$, ou (en mettant pour y^3, sa valeur), $\frac{xdy}{dx} - x = \frac{3ax^2+3x^3}{2ax+3x^2} - x = \frac{ax^2}{2ax+3x^2} = \frac{ax}{2a+3x} = s$: supposant donc x infinie, (c'est-à-dire, négligeant $2a$ vis-à-vis de $3x$) on aura $s = \frac{a}{3}$. On trouvera de même $y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{2ax^2+3x^3}{3y^2} = \frac{3y^3 - 2ax^2 - 3x^3}{3y^2}$, qui, en mettant pour y sa valeur, se réduit à $\frac{ax^2}{3x\sqrt[3]{(a+x)^2x}} = t$; supposant donc x infinie, on aura $t = \frac{1}{3}a$.

Si la valeur de s étant finie, on trouvoit celle de t infinie, ce seroit une preuve que l'asymptote est parallele aux y. Elle seroit, au contraire, parallele aux x, si s étant infinie, t étoit finie, ou zéro ou infiniment petite.

35. Dans tout ce qui précéde, nous avons supposé que les ordonnées étoient paralleles, & qu'elles étoient comptées depuis la ligne même sur laquelle se comptent les abscisses. Mais il arrive assez souvent que l'on fait partir les ordonnées d'un point fixe; quelquefois on prend pour abscisses les arcs d'une ligne courbe, & pour ordonnées des lignes droites ou des lignes courbes. Mais en général, à quelques lignes que soient rapportés les points de la courbe principale, on a toujours, ou l'on peut toujours avoir une équation qui exprime la relation des abscisses aux ordonnées. Lorsqu'on veut en faire usage pour déterminer les tangentes, ou d'autres lignes, il faut faire en sorte que les lignes que l'on employera pour déterminer ces tangentes, ne renferment d'autres différencielles que celles des variables qui entrent dans l'équation de la courbe. Nous allons en donner quelques exemples.

36. Supposons d'abord que *AM* (*Fig.* 9) étant une courbe connue dont on sait mener les tangentes, *BS* soit une courbe qui ait pour abscisses les arcs *AM* de la premiere, & pour ordonnées les lignes *MS* paralleles à une ligne donnée : la relation de *AM* à *MS* étant exprimée par une équation quelconque, on demande comment on meneroit une tangente en un point donné *S* de la courbe *BS*.

On imaginera, comme ci-devant, l'arc infiniment petit *Ss* dont le prolongement *SQ*, ou la tangente, rencontre en *Q* la tangente MT au point correſpondant M de la courbe AM; & ayant mené la ligne Sk parallele à MT ou à Mm, le triangle Sks ſera ſemblable au triangle QMS, en ſorte que l'on aura $sk : Sk :: MS : MQ$; or en nomment l'arc AM, x; & l'ordonnée MS, y; on a $Mm = Sk = dx$, & $sk = sm - SM = dy$; donc $dy : dx :: y : MQ = \frac{y\,dx}{dy}$; prenant donc ſur la tangente MT la partie MQ égale à la valeur de $\frac{y\,dx}{dy}$ déterminée par la différenciation de l'équation de la courbe, on aura le point Q, par lequel & par le point S, menant QS, elle ſera la tangente demandée.

Suppoſons, par exemple, que la courbe BS ſoit conſtruite en prenant toujours l'ordonnée MS égale à une partie déterminée de l'arc AM; c'eſt-à-dire, que MS ſoit toujours à AM dans le rapport donné de a à b, on aura donc $y : x :: a : b$, en ſorte que l'équation de la courbe ſera $by = ax$. Différenciant, on a $bdy = adx$, & par conſéquent $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$; donc $\frac{y\,dx}{dy}$ ou MQ ſera $\frac{by}{a}$; or par l'équation, on a $\frac{by}{a} = x$; donc $MQ = x$. Ainſi dans toutes les courbes dont les ordonnées paralleles ſeront toujours en même rapport avec les abſciſſes correſpondantes, droites ou courbes, la ſoutangente MQ ſera toujours égale à l'abſciſſe correſpondante AM.

37. Lorſque la courbe AM ſur laquelle on prend les abſciſſes, eſt un cercle; l'ordonnée MS étant toujours à l'arc AM dans un rapport conſtant, la courbe BS eſt ce qu'on appelle une cicloïde. C'eſt la cicloïde ordinaire (ou celle que trace le point d'une circonférence de cercle roulant ſur un plan), lorſqu'on prend toujours l'ordonnée $MS = AM$. Si l'on prend MS plus grand que AM, mais toujours en même rapport entr'eux, on a la cicloïde allongée; au contraire, on a la cicloïde accourcie en prenant MS plus petit que AM.

38. Si l'équation de la courbe à laquelle il s'agit de mener une tangente, au lieu d'exprimer le rapport de AM à MS, exprimoit celui AM à PS; c'eſt-à-dire, ſi les arcs AM étoient les abſciſſes x, & que les ordonnées PMS, y, ſe comptaſſent depuis une ligne droite déterminée AP; alors en menant Su parallele à AP, on détermineroit la ſoutangente PI ſur la ligne AP, en cette maniere.

Comme la courbe AM eſt ſuppoſée connue, on eſt cenſé connoître sa soutangente & sa tangente en chaque point; ainsi nommant PT, s, & TM, t, on aura, en menant Mr parallele à AP, & comparant les triangles TPM & Mrm, $TP : TM :: Mr : Mm$; c'est-à-dire, $s : t :: Mr : dx$; donc $Mr = \frac{s\,dx}{t} = Su$, (en menant Su parallele à AP). Comparant donc les triangles semblables Suf & IPS, on aura $uf : Su :: PS : PI$; or PS étant actuellement y, uf est dy; donc $dy : \frac{s\,dx}{t} :: y : PI = \frac{sy\,dx}{t\,dy}$. Ainsi, différenciant l'équation de la courbe, on aura la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qui étant substituée dans $\frac{sy\,dx}{t\,dy}$ donnera la valeur de PI débarrassée de différences.

39. Quelquefois on ne donne pas l'équation de la courbe, par la relation des abscisses aux ordonnées, mais par celle que chaque ordonnée de cette courbe, est supposée avoir avec les ordonnées correspondantes de quelques autres courbes connues. Pour mener les tangentes, dans ce cas, voici comment on s'y prendra. Supposons, par exemple, que la courbe BMS (*Fig.* 10), résulte des deux courbes connues AL & CN, au moyen d'une équation entre les ordonnées correspondantes PL, PM, PN, que nous nommerons respectivement x, y, z. Puisque les courbes AL & CN sont supposées connues, leurs soutangentes PS & PR sont supposées connues; nommons donc PS, s, & PR, s'; & imaginons l'ordonnée infiniment proche $pnml$, & les lignes Lu, Mr, no paralleles à AP. Les triangles semblables LPS, luL donnent $PS : PL :: Lu : ul$, c'est-à-dire, $s : x :: Lu : dx$; donc $Lu = \frac{s\,dx}{x} = Mr$. Or les triangles semblables TPM, Mrm, donnent $rm : Mr :: PM : PT$, c'est-à-dire, $dy : \frac{s\,dx}{x} :: y : PT$; donc $PT = \frac{sy\,dx}{x\,dy}$; donc si l'équation de la courbe ne renfermoit que x & y, on auroit, en différenciant cette équation, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle étant substituée dans $\frac{sy\,dx}{x\,dy}$, donneroit la valeur de PT, débarrassée de différences; mais comme cette équation renferme x, y & z, sa différencielle renfermera dx, dy & dz; il faut donc avoir la valeur de dz exprimée en dx ou dy. Or les triangles sembla-

bles Non & NPR donnent $No : on$ ou $Lu :: NP : PR$; c'eſt-à-dire, (en faiſant attention que PM augmentant, PN diminue, en ſorte que ſa différence NO ou dz eſt négative) $-dz : \frac{sdx}{x} :: z : s'$; donc $dz = -\frac{szdx}{s'x}$; ainſi, en mettant, dans l'équation différenciée de la courbe, la quantité $\frac{-szdx}{s'x}$ au lieu de dz, on aura aiſément la valeur de $\frac{dx}{dy}$, que l'on ſubſtituera dans la formule $\frac{sydx}{xdy}$ de la ſoutangente.

Pour donner un exemple, ſuppoſons que AL & CN étant deux courbes connues quelconque, on prenne toujours l'ordonnée PM moyenne proportionnelle entre PL & PN; alors on aura $x : y :: y : z$: ou $xz = y^2$, pour l'équation de la courbe BM. Différenciant, il vient $xdz + zdy = 2ydy$, ſubſtituant pour dz ſa valeur générale $-\frac{szdx}{s'x}$, on a $-\frac{szdx}{s'} + zdx = 2ydy$, d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2s'y}{z(s'-s)}$; donc PT ou $\frac{sydx}{xdy}$ devient $\frac{2ss'y^2}{xz(s'-s)}$, ou en mettant pour y^2 ſa valeur xz, & réduiſant, $PT = \frac{2ss'}{s'-s}$.

Il eſt aiſé de varier ces exemples, en prenant telle équation que l'on voudra, entre x, y & z. On peut, ſi l'on veut, ſuppoſer que AL & CN ſont des lignes droites (*Fig.* 11). Dans ce cas, & en prenant toujours PM moyenne proportionnelle entre PL & PN, la courbe BM eſt une ſection conique. Savoir, une parabole, quand le point C eſt infiniment éloigné; ou que la ligne droite CN eſt parallele à AC. Une ellipſe, quand les deux angles HAC & HCA ſont aigus; & particuliérement, un cercle quand ils ſont chacun de 45°, une hyperbole quand l'un de ces deux angles eſt obtus.

40. Lorſque les ordonnées partent d'un point fixe, alors on prend pour abſciſſes les arcs d'une courbe connue, qui le plus ſouvent eſt un cercle; c'eſt-à-dire, que dans ce dernier cas, l'équation exprime la relation de l'ordonnée CM (*Fig.* 12), avec l'angle ACM que cette ligne fait avec une ligne fixe AC; ou bien elle exprime la relation de cette même ordonnée CM avec l'arc OS décrit d'un rayon déterminé.

Pour mener les tangentes, lorſqu'on a l'équation entre l'ordonnée CM & l'angle ACM ou l'arc OS, on imagine, que pour chaque point M, on éleve ſur CM une perpendiculaire CT qui rencontre la tangente TM en T; alors imaginant l'arc infiniment petit Mm, & menant l'ordonnée mC, on conçoit que du rayon CM, on ait décrit l'arc Mr que l'on peut regarder comme une ligne droite perpendiculaire en r à Cm. Comme l'angle Mmr différe infiniment peu de l'angle TMC, les triangles Mrm & TCM ſont ſemblables, & donnent $rm : Mr :: CM : CT$; c'eſt-à-dire, (en nommant CM, y) $dy : Mr :: y : CT = \frac{Mr \times y}{dy}$; nommant l'arc OS, x, & ſon rayon a, les ſecteurs ſemblables CSs & CMr donnent $CS : CM :: Ss : Mr$, c'eſt-à-dire, $a : y :: dx : Mr = \frac{ydx}{a}$, mettant cette valeur de Mr, dans celle de CT, on a CT, ou la ſoutangente, $= \frac{y^2 dx}{a dy}$. Or puiſqu'on eſt ſuppoſé avoir la relation entre y & x, il ſera facile, en différenciant l'équation qui exprime cette relation, d'avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle ſubſtituée dans la valeur de CT, donnera une nouvelle expreſſion de CT, délivrée de différences.

Si l'on ſuppoſe, par exemple, que l'ordonnée CM (*Fig.* 13) ſoit toujours à l'arc correſpondant OS, dans le rapport de m à n c'eſt-à-dire, que $y : x :: m : n$, on aura $ny = mx$, donc $n dy = mdx$, & par conſéquent $\frac{dx}{dy} = \frac{n}{m}$, donc $CT = \frac{y^2 dx}{a dy} = \frac{y^2}{a} \times \frac{n}{m} = \frac{y}{a} \times \frac{ny}{m}$; or, par l'équation, on a $\frac{ny}{m} = x$, donc $CT = \frac{yx}{a}$. Donc ſi du point C comme centre, & du rayon CM, on décrit l'arc MQ, on aura CT égal à l'arc MQ; en effet les ſecteurs ſemblables COS & CQM donnent $CS : OS :: CM : MQ$, c'eſt-à-dire, $a : x :: y : MQ = \frac{yx}{a}$, donc $CT = MQ$.

La courbe que nous venons de conſidérer, eſt la ſpirale d'Archimède.

41. Concevons encore qus OS (*Fig.* 14) étant une ligne connue, ou dont on ſait mener les tangentes, on conſtruiſe la courbe BM, par cette condition, que CS, x, & CM, y, ayent entr'elles une relation déterminée & exprimée par une équa-

tion donnée. Si l'on conçoit l'arc infiniment petit Mm, les ordonnées CM, Cm, & les arcs Mr, Sq, décrits du centre C & des rayons CM, CS, il est clair que la différenciation de l'équation ne donnera que le rapport de dy à dx ou de rm à $\int q$, puisque y & x sont les seules variables qui entrent dans cette équation; or, pour déterminer la soutangente CT, il faut avoir le rapport de rm à rM; voyons donc comment on peut déterminer rM en vertu des conditions de la question.

Puisque la courbe OS est connue, la soutangente CQ est donnée pour chaque point S; or les triangles semblables QCS, $Sq\int$ donnent $CS : CQ :: q\int : qS$; donc nommant CQ, s, on aura $x : s :: dx : qS = \frac{s\,dx}{x}$; mais les secteurs semblables CSQ, CMr donnent $CS : CM :: Sq : Mr$, ou $x : y :: \frac{s\,dx}{x} : Mr = \frac{sydx}{xx}$ il est donc aisé, maintenant d'avoir la soutangente CT, en comparant les triangles semblables Mrm & TCM qui donnent $rm : rM :: CM : CT$, ou $dy : \frac{sy\,dx}{xx} :: y : CT = \frac{sy^2\,dx}{x^2\,dy}$.

Pour appliquer ceci, supposons, que la courbe BM soit construite en prenant toujours SM de même grandeur, ou égale à une ligne donnée a, quelque soit d'ailleurs la ligne OS. Nous aurons donc $x + a = y$. Donc $dx = dy$ & par conséquent $\frac{dx}{dy} = 1$; la soutangente CT devient donc $CT = \frac{sy^2}{x^2}$ que l'on construira en cette manière.

Ayant mené la tangente SQ, on lui menera, par le point M la parallele MX; puis tirant SX, on menera, par le point M, la ligne MT parallele à SX; MT sera la tangente demandée. En effet, les triangles semblables CSQ & CMX donnent $CS : CQ :: CM : CX$, ou $x : s :: y : CX = \frac{sy}{x}$. Pareillement, les triangles semblables CSX & CMT, donnent $CS : CX :: CM : CT$, ou $x : \frac{sy}{x} :: y : CT$; donc $CT = \frac{sy^2}{x}$.

On voit, par ces exemples, comment on doit se conduire dans l'application de ces méthodes à d'autres cas. Remarquons, en terminant cette matiere, que lorsque OS est une ligne droite, la courbe BM que l'on forme en prenant toujours SM de même grandeur, est ce qu'on appelle la *Conchoïde de Nicomède*.

Application aux limites des lignes courbes, & en général, aux limites des quantités, & aux questions de maximis & minimis.

42. Nous avons vu (33) que $\frac{dx}{dy}$ exprimoit la tangente de l'angle que la courbe, ou sa tangente, fait, en chaque point, avec l'ordonnée, & que $\frac{dy}{dx}$ exprimoit celle de l'angle que la courbe ou sa tangente fait avec l'axe des abscisses.

Donc, pour savoir en quel endroit la tangente d'une courbe devient parallele aux ordonnées, il faut chercher en quel endroit la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devient zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dx devient zéro; & pour savoir en quel endroit la tangente de la courbe est parallele aux abscisses, il faut chercher en quel endroit $\frac{dx}{dy}$ devient zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dy est zéro. Car il est évident que dans le premier cas, l'angle de la courbe, avec les ordonnées est nul; & dans le second cas, l'angle de la courbe, avec les abscisses, est nul.

Il ſuit évidemment de-là, que ſi l'on veut ſavoir ſi une courbe dont on a l'équation, a, dans quelque endroit, ſa tangente parallele aux ordonnées ou aux abſciſſes, il faut différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, ſi l'on égale le numérateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, à zéro, on aura une équation qui, conjointement avec l'équation même de la courbe, donnera la valeur de x & celle de y qui déterminent en quel endroit la tangente eſt parallele aux ordonnées; en ſorte que ſi cela arrive en pluſieurs endroits, on aura pluſieurs valeurs pour x & pluſieurs valeurs pour y.

Au contraire, ſi l'on égale le dénominateur à zéro, cette équation conjointement avec celle de la courbe, déterminera les valeurs de x & de y, qui répondent aux endroits où la tangente de la courbe devient parallele aux abſciſſes. Il faut cependant obſerver que quoique dx ſoit toujours zéro, quand la tangente eſt parallele aux ordonnées, & que dy ſoit zéro quand la tangente eſt parallele aux abſciſſes, on ne doit cependant lorſqu'on a trouvé la valeur ou les valeurs de x réſultantes de la ſuppoſition $dx = 0$, ou $dy = 0$, en conclure que la tangente eſt parallele aux y ou aux x, qu'autant qu'on n'a pas en même temps $dx = 0$ & $dy = 0$.

Pour éclaircir ces regles, par un exemple familier, prenons la courbe qui a pour équation $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, qui, en supposant les x & les y perpendiculaires entr'elles, appartient au cercle, (*Alg.* 392).

Les lignes AP (*Fig.* 15.) sont x, & les lignes PM, PM' sont les deux valeurs de y que la résolution de cette équation donne pour chaque valeur de x.

Si l'on différencie cette équation, on aura $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdx$, d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$.

Égalons d'abord le numérateur à zéro; pour avoir les endroits où la tangente devient parallele aux ordonnées. Nous aurons $2y - 2b = 0$, ou $y = b$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, il vient $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$, ou $xx - 3ax = - 2aa$, qui étant résolue donne $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa}$; c'est-à-dire, $x = 2a$, & $x = a$; ce qui nous apprend que la courbe, ou sa tangente, devient parallele aux ordonnées, en deux points R & R', qui ont chacun pour ordonnée la ligne b, & dont l'un R, a pour abscisse la ligne $AQ = a$, & l'autre R' a pour abscisse la ligne $AQ' = 2a$.

Egalons maintenant à zéro le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, pour savoir en quel endroit la courbe, ou sa tangente, devient parallele aux abscisses : nous aurons $3a - 2x = 0$, ou $x = \frac{3}{2}a$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, nous aurons $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$, ou $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; & tirant la racine quarrée, $y - b = \pm \frac{1}{2}a$; donc $y = b \pm \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, $y = b + \frac{1}{2}a$, & $y = b - \frac{1}{2}a$, ce qui nous apprend que la tangente devient parallele aux abscisses, en deux endroits ou points T & T' qui ont pour abscisse commune la ligne $AS = \frac{3}{2}a$, & dont l'un T' a pour ordonnée $ST' = b + \frac{1}{2}a$, & l'autre T, a pour ordonnée la ligne $ST = b - \frac{1}{2}a$.

Les points Q & Q' sont ce qu'on appelle les *limites* des abscisses, parce qu'entre Q & Q', à chaque abscisse AP répondent des valeurs réelles PM & PM' pour y ; au lieu qu'entre Q & A, & au-delà de Q' par rapport à A, il n'y a aucun point de la courbe, en sorte que si on suppose x plus petit que AQ ou a, ou bien plus grand que AQ' ou $2a$, on ne trouve aucune valeur réelle pour y. En effet, si dans l'équation on met au lieu de x une quantité $a - q$, plus petite que a, ou une quantité plus grande que $2a$, ou telle que

$2a+q$, on trouvera en réſolvant l'équation, que les deux valeurs de y ſont imaginaires.

Pareillement, ſi par le point A on conçoit AL parallèle aux ordonnées, c'eſt-à-dire, l'axe des ordonnées; & que par les points T & T', on mene les lignes TL, $T'L'$ paralleles aux abſciſſes; les lignes $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, & $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$, ſont les limites des ordonnées; car il eſt évident qu'il ne peut y avoir d'ordonnée plus grande que AL' ni plus petite que AL, la tangente devant être parallele aux abſciſſes, Auſſi, ſi l'on met dans l'équation de la courbe, au lieu de y une quantité plus petite que $b - \frac{1}{2}a$, qu'on mette, par exemple, $b - \frac{1}{2}a - q$, on verra, en réſolvant l'équation, que les valeurs de x ſont imaginaires. La même choſe arrivera ſi on met au lieu de y, la quantité $b + \frac{1}{2}a + q$, plus grande que $b + \frac{1}{2}a$.

43. L'ordonnée ST' eſt la plus grande de toutes celles qui aboutiſſent à la partie concave $RT'R'$ de la circonférence. L'ordonnée ST eſt la plus petite de toutes celles qui aboutiſſent à la partie convexe; & les ordonnées QR & $Q'R'$ ſont, tout à la fois, les plus petites qui aboutiſſent à la partie concave, & les plus grandes qui aboutiſſent à la partie convexe.

44. Ainſi, la même méthode ſert en

même temps, 1°. à déterminer les limites des abſciſſes & des ordonnées; 2°. à déterminer dans quels cas la tangente devient parallele aux abſciſſes, ou aux ordonnées; 3°. enfin, à déterminer les plus grandes & les plus petites abſciſſes ou ordonnées.

45. Or de quelque maniere qu'une quantité ſoit exprimée algébriquement, on peut toujours regarder l'expreſſion algébrique qui la repréſente, comme étant celle de l'ordonnée d'une ligne courbe. Par exemple, ſi $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$ eſt l'expreſſion d'une quantité que j'appelle y, auquel cas j'ai $y = \frac{x^2(a-x)}{aa}$, je puis regarder cette équation, comme étant celle d'une ligne courbe dont x ſeroit l'abſciſſe, & y l'ordonnée. Alors ſi la quantité $\frac{x^2 \times (a-x)}{aa}$ peut, dans un certain cas, devenir plus grande ou plus petite que dans tout autre, (ce qu'on appelle être ſuſceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*), il eſt viſible qu'il faut ſuivre exactement la même méthode que ci-deſſus; c'eſt-à-dire, différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, égaler à zéro le numérateur ou le dénominateur de cette valeur.

46. C'eſt à cela que ſe réduit la méthode

qu'on appelle de *maximis & minimis*, qui est une des plus utiles de l'analyse, & qui a pour objet de faire trouver, entre plusieurs quantités qui croissent ou décroissent suivant une même loi, quelle est la plus grande ou la plus petite, ou en général celle qui a certaines propriétés dans le plus haut degré à l'égard de toutes ses semblables. Nous allons en donner quelques exemples, pris dans la Géométrie & dans le Calcul; la Méchanique nous en fournira par la suite, qui seront tout à la fois & plus curieux & plus utiles.

47. Proposons-nous d'abord de partager un nombre donné a en deux parties, telles que leur produit soit plus grand qu'en le partageant de toute autre maniere. Nommons x l'une de ces parties; l'autre sera $a-x$, & le produit sera $ax-xx$; supposons-le $=y$; nous aurons $y=ax-xx$; donc en différenciant, $dy=adx-2xdx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{a-2x}$; si on égale le numérateur à zéro, on aura $1=0$, ce qui est absurde; par conséquent s'il y a un *maximum* ce n'est qu'en égalant le dénominateur à zéro, qu'on le trouvera. Egalons donc le dénominateur à zéro; nous aurons $a-2x=0$ qui donne $x=\frac{1}{2}a$, & nous apprend que de quelque maniere qu'on partage un nombre

en deux parties, le produit de ces deux parties ſera le plus grand qu'il eſt poſſible, lorſqu'elles ſeront chacune la moitié de ce nombre.

48. Lorſque, comme dans cet exemple, on a l'expreſſion algébrique de la quantité, on peut ſe diſpenſer de l'égaler à une nouvelle variable y; il n'y a qu'à la différencier tout ſimplement, & égaler à zéro le numérateur ou le dénominateur, lorſque cette différentielle eſt une fraction. Ainſi dans ce même exemple je différencierois ſimplement $ax-xx$, & égalant à zéro la différentielle $adx-2xdx$, j'aurois $adx-2xdx=0$, d'où je tire également $x=\frac{1}{2}a$.

49. Propoſons-nous une queſtion plus générale. Qu'il s'agiſſe, par exemple, de partager un nombre connu a, en deux parties telles que le produit d'une puiſſance déterminée de l'une des parties par la même ou une autre puiſſance de l'autre partie, ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. Repréſentons par x la premiere partie, & par m la puiſſance à laquelle elle doit être élevée; la ſeconde partie ſera $a-x$: repréſentons par n la puiſſance à laquelle elle doit être élevée, alors le produit en queſtion ſera $x^m(a-x)^n$. Différencions ce produit, & égalons la différencielle à zéro, nous aurons mx^{m-1}

$dx\ (a-x)^n - nx^m.\ (a-x)^{n-1}\ dx = 0$. Divisant tout par $x^{m-1}\ dx\ (a-x)^{n-1}$, nous aurons $m\ (a-x) - nx = 0$, ou $ma - mx - nx = 0$, qui donne $x = \frac{ma}{m+n}$. Supposons, par exemple, qu'il ait été question de partager le nombre a en deux parties, telles que le quarré de l'une, multiplié par le cube de la seconde, soit le plus grand qu'il est possible; alors $m = 2$, $n = 3$. On a donc $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; c'est-à-dire, que l'une des parties doit être les $\frac{2}{5}$ du nombre ou de la quantié proposée; & l'autre doit, par conséquent, en être les trois cinquiemes.

Ce que nous avons dit ci-dessus, à l'occasion de la figure 15, fait voir qu'une quantité peut devenir la plus grande de toutes ses semblables, en deux manieres différentes: lorsque, comme $P\ M'$ elle a été d'abord en croissant pour diminuer ensuite; ou lorsque, comme $P''\ M''$ elle va en croissant pour s'arrêter brusquement en devenant $Q'\ R'$, mais dans ce dernier cas, elle est tout à la fois la plus grande de toutes les ordonnées qui aboutissent à la partie convexe, & la plus petite de celles qui aboutissent à la partie concave. Pareillement une quantité peut devenir la plus petite de toutes ses semblables, en en deux manieres différentes : lorſque, comme PM, elle va d'abord en diminuant pour augmenter enſuite; ou lorſque, comme $P'' M'''$, elle va en diminuant pour s'arrêter bruſquement, & alors elle eſt tout à la fois un *minimum* & un *maximum*; elle eſt un *minimum* à l'égard de la branche $M' T' M'''$, & un *maximum* à l'égard de la branche $M T M''$.

50. Ainſi, pour diſtinguer ſi une quantité eſt un *maximum*, ou un *minimum*, ou l'un & l'autre, il faut, en ſuppoſant que a marque la valeur de x, qui convient au *maximum* ou *minimum*, ſubſtituer dans la quantité propoſée au lieu de x, ſucceſſivement $a + q$, a, & $a - q$. Si les deux réſultats extrêmes ſont réels & plus petits que celui du milieu, la quantité eſt un *maximum*; ſi, au contraire, les deux réſultats extrêmes ſont plus grands que celui du milieu, la quantité eſt un *minimum* : enfin, ſi des deux réſultats extrêmes l'un eſt imaginaire & l'autre réel, la quantité eſt tout à la fois un *maximum* & un *minimum*.

51. Lorſque dans la détermination d'un *maximum* ou d'un *minimum*, la valeur que l'on trouve pour la variable, rend celle du *maximum* ou du *minimum* négative, on doit conclure que le *maximum* ou le *minimum* qu'elle indique, n'appartient point à la

queſtion actuelle, mais qu'il appartient à une queſtion où quelques-unes des conditions ſeroient contraires. Par exemple, ſi l'on demandoit de partager la ligne AB (*Fig.* 16) au point C, de maniere que le quarré de la diſtance AC au point A, étant diviſé par la diſtance au point B, donne le plus petit quotient poſſible; alors nommant a la ligne donnée AB, & x la partie AC; la partie reſtante CB feroit $a-x$, & par conſéquent le quotient feroit $\frac{x^2}{a-x}$; différencions donc cette quantité, ou $x^2(a-x)^{-1}$; nous aurons $2xdx.(a-x)^{-1}+x^2dx(a-x)^{-2}=0$, ou $\frac{2xdx}{a-x}+\frac{x^2dx}{(a-x)^2}=0$, ou $2axdx-x^2dx=0$, ou $(2a-x)x=0$, qui donne ou $x=0$, ou $2a-x=0$; la 1re valeur indique un *minimum*, mais qui eſt évident ſans le calcul. Quant à la ſeconde qui donne $x=2a$, ſi on ſubſtitue cette valeur dans $\frac{x^2}{a-x}$, celle-ci devient $\frac{4a^2}{-a}$ ou $-4a$. Le *minimum* n'appartient donc pas à la queſtion actuelle. Mais ſi l'on fait attention à la valeur $x=2a$ que l'on trouve, on verra que le point C ne peut être entre A & B; mais que la queſtion aura une ſolution, s'il s'agit de le trouver ſur le prolongement de AB, au-delà de B par rapport à A. Or dans ce cas, ſi nous nommons AC', x; la diſtance BC' ne ſera plus $a-x$, mais $x-a$, & la quantité dont il s'agiſſoit, ſera $\frac{x^2}{x-a}$, laquelle étant différenciée & égalée à zéro, donne $\frac{2xdx}{x-a}-\frac{x^2dx}{(x-a)^2}=0$, ou après les réductions faites, $x^2dx-2axdx=0$, qui donne $x=2a$, comme ci-devant; mais cette quantité ſubſtituée dans $\frac{x^2}{x-a}$, la change en $4a$. Il y a donc un *minimum* pour ce cas.

Si l'on égale le dénominateur $x-a$ de la différentielle, à zéro, on a $x=a$, qui indique un *maximum* : & en effet, lorſque $x=a$, la quantité devient infinie. Mais il n'a pas moins le vrai caractere du *maximum*, car ſoit qu'on ſuppoſe x plus petit ou plus grand que a, on trouve une quantité plus petite qu'en ſuppoſant $x=a$.

5 2. Lorſque l'expreſſion d'une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, renferme quelque multiplicateur ou quelque diviſeur conſtant, on peut ſupprimer ce multiplicateur ou ce diviſeur, avant que de différencier; en effet, ſuppoſons que $\frac{ay}{b}$ repréſente généralement une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, a & b étant des conſtantes; il faut donc que $\frac{ady}{b}=0$;

or puiſque a & b ne ſeront pas zéro, il faut que $dy = 0$; la concluſion eſt donc la même que ſi y ſeul eût dû être un *maximum* ou un *minimum*, c'eſt-à-dire, la même qu'en ſupprimant les facteurs & les diviſeurs conſtants. Cette remarque ſert à ſimplifier les calculs, dans pluſieurs cas.

53. Propoſons-nous, maintenant, de trouver entre toutes les lignes que l'on peut mener par un même point D donné dans l'angle connu ABC (*Fig.* 17), quelle eſt celle qui forme avec les côtés de cet angle, le plus petit triangle poſſible.

Menons par le point D, la ligne DG parallele au côté AB, & ſuppoſant EF une droite quelconque tirée par le point D, abaiſſons DK perpendiculaire ſur BC, & du point E où EF rencontre AB, abaiſſons EL auſſi perpendiculaire ſur BC. La ligne BC eſt cenſée connue, ainſi que la perpendiculaire DK; nommons donc $BG = a$, $DK = b$, & la baſe BF du triangle BEF, nommons-là x. On voit que depuis un certain terme, plus BF croîtra, & plus le triangle augmentera. Au contraire, ſi BF diminue, on conçoit que le triangle diminuera, mais juſqu'à un certain terme ſeulement; car ſi BF devenoit preſque égal à BG, la droite EDF feroit preſque parallele à AB, puiſqu'elle ſeroit prête à ſe confondre avec GD : le triangle feroit alors extrêmement grand. Il y a donc une certaine valeur de BF qui donne le plus petit triangle poſſible. Pour la trouver, cherchons l'expreſſion générale du triangle BEF. Or les triangles ſemblables BEF, GDF donnent $GF : BF :: DF : EF$, & les triangles ſemblables DKF & ELF donnent $DF : EF :: DK : EL$; donc $GF : BF :: DK : EL$; c'eſt-à-dire, $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x-a}$; donc la ſurface du triangle BEF, qui eſt $\frac{EL \times BF}{2}$, ſera $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$ ou $\frac{\frac{1}{2}bxx}{x-a}$. Il faut donc qu'en différenciant cette quantité, le numérateur ou le dénominateur devienne zéro, ou bien, comme on peut (52) ſupprimer le facteur conſtant $\frac{1}{2}b$, il ſuffira de différencier $\frac{xx}{x-a}$; mais ſans refaire ce calcul que nous avons déja rencontré (51), nous conclurons de même, que $x = 2a$; donc ſi l'on prend $BF = 2a = 2BG$, la ligne FDE que l'on tirera par le point D, donnera le triangle FBE pour le plus petit triangle demandé.

54. Cherchons maintenant parmi tous les parallélipipedes de même ſurface & de même hauteur, quel eſt celui qui a la plus grande capacité.

Nommons h la hauteur, cc la ſurface du parallélipipede ; x & y les deux côtés du rectangle qui sert de base. La surface totale est composée de six rectangles, dont deux ont chacun h pour côté ou pour hauteur, & x pour base ; deux autres ont h pour hauteur, & y pour base ; enfin les deux derniers ont x pour base, & y pour hauteur ; ainsi la surface totale a pour expression $2hx + 2hy + 2xy$; c'est-à-dire, que l'on a $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Quant à la capacité ou solidité, elle est hxy. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même surface, il faut que sa différentielle $hxdy + hydx$ soit $= 0$, ou, (ce qui revient au même) il faut que $xdy + ydx = 0$. Mais l'équation $2hx + 2hy + 2yx = cc$, qui exprime que la surface de tous ces parallélipipedes est constante ou la même, donne $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$. Substituant donc, dans cette équation, la valeur de dx, tirée de la premiere, on aura, après les réductions faites, $y = x$; la base doit donc être un quarré. Pour en connoître le côté, il faut mettre pour y sa valeur x dans l'équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, qui deviendra par-là, $4hx + 2x^2 = cc$, & qui étant résolue, donne $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$, dont la racine $x = -h - \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$, étant négative, ne peut servir à la question présente ; ainsi la valeur convenable de x, est $x = -h + \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$.

55. Si l'on demande, à présent, quelle doit être la hauteur h, pour que le parallélipipede ait la plus grande solidité de tous ceux de même surface ; on remarquera que puisque la hauteur étant h, la base doit être un quarré, cette solidité sera exprimée par hxx; il faut donc que la différentielle de hxx, en regardant h & x comme variables, soit $= 0$; on a donc $2hxdx + xxdh = 0$, ou $2hdx + xdh = 0$, en divisant par x. Mais l'équation $4hx + 2x^2 + cc$, qui exprime, alors, que la surface est constante, donne, en différenciant, $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; mettant donc, dans celle-ci, pour dh, sa valeur tirée de l'équation $2hdx + xdh = 0$, on aura, après les réductions faites, $h = x$; donc le parallélipipede cherché doit être un cube, puisque son côté, ou sa hauteur h, doit être égal au côté x du quarré qui sert de base. Pour trouver maintenant le côté de ce cube, il faut mettre pour h, sa valeur x dans l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui deviendra $4x^2 + 2x^2 = cc$ ou $6x^2 = cc$ qui donne $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$. Donc, de tous les parallélipipedes de même surface, celui qui a la plus grande solidité est le cube qui a pour côté une ligne égale à la racine quarrée de la sixieme partie de cette surface.

56. Cherchons, maintenant, entre tous les triangles de même contour & de même base, quel est celui qui a la plus grande surface.

Soit a la base AB, & c le contour du triangle ABC (*Fig.* 18). Abaissons la perpendiculaire CP, & nommons AP, x; CP, y; nous aurons $PB = a - x$, $AC = \sqrt{xx + yy}$ & $CB = \sqrt{\overline{a-x}^2 + yy}$. Donc le contour sera $\sqrt{xx+yy} + \sqrt{\overline{a-x}^2 + y^2} + a$, & la surface sera $\frac{ay}{2}$; on aura donc $\sqrt{xx+yy} + \sqrt{\overline{a-x}^2 + y^2} + a = c$, & il faudra que la différentielle de $\frac{ay}{2}$ soit $=0$; c'est-à-dire, qu'on aura $\frac{ady}{2} = 0$, & par conséquent $dy = 0$. Or l'équation qui exprime que le contour est constant, étant différenciée, donnera $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx+yy}} + \frac{\overline{a-x}.-dx + ydy}{\sqrt{(a-x)^2 + yy}} = 0$, qui, à cause que $dy = 0$, se réduit à $\frac{xdx}{\sqrt{xx+yy}} - \frac{(a-x)dx}{\sqrt{(a-x)^2+yy}} = 0$, ou divisant par dx & chassant les fractions, $x\sqrt{(a-x)^2+yy} = \overline{a-x}.\sqrt{xx+yy}$. Quarrant on aura $xx.\overline{a-x}^2 + xxyy = \overline{a-x}^2.xx + \overline{a-x}^2.yy$; faisant les opérations indiquées, supprimant de part & d'autre les termes égaux, & réduisant, nous aurons $xx = \overline{a - x}^2$, ou $xx = aa - 2ax + xx$, qui donne $x = \frac{1}{2} a$, & nous fait voir que le triangle doit être isoscele. Ainsi il faut du milieu de AB, élever une perpendiculaire, & ayant décrit du point B comme centre & d'un rayon égal à la moitié de l'excès du contour c sur la base a, un arc qui coupe cette perpendiculaire en C, si l'on tire CB & CA, on aura le triangle qui a la plus grande surface de tous ceux de même contour & de même base.

57. Si l'on veut savoir maintenant, quel est, généralement, entre tous les triangles de même contour, celui qui a la plus grande surface, il faut remarquer que quelle que soit la base, on voit par la solution précédente, que x doit toujours en être la moitié; c'est-à-dire, que quel que soit a, on doit toujours avoir $x = \frac{1}{2} a$. Cela étant, l'équation qui exprime le contour, se réduira à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + yy} + \sqrt{\frac{1}{4}aa + yy} + a = c$, ou $2\sqrt{\frac{1}{4}aa + yy} = c - a$; quarrant, on aura $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$; qui donne $y = \sqrt{\frac{cc - 2ac}{4}}$. La surface du triangle qui est généralement $\frac{ay}{2}$, sera donc $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{cc - 2ac}{4}}$. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même contour, quelle que

ſoit d'ailleurs la baſe a, il faut égaler à zéro la différentielle de $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{cc-2ac}{4}}$ ou de $a\sqrt{cc-2ac}$, priſe en regardant a comme variable. Nous aurons donc $d(a\sqrt{cc-2ac})$ ou $d(a(cc-2ac)^{\frac{1}{2}})$, c'eſt-à-dire, $da(cc-2ac)^{\frac{1}{2}}$ $-a.cda(cc-2ac)^{-\frac{1}{2}}=0$, ou $da\sqrt{cc-2ac}-\frac{cada}{\sqrt{cc-2ac}}=0$, ou $da(cc-2ac-cada=0$, ou $ccda-3cada=0$, d'où l'on tire $a=\frac{c}{3}$; donc la baſe a doit être le tiers du contour : & puiſque nous avons vu d'ailleurs que le triangle devoit être iſoſcèle, il s'enſuit donc qu'il doit être équilatéral. Donc de tous les triangles de même contour, le triangle équilatéral eſt celui qui a la plus grande ſurface.

58. Dans ces deux ſolutions, nous n'avons pas égalé le dénominateur à zéro; parce que, dans la premiere, cela nous auroit donné pour x une valeur imaginaire; & dans la ſeconde, nous aurions trouvé $a=\frac{1}{2}c$, qui n'auroit point ſatisfait, non plus, à la queſtion; puiſque ſi la baſe étoit la moitié du contour, les deux autres côtés ſe confondroient avec cette baſe, & le triangle ſeroit alors zéro. A l'avenir, lorſque le numérateur ou le dénominateur, égalé à zéro, ne nous conduira point à une ſolution admiſſible,

nous n'en ferons pas mention pour ne pas nous arrêter à des recherches inutiles.

59. Dans l'avant derniere question nous ne sommes parvenus à déterminer, entre tous les parallélipipedes de même surface, celui qui avoit la plus grande capacité, qu'après avoir considéré les parallélipipedes de même hauteur. Pareillement, dans la derniere question nous avons déterminé entre tous les triangles de même contour, quel étoit celui qui avoit la plus grande surface; mais en commençant par résoudre la question pour les triangles de même base.

Il est ordinairement plus simple d'en user ainsi; c'est-à-dire, de résoudre la question en ne faisant varier ensemble que le plus petit nombre possible de quantités, & faisant varier ensuite & successivement chacune des quantités qui ont été traitées comme constantes. Par exemple, si l'on demandoit de partager un nombre donné, en trois parties, de maniere que le produit de ces trois parties fût le plus grand qu'il est possible; en nommant x & y deux de ces parties, & a le nombre donné, la troisieme seroit $a-x-y$, & le produit des trois parties seroit $xy(a-x-y)$, dont il faudroit égaler la différentielle, à zéro. Mais au lieu de différencier en regardant x & y comme variables en même temps, je ne regarderai d'abord que x comme variable; j'aurai donc $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}(a-y)$. Le produit $xy(a-x-y)$ se change donc en $\frac{1}{4}y(a-y)^2$. Je différencie maintenant, en faisant varier y, & j'ai $\frac{1}{4}dy(a-y)^2 - \frac{2}{4}ydy(a-y)$ que j'égale pareillement à zéro, & j'ai $dy(a-y)^2 - 2ydy(a-y) = 0$, d'où je tire $y = \frac{1}{3}a$; donc x, & la troisieme partie $a-x-y$, sont chacune $\frac{1}{3}a$.

60. On peut aussi faire varier ensemble, si l'on veut, toutes les quantités variables, puis rassemblant tous les termes qui sont multipliés par la différentielle d'une même variable, égaler leur somme à zéro, & faire la même chose à l'égard de la différentielle de chaque variable. Ainsi, dans le dernier exemple, j'aurois $axdy + aydx - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0$, égalant séparément à zéro, la somme des termes affectés de dx, & celle des termes affectés de dy, j'ai $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, & $axdy - x^2dy - 2xydy = 0$; ou, en divisant la premiere par ydx & la seconde par xdy, $a-2x-y=0$ & $a-x-2y=0$, équation dont il est facile de conclure $x = \frac{1}{3}a$, & $y = \frac{1}{3}a$, comme ci-dessus.

La raison de ce procédé est facile à appercevoir, en remarquant qu'il n'y a ici d'autre condition à remplir, finon que la différentielle totale foit zéro. Or, cette condition ne peut être remplie généralement, que de deux manieres: ou, en fuppofant que chacune des deux différentielles dx & dy, eft égale à zéro, ce qui fatisferoit en effet à l'équation, mais ne feroit rien connoître: ou bien en fuppofant que la fomme des termes qui multiplient dx, ainfi que celle des termes qui multiplient dy, font chacune zéro: ce qui eft précifément ce que nous avons prefcrit.

61. Lorfque les conditions de la queftion font exprimées par plufieurs équations, il faut avant d'appliquer cette regle à l'équation différentielle qui doit déterminer le *maximum* ou le *minimum*, tirer des autres équations différenciées, les valeurs des différentielles d'autant de variables qu'il y a d'équations outre celle-là, & les introduire dans cette même équation: alors on applique la regle comme s'il n'y avoit eu que cette feule équation. Ainfi, dans l'exemple, ci-deffus, du plus grand parallélipipede, nous avions cette équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, & la condition que hxy devoit être un *maximum*. Si donc nous voulons regarder tout à la fois, h, x & y comme variables, l'équation $2hx +$ &c. donnera en différenciant, $2hdx + 2xdh + 2hdy + 2ydh + 2xdy + 2ydx = 0$; & la condition du *maximum* donnera $hxdy + hydx + xydh = 0$. De la premiere je tire $dh = \frac{-ydx - xdy - hdy - hdx}{x+y}$; fubftituant cette valeur dans la feconde, j'ai, après les réductions ordinaires, $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$. Je puis maintenant égaler à zéro, la fomme des termes qui multiplient dx, & celle des termes qui multiplient dy. J'aurai $hy^2 - xy^2 = 0$ ou $h = x$, & $hx^2 - x^2y = 0$, d'où en divifant tout, par le facteur commun x^2, on tire $h - y = 0$, qui donne $h = y$; & puifque l'on a $h = x$, on a donc auffi $y = x$; les trois dimenfions h, x, y, font donc égales, ce qui s'accorde avec la premiere folution: & en mettant ces valeurs dans l'équation $2hx + 2hy + 2yx = cc$, on a $6h^2 = cc$, qui donne $h = \sqrt{\frac{cc}{6}}$, comme dans cette même folution.

62. Non-feulement on peut ne faire varier les quantités que fucceffivement, ou les faire varier toutes à la fois, mais on peut encore prendre pour conftantes telles fonctions que l'on voudra de ces quantités, pourvu que le nombre de ces nouvelles

conditions arbitraires, réuni à celui des conditions de la question, ne soit pas plus grand que le nombre des variables x, y, z, qui entrent dans la question. Cette remarque peut être de la plus grande utilité dans plusieurs questions, principalement quand il y a des quantités radicales; en voici un exemple. Qu'il s'agisse de trouver entre tous les quadrilateres de même contour, quel est celui qui auroit la plus grande surface. Si des angles C & D (*Fig.* 19.) on abaisse les perpendiculaires DE & CF sur le côté AB, & que du point D on mene DK parallele à AB; alors nommant AE, s; DE, t; AF, u; CF, x & BF, y; à cause des triangles rectangles, on aura $DA = \sqrt{ss+tt}$, $DC = \sqrt{(s+u)^2+(x-t)^2}$, $CB = \sqrt{xx+yy}$; donc si a marque le contour, on aura $\sqrt{ss+tt} + \sqrt{(s+u)^2+(x-t)^2} + \sqrt{xx+yy} + u + y = a$. D'un autre côté, la surface $ABCD$, vaut le trapeze $DEFC$, moins le triangle DAE; plus le triangle CFB; c'est-à-dire, $(t+x)\left(\frac{s+u}{2}\right) - \frac{st}{2} + \frac{xy}{2}$. Cela posé, il faudroit donc différencier cette quantité & l'équation précédente. Mais les quantités radicales, rendroient la suite du calcul très-compliquée. Pour éviter ces difficultés, nous supposerons d'abord que les trois quantités radicales sont constantes, ce qui nous donnera $d(\sqrt{ss+tt}) = 0$, ou $\frac{sds+tdt}{\sqrt{ss+tt}}$, & par conséquent $sds+tdt=0$, on trouvera de même, par la seconde quantité radicale, $(s+u)(ds+du)+(x-t)(dx-dt) = 0$; & par la troisieme, $xdx+ydy=0$. Or, l'équation du contour étant différenciée dans cette même supposition, donne $du+dy=0$, & la condition du *maximum* de la surface, donne $(s+u)(dt+dx)+(t+x)(ds+du)-tds-sdt+xdy+ydx=0$, ou $udt+sdx+udx+tdu+xds+xdu+xdy+ydx=0$. La premiere équation différentielle, donne $ds = -\frac{tdt}{s}$; la troisieme donne $dx = -\frac{ydy}{x}$; & la quatrieme donne $du = -dy$. Substituant dans la seconde & dans la cinquieme, on a, après les réductions faites $-(tdt+sdy)(u+s)x-(ydy+xdt)(x-t)s=0$, & $suxdt-suydy-ssydy-tsxdy-x^2tdt-sy^2dy=0$; si l'on tire de celle-ci la valeur de dt, on verra que tous les termes du numérateur sont affectés de s, & qu'en substituant dans la précédente, tous les termes seront aussi affectés de s, on aura donc $s=0$; ce qui nous apprend que l'angle DAB doit être droit : cela posé, l'équation du contour devient $t+\sqrt{uu+(x-t)^2}+\sqrt{xx+yy}+u+y=a$, & l'expression de la surface devient $(t+x)\frac{u}{2}+\frac{xy}{2}$. Différencions donc en ne supposant plus que les deux radicaux, constans. Nous aurons $udu+(x-t)(dx-dt)=0$; $xdx+ydy=0$, $dt+du+dy=0$, & $u(dt+dx)+(t+x)du+xdy+ydx=0$. La seconde de ces équations donne $dy=-\frac{xdx}{y}$; la troisieme donne $dt=-du-dy$; ou $dt=\frac{xdx-ydu}{y}$; ces valeurs substituées dans la premiere & la troisieme, donnent $yudu+(x-t)(ydx-xdx+ydu)=0$, & $u(xdx-ydu+ydx)+(t+x)ydu-x^2dx+y^2dx=0$; or, si de l'une des deux on tire la valeur de dx, & qu'on la substitue dans l'autre, on aura une équation dont tous les termes seront multipliés par y, & qui par conséquent donne $y=0$; & fait voir que l'angle CBA doit aussi être droit. Cela étant l'équation du contour devient $t+\sqrt{uu+(x-t)^2}+x+u=a$; & l'expression de la surface devient $(t+x)\times\frac{u}{2}$. Différencions donc en ne supposant plus d'autre quantité constante, que le radical. Nous aurons $udu+(x-t)(dx-dt)=0$, $dt+dx+du=0$, $u(dt+dx)+(t+x)du=0$; la seconde donne $dt=-dx-du$; substituant dans les deux autres on a $udu+(x-t)(2dx+du)=0$, & $-udu+(t+x)du=0$; or celle-ci donne $du=0$; donc la précédente se réduit à $(x-t)2dx=0$, qui donne $x=t$. Cela posé, l'équation du contour se réduit à $2t+2u=a$ & celle de la surface, à tu ; on a donc $dt+du=0$ & $tdu+udt=0$; la premiere donne $dt=-du$, ce qui change la seconde en $tdu-udu=0$; & par conséquent $t=u$; donc les lignes AB, AD, AC, CB, sont toutes égales ; & puisque l'angle A doit être droit, le quadrilatere cherché doit être un quarré.

Au reste, on pourroit trouver cette propriété plus facilement ; mais ce n'étoit point là notre objet principal : il s'agissoit de faire voir comment la liberté de prendre telle ou telle quantité pour constante, peut dans bien des occasions, donner les moyens de faciliter le calcul ; & cet exemple y étoit trèspropre ; car sans cela le calcul seroit très-composé. On peut appliquer des idées semblables, aux autres polygones, & on trouvera qu'en général de toutes les figures d'un même contour & d'un meme nombre de côtés, celle qui a la plus grande surface est toujours le polygone régulier de ce même nombre de côtés ; d'où il suit que de toutes les figures de même contour, le cercle est celle qui a la plus grande surface.

Des points multiples.

63. Nous avons examiné ce qui arrivoit lorsque l'une des deux différentielles dx ou dy, ou (ce qui revient au même) lorsque le numérateur ou le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devenoit zéro, & nous avons vu que l'un de ces deux cas avoit toujours lieu lorsqu'il y avoit un *maximum* ou un *minimum.* Mais lorsque le numérateur & le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$ deviennent zéro en même temps, qu'arrive-t-il alors, & à quoi se réduit la valeur de $\frac{dx}{dy}$?

Pour répondre à ces questions, nous observerons d'abord que lorsqu'on a différencié l'équation d'une courbe, comme il n'y a plus que des termes multipliés par dx & des termes multipliés par dy, on peut en appellant A la somme des premiers, & B celle des seconds, représenter l'équation differentielle, par $Adx + Bdy = 0$. Cette équation donne $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$; or, pour que B & A deviennent zéro en même temps, il faut qu'ils aient un commun diviseur, qui devenant zéro lorsque x & y ont certaines valeurs, rend B & A égaux à zéro en même temps. Par exemple, dans la courbe qui a pour équation $y^2 = \frac{x.(a-x)^2}{a}$, on a $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(a-x)^2-2x(a-x)}$, ou, (en mettant pour y, sa valeur $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2-2x(a-x)}$ quantité qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$; mais on voit en même temps, que $a-x$ est diviseur commun du numérateur & du dénominateur, & que la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ſe réduit à $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a\sqrt{\frac{x}{a}}}{a-3x}$, qui dans le cas particulier de $x = a$, ſe réduit à ∓ 1, c'eſt-à-dire, que dans cet exemple, la valeur de $\frac{0}{0}$ eſt ∓ 1.

Il paroît donc que pour avoir, en pareil cas, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, il n'y a autre choſe à faire qu'à chercher le commun diviſeur des deux termes de la fraction qui l'exprime, & diviſer ces deux termes par leur commun diviſeur.

On peut, en effet, en uſer ainſi; mais cet expédient n'eſt pas toujours ſuffiſant lorſque la valeur de $\frac{dx}{dy}$ renferme plus d'une variable, non plus que lorſqu'il renferme des quantités radicales; n'y eut-il même que, dans ce dernier cas, qu'une ſeule variable. C'eſt pourquoi nous allons donner un moyen plus général & plus facile. Mais auparavant il faut faire connoître la nature des points des lignes courbes, où cette ſingularité arrive. On va voir que cela arrive dans les *points multiples*; c'eſt-à-dire, dans ceux où pluſieurs branches d'une même courbe ſe rencontrent.

64. Concevons donc que *SOMZM'ON* (*Fig.* 20) ſoit une courbe dont deux branches, au moins, ſe rencontrent au point *O*. Il eſt clair qu'à chaque abſciſſe *AP*, ou x, il répond, (au moins dans un certain intervalle), un certain nombre de valeurs *PM*, *PM'* pour y, & que celles qui répondent aux branches qui doivent ſe rencontrer, deviennent égales dans le point de rencontre *O*.

Pareillement, *AZ* étant l'axe des ordonnées, il faut qu'à chaque ordonnée *AQ*, il réponde, (au moins dans un certain intervalle) un certain nombre d'abſciſſes *QN*, *QN'*, *QN''*, & que celles qui répondent aux branches qui doivent ſe rencontrer, deviennent égales dans ce point de rencontre.

Donc, ſi l'on repréſente par a la valeur de x, & par b la valeur de y, qui conviennent au point multiple, l'équation de cette courbe doit être telle que lorſqu'on y mettra a pour x, on trouve que y aura autant de valeurs égales à b qu'il y a de branches qui paſſent par le point multiple, & il faudra de même qu'en mettant b pour y on trouve un pareil nombre de valeurs a pour x.

Il ſuit de-là que l'équation doit être telle, qu'elle puiſſe être ramenée

ramenée à cette forme... $(x-a)^m F + \overline{(x-a)}^{m-1}(y-b) F' + (x-a)^{m-2}(y-b)^2 F'' + (x-a)^{m-3}(y-b)^3 F''' + \ldots\ldots (y-b)^m T = 0$, m, marquant le degré de multiplicité du point en queſtion, & F, F', &c. T, marquant des quantités compoſées, comme on le voudra, de x, y & de conſtantes, ce que, pour abréger, on appelle des *fonctions* de x, y & de conſtantes.

En effet, il eſt clair que ſi l'on fait $x = a$, l'équation qui ſe réduit alors à $(y-b)^m T = 0$, ſera diviſible, m fois, par $y-b$, & donnera par conſéquent m fois, l'équation $y-b=0$, ou $y = b$. Il en eſt de même ſi l'on fait $y = b$; l'équation qui ſe réduit alors à $(x-a)^m F$, ſera diviſible, m fois, par $x-a$, & donnera, par conſéquent, autant de fois, l'équation $x-a=0$, ou $x = a$; ce qui ne peut arriver, ſi l'équation n'eſt pas réductible à la forme que nous venons d'expoſer.

Concevons maintenant qu'on différencie cette équation, m fois de ſuite, en faiſant même (ſi l'on veut) varier auſſi dx & dy. En réfléchiſſant ſur le principe de la différenciation on verra facilement, (& nous allons le faire voir par un exemple) 1°. qu'il n'y aura que la derniere équation différentielle dans laquelle il y ait quelques termes qui ne ſoient plus affectés de $y-b$ ou de $x-a$. Donc, lorſqu'il y aura un point multiple, les différentielles premiere, ſeconde, troiſieme, &c. de l'équation, doivent, lorſqu'on y mettra pour x & y leurs valeurs a & b qui répondent au point multiple, s'anéantir toutes, excepté celle dont le degré de différentielle eſt marqué par m; 2°. on verra de même, que dans cette derniere équation différentielle, les termes affectés de ddx, ddy, d^3x &c. & de toutes les différentielles de degrés ultérieurs, auront tous pour facteurs quelques puiſſances de $x-a$ ou de $y-b$; & que par conſéquent ces différentielles diſparoiſſent au point multiple.

De ces principes, il ſuit 1°. qu'au point multiple on ne peut avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$ autrement exprimée que par $\frac{0}{0}$, ſi ce n'eſt par la derniere équation différentielle, puiſque toutes les autres équations différentielles s'anéantiſſant alors, tout ce qui multiplie dx eſt zéro, & tout ce qui multiplie dy eſt zéro, 2°. que cette derniere équation différentielle ne contenant point ni ddx, ni ddy, ni toutes les autres différentielles ultérieures, peut réſulter immédiatement de l'équation propoſée différenciée m fois de ſuite, en ſuppoſant dx & dy conſtants, 3°. que dans cette même derniere équation différentielle dx & dy monteront au degré m; & que par conséquent si l'on divise par dy^m, on aura en résolvant cette équation, m valeurs de $\frac{dx}{dy}$ qui serviront à trouver les tangentes qu'ont au point multiple les différentes branches qui passent par ce point.

Pour éclaircir & confirmer tout cela par un exemple, prenons la courbe qui a pour équation $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$. Si l'on différencie cette équation m fois, c'est-à-dire, ici, deux fois, on aura 1°. $2ady(y-b) - dx(x-a)^2 - 2xdx(x-a) = 0$; 2°. $2addy(y-b) + 2ady^2 - ddx(x-a)^2 - 2dx^2(x-a) - 2xddx(x-a) - 2dx^2(x-a) - 2xdx^2 = 0$, où l'on voit, qu'en mettant a pour x, & b pour y, la premiere équation différentielle s'évanouit, & que dans la seconde, les termes affectés de ddx & de ddy s'évanouissent, ensorte qu'elle se réduit à $2ady^2 - 2adx^2 = 0$.

Mais si au lieu de différencier pour la seconde fois, en traitant dx & dy comme variables, nous eussions différencié en les traitant comme constants, nous aurions eu $2ady^2 - 2dx^2(x-a) - 2dx^2(x-a) - 2xdx^2 = 0$, qui en mettant a pour x, se réduit également à $2adx^2 - 2ady^2 = 0$, & donne $\frac{dx}{dy} = \pm 1$, qui indique deux tangentes au point où $x = a$ & $y = b$; ce point est donc un point double, & la valeur $\frac{ydx}{dy}$ de la soutangente, devenant alors $\pm b$, ces deux tangentes font un angle de 45°. avec l'ordonnée : c'est ce que confirmera la description de la courbe par le moyen de son équation qui donnant $y = b \pm (x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}$, fait voir que la courbe a deux branches parfaitement égales & semblables, qui se croisent au point O ou $x = a$ & $y = b$. Sa figure est telle qu'on la voit (*Fig.* 20).

65. D'après ces principes, il est donc facile de déterminer si une courbe dont on a l'équation, a des points multiples, quels ils sont & où ils sont. Il faut différencier cette équation; égaler à zéro le coëfficient ou multiplicateur de dx, & celui de dy. Ces deux équations détermineront la valeur qui convient à x & celle qui convient à y, s'il y a un point multiple; ou les valeurs s'il y en a plusieurs; mais pour s'assurer de l'existence de ce point multiple, il faudra examiner si ces valeurs de x & de y satisfont à l'équation proposée. Alors pour déterminer le degré de multiplicité du point ou des points trouvés, on différenciera

de nouveau l'équation, mais en traitant (pour plus de simplicité) dx & dy comme constants. Si les valeurs qu'on a trouvées pour x & pour y, étant substituées dans cette seconde équation différentielle, tous les termes ne s'anéantissent point, alors le point trouvé n'est que double. Si au contraire ils s'anéantissent, il est plus que double. On procédera donc, dans ce dernier cas à une troisieme différenciation, en traitant toujours dx & dy comme constants: & ayant substitué les valeurs de x & de y, le point sera triple si tous les termes ne s'anéantissent point: & si au contraire ils s'anéantissent tous, il sera au moins quadruple. On continuera de différencier & de substituer, jusqu'à ce qu'on arrive à une différentielle dont les termes ne s'anéantissent pas tous par la substitution des valeurs de x & y.

Par exemple, si l'on demande les points multiples de la courbe, qui a pour équation $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$; je différencie cette équation, & j'ai $4y^3\,dy - 2axydy - ay^2\,dx + 3bx^2\,dx = 0$ Egalant à zéro le coëfficient de dx & celui de dy, j'ai $4y^3 - 2axy = 0$, & $3bx^2 - ay^2 = 0$. La premiere de ces deux équations donne ou $y = 0$, ou $4y^2 - 2ax = 0$. La valeur $y = 0$, substituée dans l'équation $3bx^2 - ay^2 = 0$, donne $3bx^2 = 0$, ou $x = 0$; or, en mettant dans l'équation proposée o pour x, & o pour y, on satisfait à cette équation; donc la courbe a un point multiple dans l'endroit où $x = 0$ & $y = 0$; c'est-à-dire, à l'origine.

Quant à la valeur $4y^2 - 2ax = 0$ ou $y^2 = \frac{ax}{2}$, en la substituant dans $3bx^2 - ay^2 = 0$, on a $3bx^2 - \frac{a^2x}{2} = 0$ qui donne ou $x = 0$, ou $x = \frac{a^2}{6b}$; mais la premiere, sçavoir $x = 0$ donne $y = 0$, ce qui nous donne le même point que ci-devant, & la seconde donne $y^2 = \frac{a^3}{12b}$; mais ces valeurs de x & de y^2 ne satisfont point à l'équation proposée; ainsi il n'y a point d'autre point multiple que celui qui doit être à l'origine.

Pour connoître sa multiplicité, différencions une seconde fois; nous aurons $12y^2\,dy^2 - 2axdy^2 - 2aydxdy - 2aydxdy + 6bxdx^2 = 0$, dont tous les termes s'anéantissent en mettant pour x & y leurs valeurs, zéro. Donc le point est plus que double.

Passons donc à une troisieme différenciation: nous aurons $24ydy^3 - 2adxdy^2 - 2adxdy^2 - 2adxdy^2 + 6bdx^3 = 0$; ou en mettant pour y & x, leur valeur zéro, $6bdx^3 - 6adxdy^2 = 0$;

comme cette troisieme différentielle ne s'anéantit point, le point en question, est un point triple.

Pour en déterminer les tangentes, je divise cette équation par $6\,b$, & par dy^3; j'ai $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{adx}{bdy} = o$, qui donne $\frac{dx}{dy} = o$, & $\frac{dx^2}{dy^2} - \frac{a}{b} = o$, ou $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$. La premiere valeur de $\frac{dx}{dy}$, fait voir que l'une des tangentes au point multiple est parallele aux ordonnées, c'est-à-dire, qu'une des branches touche l'axe des ordonnées, puisque le point multiple est d'ailleurs à l'origine. Les deux valeurs $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ font voir que les deux autres branches font avec l'axe des ordonnées, chacune, un angle dont la tangente est $\sqrt{\frac{a}{b}}$ & s'étendent de differents côtés de cet axe. On peut voir la figure de cette courbe en résolvant son équation qui donne . . . .
$y = \pm \sqrt{\frac{ax}{2} \pm \frac{x}{2} \sqrt{aa - 4bx}}$; prenant pour a & b deux nombres à volonté, & donnant successivement à x plusieurs valeurs tant positives que négatives: on trouvera qu'elle est telle que la représente la Figure 21.

Au reste, lorsqu'on a déterminé un point multiple, par les opérations ci-dessus, il ne faut pas toujours en conclure que toutes les branches qui sont censées passer par ce point, soient visibles. Il peut se faire que l'équation qui détermine les tangentes, ait des racines imaginaires; & alors il y a autant de branches invisibles. Les points où cela arrive, sont quelquefois détachés du cours de la courbe, à laquelle ils n'appartiennent pas moins, on les appelle alors des points *conjugués* mais qu'ils soient ou ne soient point détachés, ils ne sont pas moins censés rassembler le nombre de branches marqué par le degré de leur multiplicité; la courbe à laquelle ils appartiennent est un individu d'une famille plus étendue, dans laquelle toutes ces branches sont visibles; mais elles deviennent invisibles dans celle-là, parce que quelqu'une des quantités constantes qui entrent dans l'équation commune à toute la famille, devient zéro dans le cas particulier de cette courbe individuelle. C'est ainsi que dans la courbe qui a pour équation $m(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, & dont celle de la Figure 20. eſt un cas particulier, & devient la même lorſque $m=a$; c'eſt ainſi, dis-je, que dans cette courbe qui aura auſſi une feuille, cette feuille n'a plus lieu lorſqu'on ſuppoſe $a=0$, ce qui réduit l'équation à $m(y-b)^2 - x^3 = 0$; les deux branches OMZ, $OM'Z$ qui étoient au-deſſus du point O, n'auront plus lieu dans cette derniere; ou du moins n'y ſeront pas viſibles. Car on peut ſuppoſer qu'elles y ſont encore, en regardant a, non comme zéro abſolument, mais ſeulement comme infiniment petit. Il n'y aura pas moins deux tangentes, à la vérité; mais cet exemple, ſuffit pour faire entrevoir comment l'anéantiſſement de certaines branches peut avoir lieu.

66. On peut tirer pluſieurs conſéquences utiles de ce que nous venons de dire, à l'occaſion des points multiples.

67. 1°. Lorſqu'une expreſſion algébrique fractionnaire, dans laquelle il entrera une ou deux variables, ſera telle qu'en y mettant pour chacune de ces variables, certaines valeurs déterminées, elle deviendra $\frac{0}{0}$; on aura la valeur que doit avoir alors cette expreſſion, en différenciant ſéparément le numérateur & le dénominateur, autant de fois de ſuite qu'il ſera néceſſaire pour qu'ils ne deviennent plus zéro en même temps; & dans cette différenciation, on traitera les différences premieres, comme conſtantes. En effet, on peut toujours regarder toute expreſſion fractionnaire algébrique $\frac{B}{A}$, dans laquelle il entreroit deux variables, par exemple, comme étant la valeur de $\frac{dx}{dy}$ (x & y étant ces deux variables); c'eſt-à-dire, qu'on peut toujours ſuppoſer $\frac{dx}{dy} = \frac{B}{A}$, & par conſéquent $Adx - Bdy = 0$. Or puiſque, par la ſuppoſition, A & B deviennent zéro en même temps, lorſque x & y ont certaines valeurs, il ſuit de ce qui précéde, que pour avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$, il faut différencier cette équation en regardant dx & dy comme conſtants, la différencier, dis-je, juſqu'à ce qu'on arrive à une équation qui ne s'anéantiſſe point par la ſubſtitution des valeurs de x & y. Or ces différenciations conſécutives donnent $dAdx - dBdy = 0$, $ddAdx - ddBdy = 0$, $d^3Adx - d^3Bdy = 0$, &c. qui donnent

$\frac{dx}{dy} = \frac{dB}{dA}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{ddB}{ddA}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{d^3B}{d^3A}$; c'eſt-à-dire qu'il faut différencier ſéparément le numérateur & le dénominateur ainſi qu'il a été dit ; & la derniere de ces équations donnera la valeur, ou les valeurs de $\frac{dx}{dy}$.

68. 2°. Lorſqu'une équation qui renfermera pluſieurs variables ſera telle, qu'à certaines valeurs de l'une de ces variables, moins une, il devra répondre un certain nombre de valeurs, égales de la derniere, & qu'il en ſera de même de toutes, on trouvera ces valeurs en différenciant autant de fois de ſuite, moins une, l'équation propoſée ; ſuppoſant dans ces différenciations dx, dy, dz, &c. conſtantes ſi x, y, z, &c. ſont les variables ; & égalant à zéro les multiplicateurs de dx, dy, dz, &c. ceux de dx^2, $dx\,dy$, $dz\,dy$, &c. & ainſi de ſuite. Si toutes ces équations s'accordent entr'elles & avec l'équation propoſée, les valeurs de x, y, z, &c. qu'elles auront données, ſeront les valeurs demandées.

69. Remarquons au ſujet des points multiples, que puiſque les valeurs de x & de y, que l'on trouve en égalant à zéro le coëfficient de dx & celui de dy doivent ſatisfaire à l'équation gnie propoſée, on ne peut, lorſque cette équation n'eſt pas donnée en termes finis, ou ne peut pas y être ramenée par les méthodes du calcul intégral, s'aſſurer par le calcul ſeul, de l'exiſtence de ces points.

Des Points d'inflexion viſibles & inviſibles.

70. Il arrive quelquefois qu'une même branche de courbe après avoir tourné ſa concavité vers un certain point, tourne enſuite ſa convexité vers ce même point, en continuant néanmoins ſa marche. Telle eſt la courbe que l'on voit repréſentée (*Fig.* 22), Le point O où ce changement arrive, s'appelle point d'*inflexion*.

Pour déterminer ces ſortes de points il faut remarquer que la tangente au point O, doit être tangente commune de la branche OB, & de la branche Ob, qui ſe touchent mutuellement au point O ; ſi donc de part & d'autre du point O, on prend deux arcs égaux ou inégaux, mais infiniment petits, la tangente doit être le prolongement de l'un & de l'autre, en ſorte que ces deux petits arcs doivent être en ligne droite.

Cela poſé, ayant mené les ordonnées MP, OQ, mp, & nommé AP, x, & PM, y. On aura $Mr = dx$, $Or = dy$; & ſuppoſant OM & Om infiniment peu différents l'un de l'autre, on aura $Or' = dx + ddx$, & $mr' = dy + ddy$; puis donc que MO & Om ſont en ligne droite, les triangles MrO & $Or'm$ ſont ſemblables; donc ſi l'on ſuppoſe, (ainſi qu'on en eſt bien le maître), que les arcs MO & Om ſont égaux, ces mêmes triangles ſeront auſſi égaux, & l'on aura $Mr = Or'$, & $Or = mr'$; c'eſt-à-dire, $dx = dx + ddx$, & $dy = dy + ddy$, donc $ddx = 0$, $ddy = 0$.

Donc, pour déterminer les points d'inflexion ſimples, il faut différencier deux fois de ſuite l'équation de la courbe, & ſuppoſer dans la ſeconde équation différentielle, $ddx = 0$, & $ddy = 0$. Or, il eſt évident qu'alors cette ſeconde équation eſt la même que ſi l'on eût différencié en faiſant dx & dy conſtants. Donc, pour avoir les points d'inflexion ſimples, il faut d'abord différencier l'équation de la courbe, puis différencier cette premiere équation différencielle, en regardant dx & dy comme conſtants. Alors ſi de la premiere équation différencielle on tire la valeur de dx ou celle de dy pour la ſubſtituer dans la ſeconde, on aura une équation qui étant diviſée par dy^2 ou dx^2, ne renfermera plus que des x, des y & des conſtantes, & qui étant comparée avec l'équation même de la courbe, donnera les valeurs de x & de y, qui conviennent au point d'inflexion ſimple.

Prenons pour exemple, la courbe qui a pour équation $x^3 - by^2 = a^3$. Nous aurons $3x^2 dx - 2by\,dy = 0$, différenciant de nouveau, & traitant dx & dy comme conſtants, nous aurons $6x\,dx^2 - 2b\,dy^2 = 0$, or, la premiere donne $dy = \frac{3x^2 dx}{2by}$, ſubſtituant dans la ſeconde, on aura ... $6x\,dx^2 - \frac{18bx^4 dx^2}{4b^2y^2} = 0$, ou $4by^2 - 3x^3 = 0$. Or, celle-ci donne $y^2 = \frac{3x^3}{4b}$ qui étant ſubſtitué dans l'équation de la courbe, donne $x^3 - \frac{3}{4}x^3 = a^3$ ou $x^3 = 4a^3$, donc $x = a\sqrt[3]{4}$, & par conſéquent $y = \sqrt{\frac{3a^3}{b}} = a\sqrt{\frac{3a}{b}}$. Ce ſont les valeurs qui déterminent le point d'inflexion.

Prenons, pour ſecond exemple, la courbe qui a pour équation $y = a + (x-a)^{\frac{3}{5}}$, nous aurons $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{5}} dx$; différenciant de nouveaux en traitant dx & dy comme constants, nous aurons $0 = -\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}} dx^2$, ou $\frac{-\frac{6}{25} dx^2}{(x-a)^{\frac{7}{5}}} = 0$; donc $dx = 0$; or la premiere équation différentielle $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{5}} dx$ revient à $dy = \frac{\frac{3}{5} dx}{(x-a)^{\frac{2}{5}}}$ ou $(x-a)^{\frac{2}{5}} dy = \frac{3}{5} dx$; donc puisque $dx = 0$, on a $(x-a)^{\frac{2}{5}} dy = 0$, qui donne ou $dx = 0$, ou $(x-a)^{\frac{2}{5}} = 0$; mais comme il n'est pas possible qu'on ait en même temps dx & dy égaux à zéro, il s'ensuit que $(x-)^{\frac{2}{5}} = 0$, est la véritable solution, qui donne $x = a$, & par conséquent $y = a$.

71. Remarquons en passant, 1°. Que puisqu'on trouve $dx = 0$, la tangente au point d'inflexion de cette courbe, est parallele aux ordonnées.

2°. La méthode que l'on donne ordinairement pour trouver les points d'inflexion, consiste à différencier deux fois de suite l'équation, en supposant dx constant, & à égaler ddy à zéro ou à l'infini. Quoique cette méthode conduise aux mêmes résultats, nous avons néanmoins évité de l'employer; parce qu'en effet ddy n'est point infini, ainsi qu'on doit bien le voir par ce qui précéde. Ce qui est réellement infini alors, c'est la valeur de $\frac{ddy}{dx^2}$ & non pas ddy qui ne peut être que zéro, dans ce cas comme dans tout autre; & comme dx est zéro, dans les mêmes cas de points d'inflexion, où l'on a coutume de supposer ddy infini, $\frac{ddy}{dx^2}$ est réellement $\frac{0}{0^2}$, qui en regardant zéro comme une quantité infiniment petite, est en effet infini.

3°. Si la courbe devoit avoir plusieurs points d'inflexion, l'équation finale donneroit plusieurs valeurs de x; c'est-à-dire, qu'elle passeroit le premier degré. Cela arrive dans les courbes qui vont en serpentant, comme dans la Figure 23.

72. Si l'on conçoit que les deux points d'inflexion O & O' (*Fig.* 23), s'approchent continuellement & soient enfin infiniment voisins l'un de l'autre : alors si l'on se représente, comme ci-devant, les deux arcs infinimens petits QM & Om,

& les deux arcs infiniment petits $O'M'$, $O'm'$ de part & d'autre des points d'inflexion O & O', les deux côtés Om & MO' seront ou pourront être supposés l'un sur l'autre ; & puisqu'au point d'inflexion, MO est en ligne droite avec Om, & $M'O'$ avec $O'm'$, il y aura donc trois petits arcs consécutifs en ligne droite.

Cela posé, soient $Mm, mm', m'm''$ (*Fig.* 24) ces trois arcs infiniment petits. Abaissons les ordonnées MP, $mp, m'p', m''p''$, & menons les lignes Mr, mr', $m'r''$ paralleles à AP. Nommons AP, x, & PM, y ; nous aurons $Mr = dx, rm = dy, mr' = dx + ddx$, $r'm' = dy + ddy$, $m'r'' = dx + ddx + d^3x$, $r''m'' = dy + ddy + d^3y$. Or les trois triangles Mrm, $mr'm'$, $m'r''m''$ sont semblables, puisque les côtés Mm, mm' & $m'm''$ sont en ligne droite ; donc si l'on suppose ces mêmes côtés égaux (ce dont on est le maître), les triangles seront égaux ; on aura donc $dx = dx + ddx$, $dy = dy + ddy$, $dx + ddx = dx + ddx + d^3x$, $dy + ddy = dy + ddy + ddy + dd^3y$; c'est-à-dire, $ddx = 0$, $ddy = 0$, $d^3x = 0$, $d^3y = 0$.

Donc si l'on différencie l'équation de la courbe trois fois de suite, en faisant varier dx, dy, ddx & ddy, & qu'ensuite on mette 0 pour chacune des quantités ddx, ddy, d^3x, d^3y, il faudra que chacune des trois équations résultantes de ces différenciations ait lieu. Or il est évident qu'elles deviennent alors les mêmes, que si l'on eût différencié trois fois de suite, en supposant dx & dy constants.

En raisonnant de la même maniere, on verra que si trois points d'inflexion consécutifs viennent à se réunir, il y aura, au point de réunion, quatre éléments en ligne droite, & l'on démontrera de même, que si l'on différencie l'équation quatre fois de suite, en supposant dx & dy constants, les quatre équations qui en résulteront, doivent toutes avoir lieu ; & ainsi de suite.

Donc, si de la premiere équation différentielle on tire la valeur de dx pour la substituer dans toutes les autres, on aura, après avoir divisé la seconde par dy^2, la troisieme par dy^3, & ainsi de suite, autant d'équations qui doivent avoir lieu conjointement avec l'équation proposée, pour qu'il y ait une, deux, trois, &c. inflexions réunies. Donc, si de deux de ces équations on tire les valeurs de x & de y, il faudra que ces valeurs substituées dans les autres équations y satisfassent.

Lorsqu'il n'y a que deux inflexions réunies, l'inflexion est invisible, elle redevient visible, lorsqu'il y en a trois ; en général l'inflexion est visible ou invisible, selon que le nombre des inflexions réunies eſt impair ou pair. Donc ſi $E = o$ repréſente, en général, l'équation d'une courbe ; il faudra, pour qu'il y ait m points d'inflexion réunis, il faudra qu'en différenciant E, $m+1$ fois, en ſuppoſant dx & dy conſtants, toutes les différentielles ddx, ddy, d^3x, d^3y, &c. juſqu'à celle du degré $m+1$ ſoient zéro ; & l'inflexion ſera viſible ou inviſible, ſelon que m ſera impair ou pair.

73. Juſqu'ici nous avons ſuppoſé les ordonnées paralleles, Si elles partoient d'un point fixe, voici comment on s'y prendroit, pour déterminer les points d'inflexion. Ayant imaginé les deux arcs infiniment petits, & conſécutifs, qui, au point d'inflexion, doivent être en ligne droite, on menera (*Fig.* 25) les ordonnées CM, Cm, & Cm', & l'on décrira les arcs Mr, mr' que l'on pourra regarder comme perpendiculaires ſur Cm & Cm'. Cela poſé, il eſt facile de voir que l'angle $r'mm'$ ne différe de l'angle rMm que de l'angle mCr'. Car on a $Cmm' + rmM = 180°$, ou $Cmr' + r'mm' + 90° - rMm = 180°$; donc $r'mm' - rMm = 90° - Cmr'$; mais à cauſe du triangle $Cr'm$ rectangle en r', on a $90° - Cmr' = mCr$; donc $r'mm' - rMm = mCr'$.

Si l'on mene la ligne mn qui faſſe l'angle $m'mn = mCr'$, l'angle nmr' ſera donc égal à mMr, & par conſéquent le triangle tmr' ſera ſemblable au triangle mMr. Nommons CM, y, & Mr, dx, nous aurons $mr = dy$, $mr' = dx + ddx$, & $m'r' = dy + ddy$; nommons $Mm = ds$, mm' ſera $= ds + dds$. Décrivons du point m, & du rayon mm', l'arc $m'n$; alors les ſecteurs Cmr' & nmm' ſeront ſemblables, & donneront $Cm : mr' :: mm' : m'n$; c'eſt-à-dire, $y + dy : dx + ddx :: ds + dds : m'n$, qui, en omettant ce qu'on doit omettre, ſera $= \frac{ds\,dx}{y}$; mais le triangle $m'tn$ ſemblable à $tr'm$, ſera auſſi ſemblable à mrM ; on aura donc $Mr : Mm :: m'n : m't$; c'eſt-à-dire, $dx : ds :: \frac{ds\,dx}{y} : m't = \frac{ds^2}{y}$; donc $r't = dy + ddy - \frac{ds^2}{y}$. Or les triangles ſemblables Mrm & $mr't$ donnent $Mr : rm :: mr' : r't$, ou $dx : dy :: dx + ddx : dy + ddy - \frac{ds^2}{y}$; donc $dxdy + dxddy - \frac{dxds^2}{y} = dxdy + dyddx$, ou $dxddy - dyddx - \frac{dxds^2}{y} = o$; c'eſt-là la formule pour trouver les points d'inflexion ſimples, quand les ordonnées partent d'un point fixe ;

elle revient à celle des coordonnées paralleles, lorsqu'on suppose le point C infiniment éloigné, & dx & dy constans; car alors le terme $\frac{dx\,ds^2}{y}$ doit être rejetté, puisque y est infini. Dans l'usage de cette formule, il sera toujours plus simple de supposer dx constant, ce qui la réduit à $ddy = \frac{ds^2}{y}$; & il faudra observer de traiter aussi dx comme constant, dans la différenciation de l'équation de la courbe : mais comme les dx sont des arcs décrits d'un rayon variable, au lieu que quand les coordonnées partent d'un point fixe, on les rapporte à des arcs décrits d'un rayon constant CO, comme nous l'avons dit (40); on aura soin de mettre, au lieu de dx, sa valeur qui sera toujours facile à avoir, en remarquant que les secteurs $CS\int$ & CMr sont semblables. Nous ne nous arrêtons pas à donner, dans la même supposition, les formules pour les autres points d'inflexion. Cela n'est pas difficile à présent.

Observation sur les Maxima & Minima.

74. Soit F une fonction d'une ou plusieurs variables, & qui soit susceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*. Si nous la considérons comme représentant l'ordonnée ou l'abscisse x d'une courbe, c'est-à-dire, si nous supposons $x = F$, il suit, de ce que nous avons dit à l'occasion des points d'inflexion, que s'il est vrai que dF ou dx soit zéro, lorsqu'il y a un *maximum* ou un *minimum*, l'inverse n'est pas toujours vraie; car nous avons vu (70) un cas où l'on avoit au point d'inflexion $dx = 0$; c'est-à-dire, la tangente parallele aux ordonnées; or il est évident que ni l'ordonnée ni l'abscisse ne sont alors ni un *maximum* ni un *minimum*. Que faut-il donc pour s'assurer de l'existence du *maximum* ou du *minimum*? Il faut différencier plusieurs fois de suite la quantité, en faisant les différences premieres de chaque variable, constantes; & si les valeurs qu'ont les variables au point de *maximum* ou *minimum* cherché, anéantissent non-seulement dF, mais aussi ddF, sans anéantir d^3F, il n'y a pas de *maximum* dans la courbe qui a pour équation $x = F$; mais bien un point d'inflexion visible; ainsi la quantité F n'a point de *maximum* ou de *minimum*. Mais, si d^3F s'anéantit, sans que d^4F s'anéantisse, il y aura *maximum* ou *minimum*. En général, il y aura *maximum* ou *minimum*, si la derniere différentielle qui s'anéantit, est de degré impair.

Des points de Rebrouſſement de différentes eſpeces, & des différentes ſortes d'attouchement des branches d'une même Courbe.

75. LORSQUE deux branches de courbe viennent à ſe toucher, elles peuvent s'oppoſer leurs convexités, comme dans la fig. 26, ou s'embraſſer comme dans la fig. 27; & dans l'un & dans l'autre cas, il peut arriver qu'elles continuent leur cours de part & d'autre du point d'attouchement, ou qu'elles s'arrêtent bruſquement à ce point, comme on le voit (*Fig.* 28 & 29). Dans ce dernier cas, le point d'attouchement s'appelle point de *rebrouſſement*; c'eſt-à-dire, point de *rebrouſſement ſimple*, dans la figure 28, & *rebrouſſement en bec*, dans la figure 29. Si plus de deux branches ſe réuniſſent, toutes ces différentes variétés peuvent ſe trouver à la fois dans le même point, & il peut s'y en trouver encore une infinité d'autres; par exemple, les branches peuvent, en ſe touchant, ſubir une ou pluſieurs inflexions. Il peut arriver qu'une inflexion & un point de rebrouſſement ſe trouvent réunis, & ne ſemblent former qu'un ſeul rebrouſſement. Dans la figure 30, ſi la branche EBD qui forme en E un rebrouſſement ſimple avec la branche EC, avoit un point d'inflexion en B; lorſque ce point d'inflexion ſe trouveroit infiniment près du point E, on n'auroit plus que l'apparence d'un rebrouſſement en bec. Ces variétés peuvent aller à l'infini, ſur-tout en conſidérant que pluſieurs branches peuvent ſe toucher à la fois. Nous n'entreprendrons donc pas d'aſſigner le caractere de chacune: nous obſerverons ſeulement, que toutes les fois que pluſieurs branches de courbe viendront à ſe toucher, on le reconnoîtra à ce que 1°. ce point étant multiple doit avoir les conditions mentionnées (64). 2°. L'équation qui ſert à déterminer les tangentes des points multiples, doit alors avoir autant de racines égales qu'il y a de branches qui ſe touchent, puiſqu'alors il y a autant de tangentes réunies. Ainſi pour le rebrouſſement ſimple, il doit avoir les conditions communes aux points doubles; & l'équation qui en donne les tangentes, ou qui donne $\frac{dx}{dy}$, doit avoir deux racines égales. Comme la conſidération de ces points n'eſt pas d'une aſſez grande utilité, pour nous engager à nous livrer aux détails qu'elle exige,

nous n'en dirons pas davantage. On peut consulter sur cette matiere, *l'Analyse des lignes courbes de Cramer. Geneve* 1750.

Des Rayons de courbure, ou de la développée.

76. Si l'on conçoit que sur chacun des points M, m, m', &c. d'une ligne courbe quelconque (*Fig.* 31), on ait élevé des perpendiculaires MN, mn, $m'n'$, &c; les intersections consécutives n, n', &c. formeront une ligne courbe à laquelle on a donné le nom de *développée*, parce que si on la conçoit enveloppée d'un fil ABN qui la touche en son origine B, alors en développant cette courbe, l'extrémité A du fil trace la courbe AM. En effet, dans le développement de Nn, par exemple, en considérant Nn comme une petite ligne droite, le fil MNn décrit, autour du point n comme centre, l'arc Mm auquel il est nécessairement perpendiculaire, puisque le rayon d'un cercle est perpendiculaire à sa circonférence.

77. La courbe AM étant donnée, si l'on veut, pour un point quelconque M, déterminer la valeur de Mn, qu'on appelle *Rayon de la développée*, on remarquera que Mn est déterminé par le concours de deux perpendiculaires infiniment voisines MN & mn. C'est pourquoi (*Fig.* 32), on imaginera deux arcs consécutifs Mm, mm' infiniment petits, & infiniment peu différens, que l'on considérera comme deux lignes droites : on imaginera aussi MN perpendiculaire en M sur Mm, & mN perpendiculaire en m sur mm'. Alors dans le triangle NMm rectangle en M, on aura $1 : \sin. MNm :: mN$ ou $MN : Mm$, ou (à cause que l'angle MNm est infiniment petit) $1 : MNm :: MN : Mm$; donc $MN = \dfrac{Mm}{MNm}$; or, si on prolonge Mm, l'angle $umm' = MNm$, parce que ces deux angles sont complémens du même angle MmN, à cause des angles droits NMm, & Nmm'; donc $MN = \dfrac{Mm}{umm'}$.

Si l'on mene Mr & mr' paralleles à AP, il est facile de voir que l'angle umr' étant égal à mMr, l'angle umm' est la quantité dont l'angle mMr diminue, ou la différentielle de l'angle rMm, laquelle doit être prise négativement ici, où la courbe est concave, & au contraire, doit être prise positivement, quand la courbe est convexe ; on a donc $MN = \dfrac{Mm}{\mp d(rMm)}$. Cherchons donc l'expression de $d(rMm)$.

Or la tangente de rMm, eſt $\frac{dy}{dx}$, & ſon coſinus (en nommant ds l'arc Mm ou $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ eſt $\frac{dx}{ds}$, ainſi qu'il eſt aiſé de le conclure de ce que le triangle rMm eſt rectangle : & nous avons vu (24) que z étant un angle quelconque, on avoit $dz = (\cos z)^2 d(\tang z)$; donc $d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; donc enfin $MN = \mp \frac{ds}{\frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\mp dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. C'eſt là la formule pour trouver les rayons de la développée, quand les ordonnées ſont paralleles.

78. Quand les ordonnées partent d'un point fixe (*Fig.* 33) on a, comme ci-deſſus, & par les mêmes raiſons, $MN = \frac{Mm}{m'mu}$ mais $m'mu$ n'eſt pas $= \mp d(rMm)$; voici comment on trouve alors la valeur de $m'mu$.

Décrivant les arcs Mr, mr', on a $m'mu = r'mu - r'mm'$; or, ſelon ce que nous avons vu (73), $r'mu$ differe de rMm, de la quantité angulaire mCr' ou MCr, (car ces deux dernieres quantités ne different que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles) ; donc $r'mu = MCr + rMm$; donc puiſque $m'mu = r'mu - r'mm'$, on a $m'mu = MCr + rMm - r'mm' = MCr - d(mMr)$. Or en nommant Mr, dx, on a $1 : \sin MCr$ ou $: MCr :: CM : Mr$; c'eſt-à-dire, $1 : MCr :: y : dx$; donc $MCr = \frac{dx}{y}$, & puiſque $d(mMr) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, on a $m'mu = \frac{dx}{y} - \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; & ſi la courbe étoit convexe, on trouveroit de même $m'mu = \frac{dx}{y} + \frac{dx^2}{y} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$;

donc $MN = \frac{ds}{\frac{dx}{y} \mp \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{yds^3}{ds^2 dx \mp y dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

79. Pour appliquer ces formules à quelques exemples, ſuppoſons que la courbe AM (*Fig.* 32) ſoit un cercle qui ait pour équation $yy = 2ax - xx$, nous aurons $y = \sqrt{2ax - xx}$; donc

$dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ sera donc $\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$; & $\frac{dy}{dx}$ sera $\frac{a - x}{\sqrt{2ax - xx}}$; donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-a^2\,dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$, la formule qui convient au cas présent, où la courbe est concave, & où les ordonnées sont paralleles, est $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, elle se changera donc en $\frac{\frac{a^3\,dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2\,dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}} = a$, c'est-à-dire, que le rayon de la développée est toujours de même grandeur & égal au rayon du cercle, ensorte que la développée se réduit à un point qui est le centre; ce qui s'accorde avec ce que l'on connoît.

Prenons, pour second exemple, la parabole, qui a pour équation $y^2 = ax$, ou $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, nous aurons $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$, donc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{1}{4} a x^{-1} dx^2} = dx\sqrt{1 + \frac{a}{4x}} = dx\sqrt{\frac{4x + a}{4x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{4x + a}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$; donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx$, la formule $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ devient donc $\frac{\frac{1}{8} x^{-\frac{3}{2}} dx^3 (4x + a)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \times \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx} = \frac{\frac{1}{2}(4x + a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x + a}{2}\sqrt{\frac{4x + a}{a}}$.

80. Les rayons de la développée servent à mesurer la courbure d'une courbe en chaque point. Puisque dans le développement de l'élément *Nn* de la courbe *BN* (*Fig.* 31), le fil trace le petit arc *mm'*, cet arc *mm'* a donc même courbure que le cercle qui auroit pour rayon *m n*. Ainsi, quand on a l'expression du rayon de la développée, on a pour chaque point, le rayon du cercle qui a même courbure que la courbe, en ce point. Et comme la courbure d'un cercle est d'autant

plus grande que son rayon est plus petit, c'est-à-dire, que les courbures des cercles sont en raison inverse de leurs rayons; il sera donc facile de comparer la courbure d'une courbe, en un point quelconque, avec la courbure de cette même courbe ou d'une autre, en un point quelconque. Ainsi, si je voulois comparer la courbure de la parabole, à son origine, avec celle qu'elle a à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer, je remarquerois qu'à l'origine on a $x = 0$, & que l'abscisse qui répond au foyer, est $\frac{1}{4}a$ (*Alg.* 356). Faisant donc successivement, dans l'expression du rayon de la développée $x = 0$ & $x = \frac{1}{4}a$, j'ai $\frac{1}{2}a$ & $a\sqrt{2}$, le rayon de la développée est donc $\frac{1}{2}a$ à l'origine, & il est $a\sqrt{2}$ à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer, dont la courbure, au premier de ces points, est à la courbure au second, :: $a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a$, ou :: $2\sqrt{2} : 1$.

Puisque le rayon *MN* de la développée n'est autre chose que le fil qui enveloppoit, ou que l'on peut concevoir avoir enveloppé la courbe *BN*, il s'ensuit donc qu'il est égal en longueur à l'arc *BN* plus la partie *AB* dont le fil excédoit la courbe, lorsque le développement a commencé, c'est-à-dire, plus le rayon de la développée à l'origine *A*. Donc la courbe *BN* est rectifiable, c'est-à dire, qu'on peut assigner la longueur de chacun de ses arcs *BN*.

Ceux qui désireront plus de détails sur les développées, peuvent consulter *l'Analyse des infiniment petits* du Marquis de Lhopital, où ils trouveront d'ailleurs d'autres applications du Calcul différentiel.

Remarque.

81. Nous avons, ci-dessus (70), déterminé les points d'inflexion, en supposant que les deux éléments de la courbe, voisins du point d'inflexion, étoient en ligne droite. De cette supposition, il semble suivre, qu'au point d'inflexion le rayon de la développée devroit toujours être infini, parce que les deux perpendiculaires sur les deux côtés consécutifs seroient paralleles. Cependant il y a plusieurs courbes qui, au point d'inflexion, ont le rayon de la développée égal à zéro; par exemple, la parabole qui a pour équation $y = x^{\frac{1}{5}}$.

Mais il faut observer que rien, dans la supposition que nous avons faite, ne détermine de quelle grandeur sont ces deux éléments consécutifs. Or, s'ils se réduisoient chacun à un point, ils n'en seroient pas moins sur une même ligne droite, & les deux perpendiculaires tombant l'une sur l'autre, se ren-

contreroient

contreroient dans le point même d'où elles partent. Or, c'est ce qui arrive dans les courbes où le rayon de la développée est zéro au point d'inflexion. Car la courbure étant alors infinie, les deux élémens consécutifs se confondent, chacun avec la tangente, infiniment moins que dans tout autre cas, & par conséquent doivent être considérés comme deux points réunis. Les deux élémens peuvent donc être en ligne droite, sans que pour cela le rayon de la développée soit infini; mais on voit par-là, qu'au point d'inflexion, le rayon de la développée est toujours infini, ou nul.

ÉLÉMENTS DU CALCUL INTÉGRAL.

82. Il s'agit ici de revenir des quantités différentielles, aux quantités finies dont la différenciation a produit celles-là: la méthode qui enseigne comment se fait ce retour, s'appelle le *Calcul intégral.*

Il n'y a point de quantité variable exprimée algébriquement, dont on ne puisse trouver la différentielle; mais il y a un grand nombre de quantités différentielles * que l'on ne peut intégrer: les unes, parce qu'en effet elles n'ont pu résulter d'aucune différenciation; telles sont les quantités xdy, $xdy-ydx$, &c. les autres, parce qu'on n'a point encore trouvé de méthodes pour les intégrer; & parmi celles-ci, il y en a dont on a lieu de désespérer d'avoir jamais l'intégrale.

* Par *quantité différentielle*, nous entendons ici, non-seulement celle qui résulte d'une différenciation, mais en général, toute quantité affectée des différentielles dx, dy, &c. d'une ou de plusieurs variables.

G

Quoi qu'il en ſoit, on peut tirer un parti très-avantageux de celles que l'on fait intégrer; nous allons tâcher de les faire connoître : nous verrons enſuite ce qu'on doit faire à l'égard de celles qui ſe refuſent à l'intégration. Commençons par nous expliquer ſur quelques façons de parler dont nous ferons uſage.

Nous appellerons *fonction* d'une quantité, toute expreſſion de calcul dans laquelle cette quantité entrera, de quelque maniere qu'elle y entre d'ailleurs. Ainſi, x, $a + bx^2$, $\sqrt[n]{ax^n + bx^p}$, &c. ſont des fonctions de x.

Nous entendons par *quantités algébriques*, celles dont la valeur exacte peut être aſſignée en exécutant un nombre déterminé d'opérations de l'Algébre & de l'Arithmétique, autres que celles qui dépendent des logarithmes. Au contraire, nous appellerons quantités non algébriques, celles dont on ne peut aſſigner que des valeurs approchées, ou qui ſuppoſent des approximations : les logarithmes ſont dans ce cas, & il y en a une infinité d'autres.

Pour indiquer l'intégrale d'une différentielle, nous nous ſervirons de la lettre $\int$ que nous mettrons devant cette quantité : cette lettre équivaudra à ces mots *ſomme de*, parce que *intégrer*, ou *prendre l'intégrale*, n'eſt autre choſe que ſommer tous les accroiſſements infiniment petits que la quantité a dû prendre pour arriver à un état fini déterminé.

Des Différentielles à une ſeule variable, qui ont une intégrale algébrique ; & premiérement des différentielles monomes.

83. REGLE fondamentale. *Pour integrer une différentielle monome, il faut* 1°. *augmenter l'expoſant de la variable d'une unité* : 2°. *diviſer par cet expoſant ainſi augmenté de l'unité ; & par la différentielle de la variable* ; c'eſt-à-dire, diviſer par ce nouvel expoſant multiplié par la différentielle de la variable.

La raiſon de cette régle ne doit pas être cherchée ailleurs que dans le principe même de la différenciation (10). Comme il s'agit de retrouver la quantité qui avoit été différenciée, il eſt viſible qu'il faut appliquer des opérations contraires à celles qui ont été preſcrites pour la différenciation.

Cela poſé, appliquons la régle.

$\int 2\,x\,d\,x$ ou $\int 2\,x^1 d\,x = \dfrac{2\,x^{1+1}\,dx}{(1+1)\,dx} = x^2$;
$\int x\,d\,x = \dfrac{x^2\,dx}{2\,dx} = \dfrac{x^2}{2}$. En effet, $d(x^2) = 2\,x\,dx$,
$d\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \dfrac{2\,x\,dx}{2} = x\,d\,x$.

De même $\int a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{a x^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1) dx} = \frac{a x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} a x^{\frac{5}{3}}$. Pareillement $\int \frac{adx}{x^3}$, ou $\int a\, x^{-3}\, dx = \frac{a x^{-3+1} dx}{(-3+1) dx} = \frac{a x^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}$.

En général, m étant un expoſant poſitif, ou négatif, entier ou fractionnaire, on aura $\int a x^m dx = \frac{a x^{m+1} dx}{(m+1) dx} = \frac{a x^{m+1}}{m+1}$.

On n'a pas beſoin de cette régle pour trouver l'intégrale de dx, ni de $a dx$, que l'on voit aiſément devoir être x pour la premiere, & $a x$ pour la ſeconde. Mais ſi l'on vouloit y appliquer la régle, on remarqueroit que l'expoſant de x dans ces différentielles eſt zéro, & qu'elles ſont la même choſe que $x^0\, dx$ & $a x^0\, dx$, dont l'intégrale, ſuivant la regle, eſt $\frac{x^{0+1} dx}{(0+1) dx}$ & $\frac{a x^{0+1} dx}{(0+1) dx}$, ou x & ax.

Il n'y a qu'un cas qui échappe à la regle fondamentale ; c'eſt celui où l'expoſant m auroit pour valeur -1 ; car alors l'intégrale devient $\frac{a x^{-1+1}}{-1+1}$ ou $\frac{a x^0}{0}$ ou $\frac{a}{0}$, quantité inaſſignable, parce qu'elle eſt infinie : en effet, ſi l'on conçoit que le dénominateur, au lieu d'être zéro, ſoit une quantité infiniment petite, on voit qu'il doit être contenu une infinité de fois dans la quantité finie a, &

que par conséquent la fraction feroit infinie. Nous expliquerons, par la suite, pourquoi le calcul donne ici une quantité infinie ; mais en attendant, nous ferons remarquer que la différentielle proposée $ax^m dx$ qui est alors $ax^{-1}dx$, ou $\frac{adx}{x}$ est une différentielle de logarithme ; c'est celle de alx ou de lx^a, ainsi qu'on peut le voir aisément en différenciant (27).

Si la différentielle monome avoit un radical, on substitueroit au radical, un exposant fractionnaire. Ainsi pour intégrer $adx\sqrt[3]{x^2}$, on intégrera $adx \cdot x^{\frac{2}{3}}$ ou $ax^{\frac{2}{3}}dx$, ce qui se fera comme ci-dessus.

Remarque.

84. Nous avons vu (8) que lorsque dans les quantités qu'on avoit à différencier, il se trouvoit des termes tout constants, ces termes ne se trouvoient plus dans la différentielle. Donc, lorsqu'on remonte à l'intégrale, il faut avoir soin d'ajouter une quantité constante à l'intégrale. Cette constante aura telle valeur que l'on voudra, tant qu'on n'aura pas d'autre objet que de trouver l'intégrale, c'est-à-dire, de trouver une quantité telle qu'en la différenciant, on repro-

duise la différentielle proposée; en effet, $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ & $\frac{ax^{m+1}}{m+1}+C$, C étant une constante quelconque, auront également pour différentielle la quantité $ax^m dx$, quelque valeur qu'on donne à C. Mais lorsque l'intégration se fait dans la vue de satisfaire à une question que l'on s'est proposée, alors cette constante a une valeur que l'état de la question détermine : nous verrons cela par la suite; mais, à l'avenir, nous aurons toujours soin d'en ajouter une à la suite de chaque intégration; & afin qu'on la reconnoisse pour telle, nous la désignerons toujours par la même lettre C.

Des Différentielles complexes dont l'intégration rentre dans la régle fondamentale.

85. 1°. On peut encore intégrer par la régle précédente toute quantité dans laquelle il n'entrera point de puissances de quantités complexes, ni des diviseurs complexes, à moins que ces derniers ne fussent des quantités constantes.

Ainsi pour intégrer $a x^3 dx + \frac{bx^2 dx}{c} + e\,dx$, j'intégrerai séparément chaque terme, &

j'aurai $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C$. Pareillement l'intégrale de $ax^3dx + \frac{bdx}{x^4}$, ou de $ax^3dx + bx^{-4}dx$, est $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$, ou $\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C$.

86. 2°. Quand même il entreroit des puissances de quantités complexes, on intégreroit encore par la regle fondamentale, pourvu qu'elles ne se trouvassent point au dénominateur, & qu'en même temps leur exposant fût un nombre entier positif. Par exemple, $(a + bx^2)^3 \times dx$ s'intégreroit par la regle précédente, en élevant actuellement $a + bx^2$ à la troisieme puissance, ce qui (*Alg.* 149) donneroit $a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6$, & par conséquent $(a + bx^2)^3 dx = a^3 dx + 3a^2bx^2dx + 3ab^2x^4dx + b^3x^6dx$, dont l'intégrale, prise terme à terme, est $a^3x + \frac{3a^2bx^3}{3} + \frac{3ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C$.

87. Comme il n'y a pas de quantité complexe élevée à une puissance dont l'exposant seroit un nombre entier positif, que l'on ne puisse, par la même regle donnée (*Alg.* 149), réduire, ainsi, à une suite finie de monomes, on pourra donc toujours intégrer toute quantité complexe qui ne renfermeroit d'autres parties complexes que des puissances dont l'exposant seroit un nombre entier positif. Ainsi, si j'avois à intégrer $gx^3dx(a + bx^2)^2 +$

$a^2 x^7 dx (c + ex^2 + fx^3)^4$, je développerois, par la régle citée, la valeur de $(1 + bx^2)^2$, & je multiplierois chaque terme du résultat, par $gx^3 dx$; je développerois pareillement la valeur de $(c + ex^2 + fx^3)^4$, & je multiplierois chaque terme du résultat, par $a^2 x^7 dx$; alors je n'aurois plus à intégrer qu'une suite de monomes, ce qui est le cas de la regle fondamentale.

88. Il faut excepter ici, le cas où quelqu'un des exposants étant négatif, il arriveroit qu'après le développement & la multiplication, l'exposant de la variable, dans quelqu'un des termes, seroit -1; mais dans ce cas on intégreroit par logarithmes. Par exemple, si j'avois $\frac{adx}{x^3}(a + bx^2)^2$, ou $ax^{-3} dx (a + bx^2)^2$; je le changerois en $ax^{-3} dx (a^2 + 2abx^2 + b^2 x^4)$ qui revient à $a^3 x^{-3} dx + 2a^2 bx^{-1} dx + ab^2 x dx$, dont les deux termes $a^3 x^{-3} dx + ab^2 xdx$ ont pour intégrale $\frac{-a^3 x^{-2}}{2} + \frac{ab^2 x^2}{2}$; mais le terme $2a^2 bx^{-1} dx$ qui est la même chose que $2a^2 b \frac{dx}{x}$, est (27) la différentielle logarithmique de $2a^2 blx$; ensorte que l'intégrale totale est $-\frac{a^3 x^{-2}}{2} + \frac{ab^2 x^2}{2} + 2a^2 blx + C$.

89. 3°. Si la quantité différentielle pro-

posée renferme même une quantité complexe, élevée à une puissance quelconque (dont l'exposant soit entier, ou fractionnaire, positif, ou négatif), on intégrera encore, si la totalité des quantités qui multiplie cette quantité complexe, est la différentielle de cette même quantité complexe, considérée sans son exposant total; ou si elle est cette différentielle multipliée ou divisée par un nombre constant. Il ne faudra pour cela, que regarder la quantité complexe dont il s'agit, comme une seule variable, & appliquer mot à mot la régle fondamentale. Par exemple, $g\,dx\,(a+bx)^p$ est dans ce cas, parce que $g\,dx$ est la différentielle de $a+bx$, multipliée par $\frac{g}{b}$ qui est une quantité constante, ainsi pour l'intégrer, j'écris $\int g\,dx\,(a+bx)^p = \frac{g\,dx\,(a+bx)^{p+1}}{(p+1)\,d(a+bx)} + C$ $= \frac{g\,dx\,(a+bx)^{p+1}}{(p+1)\,b\,dx} + C = \frac{g\,(a+bx)^{p+1}}{(p+1)\,b} + C.$

En effet, si l'on différencie cette nouvelle quantité, on retrouve $g\,dx\,(a+bx)^p$.

En examinant de même la différentielle $\frac{a^2 dx + 2ax\,dx}{\sqrt{ax+xx}}$ ou $(a^2 dx + 2axdx)\,(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera qu'elle est intégrable, parce que $a^2\,dx + 2axdx$ est la différentielle de $ax+xx$, multipliée par une constante a. Appliquant

donc la regle, on aura $\int (a^2dx + 2axdx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{(a^2dx + 2axdx)(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx + 2xdx)} + C = 2a(ax + xx)^{\frac{1}{2}} + C.$

Le seul cas, à excepter, est celui où l'exposant de la quantité complexe seroit -1; alors on intégre par logarithmes, ainsi que nous le verrons par la suite.

Des Différentielles Binomes qui peuvent s'intégrer algébriquement.

90. Nous entendons par différentielle binome, celle où la quantité complexe la plus composée, est une puissance quelconque d'un binome. Ainsi $gx^5dx\,(a + bx^2)^{\frac{3}{5}}$ est une différentielle binome. Il en est de même de $gx^m\,dx\,(a + bx^n)^p$ qui peut représenter toute différentielle binome, parce que, par g, a, b, m, n, p, on peut entendre tous les nombres imaginables positifs ou négatifs.

On ne sait pas intégrer généralement, toute différentielle binome. Mais on voit, par ce qui précéde, qu'on sait intégrer une différentielle binome $gx^mdx\,(a+bx^n)^p$, dans les deux cas suivants.

1° Quand p est un nombre entier positif quelconque, quels que soient d'ailleurs les exposants m & n (86), à l'exception du cas mentionné (88).

2°. Quand l'expoſant m de x hors du binome, eſt moindre d'une unité que l'expoſant n de x dans le binome; c'eſt-à-dire, qu'on peut intégrer généralement $gx^{n-1}dx(a+bx^n)^p$, quels que ſoient n & p, excepté le cas où $p=-1$. En effet $gx^{n-1}dx$ eſt la différentielle de $a+bx^n$, multipliée par $\frac{g}{nb}$, c'eſt-à-dire, par une conſtante; on rentre donc dans le cas dont il eſt queſtion (89); & par conſéquent on intégrera, comme il y a été enſeigné, c'eſt-à-dire, par la regle fondamentale, en regardant $a+bx^n$ comme une ſeule quantité.

Outre ces cas, il y en a encore deux autres que l'on peut comprendre en un ſeul, & qui comprennent le précédent : nous allons les faire connoître.

91. 1°. On peut intégrer toute différentielle binome, dans laquelle l'expoſant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, pourra être diviſé exactement par l'expoſant de x dans le binome, & donnera pour quotient un nombre entier poſitif. Le procédé qu'il faut ſuivre dans ce cas, pour intégrer, ainſi que pour démontrer que cela eſt général, conſiſte à égaler la quantité binome (ſans ſon expoſant total), à une ſeule variable, & à exprimer la différentielle propoſée à l'aide de cette variable

seule & de constantes ; ce à quoi on peut toujours parvenir facilement, en opérant comme dans les exemples suivants.

Proposons-nous d'abord d'intégrer $g x^3 dx (a + b x^2)^{\frac{4}{5}}$. Je vois que cette différentielle est intégrable, parce que l'exposant de x hors du binome, c'est-à-dire, 3, étant augmenté d'une unité, donne 4, qui divisé par l'exposant 2 de x dans le binome, donne pour quotient 2, nombre entier positif.

Je fais donc $a + b x^2 = z$. De cette équation je tire la valeur de x^2 ; c'est $x^2 = \frac{z-a}{b}$. Je remarque que $x^3 dx$ qui précéde la quantité binome, vient (à un multiplicateur constant, près) de la différenciation de x^4 quarré de x^2 : j'éléve donc, au quarré, l'équation $x^2 = \frac{z-a}{b}$, & j'ai $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$; donc en différenciant ; j'aurai . . . . $4 x^3 dx = 2.\left(\frac{z-a}{b}\right). \frac{dz}{b}$, & par conséquent $x^3 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{2b} = \frac{(z-a)dz}{2b^2}$. Substituant pour $x^3 dx$, & pour $(a + b x^2)$ leurs valeurs en z, dans $g x^3 dx (a + b x^2)^{\frac{4}{5}}$, j'ai . . . . . $\frac{g.(z-a)dz}{2b^2} \times z^{\frac{4}{5}}$ ou $\frac{g z^{\frac{4}{5}+1} dz}{2b^2} - \frac{g a z^{\frac{4}{5}} dz}{2b^2}$. Donc

$$\int g x^3 dx (a + b x^2)^{\frac{4}{5}} = \int \frac{g z^{\frac{4}{5}+1} dz}{2b^2} -$$

$\int \frac{g a z^{\frac{4}{5}} dz}{2b^2} = \frac{g z^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{g a z^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C$, ou, (à cauſe que $\frac{g z^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}$ eſt multiplicateur commun) $= \frac{g z^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{z}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{a}{\frac{4}{5}+1}\right) + C = \frac{g z^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{5}{14} z - \frac{5}{9} a\right) + C$; remettant donc pour z, ſa valeur $a + b x^2$, nous aurons $\frac{g}{2b^2}(a + b x^2)^{\frac{4}{5}+1} \left(\frac{5}{14}(a + b x^2) - \frac{5}{9} a\right) + C$.

92. On opérera d'une maniere ſemblable, poar tout autre cas aſſujéti aux mêmes conditions. Prenons, par exemple $g x^8 dx (a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, qui doit être intégrable, puiſque l'expoſant 8 augmenté de 1, c'eſt-à-dire, 9, étant diviſé par l'expoſant 3 de x, dans le binome, donne un nombre entier poſitif. Je ferai donc $a + b x^3 = z$; j'aurai $x^3 = \frac{z-a}{b}$; & comme $x^8 dx$ qui précéde le binome, vient (à un multiplicateur conſtant, près) de la différenciation de x^9, pour avoir x^9 je cuberai l'équation $x^3 = \frac{z-a}{b}$: j'aurai $x^9 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^3$; différenciant pour avoir $x^8 dx$, j'ai $9x^8 dx = 3.\left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{b}$, & par conſéquent $x^8 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2 \frac{dz}{3b}$. La différentielle

$gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, se changera donc en $g.\left(\frac{z-a}{b}\right)^2.\frac{dz}{3b}.z^{-\frac{2}{3}}$, ou en faisant les opérations indiquées, c'est-à-dire, élevant $\frac{z-a}{b}$ au quarré, & multipliant par $z)^{-\frac{2}{3}}$) $\frac{gz^{2-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$ $-\frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}+\frac{ga^2z^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$, dont l'intégrale est $\frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})}-\frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})}+\frac{ga^2z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})}+C$, qui, à cause du multiplicateur commun $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}$, se réduit à $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{z^2}{3-\frac{2}{3}}-\frac{2az}{2-\frac{2}{3}}+\frac{a^2}{1-\frac{2}{3}}\right)$ $+C$, ou $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{3z^2}{7}-\frac{6az}{4}+3a^2\right)+C$, ou enfin, en remettant pour z, sa valeur $a+bx^3$, l'intégrale est $\frac{g}{3b^3}(a+bx^3)^{1-\frac{2}{3}}$ $\left(\frac{3}{7}(a+bx^3)^2-\frac{6a}{4}(a+bx^3)+3a^2\right)+C$.

Telle est la méthode qu'il faudra suivre toutes les fois que l'exposant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, & divisé par l'exposant de x dans le binome, donnera pour quotient, un nombre entier positif.

93. 2°. Quoiqu'une quantité différentielle binome ne soit pas dans le cas dont nous venons de parler, il arrive néanmoins, assez souvent, qu'on peut l'y ramener, à l'aide d'une préparation assez simple, & qui consiste à rendre négatif l'exposant de x

dans le binome, lorſqu'il eſt poſitif, ou poſitif lorſqu'il eſt négatif. Pour cet effet, il faut diviſer les deux termes du binome par la puiſſance de x qui ſe trouve dans ce binome, & multiplier hors du binome, par cette même puiſſance élevée à la puiſſance marquée par l'expoſant total du binome. Par exemple, pour rendre négatif l'expoſant 2 de x, dans le binome $gx^4 dx\,(a+bx^2)^5$, je diviſe $a+bx^2$ par x^2, ce qui me donne $gx^4 dx\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^5$, ou $gx^4 dx\,(ax^{-2}+b)^5$; mais comme la quantité x^2 par laquelle on a diviſé, eſt cenſée élevée à la cinquieme puiſſance, puiſqu'elle eſt compriſe ſous l'expoſant total 5 du binome, il faut, par compenſation, multiplier au-dehors, par $(x^2)^5$, c'eſt-à-dire, (*Alg.* 123) par x^{10}, ce qui donne $gx^{14} dx\,(ax^{-2}+b)^5$.

En appliquant cette préparation, on trouvera que pluſieurs différentielles binomes qui ne ſeroient pas compriſes dans le cas précédent, y reviendront. Par exemple, ſi l'on me donnoit à intégrer $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, ou $aadx\,(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$; je vois que l'expoſant de x hors du binome, c'eſt-à-dire, o, étant augmenté de 1, ce qui fait 1, ne peut être diviſé exactement par l'expoſant 2 de x dans le binome; mais j'aurois tort d'en conclure que la quantité proposée n'est pas intégrable ; car si je rends négative la puissance de x dans le binome, en écrivant $aa\,(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx\,(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ qui se réduit à $aax^{-3}dx\,(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, je vois alors que -3 augmenté de 1, c'est-à-dire, $-3+1$ ou -2, étant divisé par l'exposant -2 de x dans le binome, donne pour quotient un nombre entier positif : ainsi faisant $aax^{-2}+1=z$, j'en tire $x^{-2}=\frac{z-a}{aa}$; & comme $x^{-3}dx$ est (à un multiplicateur constant, près) la différentielle de x^{-2}, je différencie, & j'ai $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$, d'où je tire $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$. La différentielle $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ se change donc en $\frac{-aa.dz}{2aa}.z^{-\frac{3}{2}}$, ou $\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, dont l'intégrale est $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2.(1-\frac{3}{2})}+C$, ou $z^{-\frac{1}{2}}+C$, ou (en remettant pour z sa valeur) $(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C$, ou $\frac{1}{\sqrt{aax^{-2}+1}}+C$, qui se réduit à $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}+C$. Ainsi le procédé pour intégrer, est le même dans ce cas, que dans le précédent.

94. Nous avons supposé qu'il n'y avoit de puissance de x, que dans l'un des deux termes

termes du binome. S'il y en avoit dans tous les deux, on rameneroit la quantité à n'en avoir que dans un, en divisant le binome par l'une des deux puissances de x, qui se trouvent dans ses termes, & multipliant au dehors par la même puissance élevée à la puissance marquée par l'exposant du binome; & cela par la même raison que nous venons de donner, (93), pour rendre l'exposant négatif. Ainsi, si l'on me proposoit d'intégrer $\frac{dadx}{x\sqrt{ax+xx}}$, ou $aax^{-1}dx(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, je le changerois en $aax^{-1}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$, en divisant le binome par x, & multipliant, au dehors, par x élevé à la puissance $-\frac{1}{2}$ qui est celle du binome. Cette quantité se réduit à $aax^{-\frac{3}{2}}dx\ (a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Si on lui applique la regle du 1er cas (91), on ne trouvera point que cette quantité soit intégrable; mais en rendant négatif l'exposant de x dans le binome, on aura $aax^{-\frac{3}{2}}.(x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, ou $aax^{-2}dx$ $(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ qui (93) est intégrable. Faisant donc $ax^{-1}+1=z$, on aura $x^{-1}=\frac{z-1}{a}$; différenciant, on a $-x^{-2}dx=\frac{dz}{a}$, ou $x^{-2}dx=\frac{-dz}{a}$; donc $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ se change en $-adz.z^{-\frac{1}{2}}$, ou $-az^{-\frac{1}{2}}dz$, dont l'intégrale est

$\frac{-az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$, ou $-2az^{\frac{1}{2}}+C$, ou (en remettant pour z sa valeur) $-2a(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}+C$, ou enfin $-2a\sqrt{\frac{a}{x}+1}+C$.

Lorſqu'on aura fait ſur une différentielle binome, l'examen des deux cas que nous venons d'expoſer, ſi elle ne ſe rapporte à aucun, alors il eſt inutile d'attendre une intégrale purement algébrique.

Quant aux différentielles trinomes, quatrinomes, &c. c'eſt-à-dire, dont la quantité complexe renferme trois, quatre, &c, termes, elles ſont intégrables dans les cas énoncés (85 *& ſuiv.*). Il y a encore quelques cas où elles admettent une intégrale algébrique; mais ces cas ſont en fort petit nombre, & ſe préſentent rarement; ainſi nous ne nous en occuperons point ici.

Nous donnerons plus bas la méthode de découvrir celles qui ſont intégrables; & celles dont l'intégrale peut être rapportée à une intégrale donnée.

Application des regles précédentes, à la quadrature des Courbes.

95. Pour trouver la ſurface ou (ce qui revient au même) la quadrature des lignes courbes, on ſe repréſente ces lignes comme

des polygones d'une infinité de côtés; &, des extrémités M & m de chaque côté (*Fig.* 34), on imagine les perpendiculaires MP, mp, ſur l'axe des abſciſſes, ce qui décompoſe la ſurface en une infinité de trapèzes infiniment petits. Alors on regarde chaque trapèze, tel que $PpmM$ comme la différentielle de l'eſpace fini APM; parce qu'en effet $PpmM = APm - APM = d(APM)$ (6). Il ne s'agit donc que d'exprimer algébriquement le petit trapèze $PpmM$, & d'intégrer enſuite cette expreſſion, à l'aide des regles précédentes.

Mais en conſidérant $PpmM$ comme différentielle de la ſurface, il faut remarquer, qu'il n'eſt pas plutôt la différentielle de la ſurface comptée depuis l'origine A des abſciſſes, qu'il n'eſt la différentielle de tout autre eſpèce $KPML$ compté depuis un point fixe & déterminé K; puiſqu'on a également $PpmM = KpML - KPML = d(KMPL$. Donc, lorſqu'on intégrera, on n'a pas droit d'attribuer l'intégrale que donnera immédiatement le calcul, plutôt à l'eſpace APM qu'à tout autre eſpace $KPLM$ qui en différe d'un eſpace déterminé & conſtant KAL. Il faudra donc ajouter à l'intégrale trouvée par le calcul, une conſtante qui exprime ce dont l'eſpace que l'on a deſſein de déterminer, differe de celui que donne immédiatement le calcul : nous verrons dans les exemples que nous allons donner, comment on détermine cette constante. Cherchons d'abord l'expression de l'espace $PpmM$.

Nommons AP, x; PMy; nous aurons $Pp = dx$, $pm = y + dy$. La surface du trapèze $PpmM$ (*Géom.* 148) est $\frac{PM + pm}{2} \times Pp = \frac{2y + dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dydx}{2}$. Mais pour exprimer que dy & dx sont infiniment petits, il faut rejetter $\frac{dydx}{2}$ qui est infiniment petit à l'égard de ydx; on aura donc ydx pour l'expression générale de la différentielle ou de l'élément de la surface de toute courbe.

Pour appliquer cette formule à une surface proposée dont on auroit l'équation, il faut tirer de cette équation, la valeur de y, que l'on mettra dans la formule ydx; alors on aura une quantité toute en x & dx, qui, lorsqu'elle pourra être intégrée par les regles précédentes, donnera, en y ajoutant une constante, l'expression de la surface de cette courbe, comptée depuis tel point qu'on voudra. Il ne s'agira plus que de déterminer la constante; ce que l'on fera en exprimant de quel point l'on prétend compter la surface; nous allons voir comment cela s'exprime.

Prenons, pour exemple, la parabole ordinaire, qui a pour équation $yy = px$. Nous aurons $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; donc ydx deviendra $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$; or l'intégrale de cette quantité (83) est $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{\frac{3}{2} dx} + C$, ou $\frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$; cette derniere expression est donc celle de la surface de la parabole ; ensorte que connoissant l'abscisse x, & le paramètre p, on auroit la valeur de l'espace APM, ou de l'espace $KPLM$ compté depuis un point déterminé K, si la constante C étoit déterminée, c'est-à-dire, si cette intégrale exprimoit actuellement de quel point on compte.

Supposons donc que nous voulons compter les espaces depuis le point A ; alors on aura $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Pour savoir ce que doit valoir C, pour que cette équation ait lieu, il faut remarquer que lorsque x devient o, l'espace APM est aussi zéro ; dans ce cas l'équation se réduit à $0 = 0 + C$; donc $C = 0$; donc pour que l'intégrale exprime les espaces comptés depuis le point A, il faut que la constante C soit zéro ; c'est-à-dire, qu'alors il n'y a point de constante à ajouter, & l'on a, en général, l'espace indéfini $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$.

Mais, si l'on vouloit compter les espaces depuis le point K tel que $AK =$ [illegible] une quantité connue) ; alors on auroit $KPLM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; or ces espaces $KPML$ deviennent o, lorsque AP ou x devient $= b$; on a donc alors $o = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; donc $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, & par conséquent $KPLM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

On voit par-là, à quoi sert la constante que l'on ajoute en intégrant, & comment l'état de la question, seule, peut la déterminer.

Remarquons que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; or $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; donc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; donc puisque $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ exprime l'espace APM, cet espace aura aussi pour expression $\frac{2}{3}xy$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}AP \times PM$, ou les $\frac{2}{3}$ du rectangle $APMO$, quelque soit AP.

Pareillement $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$; or, lorsque $x = AK = b$, l'équation $yy = px$ donne $yy = pb$, & par conséquent $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}KL \times AK$; donc, puisque l'espace $KPML$ a pour expression $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, il aura aussi pour expression $\frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

La parabole est la seule des quatre sections coniques, qui soit quarrable.

Prenons pour second exemple, les paraboles de tous les genres, dont l'équation (30) est $y^{m+n} = a^m x^n$; nous aurons. . .

$y = \sqrt[m+n]{a^m x^n} = a^{\frac{m}{m+n}} \, x^{\frac{n}{m+n}}$; donc . . .
$y\,dx = a^{\frac{mm}{m+n}} \, x^{\frac{nn}{m+n}} \, dx$, dont l'intégrale
eſt $\dfrac{a^{\frac{m}{m+n}} \, x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$, qui ſe réduit à
$\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} \, x^{\frac{n}{m+n}+1} + C$, qui eſt la même choſe que $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} \, x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C$, ou (à cauſe que $y = a^{\frac{m}{m+n}} \, x^{\frac{n}{m+n}}$) ſe réduit à $\frac{m+n}{m+2n} xy + C$. Enſorte que ſi l'on veut compter les eſpaces APM depuis l'origine A des x (*Fig.* 35), ce qui exige que l'intégrale ſoit zéro, quand APM eſt zéro, & par conſéquent quand x eſt zéro, alors la conſtante C eſt zéro, & l'on a ſimplement $\frac{m+n}{m+2n} xy$; c'eſt-à-dire, que l'eſpace APM eſt toujours une portion déterminée du produit yx ou du rectangle $APMO$; il en eſt une partie exprimée par la fraction $\frac{m+n}{m+2n}$, dont la valeur dépend de celles de m & de n; c'eſt-à-dire, du degré de la parabole. Ainſi toutes les paraboles ſont quarrables.

On trouvera, de même que toutes les hyperboles rapportées à leurs aſymptotes (excepté l'hyperbole ordinaire) ſont quarrables. Mais comme dans la détermination de la constante, on trouve quelquefois une quantité infinie, il n'est pas inutile d'examiner ici ce qu'elle signifie. Soit donc $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ l'équation de ces courbes : on aura $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}}$; donc $y\,dx = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{-n}{m}} dx$, dont l'intégrale est $\dfrac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} + C$, ou $\dfrac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}} + C$; quantité où il n'y a aucune difficulté pour déterminer la constante, lorsque m surpasse n. Mais lorsque m est plus petite que n, on trouve une quantité infinie pour constante, lorsqu'on veut compter les espaces depuis l'origine des x ; & une quantité finie, quand on compte de tout autre point. Supposons, par exemple, $m = 1$ & $n = 2$; auquel cas l'équation est $y = a^3 x^{-2}$; la surface se réduit alors à $-a^3 x^{-1} + C$, ou $C - \frac{a^3}{x}$. Donc si l'on veut compter les espaces depuis l'origine A des x, il faudra que $C - \frac{a^3}{x}$ soit zéro, lorsque $x = 0$; c'est-à-dire, que $C - \frac{a^3}{0} = 0$, & par conséquent $C = \frac{a^3}{0}$, c'est-à-dire, est infini. Au contraire, si on veut compter les espaces depuis le point K, tel que $AK = b$, on a $C - \frac{a^3}{b} = 0$, qui donne $C = \frac{a^3}{b}$. Voici ce que cela signifie.

La courbe qui a pour équation $y = a^3 x^{-2}$ ou $y = \frac{a^3}{x^2}$ s'étend à l'infini le long des asymptotes AZ, AY (*Fig* 36); mais s'approche beaucoup plus près de l'asymptote AZ que de l'asymptote AY; car lorsque x est infini, y est infiniment petit du second ordre ; au lieu que lorsque y est infini x n'est infiniment petite que de l'ordre $\frac{1}{2}$; donc si l'on compte les espaces depuis l'asymptote AY, ils sont infinis, parce que l'espace compris entre cette asymptote & la branche infinie RS, est infini. Ainsi, il n'est pas possible d'assigner les espaces $APMS$ comptés depuis l'asymptote AY. Au contraire les espaces compris entre la branche BM & l'asymptote AZ, jusqu'à l'infini, ont une valeur finie, parce qu'après un intervalle assez court, la branche s'approche très-rapidement de son asymptote, ensorte que l'espace infiniment long $KLMOZ$ a pour expression $\frac{a^3}{b}$, & $PMOZ = \frac{a^3}{x}$; & par conséquent $KLMP = \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$. D'où il suit, que quoiqu'on ne puisse pas avoir les espaces comptés depuis AY, on peut néanmoins avoir les espaces $KLMP$ comptés depuis un point K pris si près qu'on le voudra de AY.

Prenons pour troisieme exemple, la courbe qui auroit pour équation $y = \frac{aax - x^3}{aa}$, & que l'on reconnoîtra avoir la figure marquée (*Fig.* 37), en donnant consécutivement à x des valeurs arbitraires, & une valeur déterminée à a.

On aura donc $ydx = \frac{aaxdx - x^3dx}{aa}$, dont l'intégrale (83) est $\int ydx$ ou $APM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + C$; & si l'on veut compter les espaces APM depuis le point A origine des x, il faut que cette intégrale devienne o avec x, ce qui fait voir que la constante C est zéro. Ensorte que l'espace indéfini APM est simplement $\frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$. Et en général, si la valeur de y n'est composée, comme dans le cas présent, que de monomes, on aura toujours aisément la surface (85).

96. Nous avons vu (*Alg.* 413) comment, à l'aide de l'Algébre, on pouvoit

imiter un contour quelconque *ABCD* (*Fig.* 38), en faisant passer par un certain nombre *A*,*B*,*C*,*D*,de ses points, une ligne courbe dont l'équation auroit cette forme $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ &c : & comment on devoit déterminer a, b, c, &c. pour cet effet. Supposons maintenant que l'on voulût trouver la surface *ABCDLK*, quoiqu'on n'ait pas l'équation de la courbe *ABCD*.

On feroit passer (*Alg.* 413) par un certain nombre de points *A*, *B*, *C*, *D* une courbe *AeBfCgD*, qui se confondroit avec celle-là, d'autant plus intimement, qu'on prendroit plus de points ; & comme alors on auroit l'équation de cette derniere, on pourroit la regarder comme l'équation de la courbe *ABCD*, du moins dans l'étendue *ABCD* ; mais cette équation étant alors de cette forme $y = a + bx + cx^2 + ex^3$, &c. dont tous les termes son monomes, on auroit aisément la surface, selon ce qui vient d'être dit. On peut appliquer ceci à la mesure des surfaces des coupes des vaisseaux.

En général, on peut l'appliquer à trouver par approximation, les surfaces des courbes, & l'intégrale approchée des quantités qu'on ne peut pas intégrer exactement. En effet toute différentielle peut être regardée comme exprimant l'élément de la surface d'une courbe, dont l'ordonnée seroit égale à tout ce que dx multiplie ; par exemple, $dx\sqrt{aa + xx}$ est l'élément de la surface de la courbe qui auroit pour ordonnée

$y = \sqrt{aa+xx}$. Ainſi calculant par le moyen de cette équation quelques valeurs de y pour quelques valeurs de x, & faiſant paſſer par les extrémités de ces ordonnées, une courbe de la nature de celles dont il vient d'être queſtion, la ſurface de celles-ci étant trouvée ſeroit la valeur approchée de l'intégrale de $dx\sqrt{aa+xx}$, dans l'étendue qu'on auroit donnée à x.

Prenons encore un exemple. Ce ſera celui de la ſurface de la courbe, qui a pour équation $a^5yy = x^4(a^3 - x^3)$; cette équation donne $y = \pm\sqrt{\frac{x^4(a^3-x^3)}{a^5}} = \pm\frac{x^2}{a^2\sqrt{a}}\sqrt{a^3-x^3}$; donc (en ne prenant qu'une des valeurs de y), $y\,dx = \frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a}}\sqrt{a^3-x^3} = \frac{x^2\,dx}{a^2\sqrt{a}}(a^3-x^3)^{\frac{1}{2}}$; or cette quantité eſt intégrable (89) parce que $x^2\,dx$ eſt la différentielle du terme x^3 qui eſt dans le binome, diviſée par le nombre conſtant 3. Donc (89) on a. . . . .
$\int ydx = \frac{x^2dx(a^3-x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}a^2\sqrt{a}.-3x^2dx} + C = -\frac{2(a^3-x^3)^{\frac{3}{2}}}{9a^2\sqrt{a}} + C.$
A l'égard de la conſtante C, on la déterminera en décidant de quel point on veut compter la ſurface.

On peut encore trouver la ſurface des courbes en la décompoſant en triangles, au lieu de trapèzes. Par exemple, on pourroit trouver la ſurface du ſegment ANQ (*Fig.* 34), en le conſidérant comme compoſé d'une infinité de triangles infiniment petits, tels que AQq. Ce triangle auroit pour expreſſion $\frac{Aq\times Qt}{2}$, en abaiſſant la perpendiculaire Qt, ou (ce qui revient au même) en décrivant du centre A & du rayon AQ l'arc infiniment petit Qt. Alors nommant AQ, t, & l'arc Qt, dx; on auroit $Aq = t + dt$, & par conſéquent le triangle AQq $= \frac{t+dt}{2}dx = \frac{tdx}{2} + \frac{dtdx}{2}$, c'eſt-à-dire, $= \frac{tdx}{2}$, en rejettant le terme $\frac{dtdx}{2}$ pour exprimer que dx & dt ſont infiniment petits. Il ne s'agiroit plus que d'avoir l'équation entre x & t, pour pouvoir mettre au lieu de t ſa valeur en x, & intégrer.

Application à la rectification des lignes courbes.

97. RECTIFIER une ligne courbe, c'eſt déterminer ſa longueur, ou aſſigner une ligne droite qui lui ſoit égale, ou égale à un arc propoſé de cette courbe. Voici comment on y parvient quand cela eſt poſſible.

En conſidérant toujours la courbe AM (*Fig.* 34), comme un polygone d'une infinité de côtés, le petit côté Mm peut être regardé comme différentielle de l'arc AM, parce que $Mm = Am - AM = d(AM)$. Or en menant Mr parallele à AP, on a $Mm = \sqrt{Mr^2 + rm^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; il ne s'agit donc que d'intégrer $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Pour cet effet on différenciera l'équation de la courbe, & en ayant tiré la valeur de dy exprimée en x & dx, ou celle de dx exprimée en y & dy, on la ſubſtituera dans $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ qui ne contiendra plus que des x & dx^2, ou des y & dy^2; on fera ſortir dx^2 ou dy^2, hors du radical (*Alg.* 111), & l'on intégrera.

Pour en donner un exemple, prenons parmi les paraboles généralement exprimées par $y^{m+n} = a^m x^n$, celle qui a pour équation particuliere $y^3 = ax^2$, nous en tirerons $x^2 = \frac{y^3}{a}$ & $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, donc $dx = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{a^{\frac{1}{2}}}$; & $dx^2 = \frac{9}{4}\frac{ydy^2}{a}$; donc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \ldots$ $\sqrt{dy^2 + \frac{9ydy^2}{4a}} = dy\sqrt{1 + \frac{9y}{4a}}$ (*Alg.* 111).

Or, cette quantité s'intégre aisément (90), puisque l'exposant de y hors du binome, est moindre d'une unité que dans le binome. On aura donc $\int dy\sqrt{1+\frac{9y}{4a}}$ ou $\int dy\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{dy\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}.\frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27}.\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

A l'égard de la constante C, voici comment on la déterminera. Si c'est depuis le point A, origine des y, que nous voulons compter les arcs AM, il faudra que l'intégrale, ou la valeur de l'arc AM, devienne zéro en même temps que y. Or lorsque $y = 0$ l'intégrale se réduit à $\frac{8a}{27} + (1)^{\frac{3}{2}} + C$ ou $\frac{8a}{27} + C$; On a donc $\frac{8a}{27} + C = 0$; donc $C = -\frac{8a}{27}$. Donc la longueur de l'arc quelconque AM compté depuis le sommet A, est $\frac{8a}{e7}\left(1+\frac{9y}{a4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Si l'on veut ſavoir quelles ſont les autres paraboles que l'on peut rectifier, on le trouvera en cette maniere ; l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$, qui appartient à ces courbes, donne $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$. Faiſons, pour ſimplifier, $\frac{m}{m+n} = k$ & $\frac{n}{m+n} = l$; nous aurons $y = a^k x^l$; donc $dy = l a^k x^{l-1} dx$, & $dy^2 = l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2$; donc $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2} = dx \sqrt{1 + l^2 a^{2k} x^{2l-2}}$; quantité qui n'eſt intégrable dans cet état. que lorſque $2l - 2 = 1$. Mais ſi l'on change le ſigne de l'expoſant de x, ſous le radical, on aura $x^{l-1} dx \sqrt{x^{-2l+2} + l^2 a^{2k}}$, qui (91) eſt intégrable ſi $l - 1$ augmenté d'une unité & diviſé par $-2l + 2$, donne un nombre entier poſitif ; c'eſt-à-dire, ſi $\frac{l}{-2l+2} = t$, t étant un nombre entier poſitif. De-là on tire $l = -2tl + 2t$, & $l = \frac{2t}{2t+1}$; or $l = \frac{n}{m+n}$, donc $\frac{n}{m+n} = \frac{2t}{2t+1}$; d'où $m = \frac{n}{2t}$; ainſi les paraboles qui peuvent être rectifiées, ſont celles qui ſont compriſes dans l'équation $y^{\frac{2t+1n}{2t}} = a^{\frac{n}{2t}} x^n$, ou (en extrayant la racine du degré n) $y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}} x$, t étant un nombre entier poſitif quelconque.

Application aux Surfaces courbes.

98. Nous nous bornerons aux ſurfaces des ſolides de révolution. On appelle ainſi les ſolides que l'on conçoit engendrés par le mouvement d'une courbe *A M* (*Fig.* 39),

qui tourneroit autour d'une ligne droite AP.

Il faut concevoir que tandis que la courbe AM tourne autour de AP le petit côté Mm décrit une zône, ou portion de cône tronqué, qui eſt l'élément de la ſurface, & qui (*Géom.* 220) eſt égal au produit de Mm par la circonférence qui auroit pour rayon la perpendiculaire menée du milieu de Mm ſur AP, ou (ce qui revient au même, puiſque Mm eſt infiniment petit) par la circonférence qui auroit pour rayon PM. Or l'arc $Mm = \sqrt{dx^2 \times dy^2}$; & ſi l'on repréſente par $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle, on aura $r : c :: y$ eſt à la circonférence qui a pour rayon PM, laquelle ſera $\frac{cy}{r}$; on a donc $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 \times dy^2}$ pour l'élément de la ſurface des ſolides de révolution.

99. Pour appliquer ceci, ſuppoſons qu'on demande la ſurface de la ſphere. Le cercle générateur AMB (*Fig.* 40) a pour équation $yy = ax - xx$, en nommant AP, x; & PM, y. Donc, $y = \sqrt{ax - xx}$ & . . . . . $dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$ donc $dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}$; donc $\sqrt{dx^2 \times dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}}$ $= \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax - xx}}$. Subſtituant donc dans la formule $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2 + dy^2}$ pour y & $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ leurs

valeurs, on aura $\frac{G\sqrt{ax-xx.}}{r} \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$ qui se réduit à $\frac{\frac{1}{2}acdx}{r}$, dont l'intégrale est $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}+C$, ou simplement $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$ en comptant la surface depuis le point A. Or $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, ou $\frac{\frac{1}{2}ac}{r}. x$ exprime la surface du cylindre qui auroit pour base un grand cercle de la sphere, & x pour hauteur; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qui a été démontré (*Géom.* 222.)

100. Si l'on veut avoir la surface du paraboloïde, (c'est ainsi qu'on appelle le solide engendré par la révolution de la parabole AM (*Fig.* 39), autour de son axe); on a pour équation $yy=px$; donc $x=\frac{yy}{p}$, $dx=\frac{2ydy}{p}$, & $dx^2=\frac{4y^2\,dy^2}{pp}$; donc $\sqrt{dx^2+dy^2}$ $=\sqrt{dy^2+\frac{4y^2\,dy^2}{pp}}=dy\sqrt{1+\frac{4y^2}{pp}}$; donc $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ devient ici, $\frac{cydy}{r}\sqrt{1+\frac{4y^2}{pp}}$ quantité qui est intégrable (90), & dont l'intégrale est $\frac{\frac{\frac{cydy}{r}\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}.8ydy}}{pp}+C$, qui se réduit à $\frac{ppc}{12r}\left(1+\frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}}+C$. Or pour que cette quantité exprime la surface comptée depuis le

le ſommet A, il faut qu'elle ſoit zéro, quand $y = 0$; mais, dans ce cas, elle devient $\frac{ppc}{12r}(1)^{\frac{3}{2}} + C$, ou $\frac{ppc}{12r} + C$; on a donc $\frac{ppc}{12r} + C = 0$; c'eſt-à-dire, $C = -\frac{ppc}{12r}$; donc la ſurface du paraboloïde indéfini $AMLA$ eſt $\frac{ppc}{12r}\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}$.

Application à la meſure des Solidités.

101. POUR meſurer la ſolidité des corps, on peut les imaginer compoſés de tranches infiniment minces & paralleles entr'elles; ou bien les imaginer compoſés d'une infinité de pyramides, dont les ſommes ſe réuniſſent en un même point. Lorſqu'on ſe les repréſente comme compoſés de tranches infiniment minces, & paralleles entr'elles, la différence des deux ſurfaces oppoſées qui terminent chaque tranche, eſt infiniment petite, & par conſéquent on doit l'omettre dans le calcul, ſi l'on veut exprimer que cette tranche eſt infiniment mince. De-là il ſuit qu'on doit prendre pour expreſſion de la ſolidité de cette tranche, le produit de l'une de ſes deux baſes oppoſées, par ſa hauteur infiniment petite. Par exemple, ſi je

considere la pyramide $SABC$ (*Fig.* 14) comme composée de tranches infiniment minces, telles que $abcdef$; je puis prendre pour mesure de cette tranche, le produit de la surface abc ou de la surface def par l'épaisseur de cette tranche.

De même, si je considere le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe AM, autour de la droite AP (*Fig.* 39), si je le considere comme composé de tranches paralleles entr'elles & infiniment minces, je dois prendre, pour mesure de chaque tranche, le produit de la surface du cercle qui a pour rayon PM, par l'épaisseur Pp.

Ce principe posé, voici comment on évaluera la solidité de tout le corps. On considérera chaque tranche comme étant la différentielle du solide, parce qu'en effet la tranche $MmlL$ est $= AmlA - AMLA$ $= d(AMLA)$; & ayant déterminé l'expression algébrique de cette tranche, on l'intégrera.

Par exemple, s'il s'agit de la pyramide $SABC$: supposant que la surface ABC de sa base, est égale à la quantité connue bb, & sa hauteur $ST = h$, on représentera par x la distance St d'une tranche quelconque ; ce qui donnera dx pour l'épaisseur de cette tranche. Quant à la surface abc, on la trouvera (*Géom.* 201) par cette proportion $ST^2 : St^2 :: ABC : abc$; c'est-à-dire, $hh : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{hh}$; ainsi la solidité de la tranche sera $\frac{bbxxdx}{hh}$, dont l'intégrale est $\frac{bbx^3}{3hh} + C$, ou simplement $\frac{bbx^3}{3hh}$, si l'on compte la solidité depuis le sommet S. Cette quantité qui exprime la solidité de la portion pyramidale quelconque $Sabc$, est la même chose que $\frac{bbxx}{hh} \times \frac{x}{3}$, qui n'est autre chose que $abc \times \frac{St}{3}$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (*Géom.* 240).

102. Quant aux solides de révolution, on peut avoir d'une maniere générale, l'expression de la tranche élémentaire, ou différentielle. En effet, supposant que $r : c$ marque le rapport du rayon à la circonférence, on aura la circonférence qui a pour rayon PM (*Fig.* 39) ou y, en faisant cette proportion $r : c :: y : \frac{cy}{r}$; si l'on multiplie cette valeur $\frac{cy}{r}$ de la circonférence qui a pour rayon PM, par $\frac{1}{2}y$ moitié du rayon, on a $\frac{cy^2}{2r}$ pour la surface, laquelle étant multipliée par l'épaisseur Pp ou dx, donne $\frac{cy^2dx}{2r}$ pour l'expression de l'élément de la solidité de tout solide de révolution. Pour en faire

ufage dans chaque cas particulier, il n'y aura autre chofe à faire, que de mettre, au lieu de y, fa valeur en x tirée de l'équation de la courbe génératrice AM, & intégrer.

103. Prenons, pour exemple, le fphéroïde engendré par la révolution de l'ellipfe autour de fon grand axe (*Fig.* 42). L'équation de l'ellipfe eft $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, en nommant AP, x; PM, y; & les axes AB & Dd, a & b. La formule $\frac{cy^2dx}{2r}$, devient donc $\frac{cbb}{2raa}dx(ax - xx)$, ou $\frac{cbb}{2raa}.(axdx - x^2dx)$, dont l'intégrale eft $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$, ou fimplement $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ fi l'on compte la folidité depuis le point A.

Pour avoir le fphéroïde entier, on fuppofera $x = AB = a$, & l'on aura $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right)$ qui fe réduit à $\frac{cabb}{12r}$, qui eft la même chofe que $\frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3}a$, ou que $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$, or $\frac{cbb}{8r}$ exprime la furface du cercle qui a b ou Dd pour diametre; & $\frac{cbb}{8r} \times a$ exprimeroit, par conféquent, la folidité du cylindre circonfcrit à l'ellipfoïde; donc puifque la folidité de l'ellipfoïde eft ici $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$, il faut en conclure que la folidité de l'ellipfoïde eft les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonfcrit. Et comme la fphere n'eft autre chofe qu'un ellipfoïde dont les deux axes font égaux, la fphere eft donc auffi les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonfcrit, ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (*Géom.* 246).

104. Si l'on vouloit avoir la folidité comptée depuis un point déterminé K, tel que $AK = e$; alors on prendroit l'intégrale générale $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$; & puifqu'on veut que la folidité commence au point K, il faut que cette intégrale devienne o en ce même point, c'eft-à-dire, lorfque $x = e$; or dans ce cas, elle devient $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C$; donc $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C = 0$, & par conféquent $C = -\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$; ainfi la folidité, comptée depuis le point K, a pour expreffion $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{cbb}{2raa}.\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$. C'eft-là l'expreffion d'une tranche de fphéroïde elliptique comprife entre deux plans paralleles, auxquels l'axe eft perpendiculaire, & dont la diftance eft $= x - e$.

On peut, par cette formule, calculer la folidité, & par conféquent la pefanteur des mâts & des vergues des vaiffeaux, parce que, ſelon ce que nous avons dit (*Alg.* 305), ce ſont des portions de ſphéroïde elliptique. Cette même formule peut ſervir auſſi à meſurer la capacité des tonneaux, dont la ſurface extérieure pourroit être regardée comme portion d'un pareil ſphéroïde.

105. Prenons, pour 2d exemple, le paraboloïde (*Fig.* 39). L'équation de la parabole eſt $yy = px$; ainſi la formule $\frac{cy^2 dx}{2r}$ devient $\frac{cpx\,dx}{2r}$, dont l'intégrale eſt $\frac{cpx^2}{4r} + C$, ou $\frac{cpx}{2r} \times \frac{x}{2} + C$; ou (en mettant pour px, ſa valeur yy). $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Si l'on veut le ſolide, à compter du point A; alors, comme ce ſolide eſt zéro, quand x eſt zéro, la conſtante C doit être zéro, & la ſolidité ſe réduit à $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; or $\frac{cyy}{2r}$ exprime la ſurface du cercle qui auroit PM pour rayon, ou la baſe du paraboloïde $AMLA$; donc le paraboloïde eſt la moitié du produit de ſa baſe, par ſa hauteur x; donc il eſt la moitié du cylindre de même baſe & de même hauteur.

Si l'on veut compter la ſolidité depuis un point K connu, & tel que $AK = e$; alors la ſolidité devant être zéro au point K, c'eſt-à-dire, quand $x = e$, l'intégrale générale doit être zéro dans ce même cas; c'eſt-à-dire, que

$\frac{cpx^2}{4r} + C$, devenant $\frac{cpe^2}{4r} + C$, doit être o; donc $\frac{cpe^2}{4r} + C = 0$; & par conséquent $C = -\frac{cpe^2}{4r}$; donc la solidité d'une tranche de paraboloïde, comprise entre deux plans paralleles dont les distances au sommet sont x & e, est $\frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpe^2}{4r}$. Ceci peut servir à toiser l'exacavation des mines.

106. On peut prendre encore, pour exemple, l'hyperboloïde, ou le solide engendré par la révolution de l'hyperbole autour de l'un de ses axes. On peut prendre aussi l'ellipsoïde engendré par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe, & que l'on appelle *Ellipsoïde applati*; on nomme au contraire *Ellipsoïde allongé* celui qui est engendré par la révolution autour du grand axe. On trouvera de même, que l'ellipsoïde applati est les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui lui seroit circonscrit; c'est-à-dire, que a & b étant le grand & le petit axe de l'ellipse génératrice, le sphéroïde allongé a pour solidité $\frac{cabb}{12r}$, & le sphéroïde applati, a pour solidité $\frac{caab}{12r}$; ainsi le sphéroïde allongé, est au sphéroïde applati : : $\frac{cabb}{12r} : \frac{caab}{12r} : : b : a$, comme le petit axe est au grand axe.

En voilà assez pour les solides de révolution.

Mais pour accoutumer les commençants à étendre l'usage de ces méthodes, nous allons les appliquer encore à deux exemples.

107. Dans le premier, il s'agit de trouver la solidité d'un onglet cylindrique formé en coupant un cylindre par un plan oblique à sa base, & que (pour plus de simplicité) nous supposerons passer par le centre : c'est le solide $ADBE$ qu'on voit représenté (*Fig.* 43).

Si l'on conçoit ce solide coupé par des plans paralleles, infiniment près, & perpendiculaires à la base AEB (*Fig.* 44), les sections seront des triangles semblables dont les surfaces seront, par conséquent, comme les quarrés de leurs côtés homologues. Ainsi nommant r le rayon CE de la base, h la hauteur DE, & y la base PM du triangle PMN on aura $CED : PMN :: rr : yy$; or $CED = \frac{rh}{2}$; donc $PMN = \frac{rhyy}{2rr} = \frac{hyy}{2r}$; donc nommant AP, x, ce qui donne dx pour l'épaisseur Pp de la tranche comprise entre deux plans voisins, on aura $\frac{hyydx}{2r}$ pour cette tranche. Or y est l'ordonnée du cercle qui sert de base; & l'on a par conséquent $yy = 2rx - xx$. La tranche élémentaire devient donc $\frac{hdx.(2rx-xx)}{2r}$, ou $\frac{h}{2r}$. $(2rxdx-xxdx)$, dont l'intégrale, à compter du point A, eſt $\frac{h}{2r}\left(rx^2-\frac{x^3}{3}\right)$. Donc pour avoir tout le ſolide, il n'y a qu'à ſuppoſer $x=2r$, ce qui donne $\frac{h}{2r}\times\left(4r^3-\frac{8r^3}{3}\right)$, ou $\frac{2}{3}hr^2$ ou $\frac{hr}{2}\times\frac{4}{3}r$, ou $CED\times\frac{4}{3}AC$, ou enfin $CED\times\frac{2}{3}AB$; c'eſt-à-dire, les deux tiers du priſme qui auroit le triangle CED pour baſe, & le diametre AB pour hauteur. Ceci peut ſervir dans un cas du Toiſé des fortifications.

108. Pour ſecond exemple, nous chercherons la ſolidité d'une tranche d'ellipſoïde allongé, compriſe entre deux plans paralleles entr'eux & au grand axe.

Avant de procéder à cette recherche, il faut démontrer que les coupes de l'ellipſoïde faites parallélement au grand axe, ſont des ellipſes ſemblables à l'ellipſe génératrice du ſolide, c'eſt-à-dire, dont les axes ont le même rapport entr'eux que ceux de cette ellipſe.

Pour cet effet, concevons l'ellipſoïde coupé par un plan, que (pour fixer les idées) nous ſuppoſons vertical, & paſſant par le grand axe AB (*Fig.* 45); la ſection ſera l'ellipſe $ABDE$ égale à l'ellipſe génératrice. Concevons aussi l'ellipsoïde coupé par trois autres plans, dont deux verticaux & le troisieme horizontal. Que DE petit axe de l'ellipse & sa parallele MN soient les sections des deux premieres avec le plan $ADBE$, & ST celle du troisieme avec le même plan $ADBE$. Cela posé, je dis que la coupe de l'ellipsoïde par le plan représenté par ST, est une ellipse semblable à $ADBE$.

Concevons qu'aux points O & R on ait élevé des perpendiculaires au plan $ADBE$, & qui rencontrent la surface de l'ellipsoïde. Ces perpendiculaires seront, en même temps, ordonnées de la coupe faite par ST, & des sections ou coupes circulaires faites par MN & DE. Or par cette derniere raison, on doit avoir (en nommant z la perpendiculaire élevée au point R, & t la perpendiculaire élevée au point O), on doit avoir $zz = DR \times RE$, & $tt = MO \times ON$. Mais en nommant $CD = \frac{1}{2}b$, $PM = y$, $CA = \frac{1}{2}a$, & $CR = OP = u$, on a $DR = \frac{1}{2}b + u$, $RE = \frac{1}{2}b - u$, $MO = y + u$ & $ON = y - u$, ensorte que $DR \times RE = \frac{1}{4}bb - uu$ & $MO \times ON = yy - uu$; Donc $zz = \frac{1}{4}bb - uu$ & $tt = yy - uu$. Mais par la nature de l'ellipse (*Alg.* 307) on a $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - xx)$ en nommant CP, x. Et nommant k l'ordonnée SR au petit axe, on a (*Alg.* 304) $kk = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - uu)$, d'où l'on tire $uu = \frac{1}{4}bb - \frac{bbkk}{aa}$; substituant ces valeurs de uu & de yy, dans celles de zz & de tt, on a $zz = \frac{bbkk}{aa}$, & $tt = \frac{bbkk}{aa} - \frac{bbxx}{aa}$, d'où il est évident que $zz : tt :: \frac{bbkk}{aa} : \frac{bbkk}{aa} - \frac{bbxx}{aa} ::$ $kk : kk - xx :: \overline{SR}^2$ ou $SR \times RT : SO \times OT$; c'est-à-dire, le quarré de l'ordonnée z qui répond au point R, est au quarré de celle, t, qui répond au point O, comme le produit des deux abscisses qui répondent à la premiere, est au produit des abscisses qui répondent à la seconde; la coupe faite par ST, est donc une ellipse.

D'ailleurs l'équation $zz = \frac{bbkk}{aa}$, ou $z = \frac{bk}{a}$, donne $z : k :: b : a$; or z ou l'ordonnée qui répond au point R est la plus grande demi-largeur, ou le demi-petit axe de cette ellipse, & k ou SR, en est la plus grande demi-longueur, ou le demi-grand axe; les deux axes de cette ellipse, sont donc en même rapport que ceux de l'ellipse génératrice; & puisque rien ne détermine, dans tout ce raisonnement, la grandeur de la distance CR à laquelle on suppose cette coupe faite, la même chose a donc lieu pour toute autre coupe parallele à AB.

Cela posé, si l'on veut avoir la solidité d'une tranche quelconque de l'ellipsoïde, comprise entre deux plans paralleles représentés par AB & ST, on représentera par S la surface de l'ellipse génératrice ; & puisque l'ellipse dont ST est le grand axe, est semblable à celle-là, on aura la surface de celle-ci, par cette proportion $\frac{1}{4}aa : kk :: S : \frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}$; multipliant cette surface par l'épaisseur infiniment petite Rr, ou du, de la tranche élémentaire, on aura $\frac{Skkdu}{\frac{1}{4}aa}$, pour la valeur de cette tranche ; or selon ce que nous venons de dire ci-dessus, on a $kk = \frac{aa}{bb} \times (\frac{1}{4}bb - uu)$; donc la tranche élémentaire sera $\frac{Sdu(\frac{1}{4}bb-uu)}{\frac{1}{4}bb}$ ou $\frac{S}{\frac{1}{4}bb} \cdot (\frac{1}{4}bbdu - uudu)$, dont l'intégrale est $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbu - \frac{1}{3}u^3)$, si l'on veut compter depuis le centre C. Mais si l'on veut compter depuis un autre point K, l'intégrale sera $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbu - \frac{1}{3}u^3) + C$, C étant une constante convenable. Pour la déterminer, on nommera CK, e ; alors il faut que l'intégrale soit zéro au point K où $u = e$; on aura donc, $\frac{S}{\frac{1}{4}bb} \cdot (\frac{1}{4}bbe - \frac{1}{3}e^3) + C = 0$, & par conséquent $C = -\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbe - \frac{1}{3}e^3)$, donc, toute tranche d'ellipſoïde allongé, compriſe entre deux plans paralleles au grand axe, a pour expreſſion $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbu-\frac{1}{3}u^3)$ $-\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbe-\frac{1}{3}e^3)$, ou ſimplement $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}\times$ $(\frac{1}{4}bbu-\frac{1}{4}bbe-\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{3}e^3)$. Or $\frac{1}{4}bbu-$ $\frac{1}{4}bbe$, eſt la même choſe que $\frac{1}{4}bb(u-e)$: Pareillement $\frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}u^3$ eſt la même choſe que que $\frac{e-u}{3}(ee+eu+uu)$. D'ailleurs $u-e$ eſt la diſtance des deux plans paralleles, ou la hauteur de la tranche qu'ils comprennent; donc, ſi on fait $u-e=h$, en appellant h cette hauteur, & qu'on ſubſtitue pour e ſa valeur $u-h$ tirée de cette équation, on aura (après réduction faite) $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbh-huu$ $+h^2u-\frac{h^3}{3})$, ou $\frac{Sh}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bb-uu)+\frac{Sh^2}{\frac{1}{4}bb}$ $\left(u-\frac{h}{3}\right)$; or nous avons eu, ci-deſſus, $kk=\frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb-uu)$, & par conſéquent $\frac{1}{4}bb-uu=\frac{bbkk}{aa}$. La valeur de la tranche ſolide ſe change donc en $\frac{Shkk}{\frac{1}{4}aa}+\frac{Sh^2}{\frac{1}{4}bb}\left(u-\frac{h}{3}\right)$. Mais nous avons vu que $\frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}$ exprime la ſurface de la coupe faite par ST, ou de la coupe inférieure; donc en nommant s cette ſurface, on aura $sh+\frac{Sh^2}{\frac{1}{4}bb}\left(a-\frac{h}{3}\right)$; enfin ſi on nom.

me s' la ſurface de la coupe faite par LK & l ſa demi-largeur, ou ſon demi-petit axe, on aura, à cauſe que toutes les coupes ſont ſemblables, $\frac{1}{4}bb : ll :: S : s'$; donc $S = \frac{1}{4}\frac{bbs'}{ll}$; ce qui donnera pour derniere expreſſion réduite, $sh + \frac{s'h^2}{ll} \times \left(u - \frac{h}{3}\right)$. C'eſt-à-dire, qu'il faut 1°, multiplier la ſurface de la plus petite coupe, par la hauteur de la tranche; 2°, multiplier celle de la plus grande coupe par le rapport $\frac{h^2}{l^2}$ du quarré de la hauteur de la tranche au quarré de la demi-largeur de la coupe ſupérieure, & par la diſtance du centre juſqu'à la coupe inférieure, moins le tiers de la hauteur de la tranche.

Cette regle peut être appliquée utilement à la meſure de la ſolidité de la partie de la carène que la charge fait plonger dans les vaiſſeaux, lorſque la figure de cette partie peut être comparée à une portion d'ellipſoïde. s repréſentera la coupe faite à fleur d'eau, pour le vaiſſeau hors de charge; s' ſa coupe lorſqu'il eſt en charge; h la diſtance des deux coupes; l la plus grande largeur de s', & enfin u la diſtance de s juſqu'à la plus grande coupe horiſontale du ſphéroïde.

Quant à la manière de meſurer s & s', on obſervera que l'une de ces ſurfaces ſe détermine par l'autre, puiſqu'appartenant à des ellipſes ſemblables, elles doivent être entr'elles comme les quarrés de leurs grands axes ou de leurs petits axes. Il ne s'agit donc que de ſavoir comment on peut déterminer l'une des deux. Or, nous verrons dans peu, que la ſurface d'une ellipſe, eſt à celle du cercle qui auroit pour diametre le grand axe de cette ellipſe, comme le petit axe eſt au grand axe; ainſi comme on ſait évaluer la ſurface du cercle, (du moins auſſi près qu'on le juge à propos), on déterminera toujours facilement celle d'une ellipſe dont les axes ſeront connus.

De l'intégration des quantités qui renferment des Sinus & Coſinus.

109. Nous avons vu (22) que $d\,(\sin z) = dz \cos z$, & que $d\,(\cos z) = -dz \sin z$; donc réciproquement, l'intégrale de $dz \cos z$ ſera $\sin z$, ou plus généralement $\sin z + C$, qui a la même différentielle. De même l'intégrale de $-dz \sin z$ ſera $\cos z + C$.

Si l'on avoit $dz \cos 3z$, on l'écriroit ainſi $\frac{3\,dz \cos 3z}{3}$, & alors l'intégrale ſeroit $\frac{\sin 3z}{3} + C$. De même l'intégrale de $dz \sin 3z$, ſe trouveroit en écrivant ainſi $\frac{-3dz \sin 3z}{-3}$; & alors l'intégrale eſt $\frac{\cos 3z}{-3} + C$.

En général, $\int dz \sin mz$ (m étant un nombre conſtant), ſe change en $\frac{\int -m\,dz \sin mz}{-m}$, & devient $\frac{-\cos mz}{m} + C$.

Si l'on avoit $(\sin z)^n\, dz \cos z$, on remarqueroit que cette quantité est la même chose que $(\sin z)^n\, d(\sin z)$; or en regardant $\sin z$ comme une simple variable, on intégre par la regle fondamentale, & l'on a $\frac{(\sin z)^{n+1}}{n+1} + C$.

Si la différentielle proposée est $(\sin m z)^n\, dz \cos mz$, on écrira $\frac{(\sin m z)^n\, m\, dz \cos m z}{m}$ qui revient à $\frac{(\sin m z)^n\, d(\sin m z)}{m}$ dont l'intégrale est $\frac{(\sin m z)^{n+1}}{m(n+1)}$

Pareillement, pour avoir l'intégrale de $(\cos m z)^n\, dz \sin mz$; on écrira $\frac{(\cos m z)^n \cdot -m\, dz \sin m z}{-m}$, qui a pour intégrale $\frac{(\cos m z)^{n+1}}{-m(n+1)} + C$.

Si l'on avoit à intégrer $dz \sin pz \cos qz$; alors, selon ce qui a été enseigné (*Alg.* 418), on changeroit $\sin pz \cos qz$ en $\frac{1}{2}\sin(pz+qz) + \frac{1}{2}(\sin(pz-qz)$, ou $\frac{1}{2}\sin(p+q)z + \frac{1}{2}\sin(p-q)z$; ainsi on auroit à intégrer $\frac{1}{2}dz \sin(p+q)z + \frac{1}{2}dz \sin(p-q)z$ qui étant écrit ainsi.. $\frac{1}{2}\frac{(p+q)dz \sin(p+q)z}{p+q} + \frac{1}{2}\frac{(p-q)dz \sin(p-q)z}{(p-q)}$, a évidemment pour intégrale $-\frac{\frac{1}{2}\cos(p+q)z}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\cos(p-q)z}{p-q} + C$.

On intégrera de même $dz \sin pz \cos qz \sin rz$, &c. en convertissant ces produits en sinus ou cosinus de la somme & de la différence des arcs pz, qz, rz, &c. (*Alg.* 418).

Si l'on avoit $dz(\sin z)^3$; on le changeroit en $dz \sin z\, (\sin z)^2$, or $(\sin z)^2$ ou $\sin z \times \sin z$ est (*Alg.* 418) $= \frac{1}{2}\cos(z-z) - \frac{1}{2}\cos(z+z) = \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$, parce que $\cos 0 = 1$; donc $\sin z(\sin z)^2 = \frac{1}{2}\sin z - \frac{1}{2}\sin z \times \cos 2z$. Donc $dz(\sin z)^3 = \frac{1}{2}dz \sin z - \frac{1}{2}dz \sin z \cos 2z$; on réduira donc $\sin z \cos 2z$, ainsi qu'on vient de le faire pour $\sin pz \cos qz$ & l'intégration sera facile. On voit donc comment on intégreroit $dz(\sin z)^n$, n étant un nombre entier positif. On s'y prendroit d'une maniere semblable pour $dz(\cos z)^n$. Donc on peut, par les mêmes principes que nous venons d'exposer, intégrer les quantités de cette forme $dz(\sin pz)^m(\cos qz)^n(\sin rz)^s$, &c. m, n, s, étant des nombres entiers positifs.

Enfin

Enfin, ces principes, ce qui a été enſeigné (*Alg.* 481), & ce que nous avons dit, ci-deſſus, ſur l'intégration des quantités, mettent en état d'intégrer les différentielles affectées de ſinus & de coſinus, lorſqu'elles ont une intégrale algébrique; & lorſqu'il y entre des tangentes, on les ramene aux différentielles de ſinus & coſinus, en obſervant que $tang\, z = \frac{ſin\, z}{coſ\, z}$.

De la maniere d'intégrer par approximation, & quelques uſages de cette Méthode.

110. CECI ne peut regarder les différentielles monomes : nous avons vu qu'elles s'intégroient toujours facilement. C'eſt donc pour les différentielles complexes qui échappent aux cas que nous avons examinés plus haut.

L'art d'intégrer par approximation, conſiſte à convertir la quantité propoſée, en une ſuite de monomes dont la valeur aille continuellement en diminuant; chaque terme s'integre alors aiſément, & il ſuffit d'en prendre un certain nombre, pour avoir une valeur ſuffiſante de l'intégrale.

La regle que nous avons donnée (*Alg.* 151) pour élever une quantité à une puiſſance propoſée, & qui s'applique également aux polynones, eſt le moyen que nous emploierons pour intégrer ainſi par approximation. En voici des exemples.

111. Proposons-nous de trouver la longueur d'un arc de cercle AM (*Fig.* 40), par le moyen de son sinus verse AP.

Supposant l'arc Mm infiniment petit, si l'on mene Mr parallele à AP, & le rayon CM; les triangles semblables CPM, Mrm, donneront $PM : CM :: Mr : Mm$. Or, nommant AP, x, le diametre AB, a, ou 1, (pour plus de simplicité); on aura $Mr = dx$, $CM = \frac{1}{2}$, & $PM = \sqrt{x - xx}$. Donc $\sqrt{x-xx} : \frac{1}{2} :: dx : Mm$; donc $Mm = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{x-xx}}$, & par conséquent $AM = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{x-xx}}$. Cette quantité ne peut être intégrée par les regles que nous avons données ci-devant; c'est pourquoi je la change en $\int \frac{\frac{1}{2}dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}}$ (*Alg.* 112), puis en $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ (*Alg.* 141). Je réduis $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, en série (*Alg.* 151); & je trouve, toute réduction faite, $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 +$ &c.; donc . . . . $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{9}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \text{&c.}) = \int (\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx + \text{&c.}) = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{5}{26}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \text{&c.} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \text{&c.}$

quantité à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce que lorſque $x = 0$, elle devient zéro, ainſi que cela doit être, puiſqu'alors l'arc *A M* qu'elle exprime, eſt zéro.

On peut, à cauſe du multiplicateur commun $x^{\frac{1}{2}}$, donner à la ſérie qui exprime l'arc *A M*, cette derniere forme. . . . . $x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{6}x + \frac{5}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3$ &c). Remarquons, maintenant, que le ſinus verſe x étant toujours plus petit que le diametre 1, (excepté lorſqu'il s'agit de la demi-circonférence), x eſt une fraction; que par conſéquent les valeurs des termes de la ſérie décroîtront d'autant plus, que le ſinus verſe de l'arc en queſtion ſera plus petit. Ainſi, ſi l'on vouloit, par exemple, la longueur de l'arc dont le ſinus verſe eſt la centieme partie du diametre, on auroit $x = \frac{1}{100}, = 0,01$, & par conſéquent $x^{\frac{1}{2}} = 0,1$; on auroit donc pour la valeur de cet arc $0,1(1 + \frac{0,01}{6} + 3\,\frac{(0,01)^2}{20} + \frac{5}{112}.(0,01)^3)$; & comme le terme ſuivant de cette ſérie feroit au moins cent fois plus petit que le dernier de ceux-ci, puiſque chacun eſt plus de cent fois plus petit que celui qui le précede, en examinant qu'elle eſt la valeur du terme $\frac{5}{112}.(0,01)^3$, nous pourrons, en prenant le centieme de cette valeur, juger du degré d'exactitude auquel nous aurons l'arc en nous en tenant à ces quatre premiers termes. Or $\frac{5}{112}(0,01)^3$, revient à $\frac{5}{112}$. $(0,000001) = \frac{0,000005}{112} = 0,0000000446$, dont la centieme partie est $0,000000000446$; donc nous pouvons, en toute sûreté, évaluer chaque terme de notre série jusqu'à 10 décimales, sans craindre que la valeur de l'arc qui en résultera, soit fautive d'une unité dans la neuvieme. Ainsi nous aurons $\frac{5}{112}(0,01)^3 = 0,0000000446$; $\frac{3}{40}(0,01)^2 = 0,0000075000$; $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$; donc la totalité de la série sera $0,1(1,0016742112)$, ou enfin $0,100167421$, en se bornant à 9 décimales; & l'on pourroit même en toute sûreté admettre la dixieme.

Telle est la valeur de l'arc dont le sinus verse est la centieme partie du rayon. Donc si l'on savoit combien de fois le nombre de degrés de cet arc est contenu dans 360°, en multipliant cette longueur, par ce nombre de fois, on auroit la longueur approchée de la circonférence. Mais c'est ce que l'on ne fait pas.

Comme nous savons (*Géom.* 271) que le sinus de 30° est la moitié du rayon, & que connoissant le sinus d'un arc, on peut aisément avoir son sinus verse (*Géom.* 270), on pourroit calculer le sinus verse de 30°, le subſtituer pour x dans la ſérie ci-deſſus, & alors multipliant le réſultat par 12, qui eſt le nombre de fois que 30° ſont dans 360°, on auroit la longueur approchée de la circonférence. Mais comme la ſérie ſeroit peu convergente, enſorte qu'il faudroit en calculer un aſſez grand nombre de termes, pour avoir une valeur un peu approchée de la circonférence, nous allons enſeigner un autre moyen qui nous ſervira de ſecond exemple de la Méthode d'approximation.

Menons la tangente AN (*Fig.* 46), la ſécante CMN & la ſécante infiniment voiſine Cmn; du centre C & du rayon CN, décrivons l'arc infiniment petit Nr, que l'on peut regarder comme une perpendiculaire ſur Cn. Le petit triangle rectangle Nrn ſera ſemblable au triangle rectangle CAn, parce qu'outre l'angle droit, ils ont un angle commun en n : il ſera donc auſſi ſemblable au triangle CAN qui differe infiniment peu de CAn; on aura donc $CN : CA :: Nn : Nr$, d'où $Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$; or les ſecteurs ſemblables CNr, CMm, donnent $CN : CM$ ou $CA ::$ Nr ou $\frac{CA \times Nn}{CN} : Mm$; donc $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2}$. Nommons donc AN, x; le rayon CA, a; nous aurons $Nn = dx$; & $CN = \sqrt{aa+xx}$;

donc la valeur de Mm deviendra $\frac{aadx}{aa+xx}$, c'eſt-à-dire, que $Mm = \frac{aadx}{aa+xx}$; donc $\int Mm$ ou $AM = \int \frac{aadx}{aa+xx}$. Cette quantité ne peut pas être intégrée exactement. Pour l'intégrer par approximation, il faut la mettre ſous cette forme $\int aadx\,(aa+xx)^{-1}$; alors ayant trouvé (*Alg.* 151) que $(aa+xx)^{-1}$ $= a^{-2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c.\right)$, on aura $\int aadx\,(aa+xx)^{-1}$. . . . .

$$= \int dx\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c.\right)$$

$$= \int\left(dx - \frac{x^2dx}{a^2} + \frac{x^4dx}{a^4} - \frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \&c.\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \&c. \;..$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \&c.\right)$$

Il reſte donc à ſavoir ſi nous connoiſſons quelque arc qui étant contenu, un nombre connu de fois, dans la circonférence, ait une tangente connue. Or l'arc de 45°. eſt dans ce cas, il eſt 8 fois dans la circonférence, & ſa tangente eſt égale au rayon (*Géom.* 272); donc ſuppoſant $x = a$, nous aurons pour la longueur de l'arc de 45°, la valeur de cette ſérie... $a\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c.\right)$ Mais comme les termes de cette ſérie décroiſſent encore fort lentement, il faut voir ſi nous ne pourrions pas décompoſer l'arc de 45° en deux autres arcs dont les tangentes fuſſent connues. Peu importe que le nombre de degrés de ces arcs ſoit connu ; pourvu qu'ils faſſent 45°, quand nous aurons calculé leurs longueurs par le moyen de leurs tangentes, en ajoutant ces longueurs nous aurons celle de l'arc de 45°. Comme ces arcs ſeront plus petits que 45°, leurs tangentes ſeront plus petites que le rayon, & par conſéquent la ſérie ſera plus convergente, & plus facile à calculer.

Or ce que nous avons dit (*Alg.* 416) nous fournit le moyen de trouver deux pareils arcs. En effet, nous avons vu que a & b étant deux arcs quelconques, on avoit $tang\,(a + b) = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\,tang\,b}$, en ſuppoſant le rayon $= 1$. Donc ſi nous ſuppoſons $a + b = 45^\circ$, auquel cas $tang\,(a + b) = 1$, nous aurons $\frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\,tang\,b} = 1$, équation d'où, par les regles ordinaires, on tire $tang\,b = \frac{1 - tang\,a}{1 + tang\,a}$. Prenons donc $tang\,a = \frac{1}{2}$; alors nous aurons $tang\,b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Nous n'avons donc qu'à calculer, par le moyen de la ſérie ci-deſſus, la longueur de l'arc dont la tangente x eſt $\frac{a}{2}$ ou la moitié du rayon; & la longueur de l'arc dont la tangente x eſt $\frac{a}{3}$; ces deux longueurs réunies formeront celle de l'arc de 45°. Or en mettant pour x, $\frac{a}{2}$, & enſuite $\frac{a}{3}$, on a . . . .

$$\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}-\frac{1}{7.2^6}+\frac{1}{9.2^8}-\frac{1}{11.2^{10}}+\frac{1}{13.2^{12}}\ \&c.\right.$$

$$\&\ \frac{a}{3}\left(1-\frac{1}{3.3^2}+\frac{1}{5.3^4}-\frac{1}{7.3^6}+\frac{1}{9.3^8}-\frac{1}{11.3^{10}}+\frac{1}{13.2^{12}}\ \&c.\right.$$

Si l'on veut avoir les valeurs de chacun de ces arcs, exprimées exactement juſqu'à la neuvieme décimale, il faut calculer les 15 premiers termes de la premiere, & les 10 premiers termes ſeulement de la ſeconde. Or ce calcul eſt fort aiſé à faire, en obſervant que dans la premiere, on peut calculer les termes conſécutifs, en formant d'abord une ſérie, dont chaque terme ſoit égal au précédent multiplié par $\frac{1}{2^2}$, c'eſt-à-dire, ſoit le $\frac{1}{4}$ du précédent : on multiplie enſuite cette ſérie terme à terme, par la ſérie $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, &c. enfin réuniſſant les termes de numéro pair entr'eux, & ceux de numéro impair, auſſi entr'eux, on retranchera la ſomme des premiers, de la ſomme des derniers, & on multipliera le reſte par $\frac{a}{2}$. Pareillement le calcul de la ſeconde, ſe réduit à former une ſérie, dont chaque terme ſoit formé du précédent multiplié par $\frac{1}{3^2}$ ou par $\frac{1}{9}$, c'est-à-dire, soit la neuvieme partie du précédent ; on multiplie ensuite cette série, terme à terme, par la série $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, &c ; & on opere ensuite comme pour la premiere, excepté qu'on multipliera le résultat par $\frac{a}{3}$ au lieu de $\frac{a}{2}$. Si l'on exécute cette opération en portant l'approximation jusqu'à 10 décimales, on aura pour la premiere série $\frac{a}{2}(0,9272952180)$, ou $a\,(0,4636476090)$; & pour la seconde, $\frac{a}{3}(0,9652516632)$ ou $a\,(0,3217505544)$; donc l'arc de 45°, qui est la somme de ces deux-là, sera $a\,(0,7853981634)$. Prenant donc le quadruple, pour avoir la demi-circonférence, on aura $a\,(3,1415926536)$; donc le rayon est à la demi-circonférence, (ou le diametre est à la circonférence) :: a : $a\,(3,1415926536)$ :: 1 : 3,1415926536, rapport qui ne differe pas d'une demi-unité décimale du dixieme ordre, de celui que nous avons donné (*Géom.* 152), & que l'on pourroit, très-facilement, trouver encore avec une beaucoup plus grande précision.

112. Pour troisieme exemple d'approximation, nous nous proposerons de trouver le logarithme d'un nombre quelconque. Mais,

avant tout, il faut ſe rappeller ce que nous avons déja dit ailleurs (27); ſavoir, que les logarithmes dont il s'agit ici, ne ſont pas ceux qu'on trouve dans les tables ordinaires. Mais ceux-là étant calculés il eſt aiſé d'en conclure les derniers, comme nous le verrons immédiatement après avoir enſeigné à calculer les premiers.

J'imagine le nombre propoſé, décompoſé en deux parties, & repréſenté par $a + x$; a étant la plus grande partie. Selon ce que nous avons dit (27), on aura $d\,log.(a + x) = \frac{dx}{a+x}$, quantité qui ne peut être intégrée algébriquement. Il faut donc la réduire en ſérie, & pour cet effet, la mettre ſous cette forme.... $dx\,(a + x)^{-1}$. Or (*Alg.* 151) on a $\overline{a+x}^{-1} = a^{-1}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}, \text{\&c.}\right) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$; donc, $d\,l\,(a + x) = dx\,(a + x)^{-1} = \left(\frac{dx}{a} - \frac{xdx}{a^2} + \frac{x^2dx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4}\ \text{\&c.}\right)$ donc en intégrant, on a $l\,(a + x) = \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{\&c.}\right) + C$. Pour déterminer la conſtante C, je remarque que cette équation devant avoir toujours lieu, quelque ſoit x, doit auſſi avoir lieu lorſque $x = 0$; or, dans ce dernier cas, elle ſe réduit à $la = C$; donc $C = la$; donc $l(a + x) = la +$

$\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}, \&c.\right)$. Connoiſſant donc le logarithme d'un ſeul nombre, on peut par cette ſérie, calculer le logarithme de tout autre nombre. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe $a = 10$, & $a + x = 11$; on aura $x = 1$, & par conſéquent $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$; d'où l'on trouvera $l\,11 = l\,10 + \left(0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} \&c.\right)$ qui fait connoître ce qu'on doit ajouter au logarithme de 10, pour avoir celui de 11.

Mais comme la ſérie générale que nous venons de trouver, n'eſt ſouvent pas aſſez convergente, voici une autre maniere de s'y prendre. Propoſons-nous de trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur ſoit plus grand que le dénominateur; nous verrons, dans peu, qu'on peut toujours réduire à cela, la recherche de tout logarithme.

Repréſentons par a la ſomme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & par x leur différence; alors (*Géom.* 301), nous aurons $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$ pour le numérateur, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$ pour le dénominateur; & par conſéquent $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$ pour la fraction; ou (en ſupprimant le facteur commun $\frac{1}{2}$) $\frac{a+x}{a-x}$ ſera cette fraction, & par conſéquent $l\,\frac{a+x}{a-x}$, ou

$l(a+x) - l(a-x)$ repréſentera ſon logarithme. Différencions maintenant, en regardant a comme conſtante, & x ſeule comme variable*; nous aurons (27) $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$ qui ſe réduit à $\frac{2adx}{aa-xx}$, ou $2adx(aa-xx)^{-1}$; réduiſons donc $(aa-xx)^{-1}$, en ſérie; & (*Alg.* 151) nous aurons $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}+\&c.\right)$; donc $2adx(aa-xx)^{-1} = 2a^{-1}dx\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}+\&c.\right) = 2\left(\frac{dx}{a}+\frac{x^2dx}{a^3}+\frac{x^4dx}{a^5}+\frac{x^6dx}{a^7}+\frac{x^8dx}{a^9}+\&c.\right)$. Donc $\int\frac{2adx}{aa-xx}$, ou $l\frac{a+x}{a-x} = 2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\frac{x^9}{9a^9}+\&c.\right) + C$. A l'égard de la conſtante C, nous déterminerons ſa valeur, comme ci-deſſus, en

* Quoique cette fraction doive repréſenter toute fraction propoſée, cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe regarder la ſomme a du numérateur & du dénominateur, comme conſtante, parce qu'il n'y a pas de fraction que l'on ne puiſſe préparer de manière à rendre la ſomme du numérateur & du dénominateur égale à tel nombre qu'on voudra. Par exemple, pour amener la fraction $\frac{3}{5}$ à avoir 12 pour la ſomme du numérateur & du dénominateur, il ſuffit, ayant multiplié les deux termes, par un même nombre n, ce qui donne $\frac{3n}{5n}$, de ſuppoſer $3n+5n$ ou $8n = 12$, d'où l'on tire $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, donc $\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, dont la ſomme du numérateur & du dénominateur eſt, en effet, 12.

examinant ce que devient l'équation, quand $x=0$. Or, alors elle se réduit à $l\frac{a}{a}=C$; donc $C=l\frac{a}{a}=l1=0$; on a donc tout simplement $l\frac{a+x}{a-x}=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\&c.\right)$ où l'on voit que chaque terme se forme du précédent, en multipliant celui-ci constamment par le quarré de $\frac{x}{a}$ ou du premier terme; puis on prend le premier, le $\frac{1}{3}$ du second, le $\frac{1}{5}$ du troisieme, &c. & l'on double la somme.

Appliquons à quelques exemples. Cherchons, par exemple, le logarithme de 2. Pour cet effet nous chercherons celui de la fraction $\frac{2}{1}$: nous aurons donc $a=3$, & $x=1$; donc, $\frac{x}{a}=\frac{1}{3}$, & $\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{9}$. Chaque terme sera donc très-facile à former, puisqu'il ne s'agit que de prendre la $\frac{1}{9}$ partie du terme précédent, pour avoir la suite $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^5}$, &c. ainsi nous aurons,

$\frac{x}{a}=0,333333333$. Donc $\frac{x}{a}=0,333333333$

$\frac{x^3}{a^3}=0,037037037$. . . . $\frac{x^3}{3a^3}=0,012345679$

$\frac{x^5}{a^5}=0,004115226$. . . . $\frac{x^5}{5a^5}=0,000823045$

$\frac{x^7}{a^7}=0,000457247$. . . . $\frac{x^7}{7a^7}=0,000065321$

$\frac{x^9}{a^9} = 0,000050805 \ldots \frac{x^9}{9a^9} = 0,000005645$

$\frac{x^{11}}{a^{11}} = 0,000005645 \ldots \frac{x^{11}}{11a^{11}} = 0,000000513$

$\frac{x^{13}}{a^{13}} = 0,000000627 \ldots \frac{x^{13}}{13a^{13}} = 0,000000048$

$\frac{x^{15}}{a^{15}} = 0,000000069 \ldots \frac{x^{15}}{15a^{15}} = 0,000000004$

donc la ſomme eſt. . . . 0, 346573588 ; & le double, qui doit être *log*. 2, eſt=0,693147176, qui, en ſe bornant à 8 décimales, (car pour répondre de la neuvieme, il auroit fallu pouſſer l'approximation plus loin) eſt 0, 69314718.

Puiſque 4 eſt le quarré de 2, & que 8 en eſt le cube, le double de ce logarithme ſera donc celui de 4 ; & le triple de ce même premier logarithme ſera celui de 8.

Pour avoir celui de 3, on peut calculer, de même, le logarithme de la fraction $\frac{4}{3}$, lequel étant retranché de celui de 4 donnera celui de 3, puiſque 3 eſt 4 diviſé par $\frac{4}{3}$, donc $l\,3 = l\,4 - l\,\frac{4}{3}$; mais on l'aura plus facilement, en calculant le logarithme de la fraction $\frac{8}{9}$, & le retranchant du logarithme de 8 que l'on connoît à préſent, le reſte ſera le logarithme de 9, dont la moitié ſera celui de 3. Ajoutant celui de 3 à celui de 2, on aura le logarithme de 6. Pour avoir celui de 5, on calculera d'abord celui de 10 en calculant celui de $\frac{10}{8}$, qui étant ajouté au logarithme de 8, donnera celui de 10. Retranchant, de ce dernier, le logarithme de 2, on aura celui de 5.

On voit par-là, ce qu'il y a à faire pour calculer tout autre logarithme. Mais il faut remarquer, que le calcul devient de plus en plus court, à mesure que le nombre devient plus grand, ensorte que dès qu'on a les logarithmes jusqu'à 10 seulement, on peut calculer les autres jusqu'à 100, sans employer plus de trois termes de la série, lorsqu'on se borne à 8 décimales : & lorsqu'on a passé le nombre 100, les deux premiers termes suffisent jusqu'à mille; & par de-là, le premier terme suffit.

Pour savoir, maintenant, comment on ramene ces logarithmes, à ceux des tables ordinaires, il nous faut préalablement avoir le logarithme de 10. Or, si l'on calcule le logarithme de $\frac{10}{8}$, par la formule précédente on trouvera $\log \frac{10}{8} = 0,22314355$; ajoutant à celui-ci celui de 8 que l'on a en triplant celui de 2 qu'on a eu ci-dessus, on a $l\,10 = 2,30258509$.

113. Cela posé, rappellons-nous que l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ sur laquelle (27) est fondé le calcul actuel des logarithmes, ne convient qu'au systême de logarithmes où l'on

ſuppoſe le module $= 1$; mais que l'équation qui convient à tous les ſyſtêmes poſſibles de logarithmes, eſt $dx = \frac{mady}{y}$; & celle qui convient à tous les ſyſtêmes de logarithmes où l'on ſuppoſe que le premier terme a de la progreſſion géométrique fondamentale eſt 1, eſt $dx = \frac{mdy}{y}$. La premiere, ſavoir $dx = \frac{dy}{y}$ donne, en intégrant, $x = ly$; & la ſeconde, ſavoir $dx = \frac{mdy}{y}$ donne $x = m\,l\,y$, qui fait voir, puiſque x repréſente le logarithme, que pour ramener les logarithmes que donne immédiatement le calcul, à ceux d'un autre ſyſtême dont le module eſt m, il faut multiplier ceux-là par le module m. Or le logarithme de 10 dans les tables ordinaires, eſt 1 ; & nous venons de voir que le logarithme de 10 tel que le calcul le donne immédiatement, eſt 2, 30258509 ; on a donc $m \times 2,30258509 = 1$; donc le module m des tables ordinaires, eſt $\frac{1}{2,30258509}$ qui ſe réduit (en faiſant la diviſion) à 0, 4342944 8.

Donc, *pour ramener aux logarithmes des tables, les logarithmes donnés immédiatement par le calcul, il faut multiplier ceux-ci par* 0, 4342944 8. Et réciproquement, *pour ramener les logarithmes des tables, à ceux que donneroit immédiatement le calcul, il faut diviſer* *ſur ceux-là par* 0,43429448 ou, (*ce qui eſt plus commode, & revient au même, les multiplier par* 2,30258509.

Ainſi, ſi l'on multiplie 0,69314718 que nous avons trouvé ci-deſſus pour le logarithme de 2, ſi on le multiplie, dis-je, par 0,43429448, on trouve 0,3010300 pour le logarithme de 2, tel qu'il eſt en effet dans les tables ordinaires.

114. Lorſqu'on veut revenir, du logarithme, au nombre même, voici, comment on doit s'y prendre. Nous avons vû ci-deſſus, qu'en repréſentant un nombre quelconque, par $a+x$ on avoit $l(a+x)=la+\left(\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\&c.\right)$ donc $l(a+x)-la$ ou $l\,\frac{a+x}{a}=$ . . . . . . $\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}$ &c. a étant un nombre arbitraire, mais tel que ſon logarithme differe peu de celui qui eſt donné, & qui eſt ſuppoſé appartenir à $a+x$. Faiſons, pour plus de ſimplicité, $l\,\frac{a+x}{a}=z$, & nous aurons $z=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}$ &c. il s'agit donc d'avoir la valeur de $\frac{x}{a}$, en z.

Suppoſons que cette valeur puiſſe être exprimée par $\frac{x}{a}=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+$ &c. A, B, C, &c. étant des coëfficients conſtants qu'il s'agit de déterminer. On aura donc

$$
\begin{aligned}
z = Az + Bz^2 &+ Cz^3 + Dz^4 + \&c.\\
-\frac{A^2}{2}z^2 &- \frac{2AB}{2}z^3 - \frac{BB}{2}z^4\\
&+ \frac{A^3}{3}z^3 - \frac{2AC}{2}z^4\\
&\qquad + \frac{3A^2B}{3}z^4\\
&- \frac{A^4}{4}z^4
\end{aligned}
$$

Or pour que cette équation ait lieu, quel que ſoit z, il faut 1°. que $A = 1$; 2°. que la ſomme des termes qui multiplient chaque puiſſance de z dans les autres colonnes ſoit zéro. On a donc $B - \frac{A^2}{2} = 0$, $C - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, $D - \frac{BB}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$; d'où l'on tire $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3.}$ $D = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4.}$ & ſi l'on ſuppoſoit un plus grand nombre de termes, tels que Ez^5, Fz^6, &c. dans la ſérie, on trouveroit de même, $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$ $F = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ &c. on a donc $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}$ &c. Donc $1 + \frac{x}{a}$, ou $\frac{a+x}{a} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3}$ $\frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} +$ &c.

Pour faire uſage de cette formule, on retranchera du logarithme donné (qui eſt celui de $a + x$), le logarithme connu le plus approchant, dont on prendra le nombre correſpondant pour a. Alors on aura $l\frac{a+x}{a}$, ou z, que l'on ſubſtituera dans la formule précédente: le réſultat ſera la valeur de $\frac{a+x}{a}$; d'où il ſera facile de conclure $a + x$, puiſque a ſera connu.

Comme il s'agit ici des logarithmes qui ont 1 pour module, ſi le logarithme donné étoit de la nature de ceux des tables ordinaires, il faudroit commencer par le réduire, ainſi que celui que l'on prendroit pour logarithme de a, (ou ſeulement réduire leur différence) aux logarithmes actuels, ce que l'on feroit comme il a été enſeigné (113.)

Si l'on veut ſavoir quel eſt le nombre dont le logarithme eſt 1, dans le ſyſtême de logarithmes dont il s'agit ici, il faut ſuppoſer $l\frac{a+x}{a}$, ou $z = 1$, & l'on aura $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} +$ & que l'on trouvera $= 2,7182818$, en se bornant à 7 décimales.

Le nombre dont le logarithme est 1, se rencontre fréquemment dans les calculs : nous aurons occasion de le voir par la suite; & c'est pour cette raison que nous venons de donner la méthode de le calculer.

115. On peut avoir une autre expression d'un nombre par le moyen de son logarithme : la voici; soit x ce nombre, & soit $lx = z$. Si l'on multiplie le second membre de cette équation par le, e étant le nombre dont le logarithme est 1, on aura $lx = zle$, ce qui ne change rien, puisque $le = 1$. Or l'équation $lx = zle$, se change, par la nature des logarithmes, en $lx = le^z$; d'où l'on tire $x = e^z$; puisque les logarithmes étant égaux, les quantités auxquelles ils appartiennent, doivent être égales.

Selon ce que nous venons de voir (114), si l'on a $lx = z$, on a $x = 1 + z + \frac{z}{1.2} + $ &c. Puis donc qu'on a, en même temps $x = e^z$, on aura $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + $ &c.

Remarque.

116. La méthode que nous venons d'employer pour conclure la valeur de x, de l'équation $z = \frac{x}{a} - $ &c. s'appelle *Méthode inverse* des séries. Elle consiste, comme l'on voit, à supposer la variable dont on veut avoir la valeur, exprimée par une série, où l'autre variable ait des exposants en progression arithmétique, & où chaque terme ait un coëfficient constant indéterminé.

Si l'on avoit plusieurs termes en x & en z dans la même équation, mais que x & z ne fussent pas multipliés entr'eux, on détermineroit la série des exposants en faisant l'exposant du premier terme de la série supposée, égal au plus petit exposant de la même variable dans l'équation; & on prendroit, pour différence commune des exposants de la même série, le plus grand commun diviseur des exposants de cette même variable dans l'équation. Par exemple, si j'avois $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^3 + $ &c; je ferois $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} +$

$Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2 +$ &c, parce que le plus petit expoſant de z eſt $\frac{1}{3}$; & que le plus grand commun diviſeur des expoſants $\frac{2}{3}$ & 1, de z, eſt $\frac{1}{3}$.

Mais ſi les x & les z étoient multipliés entr'eux, alors il faudroit ſuivre une méthode dont le détail n'eſt pas trop de notre objet; on peut la voir dans les ouvrages de Newton, & dans l'*Analyſe des lignes courbes* de Cramer.

Uſages des Approximations précédentes, pour l'intégration de diverſes quantités.

117. COMME on a des tables toutes calculées, des différentes parties du cercle, ainſi que des logarithmes; lorſqu'on aura à intégrer quelque différentielle qui pourra ſe rapporter au cercle, ou aux logarithmes, il ſera inutile déſormais de réduire ces différentielles en ſéries. Ce qu'il y a de plus utile à faire actuellement ſur cette matiere, eſt de faire connoître celles de ces différentielles que l'on rencontre le plus fréquemment, & de faire voir comment on détermine les arcs de cercle, ou les logarithmes qui en ſont l'intégrale. En voici des exemples.

118. Nous avons vu (99) que $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$ exprimoit l'élément d'un arc de cercle AM (*Fig.* 40) dont a ſeroit le diametre, & x l'abſciſſe; enſorte que l'intégrale de cette quantité ou $\int\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$ a pour expreſſion l'arc

AM. Suppoſant donc que l'on demande la valeur de cette intégrale pour une valeur déterminée de x; alors de CA ou $\frac{1}{2}a$, on retranchera la valeur connue de x ou AP, & l'on aura CP. Dans le triangle rectangle CPM, on connoîtra donc l'angle droit, l'hypothénuſe $CM = \frac{1}{2}a$, & le côté CP; on pourra donc calculer l'angle ACM; or connoiſſant l'angle ACM, ou le nombre de degrés de l'arc AM, & ſon rayon CM, il eſt facile de calculer la longueur de cet arc (*Géom.* 153).

119. Si l'on avoit $\frac{hdx}{\sqrt{gkx - pxx}}$, h, g, p, & k étant des quantités connues; on rendroit cette différentielle, ſemblable à la précédente, en diviſant d'abord, haut & bas, par $\sqrt{p}$, ce qui donneroit $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\frac{gk}{p}x - xx}}$ ou $\frac{h}{\sqrt{p}}$. $\frac{dx}{\sqrt{\frac{gk}{p}x - xx}}$; or ſi l'on avoit ici, pour multiplicateur de dx, la moitié de la quantité $\frac{gk}{p}$ qui multiplie x dans la radical, alors cette différentielle ſeroit ſemblable à celle de l'art. précédent; donnons-lui donc cette condition, en multipliant & diviſant en même

temps par $\frac{1}{2} \cdot \frac{gk}{p}$ ou $\frac{gk}{2p}$; nous aurons $\dfrac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \times \dfrac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\frac{gk}{p}x - xx}}$ ou $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \cdot \dfrac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\frac{gk}{p}x - xx}}$. Dans cet état, on voit que l'intégrale de notre différentielle, eſt un arc de cercle dont le diametre eſt $\frac{gk}{p}$ & l'abſciſſe x ; eſt, dis-je, cet arc multiplié par $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$: elle eſt donc facile à aſſigner, par ce qui vient d'être dit.

120. Si au lieu de compter les abſciſſes depuis le point A, nous les euſſions comptées depuis le centre C, en nommant b le rayon CA, & x l'abſciſſe CP ; nous aurions eu $\frac{-b\,dx}{\sqrt{bb-xx}}$ pour l'élément de l'arc AM ; ce que l'on trouve aiſément en comparant les triangles ſemblables CPM, Mrm, & ſe rappellant que $PM = \sqrt{bb-xx}$, & que, puiſque l'arc AM diminue à meſure que CP ou x augmente, ſa différentielle doit être négative. Ainſi quand on aura une différentielle telle que $\frac{k\,dx}{\sqrt{gh-pxx}}$, on la changera comme ci-deſſus, en $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \dfrac{dx}{\sqrt{\frac{gh}{p} - xx}}$; or $\frac{gh}{p}$ repréſentant ici, bb, la quantité $-b$ qu'on doit avoir

dans le numérateur, eſt $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; je multiplie donc & je diviſe en même temps, par $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$ & j'ai $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{\frac{gh}{p} - xx}}$.
Donc en ſuppoſant que $CA = \sqrt{\frac{gh}{p}}$, & CP, x, on aura $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, pour l'intégrale, ou plus généralement $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}}$ $\times AM + C$, ou $\frac{-k}{\sqrt{gh}} \times AM + C$. A l'égard de la conſtante C, elle ſe détermine par les conditions de la queſtion particuliere qui aura conduit à la différentielle dont il s'agit; & l'arc AM ſe détermine comme nous venons de le dire (118); c'eſt-à-dire, par le calcul du triangle CPM, &c.

121. Nous avons vu (111) que $\frac{aadx}{aa+xx}$ exprimoit un arc de cercle dont a eſt le rayon, & x la tangente, arc que l'on peut déterminer aiſément pour une valeur déterminée de x, en calculant l'angle ACN du triangle rectangle ACN, (*Fig.* 46), puis la longueur de l'arc AM par le moyen du nombre des degrés de l'angle ACN & du rayon a.

Si donc on avoit $\frac{k\,dx}{gb^2 + hxx}$, on diviseroit, haut & bas, par h; ce qui donneroit $\frac{k}{h}$. $\frac{dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, puis multipliant haut & bas, par $\frac{gb^2}{h}$, on auroit $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$ ou $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$;

on auroit donc l'intégrale, en calculant la longueur de l'arc qui a x pour tangente; & $\sqrt{\frac{gb^2}{h}}$ pour rayon, & la multipliant par $\frac{k}{gb^2}$.

122. Ces trois différentielles s'intégrent donc par les arcs de cercle. En voici qui s'intégrent par le moyen de la surface du cercle.

L'élément du demi-segment APM, (*Fig.* 40), est $dx\sqrt{ax - xx}$ en nommant AP, x, puisque $y = \sqrt{ax - xx}$ & par conséquent $y\,dx$ ou $PpmM = dx\sqrt{ax - xx}$; donc toute différentielle qui aura cette forme, ou qui pourra y être ramenée par des préparations semblables à celles que nous venons d'indiquer, s'intégrera par le moyen d'un demi-segment de cercle dont l'abscisse est x & le diametre a; segment qui est facile à déterminer, tant par ce qui précéde, que par ce qui a été dit (*Géom.* 153).

123. Par exemple, si l'on veut avoir la

ſurface du demi-ſegment elliptique AMP (*Fig.* 47); on aura $y = \frac{b}{a}\sqrt{ax - xx}$; donc ydx ou $d(APM) = \frac{bdx}{a} \cdot \sqrt{ax-xx}$; or $dx\sqrt{ax-xx}$ exprime l'élément du demi-ſegment circulaire APM', en ſuppoſant qu'on ait décrit un cercle ſur AB, comme diametre; on a donc $d(APM) = \frac{b}{a}\, d(APM')$; & en intégrant, $APM = \frac{b}{a}\, APM'$, qui donne $APM : APM' :: b : a$; c'eſt-à-dire, que la ſurface du demi-ſegment elliptique, eſt à celle du demi-ſegment circulaire correſpondant, comme le petit axe eſt au grand axe; d'où il eſt aiſé de conclure que la ſurface entiere de l'ellipſe, eſt à celle du cercle décrit ſur ſon grand axe, comme le petit axe eſt au grand axe. C'eſt ce que (108) nous avons promis de démontrer.

Si au lieu de compter les abſciſſes depuis le point A, (*Fig.* 40) on les compte du centre C, alors nommant CA, b, & CP, x; on aura $-dx\sqrt{bb-xx}$ pour l'élément du demi-ſegment APM; parce qu'alors, $y = \sqrt{bb-xx}$, & que le ſegment APM diminue pendant que x augmente, ce qui rend la différentielle de APM négative.

Voici un exemple d'une différentielle qui ſe rapporte à cette forme.

123. Propoſons-nous de trouver la ſur-

face du sphéroïde elliptique alongé. La formule générale de ces sortes de surfaces, est $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$ (98); or l'équation de l'ellipse est $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$; donc $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa - xx}$ & $dy = -\frac{b}{a} \times \frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{1}{4}aa-xx}}$; donc $\frac{cy}{r}\sqrt{dx^2+dy^2}$, devient $\frac{cb}{ra} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa - xx} \times \sqrt{dx^2 + \frac{bb}{aa} \times \frac{x^2dx^2}{\frac{1}{4}aa-xx}}$, ou en faisant la multiplication indiquée, réduisant, & faisant sortir dx^2 hors du radical, $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\frac{1}{4}aa-xx+\frac{bbxx}{aa}}$, ou $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}a^4-aaxx+bbxx}{aa}}$; or si l'on nomme k la distance CF au foyer F (*Fig.* 48), on a $kk = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, ou $4kk = aa - bb$ (*Alg.* 294); donc l'élément de la surface devient $\frac{cbdx}{ra}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}a^4-4kkxx}{aa}}$ ou $\frac{cbdx}{raa}\sqrt{\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx}$. Divisons sous le radical par $4kk$ & multiplions au dehors par sa racine $2k$, nous aurons $\frac{2cbkdx}{raa}.\sqrt{\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk}-xx}$, quantité à laquelle il faut donner le signe — pour qu'elle exprime la surface comptée depuis le point A, parce que cette surface diminue à mesure que x augmente; ainsi nous avons $-\frac{2cbkdx}{raa}$

$\sqrt{\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx}$. Comparant donc avec $-dx \sqrt{bb-xx}$ que nous venons de voir être l'expreſſion d'un demi-ſegment circulaire dont le rayon eſt b, nous en conclurons que l'intégrale de $-dx\sqrt{\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx}$, eſt un demi-ſegment de cercle OPM' dont le rayon eſt $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, & dont l'abſciſſe priſe du centre, eſt x; que cette intégrale, dis-je, eſt égale à ce ſegment plus une conſtante. Donc ſi d'un rayon $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, c'eſt-à-dire, troiſieme proportionnelle à CF & à CA, on décrit le cercle ONR, on aura $\int -dx\sqrt{\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx} = OPM' + C$; donc $\int -\frac{2cbkdx}{raa}\sqrt{\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx} = \frac{2cbk}{raa} \times OPM' + \frac{2cbk}{raa} \times C$.

Pour déterminer la conſtante C, il faut remarquer que la ſurface cherchée, devant commencer au point A, doit être zéro à ce point; or au point A, le demi-ſegment OPM' devient OAN; on a donc $o = \frac{2cbk}{raa} \times OAN + \frac{2cbk}{raa} C$, d'où l'on tire $C = -OAN$; donc l'intégrale complete eſt $\frac{2cbk}{raa} \times OPM' - \frac{2cbk}{raa} \times OAN$, ou $\frac{2cbk}{raa}$

$(OPM' - OAN)$, ou enfin $\frac{2cbk}{raa}(APM'N)$.
Donc la ſurface du demi-ſphéroïde, ſera $\frac{2cbk}{raa}(ACRN)$, ou puiſque $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, & que par conſéquent $\frac{2k}{aa} = \frac{1}{2CO}$, cette ſurface ſera $\frac{c}{r} \times \frac{b}{2CO} \times ACRN$, ou $\frac{c}{r} \times \frac{CD}{CO} \times ACRN$; & celle du ſphéroïde entier, en eſt le double.

Quant à la maniere de déterminer le rayon CO, elle eſt ſimple; du point C comme centre, & du rayon CA, on décrira l'arc AL, qui coupe, en L, la perpendiculaire FL élevée ſur CA au point F; on prolongera CL juſqu'à ce qu'elle rencontre en N la perpendiculaire AN, élevée au point A; ce qui donnera CN, pour la valeur cherchée de CO, ou pour $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$; en effet, les triangles ſemblables CFL & CAN, donnent $CF : CA :: CL : CN$, ou $k : \frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}a : CN = \frac{\frac{1}{4}aa}{k} = CO$.

Cette détermination peut être appliquée à la meſure de la ſurface de la carene des vaiſſeaux, que l'on peut comparer à celle d'un ellipſoïde, plus légitimement que leur ſolidité ne peut l'être à celle du même ellipſoïde. Toute l'opération ſe réduit à calculer l'angle ACN du triangle rectangle CAN dont on connoît deux côtés, outre l'angle droit ; alors l'angle NCR devient connu, & l'on peut aiſément en conclure la ſurface du ſecteur NCR, à laquelle ajoutant celle du triangle CAN, on a $ACRN$ qu'il ne s'agit plus que de multiplier par $\frac{c}{r} \times \frac{CD}{CO}$. Quand on a la ſurface de la carene, en la multipliant par l'épaiſſeur du *ſoufflage*, on a la ſolidité du volume dont la carene eſt augmentée par le ſoufflage.

124. A l'égard des quantités qui ſe rapportent immédiatement aux logarithmes, ce ſont toutes celles dans leſquelles la différentielle propoſée, eſt, ou peut être rendue, une fraction dont le numérateur ſoit la différentielle du dénominateur, ou cette différentielle multipliée ou diviſée par un nombre conſtant.

Lorſque le numérateur eſt exactement la différentielle du dénominateur, l'intégrale eſt le logarithme du dénominateur ; ainſi $\int \frac{dx}{x} = lx + C$; $\int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C$; $\int \frac{2xdx}{aa+xx} = l(aa+xx) + C$.

Mais, lorſque le numérateur eſt la différentielle du dénominateur, multipliée ou diviſée par un nombre conſtant, il faut décompoſer la différentielle propoſée, en deux facteurs dont l'un ſoit une fraction qui ait pour numérateur la différentielle exacte du dénominateur, & dont l'autre facteur soit un nombre constant. Alors l'intégrale sera le logarithme du dénominateur variable, sera, dis-je, ce logarithme multiplié par le facteur constant. Par exemple, pour intégrer $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$; comme la différentielle de a^3+x^3 est $3x^2dx$, il faut que je prépare ma différentielle de maniere à avoir $3x^2dx$ dans le numérateur; pour cet effet, je l'écris ainsi $\frac{a}{3}.\frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, dont l'intégrale est $\frac{a}{3}l(a^3+x^3)+C$.

Pareillement $\int\frac{dx}{a-x}=\int\frac{1}{-1}.\frac{-1dx}{a-x}=-l(a-x)+C=0-l(a-x)+C=l1-l(a-x)+C=l\frac{1}{a-x}+C$. De même $\int\frac{xdx}{aa+xx}=\frac{1}{2}.\frac{2xdx}{aa+xx}=\frac{1}{2}l(aa+xx)+C=l\sqrt{aa+xx}+C$. Enfin $\int\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n}=\int\frac{a}{bn}.\frac{nbx^{n-1}dx}{k+bx^n}=\frac{a}{bn}l(k+bx^n(+C=l(k+bx^n)\frac{a}{bn}+C$.

Voici un exemple de la maniere de déterminer ces intégrales en nombres. Supposons qu'on demande la valeur de $l(a+x)$ (a étant 5), lorsque $x=2$. C'est donc $l\,7$ qu'il faut avoir. Je prends dans les tables ordinaires le logarithme de 7, qui est 0,8450980 : je le multiplie (113) par.. 2,30258509 ou 2,3025851, & j'ai 1,9459100 ou 1,94591 pour la valeur de $l\,(a+x)$ ou de l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$, lorsque $a=5$, & $x=2$.

On rencontre, quelquefois, des différentielles qui s'integrent directement par logarithmes, quoique cependant elles ne puissent pas être préparées comme les précédentes; par exemple, $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$ est dans ce cas. On réussit quelquefois à leur donner la forme différentielle logarithmique en essayant de les multiplier par une fonction de x, telle que le produit devienne la différentielle de cette fonction ou cette même différentielle multipliée ou divisée par un nombre constant. Alors en divisant par cette même fonction, la différentielle seroit évidemment une différentielle logarithmique. En appliquant cette reflexion à $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$, je la multiplie par $x+\sqrt{xx-1}$, & j'ai $\frac{x\,dx}{\sqrt{xx-1}}+dx$, qui est en effet la différentielle de $x+\sqrt{xx-1}$; ensorte que j'ai $\int\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}=\int\frac{dx+\frac{x\,dx}{\sqrt{xx-1}}}{x+\sqrt{xx-1}}$ $=l\,(x+\sqrt{xx-1})+C$.

On trouvera de même l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ en multipliant d'abord haut & bas par $\sqrt{-1}$, ce qui donne $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}$ dont l'intégrale, selon ce qu'on vient de voir, est $\sqrt{-1}\;l\,(x+\sqrt{xx-1})+C$.

125. Nous avons promis (83) d'expliquer comment il arrivoit que la regle fondamentale de l'intégration des monomes,

donnoit une quantité infinie pour l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, tandis que cette intégrale a pour expreſſion lx, ou du moins $lx + C$.

L'intégrale de $\frac{dx}{x}$ peut être finie ou infinie, ſelon la portion qu'on veut en avoir. Pour éclaircir ceci, remarquons d'abord que prendre l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ n'eſt autre choſe que quarrer l'hyperbole ordinaire, conſidérée par rapport à ſes aſymptotes. En effet, l'équation de cette courbe eſt $xy = aa$, ou $xy = 1$ en ſuppoſant, pour plus de ſimplicité, $a = 1$. Or de cette équation on tire $y = \frac{1}{x}$; donc l'élément $y\,dx$ de la ſurface devient $\frac{dx}{x}$; donc ſi l'on veut avoir les eſpaces comptés depuis l'aſymptote AZ (*Fig.* 49), l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $lx + C$ doit être telle qu'elle devienne o, lorſque le point P tombe au point A, ou lorſque $x = 0$; on a donc alors $l0 + C = 0$, & par conſéquent $C = -l0$; donc l'intégrale eſt $lx - l0$ ou $l\frac{x}{0}$; c'eſt-à-dire, que les eſpaces $ZAPMV$ comptés depuis l'aſymptote ſont infinis, Z & V étant ſuppoſés les extrémités de l'aſymptote & de la branche correſpondante

de

de l'hyperbole ; ce qui n'a rien de surprenant.

Mais si, le point O étant le sommet de l'hyperbole, (auquel cas l'abscisse correspondante $AN = 1$), on veut avoir les espaces comptés depuis le point N ; alors l'intégrale $lx + C$ doit être telle qu'elle devienne zéro, quand le point P tombera sur le point N, ou quand $x = 1$; on a donc $l\,1 + C = 0$, & par conséquent $C = -l\,1 = 0$, donc les espaces $NOMP$ sont exprimés par lx.

On voit par-là 1°. que les logarithmes que donne immédiatement le calcul, expriment les espaces hyperboliques compris entre l'asymptote & la courbe, & compté depuis le sommet O de la courbe. 2°. Que si l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $x^{-1}dx$, prise d'après la regle fondamentale, est infinie, c'est qu'elle exprime les espaces comptés depuis l'origine des asymptotes.

126. Pour donner quelque application des intégrales par logarithmes, proposons-nous la construction des cartes réduites.

Ces cartes ont été imaginées pour faciliter la réduction des routes, dans la navigation. La route que l'on suit (au moins pendant un certain temps), est toujours dirigée

M

ſuivant un même rhumb de vent ; & par conſéquent, fait toujours le même angle avec chaque méridien que l'on traverſe ſucceſſivement. D'où il ſuit que ſi l'on vouloit tracer cette route ſur les cartes ordinaires, où les méridiens concourent en un point, elle feroit une ligne courbe, & par conſéquent peu commode pour les opérations que l'on a beſoin de faire. On a préféré de repréſenter les méridiens par des lignes droites paralleles, afin que la route qui fait un angle conſtant avec ces méridiens, fût une ligne droite.

Mais, en ſuppoſant que AMP, amP (*Fig.* 50) ſont deux méridiens ; Aa, une portion de l'équateur, compriſe entre ces deux méridiens, & Mm la portion correſpondante d'un parallele quelconque ; on voit que l'intervalle $M'm'$ qui (*Fig.* 51) repréſente, alors, l'arc Mm, eſt de même grandeur que $A'a'$ qui repréſente la portion correſpondante Aa de l'équateur, quoique Mm ſoit plus petit que Aa, dans le rapport de $P'M$ à CA ; ce qui eſt facile à voir en menant MP', mP', AC & aC perpendiculaires à CP ; car ces lignes forment avec les arcs Aa, & Mm, des ſecteurs ſemblables CAa & PMm.

Pour compenſer l'augmentation que l'on

donne à Mm, en le repréſentant ſur la carte, par $M'm'$, on repréſente la latitude AM, par une ligne $A'M'$ plus grande à l'égard de $A'a'$ que AM ne l'eſt à l'égard de Aa; plus grande, dis-je, dans un certain rapport; & c'eſt ce rapport que nous nous propoſons, ici, de déterminer.

Soient donc M & R deux points infiniment voiſins ſur le méridien AM; Am, Rr les deux portions correſpondantes de deux paralleles. Si l'on veut repréſenter Mm, Rr par des lignes $M'm'$, $R'r'$ égales à celle $A'a'$ qui repréſente Aa, & conſerver néanmoins le même rapport entre les parties de chaque parallele, & celles du méridien, il faut rendre l'intervalle infiniment petit $M'R'$, qui ſéparera $M'm'$ & $R'r'$, le rendre, dis-je, d'autant plus grand à l'égard de MR, que Mm eſt plus petit à l'égard de Aa; c'eſt-à-dire, qu'on doit avoir $M'R' : MR :: Aa : Mm :: CA :: P'M ::$ le rayon, eſt au coſinus de la latitude AM.

Nommons donc la latitude AM, s; la droite $A'M'$ qui la repréſente ſur la carte, (& qu'on appelle la *Latitude croiſſante*), nommons-la s'. Poſons le rayon CA ou CM $=1$; CP' ou le ſinus de la latitude $AM=x$. Nous aurons $P'M=\sqrt{1-xx}$; $MR=ds=$

$\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$. Donc $ds' : \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} :: 1 : \sqrt{1-xx}$; & par conséquent $ds' = \frac{dx}{1-xx}$. Il s'agit donc, pour avoir s', d'intégrer la valeur de ds', c'est-à-dire, $\frac{dx}{1-xx}$. Or nous avons vu (112) que $\frac{2adx}{aa-xx}$, venoit de la différenciation de $l\frac{a+x}{a-x}$; donc $\frac{2dx}{1-xx}$, vient de la différenciation de $l\frac{1+x}{1-x}$; & par conséquent l'intégrale de $\frac{dx}{1-xx}$, qui est la moitié de $\frac{2dx}{1-xx}$, sera $\frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x}$; on aura donc $s' = \frac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} = l\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$; intégrale à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que lorsque $x = 0$, $l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, devient $l\sqrt{\frac{1}{1}}$, ou $l\,1$, c'est-à dire, 0; or s', ou la droite $A'M''$ doit en effet être alors zéro, puisque l'arc AM qu'elle représente est zéro, quand x est zéro.

Observons, maintenant, pour rendre cette expression plus commode, que le rayon 1 est le sinus de 90°; & puisque, par x, nous avons entendu CP' ou le sinus de la latitude AM, nous aurons donc, au lieu de $s' = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, cette autre équation, $s' =$

$log. \sqrt{\frac{\sin 90^\circ + \sin AM}{\sin 90^\circ - \sin AM}}$. Or (*Géom.* 286) $\sin 90^\circ - \sin AM : \sin 90^\circ + \sin AM :: tang(45^\circ - \frac{1}{2}AM) : tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM$; donc $\frac{\sin 90^\circ + \sin AM}{\sin 90^\circ - \sin AM} = \frac{tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)}{tang(45^\circ - \frac{1}{2}AM}$; *donc* $s' = log. \sqrt{\frac{tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)}{tang(45^\circ - \frac{1}{2}AM)}}$.

Mais $tang(45^\circ - \frac{1}{2}AM) : 1 :: 1 : cot(45^\circ - \frac{1}{2}AM)$, (*Géom.* 280). D'ailleurs $cot(45^\circ - \frac{1}{2}AM) = tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)$, parce que $45^\circ - \frac{1}{2}AM$ eſt le complément de $45^\circ + \frac{1}{2}AM$, puiſque $45^\circ - \frac{1}{2}AM = 90^\circ - 45^\circ - \frac{1}{2}AM$; on a donc $tang 45^\circ - \frac{1}{2}AM : 1 :: 1 : tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)$; donc $tang(45^\circ - \frac{1}{2}AM = \frac{1}{tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)}$. Subſtituant cette valeur dans s' on a $s' = log. \sqrt{tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)^2}$, c'eſt-à-dire, $s' = log. tang(45^\circ + \frac{1}{2}AM)$, ou $s' = log. cot(45^\circ - \frac{1}{2}AM)$. Or $45^\circ - \frac{1}{2}AM$ eſt la moitié de $90^\circ - AM$, qui eſt le complément de la latitude; on a donc enfin la latitude croiſſante $s' = log. cot$ ($\frac{1}{2}$ *complément de la latitude.*

On prendra donc, dans les tables ordinaires, le logarithme de la cotangente de la moitié du complément de la latitude, & l'ayant multiplié (113), par 2,30258509, le produit ſera la latitude croiſſante, exprimée en parties du rayon.

Mais comme il eſt plus commode d'avoir

M 3

la latitude croiſſante, exprimée en degrés, voici comment on la déterminera. Nous avons vu (111) que la longueur de la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon eſt 1, eſt 3,1415926 &c. ce nombre étant diviſé par 180, donne 0,0174533 pour la longueur d'un degré. Il n'y a donc qu'à chercher combien de fois ce nombre eſt contenu dans la latitude croiſſante que nous venons de déterminer ; c'eſt-à-dire, diviſer cette latitude croiſſante, par 0,0174533 ; le quotient exprimera la latitude croiſſante, en degrés. On a donc la latitude croiſſante, exprimée en degrés, par . . . . $\frac{2,30258509 \times log. cot(\frac{1}{2} comp^r. de\ lat.)}{0,0174533}$. Mais en diviſant 2,30258509, par 0,0174533, on trouve, pour quotient, 131,9283 en ſe bornant à quatre décimales. Donc *pour avoir la latitude croiſſante, exprimée en degrés, il faut prendre dans les tables ordinaires, le logarithme de la cotangente de la moitié du complément de la latitude, & le multiplier par* 131,9283. Le produit ſera le nombre de degrés & parties de degré de la latitude croiſſante,

Par exemple, ſi je veux avoir la latitude croiſſante qui convient à 40° de latitude ſimple ; je prends la moitié du complément de 40° ; c'eſt-à-dire, la moitié de 50°, ou 25°. Le logarithme de la cotangente de 25°, eſt 0,3313275 *, qui étant multiplié par 131,9283, donne 43,7115, c'eſt-à-dire, 43°,7115, ou 43° 43′. C'eſt ainſi qu'on peut calculer des tables de latitudes croiſſantes.

127. C'eſt par un calcul à peu près ſemblable, que l'on peut déterminer la différence en longitude, lorſqu'on connoît la latitude d'arrivée, celle de départ, & le rhumb de vent. Voici comment on y parvient.

Soit *O Q M* (*Fig.* 52) la route qu'on a ſuivie; *Q* le point de départ; *OA* l'équateur; *AMP* & *amP* deux méridiens conſécutifs, infiniment voiſins l'un de l'autre. En imaginant l'arc *Mm*, parallele à l'équateur, le triangle infiniment petit *mMr* ſera rectiligne & rectangle en *m*; par conſéquent, on aura $mr : Mm :: 1 : tang\ mrM$, en ſuppoſant toujours le rayon $= 1$; donc $Mm = mr \times tang\ rmM$. Or ſi l'on compare la figure 52 à la figure 50, on a (ſelon ce que nous avons déja vu dans la queſtion précédente) $Mm : Aa :: coſ.\ lat : 1$, c'eſt-à-dire, $mr \times tang\ mrM : Aa :: coſ.\ lat : 1$.

* Comme nous avons ſuppoſé le rayon, égal à l'unité, il faut diminuer ces logarithmes de tangentes, du logarithme du rayon, qui eſt 10,0000000; c'eſt-à-dire, ôter 10, de leur caractériſtique.

Nommons donc x, le ſinus de la latitude AM (*Fig.* 53); ſon coſinus ſera $\sqrt{1-xx}$. L'arc mr qui eſt la différence des deux latitudes ar & AM, ſera la différentielle de l'arc AM, & aura pour expreſſion $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ (126). Nommons de plus, a, l'angle mrM que la route fait avec le méridien, ou le rhumb de vent; & z, la différence BA de longitude, ce qui donne $Aa = dz$; alors la proportion que nous venons de trouver, ſe change en $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\, tang\, a : dz :: \sqrt{1-xx} : 1$; d'où l'on tire $dz = tang\, a. \frac{dx}{1-xx}$. Mais nous venons de voir, dans la queſtion précédente, que l'intégrale de $\frac{dx}{1-xx}$, étoit $\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$; nous aurons donc $z = \frac{1}{2} tang\, a. l \frac{1+x}{1-x} + C$.

Pour déterminer la conſtante C, obſervons que lorſque $z = 0$, c'eſt-à-dire, au point de départ, la latitude AM, devient la latitude BQ de départ. Nommons donc t le ſinus de cette latitude. Il faut donc que la conſtante C ſoit telle, qu'en mettant t pour x, on ait $z = 0$. On a donc $0 = \frac{1}{2} tang\, a. l \frac{1+t}{1-t} + C$, & par conſéquent $C = -\frac{1}{2} tang\, a. l \frac{1+t}{1-t}$. Donc $z - \frac{1}{2} tang\, a. l \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} tang\, a.$

$$l\frac{1+t}{1-t} = \text{tang } a\left(\tfrac{1}{2}l\frac{1+x}{1-x} - \tfrac{1}{2}l\frac{1+t}{1-x}\right) =$$
$$\text{tang } a\left(l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - l\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)$$

Or en raiſonnant préciſément comme dans la queſtion précédente, nous trouverons que $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ſe réduit à *cot.* ($\frac{1}{2}$ *complément* de AM); & par la même raiſon $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, ſe réduit à *cot.* ($\frac{1}{2}$ *complément* de BQ), donc z, ou a différence en longitude, $=$ *tang a* (*log. cot* ($\frac{1}{2}$ *complt. de lat. d'arrivée*) — *log. cot* ($\frac{1}{2}$ *complt de latit. du départ*)); ce qui donne une regle fort ſimple, pour trouver la différence en longitude, ſoit par les tables des latitudes croiſſantes, ſoit par les cartes réduites, quel que ſoit d'ailleurs le rhumb de vent.

PAR LA TABLE DES LATITUDES CROISSANTES. *Cherchez la latitude croiſſante qui convient à la latitude d'arrivée. Faites la même choſe pour la latitude du départ. Prenez la différence de ces deux latitudes croiſſantes, (ou leur ſomme, ſi les latitudes ſont de dénomination différente), & multipliez-la par la tangente du rhumb de vent. Vous aurez en degrés, minutes, &c. la différence en longitude.*

PAR LES CARTES RÉDUITES. . . *Cherchez ſur le méridien, la latitude d'arrivée, & celle du dé-*

part. Elevez par l'extrémité de chacune, une perpendiculaire qui rencontre la route prolongée. La différence de ces deux perpendiculaires, portée sur l'échelle des longitudes, vous donnera, en degrés, minutes, &c. la différence de longitude.

En effet, AQ (*Fig.* 53) étant le méridien; OL la route; AQ, AP, les deux latitudes croissantes; PQ ou RT est leur différence; or dans le triangle rectangle SRT, on a $1 : tang\ TRS :: RT : TS$; donc $TS = RT \times tang\ TRS$; or RT est la différence des deux latitudes croissantes, & l'angle TRS est égal à l'angle de la route avec le méridien.

La ligne courbe QM (*Fig.* 52) qui marque la route du vaisseau sur la surface du globe, s'appelle *Loxodromie*.

A quelque endroit de la route que l'on suppose le point M, le triangle Mrm a toujours les mêmes angles, puisque l'angle mrM est toujours le même, & que l'angle m est droit; il y a donc toujours même rapport de Mr à mr, que du rayon au cosinus de l'angle mrM que nous avons appellé a. Donc le nombre de lieues courues suivant QM, est au nombre de lieues courues en latitude, c'est-à-dire, au nombre de lieues de IM, comme le rayon est au cosinus du rhumb de vent. Ce qui sert à déterminer la différence en latitude, quand on connoit le rhumb de vent & le nombre de lieues de la route. Cette même proportion sert aussi à trouver le rhumb de vent, quand on connoît la différence en latitude & le nombre de lieues de la route. Bien entendu qu'on réduit en lieues, les degrés de la différence en latitude, à raison de 20 lieues pour un degré.

De la maniere de ramener (lorsque cela est possible) l'intégration d'une différentielle proposée, à celle d'une autre différentielle connue, & de distinguer les cas où cela se peut.

128. Nous nous bornerons à exposer la méthode, sur les différentielles binomes; il sera aisé, ensuite, d'en faire l'application aux différentielles plus composées.

Supposons d'abord, que la différentielle proposée, soit $hx^s dx\,(a+bx^n)^p$, & que $x^m dx\,(a+bx^n)^p$ soit celle dont elle doit dépendre; c'est-à-dire, supposons d'abord que les deux exposants du binome soient les mêmes.

On supposera $\int hx^s dx\,(a+bx^n)^p = (a+bx^n)^{p+1}(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots Px^{k+tq}) + \int Rx^m dx\,(a+bx^n)^p$; k & q étant des exposants inconnus; t, un nombre entier positif; A, B, C, P, R &c. des coëfficients constants, pareillement inconnus. En différenciant, on aura $hx^s dx\,(a+bn^n)^p = (p+1)nbx^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p(Ax^k + Bx^{k+q} + C^{k+2q} \ldots + Px^{k+tq}) + (a+bx^n)^{p+1}(kAx^{k-1}dx + (k+q)Bx^{k+q-1}dx + (k+2q)Cx^{k+2q-1}dx \ldots + (k+tq)Px^{k+tq-1}dx) + Rx^m dx\,(a+bx^n)^p$, ou, en divisant tout, par $(a+bx^n)^p dx$, on aura $hx^s = (p+1)nbx^{n-1}(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} \ldots + Px^{kt+q}) + (a+bx^n)(kAx^{k-1} + (k+q)Bx^{k+q-1} + (k+2q)Cx^{k+q-1} \ldots + (k+tq)Px^{k+tq-1}) + Rx^m$.

Pour que cette équation puisse avoir lieu, indépendamment de toute valeur de x, il faut qu'après les multiplications & la tranſpoſition faites, la ſomme des quantités qui multiplieront une même puiſſance de x ſoit zéro; c'eſt par cette condition qu'on déterminera les coëfficients A, B, C, &c. mais il faut, pour cela, que le nombre des puiſſances de x, qui entreront dans cette équation; ne ſurpaſſe pas le nombre de ces coëfficients.

Or le nombre de ceux-ci eſt $t+2$, comme il eſt aiſé de le voir : voyons donc quel ſera celui des puiſſances de x. Pour cela, il nous faut déterminer k & q.

Comme les expoſants k & q ſont indéterminés, voici comment on les déterminera. $k-1$ eſt le plus petit expoſant indéterminé qui ſe trouvera dans l'équation; on l'égalera à m ou à s, ſelon que m ou s ſera le plus petit expoſant. Le plus grand expoſant déterminé qui ſe trouvera dans l'équation, ſera, (ainſi qu'il eſt aiſé de le voir) $k+tq+n-1$; on l'égalera à s, ſi on a égalé $k-1$ à m; ou à m, ſi on a égalé $k-1$ à s.

Suppoſons $k-1=m$; on aura donc $k+tq+n-1=s$. Cela poſé, pour que l'équation ne renferme pas plus de puiſſances de x, qu'il n'y a de coëfficients indéterminés, il faut que les expoſants de x, dans cette équation, forment auſſi une progreſſion arithmétique dont la différence ſoit q, ce qui ne peut manquer d'avoir lieu, dès qu'on a ſuppoſé $k-1=m$, $k+tq+n-1=s$, & t un nombre entier poſitif. Or le plus grand terme de cette progreſſion étant $k+tq+n-1$, & le plus petit, $k-1$; il eſt aiſé de trouver (*Alg.* 232) que le nombre des termes de cette progreſſion, eſt $\frac{k+tq+n-1-k+1}{q}+1$ ou $\frac{tq+n}{q}+1$; il faut donc que $\frac{tq+n}{q}+1=t+2$, & par conſéquent $q=n$; ſubſtituant pour q & k, leur valeur, dans l'équation $k+tq+n-1=s$, on aura $tn+m+n=s$, & par conſéquent $t=\frac{s-m-n}{n}=\frac{s-m}{n}-1$; donc la réduction d'une différentielle à l'autre, ſera poſſible, ſi la différence $s-m$ des expoſants de x hors des deux binomes, diviſée par l'expoſant de x dans le binome, donne un nombre entier poſitif, & alors on ſuppoſera $\int x^s dx(a+bx^n)^p=(a+bx^n)^{p+1}(Ax^{m+1}+Bx^{m+n+1}+Cx^{m+2n+1}+\ldots Px^{s-n+1})+\int Rx^m dx(a+bx^n)^p$, & pour déterminer les coëfficients A, B, C, P, R, &c. après avoir différencié, diviſé par $(a+bx^n)^p dx$, & fait les opérations qui se trouveront indiquées, on transportera tout dans un même membre, & on égalera à *zéro* la somme des quantités qui multiplieront une même puissance de x, ce qui donnera autant d'équations qu'on a de coefficiens indéterminés.

129. Mais si l'on y fait attention, on verra que dès que $\int x^s dx(a+bx^n)^p$ dépend de $\int x^m dx(a+bx^n)^p$, réciproquement celle-ci dépend de la premiere, or en procédant, comme ci-dessus, pour réduire $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ à $\int x^s dx(a+bx^n)^p$, on trouveroit qu'il faut que $\frac{m-s}{n}$ soit un nombre entier positif, & qu'il faut supposer $\int x^m dx(a+bx^n)^p = (a+bx^n)^{p+1}(Ax^{s+1}+Bx^{s+n+1}+\&c.+Px^{m-n+1})+\int Rx^s dx(a+b\ x)^p$, donc soit que s soit plus grand ou plus petit que m, pourvu que $\frac{s-m}{n}$, ou $\frac{m-s}{n}$ donne un nombre entier positif, on pourra toujours ramener l'une de ces différentielles à l'autre, en mettant pour premier exposant de x, dans la suite Ax^k+Bx^{k+q} &c le plus petit des deux exposants m & s, augmenté d'une unité, & prenant pour q, l'exposant de x dans le binome.

Par exemple, si l'on veut réduire $x^4dx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, à $dx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, qui dépend de la quadrature du cercle; je vois que $s-m$ est ici $4-0$, lequel divisé par n, c'est-à-dire, 2, donne 2, nombre entier; donc la réduction est possible; & puisque la formule $t=\frac{s-m}{n}-1$ donne $t=1$, que d'ailleurs le plus petit exposant $m=0$, je mettrai donc 1 pour k; je ferai donc $\int x^4 dx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}=(bb-xx)^{\frac{3}{2}}(Ax+Bx^3)+\int Rdx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, alors différenciant, divisant ensuite par $(bb-xx)^{\frac{1}{2}}dx$, & transposant, & j'aurai

$$\begin{aligned}0 = Abb &- Ax^2 - 3Bx^4\\ &+ R + 3Bbbx^2 - x^4\\ &- 3Ax^2 - 3Bx^4,\end{aligned}$$

d'où l'on tire $-6B-1=0$, $-4A+3Bbb=0$, $Abb+R=0$, donc $B=-\frac{1}{6}$, $A=-\frac{1}{8}bb$, $R=\frac{1}{8}b^4$; donc $\int x^4dx(bb-xx)^{\frac{1}{2}} = (bb-xx)^{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{8}bbx-\frac{1}{6}x^3)+\frac{1}{8}b^4\int dx\sqrt{bb-xx}+C$.

Il est donc facile, par cette méthode, de trouver des différentielles qui se rapportent à une différentielle donnée, & par conséquent, celles qui se rapportent à la quadrature du cercle, de l'ellipse, & à celle de l'hyperbole, différentielles dont il est facile de trouver les différentes expressions, par le moyen des différentes équations de ces courbes.

130. Remarquons, en passant, que cette méthode donne aussi les différentielles binomes intégrables, en effet, chercher parmi les différentielles binomes telles que $hx^s\,dx(a+bx^n)$, quelles sont celles qui sont intégrables, c'est chercher celles qui dépendent de $Rx^{n-1}\,dx\,(a+bx^n)^p$, que nous avons vu (90) être intégrable immédiatement, or il résulte de ce qui précède (128) que $\frac{s-n+1}{n}$ doit être un nombre entier positif, c'est-à-dire, que $\frac{s+1}{n}$ doit être un nombre entier positif, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit (91).

131. Supposons, maintenant, que les deux binomes qui entrent dans les différentielles dont il s'agit ici, aient des exposants différents, ensorte que la différentielle proposée soit $hx^s\,dx$ $(a+bx^n)^r$, & celle à laquelle on veut ramener celle-là, soit $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$, p ayant une valeur numérique plus petite que celle de r. Si r est positif, on changera la différentielle $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^r$, en cette autre $hx^s dx\,(a+bx^n)^{r-p}$ × $(a+bx^n)^p$. Alors si $r-p$ est un nombre entier positif, on pourra réduire $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^{r-p}\,(a+bx^n)^p$ en une suite de termes de cette forme $(A'x^s + B'x^{s+n} + C'x^{s+2n}$ $+$ &c. $)\,dx\,(a+bx^n)^p$, dont chacun peut être ramené à $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ par la méthode précédente si $s-m$ peut être divisé par n; & pour y ramener la totalité, on appliquera, mot à mot, ce qui est prescrit par cette méthode, en prenant pour ce que nous y avons appellé s, le plus grand exposant de x dans la valeur développée de $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^{r-p}$.

Par exemple, si j'avois $\int x^2\,dx\,(bb-xx)^{\frac{3}{2}}$ à réduire à $\int dx$ $(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, je changerois $\int x^2\,dx(bb-xx)^{\frac{3}{2}}$ en $\int x^2\,dx\,(bb-xx)$ $(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$ ou $\int (bbx^2\,dx-x^4\,dx)\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$; alors ce que je dois prendre pour s, eſt 4. Je ſuppoſe donc, conformément à la méthode, $\int (bbx^2dx - x^4dx)(bb-xx)^{\frac{1}{2}} = (bb-xx)^{\frac{3}{2}}(Ax+Bx^3) + \int Rdx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si au contraire la valeur de r eſt négative, on préparera la différentielle à laquelle on veut rapporter la propoſée, on la préparera, dis-je, de cette maniere, $x^m dx (a+bx^n)^{p-r} \times (a+bx^n)^r$, alors ſi $p-r$ eſt un nombre entier, comme il ſera néceſſairement poſitif (puiſque nous ſuppoſons r négatif & plus grand que p quel que ſoit d'ailleurs p), on pourra réduire $x^m dx (a+bx^n)^{p-r}(a+bx^n)^r$ à une ſuite finie de termes de cette forme $(A'x^m + B'x^{m+n} + C x^{m+2n} + \&c.)(a+bx^n)^r$. Alors on agira, comme s'il étoit queſtion de réduire cette derniere à la forme $x^s dx (a+bx^n)^r$, c'eſt-à-dire, qu'on opérera d'une maniere toute ſemblable à celle que nous venons de preſcrire dans le cas où r étoit poſitif.

Par exemple, s'il s'agiſſoit de réduire $gx^{-2}dx(aa+xx)^{-2}$ à $dx(aa+xx)^{-1}$ ou $\dfrac{dx}{aa+xx}$, qui (111) s'intégre par un arc de cercle dont x eſt la tangente, & a le rayon, je changerois $dx(aa+xx)^{-1}$ en $(aa+xx)\,dx(aa+xx)^{-2}$, & comme le plus petit expoſant hors du binome propoſé eſt $^{-2}$, je ſuppoſerois $\int R(aa+xx)dx(aa+xx)^{-2} = (aa+xx)^{-1}(Ax^{-1}+Bx) + \int gx^{-2}dx(aa+xx)^{-2}$. Et j'acheverois comme ci-deſſus, pour déterminer les coëfficients A, B & R. Alors, par la tranſpoſition, on auroit la valeur de $\int gx^{-2}dx(aa+xx)^{-2}$, dans laquelle je réduirois enſuite $R(aa+xx)dx(aa+xx)^{-2}$, à $Rdx(aa+xx)^{-1}$.

Des Fractions rationnelles.

132. TOUTE fraction différentielle rationnelle, eſt toujours intégrable, ou algébriquement, ou par des arcs de cercle, ou par des logarithmes, ou par ces trois moyens à la fois, ou par deux ſeulement.

Elle eſt toujours intégrable algébriquement, lorſqu'elle ne renferme point de dénominateur variable, à moins que ce dénominateur ne ſoit monome, en exceptant ſeulement dans ce dernier cas, la circonſtance où le dénominateur ne ſeroit élevé à d'autre puiſſance que l'unité : c'eſt ce que nous avons vu (83).

Il nous reste donc, à voir la vérité de notre proposition, dans les autres cas; c'est-à-dire, dans le cas où la différentielle proposée a un dénominateur rationel complexe.

Nous supposerons que dans le numérateur de la fraction différentielle proposée, la variable soit moins élevée que dans le dénominateur. Si elle n'étoit pas dans cet état, on l'y rameneroit en divisant le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que la puissance restante, fût plus petite que dans le dénominateur. Par exemple, si j'avois à intégrer $\frac{x^3\,dx}{aa+3ax+xx}$, je commencerois par diviser $x^3\,dx$ par $xx+3\,ax+aa$; j'aurois xdx pour quotient & $-3\,ax^2\,dx-aax\,dx$ pour reste; je diviserois encore ce reste par le même dénominateur, & j'aurois $-3adx$ pour quotient, & $+8a^2xdx+3a^3dx$ pour reste; alors, au lieu de $\frac{x^3\,dx}{aa+3ax+xx}$, je prendrois $xdx-3adx+\frac{8a^2\,xdx+3a^3\,dx}{aa+3\,ax+xx}$.

Pour découvrir par quel moyen nous pourrons intégrer les fractions différentielles rationnelles, rappellons-nous que la différentielle du logarithme d'une quantité, étant la différentielle de cette quantité, divisée par cette quantité même, c'est-à-dire, étant toujours une fraction, il est assez naturel de soupçonner que l'intégration des fractions rationnelles pourra souvent dépendre des logarithmes. Prenons, par exemple, $2al\,(a+x)-2al\,(2a+x)$; en différenciant, nous aurons $\frac{2adx}{a+x}-\frac{2\,adx}{2a+x}$, ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{2\,aadx}{2\,aa+3\,ax+xx}$. Or, il est clair que pour intégrer cette fraction, il n'y auroit autre chose à faire qu'à la décomposer en deux fractions, dont l'une eût pour dénominateur $a+x$, & l'autre $2a+x$; & dont les numérateurs seroient des nombres constants multipliés par dx; ces deux fractions s'intégreroient alors par logarithmes.

133. Il est donc assez naturel de tenter, pour intégrer ces sortes de fractions, de les décomposer en autant de fractions simples, que le dénominateur peut avoir de facteurs, & dont chacune ait pour dénominateur un de ces facteurs; c'est en effet la méthode que l'on peut & que l'on doit suivre, lorsque tous les facteurs dont le dénominateur a pu être formé, sont inégaux.

134. Mais lorſque parmi les facteurs du dénominateur, il s'en trouve qui ſont égaux entr'eux; alors on ne doit pas s'attendre que la méthode ait du ſuccès, parce que l'intégration ne peut dépendre entiérement des logarithmes. En effet, ſi l'on avoit, par exemple, $\frac{dx}{(a+x)}$ dont le dénominateur a deux facteurs égaux $a+x$ & $a+x$, on trouveroit (89) que l'intégrale de cette quantité, ou de ſon égale $dx(a+x)^{-2}$ eſt $-(a+x)^{-1}+C$ qui ne dépend point des logarithmes. Mais on voit, en même temps, que ſi l'on différencioit une quantité telle que $\frac{aa}{a+x}+2al(a+x)$ $+2al(2a+x)-al(3a+x)$, on auroit $\frac{-aadx}{(a+x)^2}+$ $\frac{2adx}{a+x}+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$ ou $\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}-$ $\frac{adx}{3a+x}$, ou en réduiſant tout au même dénominateur, $\frac{10a^4dx+26a^3xdx+17a^2x^2dx+3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$; fraction qui, pour être intégrée, n'exigeroit autre choſe que d'être ramenée à $\frac{2ax+aa}{(a+x)^2}dx+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$, c'eſt-à-dire, d'être décompoſée en trois fractions, dont la premiere eût pour dénominateur tous les facteurs égaux, & dans ſon numérateur toutes les puiſſances de x, moindres que la plus haute puiſſance du dénominateur : à l'égard des deux autres fractions, elles auroient pour dénominateur, chacune, un des facteurs inégaux, & n'auroient aucune puiſſance de x au numérateur. C'eſt ainſi, en effet, qu'on peut intégrer toute fraction rationnelle; & c'eſt ainſi que nous le pratiquerons, du moins lorſqu'il n'y aura pas de facteurs imaginaires dans le dénominateur; cas que nous examinerons après.

Ainſi $\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})dx}{(M+Nx+Px^2+\ldots Tx^n}$ repréſentant, en général, toute fraction rationnelle; ſi l'on ſuppoſe que le dénominateur ait un nombre m de facteurs égaux à $x+g$, un nombre p de facteurs égaux à $x+h$, &c. & un nombre quelconque de facteurs inégaux, & repréſentés par $x+i$, $x+q$;

$x + r$, &c. auquel cas la fraction proposée sera . . . . . .

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1}\, dx)}{(x+g)^m\,(x+h)^p \times \&c.\,(x+i)\,(x+q)\,(x+r)}, \text{ \&c. il}$$

faudra, pour intégrer cette fraction, supposer . . . . .

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1})\, dx}{(x+g)^m\,(x+h)^p \times \&c. \ldots (x+i)\,(x+q)\,(x+r) \times \&c.} =$$

$$\frac{Ax^{m-1}\, dx + Bx^{m-2}\, dx \ldots + Rdx}{(x+g)^m} + \frac{A'x^{p-1}\, dx + B'x^{p-2}\, dx + \ldots R'dx}{(x+h)^p}$$

&c. $+ \dfrac{Ldx}{x+i} + \dfrac{Mdx}{x+q} + \dfrac{Ndx}{x+r} +$ &c. A, B, C, &c. étant des coëfficients constants & indéterminés. Alors, si par quelque moyen que ce soit, on détermine ces coëfficients, il sera facile d'avoir l'intégrale. Cela est évident pour les fractions simples $\dfrac{Ldx}{x+i}$, $\dfrac{Mdx}{x+q}$, $\dfrac{Ndx}{x+r}$, &c. dont l'intégrale est $Ll(x+i)$, $Ml(x+q)$, $Nl(x+r)$ &c. A l'égard des fractions . . . . $\dfrac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2}dx + \ldots Rdx}{(x+g)^m}$, on fera, pour plus de simplicité, $x + g = z$, ce qui donnera $x = z - g$, & $dx = dz$. Substituant ces valeurs, on réduira la totalité à une suite de monomes faciles à intégrer, & dont un seul sera de la forme $\dfrac{dz}{z}$, c'est-à-dire, s'intégrera par logarithmes. De même, pour les termes $\dfrac{A'x^{p-1}dx + B'x^{p-2}dx + \ldots R'dx}{(x+h)^p}$, on fera $x + h = z'$.

Ainsi, il ne nous reste que deux choses à examiner; la premiere, comme on trouve les facteurs du dénominateur de la fraction différentielle proposée ; la seconde, comment on trouve les coëfficients indéterminés.

135. Pour trouver les facteurs du dénominateur, il faut se conduire comme pour résoudre l'équation qu'on auroit en égalant ce dénominateur à zéro; puisque (*Alg.* 178) résoudre une équation, revient à chercher les facteurs binomes dont la multiplication a produit cette équation. Ainsi, il faut employer les méthodes données (*Alg.* 193 & *suiv.*)

136. Quant à la maniere de trouver les coëfficients A, B, C; ce qui se présente de plus naturel, est de réduire au même dénominateur toutes les fractions où ils entrent; alors les deux membres de l'équation formée de la fraction proposée & de ces nouvelles fractions, ayant le même dénominateur, on peut supprimer ce dénominateur de part & d'autre; & ayant transposé tout dans un seul membre, il faut, pour que l'équation ait lieu, indépendamment de toute valeur de x, il faut, dis-je, que la somme des termes qui multiplieront une même puissance de x, soit zéro. Cette condition donnera autant d'équations qu'on a de coëfficients indéterminés, & qui serviront à déterminer ces mêmes coëfficients. En voici des exemples.

Proposons-nous d'intégrer $\frac{dx}{aa-xx}$; je supposerai $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{A\,dx}{a+x} + \frac{B\,dx}{a-x}$, puisque les deux facteurs du dénominateur $aa-xx$, sont $a+x$ & $a-x$. Alors, réduisant au même dénominateur, j'ai $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{(Aa-Ax+Ba+Bx)\,dx}{aa-xx}$, supprimant le dénominateur commun, divisant par dx, & transposant, j'ai $\begin{matrix}1 + Ax = 0;\\ -Aa - Bx\\ -Ba\end{matrix}$ donc $1 - Aa - Ba = 0$, & $A - B = 0$, d'où il est facile de conclure $A = \frac{1}{2a}$, & $B = \frac{1}{2a}$; nous avons donc $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{\frac{1}{2a}dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{2a}dx}{a-x}$, dont l'intégrale est $\int\frac{dx}{aa-xx} = \frac{1}{2a}l\,(a+x) - \frac{1}{2a}l(a-x) + C, = \frac{1}{2a}l\frac{a+x}{a-x} + C.$

Proposons-nous, pour second exemple, la fraction . . . $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$, que nous avons eue (134) en différenciant $\frac{aa}{a+x} + 2a\,l(a+x) - a\,l(3a+x)$.

Nous supposerons donc, $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$

$=\frac{(Ax+B)dx}{(a+x)^2}+\frac{Cdx}{2a+x}+\frac{Ddx}{3a+x}$, réduisant au même dénominateur, on aura (après avoir supprimé le dénominateur commun, divisé par dx, & transposé)

$$\begin{array}{llll} 10a^4 & +26a^3x & +17a^2x^2 & +3ax^3=0, \\ -6Baa & -5Bax & -Bx^2 & -Ax^3 \\ -3Ca^3 & -6Aaax & -5Aax^2 & -Cx^3 \\ -2Da^3 & -7Ca^2x & -5Cax^2 & -Dx^3 \\ & -5Da^2x & -4Dax^2 & \end{array}$$

donc $3a-A-C-D=0$, $17a^2-B-5Aa-5Ca-4Da=0$, $26a^3-5Ba-6Aa^2-7Ca^2-5Da^2=0$, $10a^4-6Ba^2-3Ca^3-2Da^3=0$, équations d'où l'on tirera $A=2a$, $B=a^2$, $C=2a$, $D=-a$; la différentielle proposée, se changera donc en $\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$, précisément comme on l'a trouvé ci-dessus. Les deux derniers termes ont évidemment pour intégrale $2al(2a+x)-al(3a+x)$, à l'égard du terme $\frac{2ax+aa}{(a+x)^2}dx$, je fais $a+x=z$, j'ai $x=z-a$, & $dx=dz$, j'aurai donc $\frac{(2az-aa)dz}{zz}$ ou $\frac{2adz}{z}-\frac{aadz}{zz}$, dont l'intégrale est $2alz+\frac{aa}{z}$ ou $2al(a+x)+\frac{aa}{a+x}$; ainsi, l'intégrale totale est $\frac{aa}{a+x}+2al(a+x)+2al(2a+x)-al(3a+x)$, ainsi qu'elle doit être.

137. Cette méthode est générale. Mais on peut faciliter la recherche des coëfficients, par plusieurs méthodes. Par exemple, on peut trouver, indépendamment les uns des autres, les coëfficients des fractions simples, en cette maniere. Soit $\frac{Ndx}{M}$ la fraction proposée; $hx+a$ un des facteurs du dénominateur; & soit P le quotient de M divisé par $hx+a$. Concevons $\frac{Ndx}{M}$ décomposé en $\frac{Adx}{hx+a}$ & $\frac{Qdx}{P}$; alors nous aurons $\frac{Ndx}{M}=\frac{Adx}{hx+a}+\frac{Qdx}{P}$, ou $\frac{N}{M}=\frac{A}{hx+a}+\frac{Q}{P}$; donc en réduisant au même dénominateur, & ayant égard à la sup-

position que $P = \frac{M}{hx+a}$ ou $P \times (hx+a) = M$, on aura $N = AP + Q(hx+a)$. Mais en différenciant l'équation $(hx+a)P = M$, on a $hPdx + (hx+a)dP = dM$. Or cette équation, ainsi que l'équation $N = AP + Q(hx+a)$ devant avoir lieu pour toute valeur de x, auront également lieu, lorsqu'on mettra pour x une valeur quelconque. Mettons donc pour x la valeur qui donne le résultat le plus simple; c'est-à-dire, mettons pour x la valeur $-\frac{a}{h}$ que l'on a en supposant le dénominateur $hx+a=0$; alors nous aurons $hPdx = dM$, & $N = AP$. Mettant dans la seconde, la valeur $P = \frac{dM}{hdx}$ que donne la premiere, on a $A = \frac{hNdx}{dN}$; c'est-à-dire, que pour avoir le numérateur A de l'une quelconque des fractions simples, il faut diviser le numérateur Ndx de la proposée, par la différentielle dM de son dénominateur, & ayant substitué pour x la valeur que l'on auroit, égalant à zéro le dénominateur de la fraction simple, on multipliera le tout, par le coëfficient de x, dans ce dénominateur simple.

Par exemple, pour avoir les numérateurs A & B des fractions $\frac{Adx}{a+x}$ & $\frac{Bdx}{a-x}$ dans lesquelles nous avons, ci-dessus, décomposé la fraction $\frac{dx}{aa-xx}$, je différencie le dénominateur $aa-xx$, ce qui me donne $-2xdx$. Je divise donc le numérateur dx de la proposée, par $-2xdx$, ce qui me donne $-\frac{1}{2x}$, dans lequel mettant successivement pour x, $-a$ & a, (qui sont les valeurs que l'on trouve pour x, en égalant successivement à zéro, les dénominateurs $a+x$ & $a-x$ des fractions partielles) & multipliant par les valeurs 1 & -1, de h, j'ai $\frac{1}{2a}$ & $\frac{1}{2a}$ pour les valeurs de A & de B, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

On peut de même trouver des regles générales pour déterminer les coëfficients des numérateurs des fractions partielles qui ont pour dénominateur le produit des racines égales; mais nous ne nous y arrêterons pas.

138. Quoique les regles que nous venons de donner pour

intégrer les fractions rationnelles, soient générales ; cependant, lorsque quelques-uns des facteurs du dénominateur sont imaginaires, on a pour intégrale, des quantités composées d'imaginaires ; intégrale qui n'est pas moins réelle, mais que l'on ne ramene pas toujours commodément à une forme réelle. Ce qu'il faut faire dans ce cas, est d'extraire d'abord du dénominateur tous ses facteurs réels ; après quoi on décompose le reste, non en facteurs du premier degré, mais en facteurs du second, lesquels seront toujours réels (*Alg.* 229). Alors pour chaque facteur du second degré, qui peut toujours être représenté par ax^2+bx+c, on forme une fraction de cette forme $\frac{Axdx+Bdx}{ax^2+bx+c}$, & l'on détermine toujours les coëfficients comme ci-dessus.

139. Si parmi les facteurs du second degré, il s'en trouve qui soient égaux entr'eux, alors on formera, pour chaque groupe de facteurs égaux, une fraction de cette forme. . $\frac{Ax^{2n-1}dx+Bx^{2n-2}dx+\ldots Qdx}{(ax^2+bx+c)^n}$, n étant le nombre des facteurs ax^2+bx+c, qui se trouvent égaux entr'eux.

140. Il ne reste plus qu'à savoir comment on intégre ces quantités. Voyons d'abord la premiere.

Supposons, pour plus de simplicité, que la fraction partielle est réduite à cette forme $\frac{A'xdx+B'dx}{x^2+a'x+b'}$, ce que l'on peut toujours faire, en divisant haut & bas, par a.

Alors on fera disparoître le second terme du dénominateur, en faisant $x+\frac{1}{2}a'=z$; ce qui donne $x=z-\frac{1}{2}a'$, & $dx=dz$, substituant, on aura une quantité de cette forme. . . . . . $\frac{Czdz+Ddz}{zz+qq}$, dont la premiere partie $\frac{Czdz}{zz+qq}$ s'intégre par logarithmes (124) ; & la seconde s'intégre par un arc de cercle dont le rayon est q, & la tangente est z.

Quant aux quantités de la forme . . . . $\frac{Ax^{2n-1}dx+Bx^{2n-2}dx+\ldots Qdx}{(x^2+ax+b)^n}$, on fera, de même, disparoître le second terme du dénominateur, & l'on aura une quantité de cette forme $\frac{Mz^{2n-1}dz+Nz^{2n-2}dz+\ldots Tdz}{(zz+qq)^n}$

que l'on intégrera, en se proposant de ramener à $\frac{dz}{zz+qq}$, selon la méthode donnée (131), l'intégrale de la somme des termes où z aura des exposants pairs. Quant à ceux où les exposants seront impairs, ils s'intégreront par ce qui a été dit (91), ou bien en les ramenant à $\frac{z\,dz}{(zz+qq)^n}$, selon la méthode donnée (130).

Ainsi, toute fraction rationnelle, ou s'intégre exactement, ou ne dépend, tout au plus, que des arcs de cercle & des logarithmes.

De quelques transformations qui peuvent faciliter les Intégrations.

141. On ne peut donner de regles générales sur cette matiere. L'inspection des quantités, l'usage & l'adresse, dictent dans chaque occasion, ce qu'on doit faire.

Le but des transformations dont il s'agit ici, est de rendre rationnelles, les différentielles proposées, parce qu'alors on sait les intégrer. Sur cela, voici quelques observations.

142. S'il n'y a de quantités radicales, que des monomes, on les ramenera d'abord à des exposants fractionnaires, que l'on réduira toutes au même dénominateur. Alors, si $x^{\frac{k}{l}}$ représente une de ces quantités, ainsi préparées, on fera $x^{\frac{1}{l}} = z$; ce qui donnera $x = z^l$, & $dx = lz^{l-1}dz$. On substituera, & l'on aura une quantité toute rationnelle. Par exemple, si l'on avoit $\frac{dx\sqrt{x}+adx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$, je l'écrirois ainsi $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx+adx}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}$; puis je la changerois en $\frac{x^{\frac{3}{6}}dx+adx}{x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{3}{6}}}$. Faisant donc $x^{\frac{1}{6}} = z$; j'aurois $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$; & par conséquent $\frac{6z^8dz+6az^5dz}{z^4+z^3}$ qui

se réduit à $\frac{6z^5 dz + 6az^2 dz}{z+1}$, & s'intégre facilement, par ce qui a été dit sur les fractions rationnelles.

143. Toute quantité dans laquelle il n'y aura qu'un radical complexe, qui ne passera pas le second degré, & où la variable, sous le radical, ne passera pas le second degré, peut toujours être rendue rationnelle par l'un ou l'autre des deux moyens suivants. 1°. Après avoir dégagé le quarré de la variable sous le radical, on égalera ce radical, à cette même variable, plus ou moins une autre variable; 2°. ou bien on décomposera la quantité affectée du radical, en ses deux facteurs; & on l'égalera ainsi décomposée à l'un de ses facteurs, multiplié par une nouvelle variable.

Par exemple, si j'avois $\frac{dx}{\sqrt{xx-aa}}$; je puis faire $\sqrt{xx-aa} = x-z$; j'aurai $x = \frac{zz+aa}{2z}$. Donc $dx = \frac{(zz-aa)dz}{2zz}$, & $\sqrt{xx-aa} = \frac{aa-zz}{2z} = -\frac{(zz-aa)}{2z}$; d'où $\frac{dx}{\sqrt{xx-aa}} = -\frac{dz}{z}$, qui est facile à intégrer.

Je pourrois aussi, dans ce même exemple, faire $\sqrt{xx-aa}$, ou $\sqrt{(x-a)(x+a)} = (x-a)z$; alors j'aurois, en quarrant & divisant ensuite par $x-a$, $x+a = (x-a)zz$; d'où $x = \frac{a+azz}{zz-1}$, $\sqrt{xx-aa} = \frac{2az}{zz-1}$; $dx = \frac{-4azdz}{(zz-1)^2}$; donc $\frac{dx}{\sqrt{xx-aa}} = \frac{-2dz}{zz-1}$, qui s'intégre par les regles ci-dessus, pour les fractions rationnelles.

On peut appliquer ces méthodes à la rectification de la parabole, dont l'élément $\sqrt{dx^2+dy^2}$, est $\sqrt{dy^2+\frac{4y^2dy^2}{p^2}}$, ou $dy\sqrt{1+\frac{4y^2}{p^2}}$ On dégagera d'abord y^2, en écrivant

$\frac{2\,dy}{p}\sqrt{\frac{p^2}{4}+y^2}$; & on fera $\sqrt{\frac{p^2}{4}+y^2}=y+z$.

144. Quand il n'y a d'autre radical qu'un radical quarré, & point d'autres puiſſances de x, que des puiſſances paires, on peut égaler le radical à une nouvelle variable multipliée par la variable actuelle. Par exemple, ſi j'avois $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}$; je pourrois faire $\sqrt{aa-xx}=xz$. Et s'il y avoit un ſecond terme ſous le radical, on pourroit encore faire uſage de cette transformation, en faiſant d'abord diſparoître le ſecond terme, du moins quand il n'y a aucune puiſſance de x, hors du radical.

145. Enfin, on peut, dans la vue de rendre rationnelle, tenter d'égaler la variable, ou une fonction quelconque de la variable, à une nouvelle variable, ou à une fonction d'une nouvelle variable, dans laquelle on laiſſe quelque choſe d'indéterminé & qui puiſſe ſervir à l'objet qu'on a en vue. Par exemple, pour ſavoir dans quels cas on peut rendre rationnelle, la quantité $x^m dx(a+bx^n)^p$, je ferois $(a+bx^n)^p=z^q$, q étant indéterminé. J'aurois $a+bx^n=z^{\frac{q}{p}}$; $x^n=\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}$;

$x=\left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $x^m=\left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$; . . . .

$dx=\frac{q}{npb}z^{\frac{q}{p}-1}dz\left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$; donc . . . .

$x^m dx(a+bx^n)^p=\frac{q}{npb}z^{\frac{q}{p}+q-1}dz.\left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}$

qui eſt intégrable quelque ſoit q, lorſque $\frac{m+1}{n}-1$ eſt un nombre entier poſitif ou zéro (86); & qui peut être rendue rationnelle, en faiſant $q=p$ lorſque $\frac{m+1}{n}-1$ eſt un nombre entier négatif. Et si p a pour valeur $\pm\frac{k}{2}$, k étant un nombre entier impair, on ramenera au cas mentionné (143), en faisant $q=k$, si $\frac{m+1}{n}$ a pour valeur $\pm\frac{k'}{2}$, k' étant un nombre entier impair.

146. Nous ne nous arrêterons pas à étendre ces sortes de transformations. Nous ferons seulement remarquer, qu'on facilite souvent certaines intégrations en égalant la variable, à une fraction telle que $\frac{1}{z}$. Par exemple, si j'avois . . . $\frac{x^{15}dx+adx}{x^{20}+x^{18}}$; en faisant $x=\frac{1}{z}$, j'aurois $\frac{-z^3\,dz-az^{18}\,dz}{1+zz}$, que, par la division, on réduira à une suite de monomes, & à une quantité de la forme $\frac{A\,dz}{1+zz}$ dont on connoît actuellement l'intégrale.

De l'Intégration des Quantités exponentielles.

147. Il n'y a pas d'autres regles à donner sur l'intégration de ces quantités, que de tenter de les décomposer en deux facteurs, dont l'un soit la différentielle du logarithme de l'autre, ou en soit une partie constante (28) ; alors on divise par la différentielle du logarithme de ce second facteur. Ainsi je vois que $x^y\left(dy\,lx+\frac{y\,dx}{x}\right)$ est intégrable, parce que le facteur $dy\,lx+\frac{y\,dx}{x}$ est la différentielle de $y\,lx$, qui est le logarithme de x^y; j'aurai donc pour intégrale $\frac{x^y\left(dy\,lx+\frac{y\,dx}{x}\right)}{d(l\,x^y)}$ $+C$; c'est-à-dire, $x^y\frac{\left(dy\,lx+\frac{y\,dx}{x}\right)}{dy\,lx+\frac{y\,dx}{x}}+C$, ou x^y+C.

Par cette même regle, je vois que $dx\,e^{ax}$ est intégrable, parce que dx est la différentielle du logarithme de e^{ax},

divisée par une constante. J'ai donc $\int dxe^{ax} = \frac{dxe^{ax}}{adxle} = \frac{e^{ax}}{ale}$.
Dans le cas où e est le nombre dont le logarithme est 1, la regle se réduit à diviser la différentielle proposée, par la différentielle de l'exposant de e.

Si l'on avoit à intégrer $x^m dxe^{ax}$, e étant le nombre dont le logarithme est 1, on le pourroit, lorsque m est un nombre entier positif, en faisant $\int x^m dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} + \&c. + k)$. Par exemple, si j'ai $x^2 dxe^{ax}$, je suppose $\int x^2 dxe^{ax} = e^{ax}(Ax^2 + Bx + E)$. En différenciant (28), & divisant ensuite par dxe^{ax}, j'ai $x^2 = Aax^2 + aBx + aE;$
$$+ 2Ax + B$$
donc $Aa = 1$, $aB + 2A = 0$, $aE + B = 0$; c'est-à-dire $A = \frac{1}{a}$ $B = \frac{-2}{aa}$, $E = \frac{2}{a^3}$, donc l'intégrale de $\int x^2 dxe^{ax}$ est . . e^{ax}
$$\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C.$$

On peut employer avantageusement le nombre e, dont le logarithme est 1, pour l'intégration de plusieurs quantités, principalement quand elles renferment des logarithmes. Par exemple, si j'avois à intégrer $x^n dx(lx)^m$, je ferois $lx = z = zle$; donc $x = e^z$; $dx = dze^z$, & par conséquent $x^n dx(lx)^m = z^m dz e^{(n+1)z}$, qui s'intégre dans le même cas que la précédente, & de la même maniere.

De l'Intégration des Quantités à deux, ou à un plus grand nombre de Variables.

148. Si l'on se rappelle la regle que nous avons donnée pour différencier les quantités à plusieurs variables, on verra que pour intégrer les différentielles à plusieurs variables (lorsque cela est possible), il faut rassembler tous les termes affectés de la différentielle d'une même variable, & les intégrer comme s'il n'y avoit d'autre variable que celle-là, c'est à-dire, comme si toutes les autres étoient constantes. Alors si l'on

différencie cette intégrale en faisant varier successivement toutes les variables, & que l'on retranche le résultat, de la différentielle proposée, l'intégrale qu'on a trouvée, est (en ajoutant une constante) la véritable intégrale, s'il ne reste rien. S'il y a un reste, il ne renfermera pas la variable par rapport à laquelle on a intégré : on suivra à l'égard de ce reste, le même procédé qu'on a suivi d'abord, & ainsi de suite par rapport à chaque variable. Par exemple, si j'avois $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$: je prendrois les deux termes affectés de dx, savoir $3x^2ydx + y^5dx$, & je les intégrerois comme si y étoit constant. L'intégrale est $x^3y + y^5x$. Or, cette quantité étant différenciée par rapport à x & à y, & le résultat étant retranché de la différentielle proposée, il ne reste rien : j'en conclus que l'intégrale est $x^3y + y^5x + C$.

Si j'avois $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; en rassemblant tous les termes affectés de dx, & intégrant en regardant y & z comme constantes, j'aurois $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Mais en retranchant la différentielle de cette quantité, prise en faisant varier x, y & z; en la retranchant, dis-je, de la proposée, il reste y^2dy; je prends donc l'intégrale de y^2dy qui est $\frac{y^3}{3}$, & l'ajoutant à celle que j'ai déja trouvée, j'ai (en y comprenant la constante) $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$, pour l'intégrale.

149. Mais comme il n'est pas toujours possible d'intégrer toute différentielle à plusieurs variables, il est bon de faire connoître à quel caractere on distinguera si cela se peut.

150. Pour y parvenir, il faut observer que si dans une quantité Q composée, comme on le voudra, de deux autres quantités x & y, on substitue d'abord pour x une quantité quelconque p, & que dans le résultat on substitue pour y une quantité q, on aura la même chose que si on avoit commencé par substituer q pour y, & ensuite p pour x : cela est évident.

151. Il suit de-là, que si on différencie une quantité quelconque Q composée de x, y & de constantes, en ne faisant d'abord que x variable, & qu'ensuite on différencie le résultat en ne faisant que y variable, on aura la même chose que si l'on eût d'abord différencié en regardant y seule comme variable, & qu'ensuite on eût différencié ce résultat, en regardant x seule comme variable.

En effet, concevons qu'en mettant d'abord $x+dx$ pour x, Q devienne Q'; on aura $Q'-Q$ pour la différentielle. Concevons qu'en mettant $y+dy$ dans celle-ci, au lieu de y, Q' devienne Q'', & que Q devienne Q''', ensorte que $Q'-Q$ devienne $Q''-Q'''$, on aura $Q''-Q'''-Q'+Q$ pour la seconde différentielle.

Faisons maintenant nos substitutions en sens contraire; & puisqu'en mettant $y+dy$, au lieu de y dans Q, il devient Q''', on aura $Q'''-Q$ pour la premiere différentielle dans la supposition de y variable. Si nous mettons maintenant $x+dx$, au lieu de x dans cette quantité, Q deviendra Q', comme ci-dessus; & Q''' (150) deviendra Q'', ensorte, que $Q'''-Q$ deviendra $Q''-Q'$; donc la seconde différentielle sera $Q''-Q'-Q'''+Q$, précisément la même que la premiere.

Cela posé, convenons que si A représente une quantité composée de x & de y; $\frac{dA}{dy}dy$ marquera la différentielle de A prise en faisant varier y; $\frac{dA}{dx}dx$, celle de A prise en faisant varier x. De même; $\frac{ddA}{dxdy}\cdot dx\,dy$ marquera que l'on différencie d'abord A, en supposant x seule variable, & qu'ensuite on différencie le résultat en faisant varier y seul.

152. Ces éclaircissements posés, soit $Adx+Bdy$ une différentielle exacte, & M son intégrale; on aura donc $\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy = Adx+Bdy$; donc $\frac{dM}{dx}=A$, & $\frac{dM}{dy}=B$; donc aussi $\frac{ddM}{dxdy}dy = \frac{dA}{dy}dy$, & $\frac{ddMdx}{dydx}=\frac{dBdx}{dx}$, ou $\frac{ddM}{dxdy}=\frac{dA}{dy}$, & $\frac{ddM}{dydx}=\frac{dB}{dx}$; or nous venons de démontrer (151) que $\frac{ddMdxdy}{dxdy}=\frac{ddMdydx}{dydx}$; donc $\frac{ddM}{dxdy}=\frac{ddM}{dydx}$; donc aussi $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$; c'est-à-dire, que si $Adx+Bdy$ est une différentielle complette, la différentielle de A prise en faisant varier y seule, & divisant par dy, doit être égale à la différentielle de B prise en faisant varier x seule, & divisant par dx.

Ainsi je reconnois que $\frac{1}{3}y^3dx+xy^2dy$ est une différentielle complette, parce que $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$; en effet, le premier membre se réduit à $\frac{y^2 dy}{dy}$, & le second à $\frac{y^2 dx}{dx}$. Au contraire je vois que $xydx + 2xdy$ n'est pas intégrable, parce que $\frac{d(xy)}{dy}$ n'est pas égal à $\frac{d(2x)}{dx}$.

153. S'il entre plus de deux variables dans la différentielle proposée; c'est-à-dire, si elle est de cette forme $Adx + Bdy + Cdz$, il faut pour qu'elle soit intégrable, que l'on ait $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$; en effet, on peut regarder successivement z, y, & x comme constantes; & la différentielle qui n'a plus alors que deux termes, (puisque cette supposition donne ou $dz = 0$, ou $dy = 0$, ou $dx = 0$), n'en doit pas moins être une différentielle complette si la proposée l'est. Elle doit donc, dans chacun de ces cas, avoir les qualités des différentielles complettes à deux variables.

Il est aisé, d'après cela, de trouver les conditions pour un plus grand nombre de variables.

Remarque.

154. Supposons que Q soit une quantité inconnue composée de x, y & de constantes; & que l'on connoisse sa différentielle Adx, prise en regardant y comme constante. Si l'on veut avoir la différentielle totale de Q, on supposera qu'elle est $Adx + Bdy$; alors B doit être tel que l'on ait $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; donc $dB = \frac{dA}{dy}dx$; intégrons en regardant x seule comme variable, puisque nous n'avons fait varier que x, dans B. Nous aurons $B = \int \frac{dA}{dy}dx$; donc $Bdy = dy\int\frac{dA}{dy}dx$. Or puisque Adx est supposé la différentielle de Q prise en faisant varier x, on a $Q = \int Adx$, l'intégration étant faite en regardant x seule comme variable; donc la différentielle complette de Q, ou de $\int Adx$ est $Adx + dy\int\frac{dA}{dy}dx$, où l'intégration $\int\frac{dA}{dy}dx$ doit se faire en regardant y comme constante.

Des Equations différentielles.

155. LORSQUE l'équation différentielle proposée ne renferme que deux variables, x & y; & que l'on a, dans un seul membre, les x & dx; & les y & dy dans l'autre : alors l'intégration se réduit, pour chaque membre, aux regles que nous avons données pour les différentielles à une seule variable.

Ainsi, si l'on avoit $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, qui peut représenter toutes les équations différentielles à deux termes; cette équation dont les indéterminées se séparent tout de suite en divisant par y^n & par x^r, devient $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$ dont l'intégrale est évidemment $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

156. Mais comme il peut arriver que l'un, ou l'autre, ou aucun des deux membres de l'équation différentielle séparée, ne soit intégrable algébriquement, & que néanmoins l'équation puisse être algébrique, ou du moins ramenée à une forme algébrique, il est bon d'examiner ceux de ces cas qui se rencontre le plus fréquemment.

Par exemple, si dans l'équation précédente, on avoit $m-r = -1$, & $q-n = -1$; l'équation différentielle se réduiroit à $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, dont on ne peut avoir l'intégrale de chaque membre que par logarithmes; ensorte qu'on a $alx = bly + lC$*. Mais cette équation peut être rendue algébrique, en l'écrivant ainsi $lx^a = ly^b + lC$, ou $lx^a = lCy^b$; or il est évident que si les deux logarithmes sont égaux, les deux quantités auxquelles ils appartiennent, doivent être égales; donc $x^a = Cy^b$, équation algébrique.

157 Si l'on avoit seulement $p - n = -1$; l'équation différentielle seroit $ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$, dont l'intégrale est $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bly + lC$; mais on peut donner à cette équation une forme algébrique, en multipliant le premier membre par le, e étant un nombre dont le logarithme est 1**; car

* On est le maître de supposer que la constante est un logarithme.

** Nous l'avons déterminé (114).

alors on ne changera rien à l'équation. On aura donc $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} le = bly + lC$, ou, (en faisant $m - r + 1 = p$) $l\frac{ax^p}{e^p} + lCy^b$, & par conséquent $\frac{ax^p}{e^p} = Cy^b$. Dorénavant nous marquerons toujours par e, le nombre dont le logarithme est 1.

158. Prenons pour second exemple, l'équation $n\,d\,x = \frac{dz}{\sqrt{1-zz}}$; le second membre exprime l'élément d'un arc de cercle dont z est le sinus, & 1 le rayon. z est donc le sinus de $\int\frac{dz}{\sqrt{1-zz}}$, c'est-à-dire, de $\int n\,d\,x$ ou de $n\,x + C$. On a donc pour intégrale, $z = \mathit{sin}(n\,x + C)$. Pareillement, de l'équation $n\,d\,x = \frac{-dz}{\sqrt{1-zz}}$, on concluroit $z = \mathit{cos}(n\,x + C)$.

159. De même, puisque $\frac{dz}{1+zz}$, exprime l'élément d'un arc de cercle dont 1 est le rayon, & z la tangente; si l'on avoit $ndx = \frac{dz}{1+zz}$, on concluroit $z = \mathit{tang}\ (n\,x + C)$. Mais si on avoit $ndx = \frac{b\,dz}{a+fzz}$; pour la ramener à la forme de la précédente, on feroit $z = m\,u$, m étant un coëfficient constant; alors on auroit $\frac{bmdu}{a+fm^2u^2}$; supposant donc $fm^2 = a$; on auroit $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$, ce qui donneroit $n\,d\,x = b\frac{\sqrt{\frac{a}{f}}\,d\,u}{a+a\,u\,u}$, d'où l'on tire $\frac{du}{1+uu} = \frac{n}{b}dx\sqrt{af}$; donc u, ou $\frac{z}{m}$ ou $z\sqrt{\frac{f}{a}} = \mathit{tang}\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C\right)$. Donc $z = \sqrt{\frac{a}{f}}$. $\mathit{Tang}\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C\right)$.

160. Dans les expressions $\mathit{sin}\,(nx + C)$, $\mathit{tang}\,(nx + C)$, que nous venons de trouver, $n\,x + C$ exprime la longueur absolue

absolue de l'arc en parties du rayon 1. Mais comme il est plus commode d'employer les nombres de degrés que les longueurs mêmes, il faudra quand on rencontrera de pareilles expressions, évaluer les arcs en degrés ; ce qui est facile en les divisant par le nombre de parties du rayon que contient un degré, c'est-à-dire, par 0,0174533, (ou ce qui revient au même) en les multipliant par 57,2974166. Ainsi le sinus de l'arc qui a pour longueur b ; ou le sinus de l'arc qui a un nombre de degrés exprimé par $b \times 57,2974166$, sont la même chose.

161. Si l'on avoit $\frac{n\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$ dont les deux membres expriment les éléments de deux arcs qui sont l'un à l'autre : : 1 : n & dont les sinus sont x & y ; alors pour intégrer on rendroit chaque membre rationnel, en faisant pour le premier, $\sqrt{1-xx} = x\sqrt{-1} - z$; & pour le second, $\sqrt{1-yy} = y\sqrt{-1} - t$. L'équation se changeroit en $\frac{n\,dz}{z} = \frac{dt}{t}$, dont l'intégrale est $nlz = lt + lC$, d'où l'on tire $Ct = z^n$; & en mettant pour t & z leurs valeurs, $C(y\sqrt{-1} - \sqrt{1-yy}) = (x\sqrt{-1} - \sqrt{1-xx})^n$, qui exprime généralement, le rapport des sinus x & y de deux arcs multiples l'un de l'autre.

Mais pour faire usage de cette équation, il faut, auparavant, déterminer la constante C. Or supposant (comme on le peut) que les deux arcs ont une même origine ; alors x & y doivent devenir zéro en même temps ; mais dans ce cas, l'équation devient $C\sqrt{-1} = (-\sqrt{1})^n$, ou $-C = (-1)^n$; or $(-1)^n$ est $+1$ ou -1, selon que n est pair ou impair ; on a donc $-C = \pm 1$, & $C = \mp 1$; le signe supérieur étant pour le cas de n, pair ; & l'inférieur, pour n, impair ; donc enfin $\mp(y\sqrt{-1} - \sqrt{1-yy})$ $= (x\sqrt{-1} - \sqrt{1-xx})^n$.

Dans chaque cas particulier, on pourra toujours faire disparoître les imaginaires ; mais le moyen le plus simple, sera d'égaler à zéro (après avoir tout transposé dans un seul membre), la somme des quantités réelles ; alors on verra que l'équation restante sera divisible par $\sqrt{-1}$, & sera la même que celle qu'on aura formée en égalant à zéro la somme des quantités réelles. Par exemple, si l'on fait $n = 2$, on aura $-y\sqrt{-1} + \sqrt{1-yy} = -xx - 2x\sqrt{-1}.\sqrt{1-xx} + 1 - xx$, ou $\sqrt{1-yy} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}.\sqrt{1-xx} - y\sqrt{-1} = 0$; égalant donc à zéro, la somme des quantités réelles, on aura $\sqrt{1-yy}+2xx-2=0$; & l'équation totale sera réduire à $2x\sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-xx}-y\sqrt{-1}=0$, qui étant divisée par $\sqrt{-1}$, donne $2x\sqrt{1-xx}-y=0$, ou $y=2x\sqrt{1-xx}$; or si l'on quarre cette équation, & l'équation $\sqrt{1-yy}+2xx-1=0$, ou plutôt $\sqrt{1-yy}=1-2xx$, on aura le même résultat.

On peut, de la même maniere, trouver les cosinus & les tangentes des arcs multipliés. Pour ces dernieres, on intégreroit $\frac{ndx}{1+xx}=\frac{dy}{1+yy}$ (111), en décomposant $1+xx$, en $(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$, & $1+yy$ en $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$; on acheveroit ensuite, par ce qui a été dit, sur les fractions rationnelles (133 & 136).

162. Pendant que nous sommes sur cette matiere, faisons connoître une maniere d'exprimer le sinus & le cosinus d'un arc, laquelle peut être d'usage.

Soit donc $dx=\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$, l'équation qui exprime la relation, entre un arc x, & son sinus y. Si l'on fait $\sqrt{1-yy}=y\sqrt{-1}-z$; on aura $dx=\frac{-dz}{z\sqrt{-1}}$, ou $\frac{dz}{z}=-dx\sqrt{-1}$, dont l'intégrale est $lz=-x\sqrt{-1}+lC$, ou $lz=-x\sqrt{-1}\,le+lC$, (157) qui donne $z=Ce^{-x\sqrt{-1}}$; & mettant pour z, sa valeur, on a $y\sqrt{-1}-\sqrt{1-yy}=Ce^{-x\sqrt{-1}}$. A l'égard de la constante C, on la déterminera en observant que l'arc x & son sinus, doivent devenir zéro en même temps; on aura donc $\sqrt{-1}=C$; donc $y\sqrt{-1}-\sqrt{1-yy}=e^{-x\sqrt{-1}}$; & par conséquent $\sqrt{1-yy}=y\sqrt{-1}+e^{-x\sqrt{-1}}$; quarrant, & réduisant, on aura $y=\frac{1-e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\cdot e^{-x\sqrt{-1}}}=\frac{e^{x\sqrt{-1}-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; donc puisque y est sinus de x, on a $\sin x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Si dans le second membre de l'équation $\sqrt{1-yy}=y\sqrt{-1}+e^{\sqrt{-1}}$, on met pour y, la valeur qu'on vient de trouver, on aura $\sqrt{1-yy}$, c'est-à-dire, $cof\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} +$ $e^{-x\sqrt{-1}} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; donc $cof\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$.

Revenons à l'intégration des équations.

163. Lorsque les indéterminées ne sont pas séparées dans l'équation différentielle proposée, alors avant d'entreprendre de les séparer, il faut voir si, par hazard, l'équation ne seroit pas intégrable dans l'état où elle est. Or c'est ce que l'on reconnoîtra (152), en examinant si $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, supposant que $Adx + Bdy = 0$ représente cette équation. Si cette condition avoit lieu, on intégreroit, comme il a été dit (148).

164. Cependant il pourroit se faire que cette condition n'eût pas lieu, & que l'équation n'en fût pas moins intégrable; mais ce seroit en la multipliant par un facteur convenable composé de x, de y, & de constantes.

Soit P, ce facteur. Alors $APdx + BPdy = 0$ sera donc une différentielle complette. Il faut donc que $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. La question est donc réduite à trouver pour P une fonction de x, de y, & de constantes, qui satisfasse à cette équation. Mais, comme cette recherche est d'une trop longue discussion, nous nous bornerons à trouver P dans le cas où il ne doit renfermer que des x & des constantes seulement, ou des y & des constantes seulement. Supposons donc que P ne doit contenir que des x, on aura simplement $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$, d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx}{B}$, on aura donc aisément P, si $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ se réduit à une fonction de x, comme cela est nécessaire, pour que P, soit, comme on le suppose une fonction de x seule.

On pourroit encore trouver le facteur, s'il devoit être composé d'une fonction de x, multipliée ou divisée par une fonction de y d'une forme connue.

165. C'est, par ce moyen, qu'on peut intégrer généralement toute équation de la forme suivante . . . . . $Xy^q\, dy + X'y^{q+1}\, dx + X''y^r\, dx = 0$, X, X', X'' étant des fonctions quelconques de x; q & r des exposants quelconques.

Je pourrois chercher, si elle ne devient pas intégrable en la multipliant par un facteur de la forme Py^n, P étant une fonction de x, & n un exposant indéterminé; & je trouverois que cela se peut, en supposant $n = -r$. Mais il est plus simple de réduire tout de suite l'équation à cette forme $y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}\, dx + F'dx = 0$, en divisant par X & par y^r, & représentant par F & F' les quotients $\frac{X'}{X}$ & $\frac{X''}{X}$. Alors pour intégrer celle-ci, je suppose que P soit le facteur; P étant une fonction de x J'aurai donc $Py^{q-r}\, dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0$. Or si P est une fonction de x, $F'P$ le sera aussi; $\int F'Pdx$ se réduira donc à l'intégration des quantités à une seule variable. Il ne s'agit donc que de rendre $Py^{q-r}\, dy + FPy^{q-r+1}\, dx$ une différentielle complette; ce qui exige que $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$; c'est-à-dire, que $y^{q-r}\frac{dP}{dx} = \ldots\ldots (q-r+1)y^{q-r}FP$ d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = (q-r+1)\, Fdx$; & en intégrant $lP = \int(q-r+1)\, Fdx = \int(q-r+1)\, F\, dx . le$; donc $P = e^{\int(q-r+1)F\, x}$. Substituant cette valeur de P dans l'équation $Py^{q-r}\, dy +$ &c. & intégrant, on aura . . .

$$\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{\int(q-r+1)Fdx} + \int F'\, dx\, e^{\int(q-r+1)Fdx} + C = 0.$$

Je n'ai point ajouté de constante, dans l'intégration de l'équation qui a donné P, parce que n'y ayant aucune condition pour la déterminer, on est maître de la supposer nulle.

Prenons un exemple. Supposons qu'on ait à intégrer

$dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)\,dx = 0$. En multipliant par le facteur P, on aura $P\,dy + \frac{ayP\,dx}{x} + P(bx^2 + cx + f)\,dx = 0$ il faut donc que $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; donc $\frac{dP}{P} = \frac{a\,dx}{x}$, donc $lP = alx$, ou $P = x^a$. L'équation devient donc $x^a\,dy + ax^{a-1}y\,dx + bx^{a+2}\,dx + cx^{a+1}\,dx + fx^a\,dx$, dont l'intégrale est $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+}$

166. L'équation générale que nous venons d'intégrer, se rencontre assez fréquemment; & la méthode que nous avont employée, peut s'appliquer dans beaucoup d'autres cas; en voici qui pourront nous être utiles par la suite.

Si l'on avoit les deux équations * $dx + ady + (bx + cy)\,Tdt = 0$, $kdx + a'dy + (b'x + c'y)\,T\,dt = 0$, x, y, & t, étant trois variables; a, b, c, a' &c. des constantes, & T, une fonction quelconque de t; on réduiroit l'intégrale de ces deux équations, à la méthode précédente, en cette maniere. Je multiplie l'une des deux, la premiere, par exemple, par un coëfficient indéterminé & constant g, & ajoutant à la seconde, je multiplie la totalité par un facteur P, que je suppose être une fonction de t; j'aurai $(gP + kP)\,dx + (gaP + a'P)\,dy + ((gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)\,y)\,Tdt = 0$. Supposons maintenant que cette équation soit une différentielle exacte; il faudra (153) que l'on ait 1°. $\frac{d(gP + kP}{dt} = \ldots \frac{d((gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)\,y)\,T)}{dy}$; 2°. $\frac{d(gaP + a'P}{dt} = \frac{d((gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)\,y)\,T)}{dy}$; 3°. $\frac{a(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}$. Or P étant supposé une fonction de t, cette

* Voyez *Mém. Acad. de Berlin*, année 1748, une méthode qu'a donnée M. d'Alembert, pour l'intégration de ces équations.

derniere équation ſe réduit à $0 = 0$. Et les deux autres donnent $(g+k)\frac{dP}{dt} = (gb+b')PT$, & $(ga+a')\frac{dP}{dt} = (gc+c')PT$; d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, & $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}Tdt$; donc, égalant ces deux valeurs de $\frac{dP}{P}$, & diviſant par Tdt on aura $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$, équation où g montera au ſecond degré, & qui étant réſolue, donnera deux valeurs de g.

Suppoſant donc g connu, on aura aiſément P; puiſque l'équation $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, donne $Pe = e^{\int \frac{gb+b'}{g+k}Tdt}$. Or l'équation $(gP+kP)dx +$ &c. étant actuellement une différentielle exacte, ſi on l'intégre, on aura $(gP+kP)x + (gaP+a'P)y + C = 0$; donc ſi g marquant la premiere valeur de g donnée par l'équation du ſecond degré ci-deſſus, on repréſente par g' la ſeconde valeur de g, & par P' ce qui devient P, en mettant g' pour g, on aura auſſi $(g'P'+kP')x + (g'aP'+a'P')y + C' = 0$, C' étant une nouvelle conſtante. En effet, il n'y a aucune raiſon pour employer une des valeurs de g plutôt que l'autre. Or de ces deux équations, il eſt facile de conclure les valeurs de x & de y, qui ſeront exprimées en t & en conſtantes.

Si la fonction T de t qui entre dans les deux équations étoit différente dans chacune; on s'y prendroit de la même maniere, mais en regardant g comme une fonction de t; & l'intégration ſeroit réduite à celle d'une équation à deux variables g & t ſeulement.

Si l'on avoit quatre variables x, y, z & t, exprimées par trois équations de cette forme $adx + bdy + cdz + (ex+fy+hz)Tdt = 0$, & dans leſquelles la fonction T fût la même; on les intégreroit de la même maniere, en multipliant la ſeconde & la troiſieme par des quantités indéterminées & conſtantes g & g'; puis ajoutant les deux produits à la premiere, on multiplieroit le tout par un facteur P que l'on ſuppoſeroit être une fonction de t ſeulement. Suppoſant alors que cette nouvelle équation eſt une différentielle exacte, on trouveroit, par ce qui a été dit (153) les équations qui doivent déterminer g, g' & P. L'équation qui déterminera g, ou celle qui déterminera g' sera du troisieme degré; on aura donc trois valeurs pour g, trois correspondantes pour g' & trois correspondantes pour P; ce qui donnera en changeant la constante pour chaque valeur de g, trois intégrales, à l'aide desquelles il sera facile de déterminer x, y & z, en t.

On voit ce qu'il y auroit à faire, quand il y auroit un plus grand nombre de variables, pourvu que les équations fussent toujours de la forme des précédentes. La méthode seroit encore la même, quand même il y auroit un ou plusieurs termes exprimés purement en t, dt & constantes.

167. Mais si l'on avoit en général un nombre quelconque m d'équations renfermant $m+1$ variables, combinées entr'elles de quelque façon que ce soit; on multiplieroit la seconde, la troisieme, &c. jusqu'à la derniere, respectivement par des quantités g, g', g'', &c. que l'on supposeroit être des fonctions indéterminées de ces variables; on les ajoutera à la premiere, puis multipliant le tout par un facteur P que l'on supposera aussi être une fonction de ces variables, on supposera que l'équation totale est une différentielle complette. Par exemple, si j'avois les deux équations $Adx + Bdy + Cdz = 0$, $A'dx + B'dy + C'dz = 0$. Je multiplierois la seconde par g; ajoutant à la premiere & multipliant le tout par P, j'aurois $P(A + A'g)dx + P(B + B'g)dy + P(C + C'g)dz = 0$. Or pour que celle-ci soit une différentielle complette, il faut (153) que $\frac{d(P(A+A'g))}{dy} = \frac{d(P(B+B'g))}{dx}$, $\frac{d(P(A+A'g))}{dz} = \frac{d(P(C+C'g))}{dx}$; $\frac{d(P(B+B'g))}{dz} = \frac{d(P(C+C'g))}{dy}$. C'est-à-dire, $\frac{dP}{dy}(A + A'g) + P\frac{d(A+A'g)}{dy} = \frac{dP}{dx}(B+B'g) + P\frac{d(B+B'g)}{dx}$, $\frac{dP}{dz}(A + A'g) + P\frac{d(A+A'g)}{dz} = \frac{dP}{dx}(C+C'g) + P\frac{d(C+C'g)}{dx}$; $\frac{dP}{dz}(B+B'g) + P\frac{d(B+B'g)}{dz} =$

$\frac{dP}{dy}(C+C'g)+P\frac{d(C+C'g)}{dy}$. Si à l'aide des deux dernieres équations, on tire les valeurs de $\frac{dP}{dx}$ & de $\frac{dP}{dy}$, & qu'on les substitue dans la premiere, on aura, après réduction faite, $(C+C'\left(\frac{d(A+A'g)}{dy}-\frac{d(B+B'g)}{dx}\right)+(A+Ag)\times\left(\frac{d(B+B'g)}{dz}-\frac{d(C+C'g)}{dy}\right)+(B+B'g)\left(\frac{d(C+C'g)}{dx}-\frac{d(A+A'g)}{dz}\right)=0$, équation indépendante de P. On cherchera donc pour g, une fonction de x, y & z, la plus générale qu'il soit possible, & qui puisse satisfaire à cette équation. Ayant trouvé g, on cherchera pour P une fonction de x, de y & de z, qui satisfasse à deux quelconques des trois équations qu'on a trouvées d'abord ci-dessus, ce qui, à la vérité, exige souvent beaucoup de recherches, mais du moins est toujours possible.

Remarquons que si l'on n'avoit qu'une seule équation, c'est-à-dire, si l'on avoit $A'=0$, $B'=0$, & $C'=0$, la derniere équation que l'on vient de trouver, se réduiroit à $C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)+A\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)+B'\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}\right)=0$; qui étant une équation de condition entre les coëfficients A, B, C, fait voir que pour qu'une équation différentielle à trois variables $Adx+Bdy+Cdz=0$ soit intégrable, même en la multipliant par un facteur, il faut que les coëfficients A, B, C aient la relation marquée par l'équation $C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)+$ &c. $=0$. Lorsque cette condition est remplie, on détermine le facteur P, de maniere qu'il satisfasse à deux des trois équations $\frac{d(AP)}{by}=\frac{d(BP)}{dx}$, $\frac{d(AP)}{dz}=\frac{d(CP)}{dx}$, $\frac{d(BP)}{dz}=\frac{d(CP)}{dy}$.

On voit par-là, ce qu'il y a à faire quand on a un plus grand nombre d'équations & un plus grand nombre de variables;

& l'on peut, par ce même moyen, trouver quelles sont les équations où il suffira que g soit une constante, ou une fonction de l'une, ou de deux des variables, &c.

168. Lorsque l'équation différentielle proposée ne rentre pas dans les cas que nous avons exposés jusqu'à (167); alors il faut voir si l'on ne peut pas séparer les indéterminées. Quelquefois il ne faut, pour cela, que l'application des regles ordinaires de l'Algébre: d'autres fois il faut des transformations. Mais il y a beaucoup d'équations à l'égard desquelles on ignore quelle est la transformation convenable.

L'équation $ax^n\,dx + byq\,x^n\,dx = y^k\,dy\,(e+fx^h)^r$ se sépare immédiatement par la division, parce qu'elle est la même chose que $(a+byq)\,x^n\,dx = y^k\,dy\,(e+fx^h)^r$, qui devient $\frac{x^n\,dx}{(e+fx^h)^r} = \frac{y^k\,dy}{a+byq}$, dont l'intégration dépend de celle des quantités [illegible] à une seule variable.

Mais [illegible] $gxdx = ax\,y\,dy + 2abx^2y^3\,dy + abby^5\,dy$; on voit d'abord facilement, qu'on peut l'écrire ainsi, $gxdx = (x^4 + 2bx^2y^2 + bby^4)\,a\,y\,dy$. On voit ensuite qu'on peut lui donner cette autre forme, $g\,x\,dx = (x^2+by^2)^2 \times a\,y\,dy$. Or avec un peu d'attention, on voit que la séparation réussira, si l'on fait $x^2 + by^2 = z$; en effet, on aura $x^2 = z - bz^2$, & $xdx = \frac{1}{2}\,dz - by\,dy$; donc substituant, on aura $\frac{1}{2}\,gdz - bgydy = azzydy$. Equation d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{2}\,g\,dz}{bg+azz} = y\,dy$, qui est facile à intégrer.

169. Comme on ne peut donner de regles générales sur le transformations, nous nous bornerons à quelques cas asse généraux, dans lesquels on sait que la séparation réussit.

On peut séparer, généralement, dans toutes les équations homogenes à deux variables; c'est-à-dire, dans celles où les deux indéterminées [illegible] & [illegible], ont dans chaque terme, soit qu'elles se trouvent ensemble, soit qu'elles soient seules, la même somme de dimensions.

En effet, concevons que $Adx + Bdy = 0$, soit une équation homogene; & que l'on divise tout par une puissance de x, dont l'exposant soit égal au nombre des dimensions de l'équation; il est facile de sentir qu'il n'y aura plus dans A & dans B, que des puissances de $\frac{y}{x}$ & des constantes; ensorte que l'équation ſera $F\,dx + F'\,dy = 0$, F & F' étant des fonctions de $\frac{y}{x}$ & de conſtantes. Cela poſé, puiſque $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx}$, on aura $dx = \frac{-xx}{y}\,d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}\,dy$; donc ſi l'on fait $\frac{y}{x} = z$, on aura $dx = -\frac{y\,dz}{zz} + \frac{dy}{z}$; ſubſtituant donc pour $\frac{y}{x}$, & pour dx leurs valeurs, on aura $-\frac{F\,y\,dz}{zz} + \frac{F\,dy}{z} + F'\,dy = 0$, F & F' étant actuellement des fonctions de z & de conſtantes. Or cette équation donne $\frac{dy}{y} = \frac{F\,dz}{Fz + F'zz}$, équation toute ſéparée; puiſque F & F' ne renferment plus d'autre variable que z.

Par exemple, ſi j'avois $y^3\,dx + y^2 x\,dy + bx^3\,dy = 0$, qui eſt homogene, & dont le nombre des dimenſions eſt 3; je diviſerois par x^3, & j'aurois $\frac{y^3}{x^3}\,dx + \frac{y^2}{x^2}\,dy + b\,dy = 0$; faiſant donc $\frac{y}{x} = z$, ou $x = \frac{y}{z}$, j'aurois $dx = \frac{z\,dy - y\,dz}{zz}$; ſubſtituant dans l'équation propoſée, il vient $z^2\,dy - yz\,dz + z^2\,dy + b\,dy = 0$, d'où je tire $\frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{2z^2 + b}$, dont l'intégrale eſt $ly = \frac{1}{4}\,l\,(2z^2 + b) + lC$, qui donne $y = C\,(2z^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, ou $y^4 = C^4\,(2z^2 + b)$, ou enfin $y^4 = C^4\left(2\,\frac{y^2}{z^2} + b\right)$, en remettant pour z, ſa valeur $\frac{y}{x}$.

170. Il ſeroit donc avantageux de pouvoir rendre les équations homogenes. On n'a pas de méthode générale pour cela. Il faut avoir recours aux transformations. Celles qui peuvent promettre quelques ſuccès, conſiſtent à égaler une des variables, ou une fonction de cette variable, ou même une fonction des deux, à une fonction d'une nouvelle variable avec des expoſants indéterminés. On détermine enſuite ces expoſants, par la condition que l'équation transformée ſoit homogene.

Par exemple, ſi je veux chercher des cas où l'équation $ax^m\,dx + by^n x^q\,dy + cy^k\,dy = 0$, à laquelle on peut réduire toute équation à trois termes, si je veux, dis-je, chercher des cas où elle puisse devenir homogene, je ferai $x = z^h$; alors j'aurai $ahz^{mh+h-1}dz - by^n z^{qh} dy + cy^k dy = 0$. Or, il faut, pour que celle-ci soit homogene, que l'on ait $k = qh + n$, & $k = mh + h - 1$, d'où l'on tire $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, & $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$, ainsi, si les exposants k, q, m & n sont tels que cette derniere équation ait lieu, on pourra rendre l'équation homogene, & par conséquent séparer.

171. En général, au défaut des méthodes directes, on cherche à ramener les équations proposées, à d'autres équations dont l'intégration soit connue. C'est ainsi qu'on en use, par exemple, à l'égard de l'équation particuliere $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, connue sous le nom d'équation de *Riccati*, & que l'on ne sait intégrer que pour certaines valeurs de m.

Si m étoit zéro, on auroit alors $dy + ay^2 dx = b\,dx$ qui est séparable, & donne $\frac{dy}{b - ay^2} = dx$, dont l'intégration est facile.

Mais pour intégrer l'équation, lorsque m a d'autres valeurs, il faut tâcher de la changer en une autre, où ay^2 & b soient multipliés par une même puissance de x; alors elle sera séparable. Voici comment on trouve les valeurs de m, qui permettent cette transmutation. Faisons $y = Ax^p + x^q t$; nous aurons $dy = pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt$; substituant, il vient $pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + ax^{2q}ttdx$
$+ aAAx^{2p}dx + 2aAx^{p+q}tdx = bx^m dx$.

Supposons $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$, $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$; nous aurons $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$; ce qui change la transformée, en $x^{-2}dt + ax^{-4}ttdx = bx^m dx$, ou ... $dt + ax^{-2}ttdx = bx^{m+2}dx$, qui sera séparable, si $m = -4$. Faisons, dans celle-ci, $t = \frac{1}{z}$, elle se changera en .... $dz + bx^{m+2}zzdx = ax^{-2}dx$. Faisant donc $z = A'x^{p'} + x^{q'}t'$, & opérant comme ci-devant, on aura . . . .

$$p'A'x^{p'-1}dx + q'x^{q'-1}t'dx + x^{q'}dt' + bx^{2q'+m+2}t't'dx$$
$$+ bA'^2 x^{2p'+m+2}dx + 2bA'x^{p'+q'+m+2}t'dx. \qquad = ax^{-2}dx,$$

Supposant $2p' + m + 2 = p'-1$, $p'A' + bA'^2 = 0$, $q' + 2bA' = 0$, $q'-1 = p' + q' + m + 2$, on aura $p' = -m-3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m-6$, & $x^{-2m-6}dt' + bx^{-3m-10}t't'dx = ax^{-2}dx$, ou $dt' + bx^{-m-4}t't'dx = ax^{2m+4}dx$, qui sera séparable, si $-m-4 = 2m+4$, ou si $m = -\frac{8}{3}$.

Si l'on fait $t' = \frac{1}{z}$, puis $z' = A''x + x^{q''}t''$, & que l'on continue toujours de même, on trouvera successivement, que l'équation est séparable, lorsque $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{20}{9}$, &c; c'est-à-dire, en général, lorsque $m = \frac{-4r}{2r-1}$, r étant un nombre entier positif.

Et en remontant aux substitutions précédentes, on verra que y a pour expression . . . .

$$y = Ax^{-2} + x^{-2}\left(\frac{1}{A'x^{-m-3} + x^{-2m-6}}\right.$$
$$\left(\frac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4m-10}}\right.$$
$$\left(\frac{1}{A'''x^{-3m-7} + \&c.}\right.$$

en continuant jusqu'à ce que l'exposant de x dans le premier terme du dernier dénominateur soit $-\overline{m+2}\,.\,\overline{r-1}-1$; & alors le second terme de ces dénominateur sera $x^{-(2m+4)(r-)-2}t$; t étant une variable qui après la substitution de cette valeur de y, se détermine par l'intégration de l'équation résultante, qui est séparable alors; il faut seulement excepter le cas où $r = 1$, dans lequel on doit faire simplement $y = Ax^{-1} + x^{-2}t$.

Reprenons l'équation $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, & concevons qu'au lieu de substituer d'abord $y = A^p x + x^q t$, comme nous l'avons fait ci-dessus, nous fassions d'abord $y = \frac{1}{z}$, puis $z = Ax^p + ^q t$, & que nous continuions d'opérer comme ci-dessus; on conclura, de même, que l'on séparera toutes les fois que $m = \frac{-4r}{2r+1}$, r étant un nombre entier positif. Et la valeur de y sera . . . .

$$y = \cfrac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-2}\left(\cfrac{1}{A'x^{-2m-3} + x^{-4m-6}\left(\cfrac{1}{A''x^{-3m-5} + \&c.}\right.}\right.}$$

en continuant de même jusqu'à ce que le premier terme en x dans le dernier dénominateur, soit $-mr-2r+1$; & alors le second terme doit être $x^{2mr-4r+2t}$.

On ramenera aux mêmes cas, l'équation, $x^q dy + ay^2 x^n dx = bx^m dx$, en divisant par x^q, puis faisant $x^{n-q+1} = z$.

Tels sont les moyens généraux que l'on emploie, lorsque les dx & les dy ne passent pas le premier degré. Quant aux équations qui renfermeroient différentes puissances de dx & dy; comme elles ne peuvent manquer d'être homogenes à l'égard de dx & dy, on divisera tout par dx élevé à une puissance égale à la somme des dimensions de dx & dy; on résoudra l'équation en considérant $\frac{dy}{dx}$ comme l'inconnue. Alors dx & dy n'étant plus qu'au premier degré, on verra, si on peut appliquer à cette équation les méthodes précédentes.

Des Equations différentielles du second, troisieme, &c. ordre.

171. LA liberté que l'on a (19) de prendre pour constante dans une différenciation, l'une quelconque des différences premieres, peut contribuer dans beaucoup de cas, à faciliter l'intégration. Mais comme il peut arriver que lors de la différenciation, on ait fait constante, la différentielle qui n'est pas la plus propre à faciliter l'intégration, il faut commencer par montrer comment on peut ramener une équation différentielle dans laquelle on a supposé telle ou telle différence constante, à une autre où il n'y en ait plus aucune de constante : on sera le maître ensuite de supposer constante, celle que l'on voudra. Soit donc $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = 0$, l'Équation à deux variables & à différences secondes, dans

laquelle la premiere différence dx d'une des variables a été supposée constante. Après avoir divisé cette équation par dx, on l'écrira ainsi $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ qui est en effet la même, parce que, tant qu'on suppose dx constant, $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ est égal à $\frac{ddy}{dx}$. Mais si l'on ne veut plus que dx soit constant, alors $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; l'Equation se change donc en $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$, dans laquelle il n'y a plus aucune différence constante.

Soit $Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$; l'Equation à différences troisiemes, dx étant toujours constant.

On divisera par dx^2, & l'on aura $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + E\frac{ddy}{dx} + F\frac{dy\,ddy}{dx\,dx} + G\frac{d^3y}{dx^2} = 0$, que l'on pourra écrire ainsi, $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right) + G\,d\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$; & faisant tout varier dans ces différenciations indiquées, on aura l'équation où il n'y aura plus de différentielle constante.

Appliquons cela à un exemple. Soit $dx^2\,dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, dans laquelle on ait supposé dx constant. On ne voit pas, sur le champ, comment cette équation pourroit être intégrée; mais si nous rendons dx variable, en écrivant $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, alors nous pouvons, dans cette différenciation indiquée, prendre dy pour constante, & nous aurons $dx\,dy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$, qui en réduisant, devient $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, dont l'intégrale, ainsi qu'il est aisé de le voir, est $xdx + adx - ydy + Cdy = 0$, en ajoutant une constante Cdy de même ordre que l'intégrale. Cette équation étant intégrée de nouveau, donne $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0$.

172. Examinons maintenant les équations à différences secondes, & à deux variables. Nous appellerons ainsi, celles dans lesquelles il n'y a pas de différence qui passe le second ordre, à quelque puissance que dx & dy y soient d'ailleurs élevés.

Nous supposerons qu'une des différences est constante; mais il sera facile d'en conclure comment on devroit se conduire si elles étoient toutes deux variables.

Soit donc $Addy + B = 0$, l'équation générale qui peut représenter toute équation différentielle du second ordre, à deux variables x & y, & dans laquelle dx est constante. A & B sont des fonctions quelconques de x, y, dx, dy & constantes.

J'écris ainsi cette équation. . . . $Addy + \left(\frac{B-k}{dy}\right)dy + \frac{k}{dx}dx = 0$; k étant une fonction inconnue, de même nature que A & B. Je multiplie cette équation par un facteur P que je suppose être une fonction de x, y, dx, dy, & constantes; & j'ai $APddy + P\left(\frac{B-k}{dy}\right)dy + \frac{Pk}{dx}dx = 0$, que je suppose être une différentielle complette.

Cela posé, nous avons trois différences, savoir ddy, dy & dx. Regardant donc ces différences comme celles d'autant de variables différentes, il faut (153) que l'on ait $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left[P\left(\frac{B-k}{dy}\right)\right]}{ddy}$; $\frac{d(AP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk}{dx}\right)}{ddy}$; $\frac{d\left[P\left(\frac{B-k}{dy}\right)\right]}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk}{dx}\right)}{dy}$. De ces trois équations, on peut, en imitant ce qui a été fait (167), déduire une équation où P n'entre plus, & qui serviroit à déterminer k, en prenant pour k une fonction, la plus générale qu'il soit possible, de x, y, dx, & dy, avec des coëfficients indéterminés que l'on substitueroit dans cette même équation. Après quoi on détermineroit P, en prenant de même une fonction de même espece, & telle qu'elle satisfît à deux de ces trois équations. Mais on peut simplifier cette recherche, & la borner à chercher pour P une fonction de x, y, dx, dy, qui satisfasse à deux équations.

Les deux premieres, des trois équations que nous venons de trouver, donnent $\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} P(B-k) + \frac{1}{dy} \frac{d(P(B-k))}{ddy}$, ou bien $\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} P(B-k) + \frac{1}{dy} \frac{d(PB)}{ddy} - \frac{1}{dy} \frac{d(Pk)}{ddy}$, & $\frac{d(AP)}{dx} = \frac{1}{dx} \frac{d(Pk)}{ddy}$. Substituant, dans l'avant-derniere équation, la valeur de $\frac{d(Pk)}{ddy}$ tirée de la derniere, on aura $\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} \times P(B-k) + \frac{1}{dy} \frac{d(PB)}{ddy} - \frac{dx}{dy} \frac{d(AP)}{dx}$; d'où l'on tire $P(B-k) = dy \frac{d(PB)}{ddy} - dx\,dy \frac{d(AP)}{dx} - dy^2 \frac{d(AP)}{dy}$; d'où il sera facile d'avoir k, dès que P sera connu.

Or de cette derniere équation, on tire $Pk = PB - dy \frac{d(PB)}{ddy} + dx\,dy \frac{d(AP)}{ax} + dy^2 \frac{d(AP)}{dy}$; substituant la valeur de $P(B-k)$ & celle de Pk dans l'équation $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left(P\frac{(B-k)}{dy}\right)}{ddy}$, & dans l'équation $\frac{d\left(\frac{P(B-k)}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{kP}{dx}\right)}{dy}$, on aura $\frac{d(AP)}{dy} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{d\left(\frac{d(PB)}{ddy} - dx\frac{d(AP)}{dx} - dy\frac{d(AP)}{dy}\right)}{ddy}, \ \& \ \ldots\ldots$$

$$\frac{d\left(\frac{d(BP.)}{ddy} - dx\frac{d(AP)}{dx} - dy\frac{d(AP)}{dy}\right)}{dx} = \ldots\ldots$$

$d\left(\frac{PB}{dx}\right.$

$$\frac{d\left(\frac{PB}{dx} - \frac{dy\,d\,(PB)}{dx\,ddy} + dy\,\frac{d(AP)}{dx} + \frac{dy^2}{dx}\frac{d(AP)}{dy}\right)}{dy}.$$

La question est donc réduite à trouver pour P une fonction de x, y, dx, dy & constantes, qui satisfasse à ces deux équations. Mais quoique cela soit toujours possible, cela n'est pas également facile ; c'est pourquoi abandonnant cette recherche générale, nous allons examiner quelques équations plus limitées, mais cependant très-étendues.

Observons, auparavant, qu'il est facile, d'après ce que nous venons d'exposer, de déterminer si l'équation proposée est intégrable dans l'état où elle est. Il n'y a qu'à supposer $P = 1$; alors il faut, pour que l'équation soit intégrable, qu'elle satisfasse aux deux équations suivantes. . . . .

$$\frac{dA}{dy} = \frac{d\left(\frac{dB}{ddy} - dx\,\frac{dA}{dx} - dy\,\frac{dA}{dy}\right)}{ddy}, \text{ \& } \ldots\ldots$$

$$\frac{d\left(\frac{dB}{ddy} - dx\,\frac{dA}{dx} - dy\,\frac{dA}{dy}\right)}{dx} = \ldots\ldots$$

$$\frac{d\left(\frac{B}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{dB}{ddy} + dy\,\frac{dA}{dx} + \frac{dy^2}{dx}\frac{dA}{dy}\right)}{dy}.$$ Cela est général quelle que soit l'équation différentielle du second ordre, dx étant constant.

173. Proposons-nous, maintenant, d'intégrer l'équation $Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2 + Lddy = 0$, lorsque le facteur P qui manque à cette équation pour être intégrable, ne doit être qu'une fonction de x, de y & de constantes. Je suppose d'ailleurs que G, H, K, & L ne renferment ni dx ni dy ; mais seulement des fonctions de x, y & constantes.

Si l'on compare cette équation, à l'équation générale $Addy + B = 0$, on aura $A = L$, & $B = Gdx^2 + Hdx\,dy + Kdy^2$. Substituant dans les deux équations que nous avons eues, ci-dessus, pour déterminer P, & faisant attention à la supposition que nous faisons, savoir que P, G, H, K & L ne renferment ni dx, ni dy, nous aurons $\frac{d\,(PL)}{dy} = KP$; & une seconde équation, laquelle, après y avoir ſubſtitué pour $\frac{d(PL)}{dy}$, ſa valeur KP, ſe réduit à $\frac{d\left(PHdx + KP\,dy - dx\,\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$ $= \frac{d\left(PG\,dx + dy\,\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$. Mais à cauſe de $\frac{d(PL)}{dy} = KP$, on a $\frac{d(KP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d(PL)}{dy}\right)}{dx} = \frac{dy}{dy}\,\frac{d\left(\frac{d(P)}{dx}\right)}{dy}$; & par conſéquent $\frac{d(KP\,dy)}{dx} = \frac{dy\,d\left(\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$; donc notre ſeconde équation ſe réduit (après avoir diviſé chaque membre par dx) à $\frac{d(PH)}{dx} - \frac{dd(PL)}{dx\,dx}$ * $= \frac{d(PG)}{dy}$. Cette équation & l'équation $\frac{d(PL)}{dy} = KP$ ſont celles que nous avons à traiter actuellement, pour intégrer la propoſée.

Obſervons maintenant que, dans cette derniere équation, il n'y a que y qui ſoit regardée comme variable. Cela poſé, exécutant la différenciation indiquée, & tirant la valeur de $\frac{dP}{P}$, on aura $\frac{dP}{P} = \frac{K}{L}dy - \frac{dL}{L}$; prenant donc l'intégrale, en regardant y ſeule comme variable, puiſque la différenciation a été faite dans cette ſuppoſition, on aura $l\,P = \int\frac{K}{L}dy - lL + lX$. J'ajoute, pour conſtante, la quantité lX, par laquelle j'entends une fonction de x & de conſtantes. C'eſt parce que x a été ſuppoſée conſtante dans la différenciation.

De cette équation je tire $P = \frac{X}{L}e^{\int\frac{K}{L}dy}$. Si l'on ſubſtitue

* Par cette expreſſion $\frac{dd(PL)}{dx\,dx}$ nous entendons qu'on doit différencier PL, en faiſant varier x, & diviſer enſuite par dx; puis différencier le réſultat, en faiſant varier x & diviſer encore par dx.

cette valeur de P dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$ — &c, & que l'on divise ensuite par $e^{\int \frac{K}{L} dy}$, on aura l'équation qui doit déterminer X. Or comme X doit être une fonction de x, il s'ensuit que, pour que l'équation proposée soit intégrable par la multiplication d'un facteur composé seulement de x, y & de constantes, il faut que, dans celle-ci, tous les y disparoissent.

Supposons, par exemple, que l'on ait l'équation $2yd x^2 + (2x+3yx) dxdy + 2x^2 dy + x^2 y ddy = 0$, qui n'est point intégrable dans l'état où elle est. J'ai donc $L = x^2 y$, $G = 2y$, $H = 2x + 3yx$, $K = 2x^2$; donc $P = \frac{X}{x^2 y} e^{\int \frac{2dy}{y}} = \frac{Xe}{x^2 y}{}^{ly^2} = \frac{X}{x^2 y} y^2 = \frac{Xy}{x^2}$. Substituant cette valeur de P, & celles de L, G, H, &c. dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$ &c, on aura, après avoir transposé, $-\frac{4Xy}{x^2} + \frac{2ydX}{xdx} - \frac{2Xy}{xx} + \frac{3y^2 dX}{xdx} - \frac{3Xy^2}{xx} - \frac{y^2 ddX}{dx^2} = 0$; également donc à zéro la somme des termes affectés de y, & divisant, ensuite, l'une des équations par y, & l'autre par y^2, on aura, après réduction faite, $\frac{dX}{X} = \frac{3dx}{x}$, & $-x^2 ddX + 3xdXdx - 3Xdx^2 = 0$. La premiere donne $X = x^3$; & cette valeur substituée dans la seconde, y satisfait; on a donc $X = x^3$, & par conséquent $P = \frac{x^3 y}{x^2} = xy$.

Maintenant, si l'on remonte à la valeur de Pk, trouvée (172), on aura $Pk = 2xy^2 dx^2 + 3x^2 y^2 dxdy$, & $P(B-k) = 2x^2 y dxdy + 2x^3 y dy^2$; ensorte que l'équation, rapportée à la forme générale (172), devient $x^3 y^2 ddy + (2x^2 y dx + 2x^3 ydy) dy + (2xy^2 dx + 3x^2 y^2 dy) dx = 0$.

Pour intégrer, on suivra la même regle qui a été donnée (148); on regardera d'abord, dans $x^3 y^2 ddy$, dy seule comme variable, & l'on aura $x^3 y^2 dy$. Différenciant cette quantité en faisant tout varier, & retranchant de l'équation il reste $(2x^2 ydx) dy + (2xy^2 dx) dx$. On intégrera le premier de ces termes, en regardant y seule comme variable, & l'on aura $x^2 y^2 dx$, dont la différentielle, prise en regardant y & x comme variables, étant retranchée du reste précédent, ne laisse rien; ainsi l'intégrale est $x^3 y^2 dy + x^2 y^2 dx + C dx = 0$, en ajoutant une constante.

On peut prendre, pour second exemple, l'équation $2dx^2 + (3x + y + 2) dy\, dx + 2x\, dy^2 + (x^2 + xy)\, ddy = 0$, qui s'intégrera de la même maniere. On trouvera que X doit être égal à x, & $P = xy$.

174. Si après la substitution de la valeur de P, dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$ &c, tous les y disparoissent d'eux-mêmes, l'équation qui doit donner X, est alors différentielle du second ordre; ensorte qu'il semble que la méthode n'est, dans ce cas, d'aucune utilité. Mais il faut observer que l'équation qu'on aura alors, sera de cette forme $Adx^2 + BXdx^2 + CdXdx + EddX = 0$, A, B, C, E étant des fonctions de x & de constantes. Or, pour intégrer cette équation, je l'écris ainsi $AP'dx^2 + BP'Xdx^2 + (C-k')P'dxdX + k'P'dXdx + EP'ddX = 0$. Je suppose, maintenant, que P' & k' étant des fonctions de x seulement, les quatre derniers termes forment ensemble une différentielle exacte: alors le premier terme étant une fonction de x, s'intégrera aisément. Or les équations qui résultent de cette supposition, sont $\frac{d(EP')}{dx} = \frac{d(k'P'dX + BP'Xdx)}{ddX}$, $\frac{d(EP')}{dX} = \frac{d[(C'-k')P'dx]}{ddX}$, $\frac{d(k'P'dX + BP'Xdx)}{dX} = \frac{d[(C-k')P'dX]}{dx}$, &... $\frac{d[(C-k')P'dx]}{dx} = \frac{d(BP'Xdx)}{dX}$. Ces quatre équations se réduisent aux deux suivantes, (eu égard à ce que k', P', A, B, &c, ne renferment point X), $\frac{d(EP')}{dx} = k'P'$, & $BP' = \frac{d[(C-k')P']}{dx}$. Tirant de chacune de ces deux équations, la valeur de $\frac{dP}{P'}$, & égalant l'une de ces valeurs à l'autre, on aura, après les réductions faites, $Edk' + (C-k')dE - k'(C-k')dx + BEdx - EdC = 0$, équation différentielle du premier ordre seulement, dont dé-

pend la valeur de X, & par conséquent l'intégrale de la proposée. Supposant donc qu'on ait déterminé k' par le moyen de cette équation, on aura aisément P', par le moyen de l'équation $k' P' = \frac{d(EP')}{dx}$, qui donne $\frac{dP'}{P'} = \frac{k'dx}{E} - \frac{dE}{E}$, & par conséquent $P' = \frac{H}{E} e \int \frac{k'dx}{E}$, H étant une constante.

Alors k' & P' étant trouvés, on aura X, en mettent les valeurs de k' & P' dans l'équation $AP'dx^2 + BP'Xdx^2 + (C-k')P'dxdX + k'P'dXdx + EP'ddX = 0$, & intégrant. Or comme cette équation ne peut manquer à présent d'être une différentielle complette, on a pour son intégrale $dx\int AP'dx + Xdx\int BP'dx + dX\int k'P'dx + Ldx = 0$, L étant une constante : & cette derniere s'intégre facilement par ce qui a été dit (165) ; on aura donc X dès qu'on aura k'; ainsi, on peut dire généralement, que toutes les fois qu'il ne manquera à l'équation $Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2 + Lddy = 0$, qu'un facteur composé de x, de y & de constantes, pour être une différentielle exacte, cette équation sera toujours facilement réductible à une équation différentielle du premier ordre, quelles que soient, d'ailleurs, G, H, K, L.

Mais si après la substitution de la valeur de P dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$ &c. l'équation renferme encore des y que l'on ne puisse faire disparoître sans assujettir les coëfficients G, H, K, L à certaines conditions, c'est une preuve que le facteur P doit en outre, renfermer des dx & des dy; alors il faut avoir recours à la méthode générale (172).

On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas toute autre équation différentielle du second ordre, d'une forme connue, peut être intégrée par la multiplication d'un facteur composé de x, y & constantes, ou de x, dy, dx & constantes, ou de y, dx & constantes, &c.

175. A l'égard des équations différentielles du troisieme ordre, en les supposant représentées généralement par $Ad^3y + B = 0$, A & B étant des fonctions de x, y, dx, dy, ddy & de constantes ; & supposant de plus que P est le facteur composé de x, y, dx, ddy & constantes qui peut la rendre intégrable, on pourra l'écrire ainsi $APd^3y + P\frac{B-k}{ddy}ddy +$

$p\frac{k-l}{dy}dy + \frac{Pl}{dx}dx = 0$. Alors il faudra que $\frac{d(AP)}{ddy} = \frac{d\left[P\frac{(B-k)}{ddy}\right]}{d^3y}$; $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left(P\frac{k-l}{dy}\right)}{d^3y}$; $\frac{d(AP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pl}{dx}\right)}{d^3y}$; $\frac{d\left[P\frac{(B-k)}{ddy}\right]}{dy} = \frac{d\left[P\frac{(k-l)}{dy}\right]}{ddy}$; .....

$\frac{d\left[P\frac{(B-k)}{ddy}\right]}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pl}{dx}\right)}{ddy}$; $\frac{d\left[P\frac{(k-l)}{dy}\right]}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pl}{dx}\right)}{dy}$. C'est à l'aide de ces équations qu'on déterminera k, l & P. Mais nous ne pousserons pas plus loin ces recherches.

On voit comment on doit s'y prendre pour que les équations différentielles d'ordres plus élevés.

176. Observons en finissant, 1°. que lorsqu'il manque une des deux variables finies dans l'équation, on la ramene toujours à une équation d'un degré moindre en faisant $dy = p\,dx$, p étant une nouvelle variable.

177. 2°. Que l'équation générale $d^n y + a\,d^{n-1} y\,dx + b\,d^{n-2} y\,dx^2 +$ &c..... $+ ly\,dx^n + X dx^n = 0$, a, b, &c. étant des constantes, X une fonction de x & de constantes, & dx étant constant, peut toujours être intégrée facilement par une méthode semblable à celle que nous avons employée ci-dessus, pour l'équation $A\,dx^2 + BX\,dx^2 + C\,dX\,dx + E\,ddX = 0$.

Pour cet effet, on l'écrira ainsi, $P\,d^n y + P(a-k)\,d^{n-1}y\,dx + Pk\,d^{n-1}y\,dx + P(b-k')\,d^{n-2}y\,dx^2 + Pk'\,d^{n-2}y\,dx^2 +$ &c.....$+ Ply\,dx^n + PX\,dx^n = 0$; P étant le facteur, qui peut rendre l'équation intégrable, & que je suppose être une fonction de x; k, k', &c. sont des constantes indéterminées.

On supposera que les termes pris deux à deux, à commencer du premier, forment une différentielle exacte. Cette supposition donnera les équations nécessaires pour déterminer P, k, k', &c. ayant égalé les valeurs de $\frac{dP}{P}$, on aura des équations en k, k', &c à l'aide desquelles on déterminera k, par une équation du degré n. La valeur de k étant trouvée, on aura aisément celle de k', k'', &c. & on aura celle de P, en intégrant, ce qui sera très-facile. Alors pour chaque valeur de k, on aura une intégrale particuliere, en observant d'ajouter à chacune une constante différente. De $n-1$ de ces équations, on tirera les valeurs de dy^{n-1}, dy^{n-2}, &c. & les substituant dans la derniere, on aura la valeur de y en x.

178. 3°. Si l'on avoit plusieurs équations où les différences ne fussent point multipliées entr'elles, si ce n'est par la différence constante, & où les variables ne passassent point le premier degré & ne fussent point multipliées entr'elles, on les intégreroit en multipliant la seconde, la troisieme, &c. chacune par un facteur constant p, p', &c. ajoutant à la premiere, & multipliant le tout par un facteur P que l'on supposeroit être une fonction de la variable dont la différence est constante; alors on décomposeroit les termes affectés des différences d'une même variable, comme on vient de faire dans l'équation précédente.

Par exemple, si j'avois $a\,ddz + b\,ddy + (c\,dz + e\,dy)\,dx + (fz+gy)\,dx^2 = 0$, & $a'ddz + b'ddy + (c'dz + e'dy)\,dx + (f'z + g'y)\,dx^2 = 0$; multipliant la seconde par p, ajoutant à la premiere & multipliant le tout par P, j'aurois. . . . . . $P(a+a'p)\,ddz + P\,(c+c'p)\,dz\,dx + P\,(f+f'p)\,z\,dx^2 + P\,(b+b'p)\,ddy + P(e+e'p)\,dy\,dx + P\,(g+g'p)\,y\,dx^2 = 0$. Ensuite je décomposerois $c+c'p$, en $c+c'p-k$, & k; je décomposerois pareillement $e+e'p$, en $e+e'p-k'$ & k'. Et supposant ensuite que les termes pris deux à deux forment des différentielles exactes, j'aurois les équations nécessaires pour déterminer, k, k' & P, L'équation en k montera en général, au degré $2\,n$, ce qui donnera $2\,n$ intégrales, à l'aide desquelles on chassera toutes les différences, & l'on aura les équations en z & x; en y & x, &c.

179. 4°. Si les équations étoient plus générales, on regarderoit p, p', &c. ainsi que P, comme des fonctions de toutes les variables & de leurs différences; & l'on détermineroit ces fonctions, par la condition que l'équation totale fût une différentielle complette. Les ouvrages qu'on peut consulter sur le calcul intégral, sont ceux de MM *Euler*, *d'Alembert*, *Fontaine*, le Marquis *de Condorcet*, *Bougainville*, & le P. *Reynau*.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MECHANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

180. Sous le nom de *Méchanique*, nous comprenons la ſcience du mouvement, & celle de l'équilibre.

Il y a du mouvement dans un corps, lorſque ce corps, ou quelques-unes de ces parties ſont tranſportées d'un lieu en un autre.

Un corps, ou l'aſſemblage de pluſieurs parties matérielles ne peut de lui-même ſe mettre en mouvement. Il ne peut être mu que par une cauſe, ſans laquelle il peut, d'ailleurs, exiſter.

Cette cauſe, telle qu'elle ſoit, qui eſt capable de mouvoir un corps, eſt ce que nous appellons *Force* ou *Puiſſance*.

L'équilibre, eſt l'état d'un corps, ou d'un aſſemblage ou *Syſtême* de corps, qui eſt ſollicité par pluſieurs forces dont les effets ſont détruits par quelques obſtacles, ou ſe détruiſent mutuellement.

Le repos, eſt l'état d'un corps dont les parties, non-ſeulement ne ſont point déplacées, mais ne ſont pas même ſollicitées par aucune force.

Pour établir les principes du mouvement & de l'équilibre, nous imaginerons, d'abord, qu'il n'exiſte rien autre choſe dans la nature, que les corps dont nous parlerons, & les forces que nous leur ſuppoſerons appliquées.

Ainſi, nous regarderons d'abord les corps, comme non peſants; comme parfaitement libres : nous ſuppoſerons que ni l'air ni la peſanteur, ni le frottement, ni tout autre obſtacle n'exiſtent.

Nous aurons, enſuite, égard à ces obſtacles; mais pour meſurer leurs effets, il faut commencer par examiner les choſes, dans cet état de ſimplicité.

181. Ces ſuppoſitions faites, il eſt clair que ſi un corps a reçu du mouvement par une cauſe quelconque, il doit perſévérer dans cet état de mouvement, ſans aucune altération ni augmentation, ſans aucun détour, tant que la même ou une nouvelle

force n'agira pas sur lui. En effet, nous venons de dire qu'un corps ne peut se donner du mouvement; il ne peut donc s'en ôter, puisque ce seroit, s'en donner en sens contraire: d'ailleurs nous supposons qu'il n'existe aucun obstacle.

Ainsi, le mouvement est naturellement égal ou uniforme, & rectiligne. Examinons donc d'abord les propriétés de ce mouvement.

Du Mouvement uniforme.

182. Le mouvement *uniforme* est donc celui d'un corps qui se meut toujours de la même maniere ; c'est-à-dire , qui parcourt toujours le même espace dans le même intervalle de temps.

Pour comparer les mouvements de deux corps qui se meuvent uniformément, il faut considérer l'espace que chacun décrit dans un même temps déterminé , comme d'une minute, d'une seconde, &c. Cet espace est, ce qu'on appelle, la *Vîtesse*.

183. La vîtesse d'un corps, est donc, à proprement parler , l'espace que ce corps peut décrire uniformément dans l'intervalle de temps que l'on prend pour unité.

Ainsi, dans les mouvements uniformes de deux corps, si l'on compte le temps en secondes; & que l'un parcoure 5 pieds , par ſeconde ; & l'autre, 6 pieds par ſeconde ; je dirai que la vîteſſe du premier eſt de 5 pieds, & celle du ſecond, de 6 pieds.

184. Mais ſi, en prenant toujours la ſeconde pour unité de temps, on me diſoit qu'un corps a parcouru 100 pieds en cinq ſecondes ; 100 pieds n'exprimeroient pas la vîteſſe, parce que cet eſpace n'eſt pas celui qui répond à l'unité de temps, à la ſeconde ; mais je vois qu'à chaque ſeconde, il en parcourroit le cinquieme, ou 20 pieds ; c'eſt-à-dire, que pour avoir la vîteſſe, je diviſe le nombre 100, des parties de l'eſpace parcouru, par le nombre 5 des unités de temps qui ſe ſont écoulées. Donc, en général, *la vîteſſe eſt égale à l'eſpace diviſé par le temps* ; car il eſt clair en général que ſi on partage l'eſpace total en autant de parties égales qu'il y a d'unités de temps écoulées, chacune ſera l'eſpace décrit pendant cette unité de temps, & par conſéquent ſera la vîteſſe. Ainſi nommant V la vîteſſe, E l'eſpace parcouru pendant un temps marqué par T, on a généralement, $V = \frac{E}{T}$; c'eſt un des principes fondamentaux de la Méchanique.

185. L'équation $V = \frac{E}{T}$, donne non-ſeulement la meſure de la vîteſſe, mais en-

core, celle de l'eſpace & du temps. En effet, ſi l'on regarde ſucceſſivement E & T comme inconnues, on aura par les regles ordinaires de l'Algèbre, $T = \frac{E}{V}$, & $E = VT$, Ainſi *pour avoir le temps, il faut diviſer l'eſpace, par la vîteſſe; & pour avoir l'eſpace, il faut multiplier la vîteſſe par le temps.*

Par exemple, ſi l'on demande quel temps il faut pour décrire 200 pieds, avec une vîteſſe qui ſeroit conſtamment de 5 pieds par ſeconde; il eſt clair qu'il faudra autant de ſecondes qu'il y aura de fois 5 pieds dans 200 pieds; c'eſt-à-dire, qu'on aura ce temps ou ce nombre de ſecondes, en diviſant l'eſpace 200, par la vîteſſe 5; il faudra donc 20 ſecondes, c'eſt-à-dire un nombre de ſecondes égal à l'eſpace diviſé par la vîteſſe.

Pareillement ſi l'on demande quel eſpace décriroit, en 20 ſecondes de temps, un corps qui ſeroit mu avec une vîteſſe conſtante de 5 pieds par ſeconde; il eſt clair qu'il décrira 20 fois 5 pieds; c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier la vîteſſe par le temps.

Ainſi, ſi nous employons ici des caractères algébriques, ce n'eſt pas qu'ils ſoient néceſſaires pour faciliter l'intelligence de ces premieres vérités. Mais ils ſont utiles pour ſoulager la mémoire. On voit en effet par cet exemple, que le premier principe étant une fois dans la mémoire, on peut toujours facilement retrouver les deux autres, en appliquant les regles ordinaires, à ce premier principe traduit algébriquement.

186. Il eſt donc facile maintenant de comparer les mouvements uniformes de deux, ou d'un plus grand nombre de corps. Par exemple, ſi l'on me demande dans quel rapport ſont les vîteſſes de deux corps, qui décrivent des eſpaces connus E & e, dans des temps connus T & t, reſpectivement. En nommant V & u les vîteſſes de ces deux corps, j'aurai $V = \frac{E}{T}$, & $u = \frac{e}{t}$ (184); donc $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; c'eſt-à-dire, que *les vîteſſes ſont comme les eſpaces diviſés par les temps*.

En un mot, qu'il s'agiſſe de comparer les vîteſſes, ou les eſpaces, ou les temps, le principe que nous venons de donner (184) donnera l'expreſſion de chacune de ces choſes, pour chaque corps; il n'y aura donc qu'à comparer ces expreſſions. Par exemple, ſi je veux comparer les eſpaces: ce principe me donne $V = \frac{E}{T}$, d'où je tire $E = VT$; donc pour le ſecond corps, j'aurai pareillement $e = ut$; donc $E : e :: VT : ut$; c'eſt-à-dire, que *les eſpaces ſont comme les vîteſſes multipliées par les temps*.

187. De ces trois choses, l'espace, le temps, & la vîtesse, si l'on veut en comparer deux, lorsque la troisieme est la même pour chaque corps, il n'y a qu'à chercher, de même, l'expression de cette troisieme, pour chaque corps, & égaler ces deux expressions. Par exemple, si je veux savoir quel est le rapport des espaces quand les vîtesses sont les mêmes, j'ai $V = \frac{E}{T}$ & $u = \frac{e}{t}$; donc puisqu'on suppose $V = u$, on a $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$, ou $Et = eT$, d'où l'on tire $E : e :: T : t$; c'est-à-dire qu'*à vîtesses égales, les espaces sont comme les temps*. On trouvera de même qu'*en temps égal, les espaces sont comme les vîtesses*; & que *pour que deux corps décrivent le même espace, il faut que leurs vîtesses soient réciproquement proportionnelles aux temps*. En effet, on a $E = VT$ & $e = ut$; donc si $E = e$, on a $Vt = ut$, d'où l'on tire $V : u :: t : T$.

Ainsi, le seul principe $V = \frac{E}{T}$ donne le moyen de comparer toutes les circonstances des mouvements uniformes.

Des Forces & de la quantité de Mouvement.

188. La somme des parties matérielles dont un corps est composé, est ce qu'on

appelle sa *Masse ;* mais dans l'usage que nous ferons de ce mot, nous entendrons le nombre qui exprime de combien de parties matérielles le corps est composé.

La force, ainsi que nous l'avons déja dit, est la cause qui meut, ou tend à mouvoir un corps.

Comme les forces ne nous intéressent que par leurs effets, ce n'est que par les effets dont elles sont capables, que nous devons les mesurer. Or l'effet d'une force est de faire passer dans chaque particule matérielle d'un corps, une certaine vîtesse. Donc si toutes les parties reçoivent la même vîtesse, comme nous le supposerons ici, l'effet de la cause motrice a pour mesure la vîtesse multipliée par le nombre des parties matérielles du corps, c'est-à-dire, par la masse. Donc *la force se mesure par la vîtesse qu'elle peut imprimer à une masse connue, multipliée par cette masse.*

189. Le produit de la masse d'un corps, par sa vîtesse, s'appelle la *quantité de mouvement* de ce corps. *Les forces se mesurent donc par la quantité de mouvement qu'elles sont capables de produire.*

Ainsi, si nous désignons ce produit, par F; la masse, par M; & la vîtesse par V, nous aurons $F = M V$.

Cette équation donne $V = \frac{F}{M}$, & $M = \frac{F}{V}$; qui font voir 1°. que *connoiſſant la force motrice d'un corps & ſa maſſe, on ſaura quelle vîteſſe il doit avoir, en diviſant la force motrice par la maſſe.* 2°. Que *connoiſſant la force motrice & la vîteſſe, on ſaura quelle eſt la maſſe qui peut avoir cette vîteſſe & cette force motrice, en diviſant la force motrice par la vîteſſe.*

Mais il ne faut pas perdre de vue, que ce que nous entendons ici par F, ou par la force motrice, c'eſt l'effet dont eſt capable la cauſe qui engendre le mouvement. C'eſt cet effet ſeul qu'on peut faire entrer, & qu'on a beſoin de faire entrer dans le calcul.

190. Donc ſi f marque la force motrice d'une autre maſſe m, & u la vîteſſe de cette maſſe, on aura de même $f = mu$; donc $F : f :: MV : mu$; c'eſt-à-dire, que les *forces motrices ſont comme les maſſes multipliées par les vîteſſes.*

Et ſi de chacune des deux équations $F = MV$, & $f = mu$, on tire les valeurs de M & de m, puis celles de V & de u; on aura le rapport des maſſes, par celui des forces & des vîteſſes; & celui des vîteſſes, par les forces & les maſſes; d'où l'on conclura 1°. qu'à *maſſes égales, les forces motrices ſont comme les vîteſſes*; 2°. qu'à *vîteſſes égales, les for-*

ces

ces motrices sont comme les masses; 3°, & qu'enfin *si les forces motrices sont égales, les vîtesses sont en raison inverse des masses*; ce que l'on trouvera facilement en égalant successivement la valeur de M à celle de m; celle de V à celle de u; & enfin celle de F à celle de f; l'équation résultante, réduite & convertie en proportion, démontre chacune de ces proportions.

Remarque.

191. La masse ou le nombre des parties matérielles d'un corps, dépend de son volume & de ce qu'on appelle sa *densité*. Comme les corps sont pénétrés d'un très-grand nombre de vuides qu'on appelle *pores*, leur quantité de matiere n'est pas proportionnelle à leur volume; mais sous le même volume il y a d'autant plus de matiere que les parties sont plus serrées: & c'est cette plus ou moins grande proximité des parties qu'on appelle *densité*. En sorte qu'on dit, un tel corps est plus *dense* qu'un tel autre corps, lorsqu'à volume égal il renferme plus de matiere que ce dernier. On dit au contraire qu'il est moins *dense* ou plus *rare* lorsqu'à volume égal il renferme moins de matiere.

La densité sert donc à juger du nombre des parties matérielles, lorsque le volume est connu ; ainsi on peut regarder la densité comme représentant le nombre des parties matérielles d'un volume déterminé ; quand on dit l'or est 19 fois aussi dense que l'eau, cela veut dire, l'or contient 19 fois autant de parties que l'eau, dans un même espace.

En se représentant la densité comme exprimant le nombre des parties matérielles d'un volume déterminé que l'on prend pour *unité de volume* ; il est clair que pour avoir la masse, ou le nombre total des parties matérielles d'un corps dont le volume est connu, il faut multiplier la densité par le volume. Par exemple, si la densité d'un pouce cube d'or est représentée par 19, la quantité de matiere de 10 pouces cubes d'or, sera 10 fois 19. Ainsi, représentant généralement la masse par M, le volume ou la solidité par S & la densité par D, on aura $M = S \times D$; par où il sera facile de comparer les masses, les volumes & les densités des corps.

Nous verrons dans peu, que les masses des corps sont proportionelles à leur poids ; ainsi, dans l'usage, on pourra substituer le poids à la masse.

Des Mouvements uniformément accélérés.

192. Un corps qui n'a reçu qu'une impulſion, perſévere dans ſon mouvement avec la même vîteſſe, & dans la même direction qu'il a eue au premier inſtant (181). Mais s'il vient à recevoir une nouvelle impulſion dans le même ſens, ou en ſens contraire de la premiere, il ſe meut alors, avec une vîteſſe égale à la ſomme ou à la différence des deux vîteſſes qu'il a reçues ſucceſſivement : cela eſt évident.

Donc ſi l'on conçoit qu'à des intervalles de temps déterminés, le corps reçoive de nouvelles impulſions, dans le même ſens, ou en ſens contraire de la premiere, il ſera mu d'un mouvement *varié* ou inégal ; ſa vîteſſe ſera différente au commencement de chaque intervalle de temps

Quoi qu'il en ſoit, ſa vîteſſe au bout d'un temps quelconque doit s'eſtimer par l'eſpace qu'il ſeroit alors capable de décrire pendant l'unité de temps, ſi ſon mouvement devenoit uniforme à compter de l'inſtant où l'on conſidere cette vîteſſe.

On appelle en général *force accélératrice*, toute force qui agit ſur un mobile pour faire varier ſon mouvement. Lorſqu'à des intervalles de temps égaux, elle agit également, on l'appelle *force accélératrice conſtante*, ou *force retardatrice conſtante*, ſelon qu'elle tend à augmenter ou diminuer la vîteſſe actuelle du mobile.

Examinons préſentement les circonſtances du mouvement uniformément accéléré.

193. Puiſque dans ce mouvement, la force accélératrice agit toujours de la même maniere, ſi l'on ſuppoſe que g ſoit la vîteſſe qu'elle communique, à chaque unité de temps, il eſt clair que les vîteſſes ſucceſſives du mobile ſeront g, $2g$, $3g$; enſorte qu'après un nombre d'unités de temps marqué par t, la vîteſſe acquiſe ſera g pris autant de fois qu'il y a d'unités dans t; c'eſt-à-dire, ſera $g \times t$ ou gt.

194. Donc 1°. dans le mouvement uniformément accéléré, les nombres de degrés de vîteſſe que le mobile acquiert, croiſſent comme les nombres d'intervalles pendant leſquels dure le mouvement; ce que l'on exprime, en diſant: *Les vîteſſes acquiſes ſont comme les temps écoules depuis le commencement du mouvement.*

Ainſi, ſi l'on appelle u la vîteſſe que le mobile a acquiſe au bout du temps t, on a $u = gt$

2°. Les vîteſſes que le mobile ſe trouve avoir ſucceſſivement pendant la durée de chacun des intervalles conſécutifs, forment donc une progreſſion arithmétique ÷ g. $2g$. $3g$. &c. dont le dernier terme eſt gt ou u, & dont le nombre des termes eſt t, c'eſt-à-dire, eſt marqué par le nombre des actions de la force accélératrice.

3°. Et puiſque ces vîteſſes g, $2g$, &c. ne ſont autre choſe, chacune, que l'eſpace que le mobile peut décrire pendant l'intervalle correſpondant (183), l'eſpace total décrit pendant le temps t, ſera donc la ſomme des termes de cette progreſſion arithmétique; c'eſt-à-dire (*Alg.* 232), qu'il ſera exprimé par $(g+u)\times\frac{t}{2}$. Donc ſi l'on nomme e cet eſpace total parcouru depuis le commencement du mouvement, on aura $e=(g+u)\frac{t}{2}$.

195. Concevons, maintenant, que la force accélératrice agit ſans interruption, ou, ce qui revient au même, concevons que le temps t ſoit partagé en une infinité de parties infiniment petites que nous appellerons des inſtants; & qu'à la naiſſance ou à la fin de chaque inſtant, la force accélératrice donne une impulſion au mobile. Concevons de plus qu'elle agit par degrés infiniment petits. Alors g étant infiniment petite par rapport

à u qui eſt la vîteſſe acquiſe pendant le nombre infini d'inſtants marqué par t, on doit dans l'équation $e=(g+u)\frac{t}{2}$, omettre g, & l'on a ſimplement $e=\frac{ut}{2}$.

196. Cela poſé, imaginons qu'au bout du temps t la force accélératrice ceſſe d'agir ; le corps (181) perſévérera donc dans ſon mouvement avec la vîteſſe u qu'il aura acquiſe ; c'eſt-à-dire, qu'à chaque unité de temps, il décrira un eſpace $=u$ (183) ; donc s'il continuoit de ſe mouvoir avec cette même vîteſſe pendant le temps t, il décriroit un eſpace $=u\times t$, c'eſt-à-dire, le double de celui e ou $\frac{ut}{2}$ qu'il a décrit (195) dans un temps égal, par l'action ſucceſſive de la force accélératrice. Donc *dans le mouvement uniformément & continuellement accéléré, l'eſpace décrit pendant un certain temps, eſt la moitié de celui que le mobile peut décrire dans un temps égal, avec la vîteſſe acquiſe, continuée uniformément.*

197. Puiſque (194) les vîteſſes acquiſes croiſſent comme les temps écoulés, ſi l'on appelle p la vîteſſe acquiſe au bout d'une ſeconde, alors la vîteſſe acquiſe, après un nombre t de ſecondes, ſera pt ; ainſi on

aura $u = pt$. L'équation $e = \frac{ut}{2}$, trouvée ci-deſſus, deviendra donc $e = \frac{ptt}{2}$ Donc ſi l'on repréſente par E, un autre eſpace décrit de la même maniere pendant un autre temps T, on aura de même $E = \frac{pT^2}{2}$; d'où l'un conclura $e : E :: \frac{ptt}{2} : \frac{pTT}{2} :: tt : TT$; ce qui nous apprend que *les eſpaces parcourus d'un mouvement uniformément & continuellement accéléré, ſont comme les quarrés des temps*.

198. Et puiſque (194) les vîteſſes ſont dans le rapport des temps, *les eſpaces ſont* donc *auſſi, dans le rapport des quarrés des vîteſſes*.

199. *Donc les viteſſes & les temps, ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement.*

200. Tout cela s'applique également aux mouvements uniformément retardés, pourvu que, par les temps, on entende ceux qui reſtent à s'écouler juſqu'à l'extinction de la vîteſſe; & que par les eſpaces, on entende ceux qui reſtent à décrire juſqu'à l'extinction de la vîteſſe.

201. Dans l'équation $e = \frac{pt^2}{2}$, que nous avons trouvée ci-deſſus (197), la quantité p

par laquelle nous avons entendu la vîteſſe que la force accélératrice eſt capable d'engendrer par ſon action ſucceſſivement pendant une ſeconde de temps, eſt ce que nous appellerons la force accélératrice ; parce que nous devons juger de cette force par l'effet qu'elle eſt capable de produire dans le mobile, dans un temps déterminé ; effet qui n'eſt autre que de lui communiquer une certaine vîteſſe.

Du Mouvement libre des corps peſants.

202. C'eſt à l'eſpece de mouvement que nous venons de conſidérer, qu'on doit rapporter le mouvement des corps peſants. Mais avant d'appliquer à cet objet, la théorie que nous venons d'expliquer, il eſt à propos de faire connoître quelques faits concernant la peſanteur.

Ce que nous entendons par peſanteur, c'eſt la force qui ſollicite les corps à deſcendre ſuivant des lignes verticales ou perpendiculaires à la ſurface des eaux. Si la terre, ou ſi la ſurface des eaux étoit parfaitement ſphérique, les directions de la peſanteur concourroient toutes au centre. Mais quoique cette ſurface ne ſoit pas parfaitement ſphérique, elle s'en éloigne peu ; enſorte que, pour les objets que nous avons à traiter, nous pouvons regarder, ſans aucune erreur ſenſible, les directions de la peſanteur, comme concourant au centre de la terre.

Nous avons déja eu occaſion de dire (*Géom.* 315) que le rayon de la terre conſidérée comme ſphérique, eſt de 19611500 pieds. De-là il eſt aiſé de conclure qu'il faut, ſur la ſurface de la terre, une étendue de 16 toiſes pour répondre à un angle d'une ſeconde au centre de la terre. Ainſi, dans une machine qui auroit 16 toiſes de longueur, il ne s'en faudroit que d'un angle d'une ſeconde, que les directions de la peſanteur, aux deux extrémités, ne fuſſent paralleles. *Donc, dans un même lieu, on peut regarder les dirctions de la peſanteur comme paralleles.*

Quant à la grandeur de cette force; à parler rigoureuſement, elle eſt différente à différentes diſtances de l'équateur, & à différents éloignements du centre de la terre. Mais les quantités dont elle differe, par les différentes diſtances où l'on peut être de l'équateur, ſont très-petites, & ne nous importent en aucune maniere, pour le préſent. Il en eſt de même des diminutions qu'elle ſubit à meſure qu'on s'éloigne du centre de la terre : elles ne peuvent être ſenſibles que par des changements de diſtance beaucoup plus considérables que ne sont les hauteurs auxquelles nous pouvons nous élever, ou les profondeurs auxquelles nous pouvons descendre; ainsi, nous regarderons, ici, la pesanteur comme une force qui est par-tout la même; c'est-à-dire, qui sollicite les corps à descendre d'une même quantité dans un même temps.

Il faut considérer cette force, comme agissant, & agissant également à chaque instant, sur chaque partie de la matiere. Or il est clair que si chacune des parties d'un corps reçoit la même vîtesse, la totalité ne sera mue qu'avec la même vîtesse que recevroit une seule des parties détachée de la masse; ensorte que la vîtesse que la pesanteur imprime à une masse quelconque, ne dépend point de la grandeur de cette masse: elle est la même pour une petite masse que pour une grande. Il est vrai, cependant, que nous ne voyons pas tous les corps tomber d'une même hauteur dans le même temps; mais cette différence est l'effet de la résistance de l'air, ainsi que nous le verrons par la suite: aussi lorsqu'on laisse tomber des corps dans un espace vuide d'air, observe-t-on que des corps très-différents en masse, tombent néanmoins d'une même hauteur dans le même-temps.

Il faut bien diſtinguer, ici, entre l'effet de la peſanteur & celui du poids. L'effet de la peſanteur eſt de faire paſſer ou de tendre à faire paſſer dans chaque partie de la matiere une certaine vîteſſe, qui eſt abſolument indépendante du nombre des parties matérielles. Mais le *poids* eſt égal à l'effort que l'on doit exercer, pour empêcher qu'une maſſe propoſée n'obéiſſe à ſa peſanteur. Or cet effort dépend de deux choſes; ſavoir, de la vîteſſe que la peſanteur tend à imprimer à chaque partie, & du nombre des parties qu'elle anime ou qu'elle tend à animer. Mais comme la vîteſſe que la peſanteur tend à imprimer, eſt la même pour chaque partie de la matiere, l'effort que l'on a à exercer, eſt proportionnel au nombre des parties de la matiere; c'eſt-à-dire, à la maſſe. Ainſi *le poids dépend de la maſſe, & la peſanteur n'en dépend nullement.* Cette obſervation, ſur le poids des corps, établit ce que nous avons avancé (191), ſavoir, que la maſſe eſt proportionnelle au poids.

203. Après ces éclairciſſements ſur la peſanteur, venons aux loix du mouvement des corps peſants.

Puiſque la peſanteur agit également, & ſans interruption, à quelque diſtance que le corps ſe trouve de la ſurface de la terre, (du moins pour les diftances auxquelles nous pouvons nous élever) la pefanteur eft donc une force accélératrice conftante, qui, à chaque inftant, fait paffer dans le mobile un nouveau degré de vîteffe, qui eft toujours le même pour chaque inftant égal : en forte que (194 & *fuiv.*) les vîteffes acquifes augmentent comme les temps écoulés; les efpaces parcourus font comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vîteffes; les vîteffes font comme les racines quarrées des efpaces parcourus; les temps font auffi comme les racines quarrées des efpaces parcourus : en un mot, tout ce que nous avons dit des forces accélératrices conftantes, s'applique littéralement à la pefanteur. Bien entendu, que dans tout ceci, nous faifons abftraction de la réfiftance de l'air & de tout autre obftacle.

Il ne s'agit donc, pour pouvoir déterminer, les temps, les efpaces, & les vîteffes dans le mouvement des corps graves, que de connoître un feul effet de la pefanteur dans un temps déterminé. Car les équations $u = pt$, $e = \frac{pt^2}{2}$, nous mettront en état de déterminer tous ces objets, dès qu'une fois nous fçaurons la valeur de p.

Rappellons-nous donc que par p (197),

nous avons entendu la vîteſſe que le mobile acquiert au bout d'une ſeconde de temps. Or on ſait par expérience (& nous verrons par la ſuite, comment on l'a trouvé) qu'un corps à qui l'air ne fait point de réſiſtance ſenſible, tombe de 15 pieds & $\frac{1}{10}$, ou plus exactement, de 15^p, 098 dans la premiere ſeconde de ſa chûte.

D'ailleurs nous avons vu (196) qu'avec la vîteſſe acquiſe par une ſuite d'accélérations, le mobile pourroit décrire d'un mouvement uniforme, un eſpace double, dans le même temps. Donc la vîteſſe qu'un corps peſant a acquis au bout de la premiere ſeconde de ſa chûte, eſt telle que ſi la peſanteur ceſſoit d'agir, il décriroit le double de 15 pieds & $\frac{1}{10}$, c'eſt-à-dire 30P, 2 à chaque ſeconde. Donc $p = 30, 2$.

204. Maintenant, l'équation $u = pt$, & l'équation $e = \frac{pt^2}{2}$, nous font voir; la premiere, que pour avoir la vîteſſe qu'un corps peſant a acquiſe après être tombé pendant un nombre t de ſecondes, il faut multiplier celle qu'il acquiert pendant la premiere ſeconde, par ce nombre t de ſecondes.

Donc, *lorſqu'un corps peſant eſt tombé pendant un certain nombre de ſecondes, la vîteſſe* *qu'il a acquiſe, eſt telle que ſi la peſanteur ceſſoit d'agir, il décriroit, par chaque ſeconde, autant de fois* $30^p, 2$ *qu'il s'eſt écoulé de ſecondes.* Ainſi, un corps qui a employé 7 ſecondes à tomber, ſe meut au bout de 7 ſecondes, avec une vîteſſe à parcourir 7 fois $30^p, 2$ ou 211 pieds & $\frac{2}{5}$ par ſeconde, ſans aucune nouvelle accélération.

205. La ſeconde équation $e = \frac{pt^2}{2} = \frac{1}{2}pt^2$, fait voir que pour avoir l'eſpace e ou la hauteur e dont un corps peſant tombe dans un nombre t de ſecondes, il faut multiplier $\frac{1}{2}p$, c'eſt-à-dire, la quantité dont il tombe dans la premiere ſeconde, la multiplier, dis-je, par le quarré du nombre des ſecondes.

Donc *la hauteur dont un corps peſant tombe pendant un nombre* t *de ſecondes, eſt d'autant de fois* 15 *pieds &* $\frac{1}{10}$, *qu'il y a d'unités dans le quarré de ce nombre de ſecondes.* Ainſi quand un corps a employé 7 ſecondes à tomber, on peut être aſſuré qu'il eſt tombé de 49 fois $15^p, 1$, c'eſt-à-dire, de 740 pieds à très-peu près; en ſuppoſant toujours que la réſiſtance de l'air n'ait pas lieu. On voit donc que quand on connoît le temps écoulé, rien n'eſt plus aiſé que de déterminer la vîteſſe acquiſe, & l'eſpace parcouru.

206. Si l'on veut ſavoir combien de temps un corps employeroit à tomber d'une hauteur connue : l'équation $e = \frac{1}{2} p t^2$, donne $t^2 = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, & par conſéquent $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut chercher combien cette hauteur e contient de fois la hauteur $\frac{1}{2}p$ dont un corps peſant tombe dans la premiere ſeconde, & tirer la racine quarrée de ce nombre de fois.

207. Veut-on ſavoir de quelle hauteur un corps peſant devroit tomber pour acquérir une vîteſſe connue, c'eſt-à-dire, une vîteſſe à parcourir uniformément un certain nombre de pieds, par ſeconde. Alors de l'équation $u = p t$, je tire la valeur de t qui eſt $t = \frac{u}{p}$; je la ſubſtitue dans l'équation $e = \frac{1}{2} p t^2$; & j'ai $e = \frac{1}{2} p \times \frac{u^2}{pp} = \frac{u^2}{2p}$, qui m'apprend que *pour connoître la hauteur* e *dont un corps peſant devroit tomber pour acquerir une vîteſſe* u *d'un certain nombre de pieds par ſeconde, il faut diviſer le quarré de ce nombre de pieds, par le double de la vîteſſe qu'un corps peſant acquiert au bout de la premiere ſeconde ; c'eſt-à-dire, par 60, 4.*

Ainſi, ſi je veux ſavoir de quelle hauteur un corps peſant devroit tomber pour acquérir une vîteſſe de 100 pieds par ſeconde, je divise le quarré de 100, c'est-à-dire, 10000, par 60, 4; le quotient 165 $\frac{1}{2}$ m'apprend qu'un corps doit tomber de 165 pieds $\frac{1}{2}$, pour acquérir une vîtesse de 100 pieds par seconde.

Il est évident qu'on se conduiroit de même, pour déterminer à quelle hauteur montera un corps jetté verticalement avec une vîtesse connue.

208. Comme on peut, ainsi qu'on le voit par ces exemples, déterminer facilement toutes les circonstances du mouvement des corps pesants, c'est à ces mouvements qu'on rapporte le plus communément, tous les autres mouvements; en sorte que souvent au lieu de donner immédiatement la vîtesse d'un corps, on donne la hauteur d'où il auroit dû tomber pour acquérir cette vîtesse, par l'action de la pesanteur. Nous aurons occasion d'en voir des exemples.

Observons donc pour récapituler, que toutes les circonstances du mouvement accéléré, & par conséquent du mouvement des corps graves, sont comprises dans les deux équations $u = p\,t$, $e = \frac{1}{2}\,p\,t^2$; en sorte que p étant connu, dès que l'on connoîtra l'une de ces trois choses, le temps, l'espace & la vîtesse, on peut toujours trouver les deux autres, soit immédiatement par l'une ou l'au-

tre

tre de ces deux équations, ſoit par le concours des deux, combinées comme nous venons de le faire (207).

Des Mouvements variés de quelque maniere que ce ſoit.

209. Lorſque le mobile eſt ſoumis à l'action d'une force qui agit ſur lui ſans interruption, mais d'une manière différente à chaque inſtant, le mouvement s'appelle, en général, *mouvement varié*. On a des exemples de mouvement varié dans le débandement des reſſorts : quoique la vîteſſe aille en augmentant, cependant les degrés par leſquels elle augmente vont en diminuant. Il en eſt de même des degrés par leſquels le mouvement du navire arrive à l'uniformité : l'action du vent ſur les voiles diminue à meſure que le navire acquiert du mouvement, parce qu'il échappe d'autant plus à cette action, qu'il a plus de vîteſſe.

210. Les principes néceſſaires pour déterminer les circonſtances de ces mouvements, ſe déduiſent facilement de ce que nous avons dit ſur les mouvements uniformes & ſur les mouvements uniformément accélérés : Voici comment on y parvient.

1°. De quelque maniere que le mouvement ſoit varié, ſi on le conſidere par rapport à des inſtants infiniment petits, on peut ſuppoſer que la vîteſſe ne change point pendant la durée de cet inſtant. Or lorſque le mouvement eſt uniforme, la vîteſſe a pour expreſſion l'eſpace décrit pendant un temps quelconque t, diviſé par ce même temps t. Donc lorſque le mouvement ne ſera uniforme que pendant un inſtant, la vîteſſe doit avoir pour expreſſion, l'eſpace infiniment petit décrit pendant cet inſtant, diviſé par cet inſtant. Donc ſi e repréſente l'eſpace décrit d'un mouvement variable, pendant le temps quelconque t, de repréſentera ce qui eſt décrit uniformément pendant l'inſtant dt; on aura donc $u = \frac{de}{dt}$, ou $de = u\,dt$; *premiere équation fondamentale des mouvements variés.*

211. 2°. L'équation $u = pt$, trouvée (197), & qui exprime le rapport des vîteſſes aux temps, dans les mouvements uniformément accélérés, donne $p = \frac{u}{t}$. C'eſt-à-dire, que quand la force accélératrice, ou plutôt la quantité p par laquelle on la meſure (201) eſt conſtante, elle a pour expreſſion, la vîteſſe u qu'elle engendre pendant un certain temps t, diviſée par ce temps t. Donc ſi cette force accélératrice p agit différemment

d'un inſtant à l'autre ; c'eſt-à-dire, ſi elle n'eſt conſtante que pendant un inſtant, elle doit avoir pour expreſſion la vîteſſe qu'elle engendre pendant cet inſtant, diviſée par cet inſtant ; c'eſt-à-dire, qu'elle doit avoir pour expreſſion l'accroiſſement de la vîteſſe, diviſé par l'accroiſſement du temps ; on aura donc $p = \frac{du}{dt}$, ou $du = pdt$, *ſeconde équation fondamentale des mouvements variés.*

212. Dans l'équation $u = pt$ nous avons entendu (167) par p, la vîteſſe que la force accélératrice engendreroit dans le mobile pendant un temps déterminé (comme d'une ſeconde), par une action continuée & toujours égale. Dans l'équation $du = pdt$, on doit entendre la même choſe. Mais il faut obſerver que la force accélératrice étant ſuppoſée variable, la quantité p qui repréſente la vîteſſe qu'elle feroit capable d'engendrer ſi elle agiſſoit comme force accélératrice conſtante pendant une ſeconde, cette quantité p eſt différente pour tous les inſtants du mouvement. En effet, on conçoit aiſément que lorſque la force accélératrice devient plus petite, la vîteſſe qu'elle feroit capable d'engendrer dans une ſeconde, par ſon action actuelle répétée également pendant chaque inſtant de cette ſeconde, doit être plus petite, *& vice verſâ.*

213. Les deux équations $de = u\,dt$, $du = p\,t\,d$, peuvent en fournir une troisieme que l'on emploie encore avec avantage : la voici.

De l'équation $de = u\,dt$, on tire $dt = \frac{de}{u}$, substituant cette valeur dans l'équation $du = p\,t\,d$, on a, toute réduction faite, $p\,de = u\,du$.

214. Remarquons, que dans le raisonnement par lequel nous sommes parvenus à l'équation $du = p\,dt$ (211), nous avons regardé la vîtesse comme croissante. Si elle alloit en diminuant, il faudroit (21), au lieu de du, mettre $-du$; ensorte que les deux équations $du = pdt$, & $p\,de = u\,du$, doivent être écrites ainsi, $\pm\,du = p\,dt$, & $p\,de = \pm\,u\,du$, le signe supérieur étant pour le mouvement accéléré; & le signe inférieur, pour le mouvement retardé.

215. Il y a une quatrieme équation qu'on peut déduire des deux équations fondamentales, & qu'il ne faut pas omettre : la voici.

L'équation $de = u\,dt$, donne $u = \frac{de}{dt}$; donc $du = d\left(\frac{de}{dt}\right)$. Substituant cette valeur dans l'équation $p\,dt = \pm\,du$, on a $p\,dt = \pm\,d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Si l'on suppose (comme on en est bien le maître) que dt soit constant, on a $p\,dt = \pm\frac{dde}{dt}$, ou $p\,dt^2 = \pm\,dde$.

Mais il faut bien se souvenir que l'équation $p\,dt^2 = \pm\,dde$

ſuppoſe dt conſtant. Lorſqu'on fait dt variable, on emploie l'équation $p\,dt = \pm d\left(\frac{de}{dt}\right)$.

Nous aurons plus d'une occaſion d'appliquer utilement ces formules. Mais ne perdons pas de vue que la quantité p qu'elles renferment, repréſente, pour chaque inſtant, la vîteſſe que la force accélératrice ſeroit capable de faire naître dans le mobile, dans un intervalle de temps connu, comme d'une ſeconde, ſi pendant cette ſeconde elle agiſſoit comme force accélératrice conſtante ; en ſorte que, comme cette quantité p meſure pour chaque inſtant l'effet dont la force accélératrice eſt capable, nous lui donnerons, pour abréger, le nom de force accélératrice.

De l'Equilibre entre des forces directement oppoſées.

216. Nous venons de conſidérer le mouvement que doit avoir un corps ſoumis à l'action d'une force qui agit ſur lui, toujours ſuivant une même direction. Mais nous n'avons pas encore fait mention de la maniere dont le mouvement paſſe dans le mobile. C'eſt un objet qu'il n'eſt pas moins important d'examiner ; mais comme les loix de la com-

munication du mouvement, dépendant de celles de l'équilibre, ainſi que nous le verrons par la ſuite, il faut commencer par nous occuper de celles-ci. Il n'eſt queſtion, pour le préſent, que de l'équilibre entre des forces directement oppoſées.

Nous repréſenterons les forces, ainſi que nous l'avons déja dit, par les effets qu'elles ſont capables de produire ; c'eſt-à-dire, chacune, par la quantité de mouvement d'une maſſe déterminée. Mais pour ne point embraſſer trop d'objets à la fois, nous conſidérerons ces maſſes comme réduites chacune à un ſeul point, auquel, par la penſée, nous attribuerons la même quantité de matiere qu'au corps dont il tiendra lieu. Nous verrons, par la ſuite, qu'il y a, en effet, dans tous les corps, un point par lequel le mouvement ſe tranſmet, comme ſi toute la maſſe y étoit concentrée. Au ſurplus, nous conſidérerons les corps (juſqu'à ce que nous avertiſſions du contraire) comme compoſés de parties abſolument dures & liées les unes aux autres, de maniere à ne pouvoir changer leurs ſituations reſpectives, par l'action d'aucune force.

217. Cela poſé, concevons (*Fig.* 54) deux maſſes M & m ; la premiere, mue de A vers C avec une viteſſe V ; la ſeconde,

mue de C vers A, avec une vîteſſe u; lorſque ces deux maſſes viendront à ſe rencontrer, elles ſe feront équilibre ſi la quantité de mouvement de M, eſt égale à la quantité de mouvement de m; c'eſt-à-dire (189), ſi $MV = mu$.

En effet, il eſt d'abord évident que ſi M eſt égal à m, & qu'en même temps les deux vîteſſes V & u ſoient égales, il y aura équilibre; car alors la même raiſon que l'on donneroit pour prouver que M doit l'emporter ſur m, prouveroit auſſi que m doit l'emporter ſur M, puiſque tout eſt égal de part & d'autre.

218. Suppoſons préſentement que M eſt double de m; mais qu'en même temps u eſt double de V; que, par exemple, M parcoure un pied par ſeconde, & m deux pieds par ſeconde. Il eſt clair que je puis conſidérer M comme compoſé de deux maſſes égales à m; & qu'à l'inſtant du choc je puis me repréſenter le corps m comme animé d'une vîteſſe d'un pied par ſeconde, à laquelle on ajoute dans le même inſtant une autre vîteſſe d'un pied par ſeconde. Alors je puis me repréſenter que dans le choc, la maſſe m conſume [illegible] de ſes vîteſſes contre une pareille [illegible] de la maſſe M; & ſon autre vîteſſe [illegible] la portion égale & reſtante de la

Maintenant, ſi au lieu de ſuppoſer les maſſes M & m, dans le rapport de 2 à 1, & au contraire leurs vîteſſes dans le rapport de 1 à 2, on les ſuppoſoit dans toute autre rapport, on voit qu'on pourroit toujours ſuppoſer la plus grande maſſe décompoſée en un certain nombre de maſſes égales à la plus petite, dont chacune détruit dans la plus petite une vîteſſe égale à la ſienne, en ſorte qu'on peut établir comme général, le principe ſuivant.

PRINCIPE FONDAMENTAL. *Deux corps qui agiſſent l'un ſur l'autre, ſuivant des lignes directement oppoſées, ſe font équilibre, lorſque leurs quantités de mouvement ſont égales;* c'eſt-à-dire, lorſque le produit de la maſſe de l'un, par la vîteſſe avec laquelle il tend à ſe mouvoir, eſt égal au produit de la maſſe de l'autre par la vîteſſe avec laquelle il tend auſſi à ſe mouvoir.

Cette propoſition a lieu généralement ſoit qu'il s'agiſſe de deux corps qui marchent librement au devant l'un de l'autre, ſoit qu'il ſoit queſtion de deux corps qui ſe pouſſent à l'aide d'une ligne $M\,m$ inflexible & ſans maſſe; ſoit enfin qu'il ſe tirent en ſens contraires, à l'aide d'un fil inextenſible $M\,m$. Et réciproquement ſi deux corps ſe font équilibre, on doit conclure que leurs mouvements ſont directements oppoſés, & que leurs quantités de mouvement ſont égales.

219. Donc ſi trois, ou un plus grand nombre de corps M, m, m', &c. (*Fig.* 55) qui ſe meuvent ou tendent à ſe mouvoir ſur une même ligne, avec des vîteſſes V, u, u' ſe font équilibre, il faut que la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui agiſſent dans un ſens, ſoit égale à la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui agiſſent en ſens contraire.

Car s'ils ſe font équilibre, on peut toujours ſuppoſer que M & m allant du même ſens, m détruit une partie du mouvement de m', & que M détruit l'autre. Or, ſi l'on nomme x la vîteſſe que m' perd par l'action de m, on aura $m'x$ pour la quantité de mouvement qu'il perd par cette même action; on aura donc $mu = m'x$: le corps M n'aura donc plus à détruire dans m', que la quantité de mouvement reſtante; ſavoir, $m'u' - m'x$; on aura donc $MV = m'u' - m'x$; ou, à cauſe que $m'x = mu$, on aura $MV = m'u' - mu$; c'eſt-à-dire, $MV + mu = m'u'$.

Du Mouvement composé.

220. Nous ſuppoſerons encore que les maſſes auxquelles ſeront appliquées les forces

dont nous allons parler, ſont concentrées en un point.

On appelle *Mouvement compoſé*, celui que prend un corps ſollicité en même temps par pluſieurs forces qui ont telles directions qu'on voudra.

Si un corps *M* mu ſuivant la ligne droite *A B* (*Fig.* 56) reçoit lorſqu'il eſt arrivé au point *M* une impulſion ſuivant une ligne *MD* perpendiculaire à la ligne *A B*; cette impulſion ne peut produire d'autre effet que de l'écarter de la ligne *A B*; elle ne peut ni augmenter, ni diminuer la vîteſſe qu'il avoit pour s'éloigner de *CD* perpendiculairement à cette ligne. En effet, la direction *C D* étant perpendiculaire à *A B*, il n'y a aucune raiſon pour que la force qui agit ſuivant *CD* produiſe un effet plutôt à la droite qu'à la gauche de cette ligne; & comme elle ne peut en produire des deux côtés à la fois, elle n'en produira donc ni de l'un ni de l'autre.

Le raiſonnement eſt le même, ſi l'on ſuppoſe que le corps *M* étant mu ſuivant *C D*, vient à être frappé ſuivant *M B*; cette derniere force n'ajoutera ni n'ôtera rien à la vîteſſe avec laquelle le corps *M* tendoit à s'éloigner de *M B*.

221. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Si deux*

forces P & Q (*Fig.* 57) *dont les directions font un angle droit, agissent au même instant sur un mobile* M ; *que la force* Q *soit telle, que par son action instantanée sur le mobile; elle puisse seule lui faire parcourir* M B *dans un temps déterminé comme d'une seconde ; & la force* P *telle qu'elle puisse seule lui faire parcourir* M D *dans le même temps ; je dis que par l'action composée de ces deux forces, le mobile* M *décrira, dans le même temps, la diagonale* M E *du parallélogramme* D M B E *qui a pour côtés ces mêmes lignes* M B, M D.

Puisque les deux forces agissent au même instant sur le mobile, on peut supposer qu'il étoit en mouvement sur la ligne *P D*, & qu'au moment où il arrive au point *M*, la force *Q* perpendiculaire à *PD* vient à agir sur lui ; or selon ce qui vient d'être dit (220) cette force *Q* ne peut ni augmenter ni rallentir la vîtesse qu'il avoit pour s'éloigner de *QB*; donc si par le point *D* on tire *DE* parallele à *M B*, il faudra qu'au bout d'une seconde il se trouve sur quelque point de la ligne *D E* dont tous les points sont éloignés de *Q B*, d'une quantité égale à *M D.*

Or le même raisonnement que nous faisons pour la force *P* à l'égard de la force *Q*, s'applique mot à mot à la force *Q* par rapport à la force *P*; donc si par le point *B* on tire

B E parallele à *P D*, le corps doit, au bout d'une ſeconde, ſe trouver ſur quelque point de *B E*. Mais il n'y a que le point *E* qui ſoit tout à la fois ſur *D E* & ſur *B E*; donc le mobile, au bout d'une ſeconde, ſera en *E*.

Il eſt d'ailleurs évident (181) que quelque route que le mobile prenne par l'action inſtantanée des deux forces, elle doit être une ligne droite ; puiſque dès qu'elles ont agi, le mobile eſt abandonné à lui-même; donc puiſque cette route doit paſſer par *M* & par *E* elle doit être *M E*, c'eſt-à-dire, la diagonale du parallélogramme *D M B E*.

Ajoutons que le mobile décrit *M E* d'un mouvement uniforme, puiſqu'immédiatement après l'action compoſée des deux forces, il eſt abandonné à lui-même (181).

222. Puiſque les deux forces *P* & *Q* agiſſant conjointement ſur le mobile n'ont d'autre effet que de lui faire décrire la diagonale *ME*; concluons donc 1°. qu'à deux forces dont les directions font un angle droit, on peut toujours en ſubſtituer une ſeule, pourvu que celle-ci puiſſe faire parcourir au mobile, la diagonale d'un parallélogramme rectangle, dont les côtés ſeroient décrits dans le même temps chacun ſéparément par l'action de la force dont il eſt la direction.

La force unique ME qui résulte de l'action des deux forces MB, MD, s'appelle la *résultante* de ces deux forces.

Comme les lignes MB, MD, représentent les effets dont les forces Q & P sont capables séparément, & ME celle dont elles sont capables conjointement, on peut regarder MB, MD, ME comme représentant ces forces elles-mêmes.

2°. On pourra donc, aussi considérer une force unique quelconque ME, comme étant le résultat de deux autres forces MB, MD dont les directions feroient entr'elles un angle droit, pourvu que celle-là étant représentée par la diagonale ME, ces deux-ci le soient par les côtés MB, MD d'un même parallélogramme rectangle. On pourra donc à la force unique ME, substituer les deux forces MB & MD; puisqu'en effet ces deux forces ne produiroient que ME.

223. En général, *quelque angle que fassent entr'elles les directions des deux forces* P *&* Q (*Fig.* 58 & 59) *qui agissent en même temps sur un mobile* M; *ce mobile décrira la diagonale* M E *du parallélogramme* DMBE, *dont les côtés marquent sur les directions de ces forces, les effets dont elles sont capables séparément : & il décrira cette diagonale, dans le même temps que par l'action de l'une quelconque de ces deux*

forces, il eût décrit le côté qui repréſente cette derniere force.

En effet, concevons que par le point M, on mene FMH perpendiculaire à la diagonale ME; & que par les points D & B on mene les lignes DF, BH paralleles, & les lignes DG, BI perpendiculaires à cette même diagonale. Au lieu de la force P repréſentée par MD diagonale du parallélogramme rectangle $FMGD$, on peut (222) prendre les deux forces MF & MG. Par la même raiſon, on peut, au lieu de la force Q repréſentée par la diagonale MB du parallélogramme rectangle $MHBI$, prendre les deux forces MH & MI. On peut donc, aux deux forces P & Q ſubſtituer les quatre forces MF, MG, MH, MI; & celles-ci ne peuvent manquer d'avoir la même réſultante que ces deux-là. Or de ces quatre forces les deux MH, MF, ne contribuent en rien à la réſultante, parce qu'elles agiſſent ſuivant des directions oppoſées, & qu'elles ſont égales. En effet, il eſt aiſé de voir que les deux triangles DG[illegible], EIB ſont égaux, par la nature du parallélogramme; donc $DG = BI$; donc auſſi $MF = MH$.

Quant aux deux forces MI, MG, comme elles ſont dirigées ſuivant une même ligne, l'effet qui en réſulte, doit être la ſomme des deux effets MG, MI (*Fig.* 58), parce que ces forces agiſſent dans le même ſens ; & doit être leur différence (*Fig.* 59), parce qu'elles agiſſent en ſens contraires. Mais puiſque le triangle EIB eſt égal au triangle DGM, on a (*Fig.* 58) $MI + MG = MI + EI = ME$; & (*Fig.* 59) $MI - MG = MI - EI = ME$; donc les quatre forces MF, MH, MG, MI, & par conſéquent les deux forces MD, MB, n'ont d'autre effet que la force ME repréſentée par la diagonale du parallélogramme $DMBE$, dont les deux côtés MB, MD repréſentent les deux forces Q & P.

224. Nous avons, dans ce qui précéde repréſenté les deux forces P & Q (57, 58, & 59) par les lignes MD, MB qu'elles ſeroient capables de faire décrire dans un même temps, au mobile M, c'eſt-à-dire, par les vîteſſes qu'elles peuvent lui communiquer ; quoique, ſelon ce que nous avons dit (189), la meſure véritable des forces, doit être la quantité de mouvement qu'elles ſont capables de produire. Mais comme les quantités de mouvement (190) ſont dans le rapport des vîteſſes, quand la maſſe eſt la même, ainſi que dans le cas préſent ; on peut toujours prendre, comme nous l'avons fait, les vîteſſes MD, MB, pour repréſenter ces deux forces.

Mais ſi au lieu d'avoir immédiatement les vîteſſes que les deux forces P & Q peuvent engendrer dans le mobile M, on avoit les quantités de mouvement qu'elles peuvent produire dans des maſſes connues, alors on prendroit MD & MB, dans le rapport de ces quantités de mouvement. Par exemple, ſi je ne connoiſſois les forces P & Q, que par ce caractere; que la force P eſt capable d'engendrer une vîteſſe connue u, dans une maſſe connue m; & que la force Q eſt capable d'engendrer une vîteſſe connue u', dans une maſſe connue m', alors je prendrois $MD : MB :: mu : m'u'$. Car, ſelon ce que nous venons de voir, il faut prendre $MD : MB$ dans le rapport des vîteſſes que ces deux forces peuvent imprimer au mobile M; or la premiere étant capable d'engendrer la quantité de mouvement mu, eſt capable de donner au mobile M la vîteſſe $\frac{mu}{M}$ (189); par la même raiſon, la ſeconde, ou la force Q eſt capable de donner au mobile M, la vîteſſe $\frac{m'u'}{M}$; il faudroit donc prendre $MD : MB : \frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M}$; mais $\frac{mu}{M} : \frac{m'u'}{M} :: mu : m'u'$; donc, il faut en effet, faire $MD : MC$ dans le rapport des quantités de mouvement qui meſurent les forces P & Q.

Cette

Cette réflexion eſt utile pour comparer les effets de différentes forces appliquées à différents mobiles.

La propoſition générale que nous venons de démontrer (223), eſt d'une très-grande utilité ; preſque tout ce que nous dirons par la ſuite, n'en ſera qu'une application.

225. On voit donc qu'il eſt abſolument indifférent de regarder un corps comme ſollicité par l'action combinée des deux forces *MB*, *MD* (*Fig.* 58 & 59), qui font entr'elles tel angle qu'on voudra, ou de le regarder comme ſollicité par l'action unique de la force repréſentée par la diagonale *ME*.

Et réciproquement, il revient abſolument au même, de conſidérer un corps comme ſollicité par une force unique *ME*, ou de le conſidérer comme ſollicité en même temps par deux forces qui feroient repréſentées par les côtés d'un parallélogramme, dont celle-là feroit la diagonale. Par exemple, qu'un corps parvienne de *M* en *E*, par un mouvement uniforme, en une ſeconde de temps ; ou bien qu'il ſe meuve ſur la ligne *MB*, de maniere à la parcourir dans une ſeconde de temps, & qu'en même temps cette ligne ſoit tranſportée parallelement à elle-même le long de *MD*, & qu'elle parcoure *MD* auſſi dans une ſeconde, le corps dans ce ſecond mouvement ſe trouvera également, ne décrire autre choſe que la ligne *ME*.

226. Les deux forces *MB*, *MD* ſe rencontrant au point *M*, ſont néceſſairement dans un même plan (*Géom.* 174). Puis donc qu'elles ont pour réſultante la diagonale *ME*, qui eſt dans le plan du parallélogramme, on peut dire généralement, que *deux forces qui ſe rencontrent, ſont toujours dans un même plan avec leur réſultante.*

De la Compoſition & de la Décompoſition des forces.

227. Non-ſeulement on peut, par le principe que nous venons d'expoſer, réduire à une ſeule, deux forces qui concourent, & décompoſer une force en deux autres; mais on peut, en général, réduire à une ſeule force, tant d'autres forces que l'on voudra, lorſqu'elles ſont dans un même plan, ou lorſqu'elles ſe rencontrent toutes en un même point. Et réciproquement, on peut décompoſer une ou pluſieurs forces, en tel autre nombre de forces que l'on voudra.

228. Mais avant de faire voir comment on y parvient, il faut obſerver que lorſqu'une

force *P* (*Fig.* 60) agit ſur un corps, ſoit pour le pouſſer, ſoit pour le tirer, il importe peu à quel point de la direction de cette force, on ſuppoſe que ſon action ſoit appliquée. Par exemple, c'eſt la même choſe, que la force *P* tire le corps *C* par le point *P* à l'aide d'une verge inflexible & ſans maſſe ou d'un fil inextenſible & ſans maſſe; c'eſt la même choſe, dis-je, qu'elle le tire par le point *P*, ou qu'elle le tire par le point *A*, ou par le point *B*, ou par le point *C*, ou qu'elle le pouſſe par tout autre point *D* lié avec ce corps. Tant que ſon action s'exercera ſuivant la même direction, elle aura toujours le même effet. La diſtance ne peut influer qu'autant que l'action de la puiſſance ſe tranſmettroit à l'aide de quelque inſtrument, comme levier ou corde, dont la maſſe partageroit l'action de la puiſſance; ce que nous excluons ici.

Ainſi, ſi deux forces *P* & *Q* (*Fig.* 61) dirigées dans un même plan, ſuivant les lignes *A Q*, *B P* tirent ou pouſſent un corps par les deux points *A* & *B*; ce corps n'eſt pas autrement ſollicité qu'il le feroit, ſi les deux forces le tiroient toutes deux par leur point de concours *I*, en reſtant toujours dirigées de la même maniere.

Cela poſé, venons à la compoſition &

à la décompoſition des forces.

229. Suppoſons quatre forces P, Q, R, S (*Fig.* 62) dirigées ſuivant les lignes OP AQ, BR, TS toutes dans un même plan. Prolongeons d'abord, par la penſée, la direction PO, juſqu'à ce qu'elle rencontre AQ, au point A: & ſuppoſant que AD, AE ſont les eſpaces que les deux forces P & Q pourroient reſpectivement faire décrire à un même mobile, dans un temps déterminé, comme d'une ſeconde; ſi l'on forme le parallélogramme $AEID$, la diagonale AI, repréſentera (223) l'effort réſultant des deux forces P & Q, & pourra par conſéquent tenir lieu de ces deux forces.

Concevons maintenant, que AI prolongé rencontre en B la direction BR de la force R; & ayant pris BM égal à AI, ſi l'on prend BF pour l'eſpace que la force R eſt capable de faire décrire en une ſeconde, au même mobile que ci-deſſus: alors ſuppoſant la force AI appliquée en B; puiſque cette force eſt repréſentée par $BM = AI$, de ſon concours d'action avec la force R, il réſultera une force unique repréſentée par la diagonale BG du parallélogramme $BMGF$: cette force tiendra donc lieu de la force R & de la force AI; c'eſt-à-dire, tiendra lieu des trois forces R, Q & P.

Enfin concevons que BG prolongée, rencontre en C, la direction TS de la force S, & faisons $CK = BG$; supposons que CH représente l'espace que la force S peut faire décrire dans une seconde, au même mobile que ci-dessus; alors concevant la force BG, appliquée en C suivant CG, & représentée par CK; du concours de cette force avec la force S, il résultera un effort unique représenté par la diagonale CN du parallélogramme $CHNK$. Cette force tiendra donc lieu de la force S & de la force CK ou BG; elle tiendra donc lieu des quatre forces P, Q, R, S: elle est donc la résultante de ces quatre forces.

On voit donc par-là, qu'on peut toujours, & comment on peut réduire à une seule force, tant de forces que l'on voudra, lorsqu'elles sont dirigées dans un même plan.

230. Cet exemple fait voir en même temps, comment on peut, à une seule force, en substituer tant d'autres que l'on voudra; & quelles conditions ces autres doivent avoir.

Par exemple (*Fig.* 62) au lieu de la force unique BG, on peut en formant un parallélogramme quelconque $BFGM$, dont BG soit la diagonale, prendre deux forces représentées par BF & BM. Et comme on peut suppoſer chacune de ces deux forces appliquées à tel point de leur direction que l'on voudra, on peut tranſporter BM en AI, le point A étant à telle diſtance qu'on voudra de B, & former ſur AI un autre parallélogramme quelconque $AEID$; alors on peut ſubſtituer à la force AI, deux forces repréſentées par AE & AD; enſorte qu'à la force unique BG, on aura ſubſtitué les trois forces BF, AE, AD qui produiront le même effet que celle-là.

231. Remarquons que puiſqu'il n'y a d'autre condition pour déterminer les forces AD, AE, ſinon qu'elles ſoient exprimées par les côtés AD, AE, du parallélogramme $ADIE$ dont AI ſeroit la diagonale, ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manieres, ſoit que le parallélogramme $ADIE$ ſoit dans le plan du parallélogramme $FBMG$, ou qu'il ſoit dans tout autre plan; on peut décompoſer une force quelconque BG, en tant d'autres qu'on voudra, & qui ſoient dans tels plans qu'on voudra.

Nous verrons par la ſuite, l'uſage de ces compoſitions & décompoſitions de forces.

232. On voit, par l'exemple de décompoſition que nous venons de donner, qu'on peut aſſujettir, ſi on le veut, quelques-unes des forces à paſſer par certains points don-

nés, & même à être d'une grandeur déterminée; à être paralleles à certaines lignes données; en un mot, à satisfaire à certaines conditions données. Par exemple, si l'on avoit une force représentée par la ligne *A B* (*Fig.* 63), & qu'on voulût substituer à cette force, deux autres dont l'une passât par un point donné *O*, fût parallele à une ligne donnée de position *S T*, & fût en même temps d'une certaine grandeur *S K*; c'est-à-dire, telle qu'elle pût faire décrire *S K* à un mobile, dans le même temps que la force représentée par *A B*, feroit décrire au même mobile la ligne *A B*; voici comment on satisferoit à cette question, d'après les principes précédents.

Par le point *O*, on meneroit *O V* parallele à *S T*, & qui rencontreroit *A B* en quelque point *V*. On prendroit $VR = SK$, & $VQ = AB$; alors menant *R Q*, on lui meneroit par le point *V*, la parallele *VH*, que l'on termineroit en *H*, par la ligne *Q H* parallele à *VR*; *VR* feroit la force demandée, & *VH* feroit celle qui, conjointement avec *VR*, tiendroit lieu de *VQ* ou de *A B*.

La solution que nous donnons, ne cesse d'avoir lieu, que lorsque la ligne *S T* est parellele à *A B*; mais on verra dans peu, ce qu'il y a à faire dans ce cas.

233. Remarquons que puiſque les deux forces compoſantes P & Q (*Fig.* 58 & 59) étant repréſentées par les deux côtés MD, MB, du parallélogramme $DMBE$, leur réſultante doit néceſſairement être repréſentée par la diagonale ME du même parallélogramme, on a, en nommant R cette réſultante, $P : R :: MD : ME$, & $Q : R :: MB : ME$, c'eſt-à-dire, $P : Q : R :: MD : MB, ME$, ou (à cauſe que $MD = BE$) $:: BE : MB : ME$. Or dans le triangle MBE, on a (*Géom.* 299) $BE : MB : ME : \sin BME : \sin BEM : \sin MBE$; ou à cauſe des paralleles BE & MD qui donnent l'angle $BEM = DME$, & l'angle MBE ſupplément de BMD, & par conſéquent (*Géom.* 275) $\sin MBE = \sin BMD$, on a $BE : MB : ME :: \sin BME : \sin DME : \sin BMD$; donc $P : Q : R :: \sin BME : \sin DME : \sin BMD$; où l'on voit que ſi l'on ſuppoſe la force P exprimée par $\sin BME$, la force Q le ſera par $\sin DME$; la force R le ſera par $\sin BMD$; c'eſt-à-dire, que *deux forces compoſantes & leur réſultante, peuvent toujours être repréſentées, chacune, par le ſinus de l'angle compris entres les directions des deux autres.*

Ainſi, on peut employer indifféremment pour repréſenter les forces, ou des lignes priſes ſur leurs directions, ou les ſinus des angles compris entre leurs directions, pourvu qu'on prenne pour chacune, le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

Cette derniere maniere d'exprimer les forces, a auſſi ſes avantages particuliers, comme nous le verrons par la ſuite.

234. Si du point M comme centre (*Fig.* 64 & 65), & d'un rayon quelconque ME' on décrit l'arc de cercle $HE'G$ qui rencontre en G & H les directions, prolongées, des forces P & Q; & que du point E' on mene $E'F, E'I$ perpendiculaires ſur MD, MB; & du point H, HL perpendiculaire ſur MD. Il eſt facile de voir que $E'F$, $E'I$, HL ſont reſpectivement les ſinus des angles DME, BME & BMD; on a donc $P:Q:R::E'I:E'F:HL$.

235. Concevons maintenant que les directions des deux forces P & Q (*Fig.* 66 & 67), paſſant conſtamment par deux points fixes K & N, leur point de concours M s'éloigne de plus en plus; il eſt viſible que les ſinus * des angles BME, DME & BMD approcheront, de plus en plus, de ſe confondre avec les arcs $E'H$, $E'G$, GH; donc ſi le point M s'éloigne à l'infini, $E'F$, $E'I$

* Il faut ſe rappeller (*Géom.* 175) que le ſinus d'un angle obtus, eſt le même que celui de ſon ſupplément.

& HL ſe trouvent tous appliqués ſur l'arc GH qui devient une ligne droite perpendiculaire aux deux lignes MK & MN, qui pour lors ſont paralleles entr'elles & à la ligne ME; & puiſqu'on a toujours $P : Q : R :: E'I : E'F : HL$; HL devenant alors égale à $E'I + E'F$ (*Fig.* 66) & $= E'I - E'F$ (*Fig.* 67), il s'enſuit que *lorſque deux forces* P *&* Q (Fig. 68 *&* 69) *ont des directions paralleles*, 1°. *leur réſultante leur eſt parallele.* 2°. *Que ſi on tire une ligne* F I *perpendiculaire, à ces directions, chacune de ces forces eſt repréſentée par la partie de cette perpendiculaire, compriſe entre les directions des deux autres.* 3°. *La réſultante eſt égale à la ſomme des deux compoſantes, lorſque celles-ci agiſſent dans un même ſens ; & égale à leur différence, lorſqu'elles agiſſent en ſens contraires.*

236. Puiſque l'on a (*Fig.* 68 & 69) $P : Q : R :: EI : FE : FI$, on a donc $P : Q :: EI : FE$ & $P : R :: EI : FI$, c'eſt-à-dire, que *des deux compoſantes paralleles, & leur réſultante, deux quelconques, ſont toujours entr'elles réciproquement comme les deux perpendiculaires menées ſur leur direction, d'un même point pris ſur la direction de la troiſieme.*

237. Si l'on tire arbitrairement la ligne ABC, on aura (*Géom.* 102) $BC : AB : AC :: EI : FE : FI$. On aura donc auſſi P :

$Q : R :: BC : AB : AC$; c'eft-à-dire, qu'en général : *fi l'on coupe les directions des deux forces paralleles, & de leur réfultante, par une ligne droite menée comme on le voudra, chacune de ces forces peut toujours être repréfentée par la partie de cette droite, comprife entre les directions des deux autres.*

238. De-là il eft aifé de conclure comment on doit s'y prendre pour trouver la réfultante de plufieurs forces paralleles ; & réciproquement pour fubftituer à une force quelconque, tant d'autres forces paralleles que l'on voudra.

Par exemple, s'agit-il de réduire à une feule, les deux forces P & Q (*Fig.* 68) qui agiffent dans le même fens ? Je mene la ligne quelconque ABC : la réfultante R doit être égale à $P + Q$ (235) : il ne s'agit donc que de trouver le point B, par où elle doit paffer. Or (237) on a $P : R :: BC : AC$; c'eft-à-dire $P : P + Q :: BC : AC$; il faudra donc prendre entre les deux points A & C, un point B tel que l'on ait $BC = \frac{P \times AC}{P + Q}$.

Si les deux forces agiffent en fens contraires (*Fig.* 69), la réfultante fera égale à leur différence (235), c'eft-à-dire, fera $P - Q$, ou $Q - P$. Suppofons P plus grand que Q. Ayant tiré arbitrairement la ligne AC, il faudra la prolonger au-delà de A par rapport à C d'une quantité AB, telle que l'on ait $P : R :: BC : AC$ (237), ou $P : P-Q :: BC : AC$; c'est-à-dire, qu'il faudra prendre $BC = \frac{P \times AC}{P-Q}$.

Si Q étoit plus grand que P, le point B seroit sur le prolongement de AC, au-delà de C par rapport à A.

239. Si l'on avoit une troisieme force K (*Fig.* 70); alors après avoir trouvé la résultante R des deux forces P & Q, on chercheroit la résultante S des deux forces R & K, comme s'il n'y avoit eu que ces deux-ci; c'est-à-dire, précisément comme on vient de l'enseigner dans l'article précédent.

240. Donc réciproquement, si l'on vouloit décomposer une force quelconque R, en deux autres qui lui fussent paralleles (*Fig.* 68 & 69) on prendroit arbitrairement une ligne PF parallele à la direction de la force R; & ayant pris cette ligne pour la direction de l'une des composantes, on prendra arbitrairement pour la valeur de cette composante, une quantité quelconque P plus petite que R, si l'on veut que les deux composantes agissent de part & d'autre de la force R; alors la seconde composante, que j'appelle Q, doit être égale à $R - P$;

& pour avoir ſa poſition, il ne s'agit plus que de mener la ligne quelconque CBA, & de prendre ſur le prolongement de AB, la partie BC telle que l'on ait $Q : P :: AB : CB$; ſi par le point C on mene QC parallele à RB, ce ſera la direction de la force Q.

Mais ſi l'on veut que les deux compoſantes ſoient d'un même côté, auquel cas elles doivent agir en ſens contraires; alors on peut prendre pour P, une quantité quelconque. plus grande ou plus petite que R, & qui dans le premier cas agiſſe dans le même ſens que R, & en ſens contraire dans le ſecond cas. Ayant pris une ligne PF parallele à RB, pour la direction de P, on prendra ſur la ligne quelconque BAC, le point C de maniere que l'on ait $P - R$ ou $R - P : R :: AB : AC$: le point C ſera celui par où doit paſſer la force Q parallele à la force donnée R: & ce point C ſera au-delà de A par rapport à B, ſi P eſt plus grand que R; au contraire, ſi P eſt plus petit que R, il ſera entre A & B.

241. Ce que nous diſons ici de la force R, à l'égard de ſes compoſantes P & Q, pouvant évidemment s'appliquer à chacune de ces deux-ci, on voit donc comment on peut ſubſtituer à une force quelconque, tant d'autres forces que l'on voudra, dont les directions ſoient paralleles.

Des moments, & de leurs usages pour la composition & la décomposition des forces.

242. Ce que nous venons de dire, suffit pour composer & décomposer les forces, quelques directions & quelques valeurs qu'elles aient, pourvu qu'elles agissent dans un même plan. Mais les différentes sortes de mouvements que nous aurons à considérer, exigent des moyens plus simples & plus expéditifs pour déterminer la résultante des forces, & sa direction : nous allons nous en occuper actuellement.

243. *Si d'un point quelconque* F (Fig. 71 *&* 72) *pris dans le plan d'un parallélogramme quelconque* A B C D, *on mene les lignes* F E, F H, F G *perpendiculaires sur les côtés contigus* A B, A D *& la diagonale* A C; *la somme des produits de chaque perpendiculaire, par le côté sur lequel elle tombe, sera égale au produit de la diagonale par la perpendiculaire qui tombe sur elle, lorsque le point* F (Fig. 71) *ne sera ni dans l'angle* B A D, *ni dans son opposé au sommet. Au contraire* (Fig. 72), *si le point* F *est dans l'angle* B A D, *ou dans son opposé au sommet, ce sera la différence des produits de chaque perpendiculaire, par le côté sur lequel elle tombe, qui*

ſera égale au produit de la diagonale par la perpendiculaire qui tombe ſur cette diagonale.

Prolongeons le côté BC juſqu'à ce qu'il rencontre en I, la perpendiculaire FH; menons les lignes FA, FB, FC, FD. Le triangle FAC (*Fig.* 71) eſt $= FAB + ABC + FBC = FAB + ADC + FBC$. Or 1°. le triangle $FAC = \frac{AB \times FG}{2}$. 2°. Le triangle $FAB = \frac{AB \times FE}{2}$. 3°. Le triangle ADC ayant AD pour baſe, & IH pour hauteur, eſt $= \frac{AD \times IH}{2}$. 4°. Le triangle $FBC = \frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; donc $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2} + \frac{AD \times FI}{2}$; or $IH + FI = FH$; donc, & en doublant tout, on a $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$.

Dans la *Fig.* 72, le triangle $FAC = ABC - FAB - FBC = ADC - FAB - FBC$; c'eſt-à-dire; $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2} - \frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$; ou en faiſant attention que $BC = AD$, & que $IH - FI = FH$, & en doublant tout) on a $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$.

244. Puiſque nous avons démontré ci-deſſus, que deux forces quelconques, &

leur résultante, peuvent être représentées par les côtés & la diagonale d'un parallélogramme formé sur leurs directions; concluons donc que si P & Q (*Fig.* 71 & 72) sont deux forces représentées par les lignes AB, AD, auquel cas leur résultante R sera représentée par AC; concluons, dis-je, que si l'on prend hors de l'angle BAD, & de son opposé au sommet, un point quelconque F, dans le plan de ces trois forces, on aura toujours $R \times FG = Q \times FH + P \times FE$; & que lorsque le point F sera pris dans l'angle BAD ou dans son opposé au sommet, on aura toujours $R \times FG = Q \times FH - P \times FE$.

245. Le produit d'une force par la distance de sa direction à un point fixe, est ce qu'on appelle le *moment* de cette force. Ainsi $Q \times FH$, est le moment de la force Q; $R \times FG$, est le moment de la force R.

246. Comme les forces s'estiment (189) par la quantité de mouvement, c'est-à-dire, par le produit d'une masse déterminée, multipliée par la vîtesse qu'elles sont capables de communiquer à cette masse; le moment d'une force quelconque, a donc pour valeur, le produit d'une masse, par sa vîtesse, & par la distance de sa direction à un point fixe.

247. Si on conçoit que les perpendiculaires FH, FG, FE, soient des lignes inflexibles

flexibles & ſans maſſe, liées entr'elles & fixées au point *F* de maniere à ne pouvoir que tourner autour de ce point, & que les forces *P*, *Q* & leur réſultante *R*, ſoient appliquées aux extrémités *E*, *H*, *G*; on voit que (*Fig.* 71) ces trois forces tendent toutes à faire tourner le ſyſtême dans un même ſens autour du point *F*; & (*Fig.* 72) les deux forces *Q* & *R* tendent à faire tourner le ſyſtême dans un ſens différent de celui ſelon lequel la force *P* tend à le faire tourner.

On peut donc dire que le *moment de la réſultante, pris par rapport à un point fixe quelconque* F, *eſt toujours égal à la ſomme ou à la différence des moments des deux compoſantes ſelon que celles-ci tendent à faire tourner dans un même ſens, ou dans des ſens oppoſés, autour de ce point fixe.*

248. De-là on peut conclure en général, que *quelque nombre de forces* P, Q, S, T, *&c.* (*Fig.* 73) *que l'on ait; quelques grandeurs, & quelques directions qu'elles aient, pourvu qu'elles ſoient toutes dans un même plan; le moment de la réſultante de toutes ces forces pris par rapport à tel point* F *qu'on voudra, ſitué dans ce plan, ſera toujours égal à la ſomme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens autour de ce point, moins*

la somme des moments de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.

En effet, si l'on suppose que r soit la résultante des deux forces P & Q dirigées suiv. AP & EQ; r' celle de r & de S qui agit suivant GS; & enfin R celle de r' & de T qui agit suivant DT; que l'on suppose, de plus, que m représente le moment de r; m' celui de r'. Alors en abaissant les perpendiculaires FA, FE, FG, FD, FB sur les composantes, P, Q, S, T, & leur résultante R; on aura 1°. $m = P \times AF + Q \times EF$, 2°. $m' = m - S \times FG$. 3°. $R \times FB = m' - T \times FD$; donc ajoutant ces trois équations, & détruisant les quantités semblables qui se trouveront dans chaque membre, on aura $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$; où l'on voit que les moments des deux forces T & S qui tendent à faire tourner de droite à gauche, sont, en effet, de signe contraire à ceux des forces P & Q, qui tendent à faire tourner de gauche à droite.

249. Si le point F étoit sur la direction même de la résultante, le moment de cette force seroit alors zéro; donc puisqu'il est égal à la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire, il faut en conclure que la

différence de ces deux ſommes de momens pris par rapport à un point quelconque de la réſultante eſt zéro.

Et réciproquement *ſi la ſomme des moments de pluſieurs forces qui tendent à faire tourner autour d'un point, moins la ſomme des moments de celles qui tendent à faire tourner en ſens contraire autour de ce même point, eſt zéro; il faut en conclure que la réſultante paſſe par ce point.*

250. Puiſque ces propoſitions ſont généralement vraies, quelques angles que forment entr'elles les directions des forces, elles le ſont donc auſſi, lorſque les forces forment entr'elles des angles infiniment petits, ou, ce qui revient au même, lorſque les directions des forces ſont paralleles entr'elles.

251. De-là il eſt aiſé de déduire une méthode fort ſimple pour avoir la poſition & la grandeur de la réſultante de tant de forces que l'on voudra, lorſqu'elles agiſſent toutes dans un même plan.

Suppoſons d'abord qu'elles ſont toutes paralleles entr'elles, & pour ne point compliquer inutilement cette recherche, ſuppoſons qu'il n'y ait que trois forces; il ſera facile d'en conclure ce qu'on doit faire pour un plus grand nombre.

Soient donc trois forces connues P, Q, S (*Fig.* 74), dont les deux premieres agiſſent ſuivant AP, BQ, & la derniere agit ſuivant CS. Ayant tiré arbitrairement une ligne quelconque $FABC$, perpendiculaire aux directions AP, BQ, &c. on imaginera que le point D eſt celui par où doit paſſer la réſultante R. Alors ayant pris arbitrairement un point F ſur $FABC$, on aura, ſuivant ce qui précede, $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$; or les diſtances AF, FB, FC & les forces P, Q, S étant connues, il ſeroit très-facile de tirer de cette équation la valeur de la diſtance DF à laquelle paſſe la réſultante, ſi la valeur de cette réſultante R étoit connue. Voyons donc quelle eſt la valeur de cette réſultante.

Prenons un autre point F' ſur le prolongement de AF; le même principe nous donnera $P \times AF' + Q \times F' - S \times CF' = RQ \times DF'$. Or ſi de cette ſeconde équation, on retranche la premiere, qu'on faſſe attention que $AF' - AF = FF'$, $BF' - BF = FF'$, $CF' - CF = FF'$, $DF' - DF = FF'$, on aura $P \times FF' + Q \times FF' - S \times FF' = R \times FF'$; c'eſt-à-dire, en diviſant tout par FF', $P + Q - S = R$.

Mais ſi l'on fait attention au raiſonnement que nous venons de faire, il eſt facile de voir qu'il ne dépend nullement du nombre des forces; mais qu'il eſt applicable quelque ſoit le nombre de ces forces. On doit donc conclure, en général, que *la résultante de tant de forces paralleles que l'on voudra, est égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent dans un sens contraire.*

Si dans l'équation $P\times AF + Q\times BF - S\times CF = R\times DF$, trouvée d'abord, on met pour R sa valeur $P + R - S$ que nous venons de trouver, on aura $P\times AF + Q\times BF - S\times CF = (P + Q - S)\times DF$; d'où l'on tire $DF = \frac{P\times AF + Q\times BF - S\times CF}{P + Q - S}$, d'où, & ayant égard à ce que le raisonnement par lequel nous parvenons à ce résultat, ne dépend pas du nombre des forces, on conclura généralement, que *pour savoir à quelle distance d'un point donné, passe la résultante de plusieurs forces paralleles; il faut, de la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, retrancher la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens opposé, & diviser le reste par la somme des forces qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraire* *.

* Il ne faut pas confondre les forces qui agissent dans les sens opposés, avec celles qui tendent à faire tourner dans des sens opposés. Deux forces qui agissent dans des sens opposés, tendent souvent à faire tourner dans le même sens; cela dépend du point relativement auquel on considére la rotation, ou les moments. Par exemple, les deux forces Q & S (*Fig.* 74)

252. Si le point F, que l'on a pris d'abord arbitrairement, se trouvoit avoir été pris sur le point D même, par lequel passe la force résultante ; alors la distance DF étant zéro, sa valeur... $\frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$ qui devient $\frac{-P \times AD + Q \times BD - S \times CD}{P + Q - S}$ (parce que la force P tend à faire tourner autour du point D en sens contraire de la force Q) seroit zéro ; on auroit donc $-P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$; & comme le point F que l'on avoit pris d'abord arbitrairement, pouvoit être plus haut ou plus bas selon qu'on auroit voulu, ensorte que le point D n'est pas censé être plutôt sur un point de la direction de la résultante R, que sur tout autre point de la même direction, il s'ensuit généralement que *les moments de plusieurs forces paralleles pris par rapport à un point quelconque de la direction de la résultante, sont tels que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, est toujours égale à la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.*

agissent en sens opposés; mais elles tendent toutes deux à faire tourner la ligne BC dans un même sens, autour d'un point pris entre B & C; & si on considere la rotation, par rapport au point F, la force Q tend à faire tourner CF, en sens contraire de ce que tend à faire la force S.

253. Donc en prenant avec des ſignes contraires les moments des forces qui tendent à faire tourner dans des ſens oppoſés, & prenant auſſi, avec des ſignes contraires, les forces qui agiſſent dans des ſens oppoſés, on peut dire généralement 1°. *que la réſultante de tant de forces paralleles, que l'on voudra, eſt toujours égale à la ſomme de toutes ces forces.* 2°. *Que cette réſultante, qui leur eſt parallele, paſſe par une ſuite de points dont chacun a cette propriété, que la ſomme des moments par rapport à ce point, eſt zéro.*

Nous ferons le plus grand uſage de ces principes, & nous verrons dans peu, avec quelle facilité on en déduit la poſition du centre de gravité des corps. Paſſons aux forces dont les directions font des angles entr'elles.

254. Soient donc (*Fig.* 75) tant de forces P, Q, S, &c. que l'on voudra, toutes dirigées dans un même plan. Que la force P agiſſant ſuivant AP, ſoit repréſentée par AB; la force Q, agiſſant ſuivant EQ, ſoit repréſentée par EG; la force S, agiſſant ſuivant IS ſoit repréſentée par IL. Par un point T pris arbitrairement dans le plan de ces forces, concevons deux droites indéfinies TE', TE'' faiſant entr'elles un angle quelconque, (que pour plus de ſimplicité

nous ſuppoſerons droit) ; & concevons les forces P, Q, S, ou AB, EG, IL, décompoſées, chacune, en deux autres, dont l'une ſoit parallele à la ligne TE', & l'autre parallele à la ligne TE'', & qui par conſéquent (225) doivent être repréſentées, chacune, par le côté correſpondant du parallélogramme dont la diagonale repréſente la force principale. Il eſt clair, par ce qui précéde (251) que les forces AD, EF, IM* étant paralleles, auront pour réſultante une force unique VO qui leur ſera parallele, dont la valeur ſera $AD + EF - IM$, & qui paſſera à une diſtance VV', telle que $VV' = \frac{AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'}{AD + EF - IM}$.

Pareillement, les forces AC, EH, IK paralleles à TE'' ſe réduiront toutes à une ſeule VN qui leur ſera parallele, qui ſera égale à $AC + EH + IK$, & qui (en ſuppoſant que V ſoit le point où la direction de cette force, rencontre celle de la force

* Ne perdons pas de vue ce que nous avons dit (224). Par cette expreſſion *les forces* AB, EG, &c. nous entendons que les lignes AB, EG, &c. ſont entr'elles comme les quantités de mouvement que les forces P, Q, &c. peuvent produire dans les maſſes auxquelles elles ſont appliquées. Il en eſt de même des forces AD, EF, &c ; nous entendons des quantités de mouvement qui ſont aux quantités de mouvement repréſentées par AB, EG, comme AD & EF ſont à AB & EG reſpectivement.

OV) paſſera à une diſtance VV'', telle que $VV'' = \frac{AC \times AA'' + EH \times EE' + IK \times II''}{AC + EH + IK}$.

Cela poſé les forces P, Q, S & leurs directions, (c'eſt-à-dire, les angles qu'elles font avec des lignes fixes & connues, telles que TE' & TE'', ou avec leurs paralleles) étant ſuppoſées connues, on connoît dans chacun des triangles BAD, GEF, IKL l'hypothénuſe & les angles ; il ſera donc aiſé de déterminer les lignes AD, EF, KL ou IM, & les lignes BD ou AC, FG ou EH, & IK; par-là on connoîtra les valeurs des deux réſultantes $AD + EF - IM$, & $AC + EH + IK$. D'ailleurs comme on ne peut manquer de connoître les diſtances AA', AA'', EE', EE'', &c. puiſqu'on ne peut ignorer la poſition des points A, E, où l'on ſuppoſe les forces appliquées, on connoît donc toutes les quantités qui entrent dans l'expreſſion des diſtances VV' & VV''. Il ſera donc facile de déterminer le point V, où ſe rencontrent ces deux forces réſultantes. Prenant donc $VO = AD + EF - IM$, & $VN = AC + EH + IK$, & formant le parallélogramme $OVNX$, on aura la diagonale VX pour la réſultante R des deux réſultantes paralleles à TE' TE'', c'eſt-à-dire, pour la réſultante de toutes les forces propoſées.

Des forces qui agissent dans des plans différents.

255. Soient trois forces P, Q, S (*Fig.* 76) dirigées suivant les lignes AP, BQ, CS paralleles entr'elles, mais situées dans différents plans.

Concevons un plan XZ auquel les trois droites AP, BQ, CS soient perpendiculaires, & un autre plan ZV auxquelles elles soient paralleles : que A, B, C soient les points où ces lignes rencontrent le plan XZ.

Les deux forces P & S sont dans un même plan dont l'intersection avec le plan XZ, est la droite AC. Ces deux forces peuvent donc être réduites à une seule $R' = P + S$, qui leur soit parallele, & qui passera par un point D, tel que (252) l'on aura $P \times AD = S \times CD$.

Les deux forces R' & Q sont dans un même plan dont l'intersection avec le plan XZ, est BD ; elles peuvent donc être réduites à une seule R qui sera égale à $R' + Q$, c'est-à-dire, $= P + S + Q$, qui leur sera parallele, & qui passera par un point E, tel que l'on aura $R' \times DE = Q \times BE$. D'où, & de ce qui a été dit ci-devant, il est aisé de conclure, en général, que *tant de forces que l'on voudra, dont les directions sont paralleles,* *se réduisent toujours à une seule égale à la somme de celles qui agissent dans un sens moins la somme de celles qui agissent en sens contraire ; & cela, soit qu'elles soient toutes dans un même plan, soit qu'elles soient dans des plans différens.*

Voyons maintenant plus particulierement comment on détermine par où passe cette résultante.

Si des points A, D, C, B, E on mene les lignes AA', DD', CC', BB', EE' perpendiculaires sur l'intersection commune des deux plans XZ & ZV ; à cause des paralleles AA', DD', CC', on aura $AD : CD :: A'D' : C'D'$; or l'équation $P \times AD = S \times CD$ que nous venons de trouver, donne $AD : CD :: S : P$; donc $A'D' : C'D' :: S : P$ & par conséquent $P \times A'D' = S \times C'D'$.

Pareillement, les paralleles DD', EE' BB' donnent $DE : BE :: D'E' B'E'$; or l'équation $R' \times DE = Q \times BE$, que nous avons pareillement trouvée ci-dessus, donne $DE : BE :: Q : R'$; donc $D'E' : B'E' :: Q : R' :: Q : P + S$; donc $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$.

Prenons maintenant dans l'intersection ZT dés deux plans, un point fixe T, & cherchons la distance TE' de ce point, au point E' qui correspond au point E par lequel passe la résultante. Il est clair que $A'D' = TD' -$

TA', $C'D' = TC' - TD'$, $D'E' = TE' - TD'$, $B'E' = TB' - TE'$. Subftituons ces valeurs dans les deux équations $P \times A'D' = S \times C'D'$ & $(P+S) \times D'E' = Q \times B'E'$, nous aurons $P \times TD' - P \times TA' = S \times TC' - S \times TD'$, & $(P+S) \times TE' - (P+S) TD' = Q \times TB' - Q \times TE'$. Or, de ces deux équations, la premiere donne $(P+S) TD' = P \times TA' + S \times TC'$; fubftituant cette valeur dans la feconde, on a $(P+S) \times TE' - P \times TA' - S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; raffemblant donc tous les termes multipliés par TE' on aura $(P+Q+S) \times TE' = P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$. D'où l'on tire $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P+Q+S}$.

Or cette expreffion de la diftance TE', eft précifément celle que l'on auroit pour trouver la diftance à laquelle pafferoit la force réfultante, fi les trois forces P, Q, S, étoient toutes trois dans le plan ZV, & paffoient par les points A', C', B', correfpondants aux points A, C, B par lefquels elles paffent réellement. Donc fi l'on conçoit la droite TX perpendiculaire au plan ZV, on trouvera la diftance TE' de la réfultante Z, à cette droite, en prenant la fomme des moments * à l'égard de cette droite, comme fi

* Il faut obferver ici, & pour la fuite, que par le mot géné-

toutes les forces, ſans changer de diſtance à cette même droite, étoient toutes dans le plan ZV auquel elle eſt perpendiculaire ; & diviſant cette ſomme de moments par la ſomme des forces.

Il ne reſte donc plus, pour fixer le point E, que de connoître la diſtance EE', ou, (en menant EE'' parallele à ZT) la diſtance TE'' à laquelle cette même force paſſe, à l'égard de ZT. Or il eſt clair, d'après ce que nous venons de dire ſur la diſtance TE', que pour avoir la diſtance TE'', il faut de même, concevoir un plan paſſant par ZT, & parallele aux directions des forces ; prendre la ſomme des moments à l'égard de TZ qui eſt l'interſection de ce plan avec le plan ZV ; prendre, dis-je, la ſomme des moments à l'égard de TZ, comme ſi toutes les forces ſans changer de diſtance au plan ZV, étoient toutes dans le plan XV ; & diviſer cette ſomme de moments, par la ſomme des forces. Alors on aura tout ce qu'il faut pour fixer le point E par où paſſe la réſultante.

ral *ſomme* des moments, on doit entendre la ſomme des moments des forces, qui tendent à faire tourner dans un ſens, moins la ſomme des moments des forces qui tendent à faire tourner en ſens oppoſé. On doit de même, par ce mot *ſomme* des forces, entendre la ſomme de celles qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent dans l'autre.

256. Considérons maintenant les forces dont les directions ne sont ni dans un même plan ni paralleles.

Soient (*Fig.* 77) *P*, *Q*, *R* trois forces dirigées suivant les lignes *AP*, *BQ*, *CR* situées dans des plans différents. Concevons un plan quelconque *XZ*, rencontré en *H*, par la direction *AP*; en *F*, par la direction, *BQ*; & en *L*, par la direction *CR*. Comme on peut (228) supposer une force appliquée à tel point que l'on veut de sa direction, j'imagine ces trois forces appliquées aux points *H*, *F*, *L*, & représentées par les lignes *HV*, *FT*, *LK* prolongements des lignes *AP*, *BQ*, *CR*, au-dessous du plan *XZ*, & je suppose que ces forces soient représentées par les lignes *HV*, *FT*, *LK*. Concevons encore que par les droites *AH*, *EF*, *CL*, on ait mené des plans perpendiculaires au plan *XZ*, & dont les intersections avec celui-ci, soient les droites *GHN*, *EFY*, *DLM*. Cela posé, il est évident que je puis décomposer chacune de ces forces en deux autres, dont l'une soit dans le plan *XZ*; & l'autre soit perpendiculaire à ce même plan. Par exemple, je puis décomposer la force *HV*, en une force dirigée suivant *HN*, & une autre force dirigée suivant *HO* perpendiculaire au plan *XZ*. Ensorte, qu'aux trois forces *HV*, *FT*, *LK*, je puis ſubſtituer les ſix forces *HN*, *FY*, *LM*, *HO*, *FS*, *LI*, dont les trois premieres ſont dans le plan *XZ*, & les trois dernieres ſont perpendiculaires à ce même plan.

Or on peut, par ce qui a été enſeigné (254) réduire les trois forces *HN*, *FY*, *LM* à une ſeule qui ſera auſſi dans le plan *XZ*. Et par ce qui vient d'être dit (255) on peut réduire les trois forces *HO*, *FS*, *LI*, à une ſeule, qui ſera perpendiculaire au plan *XZ*. Donc en général, *quelque nombre de forces que que l'on ait, & quelques directions que ces forces puiſſent avoir; on peut toujours les réduire à deux tout au plus, l'une dirigée dans un plan connu, & l'autre perpendiculaire à ce plan.*

Quoique la démonſtration de cette propoſition ne paroiſſe applicable qu'au cas où toutes les forces rencontrent le plan *XZ* qu'on a choiſi, il eſt cependant facile de voir qu'elle a généralement lieu. Car ſi on conçoit qu'après avoir ainſi réduit à deux, toutes les forces qui rencontrent ce plan, on vient à en changer la poſition ſans ceſſer de rencontrer ces deux réſultantes, on pourra toujours lui trouver une poſition propre à rencontrer les directions de celles qui lui étoient d'abord paralleles.

257. Il n'en eſt donc pas des forces dirigées dans différents plans, comme de celles

qui ſont toutes dirigées dans un même plan. Celles-ci peuvent toujours être réduites à une ſeule, ainſi que nous l'avons vu. Mais celles-là ſe réduiſent à deux, qui ne peuvent être réduites à une ſeule, que dans le cas où la réſultante des forces qui agiſſent dans le plan *XZ*, rencontreroit celle des forces perpendiculaires au même plan.

258. On peut donc, par ce moyen, trouver les deux réſultantes de tant de forces que l'on voudra, lorſque ces forces ſont dirigées dans des plans différents. Mais quoique ce moyen puiſſe être utile, dans beaucoup de cas, il n'eſt cependant pas le plus commode pour la réſolution de beaucoup de queſtions; c'eſt pourquoi nous allons en enſeigner un autre.

Soit donc *P* (*Fig.* 78) l'une quelconque des forces propoſées, & *AB* la ligne qui peut la repréſenter. Soit *X* un point fixe quelconque; *XZ*, *XY*, *XT* trois droites perpendiculaires entre elles. Si ſur *AB*, comme diagonale, on forme le parallélogramme rectangle *ADBC*, dont le plan ſoit perpendiculaire au plan *YXT*, & dont le côté *BC* ſoit parallele à *XZ*; qu'enſuite ſur *BD* comme diagonale, on forme le parallélogramme rectangle *DFBE* dont le plan ſoit parallele au plan *YZT*, & dont les côtés *BF*, *BE* ſoient

ſoient paralleles aux droites XT, XY; il eſt clair 1°, qu'à la force AB, on peut ſubſtituer la force BC parallele à XZ, ou perpendiculaire au plan YXT, & la force BD parallele à ce même plan. 2°, Qu'à cette force BD, on peut ſubſtituer la force BE parallele à XY, ou perpendiculaire au plan ZXT, & la force BF parallele à XT ou perpendiculaire au plan ZXY, enſorte que la force P ou AB, ſe trouvera décompoſée en trois forces paralleles à trois lignes perpendiculaires entre elles, ou, ce qui revient au même, ſe trouvera décompoſée en trois forces perpendiculaires à trois plans qui ſeront perpendiculaires entre eux.

Or, ce que nous diſons ici de la force P, eſt évidemment appliquable à toute autre force qui ne ſera point perpendiculaire à l'un de ces trois plans. Donc ſi on conçoit toutes les forces telles que P, ainſi décompoſées, & qu'on réduiſe enſuite à une ſeule par la méthode donnée (255), toutes les forces perpendiculaires au plan ZXT; qu'on faſſe la même choſe, pour les forces perpendiculaires au plan ZXY; enfin, la même choſe, pour les forces perpendiculaires au plan YXT, on voit qu'on pourra toujours réduire tant de forces que l'on voudra, dirigées dans différents plans, à trois forces perpendiculaires à trois plans qui feroient perpendiculaires entre eux.

Si quelqu'une des forces se trouvoit parallele à quelqu'une des droites XZ, XY, XT, alors ses composantes paralleles aux deux autres droites feroient censées zéro.

Tels sont les principes généraux de la composition & de la décomposition des forces.

Des Centres de Gravité.

259. Avant que de nous occuper des effets particuliers que peuvent produire sur les machines ou en général sur les corps d'une structure & d'une matiere connues, les forces dont nous venons de considérer les propriétés générales, il faut nous arrêter sur les centres de gravité, dont la connoissance importe beaucoup pour la détermination des mouvements dont ces machines ou ces corps peuvent être susceptibles.

Rappellons-nous, que nous avons dit (202) que les directions suivant lesquelles la pesanteur agit sur les particules matérielles d'un corps, sont paralleles; & que cette force tend à communiquer à chaque partie de matiere, la même vîtesse dans le même temps.

260. On appelle *Centre de gravité* d'un

corps, ou d'un *ſyſtême* de corps, (c'eſt-à-dire, d'un aſſemblage quelconque de corps) le point par où paſſe la force réſultante des forces particulieres dont chaque partie de ce corps ou de ce ſyſtême, ſeroit animée par l'action naturelle de la peſanteur, dans quelque ſituation qu'on mette ce corps, ou ce ſyſtême.

Par exemple, ſi dans la poſition actuelle du triangle *ABC* (*Fig.* 79) la force réſultante des actions de la peſanteur ſur toutes les parties de ce triangle, paſſe par un certain point *G* de ſa ſurface ; & que dans une autre ſituation *abc*, elle paſſe encore par le même point *G*, ce point *G* s'appelle le centre de gravité. Nous verrons dans peu, que cette réſultante paſſe toujours par le même point, dans toutes les ſituations poſſibles du corps.

261. La détermination de ce centre eſt facile, après ce que nous avons dit ſur l'uſage des moments pour trouver la réſultante de pluſieurs forces paralleles.

En effet, ſoient *M*, *N*, *P*, (*Fig.* 80) tant de corps que l'on voudra, dont (pour ce moment) nous conſidérons les maſſes concentrées aux points *B*, *A*, *C*, que nous ſuppoſerons d'abord dans un même plan. Soit *p* la vîteſſe que la peſanteur tend

à imprimer à chacun dans un inſtant, & qui (202) eſt la même pour chacun. Alors $p \times M$, $p \times N$, $p \times P$ ou $p\,M$, $p\,N$, $p\,P$ ſeront les quantités de mouvement, ou les forces avec leſquelles ces corps tendent à ſe mouvoir ſuivant les directions paralleles $C''C$, $B''B$, $A''A$. Or, ſuivant ce que nous avons dit (251), pour avoir la poſition de la force réſultante, il faut prendre la ſomme des moments à l'égard d'un point quelconque T pris ſur une ligne perpendiculaire à ces directions, & diviſer cette ſomme, par la ſomme des forces; on aura donc, pour la valeur de la diſtance TG'' à laquelle paſſe cette réſultante, on aura dis-je.........
$TG'' = \frac{pM \times TB'' + pN \times TA'' + pP \times TC''}{pM + pN + pP}$, qui en ſupprimant le facteur commun p, ſe réduit à $TG'' = \frac{M \times TB'' + N \times TA'' + P \times TC''}{M + N + P}$. Or, en menant les lignes BB', AA', CC' paralleles à TG', & terminées à la verticale TC'; imaginant de plus, que le point G pris ſur la direction de la réſultante, eſt le centre que nous cherchons, & menant GG' auſſi parallele à TG'', on a $TG'' = G'G$, $TB'' = BB'$, $TA'' = AA'$, $TC'' = CC'$; donc $GG' = \frac{M \times BB' + N \times AA' + P \times CC'}{M + N + P}$; c'eſt-à-dire, en reſtraignant le mot de *moments*, &

n'entendant par ce mot, que le produit de la masse d'un corps par sa distance à une ligne droite.

La distance du centre commun de gravité de plusieurs corps, à une ligne droite, se trouve en divisant la somme des moments de ces corps, (pris par rapport à cette ligne) par la somme des masses.

Concevons maintenant que l'on renverse le systeme des corps M, N, P, ensorte que la ligne TA'' qui étoit horisontale, devienne verticale; & au contraire pour la ligne TC'; alors on démontrera de même, que pour avoir la distance de la résultante, à la ligne TA'' qui est alors verticale, il faut prendre la somme des moments à l'égard de TA'', & diviser cette somme, par celle des masses. On aura donc, de même, ...
$GG'' = \frac{M \times BB'' + N \times AA'' + P \times CC''}{M+N+P}$. Or ayant déterminé les distances de G aux deux lignes fixes & connues TA'' & TC', il est évident que la position de ce centre est connue, puisque les distances BB', BB'', AA', AA'', &c. sont connues, attendu qu'on est maître de prendre, par-tout où l'on voudra, le point T par où on mene TA' & TC'.

262. Si les distances AA'', BB'', &c, sont chacune zéro; c'est-à-dire, si tous les

corps ſont ſur une même ligne droite TA''; alors la ſomme des moments, par rapport à cette droite, eſt zéro, donc la diſtance GG'' eſt auſſi zéro. Donc *ſi pluſieurs corps, conſidérés comme des points, ſont ſur une même ligne droite, leur centre commun de gravité, eſt auſſi ſur cette même ligne droite.*

263. Si l'on menoit les lignes TA'', TC' de maniere que l'une ou l'autre, ou toutes deux, ſe trouvaſſent avoir des corps de part & d'autre ; alors au lieu de la ſomme des moments, il faudroit dire la ſomme des moments des corps qui ſe trouvent d'un côté, moins la ſomme des moments des corps qui ſe trouvent de l'autre. Quant au dénominateur de la fraction qui exprime la diſtance du centre de gravité, il ſera toujours compoſé de la ſomme des maſſes, parce que toutes les forces de ces maſſes, en vertu de leur peſanteur, agiſſent toutes dans le même ſens. Cela eſt général pour quelque nombre de corps que ce ſoit, qui étant conſidérés comme des points, ſont tous dans un même plan. Et tout cela eſt une ſuite de ce qui a été dit (251).

Les lignes TA', TA'' s'appellent *Axes des Moments.*

264. Si l'on conçoit maintenant, que le point T que nous avons pris d'abord

arbitrairement, soit sur le point G; alors GG' & GG'' deviennent, chacune, zéro. Donc la somme des moments par rapport à TC' & la somme des moments par rapport à TA'', doivent alors être zéro, chacune.

265. Présentement, je dis que si la somme des moments de plusieurs corps, par rapport à la droite RS qui passe par le point G (*Fig.* 81) est zéro; & s'il en est de même de la somme des moments, par rapport à la droite PQ perpendiculaire à RS, & qui passe par le même point G; la somme des moments par rapport à toute autre droite MN passant par le même point G, sera aussi zéro.

En effet, ayant mené les perpendiculaires AA', AA'', AA''', sur les lignes PQ, RS, MN; si l'on suppose que le point I est celui où AA' rencontre MN; le triangle rectangle $GA'I$ donnera $\sin GIA'$ ou $\cos PGM : GA'$ ou $AA'' :: \sin PGM : A'I = \frac{AA'' \sin PGM}{\cos PGM}$; donc $AI = AA' - A'I = AA' - \frac{AA'' \sin PGM}{\cos PGM}$. Or dans le triangle rectangle IAA''', on aura (en supposant le rayon $= 1$) $1 : AI :: \sin AIA'''$ ou $\cos PGM : AA'''$; donc $AA''' = AI \times \cos PGM$, c'est-à-dire, $AA''' = AA' \cos PGM - AA'' \sin PGM$; & par conſéquent en multipliant par la maſſe A, on aura le moment $A \times A A''' = A \times A A' \times cof PGM - A \times AA'' \times ſin PGM$; c'eſt-à-dire que le moment du corps A, à l'égard de l'axe MN, eſt égal au coſinus de l'angle PGM multiplié par le moment à l'égard de l'axe PQ, moins le ſinus du même angle PGM, multiplié par le moment à l'égard de l'axe RS.

Or il eſt facile de voir que la même choſe aura lieu à l'égard de tout autre corps, à la différence des ſignes près, ſelon que les corps ſeront d'un même, ou de différents côtés de MN. Donc ſi on fait une ſomme de tous les moments à l'égard de l'axe MN, on trouvera qu'elle eſt égale au coſinus de l'angle PGM, multiplié par la ſomme des moments à l'égard de PQ, moins le ſinus de l'angle PGM multiplié par la ſomme des moments à l'égard de RS. Or chacune de ces deux dernieres ſommes eſt zéro, par la ſuppoſition; donc leurs produits par le coſinus & par le ſinus de l'angle PGM, ſeront zéro; donc auſſi *la ſomme des moments à l'égard de l'axe quelconque* MN *paſſant par le centre de gravité* G, *eſt zéro.*

266. Concluons donc de-là que l'action réſultante de toutes les actions particulieres de la peſanteur ſur chacune des

parties d'un syſtême de corps, paſſe toujours par un même point de ce ſyſtême, quelque poſition que ce ſyſtême puiſſe avoir; car ce n'eſt que par rapport à la direction de la réſultante que la ſomme des moments de pluſieurs forces paralleles, peut être zéro (253).

Au reſte, quoiqu'il n'ait été queſtion, juſqu'ici, que des corps dont les centres de gravité ſont dans un même plan, cela ne s'étend pas moins au cas où les parties du ſyſtême, ſont dans différents plans : c'eſt ce qu'on va voir, par ce qui ſuit.

267. Si les corps, toujours conſidérés comme des points, ne ſont pas dans un même plan, on concevra un plan horiſontal XZ (*Fig.* 76); & de chacun des points peſants P, Q, S, on imaginera les verticales PA, QB, SC; & pour déterminer le point E par où paſſe la réſultante RE dans la direction de laquelle doit être le centre de gravité, on prendra (255) les moments par rapport à deux droites fixes TX, TZ priſes dans le plan horiſontal ZX, & perpendiculaires entr'elles, on prendra, dis-je, la ſomme des moments comme ſi tous les corps étoient dans ce plan horiſontal; & ayant diviſé chacune de ces deux ſommes de moments, par la ſomme des maſſes P, Q, S, on aura les deux

diſtances $E'E$, $E''E$. Il ne ſera donc plus queſtion que de trouver, à quelle diſtance EG au-deſſous du plan horiſontal XZ, ſe trouve ce centre. Or ſi l'on imagine la figure renverſée, de maniere que le plan XZ devienne vertical, & que ZV ſoit alors le plan horiſontal; on voit, par le même principe, que pour avoir la diſtance $E'G'$ correſpondante & égale à la hauteur cherchée EG, il faut prendre la ſomme des moments par rapport à ZT, comme ſi tous les corps étoient dans le plan ZV, & diviſer cette ſomme de moments, par la ſomme des maſſes; alors on a tout ce qu'il faut, pour déterminer la poſition du centte de gravité.

268. Donc, pour récapituler; la recherche du centre de gravité ſe réduit,

1°. Lorſque tous les corps conſidérés, comme des points, ſont ſitués ſur une même ligne droite (*Fig.* 82); à prendre la ſomme des moments par rapport à un point fixe F pris arbitrairement ſur cette ligne, & diviſer cette ſomme par la ſomme des maſſes: le quotient, eſt la diſtance du centre de gravité G, à ce même point F.

2°. Lorſque tous les corps conſidérés, comme des points, ſont tous dans un même plan: on imaginera par un point T (*Fig.* 80) pris arbitrairement dans ce plan, deux lignes TA'', TA' perpendiculaires l'une à l'autre; & ayant mené des perpendiculaires, de chaque point pesant, sur chacune de ces deux lignes, on imaginera que ces points pesants sont appliqués successivement sur la ligne TA'', & sur la ligne TA', chacun au point où aboutit sa perpendiculaire. Et l'on cherchera, comme dans le cas précédent, quel est alors le centre de gravité G'' sur TA''; & quel est le centre de gravité G' sur TA'; menant enfin par ces deux points, les lignes $G''G$, $G'G$ paralleles à TA' & TA'', leur point de rencontre G sera le centre de gravité cherché.

3°. Enfin, lorsque les corps considérés, comme des points, seront dans différents plans, on imaginera trois plans, l'un horisontal (*Fig.* 76) & les deux autres verticaux, & perpendiculaires entr'eux. De chaque point pesant on abaissera une perpendiculaire sur chacun de ces plans; on prendra la somme des moments, par rapport à chaque plan, & divisant chaque somme, par la somme des masses, on aura les trois distances du centre de gravité à chacun de ces plans.

269. Sur quoi, il faut toujours se souvenir que quand quelques-uns des corps se

trouvent de différents côtés du point, ou de la ligne, ou du plan, par rapport auquel on confidere les moments il faut prendre avec des fignes contraires, les moments des corps qui fe trouvent de différents côtés.

270. Plaçons ici une obfervation qui fuit immédiatement de ce que nous venons de dire, & qui peut abréger, dans plufieurs occafions, la détermination du centre de gravité, & d'autres recherches.

Puifque la diftance du centre de gravité eft égale à la fomme des moments, divifée par la fomme des maffes ; fi le point, la ligne, ou le plan par rapport auquel on confidere les moments, paffe par le centre de gravité, cette diftance étant alors zéro, la fomme des moments, doit donc auffi être égale à zéro. Donc, en général, *la fomme des moments par rapport à tel plan que ce foit qui paffe par le centre de gravité, eft zéro.*

271. Jufqu'ici nous avons confidéré les corps comme des points ; & nous avons vu comment on détermine le centre commun de gravité de tous ces points, en quelque nombre qu'ils foient. Or, un corps d'un volume & d'une figure quelconque, n'étant autre chofe que l'affemblage d'une infinité d'autres corps, ou parties matérielles, que l'on peut confidérer comme des points, il

s'ensuit donc que par la même méthode on peut déterminer le centre de gravité d'un corps de figure quelconque ; & nous allons en voir diverses applications dans un moment.

Et puisque le centre de gravité n'est autre chose que le point par où passe la résultante de tous les efforts particuliers que font les parties d'un corps pour obéir à leur pesanteur ; que d'ailleurs cette résultante est égale à la somme de tous ces efforts particuliers ; concluons-en qu'on peut toujours supposer tout le poids d'un corps réuni à son centre de gravité, & que ce poids y feroit le même effet, qu'il est capable de faire sur ce point, dans sa distribution actuelle sur toutes les parties du corps.

272. Donc lorsqu'on aura à trouver le centre commun de gravité de plusieurs masses de figures quelconques : on commencera par chercher le centre de gravité de chacune de ces masses, ce qui est facile actuellement. Puis, considérant le poids de chacune de ces masses comme réuni à son centre de gravité, on cherchera le centre commun de gravité, comme si tous ces corps étoient des points placés à l'endroit où chacun a son centre de gravité particulier.

273. Donc tout ce que nous avons dit,

jusqu'ici sur le centre commun de gravité de plusieurs corps considérés comme des points a également lieu pour les corps de figure quelconque, en prenant, dans l'évaluation des moments, pour distance de chaque corps, la distance de son centre de gravité particulier.

274. Donc *si plusieurs corps de quelques figures qu'ils soient, ont leurs centres particuliers de gravité dans une même ligne droite, ou dans un même plan; leur centre commun de gravité sera aussi dans cette même ligne droite, ou dans ce même plan.* Cela se démontre comme on l'a fait (262).

275. Venons aux applications. Soit *AB* (*Fig.* 83) une ligne droite uniformément pesante. On voit facilement & sans le secours d'aucune démonstration, qu'elle doit avoir son centre de gravité dans son milieu. Mais pour confirmer par un exemple simple, la théorie des moments que nous venons d'exposer, cherchons ce centre de gravité par ces mêmes principes.

Concevons donc cette droite partagée en une infinité de parties telles que *Pp*; il faut multiplier chacune par sa distance à un point fixe; par exemple, par sa distance à l'extrémité *A*; prendre la somme de ces produits, & diviser le tout par la somme des parties

Pp; c'eſt-à-dire, par la ligne *AB*. Nommons donc *AB*, a; *AP*, x; nous aurons $Pp = dx$; le moment de *Pp* ſera xdx, qu'il faut intégrer pour avoir la ſomme des moments; cette ſomme ſera donc $\frac{x^2}{2}$; & pour l'avoir dans toute l'étendue de la ligne, il faut ſuppoſer $x = a$; on a donc $\frac{a^2}{2}$ pour la ſomme totale des moments; diviſant donc par la ſomme a des maſſes, on a $\frac{a}{2}$, pour la diſtance du centre de gravité, au point *A*. Ainſi, le centre de gravité d'une ligne droite uniformément peſante, eſt dans ſon milieu; ce qui eſt d'ailleurs évident.

276. Donc 1°. *pour avoir le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque* (*Fig.* 84), il faut du milieu de chaque côté, mener des perpendiculaires ſur deux lignes fixes *AB*, *AC*, tirées dans le plan de ce polygone; & conſidérant le poids de chaque côté, comme réuni au milieu de ce côté, chercher le centre commun de gravité de ces poids comme il a été dit (261).

277. 2°. *Le centre de gravité de la ſurface d'un parallélogramme quelconque, eſt au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux côtés oppoſés.* Car en concevant le parallélogramme compoſé de lignes matérielles pa-

ralleles à ces deux côtés, chacune aura ſon centre de gravité ſur la ligne qui paſſe par les milieux de ces deux mêmes cotés. Le centre commun de gravité de toutes ces lignes ſera donc ſur cette même ligne. Il ſera d'ailleurs au milieu, puiſque cette ligne conſidérée comme chargée de tous ces poids, eſt uniformément peſante.

278. 3°. *Pour avoir le centre de gravité de la ſurface d'un triangle* $A\,B\,C$ (*Fig.* 85), il faut du ſommet A, mener au milieu D du côté oppoſé $B\,C$ la droite $A\,D$; & prendre, à compter du point D, la partie $D\,G = \frac{1}{3}\,A\,D$.

En effet, la droite $A\,D$ qui diviſe BC en deux parties égales au point D, diviſera auſſi, en deux parties égales, toute droite MN paralíele à BC; donc ſi on conſidére la ſurface du triangle comme l'aſſemblage de pluſieurs lignes matérielles, paralleles à BC, la ligne $A\,D$ qui paſſe par les centres de gravité particuliers de toutes ces lignes, paſſera auſſi par leur centre commun de gravité (262), c'eſt-à-dire, par celui du triangle. Par la même raiſon la ligne $C\,E$ qui paſſeroit par le milieu de $A\,B$, paſſeroit auſſi par le centre de gravité du triangle; ce centre eſt donc au point d'interſection G des deux lignes $C\,E$ & $A\,D$. Or ſi l'on tire $E\,D$, elle ſera parallele à $A\,C$ puiſqu'elle diviſe en deux

deux parties égales les deux côtés AB, BC. Les deux triangles EGD, AGC feront donc semblables, ainsi que les triangles ABC, EBD; on aura donc $GD : AG :: ED$ $AC :: BD : BC :: 1 : 2$; GD est donc moitié de AG; & par conséquent le tiers de AD.

279. Concluons de-là que *pour avoir le centre de gravité* G *d'un trapèze* (*Fig.* 86), il faut, par les milieux E & F des deux côtés paralleles CD & AB, mener EF; & par ces mêmes points, mener aux deux angles opposés A & D les lignes EA, FD; puis ayant pris $Eg = \frac{1}{3} EA$, $Fg' = \frac{1}{3} FD$; mener gg' qui coupera EF au point cherché G.

Car en raisonnant comme nous l'avons fait pour le triangle, on voit que le centre de gravité G doit être sur EF. D'ailleurs, g & g' étant (278) les centres de gravité particuliers des deux triangles CAD, ADB qui composent le trapèze $ABDC$, le centre commun de gravité de ces deux triangles, ou du trapèze, doit être sur gg', (262); il doit donc être à l'intersection G.

Comme nous aurons besoin par la suite, de la distance FG, déterminons-la tout de suite.

Menons les lignes gh & $g'h'$ paralleles à AB. Puisque $gE = \frac{1}{3} AF$, & $Fg' = \frac{1}{3} FD$, on aura $gh = \frac{1}{3} AF$ & $g'h' = \frac{1}{3} ED$; ou $gh = \frac{1}{6} AB$, & $g'h' = \frac{1}{6} CD$. Par la même raison $Eh = \frac{1}{3} EF$, $Fh' = \frac{1}{3} EF$; donc $hh' = \frac{1}{3} EF$. Or les triangles semblables Ghg, $Gh'g'$ donnent $gh : Gh :: g'h' : Gh'$; donc $gh + g'h' : Gh + Gh' :: g'h' : Gh'$; c'est-à-dire, $\frac{1}{6} AB + \frac{1}{6} CD : \frac{1}{3} EF :: \frac{1}{6} CD : Gh'$; donc $Gh' = \frac{\frac{1}{3} EF \times CD}{AB + CD}$; donc FG qui est $=$ $Fh' + Gh'$ sera $= \frac{1}{3} EF + \frac{\frac{1}{3} EF \times CD}{AB + CD}$; c'est-à-dire, $FG = \frac{\frac{1}{3} EF \times (AB + 2 CD)}{AB + CD}$. Ceci nous servira dans peu, à trouver le centre de gravité de la partie submergée de la carène, dans les vaisseaux.

Remarquons, en passant, que si la hauteur du trapèze étoit infiniment petite, & les deux côtés AB & CD infiniment peu différents; alors ces mêmes côtés doivent être réputés égaux; ensorte que la distance FG se réduit à $\frac{\frac{1}{3} EF \times 3 AB}{2 AB}$, ou, $\frac{1}{2} EF$; c'est-à-dire, que dans ce cas, le centre de gravité est à égale distance des deux bases opposées.

280. Il est donc facile maintenant de *trouver le centre de gravité de la surface d'un polygone quelconque* (*Fig.* 87). Il faut le partager en triangles, & ayant déterminé le

centre de gravité de chaque triangle, de la maniere qu'on vient de l'enſeigner, on déterminera le centre commun de gravité de tous les triangles, en les conſidérant comme autant de maſſes proportionnelles à leur ſurface, & réunies chacune à ſon centre de gravité particulier. Ce qui ſe fera comme il a été enſeigné (261).

On voit actuellement comment on peut déterminer le centre de gravité de la ſurface de tout ſolide terminé par des ſurfaces planes.

281. Au reſte, il n'eſt pas toujours néceſſaire d'avoir recours aux moments, pour trouver les centres de gravité. Par exemple, s'il s'agiſſoit de trouver le centre de gravité du contour du pentagone régulier $ABCDE$ (*Fig.* 88); je menerois de l'un A, des angles, une droite AF au milieu F du côté oppoſé CD. J'en menerois pareillement une ſeconde, de l'angle E, au milieu du côté oppoſé BC; l'interſection G de ces deux lignes feroit le centre de gravité.

En effet, le centre commun de gravité des deux côtés AB, AE, eſt au milieu c de la ligne ba qui paſſe par leurs milieux; cela eſt évident. Le centre commun de gravité des deux côtés BC, DE, eſt par la même raiſon, au milieu e de la ligne Id qui paſſe par

X 2

leurs milieux. Enfin le côté CD, a son centre de gravité en F. Or il est facile de voir que la ligne AF passe par les milieux c, e, & F; elle passe donc par le centre commun de gravité des cinq côtés; un raisonnement semblable, prouvera que IE passe aussi par ce centre; ce centre est donc à l'intersection G, de AF & de IE.

282. En raisonnant comme nous l'avons fait pour le triangle, on prouvera que le point G est aussi le centre de gravité de la surface du pentagone régulier.

Et en général, on prouvera de la même maniere, que le centre de gravité du contour, ainsi que de la surface d'un polygone régulier d'un nombre de côtés impair, est au point d'intersection de deux droites dont chacune est menée de l'un des angles, au milieu du côté opposé. Et lorsque le nombre des côtés est pair, ce centre est au point d'intersection de deux lignes menées par les milieux de deux côtés opposés; d'où l'on concluroit, s'il en étoit besoin, que le centre de gravité de la circonférence & de la surface d'un cercle, est au centre.

Quand le nombre des lignes, surfaces, corps, &c. dont on a à trouver le centre commun de gravité, n'est pas considérable, on peut faire usage de ce que nous avons dit (238

& 239). Par exemple, ſoient trois points A, B, C (*Fig.* 89) qui ſoient les centres de gravité de trois lignes, ou trois ſurfaces, ou trois corps, dont les poids ſont repréſentés par les maſſes M, N, P. Ayant joint deux de ces points C & B, par la ligne BC, on partagera BC en D, de maniere que l'on ait $N : P :: CD : BD$, ou $N + P : N :: CB : CD$; le point D ſera le centre commun de gravité des deux poids P & N. On menera enſuite DA; & imaginant la totalité $N + P$ des deux maſſes N & P raſſemblée en D, on partagera, de même, DA, en raiſon inverſe des deux maſſes M & $N + P$; c'eſt-à-dire, de maniere que $N + P : M :: AE : DE$, ou que $N + P + M : M :: AD : DE$; le point E ſera le centre commun de gravité des trois poids M, N, P. On continueroit de même, pour un plus grand nombre de corps.

283. Concluons, de ce qui précede, que l'on peut avoir facilement le centre de gravité de la ſurface & de la ſolidité de tout priſme & de tout cylindre.

En effet, il eſt évident que ce centre doit être au milieu de la ligne qui paſſe par les centres de gravité des deux baſes oppoſées; puiſque ces corps ſont compoſés de tranches parfaitement égales & ſemblables à la baſe, que l'on peut confidérer comme autant de poids égaux uniformément diftribués fur cette ligne.

284. *Pour avoir le centre de gravité* G *d'une pyramide triangulaire* SABC (*Fig.* 90), il faut, du fommet, mener au centre de gravité F de la bafe, la droite SF, & prendre fur cette ligne, à compter du point F, la partie $BG = \frac{1}{4} SB$.

En voici la raifon. Du milieu D du côté AB, menons DC, DS, & ayant pris $DF = \frac{1}{3} CD$, & $DE = \frac{1}{3} DS$, les points F & E feront les centres de gravité des deux triangles ABC, ASB.

Cela pofé, fi l'on conçoit la pyramide, compofée de plans matériels paralleles à ABC, la ligne SF qui paffe par le point F de la bafe paffera, dans chaque tranche, par un point qui fera placé de la même maniere dans cette tranche (*Géom.* 199). Ainfi, les centres de gravité particuliers des différentes tranches, font tous fur la ligne SF. Par la même raifon, les centres de gravité particuliers des tranches paralleles à ABS, dont on peut imaginer que la pyramide eft compofée, font tous fur EC. Donc le centre de gravité de la pyramide eft au point G, où fe coupent les deux lignes FS, & EC fituées dans le plan SDC. Or fi l'on mene FE, elle ſera parallele à CS, puiſque DF étant le tiers de DC, & DE le tiers de DS, ces deux lignes DC & DS ſont coupées proportionnellement. Les deux triangles FEG, GCS ſeront donc ſemblables entr'eux, & il en ſera de même des deux triangles DFE, DCS; on aura donc $FG : GS :: FE : CS :: DF : DC :: 1 : 3$; donc FG eſt le tiers de GS, & par conſéquent le quart de FS.

285. Comme on peut décompoſer tout ſolide, en pyramides triangulaires, connoiſſant actuellement le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, il eſt facile, à l'aide des moments, de trouver le centre de gravité d'un corps quelconque.

286. Telle eſt la maniere générale de trouver les centres de gravité des figures, ou des corps, dont les parties ſont indépendantes les unes des autres, ou du moins, lorſqu'on n'a point l'expreſſion de la loi qui les lie les unes aux autres.

Mais lorſque les parties d'une figure ou d'un corps ont entr'elles une relation que l'on peut exprimer par une équation, on peut alors trouver le centre de gravité d'une maniere beaucoup plus facile. En voici des exemples.

287. Qu'il s'agiſſe d'abord de trouver le centre de gravité G, d'un arc quelconque

X 4

de courbe AM (*Fig.* 91). On imaginera l'arc infiniment petit Mm; & l'on prendra pour axe des moments une ligne quelconque CN parallele aux ordonnées que je suppose perpendiculaires entr'elles. Je suppose de plus que la distance de C à l'origine A des abscisses soit $= b$, b étant d'ailleurs quelconque. Pour avoir la distance Gg du centre de gravité à l'axe CN, il faut (261) prendre la somme des moments des arcs Mm, par rapport à l'axe CN, & la diviser par la somme des arcs Mm; c'est-à-dire, par l'arc AM. Or l'arc Mm étant infiniment petit, la distance de son milieu n, à la droite CN, doit être réputée égle à MN. On aura donc $Mm \times MN$ pour le moment de ce petit arc. Mais en nommant AP, x; PM, y; on a (97) $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & $MN = CP = b - x$; donc $(b - x)\sqrt{dx^2 + dy^2}$ est le moment du petit arc Mm; & par conséquent $\int (b - x)\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou l'intégrale de $(b - x)$ $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ est la somme des moments de tous les arcs infiniment petits Mm, dont l'arc AM est composé. On a donc $Gg = \frac{\int (b - x)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{AM}$. Quant à l'arc AM qui divise, dans cette quantité, nous avons donné (97) la méthode pour le déterminer exactement, lorsque cela se peut; & (110) celle de le déterminer par approximation.

Par un raiſonnement ſemblable, on trouvera que la diſtance Gg', du centre de gravité, à l'axe AP, eſt $\frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{AM}$.

Ce ſont là les formules générales qui ſervent à déterminer le centre de gravité d'un arc quelconque de courbe dont on a l'équation entre les lignes que nous avons nommées x & y.

288. Si l'arc dont on veut avoir le centre de gravité, eſt compoſé de deux parties égales & ſemblables AM, AM' (*Fig.* 92) ſituées de part & d'autre de l'axe des abſciſſes; alors il eſt évident que le centre de gravité G, ſera ſur la droite AP: il ne ſera donc queſtion que de trouver ſa diſtance au point C. Or il eſt clair que les moments des deux arcs Mm, $M'm'$, à l'égard de l'axe NN' étant égaux, la diſtance CG ſera, alors, égale à $\frac{2\int(b-x)\sqrt{dx^2+dy^2}}{MAM'}$.

Par exemple, que l'arc MAM' ſoit un arc de cercle, on aura $y=\sqrt{ax-xx}$, a étant le diametre. On trouvera facilement, & nous l'avons déja vu (111) que $\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{ax-xx}}$. On aura donc $2\int(b-x)\sqrt{dx^2+dy^2}=$

$$\frac{2\int \frac{1}{2} a(b-x)\,dx}{\sqrt{ax-xx}} = a\int (b-x)\,dx\,(ax-xx)^{-\frac{1}{2}}.$$

Suppoſons, pour plus de ſimplicité, que le point C ſoit le centre, alors $AC = b = \frac{1}{2}a$; nous aurons donc $2\int(b-x)\sqrt{dx^2+dy^2} = a\int(\frac{1}{2}c - x)\,dx\,(ax-xx)^{-\frac{1}{2}} = a\sqrt{ax-xx}$ (89); intégrale à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce que, lorſque $x =$ zéro, elle devient zéro, ainſi que cela doit être, puiſqu'alors la ſomme des moments eſt, évidemment, nulle.

Nous avons donc enfin $2\int(b-x)\,dx\sqrt{dx^2+dy^2} = a\sqrt{ax-xx}$, & par conſéquent . . . . .

$$CG = a\frac{\sqrt{ax-xx}}{MAM'} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2\sqrt{ax-xx}}{MAM'} = \frac{CA \times MM'}{MAM'}$$

ce qui donne cette proportion $MAM' : MM' :: CA : CG$, qui nous apprend que *la diſtance du centre d'un cercle, au centre de gravité de l'un quelconque de ſes arcs, eſt quatrieme proportionnelle à la longueur de l'arc, à ſa corde & au rayon.*

On peut appliquer ces formules à toute autre courbe : nous paſſons aux centres de gravité des ſurfaces planes terminées par des lignes courbes.

289. Si l'on demande le centre de gravité de la ſurface APM (*Fig* 93); nous ſuppoſerons que G repréſente ce centre. Il faudra pour avoir la diſtance Gg, prendre

la somme des moments des petits trapèzes $MPpm$, par rapport à CN, & la diviser par la somme de ces trapèzes, c'est-à-dire, par l'espace APM. Or le centre de gravité i de ce petit trapèze doit être au milieu de la droite nk également éloignée de MP & de mp; milieu que l'on peut supposer être sur MP, à cause de la hauteur infiniment petite Pp; on aura donc la distance $il = CP$; ainsi le moment de $PpmM$, sera $PpmM \times CP$, c'est-à-dire, $(b-x)ydx$, en ap[illegible] CA, b, & AP x. Donc la somme des moments sera $\int (b-x)\, ydx$, & par conséquent la distance Gg sera . . . $\frac{\int (b-x)\, ydx}{APM}$.

On trouvera de la même maniere que la distance $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2} y^2 dx}{APM}$.

290. En général, on trouvera de la même maniere, le centre de gravité de tout espace plan, en le décomposant en trapèzes infiniment petits.

Par exemple, s'il s'agit du triangle ANN' (*Fig.* 94), on prendra la base NN' & la hauteur AC pour axes des moments; & nommant AP, x; MM', y; & AC, b, on aura $MM'm'm = ydx$; & le moment de ce trapeze à l'égard de NC, sera $(b-x)ydx$. En sorte que la distance Gg du centre de gravité, à la base, sera $\frac{\int(b-x)ydx}{AMM'}$. Or si l'on nomme c la base, on a $AC : AP :: NN' : MM'$; c'est-à-dire, $b : x :: c : y = \frac{cx}{b}$; donc $\int(b-x)ydx$, devient $\int(b-x)\frac{axdx}{b}$, ou $\int\frac{c}{b}(bxdx - x^2dx)$, qui vaut $\frac{c}{b}\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ ou $\frac{cx^2}{6b}(3b - 2x)$. Or la surface AMM' est $\frac{MM' \times AP}{2}$ ou $\frac{cx^2}{2b}$; donc la distance du centre de gravité, est $\frac{\frac{cx^2}{6b}(3-2x)}{\frac{cx^2}{2b}}$ ou $\frac{1}{3}(3b-2x)$, qui, lorsque $x = b$, devient $\frac{1}{3}b$. Donc $Gg = \frac{1}{3}b$. Or si l'on mene la ligne AGL, les triangles semblables ACL, GgL donnent $LG : LA :: Gg : AC :: \frac{1}{3}b : b :: 1 : 3$; donc $LG = \frac{1}{3}LA$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (278).

291. Appliquons maintenant les formules, aux lignes courbes. Supposons que APN (*Fig.* 95) est une portion de cercle, dont le diametre est a, & que le point C est le centre; ce qui donne $b = \frac{1}{2}a$. Nous aurons $y = \sqrt{ax-xx}$. La quantité $\int(b-x)ydx$, devient donc $\int(\frac{1}{2}a - x)dx\sqrt{ax-xx}$, ou

$\int(\frac{1}{2}a - x)\,dx\,(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$ qui (89) eſt intégrable, & a pour intégrale $\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$; quantité à laquelle il n'y a point de conſtante à ajouter, parce qu'elle eſt zéro quand $x = 0$, ainſi que cela doit être. Nous avons donc $Gg = \frac{\frac{1}{3}(ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{APM} = \frac{\frac{1}{3}\overline{PM}^3}{APM}$.

A l'égard de Gg', puiſqu'on a $y = \sqrt{ax-xx}$, ſa valeur (289) ſera $Gg' = \frac{\int\frac{1}{2}.(ax-xx)\,dx}{APM}$, or $\int\frac{1}{2}(ax - xx)\,dx$, ou $\int\frac{1}{2}.(axdx - x^2dx)$, eſt $\frac{1}{2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ ou $\frac{1}{12}x^2(3a - 2x)$; on a donc $Gg' = \frac{\frac{1}{12}x^2(3a-2x)}{APM}$.

S'il s'agit du ſegment entier ; comme il eſt évident que le centre de gravité G (*Fig.* 92) eſt ſur le rayon CA, qui diviſe l'arc en deux parties égales, & qu'il eſt à même diſtance de NN' que les deux centres de gravité particuliers des deux demi-ſegments APM, APM', on a $CG = \frac{\frac{1}{3}\overline{PM}^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24}.8.\overline{PM}^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24}.\overline{MM'}^3}{APM} = \frac{\frac{1}{12}.\overline{MM'}^3}{2\,APM} = \frac{\frac{1}{12}\overline{MM'}^3}{AMM'A}$, c'eſt-à-dire, que *la diſtance du centre d'un cercle, au centre de gravité de la ſurface de l'un quelconque de ſes ſegments, eſt égale au douzieme du cube de la corde, diviſé par la ſurface de ce ſegment.*

292. Quant au centre de gravité d'un secteur $CMAM'$ (*Fig.* 96) on peut l'avoir, en observant que le centre de gravité G du segment MAM', celui G' du secteur, & celui G'' du triangle sont tous sur le rayon CA; que selon le principe des moments, le moment du secteur, doit être égal au moment du segment, plus le moment du triangle. On a donc $CMAM' \times CG' = MAM' \times CG + CMM' \times CG''$. Or nous venons de trouver $CG = \frac{\frac{1}{3}\overline{PM}^3}{APM}$ que l'on peut changer en $\frac{\frac{2}{3}\overline{PM}^3}{2AMP} = \frac{\frac{2}{3}\overline{PM}^3}{MAM'}$; donc $CG \times MAM' = \frac{2}{3}\overline{PM}^3$. D'ailleurs, nous savons que $CMM' = PM \times CP$, & (278) que $CG'' = \frac{2}{3} CP$, ensorte que $CMM' \times CG''$ = se réduit à $\frac{2}{3} PM \times \overline{CP}^2$. Substituant donc ces valeurs, on a $CMAM' \times CG' = \frac{2}{3} PM' + \frac{2}{3} PM \times CP^2 = \frac{2}{3} PM(\overline{PM}^2 + \overline{CP}^2) = \frac{2}{3} PM \times \overline{CM}^2$, à cause du triangle rectangle CPM. Donc $CG' = \frac{\frac{2}{3} PM \times CM^2}{CMAM'}$. Mais la surface du secteur $CMAM'$, est égale à l'arc MAM' multiplié par $\frac{CM}{2}$ donc $CG' = \frac{\frac{2}{3} PM \times \overline{CM}^2}{MAM' \times CM} = \frac{\frac{4}{3} PM \times CM}{MAM'} = \frac{\frac{2}{3} MM' \times CA}{MAM'}$. C'est-à-dire, *que la distance du centre d'un cercle, au centre de gravité de l'un*

quelconque de ses secteurs, est quatrieme proportionnelle à l'arc, au rayon, & aux deux tiers de sa corde.

On peut appliquer les formules, à toute autre courbe, par exemple, à la parabole, &c.

293. Voyons maintenant les surfaces courbes; mais bornons-nous à celles des solides de révolution. Alors en raisonnant comme dans les articles précédents, on verra que le centre de gravité de chaque zône élémentaire, est dans l'axe de révolution CA (*Fig.* 97), & doit être réputée au centre P de l'une des bases de cette zône, considérée comme ayant une épaisseur infiniment petite. Or, nous avons vu (98) que l'expression de cette zône étoit $\frac{c}{r} y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $r : c$ représentant le rapport du rayon à la circonférence. On aura donc (en nommant toujours b la distance AC de l'origine A des abscisses à l'axe NN' des moments) on aura, dis-je, $\frac{c}{r} (b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}$ pour le moment de cette même zône, en sorte que la distance CG du centre de gravité G de la surface, au point C, sera en nommant S cette surface, $\frac{\int \frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{S}$.

294. Supposons, pour appliquer cette formule, qu'il s'agit de trouver le centre de gravité de la surface convexe du cône droit ANN' (*Fig.* 98), AP étant x; PM, y; la hauteur AC, b; le rayon CN de la base, a; & le côté AN, e; on aura, à cause des triangles semblables, ACN, Mrm, $AC:AN::Mr:Mm$; c'est-à-dire, $b:e::dx:\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{edx}{b}$. On aura aussi, à cause des triangles semblables, ACN & APM, $AC:CN::AP:PM$; c'est-à-dire, $b:a::x:y=\frac{ax}{b}$; donc $\int\frac{c}{r}(b-x)y\sqrt{dx^2+dy^2}$, devient $\int\frac{c}{r}\times(b-x)\times\frac{ax}{b}\times\frac{edx}{b}$; ou $\int\frac{cea}{rb^2}(bxdx-x^2dx)$, dont l'intégrale est $\frac{cae}{rb^2}\times\left(\frac{bx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$, ou $\frac{caex^2}{6rb^2}\times(3b-2x.)$ Or la surface de la portion $AM'LMA$, ou S, est (*Géom.* 219) $=\frac{AM}{2}\times circ\,PM$; & l'on a $AC:AP::AN:AM$; ou $AM=\frac{AP\times AN}{AC}$: donc $S=\frac{AP\times AN}{2AC}\times circ\,PM=\frac{c}{r}\times\frac{ae}{2bb}xx$; donc la distance du centre de gravité de la surface $AM'LMA$, au point C, est $\frac{\frac{caex^2}{6rb^2}(3b-2x)}{\frac{cae}{2rb^2}x^2}$, ou $\frac{1}{3}(3b-2x)$, ou $b-\frac{2}{3}x$;

donc

donc lorſque $x = b$, ou lorſque $AP = AC$, on a la diſtance CG du centre de gravité de la ſurface totale du cône, $= b - \frac{2}{3} b = \frac{1}{3} b$; c'eſt-à-dire que ce centre de gravité eſt le même que celui de la ſurface du triangle ANN'.

295. Pour ſecond exemple, prenons la ſphere (*Fig.* 99). Nous aurons $y = \sqrt{ax - xx}$ a étant le diametre, & $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} a dx}}{\sqrt{ax - xx}}$, donc $\int \frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ deviendra $\int \frac{c}{r} (b - x) \times \frac{1}{2} adx$; ſuppoſant donc que C eſt le centre, ce qui rend $b = \frac{1}{2} a$, on aura $\int \frac{c}{r} (b - x) \times \frac{1}{2} adx = \int \frac{ca}{2r} (\frac{1}{2} adx - xdx)$ qui ſe réduit à $\frac{ca}{2r} (\frac{1}{2} ax - \frac{1}{2} xx)$, ou $\frac{cax}{2r} (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x)$. Or, nous avons vu (99) que la ſurface S du ſegment ſphérique $AMLM'A$, étoit $\frac{cax}{2r}$; on a donc la diſtance CG du centre C au centre de gravité G, $= \frac{\frac{cax}{2r} (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x)}{\frac{cax}{2r}} = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x = CA - \frac{1}{2} AP$; c'eſt-à-dire, que ce centre G, eſt au milieu G de la hauteur AP de ce ſegment. D'où l'on peut conclure en général, que le centre de gravité de la ſurface d'une zône ſphérique compriſe entre

deux plans paralleles, eſt au milieu de la hauteur de cette zône.

295. Terminons par la recherche des centres de gravité des ſolides.

Si l'on conſidere un ſolide (*Fig.* 67) comme compoſé de tranches infiniment minces, paralleles entr'elles, & qu'on repréſente, en général, par ss, la ſurface de chaque tranche, & par dx ſon épaiſſeur, on aura $ssdx$ pour cette tranche; & par conſéquent $ss\ (b-x)\ dx$ pour ſon moment à l'égard d'un plan parallele à ces tranches, & paſſant à une diſtance CA du ſommet A, $= b$. Donc en nommant S la ſolidité $ALMM'A$ on aura pour la diſtance du centre de gravité, la quantité $\frac{\int ss(b-x)dx}{S}$. Or la valeur de S ſe détermine par les méthodes que nous avons données dans le calcul intégral; & celle de $\int ss\ (b-x)\ dx$, ſe déterminera, auſſi, par ces mêmes méthodes, lorſqu'on aura la valeur de ss en x. On aura donc la diſtance du centre de gravité par rapport à un plan connu. On cherchera de la même maniere la diſtance de ce centre à chacun de deux autres plans perpendiculaires entre eux, & au premier. Mais nous nous bornerons ici aux ſolides dont les tranches paralleles, ont chacune leur centre de gravité particulier ſur une même ligne droite, tels que font les pyramides, & les solides de révolution.

297. Prenons d'abord les pyramides. Soit donc b, la hauteur AC d'une pyramide quelconque (*Fig.* 100); x la distance perpendiculaire AP d'une tranche quelconque; ee la surface de la base; on aura (*Géom.* 202) celle de la tranche placée à la distance x du sommet, par cette proportion $bb : xx :: ee$; $\frac{eexx}{bb}$; nous avons donc $ss = \frac{eexx}{bb}$; donc $\int ss(b-x)dx$, devient $\int \frac{ee}{bb}(bxxdx - x^3dx)$, qui revient à $\frac{ee}{bb}\left(\frac{bx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$ ou $\frac{eex^3}{12bb}(4b-3x)$. Or la solidité de la pyramide qui a x pour hauteur, & ss ou $\frac{eexx}{bb}$ pour base, est $\frac{eex^3}{3bb}$; donc la distance du centre de gravité est

$$\frac{\frac{eex^3}{12bb}(4b-3x)}{\frac{eex^3}{3bb}},$$

ou $\frac{1}{4}(4b-3x)$ ou $b-\frac{3}{4}x$; or lorsque $x=b=AC$, cette quantité se réduit à $\frac{1}{4}b$; donc la hauteur Cg' du centre de gravité G, au-dessus de la base est $\frac{1}{4}b$.

Soit maintenant g, le centre de gravité de la base; la ligne Ag passera par le centre de gravité G de la pyramide; & les paralleles Gg' & gC donneront Cg' ou $\frac{1}{4}b : AC$ ou $b ::$ $Gg : Ag$; donc $Gg = \frac{1}{4}Ag$; ce qui confirme ce que nous avons dit (284) & fait voir que pour toute pyramide, le centre de gravité de la solidité est au quart de la distance du centre de gravité de la base, au sommet.

298. Quant aux solides de révolution la valeur de ss (102) est généralement $\frac{cy^2}{2r}$; ainsi l'expression de la distance du centre de gravité pour ces solides, est généralement $\int \frac{\frac{cy^2(b-x)dx}{2r}}{S}$. On peut appliquer cela à la sphere, à l'ellipsoïde, &c. & par ce dernier, déterminer le centre de gravité des mâts. Nous ne nous y arrêterons pas, parce que dans le cas où on en auroit besoin, on peut, sans erreur sensible, supposer ce centre de gravité au milieu de la longueur de mât, vu le peu de courbure de leur surface; mais nous passerons à un objet plus important.

299. Quoique ce que nous avons dit jusqu'ici, sur les centres de gravité, suffise pour mettre en état de les trouver, dans quelque cas que ce soit; nous nous arrêterons néanmoins, sur la méthode qu'on doit suivre pour trouver le centre de gravité de la partie submergée de la carène, dans les vaisseaux.

On doit ſuppoſer que ce centre de gravité eſt dans le plan vertical qui paſſe par l'axe de la quille ; ainſi il ne s'agit que de trouver ſa diſtance horiſontale à une ligne verticale menée par un point déterminé de l'étambot, & ſa diſtance verticale à la quille.

Pour l'un & l'autre de ces deux objets, il faut commencer par déterminer le centre de gravité d'une ſurface *ANDFPB* (*Fig.* 101) terminée par deux lignes paralleles *AB*, *DF*, & par deux courbes égales & ſemblables *AND*, *BPF*.

Si l'on avoit l'équation de cette courbe, rien ne ſeroit plus facile que de déterminer ſon centre de gravité *G*, par les méthodes précédentes. Mais ne l'ayant point, il faut concevoir par les milieux *C* & *E* de *AB* & de *DE*, la ligne *DE* que l'on partagera, par des perpendiculaires *TH*, *KM*, &c. en un aſſez grand nombre de parties égales, pour que les arcs compris entre deux perpendiculaires voiſines puiſſent être regardés comme des lignes droites. Alors on prendra les moments des trapèzes, *DTHF*, *TKMH*, &c. par rapport au point *E*, & on diviſera la ſomme de ces moments, par la ſomme des trapèzes, c'eſt-à-dire, par la ſurface *ANDFPB*. Nous avons vu (*Géom.* 154) comment on déterminoit cette ſurface : il ne s'agit donc plus que d'avoir une expreſſion ſimple de la ſomme des moments. Or (279) la diſtance du centre de gravité du trapèze $THFD$, au point E, eſt $\frac{\frac{1}{3}IE\times(DF+2TH)}{DF+TA}$; celle du trapèze $TKMH$, au même point E, ſera par la même raiſon, & à cauſe de l'égalité des lignes IE, IL, &c. ſera, dis-je, $\frac{\frac{1}{3}IE\times(TH+2KM)}{TH+KM}+IE$, ou $\frac{\frac{1}{3}IE(4TH+5KM)}{TH+KM}$. Pareillement la diſtance du centre de gravité du trapèze $NKMP$, ſera $\frac{\frac{1}{3}IE\times(KM+2NP)}{KM+NP}+2IE$, ou $\frac{\frac{1}{3}IE(7KM+8NP)}{KM+NP}$, & ainſi de ſuite.

Si l'on multiplie, maintenant, chaque diſtance par la ſurface du trapèze correſpondant, c'eſt-à-dire, (*Géom.* 148) par la moitié de la ſomme des deux côtés oppoſés de ce trapèze, multipliée par leur hauteur commune IE, on aura pour la ſuite de ces moments, $\frac{1}{6}IE^2\times(DF+2TH)$, $\frac{1}{6}IE^2\times(4TH+5KM)$, $\frac{1}{6}IE^2\times(7KM+8NP)$, & ainſi de ſuite; donc la ſomme des moments ſera $\frac{1}{6}IE^2\times(DF+6TH+12KM+18NP+24QS+14AB)$; où l'on peut remarquer que s'il y a avoit un plus grand nombre de diviſions, le multiplicateur du dernier terme, qui eſt ici 14, ſeroit en général $2+3(n-2)$ ou

$3n-4$, n étant le nombre total des perpendiculaires EF, TH, &c. en y comprenant AB qui peut être zéro. Ainsi l'expression générale de la somme des moments, se réduit à $\overline{IE}^2$ ($\frac{1}{6}DF + TH + 2\,KM + 3\,NP + 4\,QS +$ &c..... $+ \frac{(3n-4)}{6}AB$).

Or nous avons vu (*Géom.* 154) que la surface $ANDFPB$ avoit pour expression $IE \times (\frac{1}{2}DF + TH + KM + NP +$ &c. . . . $+ \frac{1}{2}AB$) donc la distance du centre de gravité G, ou. . . . .

$$EG = \frac{IE \times (\frac{1}{6}DF + 2TH + KM + 3NP + \text{\&c.} + \frac{3n-4}{6}BA)}{\frac{1}{2}DF + TH + KM + NP + \text{\&c.} \ldots + \frac{1}{2}AB}.$$

C'est-à-dire, que pour avoir la distance du centre de gravité G, à l'une des ordonnées extrêmes DF, il faut 1°. *prendre le sixieme de la premiere ordonnée* DE; *le sixieme de la derniere ordonnée* AB *multipliée par le triple du nombre des ordonnées moins* 4; *puis la seconde, le double de la troisieme, le triple de la quatrieme, & ainsi de suite, ce qui donnera une premiere somme.* 2°. *A la moitié de la totalité des deux ordonnées extrêmes, ajouter toutes les ordonnées intermédiaires; ce qui donnera une seconde somme.* 3°. *Diviser la premiere somme par la seconde, & multiplier le quotient par l'un des intervalles.*

Par exemple, s'il y avoit 7 perpendiculaires dont les valeurs fussent 18, 23, 28, 30, 30, 21, 0, pieds; & que chaque intervalle fût de 20 pieds. Je prendrois le sixieme de 18 qui est 3; & comme le dernier terme est 0, à 3 j'ajouterois 23, le double de 28, le triple de 30, le quadruple de 30, & ainsi de suite, ce qui me donneroit 397. Ensuite à la moitié de 18, j'ajoute 23, 28, &c. & j'ai 141; divisant 397 par 141, & multipliant par 20, j'ai $\frac{397 \times 20}{141}$ ou $\frac{7940}{141}$ qui reviennent à 59 pieds 4 pouces, à très-peu-près. M. Bouguer, *Traité du Navire*, *page* 213, trouve 55 pieds 11 pouces, & c'est bien en effet, le résultat de sa formule; mais cette formule suppose tacitement une chose qui n'est pas suffisamment exacte.

Lorsqu'une fois on sait déterminer le centre de gravité d'une coupe quelconque, il devient facile de déterminer celui d'un solide, & par conséquent celui de la carène.

Veut-on avoir la distance du centre de gravité de la carène, à la quille? On imaginera la carène coupée en plusieurs tranches paralleles à la coupe faite à fleur d'eau (*Fig.* 102 & 103). La solidité de chaque tranche, sera égale (*Géom.* 254) à la moitié de la somme des deux surfaces opposées de cette tranche multipliée par l'épaiſſeur de cette même tranche, & ſon centre de gravité ſera à même hauteur dans cette tranche, que celui du trapèze *a b c d* qui en eſt la ſection faite par un plan vertical paſſant par la quille. On voit donc que le raiſonnement que l'on a à faire ici, pour trouver la hauteur *g E* du centre de gravité, eſt abſolument le même que dans le cas précédent, en changeant ſeulement le mot de *perpendiculaire* ou *d'ordonnée*, en celui de *coupe*; de ſorte que l'opération ſe réduit 1°. *à prendre le ſixieme de la coupe la plus baſſe; le ſixieme de la coupe la plus élevée, multipliée par le triple du nombre des coupes, moins 4; la ſeconde coupe en montant; le double de la troiſieme; le triple de le quatrieme, & ainſi de ſuite ce qui donne une premiere ſomme.* 2°. *Prendre la moitié de la totalité des deux coupes ſupérieure & inférieure, & toutes les coupes intermédiaires.* 3°. *Diviſer la premiere ſomme par la ſeconde, & multiplier le quotient par la diſtance commune d'une coupe à l'autre.*

On peut s'y prendre de la même maniere pour trouver la diſtance du centre de gravité, à la verticale *x Z*, menée par un point déterminé *b* de l'étambot (*Fig.* 102); en imaginant la carène coupée par des plans paralleles au maître couple; mais comme il faudroit encore meſurer les ſurfaces de ces couples, il vaut mieux employer celles qu'on aura déja mesurées dans l'opération précédente ; c'eſt pourquoi, on déterminera, comme on l'a fait ci-deſſus les centres de gravité g, g, de chacune des coupes paralleles à la quille. Leur diſtance à la verticale xz ſera la même que celle du centre de gravité g de la tranche correſpondante. On multipliera chaque coupe par la diſtance de ſon centre de gravité à la ligne xZ, & regardant chaque produit comme l'ordonnée d'une ligne courbe telle que dans la figure 101, on prendra la moitié de la ſomme des deux produits extrêmes, & la ſomme de tous les produits intermédiaires ; & ayant multiplié le tout par l'épaiſſeur d'une des tranches, on le diviſera par la ſomme de toutes les coupes intermédiaires, plus la moitié de la ſomme des deux coupes extrêmes.

A l'égard du centre de gravité du navire même, ſoit en charge, ſoit hors de charge, on ne peut pas en réduire la recherche, à des regles auſſi ſimples. Il faut entrer dans une diſcuſſion détaillée des différentes parties qui le compoſent, lui & la charge. Prendre les moments de ces différentes parties à l'égard d'un plan horiſontal qu'on imaginera paſſer par la quille ; & leurs moments à l'égard d'un plan vertical perpendiculaire à la quille, & que l'on prendra arbitrairement; divisant ces deux sommes de moments, par le poids total du navire, on aura la hauteur de ce centre, & sa distance au plan vertical par rapport auquel on a considéré les moments; & comme il doit, d'ailleurs, être dans le plan vertical qui passeroit par la quille, on aura donc sa situation. Mais il faut observer que dans le calcul de ces moments, il faut multiplier non pas le volume de chaque piece, mais son poids, par la distance du centre de gravité de cette piece; centre qui est facile à déterminer, après tout ce que nous avons dit jusqu'ici, sur les centres de gravité.

Propriétés des Centres de Gravité.

300. Il est clair, par ce que nous venons de dire sur les centres de gravité, & par ce que nous avons dit sur la résultante de plusieurs forces paralleles, que si toutes les parties d'un corps ou d'un systême quelconque de corps, ont chacune la même vîtesse, ou tendent à se mouvoir avec la même vîtesse; il est clair, dis-je, que la résultante de tous ces mouvements passe par le centre de gravité de ce corps, ou de ce systême de corps, & que par conséquent le systême se meut ou tend à se mouvoir, comme si la totalité des

masses étoit concentrée au centre de gravité ; & étoit animée d'une vîtesse égale à celle qui anime chacune des parties.

301. D'où l'on doit conclure réciproquement, que si l'on applique au centre de gravité d'un corps libre, ou d'un systême de corps une force quelconque ; toutes les parties égales du systême partageront également ce mouvement, s'avanceront toutes avec une égale vîtesse que l'on aura (189) en divisant la quantité de mouvement appliquée à ce centre, par la masse totale du corps ou du systême de corps, & cette vîtesse aura pour direction celle de la force appliquée au centre de gravité.

En effet, quels que soient les mouvements que prendront les parties du systême, on voit clairement qu'ils doivent avoir pour résultante la force même qui a été appliquée au centre de gravité; puisque le systême est supposé libre, & que par conséquent rien ne détruit la force appliquée au centre de gravité.

302. Et puisque plusieurs forces appliquées à un même point, se réduisent (en vertu des principes précédents) à une seule, il en faut conclure généralement, que *quelques forces que l'on applique au centre de gravité d'un corps ou d'un systême de corps ;* en

quelque nombre qu'elles ſoient, & quelque direction qu'elles aient ; toutes les parties de ce corps, ou de ce ſyſtême de corps, prendront une vîteſſe égale ; laquelle aura la même direction que la réſultante de toutes ces forces, & ſera égale à la quantité de mouvement qui repréſente cette force réſultante, diviſée par la maſſe totale du corps ou du ſyſtême de corps.

303. D'où l'on doit conclure que *tant que les forces qui agiſſent ſur un corps ſe réduiront ou pourront être réduites à une ſeule dont la direction paſſera par le centre de gravité, ce corps ne tournera point autour de ſon centre de gravité.*

304. Mais ſi les forces qui agiſſent ſur un corps ne peuvent être réduites à une ſeule ; ou ſi pouvant être réduites à une ſeule, la direction de celle-ci ne paſſe point par le centre de gravité, alors toutes les parties du ſyſtême ne ſeront pas mues d'un mouvement commun. Néanmoins le centre de gravité ſera mu de la même maniere que ſi toutes ces forces y étoient immédiatement appliquées. C'eſt ce qu'il s'agit de faire voir actuellement.

305. Suppoſons d'abord trois corps M, N, P, (*Fig.* 104) mus ſuivant des lignes paralleles AD, BE, C ſituées ou non ſituées dans un même plan, & mus avec des vîteſ-

ſes repréſentées par les lignes *A D*, *B E*, *C F*. Suppoſons que *G* ſoit le centre de gravité de ces corps lorſqu'ils ſont en *A*, *B*, *C*; & *G'* leur centre de gravité lorſqu'ils ſont arrivés en *D*, *E*, *F* où ils arrivent en même temps, puiſque leurs vîteſſes ſont repréſentées par *A D*, *B E*, *CF*. Si l'on mene la ligne *GG'*, je dis qu'elle ſera parallele à ces lignes; qu'elle ſera la route que le centre de gravité *G* ſuivra pendant le mouvement des corps; & que ce centre de gravité *G* la décrira uniformément.

1°. Il eſt facile de voir que la route du centre de gravité ſera parallele aux lignes *A D*, *B E*, &c. car à quelque endroit qu'on le ſuppoſe dans un inſtant quelconque, ſi on imagine un plan qui paſſe par ce centre, la ſomme des moments, par rapport à ce plan, doit être zéro (270). Or ſi l'on conçoit un plan parallele aux directions des corps, & paſſant par le point *G*, les moments, par rapport à ce plan, ne peuvent manquer d'être zéro pendant tout le mouvement; car les corps, dans leur mouvement ſont ſuppoſés ne pas s'écarter de ce plan; leurs diſtances à ce plan ſont donc toujours les mêmes; donc les moments ſont auſſi toujours les mêmes; mais au commencement du mouvement, c'eſt-à-dire, lorſque le centre de gravité étoit en G, leur ſomme étoit zéro ; donc elle eſt encore zéro, en quelque endroit de leurs directions que les corps ſe trouvent ; donc le centre de gravité eſt toujours dans un plan parallele aux directions des corps, & qui paſſe par la premiere poſition G de ce centre. Et comme, dans ce raiſonnement, rien ne détermine la poſition de ce plan, ſinon qu'il doit être parallele aux directions des corps M, N, P, & paſſer par le point G, on prouvera de même, que ce centre eſt dans tout autre plan parallele aux directions des corps, & paſſant par le point G ; il eſt donc dans l'interſection commune de ces plans ; donc le centre de gravité ſe meut ſuivant GG parallele aux directions de ces corps.

2°. Je dis qu'il ſe meut uniformément ; c'eſt-à-dire, que ſi lorſque les corps M, N, P, &c. ſont arrivés en a, b, c, &c. On ſuppoſe que le centre de gravité eſt en g, on aura $GG : Gg :: AD : Aa :: BE : Bb ::$ &c. c'eſt-à-dire, que les eſpaces décrits en même temps, par le centre de gravité, & par chacun des corps, ſeront comme leurs vîteſſes.

En effet, ſi on conçoit un plan repréſenté par RS, auquel les directions des mouvements ſoient perpendiculaires ; on aura, par la nature du centre de gravité (261),

$M \times AH + N \times BI + P \times CI = (M + N + P) \times GK$. Et par la même raison, lorsqu'ils sont en D, E, F, on a $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times G'K$. Si cette de équation on retranche la premiere, on aura (en faisant attention que $DH - AH = AD$, $EI - BI = BE$, &c.) $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$. Donc, par la même raison, lorsqu'ils seront en a, b, c, on aura $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$.

Or puisque Aa, Bb, Cc sont décrits uniformément, dans un même temps, ces espaces (187) doivent être entre eux comme les vîtesses AD, BE, CE, on a donc $AD : BE :: Aa : Bb$, $AD : CF :: Aa : Cc$; donc $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}$, $Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$. Substituant ces valeurs dans notre derniere équation, & chassant le dénominateur AD, elle se change en $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$. Enfin divisant cette équation, par celle où entre GG', on a $Aa = \frac{Gg \times AD}{GG}$, d'où l'on tire $GG' : Gg :: AD : Aa$; ce qu'il s'agissoit de démontrer.

Observons, maintenant, que l'équation où entre GG', donne $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$. Or les lignes AD, BE, CF, GG', sont les

vîtesses

vîteſſes des corps M, N, P, & du centre de gravité G; par conſéquent $M \times AD$, $N \times BE$, &c. ſont leurs quantités de mouvement. Donc puiſque le raiſonnement que nous avons fait juſqu'ici, ne dépend point du tout du nombre des corps, on peut conclure généralement 1°. *que ſi tant de corps que l'on voudra décrivent uniformément des lignes paralleles, le centre de gravité décrit auſſi, uniformément, une ligne parallele à celle-là.* 2°. *Que ſa vîteſſe eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un ſens, moins la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui vont en ſens contraire, le tout diviſé par la ſomme des maſſes.*

306. Si quelques-uns des corps étoient en repos; la vîteſſe de ces corps étant alors zéro, la quantité de mouvement ſeroit auſſi zéro. Ainſi elle diſparoîtroit dans le numérateur de la fraction qui exprime la vîteſſe du centre de gravité. Mais cela ne changeroit rien au dénominateur qui ſera toujours la ſomme de toutes les maſſes.

307. Si la ſomme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un ſens étoit égale à la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui vont en ſens contraire, le numérateur de la fraction qui exprime la vîteſſe du centre de gravité, ſeroit

zéro. Ce centre de gravité feroit donc en repos. Donc quels que foient les mouvements paralleles de plufieurs corps, leur centre commun de gravité refte en repos, quand la fomme des quantités de mouvement de ceux qui vont dans un fens, eft égale à la fomme des quantités de mouvement de ceux qui vont en fens contraire.

308. Puifque les quantités de mouvement repréfentent les forces (189); & que la réfultante de plufieurs paralleles (255) eft égale à la fomme de celles qui agiffent ou tendent à agir dans un fens, moins la fomme de celles qui agiffent, ou tendent à agir, dans un fens contraire; concluons donc que *fi plufieurs forces paralleles font appliquées aux différentes parties d'un fyftême quelconque de corps, le centre de gravité de ce fyftême fe meut comme fi ces forces lui étoient immédiatement appliquées.*

309. Que les corps, en quelque nombre qu'ils foient, fe meuvent, maintenant, fuivant de lignes droites quelconques. Si on imagine deux lignes droites quelconques perpendiculaires entr'elles; & à leur point de rencontre, une troifieme qui foit perpendiculaire à leur plan, on peut toujours décompofer la vîteffe de chaque corps, en trois autres, paralleles à ces trois lignes. Or il

ſuit de ce que nous venons de dire, que le mouvement du centre de gravité en vertu des mouvements paralleles à l'une de ces lignes, ſera parallele à cette même ligne, ſera uniforme, & que ſa vîteſſe ſera égale à la ſomme des quantités de mouvement * eſtimées parallélement à cette ligne, diviſée par la ſomme des maſſes. Donc ſi l'on conçoit que l'on ait déterminé, par ce principe, le mouvement du centre de gravité parallélement à chacune de ces trois lignes, & qu'enſuite on compoſe ces trois mouvements pour les réduire à un ſeul, (ce qui eſt poſſible puiſqu'ils ſont appliqués à un même point) on aura la route unique du centre de gravité. Or comme les éléments qu'on emploie ici, ne ſont autre choſe que les forces mêmes, qu'ont les corps, parallélement à ces trois lignes, & que la force unique du centre de gravité ſe trouve, par-là, compoſée des forces réſultantes parallélement à chacune de ces lignes, elle ne peut donc manquer d'être égale & parallele à la réſultante de toutes les forces appliquées à tous ces corps; donc en général *quelles que ſoient les*

* C'eſt par abréviation que nous diſons ſeulement, la ſomme des quantités de mouvement : on doit toujours entendre la ſomme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un ſens, moins la ſomme des quantités de mouvement de ceux qui vont en ſens contraire.

directions & les valeurs des forces appliquées à différentes parties d'un systême de corps, le centre de gravité se meut toujours, ou tend à se mouvoir, de la même maniere que si toutes ces forces lui étoient immédiatement appliquées.

310. Dans le raisonnement précédent, nous avons dit qu'on pouvoit toujours décomposer la vîtesse de chaque corps en trois autres, paralleles à trois lignes données de position. Cependant si la direction de l'un des corps étoit parallele au plan de deux de ces trois lignes, ou si elle étoit parallele à l'une de ces trois lignes, il paroît qu'on ne peut, dans le premier cas, décomposer qu'en deux forces paralleles à deux de ces trois lignes; & que dans le second on ne peut faire aucune décomposition, en forces qui soient paralleles aux deux autres lignes. Nonobstant cette difficulté apparente, la proposition n'est pas moins générale : car on voit, par exemple, que tant que la ligne AB (*Fig.* 105) n'est pas parallele à l'une des deux lignes PR, PQ, on peut toujours décomposer la force représentée par AB, en deux autres AC, AD paralleles à ces deux lignes; mais on voit, en même temps, que plus AB approchera d'être parallele à PQ, & plus la force AD diminuera; ensorte qu'elle deviendra zéro, quand AB sera pa-

rallele à *P Q*. Donc, dans ce cas, on n'eſt pas moins en droit de ſuppoſer une décompoſition en deux forces, mais dont l'une ſoit zéro. Par la même raiſon, on peut, dans ce même cas, ſuppoſer une décompoſition en trois forces paralleles aux trois lignes *P Q*, *P R*, *P S*, mais deux de ces trois forces ſeront zéro.

311. De ce que nous venons de dire, & de ce qui a été dit (307), on doit conclure que *le centre de gravité d'un ſyſtême de corps, reſtera en repos, ſi ayant décompoſé les forces appliquées à chaque partie du ſyſtême, en trois autres forces paralleles à trois lignes perpendiculaires entr'elles, la ſomme des forces ou des quantités de mouvement parallement à chacune des trois lignes, eſt zéro;* en prenant avec des ſignes contraires les forces qui agiſſent dans des ſens oppoſés.

312. Quand toutes ces forces ſont dans un même plan, il eſt évident qu'il ſuffit de décompoſer chaque force en deux autres, paralleles à deux lignes perpendiculaires entr'elles, & menées dans ce même plan; car les forces perpendiculaires au plan étant alors nulles, le mouvement du centre de gravité en vertu de ces forces eſt nul auſſi.

313. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons ſuppoſé que chacun des

corps qui compofe le fyftême, obéiffoit pleinement & librement à la force qui le follicite. Mais les mêmes chofes n'ont pas moins lieu, quand ils font contraints dans leurs mouvements, pourvu que ces obftacles ne viennent point d'une force étrangere au fyftême, c'eft-à-dire, pourvu qu'ils ne foient autres que ceux qui réfultent de la difficulté de fe prêter à ces mouvements, par la maniere dont ils font difpofés entr'eux, ou liés les uns aux autres; c'eft ce que nous démontrerons, après avoir expofé la loi générale de l'équilibre des corps, & la loi générale de leurs mouvements.

Principe général de l'Equilibre des Corps.

314. *Quelles que foient les forces (agiffantes ou réfiftantes appliquees à un corps, à un fyftême de corps, à une machine, &c. & quelles que foient les directions de ces forces; fi l'on conçoit que chacune foit décompofée en trois autres paralleles à trois lignes tirées par tel point qu'on voudra, & perpendiculaires entre elles; il faut, pour que toutes ces forces puiffent fe faire équilibre, que la fomme des forces qui*

* Nous entendons toujours ici & dans la fuite, par la *fomme des forces*, la fomme de celles qui agiffent ou tendent à agir dans un fens, moins la fomme de celles qui agiffent ou tendent à agir dans un fens oppofé.

agissent parallelement à chacune de ces trois lignes, soit zéro.

En effet, nous avons vu (582) que quels que fussent le nombre & la nature des forces, on pouvoit toujours réduire toutes ces forces, à trois, dont les directions fussent paralleles à trois lignes perpendiculaires entre elles. Donc si l'on suppose qu'il y a équilibre entre toutes les forces du systême, il faut qu'il y ait équilibre entre ces trois résultantes, ou que chacune soit zéro. Mais ces trois résultantes étant perpendiculaires entr'elles, ne peuvent ni se nuire, ni se favoriser; donc chacune d'elles doit être zéro. Or chacune d'elles (255) est égale à la somme des forces partielles qui lui seroient paralleles; donc en effet les sommes des forces qui (par la décomposition) agissent parallelement à chacune de trois lignes perpendiculaires entr'elles, doivent être zéro chacune.

315. Si toutes les forces étoient dirigées dans un même plan, la somme des forces paralleles à chacune de deux lignes tirées, dans ce plan, perpendiculairement l'une à l'autre, seroit zéro. Et si toutes les forces étoient paralleles entr'elles, il faudroit que la somme de toutes ces forces fût zéro. Ces deux cas sont évidemment

compris dans la propoſition générale.

316. Remarquons bien, que cette propoſition aura toujours lieu, dans quelque cas d'équilibre que ce ſoit; mais on auroit tort de penſer qu'elle ſuffit pour qu'il y ait équilibre. Les autres conditions néceſſaires pour l'équilibre, varient ſuivant les qualités, ou les diſpoſitions particulieres des parties du ſyſtême ou de la machine que l'on conſidere, nous nous en occuperons dans le volume ſuivant : il ne s'agit ici que des principes généraux.

317. Ce principe eſt général, ſoit que les forces qui ſont appliquées aux différentes parties du ſyſtême, ſoient toutes agiſſantes, ſoit que quelques-unes ſeulement ſoient agiſſantes, & les autres capables ſeulement de réſiſter; telles ſeroient des appuis, des points fixes, des ſurfaces, &c. qui s'oppoſeroient à l'action des autres forces. Car les réſiſtances de ces obſtacles, équivalent à des forces agiſſantes.

Principe général du Mouvement.

318. *De quelque maniere que pluſieurs corps viennent à changer leurs mouvements actuels; ſi l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'inſtant ſuivant, s'il devenoit libre, ſoit décompoſé en deux autres*

dont l'un ſoit celui qu'il aura réellement après le changement ; le ſecond doit être tel que ſi chacun des corps, n'eût eu d'autre mouvement que ce ſecond, tous les corps fuſſent demeurés en équilibre.

Cela eſt évident, puiſque ſi ces ſeconds mouvements n'étoient pas tels qu'il en réſultât l'équilibre dans le ſyſtême, les premiers mouvements compoſants, ne ſeroient pas ceux que les corps auroient après le changement, car ils ſeroient néceſſairement altérés par ceux-là.

Ce principe eſt dû à M. *d'Alembert*. Voyez ſa *Dynamique*.

Conſéquences qui réſultent des deux principes précédents, par rapport au mouvement du Centre de gravité des Corps.

319. Concevons maintenant, que plusieurs corps, ſoit libres, ſoit liés entr'eux de quelque maniere que ce ſoit, (de maniere cependant que rien n'aſſujettiſſe le ſyſtême de tous ces corps) viennent à recevoir des impulſions quelconques auxquelles ils ne puiſſent obéir pleinement, parce qu'ils ſe gênent réciproquement : je dis que

le centre de gravité ſera mû, comme ſi tous ces corps euſſent été libres.

En effet, quel que ſoit le mouvement que chaque partie du ſyſtême prendra, on peut toujours (225) concevoir celui qui lui eſt imprimé, comme compoſé de celui qu'il prendra, & d'un autre. Or (318) en vertu de ces ſeconds mouvements, il doit y avoir équilibre; donc ſi l'on conçoit ces ſeconds mouvements décompoſés, chacun, en trois autres paralleles à trois lignes perpendiculaires entr'elles, la ſomme des forces qui en réſulteront parallelement à chacune de ces lignes, doit être zéro (314). Or le chemin que le centre de gravité tend à décrire en vertu de chacune de ces forces, eſt (305) égal à la ſomme des forces paralleles à chacune de ces lignes, diviſée par la ſomme des corps; donc le chemin qu'il tend à décrire en vertu des changements ſurvenus dans le ſyſtême, par l'action réciproque des parties de ce ſyſtême, eſt zéro; donc le centre de gravité ne participe point à ces changements. Donc il eſt mû comme ſi toutes les parties du ſyſtême obéiſſoient librement & ſans aucune perte, chacune à la force qui la ſollicite.

Donc en général, l'*état du centre de gravité d'un corps ou d'un ſyſtême de corps, ne change* *point par l'action mutuelle des parties de ce corps ou de ce ſyſtême.*

320. Concluons de-là 1°. *que ſi un corps ou un ſyſtême de corps tourne autour de ſon centre de gravité, de quelque maniere que ce ſoit ; ce centre reſtera continuellement dans le même état que ſi le corps ne tournoit pas.*

321. 2°. De ce même principe, & de ce qui a été dit plus haut ſur le mouvement du centre de gravité des corps libres, il ſuit que ſi un corps de figure quelconque, ou un aſſemblage quelconque de corps, reçoit une impulſion ſuivant une direction quelconque *A B* (*Fig.* 106), laquelle ſe tranſmettre tout entiere à ce corps ; le centre de gravité *G* ſera mû ſuivant une ligne *G S* parallele à *A B*, de la même maniere que ſi cette force lui étoit immédiatement appliquée ſuivant cette même direction. Et ſi pluſieurs forces agiſſent à la fois ſur différents points de ce corps, ſon centre de gravité ſera mû, comme ſi toutes ces forces y étoient immédiatement appliquées.

322. Donc ſi au moment où le corps eſt frappé ſuivant la direction *A B*, on appliquoit au centre de gravité *G* une force dirigée en ſens contraire ſuivant *S G*, & égale à la force qui agit ſuivant *A B*, le centre de gravité reſteroit en repos. Néanmoins il eſt

évident que les autres parties de ce corps ne demeureroient point en repos, puiſque ces deux forces, quoique égales, ne ſont pas directement oppoſées. Or le ſeul mouvement que le corps puiſſe avoir, ſon centre de gravité reſtant en repos, eſt évidemment un mouvement de rotation autour de ce centre de gravité.

Donc ſi un corps reçoit une ou pluſieurs impulſions ſuivant des directions qui ne paſſent point par ſon centre de gravité; 1°, ce centre de gravité ſera mû, comme ſi toutes les forces lui étoient immédiatement appliquées, chacune ſuivant une direction parallele à celle qu'elle a. 2°. Les parties de ce corps tourneront autour du centre de gravité, comme elles le feroient en vertu des forces qui ſont actuellement appliquées au corps, ſi ce centre de gravité étoit fixement attaché.

Nous déterminerons ces mouvements de rotation dans le volume ſuivant.

323. Concluons encore que ſi l'état du centre de gravité d'un corps, vient à changer, ce ne peut être que par l'action ou par la réſiſtance de nouvelles forces étrangeres à ce corps; & que par conſéquent ce changement ſe déterminera toujours en cherchant la réſultante qu'auroient toutes ces forces ſi elles étoient appliquées au centre

de gravité, chacune ſuivant une direction parallele à celle qu'elle a actuellement.

Tels ſont les principes généraux du mouvement & de l'équilibre des corps ſolides. Nous réſervons pour le volume ſuivant les applications de ces principes, aux différents cas de mouvement & d'équilibre qui peuvent ſe rencontrer dans l'uſage; & nous paſſons à l'équilibre des fluides.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES,

ET DES CORPS QUI Y SONT PLONGÉS.

324. QUOIQUE nous ignorions juſqu'où va le degré de ténuité des parties des fluides, nous ne pouvons douter, néanmoins, que ces parties ne ſoient matérielles & que par cette raiſon, la loi générale d'équilibre & celle de mouvement que nous avons établies ci-deſſus, ne leur conviennent comme aux corps ſolides. Mais comme cette loi d'équilibre n'eſt pas la ſeule néceſſaire, ainſi que nous l'avons déja dit; il nous faut examiner s'il n'y a point quelque autre loi générale dont cet équilibre peut dépendre.

325. Comme l'équilibre conſiſte dans la deſtruction de toutes les forces, & que

nous ignorons la maniere dont les parties des fluides ſe tranſmettent leurs forces les unes aux autres, ce n'eſt qu'à l'expérience que nous devons avoir recours, pour établir nos premiers principes : nous commencerons donc par expoſer ce que l'on connoît, par expérience, de plus certain ſur cette matiere. Mais auparavant, nous obſerverons qu'il faut diſtinguer deux ſortes de fluides. Les uns dont les parties ſont ou peuvent être regardées comme abſolument dures, & qui, priſes en maſſe, ſont incompreſſibles; c'eſt-à-dire, ne peuvent être réduites à occuper un volume plus petit que celui qu'elles occupent dans leur état naturel; tel eſt l'eau, & telles ſont la plupart des liqueurs. Les autres ſont compoſés de parties compreſſibles & élaſtiques, c'eſt-à-dire, capables d'occuper un eſpace plus petit, lorſqu'on les comprime, & de reprendre leur premier état, lorſque la cauſe qui les réduiſoit à un plus petit volume, ceſſe d'agir; tel eſt l'air. Nous parlerons d'abord des fluides incompreſſibles.

326. Voyons maintenant ce que l'expérience peut nous apprendre ſur l'équilibre des fluides. Soit *ABCD* (*Fig.* 107 & 108) un canal compoſé de trois branches *AB*, *BC*, *CD* d'un diametre égal. Si l'on com-

çoit que dans chacun de ces deux canaux, on verſe de l'eau par la branche *A B*, elle paſſera de la branche *B C* dans la branche *C D*; & lorſqu'on aura ceſſé de verſer, la ſurface de l'eau contenue dans chaque branche ſe trouvera dans une même ligne horiſontale *A D*, quelle que ſoit d'ailleurs l'inclinaiſon de la branche *B C*. C'eſt un fait très-connu, & que nous prenons pour principe. Voici maintenant les conſéquences que ce fait nous fournit.

327. Si par tel point *E* que l'on voudra, on imagine l'horiſontale *E F*, il eſt viſible que le poids de l'eau contenue dans *E B C F* ne contribue en rien à ſoutenir les colonnes *A E* & *D F*; que par conſéquent cet équilibre auroit encore lieu ſi le fluide, contenu dans *E B C F* perdoit tout à coup ſa peſanteur. On doit donc regarder ce fluide comme étant ſeulement un moyen de communication entre la colonne *A E* & la colonne *D F*; enſorte qu'il tranſmet à la colonne *D F* toute la preſſion que la colonne *A E* exerce ſur lui; & réciproquement, il tranſmet à celle-ci, la preſſion que *D F* exerce ſur lui. Il n'eſt pas moins évident que la même choſe auroit lieu, ſi au lieu de la colonne *A E* & de la colonne *D F* on ſubſtituoit deux preſſions de même valeur; on

peut donc, de-là conclure en général, que *si un fluide sans pesanteur est renfermé dans un vase quelconque; & qu'ayant fait une ouverture à ce vase, on applique une pression quelconque à cette ouverture, cette pression se répandra également dans tous les sens.* Puisque l'inclinaison de la branche *BC* (*Fig.* 108.) n'empêche pas que les choses ne se passent de la même maniere que dans la *Fig.* 107.

328. Il est facile de voir maintenant, que non-seulement la pression se transmet également dans tous les sens; mais encore, qu'elle agit perpendiculairement sur chaque point de la surface du vase qui renferme le fluide. Car si la pression qui agit sur la surface n'agissoit point perpendiculairement, il est facile de voir qu'elle ne pourroit être détruite entiérement par la résistance de cette surface; il en résulteroit donc une action sur les parties du fluide même, laquelle ne pouvant manquer de se transmettre dans tous les sens (327), occasionneroit nécessairement du mouvement dans le fluide; il ne seroit donc jamais possible qu'un fluide restât en équilibre dans un vase; ce qui est contraire à l'expérience.

329. Concluons donc de-là que si les parties d'un fluide contenu dans un vase quelconque *ABCD* (*Fig.* 109) ouvert vers

la

la partie *A D*, ſont ſollicitées par des forces quelconques, & demeurent néanmoins en équilibre, ces forces doivent être perpendiculaires à la ſurface *A D*; car s'il y a équilibre, cet équilibre ne ſubſiſtera pas moins ſi l'on applique une enveloppe de même figure que la ſurface *A D*; or nous venons de voir que dans ce cas, les forces qui agiſſent à la ſurface *AD* doivent être perpendiculaires à cette ſurface.

330. Suppoſons donc que les forces qui agiſſent ſur les parties du fluide, ſont la peſanteur même, & alors nous conclurons que la direction de la peſanteur eſt néceſſairement perpendiculaire à la ſurface des eaux tranquilles; & que par conſéquent *les parties d'un même fluide peſant doivent être de niveau pour être en équilibre, quelle que ſoit d'ailleurs la figure du vaſe qui les renferme.*

331. Concevons maintenant, que le vaſe *ABCD* (*Fig.* 110) étant fermé de toutes parts, ſoit rempli d'un fluide ſans peſanteur; & qu'ayant fait une très-petite ouverture en *E* on y applique une preſſion quelconque : il eſt évident que la preſſion qui en réſultera ſur la ſurface plane repréſentée par *BC*, ne dépendra nullement de la quantité de fluide contenue dans ce vaſe, ni de la figure du vaſe, mais que puiſque

la pressiion appliquée en *E* se transmet également dans tous les sens (327) celle de *B C* sera égale à la pression qui agit en un point de l'ouverture *E*, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *B C*.

332. Par la même raison, la pression appliquée en *E* se transmettant dans tous les sens, agira pour écarter le fond supérieur *AD*; & la force avec laquelle elle agira sera, pour chaque point, égale à la pression qui agit en un point quelconque de l'ouverture *E*; ensorte que le fond *AD* est pressé perpendiculairement du dedans au dehors avec une force égale à la pression qui agit en un point quelconque de l'ouverture *E*, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *A D*.

333. Imaginons maintenant que le vase *ABCDEF* (*Fig.* 111), dont la partie *CD* est horisontale, soit rempli d'un fluide pesant. Je dis que la pression qui en résulte sur le fond *C D*, ne dépend nullement de la quantité de fluide contenue dans le vase, mais seulement de la grandeur de *C D*, & de la hauteur de la surface *A F*, au-dessus de la base *C D*.

En effet, concevons l'horisontale *B E*, & imaginons que le fluide contenu dans *BCDE*, devienne tout-à-coup sans pesanteur; il est évident, par ce qu'on vient de dire (321) qu'un filet vertical quelconque *IK* du fluide pesant contenu dans *ABEF*, exerce au point *K*, une pression qui doit se répandre également dans tout le fluide *BCDE*; que cette pression agit également de bas en haut pour repousser l'action de chacun des autres filets qui répondent verticalement aux différents points de *BE*; donc le filet *IK* fait, lui seul, équilibre à tous les autres filets de la masse *ABEF*; donc la masse *BCDE* étant toujours supposée sans pesanteur, il ne résulte d'autre pression au fond *CD*, que celle du filet *IK*, laquelle se transmettant également à tous les points de *CD*, y occasionne une pression égale à celle qui s'exerce au point *K*, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *CD*. Donc si on imagine (*Fig.* 112) un fluide pesant contenu dans *ACDF*, divisé en tranches horisontales; la tranche supérieure ne communique pas au fond *CD* d'autre action que celle que communiqueroit le filet *ab*; & la même chose ayant lieu pour chaque tranche, le fond *CD* n'est donc pressé que comme il le seroit par la somme des filets *ab*, *bc*, *cd*, &c; & puisque cette pression se transmet également à tous les points de *CD* (elle est donc égale à *CD* multipliée par la ſomme des preſſions que les filets *a b*, *b c*, *c d*, ſont capables d'exercer ſur un même point.

Donc 1°. *ſi le fluide* A C D F *eſt homogène, c'eſt-à-dire, compoſé de parties de même nature, de même peſantenr, &c. la preſſion ſur le fond* CD, *ſera exprimée par* CD × ag; *c'eſt-à-dire, ſera meſurée par le poids du priſme ou du cylindre qui auroit* C D *pour baſe &* a g *pour hauteur.*

2°. *Si le fluide eſt compoſé de tranches de différentes denſités, la preſſion ſur* C D *ſera exprimée par* C D *multipliée par la ſomme des peſanteurs ſpécifiques de chaque tranche*; je dis par la ſomme des peſanteurs ſpécifiques * & non par la ſomme des poids; car ce n'eſt point de la quantité de fluide contenue dans chaque tranche, que dépend la preſſion, mais ſeulement de la peſanteur propre d'un filet.

Il faut bien obſerver que, ce que nous diſons ici, a lieu, ſoit que le vaſe aille en s'élargiſſant par en haut, ſoit qu'il aille en ſe rétréciſſant, comme dans la *Fig.* 113.

* On doit ſe rappeller ici, ce que nous avons déja dit ailleurs, que la peſanteur ſpécifique d'une matiere quelconque, eſt la peſanteur abſolue d'un volume connu de cette matiere, de celui que l'on prend pour unité dans la meſure de la capacité du corps.

La pression que le fluide renfermé dans *ACDF* exerce sur *CD*, est la même que celle qu'exerceroit le cylindre *ECDG* s'il étoit rempli de fluide, à même hauteur.

334. De ce qui précede, il est facile de conclure que si deux fluides *NHCBFL* & *EFLM* (*Fig.* 114) homogènes chacun, mais de différente densité l'un à l'égard de l'autre, se communiquent en *FL* dans un vase quelconque, ils ne peuvent être en équilibre qu'autant que leurs hauteurs *EF*, *IK*, au dessus du plan horisontal *FL* de séparation, seront en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques. En effet, le fluide *LFBCGO* pouvant être de lui-même en équilibre (330), il faut que *NHGO* puisse faire équilibre à *EFLM*; il faut donc que la pression que *NHGO* exerce de bas en haut sur *FL* soit égale à celle que *EFLM* exerce de haut en bas sur *FL*. Or (333) la pression que *NHGO* exerce sur *FL*, est égale au poids d'un prisme ou d'un cylindre de ce fluide, qui auroit *IK* pour hauteur, & *FL* pour base; d'ailleurs ce poids est égal à la pesanteur spécifique multipliée par le volume; donc si on nomme *P* cette pesanteur spécifique, il aura pour expression $P \times IK \times FL$. Par la même raison, si l'on nomme *p* la pesanteur spécifique du fluide *EFLM*, on aura

$p \times EF \times FL$ pour la pesanteur absolue de ce fluide, ou pour la pression qu'il exerce sur FL. Il faudra donc que $P \times IK \times FL = p \times EF \times FL$, ou que $P \times IK = p \times EF$; donc $P : p :: EF : IK$; les hauteurs EF, IK doivent donc être en raison inverse des pesanteurs spécifiques. Ainsi, par exemple, si $LFBCHN$ étoit du mercure, & $EFLM$ de l'eau; comme le mercure est 14 fois aussi pesant que l'eau, il faudroit que la hauteur IK fût 14 fois plus petite que EF; c'est-à-dire, fût la 14e partie de EF, quelque figure qu'ait d'ailleurs le vase.

335. Par ce que nous avons dit jusqu'ici, on voit donc que la maniere d'agir des fluides est bien différente de celle des solides. Il n'y a, à proprement parler, (*Fig.* 112) que la partie $ECDG$ qui exerce son action sur la surface CD; & (*Fig.* 113) la surface CD est pressée par $ACDF$ comme elle le seroit par tout le poids du fluide contenu dans le cylindre $ECDG$; au lieu que si c'étoit un solide, si, par exemple, le fluide $ACDF$ venoit à se glacer, le fond supporteroit une pression égale au poids de la totalité $ACDF$ (*Fig.* 112) & au poids de $ACDF$ seulement (*Fig.* 113).

336. Mais il faut bien distinguer ici, entre la pression que le fond CD éprouve

de la part du fluide, & celle que l'on auroit à soutenir si l'on vouloit porter le vase. Il est sûr que si le fond *CD* venoit à se détacher, il ne faudroit employer autre chose pour l'arrêter (*Fig.* 112) qu'un effort égal au poids du cylindre *ECDG*; mais si l'on vouloit porter le vase, il faudroit employer un effort égal au poids de l'eau contenue dans tout le vase; c'est ce qu'on va voir encore plus généralement, après que nous aurons donné la maniere d'évaluer la pression sur les surfaces planes obliques, & sur les surfaces courbes.

337. Soit donc *ACDF* (*Fig.* 115 & 116) la coupe verticale d'un vase terminé par des surfaces planes ou courbes inclinées, comme on le voudra, à l'horison. Si l'on conçoit une tranche infiniment mince *abdc*, on peut faire abstraction de la pesanteur de cette tranche; & considérer cette tranche comme pressée, par le fluide supérieur. Or cette pression se répand également à tous les points de la tranche, & agit perpendiculairement & également sur chacun des points des faces *ac*, *bd*. Donc puisque (333) cette force est celle que le filet seul *IK* feroit naître, la pression qui s'exerce perpendiculairement sur *bd* sera exprimée par $bd \times IK$, & il est évident

qu'il en ſera de même ſi au lieu de regarder *b d* comme une petite ligne droite, on la regarde comme une petite ſurface.

338. C'eſt donc à dire, en général, que *la preſſion qui s'exerce perpendiculairement ſur une ſurface infiniment petite quelconque, par un fluide peſant & homogène, s'eſtime par le produit de cette ſurface, multipliée par ſa diſtance à la ligne de niveau* A F.

339. Donc la preſſion totale qui s'exercera ſur une ſurface plane quelconque ſituée comme on le voudra, eſt égale à la ſomme des produits des parties infiniment petites de cette ſurface, multipliées chacune par ſa diſtance au plan de niveau, ou à la ſurface ſupérieure du fluide. Mais par la nature du centre de gravité, la ſomme de ces produits eſt égale au produit de la ſurface totale, multipliée par la diſtance de ſon centre de gravité au même plan horiſontal; donc *la preſſion qu'un fluide peſant exerce contre une ſurface plane oblique, a pour meſure le produit de cette ſurface par la diſtance de ſon centre de gravité au plan de niveau.*

340. Comme les preſſions qui s'exercent ſur chaque point d'une même ſurface plane, ſont perpendiculaires à la ſurface & par conſéquent paralleles entr'elles, la réſul-

tante ou la pression totale doit (255) leur être parallele; or, comme nous venons de déterminer sa valeur, ainsi que celle de chacune des pressions partielles, il sera aisé, par ce qui a été dit (255), de déterminer quand on en aura besoin, par où passe cette résultante, qui, comme il est aisé de le voir, ne doit point passer par le centre de gravité *G* de cette surface (*Fig.* 117), mais à quelque distance au dessous. Il n'y a que dans le cas où la surface est infiniment petite qu'on peut supposer que la pression totale passe par le centre de gravité de cette surface inclinée.

341. Voyons maintenant, ce qui résulte de toutes ces pressions, dans le sens vertical, & dans le sens horisontal.

Quelle que soit la figure d'un corps, on peut toujours concevoir ce corps, comme l'assemblage d'une infinité de tranches paralleles entr'elles, & se représenter la surface du contour de chaque tranche, comme l'assemblage de plusieurs trapèzes dont le nombre est infini, quand la surface est courbe. Ainsi, pour évaluer ce qui résulte de la pression qu'un fluide exerce, soit sur les parois intérieures d'un vase, soit sur la surface extérieure d'un solide qu'on auroit plongé dans ce fluide, il faut évaluer ce qui résulte de la pression sur la surface d'un trapèze d'une hauteur infiniment petite.

Concevons donc (*Fig.* 118) un trapèze *ABCD* dont les deux côtés paralleles soient *AB* & *CD*, & dont la hauteur soit infiniment petite à l'égard de ces côtés *AB* & *CD*. Qu'au centre de gravité *G* de ce trapèze, on ait appliqué perpendiculairement à son plan, une force *P* dont la valeur soit exprimée par le produit de la surface de ce trapèze, multipliée par la distance de son centre de gravité à un plan horisontal *XZ*.

Pour déterminer l'effet de cette force, tant dans le sens horisontal, que dans le sens vertical, je conçois par la ligne *CD* un plan vertical *CDFE*, & par la ligne *AB* que je suppose horisontale, j'imagine le plan horisontal *AFEB*. Et ayant mené les lignes verticales *CE*, *DF* qui rencontrent ce plan, en *E* & *F*, je mene *BE* & *AF*; enfin, par la direction *GP* de la force *P*, je conçois un plan *KIH* auquel *CD* soit perpendiculaire, & dont *HGK* & *HI* sont les interfections avec les deux plans *ABCD*, *FECD* : ce plan sera perpendiculaire aux plans *ABCD*, *FECD* (*Géom.* 184), puisque *CD* est leur interfection commune : enfin du point *K* pris sur *AB* & *HK*, je mene *KI* perpendiculaire au plan *FECD*; cette ligne ne peut manquer d'être perpendiculaire à HI.

Cela poſé, je décompoſe la force P en deux autres qui ſoient dans le plan KIH prolongé, & donc l'une GL ſois horiſontale ou perpendiculaire au plan $FECD$, & l'autre GM, ſoit verticale. J'aurai donc en nommant L & M ces deux forces, & formant le parallélogramme $GMNL$ ſur la ligne GN priſe arbitrairement pour diagonale, j'aurai (225) $P : L : M :: GN : GL : GM$, ou $:: GN : GL : LN$. Mais comme le triangle GLN a ſes côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle KIH, ces deux triangles ſont ſemblables (*Géom.* 111), & l'on a $GN : GL : LN :: HK : HI : IK$; donc $P : L : M :: HK : HI : IK$. Multiplions ces trois derniers termes par $\frac{AB+CD}{2} \times GG'$, ce qui ne changera point le rapport; & nous aurons $P : L : M :: HK \times \frac{AB+CD}{2} \times GG' : HI \times \frac{AB+CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB+CD}{2} \times GG'$.

Obſervons maintenant 1°. que $HK \times \frac{AB+CD}{2}$ eſt la ſurface du trapèze $ABCD$. 2°. Que puiſque CE & DF ſont paralleles, & qu'il en eſt de même de CD & EF, on a $CD = FE$; donc $IK \times \frac{AB+CD}{2}$ eſt la même chose que $IK \times \frac{AB+EF}{2}$, & par conséquent est la surfaee du trapèze $AFEB$. 3°. Et comme on suppose que la hauteur du trapèze $ABCD$ est infiniment petite à l'égard des côtés AB & CD, EF qui est égale à CD, peut être prise à la place de AB, & de CD, en sorte que $HI \times \frac{AB+CD}{2}$ se réduit à $HI \times EF$ qui est la surface du rectangle $BCDF$. On a donc $P : L : M :: ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. Mais nous avons supposé que la force P étoit exprimée par $ABCD \times GG'$; donc la force L est exprimée par $ECDF \times GG'$; & la force M est exprimée par $AFEB \times GG'$.

Comme le triangle n'est autre chose qu'un trapèze dont un des côtés paralleles est zéro, la même chose a donc lieu pour le triangle.

Concevons maintenant, que des angles A, D, C, B, on ait mené des perpendiculaires sur le plan XZ. On peut se représenter ces perpendiculaires comme les arêtes d'un prisme tronqué dont la base horisontale seroit égale à $AFEB$, & dont la base inclinée est $ABCD$. Or comme AB & CD sont supposées infiniment proches, la solidité de ce prisme tronqué n'est pas censée différer de celle du prisme qui auroit la même bafe, & qui auroit GG' pour hauteur; mais cette derniere auroit pour expreffion $AFEB \times GG'$, qui eft précifément celle que nous venons de trouver pour la force verticale M; donc cette force a auffi pour expreffion la folidité du prifme tronqué qui a pour bafe inclinée $ABCD$, & pour bafe horifontale la projection de $ABCD$ fur le plan horifontal XZ.

342. Imaginons, actuellement, un folide quelconque, coupé en une infinité de tranches horifontales, telles que $ABDE\,abde$ (*Fig.* 119), & que perpendiculairement au centre de gravité de la furface de chaque trapèze dont on peut imaginer que la furface du contour de cette tranche eft compofée, on ait appliqué des forces repréfentées chacune par le produit de la furface du trapèze correfpondant, multipliée par la diftance de fon centre de gravité à un plan horifontal XZ. Ces forces feront les preffions qu'un fluide pefant exerceroit fur la furface intérieure de la tranche $ABDE\,abde$ d'un vafe dans lequel il feroit contenu; elles feroient auffi les preffions qu'un pareil fluide exerceroit fur la furface extérieure d'un folide qui y feroit plongé. Or nous venons de voir que fi l'on décompofoit ces forces en deux autres, l'une verticale, & l'autre

horisontale ; chaque force verticale seroit représentée par le prisme tronqué qui a pour base dans le plan horisontal XZ, la projection du trapèze sur ce plan, & qui a pour base inclinée ce trapèze même. Donc la somme des forces verticales, ou la force verticale unique qui en résulte, sera représentée par la somme de tous ces prismes tronqués; & comme la même chose doit s'entendre de chaque tranche horisontale; il faut donc en conclure 1°. que *si un vase de figure quelconque* ACDF (Fig. 112) *est rempli de fluide jusqu'à la ligne quelconque* AF, *il ne résulte de toutes les pressions que le fluide exerce sur chacun de ses points, d'autre force verticale, qu'une force représentée par la solidité ou plutôt par le poids du volume que le fluide occupe.*

2°. Que *si un corps tel que* AEDBM (Fig. 120), *dont* AIBF *est la plus grande coupe horisontale est plongé dans un fluide à une profondeur quelconque, & que l'on fasse abstraction de la pression qui s'exerceroit sur la partie supérieure* AMB ; *l'effort vertical du fluide pour le soulever, est égal au poids du volume de fluide qui seroit compris entre le niveau* XZ, *la surface* AIBFE, *& la surface convexe formée par les perpendiculaires abaissées de tous les points du contour* AIBF, *sur le plan* XZ.

Si l'on considere ensuite la pression qui s'exerce ſur la ſurface ſupérieure à la plus grande coupe horiſontale, on voit par la même raiſon, qu'il réſulteroit, des preſſions du fluide ſur cette ſurface, qu'il en réſulteroit, dis-je, dans le ſens vertical, & pour pouſſer le corps en bas, un effort égal au poids du volume du fluide qui ſeroit compris entre cette même ſurface, celle $A' F' B' I'$ de ſa projection, & celle que forment les perpendiculaires menées de tous les points du contour $AIBF$. Donc ſi du premier effort vertical, on retranche le ſecond, on voit que le corps eſt pouſſé verticalement de bas en haut, par un effort égal au poids du volume de fluide dont il occupe la place.

343. Concluons donc généralement, que *ſi un corps eſt plongé dans un fluide quelconque, il y perd une partie de ſon poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.*

344. Il nous reſte maintenant deux choſes à examiner; la premiere eſt de ſavoir par où paſſe l'effort vertical réſultant des preſſions du fluide : la ſeconde, ce que deviennent les forces horiſontales.

Quant à la premiere, il eſt facile de voir que cet effort vertical doit paſſer par le centre de gravité du volume de fluide qui a été déplacé. En effet, ſi on conçoit ce volume décompoſé en une infinité de filets verticaux, l'effort que le fluide exerce pour pouſſer verticalement chaque filet, eſt exprimé (342) par le poids d'un volume de fluide égal à ce filet. Donc pour avoir la diſtance de la réſultante, à un plan vertical quelconque, il faudroit multiplier la maſſe de chaque filet conſidérée comme de même nature que le fluide, par la diſtance à ce plan, & diviſer par la ſomme des filets; or c'eſt préciſément ce qu'il faut faire pour trouver la diſtance du centre de gravité du volume déplacé; donc en général *la pouſſée verticale d'un fluide ſur un corps qu'on plonge, paſſe toujours par le centre de gravité du volume de fluide déplacé.*

345. Voyons, maintenant, ce que deviennent les forces horiſontales dont nous avons parlé ci-deſſus.

Si l'on ſe repréſente toujours la tranche ſolide de la *Fig.* 119, & que par les côtés *ab*, *bc*, &c. de la ſection inférieure on conçoive des plans verticaux terminés par la ſection ſupérieure; ces plans formeront le contour d'un priſme qui aura pour hauteur celle de la tranche; & chaque face de ce priſme exprimera (341) par l'étendue de ſa ſurface, la valeur de la force horiſontale qui lui eſt perpendiculaire. Mais comme toutes ces faces ſont de même hauteur, leurs

leurs ſurfaces ſont dans la raiſon de leurs baſes ab, bc, &c. dont les forces horiſontales ſont entr'elles dans la raiſon des côtés ab, bc, &c. D'ailleurs à quelque endroit de ces faces qu'elles ſoient appliquées, comme ces faces ſont d'une hauteur infiniment petite, on peut regarder ces forces horiſontales, comme appliquées, toutes, dans le plan horiſontal $a\ b\ c\ d\ e\ f$, chacune perpendiculairement ſur le milieu du côté qui ſert de baſe à la face correſpondante du priſme dont il s'agit. Je dis ſur le milieu, parce qu'il eſt aiſé de voir que la réſultante des preſſions qui s'exercent ſur la ſurface de l'un quelconque des trapèzes qui forment la ſurface de la tranche, doit paſſer par l'un des points de la ligne qui joint les milieux des deux côtés paralleles; & que par conſéquent la force horiſontale qui en réſulte, doit rencontrer la ligne qui joint les milieux de deux côtés oppoſés de la face correſpondante du priſme. La queſtion eſt donc réduite à ſavoir ce qui doit arriver à un polygone quelconque (*Fig.* 122) lorſque chacun de ſes côtés eſt tiré ou pouſſé par une force appliquée perpendiculairement à ſon milieu, & repréſentée pour ſa valeur, par ce côté. Nous allons voir qu'elles ſe détruiſent mutuellement.

Ne confidérons d'abord que deux forces P & Q (*Fig.* 121) appliquées perpendiculairement fur les milieux des deux côtés AB, AC du triangle ABC, & repréfentées par ces côtés. Il eft clair que leur réfultante paffera par leur point de concours F, qui dans le cas préfent eft le centre du cercle qui pafferoit par les trois points A, B, C (*Géom.* 54). Je dis d'ailleurs, qu'elle doit paffer par le milieu du côté BC, auquel elle fera par conféquent perpendiculaire ; & qu'elle fera repréfentée par ce côté BC.

En effet, fi l'on décompofe la force P en deux autres, l'une De parallele, & l'autre Dh perpendiculaire au côté BC, en formant le parallélogramme $Degh$; on aura en nommant e & h ces deux forces, $P : e : h :: Dg : De : Dh :: Dg : De : ge$; or en abaiffant la perpendiculaire AO, le triangle geD eft femblable au triangle AOB, parce qu'ils ont les côtés perpendiculaires. On a donc $Dg : De : ge :: AB : AO : BO$: donc $P : e : h :: AB : AO : BO$. Or par la fuppofition, la valeur de la force P eft repréfentée par AB : dont celle de e l'eft par AO; & celle de h l'eft par BO.

Si l'on décompofe pareillement la force Q en deux autres, l'une Im parallele, & l'autre Ik perpendiculaire au côté BC, on prouvera de même, que m eſt repréſentée par AO, & k par CO. Les deux forces m & e ſont donc égales, puiſqu'elles ſont repréſentées par la même ligne AO. D'ailleurs elles agiſſent en ſens contraires, & ſuivant une même ligne DI parallele à BC, puiſque D & I ſont les milieux de AB, AC; donc elles ſe détruiſent. La réſultante doit donc être la même que celle des deux forces h & k; & comme celles-ci ſont paralleles, puiſqu'elles ſont perpendiculaires à BC, leur réſultante doit être égale à leur ſomme, & perpendiculaire à BC. Donc 1°. elle eſt repréſentée par $BO + OC$; c'eſt-à-dire, par BC. 2°. Etant perpendiculaire à BC, & devant d'ailleurs paſſer, ainſi que nous venons de le dire, par le centre F du cercle circonſcrit à ABC, elle paſſe donc par le milieu de BC.

Cela poſé, (*Fig.* 122) la réſultante V des deux forces P & T ſera donc perpendiculaire ſur le milieu de BE, & repréſentée par BE. Par la même raiſon, la réſultante X des deux forces V & S, & par conſéquent celle des trois forces P, T, S, ſera perpendiculaire ſur le milieu de BD, & repréſentée par BD. Enfin la réſultante Y des deux forces X & Q, & par conſéquent, celle des quatre forces P, T, S, Q, ſera perpendiculaire ſur le milieu de DC, & repréſentée par DC; elle ſera donc égale & directement oppoſée à la force R; donc toutes ces forces ſe détruiront.

On voit que le raiſonnement eſt le même quels que ſoient le nombre & la grandeur des côtés.

Donc en général, *les efforts qui réſultent dans le ſens horiſontal, de la preſſion qu'un fluide peſant exerce perpendiculairement ſur la ſurface d'un corps qui y eſt plongé, ſe détruiſent mutuellement.*

346. Tels ſont les principes qui ſervent à déterminer les effets de la preſſion des fluides ſur les vaſes qui les renferment, & ſur les corps qu'on y plonge. Voyons maintenant quelques uſages de ces principes.

Puiſque les efforts que le fluide fait dans le ſens horiſontal, ſe détruiſent mutuellement, il ne faut donc pour conſerver un corps dans la poſition qu'on lui aura donnée dans un fluide, il ne faut, dis-je, autre choſe, que détruire l'effort vertical de la preſſion; ce qui exige deux choſes, la premiere, qu'on oppoſe de haut en bas un effort qui ſoit égal à celui que la preſſion exerce de bas en haut : la ſeconde, que cet effort ſoit en ligne droite avec celui de la pouſſée verticale du fluide. Or la pouſſée verticale du fluide, est équivalente au poids du volume de fluide déplacé ; donc *si le volume de fluide déplacé, pese plus que le corps plongé, le corps surnagera & s'élévera jusqu'à ce que le volume de fluide correspondant à la partie submergée, pese autant que le corps entier.*

347. Donc, si lorsqu'un corps surnage, on vient à ajouter ou à ôter à son poids, un poids quelconque, il s'enfoncera ou s'élévera jusqu'à ce que l'augmentation ou la diminution du poids du volume du fluide déplacé, soit devenue égale à ce nouveau poids. Si ce poids qu'on ajoute, ou qu'on retranche, est petit, eu égard à celui du volume de fluide actuellement déplacé, la quantité IK (*Fig.* 123) dont s'abaissera ou s'élévera la coupe AB, sera d'autant plus petite que ce poids sera plus petit, & qu'en même temps la coupe AB sera plus grande. On pourra donc, lorsque ce poids sera petit, & que la coupe AB sera plus grande, regarder AB & ab, comme égales, & évaluer le volume nouvellement déplacé, par la surface représentée par AB, multipliée par IK ; c'est-à-dire, par $AB \times IK$. Donc si p est le poids d'un pied cube de fluide, $p \times AB \times IK$ sera le poids de ce volume, $AB \times IK$ étant évalué en pieds cubes. Ainsi,

ſi P eſt le poids qu'on ajoute, ou qu'on retranche, on aura $p \times AB \times IK = P$; d'où l'on tire $IK = \frac{P}{p \times AB}$; c'eſt-à-dire, pour le navire, par exemple, que *pour ſavoir combien une certaine augmentation faite à la charge, fait enfoncer le navire*, il faut diviſer la valeur P de cette augmentation, par la ſurface de la coupe faite à fleur d'eau, eſtimée en pieds quarrés, & multipliée par le poids d'un pied cube d'eau.

Lorſqu'on *ſouffle* un vaiſſeau, on augmente le volume de la carène d'une quantité que nous avons enſeigné (123) à évaluer. C'eſt donc comme ſi on diminuoit la charge, d'une quantité égale au poids d'un volume d'eau égal à l'augmentation qu'on a faite au volume, moins le poids des matieres qui compoſent le ſoufflage : on peut donc déterminer facilement de combien il plongera moins.

348. Le poids d'un corps reſtant le même, on peut étendre ſon volume à volonté, il n'y a donc pas de matiere ſi peſante qu'on ne puiſſe faire ſurnager.

349. Puiſque, lorſqu'on diminue le poids d'un corps ſans rien changer à ſon volume, il doit s'élever avec un effort qui ne peut être contrebalancé que par un poids

égal à celui qu'on a ôté; il s'ensuit donc, qu'on peut employer utilement la poussée verticale de l'eau pour élever des fardeaux; par exemple, pour tirer des batiments, du fond de la mer ou des rivieres, en les attachant à d'autres bâtiments que l'on aura d'abord chargés de corps pesants, ou d'eau, & qu'on vuide ensuite.

350. En général, si P est la pesanteur spécifique d'un corps qui surnage, ou ce que peseroit un pied cube, par exemple, de ce corps, s'il étoit d'une matiere uniforme; V son volume; p la pesanteur spécifique du fluide; u le volume de la partie submergée: le poids de ce corps sera $P \times V$ ou $P\,V$; celui du volume de fluide sera $p\,u$; on aura donc $P\,V = p\,u$, équation qui donne $u = \frac{P\,V}{p}$; d'où l'on voit que le poids $P\,V$ du corps restant le même, la partie submergée sera toujours d'autant plus petite que la pesanteur spécifique du fluide sera plus grande.

Cette même équation donne $V : u :: p : P$; c'est-à-dire, que le volume du corps, & celui de la partie submergée, sont en raison inverse de la pesanteur spécifique du corps, & de celle du fluide.

351. Si le corps pese plus qu'un pareil volume de fluide; alors il doit s'enfoncer,

& ne peut être retenu que par une force égale à l'excès de ſon poids ſur celui d'un pareil volume de fluide. Or ſi nous repréſentons toujours par p & P les peſanteurs ſpécifiques du fluide & du corps; & par V, le volume du corps, nous aurons $PV - pV$ pour l'excès du poids du corps ſur celui d'un pareil volume de fluide. Donc ſi on conçoit que ce corps ſoit retenu, à l'aide d'un fil, au fléau d'une balance, & que P' ſoit le poids avec lequel il peut être en équilibre; on aura $P' = PV - pV$, d'où l'on tire $\frac{p}{P} = \frac{PV - P'}{PV}$. Or PV eſt le poids du corps dans l'air, & P' ſon poids lorſqu'il eſt plongé dans le fluide; donc *connoiſſant le poids d'un corps dans l'air, & ſon poids dans un fluide, on aura aiſément le rapport des peſanteurs ſpécifiques de ce dernier fluide & du corps, en diviſant la différence de ces deux poids, par le poids du corps dans l'air.* Par exemple, ſi un corps peſe 6 onces dans l'air & 5 onces dans l'eau, je diviſe la différence 1, par 6, & le quotient $\frac{1}{6}$, me fait voir que la peſanteur ſpécifique du corps, eſt à celle du fluide, comme 6 eſt à 1.

L'air, comme fluide peſant, diminue auſſi une partie du poids des corps; en ſorte que le poids qu'ils ont dans l'air, n'eſt pas leur poids réel. Mais comme l'air eſt un fluide fort rare, & dont la peſanteur ſpécifique n'eſt qu'environ la 850e partie de celle de l'eau, on peut ſe diſpenſer d'avoir égard à la diminution qu'il occaſionne.

352. Si l'on conçoit qu'on plonge le même corps que ci-deſſus, dans un autre fluide dont la peſanteur ſpécifique ſoit p', & que p'' ſoit le poids avec lequel il peut alors être en équilibre, de même qu'on a eu $P' = PV - pV$, on aura $P'' = PV - p'V$; or ces deux équations donnent $pV = PV - P'$; & $p'V = PV - P''$; donc diviſant cette derniere, par la précédente; on aura $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$; d'où connoiſſant le poids PV d'un corps dans l'air, ſon poids p'' dans un fluide, & ſon poids P' dans un autre fluide, on déterminera facilement $\frac{p'}{p}$, c'eſt-à-dire, le rapport des peſanteurs ſpécifiques des deux fluides.

353. Suivant ce que nous venons de voir, la peſanteur ſpécifique multipliée par le volume, donne le poids d'un corps. Mais la denſité, multipliée par le volume, donne la maſſe (191), qui (202) eſt proportionnelle au poids. Donc la peſanteur ſpécifique multipliée par le volume, eſt proportionnelle

à la densité multipliée par le volume ; donc *la pesanteur spécifique des corps est proportionnelle à leur densité.*

354. Revenons aux corps qui surnagent. Pour qu'un corps puisse rester en équilibre sur un fluide, il faut, ainsi que nous l'avons vu (346), que son poids total soit égal à celui du volume de fluide déplacé. Mais cette condition ne suffit pas. *Il faut* encore, *que la ligne qui passe par le centre de gravité du corps plongé, & par le centre de gravité du volume de la partie submergée soit verticale.* Car la pesanteur du corps, & la poussée du fluide s'exerçant chacune suivant une ligne verticale, dont la premiere passe par le centre de gravité du corps, & la seconde, par le centre de gravité du volume déplacé, ne peuvent être directement opposées, (comme il faut qu'elles le soient pour l'équilibre) qu'autant que ces deux verticales se confondront.

355. Ainsi pour déterminer si un corps *ACEDB* (*Fig.* 124) d'une forme & d'une matiere connue peut demeurer en équilibre sur un fluide, dans une position qu'on a dessein de lui donner ; il faut mener un plan horisontal *CD* qui sépare une partie *CED* dont le volume soit au volume total *AEB*, comme la pesanteur spécifique du corps est

à celle du fluide, & ayant déterminé le centre de gravité G de AEB, & celui G' de CED, si la ligne GG' eſt perpendiculaire au plan CD, l'équilibre aura lieu.

356. Nous ſuppoſons dans ce que nous diſons ici, que le corps AEB eſt homogène; c'eſt-à-dire, que la matiere qui compoſe ſon poids eſt toute de même eſpece, & qu'elle eſt uniformément répandue dans tout l'eſpace qu'occupe le volume total. S'il n'en étoit pas ainſi, on commenceroit par calculer la valeur d'un volume de fluide, égal en poids, au poids total de AEB, & l'on feroit CED égal à ce volume, CD étant horiſontale : ce qui ſe réduit à une queſtion de pure géométrie, dont les principes donnés juſqu'ici, peuvent fournir la ſolution.

357. C'eſt encore une autre queſtion que l'on peut réſoudre à l'aide des mêmes principes, que celle de déterminer les différentes poſitions dans leſquelles un corps peut reſter en équilibre ſur un fluide; mais comme nous n'avons aucune application eſſentielle à faire ni de l'une ni de l'autre de ces deux queſtions, nous ne nous en occuperons pas. Voici quelque choſe qui nous importe plus.

358. Le corps CED (*Fig.* 125) étant actuellement en équilibre ſur un fluide dont

AB eſt la ſurface : G étant le centre de gravité de ce corps ; G' celui de la partie ſubmergée AEB ; ſi l'on conçoit que l'on incline infiniment peu, le corps, enſorte que aEb devienne la partie ſubmergée, dont G'' ſoit le centre de gravité. Ce corps reviendra à ſa premiere poſition, ſi la verticale $G''M$ qui convient à cette ſeconde poſition rencontre la verticale $G'M$ qui convient à la premiere, au-deſſus du centre de gravité G du corps. Au contraire, il verſera tout-à-fait, ſi le point M eſt au-deſſous de G, comme en M'.

En effet, la direction $G''M$ qu'aura alors la pouſſée de l'eau, & qui ſera verticale, ne paſſant point par le centre de gravité G, tend (322) à imprimer au corps deux mouvements, l'un pour élever le centre de gravité, & qui eſt détruit par le poids du corps ; l'autre qui tend à le faire tourner autour du centre de gravité G. Or il eſt facile de voir que ſi le point G eſt au-deſſus de M, ce mouvement de rotation autour de G, tend à ſe faire de A vers C, & par conſéquent à ramener G' dans la verticale actuelle $G''M$. Au contraire, ſi M eſt au deſſous de G, comme en M' ; le mouvement de rotation autour de G, tend à ſe faire de C vers A, & par conſéquent ne peut qu'éloigner G de $G''M'$; c'eſt-à-dire, tend à faire renverſer le corps.

Donc pour que le corps puiſſe revenir à ſa ſituation primitive, il faut que $G'M$ ſoit plus grande que $G'G$.

Le point M eſt ce que M. Bouguer a nommé le *Métacentre*; parce que c'eſt la limite de la hauteur à laquelle peut être placé le centre de gravité G, pour que le corps flottant ne ſoit pas renverſé par une petite inclinaiſon; car pour peu que G fût au-deſſus du point M, le corps ſe renverſeroit.

Comme la détermination du métacentre M importe beaucoup dans la conſtruction des vaiſſeaux, nous allons nous en occuper.

359. Suppoſons donc que AEB (*Fig.* 126 *& ſuiv.*) repréſente la coupe d'un navire, faite par un plan perpendiculaire à la quille, & paſſant par le centre de gravité G du navire. Ce plan paſſera auſſi par le centre de gravité G' de la partie ſubmergé AEB (354).

Concevons que par quelque cauſe que ce ſoit, le navire prenne une ſituation infiniment peu inclinée à la premiere; & qu'alors ab ſoit le plan de flottaiſon, & G'' le centre de gravité de la partie aEb qui ſera ſubmergée alors. Si l'on mene $G''M$ perpendiculaire à ab, cette ligne ſera la direction ſuivant laquelle s'exercera la pouſſée de l'eau, lors de l'inclinaiſon.

Pour déterminer le point M où $G'' M$ coupe la ligne $G G'$ qui eſt verticale dans la premiere ſituation, il faut déterminer la poſition de G'', tant à l'égard de AB, qu'à l'égard de la verticale $G G'$.

Dans cette vue, nous imaginerons le navire coupé en un grand nombre de tranches verticales, par des plans perpendiculaires à la quille; & ſuppoſant que MRN (*Fig.* 127) eſt une de ces tranches; g le centre de gravité de ſa partie ſubmergée avant l'inclinaiſon; g' celui de ſa partie ſubmergée lors de l'inclinaiſon, nous allons chercher, pour chaque tranche, le déplacement $g g'$ de ce centre de gravité g, d'où nous conclurons celui du centre de gravité G' (*Fig.* 126).

Obſervons donc d'abord, que le volume MRN (*Fig.* 127) eſt égal au volume mRn; parce que le volume d'eau qui correſpond à chacun, doit (346) ſoutenir, dans chaque cas, la même partie du poids total du navire. Donc, ſi de chacun de ces deux volumes on retranche le volume commun MRn, les deux ſecteurs MOn, NOn (que l'on doit regarder comme deux triangles rectilignes, à cauſe que l'inclinaiſon eſt infiniment petite) feront égaux; & le point d'interfection O pourra être cenfé au milieu de MN.

Soient, maintenant, h, h', g'', les centres de gravité des efpaces NOn, MOm, MRn. Menons fur MN, les perpendiculaires hk, $h'k'$, $g''l'$, $g'q$; & fur la verticale gO, la perpendiculaire $g''l$. Pour avoir la diftance $g'q$ du centre de gravité g' de mRn, à la ligne MN, il faut prendre le moment de mRn par rapport à cette ligne, & l'égaler (263) à la différence des moments de fes parties MRn, MOm qui font fituées de différents côtés de MN. On aura donc $mRn \times g'q$ ou $MRN \times g'q = MRn \times g''l' - MOm \times h'k'$. Mais puifque g eft le centre commun de gravité des deux efpaces MRn & NOn, on doit avoir $MRN \times gO = MRn \times g''l' + NOn \times kh$. Tirant de l'une de ces équations, la valeur de $MRn \times g''l'$, & la fubftituant dans l'autre, on aura $MRN \times g'q = MRN \times gO - NOn \times kh - MOm \times h'k'$. Or les triangles MOm, NOn étant infiniment petits, leurs moments, ou leurs produits par les lignes infiniment petites, $h'k'$ & hk feront infiniment plus petits (4), & par conféquent infiniment petits du fecond ordre à l'égard du moment $MRN \times gO$. Rejettant donc, de la derniere équation, ces deux moments, on aura $MRN \times g'q = MRN \times gO$, d'où l'on tire $g'q = gO$; c'eſt-à-dire, que le centre de gravité g' eſt à même profondeur au-deſſous de MN, que g. On peut donc regarder la ligne gg', qui eſt d'ailleurs infiniment petite, comme perpendiculaire ſur gO; & par la même raiſon (*Fig.* 126) on peut regarder $G'G''$ comme un arc de cercle décrit du point M comme centre.

Voyons, à préſent, quelle eſt la valeur de gg' (*Fig.* 127). Il faut, par la même raiſon que ci-deſſus, prendre le moment du volume mRn, à l'égard de OR, & l'égaler à la ſomme des moments de ſes deux parties MOm, MRn. On aura donc $mRn \times gg'$ ou $MRN \times gg' = MRn \times g''l + MOm \times Ok'$. Mais puiſque g eſt le centre commun de gravité des deux eſpaces MRn & NOn, on a $MRn \times g''l - NOn \times Ok = 0$ (265), ou $MRN \times g''l = NOn \times Ok$; donc $MRN \times gg' = NOn \times Ok + MOm \times Ok' = 2\,NOn \times Ok$, parce que les deux triangles MOm, NOn ſont égaux, & que les diſtances Ok' & Ok ſont évidemment égales.

Soit e l'épaiſſeur de la tranche que repréſente MRN, on aura donc enfin le moment de cette tranche $MRN \times e \times gg' = 2\,NOn \times e \times Ok$, équation qui a lieu pour chaque tranche.

Prenons

Prenons, maintenant, la ſomme de ces moments pour toutes les tranches, & nous aurons $\int MRN \times e \times gg' = \int 2NOn \times e \times Ok$. Or le premier membre, étant la ſomme des moments de chaque tranche par rapport à un plan paſſant par la quille, doit (268) être égal à la ſomme de toutes les tranches, ou au volume de la partie ſubmergée de la carène, multiplié par la diſtance $G''G'$ (*Fig.* 126) du centre de gravité de la carene, lors de l'inclinaiſon. Donc, en nommant V ce volume, on aura $N \times G''G' = \int 2\,NOn \times e \times Ok$. Déterminons donc la valeur de ce ſecond membre.

Pour cet effet, je remarque que lorſque le navire s'incline, le plan primitif de flottaiſon $CBPQ$ (*Fig.* 128) devient $CbpQ$. Que les triangles BIb, NOn ſont les mêmes que dans les *Fig.* 126 & 127; or comme il eſt évident qu'ils ont un angle égal, on peut, à cauſe de leur petiteſſe infinie, les regarder comme ſemblables; enſorte qu'on aura $NOn : BIb :: \overline{ON}^2 : \overline{BI}^2$ (*Géom.* 159); & par conſéquent $NOn = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{BI}^2} \times BIb$. D'ailleurs on a (*Fig.* 127) $Ok = \frac{2}{3} ON$, car on peut regarder le point k & le point h, comme également éloignés de O. On a donc

$NOn \times Ok = \frac{\frac{2}{3}\overline{ON}^3}{\overline{BI}^2} \times BIb$; donc . . .

$V \times G'G'' = \int \frac{\frac{4}{3}\overline{ON}^3}{\overline{BI}^2} \times e \times BIb$; c'eſt là l'équation qui donne $G'G''$. Employons -la maintenant à déterminer la hauteur $G'M$ du métacentre.

Imaginons que du point I (*Fig.* 126) comme centre, & du rayon IB, on décrive l'arc BS; on aura $BIb = \frac{BI \times BS}{2}$. Or les deux droites $G''M$ & $G'M$ étant perpendiculaires à ab & AB, il eſt facile de voir que l'angle M eſt égal à l'angle BIb, & que par conſéquent en regardant comme un arc décrit du point M, la droite infiniment petite $G''G'$ que nous avons vue être perpendiculaire à $G'I$, les deux ſecteurs BIS, $G'MG''$ feront ſemblables. On adonc $G'M : G'G'' :: BI : BS$; donc $BS = \frac{BI \times G'G''}{G'M}$; & par conſéquent $BIb = \frac{\overline{BI}^2 \times G'G''}{2G'M}$ donc en ſubſtituant dans l'équation $V \times G'G'' =$ &c, & réduiſant, on a $V \times G'G'' = \int \frac{\frac{2}{3}ON^3 \times e \times G'G''}{G'M}$. Mais comme $G'M$ & $G'G''$ reſtent les mêmes, quelle que ſoit la tranche que l'on conſidere, on peut écrire cette équation, de cette autre maniere, $V \times G' G'' = \frac{\frac{2}{3} G'G''}{G'M} \int \overline{ON}^3 \times e$, d'où l'on tire $G' M = \frac{\frac{2}{3} \int \overline{ON}^3 \times e}{V}$. C'eſt-à-dire, que *pour avoir la hauteur du métacentre, au-deſſus du centre de gravité de la partie ſubmergée de la carène*, il faut partager la longueur de la coupe faite à fleur d'eau, (par des perpendiculaires élevées ſur cette longueur) en un aſſez grand nombre de parties égales; pour que les parties de la courbe qui fait le contour de cette coupe, interceptées entre ces perpendiculaires, puiſſent être regardées comme des lignes droites. Alors on fera une ſomme des cubes des demi-largeurs correſpondantes à chaque diviſion, & l'ayant multipliée par la diſtance e, d'une perpendiculaire à l'autre, on en prendra les $\frac{2}{3}$ que l'on diviſera par le volume de la partie ſubmergée de la carène.

360. On voit donc que tant que la coupe faite à fleur d'eau reſtera la même, & que le volume de la partie ſubmergée reſtera auſſi le même, la hauteur du métacentre reſtera conſtamment la même, quelque changement que l'on faſſe d'ailleurs à la figure de la carène. Nous verrons par la ſuite, les uſages du métacentre. Diſons un mot des fluides élaſtiques.

361. Les fluides élastiques ont de commun avec les fluides sans ressort, qu'abstraction faite de la pesantenr, la pression se communique également dans tous les sens. Mais ils différent de ces derniers, en ce que si après avoir appliqué à la surface AB (*Fig.* 129) d'un fluide sans ressort, une pression quelconque P, qui agisse sur un fonds mobile AB, on vient à supprimer, subitement ce poids P, le fluide sans ressort, n'agira plus contre le fonds AB. Au lieu que dans les fluides à ressort, si après que la pression P aura amené le fonds AB dans la situation quelconque ab, on vient à supprimer cette pression, le fonds ab sera repoussé de b vers B avec la même force qui l'avoit amené de B en b.

Quoi qu'il en soit, la maniere dont la pression se distribuera, sera toujours la même que pour les fluides sans ressort; c'est-à-dire. qu'elle agira perpendiculairement aux surface ; & que dans les fluides élastiques pesants, & qui ne sont comprimés que par l'action de leur pesanteur, les efforts de la pression sur les parois des vases, ou sur la surface des corps plongés dans ces fluides, ces efforts, dis-je, estimés dans le sens horisontal, se détruiront mutuellement; &

dans le ſens vertical, ils ſe réduiront à un ſeul dont la direction paſſera par le centre de gravité du volume ſur lequel le fluide agit.

462. Quant à la valeur abſolue de la preſſion ſur une ſurface quelconque, en vertu de la peſanteur ſeule du fluide élaſtique; il n'eſt pas douteux que ſur les ſurfaces horiſontales, elle ne ſoit (la hauteur étant la même) proportionnelle aux ſurfaces ſur leſquelles elle s'exerce. Mais elle ne ſe meſure pas, comme dans les autres fluides, par le poids du priſme ou du cylindre qui auroit pour baſe cette ſurface, & pour hauteur, la diſtance de cette ſurface juſqu'à la ſurface ſupérieure du fluide.

En effet, ſi un fluide élaſtique eſt tel que ſans ſa peſanteur il puiſſe occuper l'eſpace *AEFB* (*Fig.* 130); lorſqu'on le ſuppoſera peſant, il eſt viſible que les tranches de ce fluide, les plus proches du fonds *EF*, chargées de leur propre poids & de celui des tranches ſupérieures, ſeront plus comprimées que celle-ci; que par conſéquent, ſi l'on conçoit deux tranches de même hauteur, l'une près du fonds *EF*, l'autre à quelque diſtance de ce fonds, la matiere de la premiere ſera plus denſe que celle de la ſeconde, & peſera, par conſéquent davantage. Ainſi les tranches de même hauteur, chargeant le fonds EF, d'autant moins qu'elles en ſont plus éloignées, la preſſion ſur le fonds EF doit s'eſtimer, non-ſeulement par la grandeur de ce fonds, & par le nombre des tranches contenues de D en F, mais encore par la peſanteur ſpécifique de chaque tranche, laquelle eſt différente d'un endroit à l'autre. Enſorte que ſi l'on repréſente par x la diſtance FQ d'une tranche quelconque, au fonds EF; par dx la hauteur infiniment petite de cette tranche; & par D la peſanteur ſpécifique, ou la denſité de cette même tranche; Ddx ſera le poids d'un filet de cette tranche; & ſon action ſur EF, ſera $EF \times Ddx$, donc l'action de toutes les tranches, ou la preſſion ſur FF ſera $EF\int Ddx$ ou plutôt $EF\int - Ddx$, parce que x croiſſant, le poids de chaque tranche diminue; c'eſt-à-dire, qu'il faudra prendre l'intégrale de $-Ddx$, & la multiplier par EF. Il faudra donc connoître la valeur de D en x, c'eſt-à-dire, ſuivant quelle loi les denſités varient, à meſure que les tranches ſont plus éloignées du fonds EF.

Quand on aura déterminé la preſſion ſur une ſurface horiſontale, il ſera aiſé de déterminer la preſſion ſur toute autre ſurface en partageant cette ſurface en parties infiniment petites; chacune de ces parties pourra être regardée comme preſſée autant que ſi elle étoit horiſontale.

363. De tous les fluides élaſtiques, l'air eſt celui qui nous intéreſſe le plus : c'eſt pourquoi nous allons nous arrêter à en conſidérer les principales propriétés; celles du moins, qui ont le plus de rapport à notre objet.

364. *L'air eſt peſant.* C'eſt un fait conſtaté par un grand nombre d'expériences. En voici quelques-unes. Si l'on prend un tube de verre (*Fig.* 131) d'environ 30 pouces, fermé hermétiquement par l'une *A* de ſes extrémités, & que par le bout ouvert on introduiſe du mercure dans toute la capacité, ſi l'on vient à renverſer & plonger le bout ouvert *B*, dans un vaſe où il y ait auſſi du mercure; le mercure contenu dans le tube, deſcendra juſqu'à ce que la colonne reſtante ſoit d'environ 27 pouces & demi, * à compter de la ſurface du mercure dans le vaſe. Voici comment cette expérience prouve

* Cette quantité varie ſelon l'état de l'air, & la hauteur du lieu où ſe fait l'expérience : nous ſuppoſons ici, que c'eſt lorſque l'air eſt dans un état moyen, & que l'on eſt, à peu près, au même niveau que Paris. Nous ſuppoſons de plus, que le mercure contenu dans le tube, a été purgé d'air : ce n'eſt pas ici le lieu d'en expoſer les moyens.

la pesanteur de l'air. La colonne de mercure contenue dans CB exerce au point B une pression sur le mercure inférieur qui ne peut être contrebalancée que par un effort égal agissant en sens contraire. Or le mercure contenu dans le vase où le tube est plongé, n'agit contre cette colonne, qu'à raison de la distance de sa surface supérieure jusqu'à l'ouverture B ; il ne peut donc contrebalancer. On ne peut donc chercher, ailleurs, l'effort nécessaire, que dans le fluide qui repose sur tous les points de la surface supérieure du vase ; c'est-à-dire, dans l'air ; donc c'est l'air qui par son poids fait équilibre à la colonne BC de mercure.

Voici d'ailleurs, un autre fait qui nous sera utile & qui vient à l'appui. Si c'est l'air qui soutient la colonne BC; il faut si nous employons un fluide moins pesant que le mercure, que la hauteur à laquelle ce fluide restera suspendu, soit plus grande que BC, & cela (334) dans le rapport inverse des pesanteurs spécifiques de ces deux fluides. Or on sait que l'eau pese 14 fois moins que le mercure. Il faut donc que si l'on emploie de l'eau au lieu de mercure, elle puisse être soutenue par l'air, jusqu'à la hauteur de 14 fois 27 pouces & demi, c'est-à-dire, jusqu'à 32 pieds environ. C'est en effet, ce que l'expérience confirme. Car on sait que si par le moyen d'un piston on veut élever l'eau dans un seul corps de pompe, au-delà de 32 pieds, l'eau s'arrête constamment à ce terme à très-peu près. On ne peut donc douter que l'air ne soit pesant, & que par cette raison, il ne presse la surface des corps, autant que le feroit une colonne d'eau dont la base seroit égale à cette surface, & dont la hauteur seroit de 32 pieds environ.

C'est cette pression qui appliquée à tous les corps, & par conséquent à la surface de l'eau, oblige l'eau de monter dans les pompes, lorsqu'en tirant le piston on fait un vuide entre le piston & l'eau dans laquelle plonge la pompe. Mais pour avoir des idées plus distinctes sur la maniere dont l'eau s'éleve dans les pompes, il faut examiner une autre propriété de l'air. C'est son élasticité.

365. *L'air est compressible ; il est élastique : & les volumes auxquels il peut être réduit par la compression, sont, sensiblement, en raison inverse des poids dont il est chargé.*

C'est un fait établi par l'expérience suivante.

Dans un tube de verre recourbé *ABC*

(*Fig.* 132) dont la branche *A B* ſoit au moins de 30 ou 40 pouces, & dont la branche *B C* ſoit par-tout de même diametre & fermée hermétiquement en *C*. Faites couler du mercure juſqu'à ce que la capacité *B* la plus baſſe du tube ſoit remplie; & ayant appliqué ce tube ſur une planche graduée, obſervez quel eſt le nombre de diviſions compris entre *B* & *C*. Je ſuppoſe ici que ce ſoit 8 pouces. Verſez du mercure dans la branche *A B* juſqu'à ce que l'excès de la hauteur du mercure dans *A B* ſur celle du mercure qui entrera dans *B C* , ſoit de 27 pouces & demi environ. L'air qui occupoit d'abord toute la partie *B C* n'en occupera plus que la moitié. Si vous continuez de verſer du mercure dans la branche *A B*, juſqu'à ce que la différence des hauteurs du mercure dans les deux branches , ſoit de deux fois 27 pouces & demi, ou environ; l'air reſtant dans *B C* n'occupera plus que le tiers de *B C*; il n'occupera que le quart, ſi la différence des hauteurs eſt de trois fois 27 pouces & demi ou environ; & ainſi de ſuite.

Cette expérience fait voir que l'air ſe comprime à meſure qu'on le charge, & qu'il ſe comprime, à très-peu près, proportionnellement au poids. En effet, lorſqu'il n'y avoit du mercure que dans la capacité inférieure *B*, l'air contenu dans *B C*, étant de même nature que celui qui étoit dans *AB*, étoit chargé de tout le poids de l'air qui répond verticalement à l'ouverture du tube. Il étoit donc chargé par un poids équivalent à une colonne de mercure de 27 pouces & demi environ. Puis donc qu'en ajoutant encore une, deux, trois, &c. preſſions ſemblables, il ſe réduit, ſelon ce que nous venons de dire, à des eſpaces deux fois, trois fois, quatre fois moindres que *B C*, il ſe comprime donc, dans le rapport des poids qui le chargent.

A l'égard de ſon reſſort; par un procédé inverſe on s'aſſure qu'il a lieu & qu'il augmente à proportion de la compreſſion, ou qu'il diminue à proportion que la compreſſion diminue. Car ſi l'on retire du mercure de dedans la branche *AB*, on verra l'air reprendre de l'étendue dans la branche *CB*, & en reprendre d'autant plus, qu'on diminuera plus la preſſion : l'air eſt donc non-ſeulement compreſſible; mais dans quelque état de compreſſion qu'on le mette, il tend à ſe rétablir & à occuper un eſpace plus grand, & tel que lorſque le poids qui le comprime diminue, l'eſpace dans lequel l'air ſe répand, eſt à celui auquel il étoit réduit, comme le poids dont il étoit chargé dans ce dernier cas, eſt à celui dont il eſt chargé actuellement.

366. L'air que nous appellons naturel ou libre, eſt donc dans une compreſſion habituelle ; enſorte que s'il venoit à perdre tout-à-coup ſa peſanteur, il tendroit à s'écarter de toutes parts avec une force telle que la partie d'air renfermée dans un eſpace comme *ABC* (*Fig.* 132) ne pourroit être retenue, qu'en appliquant à l'ouverture *A* une force égale au poids d'une colonne de mercure qui auroit cette ouverture pour baſe, & 27 pouces & demi de hauteur.

367. D'après ce que nous avons dit (361) ſur la différence entre les fluides élaſtiques & les fluides non élaſtiques, on voit donc que l'air renfermé de toutes parts dans un vaſe, fait autant d'effort pour pouſſer du dedans au dehors, que l'air environnant en fait pour pouſſer du dehors en dedans : & c'eſt là ce qui fait que les corps ne cedent point à la preſſion conſidérable qu'ils éprouvent ſelon ce que nous avons dit (364).

368. Un tube tel que celui que nous avons décrit (364) (*Fig.* 131) étant appliqué ſur une planche graduée dont les diviſions commencent à la ligne de niveau, ou

à la ſurface du mercure dans le réſervoir, eſt ce qu'on appelle le barometre; parce qu'il ſert à juger de la preſſion que l'air exerce ſur la ſurface des corps, par la hauteur à laquelle le mercure reſte ſuſpendu dans le tube AB. On voit donc maintenant, pourquoi cet inſtrument marque la même hauteur dans un endroit fermé, comme dans un endroit libre. C'eſt que l'air renfermé exerce par ſon reſſort, la même preſſion ſur le mercure contenu dans le réſervoir, que s'il agiſſoit librement par ſon poids.

369. Le mercure ne ſe ſoutient pas conſtamment à la même hauteur dans un même lieu. Il eſt, à Paris, tantôt au-deſſus de 27 pouces & demi, tantôt au-deſſous: & cela, ſelon que la compreſſion occaſionnée ou par le poids, ou par le reſſort de l'air augmente ou diminue. Comme le reſſort de l'air peut augmenter ou diminuer ſans que ſon poids total augmente ou diminue, ainſi qu'il peut arriver par la chaleur ou par le froid, on ne doit pas attribuer les variations du mercure dans le barometre, uniquement aux changements du poids de l'air.

Quoi qu'il en ſoit, puiſque ces changements annoncent que l'air eſt en état de faire équilibre à une colonne plus ou moins grande de mercure, & par conséquent à une colonne d'eau plus ou moins grande; il faut en conclure que la plus grande hauteur à laquelle on puisse élever l'eau par le moyen d'une seule pompe, n'est pas constamment de 32 pieds; mais qu'elle varie selon la hauteur du mercure dans le barometre.

370. Si on porte le barometre, d'un lieu en un autre plus élevé ou plus bas, le mercure s'abaissera dans le premier cas, & s'élévera dans le second. Parce que la colonne d'air qui appuie sur le réservoir, étant plus courte dans le premier cas, & plus longue dans le second, doit peser moins dans le premier cas, & plus dans le second; & par conséquent ne peut faire équilibre qu'à une colonne de mercure plus petite dans le premier cas, & plus grande dans le second. Ainsi dans le premier cas, le tube se vuidera un peu dans le réservoir; & dans le second le réservoir fournira le tube : c'est aussi ce que l'expérience a confirmé. Mais il faut observer que ces variations ne sont sensibles qu'à des changements de hauteurs, de quelques toises. On peut dire, en gros, que vers la surface de la terre, 12 toises de dif-

férence de hauteur répondent à une ligne de différence dans le barometre.

Donc les plus grandes hauteurs auxquelles on peut élever l'eau par le moyen d'une seule pompe, varient suivant les hauteurs auxquelles on est élevé, & sont proportionnelles à la hauteur du barometre en ces endroits.

371. Nous avons dit que l'air se comprimoit dans la raison des poids, à très-peu près. Quoique l'expérience d'après laquelle nous l'avons prouvé, donne le rapport des poids pour celui des compressibilités, & le donne assez exactement; il ne faut pas conclure cependant qu'il en seroit de même quel que fût le poids dont on chargeât l'air. Il n'est pas vraisemblable qu'on puisse réduire un volume quelconque d'air, à occuper un espace infiniment petit, en le chargeant continuellement; non plus qu'à occuper un espace infini, en diminuant sa pression à l'infini. Cette extréme compressibilité, & cette extrême dilatabilité ne sont pas dans la nature. Néanmoins, lorsqu'il ne s'agit que de hauteurs médiocres, on peut supposer que l'air à différentes hauteurs, est comprimé dans la raison des poids dont il est chargé; & par là, on peut déterminer à peu près; à quelle hauteur doit se tenir le barometre, en vertu du poids seul de l'air, à différentes hauteurs. En effet, nous avons vu ci-dessus (362) que D étant la pesanteur spécifique ou la densité à une hauteur quelconque, la pression que l'air éprouvoit, ou pouvoit faire éprouver, en cet endroit, étoit $\int D dx$; donc si on appelle h la hauteur du barometre en cet endroit, on aura (en représentant par 1 la densité ou la pesanteur spécifique du mercure) $\int D\, dx = h$, ou plutôt $\int -D\, dx = h$, parce que x croissant, h diminue. D'un autre côté, puisque l'air est d'autant plus dense qu'il est plus chargé, sa densité ou sa pesanteur spécifique augmente comme les poids dont il est chargé, & par conséquent si on appelle H la hauteur du barometre au niveau de la mer, & p la pesanteur spécifique de l'air, à ce même niveau; on aura $H : h :: p : D$; donc $h = \frac{DH}{p}$;

donc $\int -D\,dx = \frac{HD}{p}$. Différencions cette équation en observant que p & H sont constants. On aura $-D\,dx = \frac{H\,dD}{p}$, d'où l'on tire $\frac{dD}{D} = \frac{-pdx}{H}$; donc $l\,D = \frac{-px}{H} + l\,C$. Mais au niveau de la mer, c'est-à-dire, lorsque $x = 0$, on doit avoir $D = p$; donc $lp = lC$; donc $C = p$. On a donc $lD = \frac{-px}{H} + lp$, d'où l'on tire $lD - lp = \frac{-px}{H}$; ou $l\frac{D}{p} = \frac{-px}{H}$, ou enfin $\frac{D}{p} = e^{\frac{-x}{H}}$, e étant le nombre dont le logarithme est 1. On a donc $D = pe^{\frac{-px}{H}}$. Reprenant donc l'équation $\int -D\,dx = h$, & substituant pour D sa valeur, on aura $h = \int -pe^{\frac{-px}{H}}dx$; intégrale que (147) l'on trouvera être $He^{\frac{-px}{H}}$; donc enfin $h = He^{\frac{-px}{H}}$, ou $lh = lH - \frac{px}{H}$, qui donnera la hauteur h du barometre, à la hauteur x au-dessus du niveau de la mer, lorsqu'on connoîtra sa hauteur H au niveau de la mer, & la pesanteur spécifique p de l'air, à ce même niveau. Pour donner un exemple de l'application de ce calcul, prenons l'observation qui a été faite au *Pic de Teneriffe.*

La hauteur de cette montagne a été trouvée de 13158 pieds de Paris, ou 157896 pouces. Au niveau de la mer, le mercure se tenoit à 27 pouces 10 lignes, & au sommet du Pic, à 17 pouces 5 lignes.

La pesanteur spécifique de l'air étant la 850e partie à peu près de celle de l'eau, celle-ci la 14 partie de celle du mercure, la pesanteur spécifique de l'air est donc la 11900e partie de celle du mercure, que nous avons représentée par l'unité; ainsi, on a . . . .

$$p = \frac{1}{11900}$$

$$x = 157896 \text{ pouces}$$

$$H = 27\,\text{p}^{\circ}.\tfrac{5}{6}$$

donc

donc $l\,h = l\,27^{\,\mathrm{P.}\,\frac{5}{6}} - \frac{157896}{11900 \times 27\frac{5}{6}}$. Or on trouvera $\frac{157896}{11900 \times 27\frac{5}{6}} = 0,4767147$; le logarithme ordinaire de $27\frac{5}{6}$ est $1,4445652$ qui étant multiplié (113) par $2,3025851$, donne pour le logarithme hyperbolique dont il s'agit ici, $3,3262343$, retranchant donc $0,4767147$ on aura $l\,h = 2,8495196$. Multipliant ce dernier (113) par $0,4342945$ pour le réduire en logarithme des tables, on aura $1,2375306$ qui dans les tables répond à $17^{\mathrm{P.}},28$ ou $17^{\mathrm{P}}\,3^{\mathrm{l}}\,\frac{1}{3}$. Or l'observation a donné $17^{\mathrm{P.}}\,5$ l.

Au reste, nous ne devons pas dissimuler qu'on ne doit pas regarder cette formule, comme pouvant donner bien exactement la hauteur du barometre à de très-grandes hauteurs. 1°. Parce qu'ainsi que nous l'avons déja observé, l'air ne se comprime pas proportionnellement aux poids, à toutes distances. 2°. Parce qu'à des distances un peu considérabes, la pesanteur diminue. 3°. Parce que la pesanteur spécifique p de l'air, est très-variable. 4°. Parce que les variations qui arrivent dans les hauteurs du barometre, pouvant dépendre en partie du ressort de l'air dilaté par la chaleur, ou condensé par le froid, il faudroit connoître l'action de ces causes, à différentes hauteurs. 5°. Parce que les vapeurs & autres corps étrangers dont l'air est chargé, peuvent encore apporter beaucoup de modifications à cette détermination. Quoi qu'il en soit, cet exemple est toujours propre à montrer comment on doit se conduire dans l'application du calcul à ces sortes de questions.

372. Après ce que nous venons de dire sur le poids & le ressort de l'air, & sur la pression des fluides en général, il est facile d'entendre comment l'eau s'éleve dans les pompes.

Il y a trois parties principales à considérer dans une pompe. Les tuyaux, les soupapes & les pistons.

Le piston est un corps $ABCD$ de base

circulaire (*Fig.* 133, 134 & 135), qui peut parcourir la capacité intérieure du tuyau qu'on appelle *Corps de pompe*, & qui le remplit exactement en la parcourant. La ſoupape *E* eſt deſtinée à permettre & à fermer alternativement le paſſage à l'eau. Le corps de pompe eſt le tuyau que parcourt le piſton. *FGHK* eſt un autre tuyau lié au corps de pompe, & qui a ſon extrémité inférieure plongée dans l'eau dont je ſuppoſe que *RS* eſt le niveau.

Si l'on ſuppoſe qu'une puiſſance *P* (*Fig.* 133) appliquée à la tige du piſton, vienne à élever le piſton. L'air renfermé dans l'eſpace *DVKHGFC*, tendra par ſon reſſort, à occuper l'eſpace que le piſton laiſſera libre; il ſoulevera la ſoupape *E*, pour entrer dans le corps de pompe; ſon reſſort diminuera à meſure qu'il s'étendra. Il exercera donc ſur la ſurface *GH* de l'eau un effort moindre que ne fait l'air naturel, ſur les parties environnantes *RG*, *HS*. L'excès de preſſion de la part de l'air extérieur, fera donc monter de l'eau dans le tuyau *GK* à une certaine hauteur *HN*, juſqu'à ce que le poids de cette colonne, joint au reſſort de l'air reſtant, ſoit égal au poids de l'air extérieur. Alors la ſoupape *E* ſe fermant d'elle-même, ſi l on baiſſe le piſton, l'air contenu entre le piſton & la baſe *TV* du corps de pompe, augmentera de reſſort à meſure qu'on baiſſera ; il fera effort contre la baſe du piſton, & s'échappera, ſi ſon reſſort étant devenu plus grand que celui de l'air extérieur, le piſton eſt en même-temps percé d'un trou recouvert d'une ſoupape *L*, qui puiſſe s'ouvrir, & ſe fermer comme la premiere..

Cet air une fois ſorti, la ſoupape *L* retombe, & ſi l'on recommence à lever le piſton, l'eau s'élevera dans *FGHK*, à une plus grande hauteur, par la même raiſon que ci-devant, enſorte qu'après un certain nombre de coups de piſton, elle gagnera le corps de pompe, où étant une fois entrée, elle paſſera à chaque abaiſſement du piſton à travers le trou dont il eſt percé ; en levant la ſoupape, qui ſe fermant enſuite par ſon propre poids, retiendra au-deſſus d'elle, l'eau qui aura paſſé, & que l'on élevera en même-temps que le piſton. Tel eſt le jeu de la *Pompe aſpirante*.

Quant à la *Pompe foulante*, voici ſes effets. Lorſqu'on fait deſcendre le piſton *PCD* (*Fig.* 134) que je ſuppoſe, ici, placé au-deſſous du niveau de l'eau *RS*, il ſe fait un vuide entre la ſoupape *E* qui eſt alors fermée, & la baſe du piſton. Le poids de l'eau agiſſant conjointement avec celui de l'air extérieur contre la ſoupape *L*, fait paſſer l'eau dans le corps de pompe. Lorſque l'eau ceſſe d'entrer, la ſoupape *L* ſe ferme. Alors ſi l'on remonte le piſton, il chaſſe devant lui l'eau qui eſt entrée; force la ſoupape *E* de ſe lever, & introduit l'eau dans la partie *T V Y X*. Le piſton une fois élevé, la ſoupape *E* ſe ferme, & retient l'eau, juſqu'à ce que, par une nouvelle opération ſemblable à la premiere, on en faſſe paſſer de nouvelle, qui s'éleve dans *TVYX* à proportion du nombre de coups de piſton. Quelquefois le piſton eſt placé au-deſſus du niveau de l'eau; mais dans toute diſpoſition cela s'explique d'une maniere analogue. Tel eſt le jeu de la pompe foulante.

La pompe *aſpirante & foulante* eſt ainſi nommée, parce qu'elle réunit les effets des deux autres. Le piſton *A B C D* (*Fig.* 135) s'élevant, fait entrer l'eau dans l'eſpace *CDTVO* par le moyen du tuyau *FGHK*, comme dans la pompe aſpirante. Puis, lorſqu'il s'abaiſſe, il foule l'eau contenue dans cet eſpace, laquelle ne pouvant échapper par la ſoupape *E* qui ſe ferme d'elle-même, leve la ſoupape *L*, & paſſe dans le tuyau *M o m n*. On peut varier beaucoup la conſtruction & la diſpoſition des parties des pompes ; mais leurs effets s'expliqueront toujours facilement, par ceux que nous venons d'expofer.

373. Voyons maintenant les propriétés fondamentales de ces machines.

Par le moyen de la pompe foulante, on peut élever l'eau à telle hauteur que l'on veut, pourvu qu'on y emploie une force fuffifante. Mais l'eftimation de cette force exige plus d'une confidération. Il faut avoir égard aux dimenfions du pifton & des tuyaux ; à la hauteur à laquelle on peut élever l'eau ; à la vîteffe avec laquelle on veut l'élever. Nous prendrons, ailleurs, cette queftion dans toute fon étendue. Quant à préfent nous nous bornerons à quelques-uns des éléments qui peuvent fervir à la réfoudre. Il eft conftant que la puiffance néceffaire, pour élever l'eau à une hauteur propofée, doit du moins être capable de faire équilibre à la preffion que la bafe du pifton éprouveroit, fi lorfqu'une lame de fluide a atteint la hauteur propofée, le tout demeuroit en équilibre. C'eft cette preffion que nous allons évaluer ici.

En général, la puiffance doit être au moins capable de foutenir le poids d'une colonne d'eau qui auroit pour bafe celle du pifton, & pour hauteur la diftance depuis le niveau de l'eau *RS* (*Fig.* 134) jufqu'à la lame fupérieure *XY*.

En effet, lorfque la bafe *DC* du pifton eft au-deffous du niveau de l'eau *RS*; il eft vifible que la puiffance n'a point à foutenir la preffion de l'eau comprife entre *RS* & *DC*, parce que cette preffion eft contrebalancée par celle de l'eau environnante qui fe tranfmet par l'ouverture inférieure du corps de pompe. La puiffance n'a donc à foutenir que la preffion qu'exerce fur la furface *DC*, le fluide compris entre *RS* & *XY*. Or (333) cette preffion doit s'eftimer par celle d'un feul filet qui auroit pour hauteur la diftance de *RS* à *XY*, doit, dis-je, s'eftimer par la preffion de ce filet, répétée autant de fois qu'il y a de points dans *DC*; elle eft donc en effet, égale au poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour bafe *DC*, & dont la hauteur feroit celle *XY* au-deffus du niveau de l'eau.

Lorfque le pifton eft au-deffus du niveau fuppofé en *R'S'* : il eft évident que l'eau contenue entre *DC* & *R'S'* ne charge point le pifton. Mais comme elle ne peut, alors, être foutenue que par la preffion que l'air extérieur exerce fur la furface de l'eau environnante; cette preffion de l'air n'eft donc plus capable de faire équilibre à la preffion de celui qui s'exerce à la ſurface *XY*. Par conſéquent la ſurface *DC* du piſton eſt ſurchargée d'un poids équivalent à la colonne d'eau qui auroit *DC* pour baſe, & dont la hauteur ſeroit égale à la diſtance de *D C* à *R'S'*. Cette preſſion jointe à celle qu'exerce ſur *D C*, l'eau contenue entre *DC* & *XY*, & qui a pour valeur le poids d'une colonne d'eau qui auroit *D C* pour baſe & dont la hauteur ſeroit égale à la diſtance de *D C* à *X Y*, fait donc, encore, le poids d'une colonne d'eau qui auroit *D C* pour baſe, & dont la hauteur ſeroit celle de *X Y* au-deſſus du niveau *R' S'* de l'eau.

374. A l'égard de la pompe aſpirante; pour juger de ſon effet, il ne ſuffit pas d'évaluer la puiſſance; il faut examiner, avant tout, ſi l'eau pourra parvenir juſqu'au piſton, & même s'élever au-deſſus; car il y a des circonſtances où l'eau s'arrête à un certain terme, quelque nombre de coups de piſton que l'on donne. Pour comprendre ceci, imaginons que l'eau ſoit déja parvenue en *I* (*Fig.* 133), la ſituation actuelle du piſton étant la plus baſſe qu'il puiſſe avoir; & ſuppoſons, pour plus de ſimplicité, que la pompe eſt d'une groſſeur uniforme par-tout. Il eſt clair que l'air compris dans l'eſpace *C D I Z* eſt de même force, de même reſſort, que l'air ex-

térieur (du moins, abstraction faite du poids de la soupape *L*, & de la résistance de son frottement); car s'il avoit plus de ressort, il s'échapperoit en levant cette soupape. Concevons maintenant que le jeu du piston, ou l'étendue qu'il parcourt à chaque levée, soit *DO*. Lorsque la base *CD* sera arrivée en *QO*, l'air qui occupoit l'espace *CDIZ*, tend à se répandre dans l'espace *QOIZ*; & si l'eau ne monte pas davantage, il s'y répandra en effet. Alors son ressort sera moindre que celui de l'air naturel, dans le rapport de *CDIZ* à *QOIZ*, ou dans le rapport de *DI* à *OI*. Donc si cette force de ressort, jointe au poids de la colonne d'eau qui auroit, pour hauteur, la distance de *ZI* à *RS*, fait un poids égal à 32 pieds d'eau en hauteur, qui est l'effort que l'air peut exercer sur la surface de l'eau en *RS*, il est clair qu'il y aura équilibre, & que l'eau ne montera plus; si ce poids est plus grand que 32 pieds, elle retombera avant que la soupape *E* puisse se fermer; & s'il est plus petit que 32 pieds, l'eau continuera de monter.

Voyons donc comment on peut déterminer ce poids.

Nommons h la hauteur depuis le point *O* jusqu'au niveau *RS*; i le jeu du piston, ou l'espace *DO* qu'il parcourt; x la distance *OI*.

Nous aurons $DI = x - i$, & la hauteur du point I sera $h - x$.

Puisque l'air renfermé dans $CDIZ$, a le même ressort que l'air extérieur, sa force peut donc être mesurée par une colonne d'eau de 32 pieds en hauteur ; ainsi puisque celle de cet air répandu dans l'espace $QOIZ$, doit être moindre, dans le rapport de DI à OI, cette force sera le quatrieme terme de cette proportion $x : x - i :: 32 : \frac{32 \times (x-i)}{x}$. Mais la force que l'eau comprise entre ZI & RS, exerce contre la pression extérieure de l'air, est mesurée par la hauteur $h - x$; donc celle du ressort de l'air répandu dans l'espace $QOIZ$, jointe à celle du poids de l'eau comprise depuis IZ jusqu'en RS, forme un poids total de $\frac{32 \times (x-i)}{x} + h - x$. Or pour que l'eau puisse toujours monter, il faut que ce poids soit moindre que celui d'une colonne d'eau de 32 pieds ; donc si l'on nomme y, ce dont il est moindre, on aura .... $\frac{32(x-i)}{x} + h - x = 32 - y$; d'où l'on tire $-32i + hx - xx = -xy$ & par conséquent $x = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\left(\frac{h+y}{2}\right)^2 - 32i}$.

Pour que l'eau s'arrête, il est clair qu'il faut que y ſoit zéro. Et comme on a alors $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}hh - 32i}$, dont les deux valeurs ſont réelles ſi $\frac{1}{4}hh$ eſt plus grand que $32i$, on peut donc dire que *lorſque le quarré de la moitié de la plus grande hauteur de la baſe du piſton au-deſſus du niveau de l'eau, eſt plus grand que 32 fois le jeu du piſton, il y a toujours deux points où l'eau peut s'arrêter dans la pompe aſpirante*, en ſorte que la pompe doit être réputée mauvaiſe, ſi le piſton lorſqu'il eſt plus bas, ſe trouve entre ces deux points.

Mais ſi $32i$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}hh$, les deux valeurs de x que l'on a en ſuppoſant $y = 0$, deviennent imaginaires ; ce qui annonce que dans une pompe conſtruite ſuivant cette condition, il eſt impoſſible que y ſoit zéro ; donc la preſſion de l'air extérieur ſera toujours plus forte, & l'eau ne s'arrêtera point. Donc, *pour que la pompe aſpirante produiſe infailliblement ſon effet, il faut que le quarré de la moitié de la plus grande hauteur du piſton au-deſſus du niveau de l'eau ſoit plus petit que 32 fois le jeu du piſton.*

Si de l'équation $-32i + hx - xx = -xy$, que nous avons trouvée ci-deſſus, on tire la valeur de y, on aura $y = \frac{xx - hx + 32i}{x}$.

Concevons maintenant que *A B* (*Fig.*

136 & 137) repréſentant la plus grande hauteur du piſton au-deſſus du niveau de l'eau, & *AD* le jeu du piſton, on donne ſucceſſivement à x, pour valeurs, les différentes parties *AP* de la ligne *AB*, & que l'on porte ſur les perpendiculaires *PM*, les valeurs de y qui réſulteront de ces ſubſtitutions; on aura une courbe *MMC*, qui (*Fig.* 136) tant que $\frac{1}{4}\,hh$ ſera plus grand que $32\,i$, coupera *AB* en deux points *I* & *I'*; en ſorte qu'il y aura des ordonnées *PM*, de part & d'autre de *AB*; les ordonnées qui ſont à la droite, marquant les valeurs poſitives de y; & celles qui ſont à la gauche, marquant les valeurs négatives.

On voit donc que tant que $\frac{1}{4}\,hh$ eſt plus grand que $32\,i$, la preſſion de l'air extérieur eſt toujours la plus forte juſqu'à ce que l'eau ait atteint la hauteur *BI'*. Qu'à ce point elle s'arrêtera (abſtraction faite du mouvement acquis), parce que la valeur de y eſt zéro. Mais ſi l'eau par ſon mouvement acquis, paſſe la hauteur *BI'*, parvient à quelque point entre *I* & *I'*, elle ne pourra s'y arrêter, mais elle deſcendra, (en ſuppoſant que la ſoupape ne s'y oppoſe pas) parce que la valeur de y étant négative, marque que la preſſion de l'air extérieur eſt plus foible, que les efforts réunis de l'eau & du reſſort de l'air intérieur. Si l'air atteint la hauteur du point I, elle pourra s'y arrêter par la même raiſon que ci-deſſus. Mais ſi elle paſſe une fois le point I, alors il n'y a plus à craindre qu'elle deſcende, parce que les ordonnées PM compriſes entre A & I étant toutes poſitives, font voir que la preſſion de l'air extérieur eſt toujours la plus forte, depuis la hauteur du point I juſqu'à celle du point A.

Lorſqu'au contraire la valeur de $\frac{1}{4}\,hh$ eſt plus petite que $32\,i$ (*Fig.* 137), la courbe ne coupe plus l'axe AB; toutes les ordonnées PM ſont poſitives, la preſſion de l'air extérieur eſt donc toujours la plus forte. Il n'y a donc pas d'arrêt à craindre. Ce qui confirme & éclaircit ce que nous avons dit ci-deſſus.

Si la pompe aſpirante étoit établie à une hauteur ou à une profondeur ſenſiblement différente de celle à laquelle le poids de l'air eſt équivalent à une colonne d'eau de 32 pieds; il faudroit, dans tout ce que nous venons de dire, mettre moins ou plus de 32 pieds. Ce moins ou plus peut ſe déterminer par le barometre, en comptant autant de fois 14 lignes de plus ou de moins à l'égard de 32 pieds, que le mercure marquera de lignes au-dessus, ou au-dessous de 27 pouces & demi.

Dans le calcul précédent, nous avons regardé la pompe, comme si elle étoit d'une grosseur uniforme; lorsqu'elle ne l'est point, comme dans la *Fig.* 133, la solution n'est pas plus difficile pour cela. Pour calculer l'effort de l'air intérieur, lorsqu'on suppose que l'eau n'est pas encore dans le corps de pompe *XV*; lorsqu'elle est en *MN*, par exemple, il faut faire cette proportion : l'espace *QOVNMTQ* : *CDVNMTC* : : 32^p sont à un quatrieme terme qui étant joint au poids de la colonne d'eau qui a pour hauteur *NH*, doit ensuite être égalé à $32 - y$, comme ci-dessus. Au surplus, quand le tuyau d'aspiration *FG* est d'un diametre plus petit que le corps de pompe, si la condition que nous avons exigée ci-dessus, a lieu, la pompe ne peut manquer d'avoir son effet; car l'air se dilate encore plus facilement dans celle-ci, que si elle étoit d'une grosseur uniforme.

Quant à l'effort dont la puissance doit être capable, pour soutenir l'eau à une hauteur déterminée *XY* (*Fig.* 133); il se mesure, ainsi que nous l'avons vu pour la pompe foulante, par le poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour base, la base *DC* du piston, & pour hauteur celle de XY au-dessus du niveau RS. (Nous faisons abstraction du frottement & du poids du piston). Cela se démontre par un raisonnement semblable à celui que nous avons employé pour la pompe foulante, lorsque le piston est au-dessus du niveau de l'eau $R'S'$ (*Fig.* 134).

375. La pesanteur & le ressort de l'air, servent à expliquer beaucoup d'autres faits : nous nous bornerons à en rapporter quelques-uns.

Si dans un vase où il y a de l'eau, ou tout autre fluide, on plonge (*Fig.* 138) la branche la plus courte d'un tube recourbé DEF (qu'on appelle siphon); & qu'on aspire, en suçant ou autrement, l'air contenu dans ce siphon; l'eau montera & sortira par F jusqu'à ce que, dans le vase, elle soit descendue à l'ouverture D.

La raison de ce fait est que lorsqu'on a fait sortir l'air renfermé dans DEF, la pression de l'air extérieur agit sur la surface AB, force le fluide de monter dans le siphon & de s'écouler par la branche EF. Et quoique lorsque l'écoulement est commencé, l'air presse le fluide, au point F, avec une force égale, à très-peu près, à celle qui presse la surface de l'eau dans le vase; néanmoins la lame F est pressée en sens contraire, par toute la colonne d'eau *IF* : cette colonne doit donc tomber : mais en tombant elle tend à faire un vuide en *I* qui ne peut manquer d'être rempli par l'action, toujours présente, de la pression de l'air sur la surface de l'eau dans le vase.

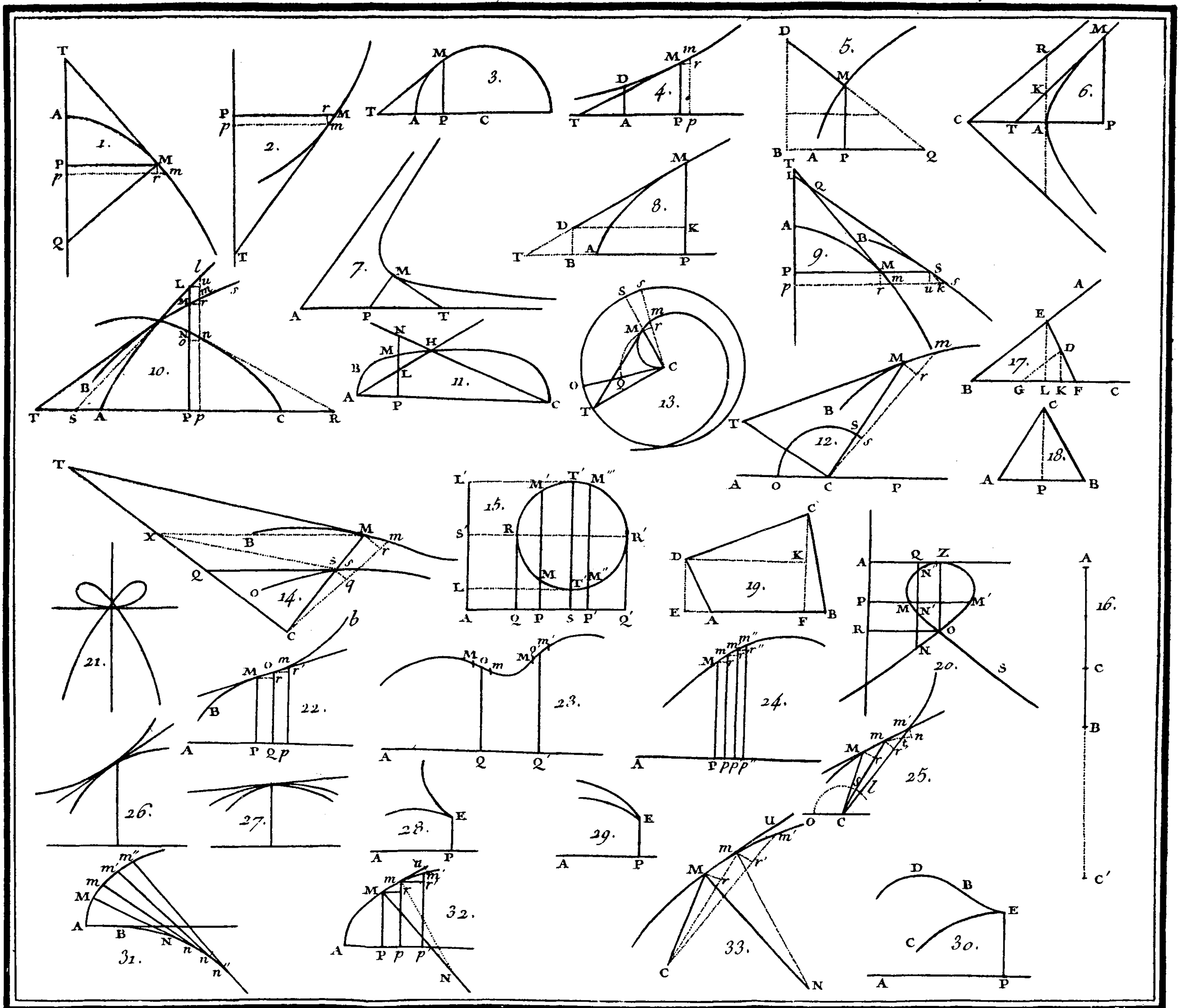
On voit par ce raisonnement, que pendant l'écoulement, l'air n'agit qu'avec un effort proportionnel à la différence *IF* de niveau, entre *F* & la surface de l'eau dans le vase; en sorte que l'écoulement sera d'autant plus prompt, que les deux branches du siphon différeront davantage ; ainsi si *F* & *D* étoient de niveau, l'écoulement n'auroit pas lieu. On dit communément que la branche *EF* doit être plus longue que la branche *ED*; mais on voit qu'en s'exprimant ainsi, on doit entendre que la hauteur verticale de *E* au-dessus de *F*, doit être plus grande que celle de *E* au-dessus de *D*. La longueur absolue n'y fait rien. On pourroit rendre *DE* beaucoup plus longue que *EF*, en contournant *DE* de diverses manieres ; tant que le point *D* sera plus haut que *F*, le fluide s'écoulera jusqu'à ce qu'il soit arrivé en *D*, pourvu que la hauteur de *E* au-dessus de *D*, ne passe pas 32 pieds.

Lorsqu'en appliquant les lévres à l'ouverture d'un flacon, on aspire la liqueur qui y eſt contenue, les lévres s'appliquent fortement ſur les bords de l'ouverture; & on a d'autant plus de peine à les dégager, qu'on a aſpiré plus fortement.

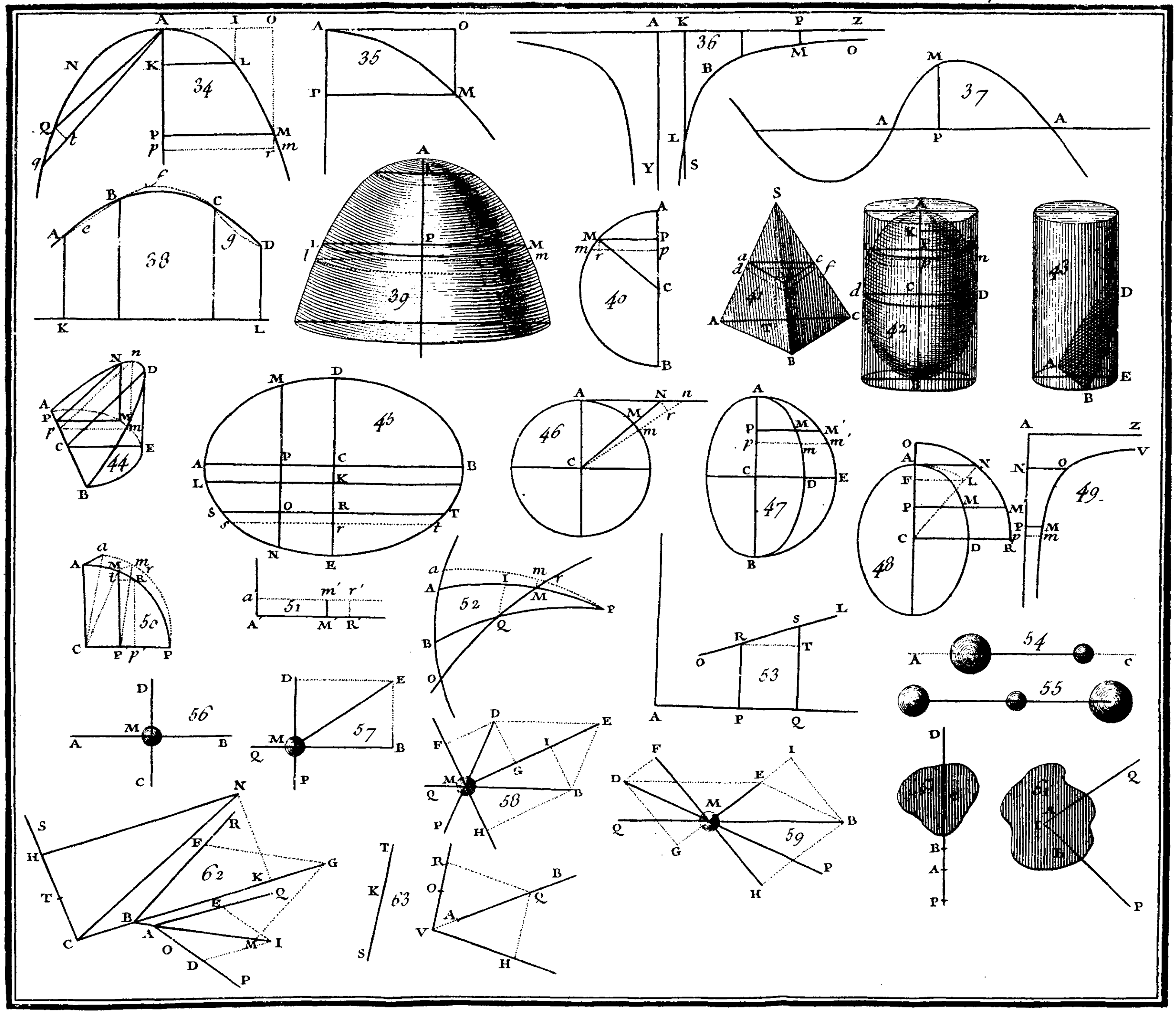
C'eſt qu'en aſpirant une partie de l'air contenu dans le flacon, on diminue le reſſort de l'air reſtant à proportion de ce qu'on en diminue la quantité; il n'eſt donc plus en état d'oppoſer du dedans au dehors, une preſſion égale à celle que l'air extérieur exerce du dehors au dedans. Cette différence peut aller juſqu'à faire caſſer le flacon, ſur-tout s'il eſt plat.

Par une raiſon ſemblable on explique pourquoi on a de la peine à ouvrir un ſoufflet lorſqu'on en bouche l'ouverture. C'eſt qu'en écartant les panneaux, l'air intérieur ſe répand dans un plus grand eſpace, & diminue de reſſort à proportion : l'air extérieur preſſe donc plus du dehors au dedans, que l'air extérieur ne preſſe du dedans au dehors.

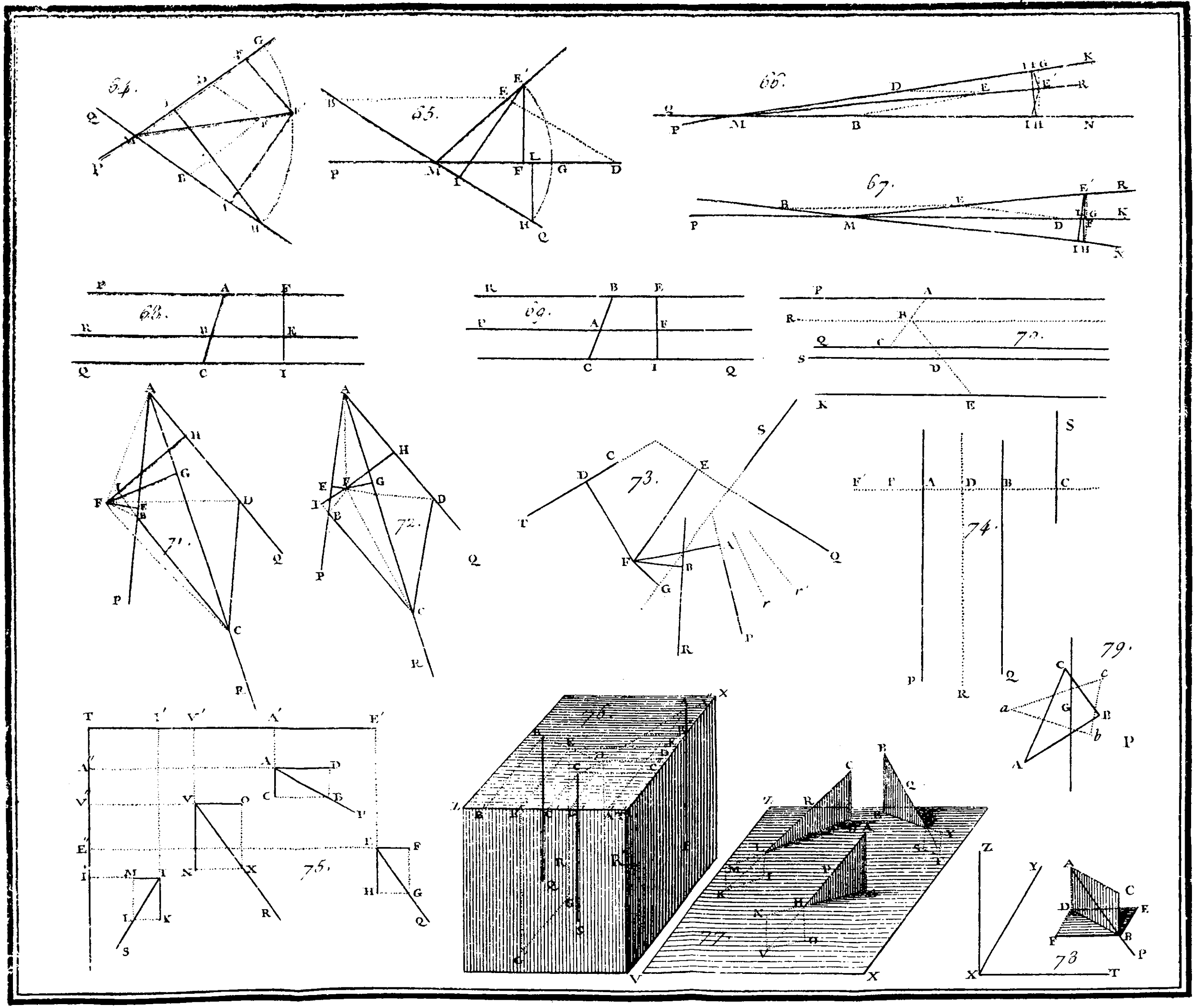
FIN.

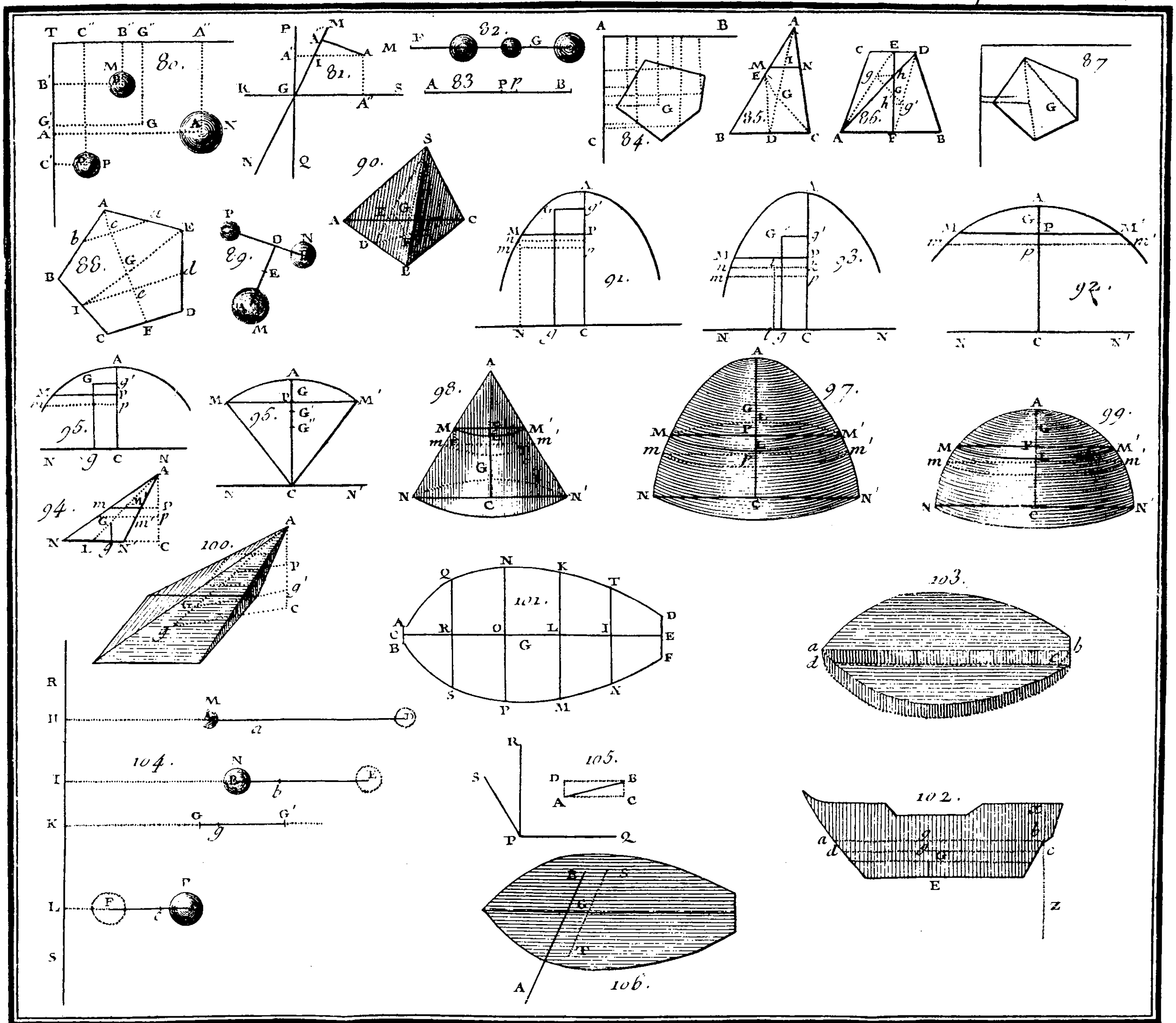


Michelinot Sculp. 1792.

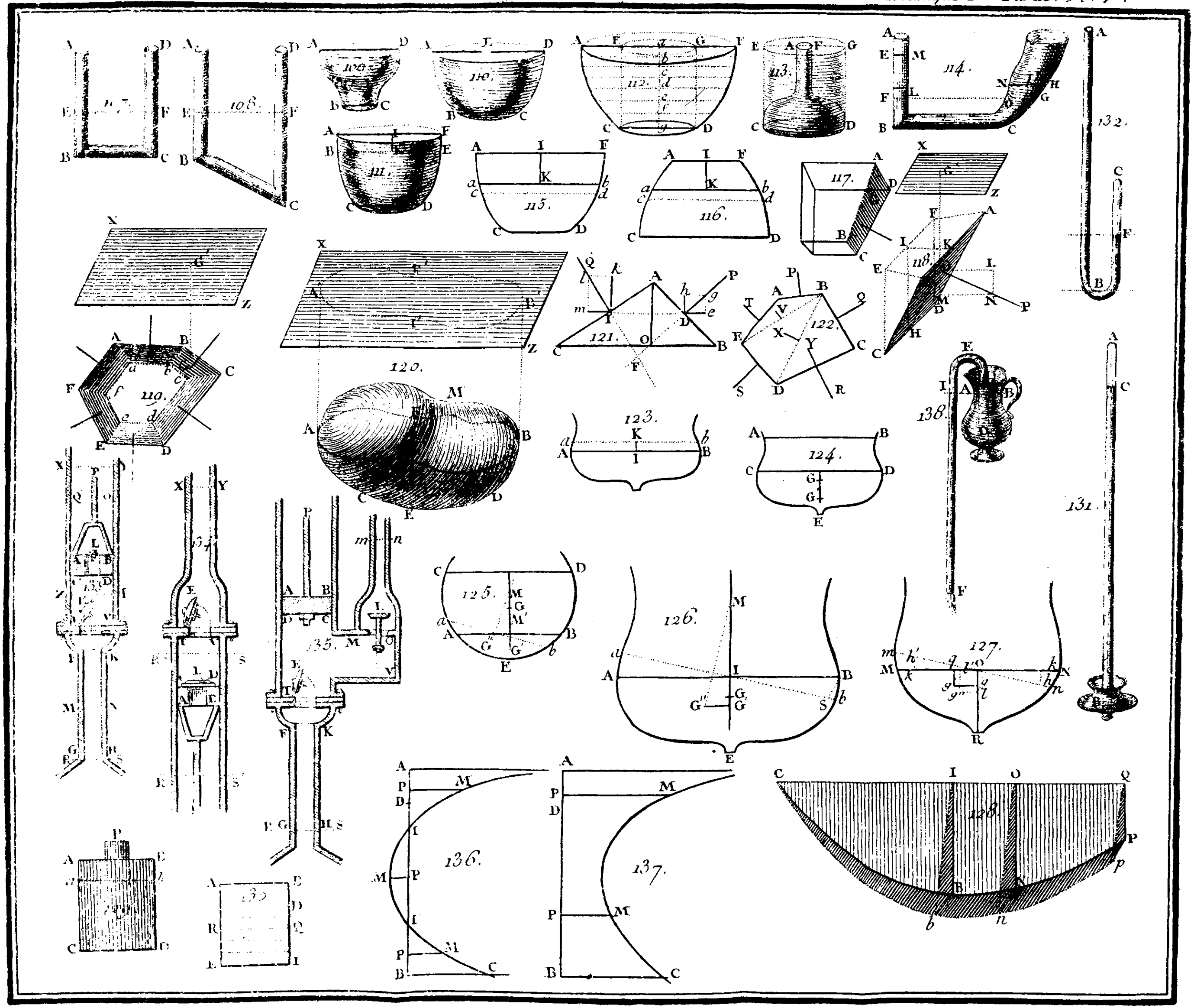


34
35
36
37
39
40
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
62
63


64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78
79.



Michelinot Sculp.


107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.