N° D'ORDRE
385.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. D. ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

1re THÈSE. — Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances.

2e THÈSE. — Terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes.

Soutenues le 15 mars, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
HERMITE, DARBOUX, *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1877

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
	DELAFOSSE.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

THÈSE D'ANALYSE.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

ET

DE LEURS PUISSANCES.

INTRODUCTION.

§ I. — Objet du présent Mémoire.

1. Les fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$, ainsi que leurs puissances d'exposant entier et positif, peuvent être développées en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de x.

Dans ces développements, les coefficients des diverses puissances de x sont des polynômes entiers par rapport au carré d'une certaine indéterminée k.

Dans les polynômes, convenablement ordonnés, que présente un même développement, le coefficient de la puissance de k^2 qui occupe une place fixe est une fonction de l'exposant correspondant de x.

Former les développements considérés revient évidemment, pour chacun d'eux, à former cette fonction : c'est ce dernier problème que nous nous proposons de résoudre.

§ II. — Ordre suivi.

2. Ce Mémoire contient trois Parties :

D'abord une étude des dérivées d'ordre pair des fonctions elliptiques et de leurs puissances, c'est-à-dire des fonctions $\lambda^\pi(x)$, $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$, dont l'exposant π est un nombre quelconque, entier et positif, susceptible de se réduire à l'unité ;

Ensuite une étude des développements de ces mêmes fonctions, suivant les puissances croissantes de la variable x, les coefficients de ces différentes puissances étant ordonnés, non pas par rapport aux puissances de k^2, mais d'une autre façon qui se présente d'elle-même dans nos recherches ;

Enfin une étude de ces mêmes développements, les coefficients étant ordonnés cette fois par rapport aux puissances de k^2.

3. Dans la première Partie :

Nous montrons que les dérivées d'ordre pair des fonctions $\lambda^\pi(x)$, $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$ sont des polynômes entiers en $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ respectivement.

Nous ramenons l'étude des dérivées de ces trois fonctions à celle des dérivées d'ordre pair de la puissance $\pi^{ième}$ d'une fonction unique $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]^2 = \mathfrak{F} + \mathfrak{V}\varphi^2(x) + \mathcal{G}\varphi^4(x).$$

Nous donnons le moyen de former ces nouvelles dérivées à l'aide d'un triangle dont chaque ligne horizontale renferme les coefficients de la dérivée correspondante, ordonnée suivant les puissances croissantes de $\varphi(x)$.

De ce mode de formation, nous déduisons et la forme de ces coefficients, qui sont des polynômes entiers spontanément ordonnés par rapport à $\mathfrak{V}$, et l'expression du terme général de ces derniers polynômes en fonction de ce que nous appelons les *chemins ternaires*.

A l'aide de chemins nouveaux, dits *chemins binaires*, nous obtenons, pour ce même terme général, une expression nouvelle, analogue à la précédente, mais beaucoup plus simple.

De cette dernière expression nous tirons la fonction génératrice de notre terme général, et nous constatons que cette fonction est une fraction rationnelle dont le dénominateur s'écrit immédiatement.

Enfin, de cette fonction génératrice, nous concluons que le terme général de nos polynômes en φ est, en même temps, celui d'une série récurrente proprement dite; nous faisons connaître l'équation et l'ordre de cette série; nous tirons de cette équation l'expression analytique de notre terme général, et nous indiquons le procédé à suivre pour déterminer les constantes contenues dans cette dernière expression.

4. Dans la seconde Partie :

Nous déterminons la forme des développements en séries des fonctions $\lambda^\pi(x)$, $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$, et montrons que l'on peut écrire, d'une part,

$$\lambda^\pi(x) = A_0^{(\pi)} \frac{x^\pi}{\pi!} - A_1^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)} \frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - A_3^{(\pi)} \frac{x^{\pi+6}}{(\pi+6)!} + \dots,$$

et, de l'autre,

$$\mu^\pi(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\nu^\pi(x) = C_0^{(\pi)} - C_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Nous expliquons comment les coefficients $A^{(\pi)}$, $B^{(\pi)}$, $C^{(\pi)}$ se peuvent déduire des dérivées d'ordre pair des fonctions $\lambda^\pi(x)$, $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$.

Nous indiquons un procédé permettant de calculer ces coefficients à l'aide de triangles analogues à ceux de notre première Partie.

Nous déduisons de la considération de ces triangles l'expression de ces coefficients à l'aide des chemins ternaires.

Ces coefficients se présentant sous la forme de polynômes ordonnés spontanément, mais non pas par rapport aux puissances de k^2, nous exprimons, à l'aide des chemins binaires, le terme général de l'un quelconque de ces polynômes.

De cette expression, nous déduisons la fonction génératrice de ce terme général, et nous voyons qu'elle est toujours une fraction rationnelle dont le dénominateur s'écrit immédiatement.

Enfin, de cette fonction génératrice, nous concluons que notre terme général est aussi celui d'une série récurrente proprement dite; nous donnons l'équation et l'ordre de cette série; de l'équation nous tirons l'expression analytique de notre terme général, puis nous indiquons le moyen de déterminer les constantes contenues dans cette dernière expression.

5. Dans la troisième Partie :

Nous posons

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)} k^4 + \ldots + \alpha_{q,i}^{(\pi)} k^{2i} + \ldots,$$

et déterminons l'expression de $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ en fonction de q, l'indice i étant supposé constant.

Nous posons de même

$$B_q^{(\pi)} = \beta_{q,0}^{(\pi)} + \beta_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \beta_{q,2}^{(\pi)} k^4 + \ldots + \beta_{q,i}^{(\pi)} k^{2i} + \ldots,$$

et déterminons l'expression de $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ en fonction de q, l'indice i étant supposé constant.

Arrivés à $C_q^{(\pi)}$, nous constatons qu'il n'y a pas lieu de le développer suivant les puissances croissantes de k^2; nous posons donc, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes,

$$C_q^{(\pi)} = \gamma_{q,0}^{(\pi)} k^{2q} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} k^{2q-2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} k^{2q-4} + \ldots + \gamma_{q,i}^{(\pi)} k^{2q-2i} + \ldots,$$

et nous démontrons que $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ est juste égal à $\beta_{q,i}^{(\pi)}$.

Enfin nous constatons que l'expression analytique des trois fonctions $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, abstraction faite des valeurs numériques des constantes, est absolument la même pour ces trois fonctions : nous écrivons cette expression analytique, nous remarquons que chacune des fonctions $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ est le terme général d'une série récurrente proprement dite; nous donnons l'équation ainsi que l'ordre de cette série, nous montrons de quelle manière on en peut former la fonction génératrice, et nous rappelons le procédé à suivre pour déterminer les constantes qui se présentent, soit au numérateur de cette fonction génératrice, soit dans l'expression même des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$.

§ III. — Méthode employée.

6. Nous ne pouvons, en quelques mots, décrire notre méthode : ce qui précède sur l'ordre suivi par nous en donne une première idée, que la lecture du Mémoire peut seule rendre complète. Nous dirons cependant que cette méthode nous paraît toute nouvelle; qu'elle procède surtout par examen immédiat, par énumération, par considération de chemins; qu'elle se rapproche bien moins des méthodes de l'Algèbre que de celles de l'Analyse combinatoire.

§ IV. — Travaux antérieurs.

7. Comme nous l'avons déjà dit, nous nous sommes proposé de trouver l'expression explicite des coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ en fonction de q, l'indice i étant supposé constant.

8. Bien que les fonctions elliptiques aient été l'objet des recherches les plus nombreuses et les plus profondes, ce problème n'a pas, que nous sachions, reçu de solution antérieure à la nôtre.

Les seuls travaux antérieurs où l'on ait résolu, non pas le problème général que nous considérons, mais seulement un cas très-particulier soit d'un problème analogue, soit de ce problème lui-même, sont des plus récents : on les doit à F. Didon, ancien professeur à la Faculté des Sciences de Besançon; à M. C. Moreau, capitaine d'artillerie à Calais; à M. Hermite, membre de l'Institut.

9. Les résultats obtenus par F. Didon ont paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, au mois de mars 1872, sous la forme d'une question dont on demandait la solution.

Dans l'énoncé, F. Didon considère l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + au^2 + bu^4},$$

qui définit une fonction impaire u, si l'on donne $u = 0$ pour $x = 0$. Il suppose cette fonction développée suivant les puissances croissantes de x; il fait observer que, dans ce développement, la $(2n+1)^{\text{ième}}$ puissance de x est multipliée par un polynôme en a et b, homogène et du degré n; puis il considère, dans ce polynôme, le coefficient de $a^{n-1}b$ et celui de $a^{n-2}b^2$, en donne les expressions et demande qu'on les démontre.

Cet énoncé ne convient qu'à la seule fonction $\lambda(x)$; dans son développement, il regarde les polynômes qui multiplient les différentes puissances de x comme ordonnés par rapport à une quantité analogue à notre φ, mais non point par rapport à k^2; il ne donne que l'expression des deux premiers coefficients; en un mot, il ne résout qu'un cas très-particulier du problème résolu dans notre seconde Partie.

Bien que nous ignorions absolument la méthode suivie par F. Didon, la façon dont il a disposé ses résultats ne nous permet point de penser qu'il ait connu l'expression générale des coefficients considérés par lui.

Quoi qu'il en soit, ses résultats sont les premiers en date et, malgré leur défaut de généralité, ils nous paraissent fort remarquables.

10. M. C. Moreau a résolu, et semble avoir été le seul à résoudre la question posée par F. Didon. Sa solution a été insérée dans les *Nouvelles Annales*, au mois de janvier 1876.

Par une méthode purement algébrique, fondée sur la considération des fonctions génératrices, M. C. Moreau parvient aux expressions données par F. Didon, et, en outre, à celle du coefficient suivant. Mais il dispose ses résultats comme F. Didon, et, par suite, ne nous semble point connaître la forme générale des coefficients qu'il considère. Sa méthode d'ailleurs conduit à des calculs si longs et si compliqués, dont la longueur et la complication croissent si rapidement à mesure qu'on avance, que nous ne pensons pas qu'on puisse, en la suivant, parvenir à cette forme générale. Il faut reconnaître toutefois que, malgré ses défauts, cette méthode est extrêmement ingénieuse.

11. M. Hermite est le premier qui, dans cette étude des coefficients, ait considéré les polynômes qui multiplient les puissances successives de x comme ordonnés par rapport aux puissances de k^2 : il les a supposés ordonnés par rapport aux puissances croissantes; et, dans une lettre insérée au *Journal de Crelle*, en février 1876, il a donné, parmi beaucoup d'autres beaux résultats, les expressions des coefficients de k^2, de k^4 et de k^6 dans les polynômes que présentent les développements des trois fonctions elliptiques. Ces expressions n'avaient jamais été publiées par personne. Elles sont disposées de la manière la plus conforme à la loi générale. Par malheur, notre illustre géomètre n'indique point la méthode qu'il a suivie pour y parvenir et ne fait point connaître la forme générale des coefficients des diverses puissances de k^2.

12. En résumé, si remarquables qu'ils soient, les travaux antérieurs aux nôtres ne donnent que des résultats très-particuliers : ils laissent absolument intact ce problème de la forme générale des coefficients qui est l'objet principal du présent Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉRIVÉES D'ORDRE PAIR.

CHAPITRE I.

FORME DES DÉRIVÉES.

§ I. — Dérivées d'ordre quelconque.

13. Les trois fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ satisfont respectivement aux trois équations différentielles

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 = (1 - k^2) + (2k^2 - 1)\mu^2 - k^2\mu^4,$$

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 = (k^2 - 1) + (2 - k^2)\nu^2 - \nu^4,$$

desquelles on déduit immédiatement, par dérivation, les trois nouvelles équations

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^3,$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = (2k^2-1)\mu - 2k^2\mu^3,$$

$$\frac{d^2\nu}{dx^2} = (2-k^2)\nu - 2\nu^3.$$

14. Ces équations nous montrent :

D'abord que les dérivées d'ordre pair des puissances entières et positives des fonctions λ, μ, ν sont toutes des polynômes entiers par rapport à ces fonctions et complétement déterminés par les équations précédentes : en effet, λ^π, par exemple, a sa dérivée seconde entière par rapport à λ, et il en est de même de toutes ses dérivées d'ordre pair, puisque la dérivée seconde d'un polynôme entier en λ se compose de deux polynômes entiers en λ, multipliés l'un par $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$ et l'autre par $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$;

Ensuite, que les dérivées d'ordre impair de ces puissances de λ, μ, ν sont toutes irrationnelles par rapport à ces fonctions, et incomplétement déterminées par les équations précédentes : en effet, les dérivées d'ordre impair de λ^π, par exemple, sont toutes formées d'un polynôme entier en λ multiplié par l'irrationnelle $\frac{d\lambda}{dx}$, et elles ne sont complétement déterminées que si l'on donne le signe de cette irrationnelle.

15. Nous ne nous occuperons que des dérivées d'ordre pair.

§ II. — Dérivées d'ordre pair.

16. Supposons un polynôme entier, en λ, par exemple, et ne renfermant que des puissances impaires de λ. Dans sa dérivée seconde, le polynôme multiplié par $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$ ne contient que des puissances impaires de λ, et le polynôme multiplié par $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ que des puissances paires. Comme $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$ est une fonction paire et $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$ une fonction impaire, cette dérivée seconde est un polynôme entier en λ ne contenant, comme le polynôme donné, que des puissances impaires de λ. Il en est de même pour toutes les dérivées d'ordre pair du polynôme donné, et, en particulier, pour toutes les dérivées d'ordre pair des puissances impaires de λ. Comme nos raisonnements s'étendent d'ailleurs immédiatement aux fonctions μ et ν, nous pouvons écrire

$$\frac{d^{2q}\lambda^{2p+1}}{dx^{2q}} = \mathrm{L}_{q,0}^{(2p+1)}\lambda + \mathrm{L}_{q,1}^{(2p+1)}\lambda^3 + \mathrm{L}_{q,2}^{(2p+1)}\lambda^5 + \ldots,$$

$$\frac{d^{2q}\mu^{2p+1}}{dx^{2q}} = \mathrm{M}_{q,0}^{(2p+1)}\mu + \mathrm{M}_{q,1}^{(2p+1)}\mu^3 + \mathrm{M}_{q,2}^{(2p+1)}\mu^5 + \ldots,$$

$$\frac{d^{2q}\nu^{2p+1}}{dx^{2q}} = \mathrm{N}_{q,0}^{(2p+1)}\nu + \mathrm{N}_{q,1}^{(2p+1)}\nu^3 + \mathrm{N}_{q,2}^{(2p+1)}\nu^5 + \ldots,$$

17. Des raisonnements tout à fait analogues aux précédents nous montreraient que toutes les dérivées d'ordre pair des puissances paires de λ, μ, ν sont des polynômes entiers, ne contenant que des puissances paires de ces fonctions. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{d^{2q}\lambda^{2p}}{dx^{2q}} = \mathrm{L}_{q,0}^{(2p)} + \mathrm{L}_{q,1}^{(2p)}\lambda^2 + \mathrm{L}_{q,2}^{(2p)}\lambda^4 + \ldots,$$

$$\frac{d^{2q}\mu^{2p}}{dx^{2q}} = \mathrm{M}_{q,0}^{(2p)} + \mathrm{M}_{q,1}^{(2p)}\mu^2 + \mathrm{M}_{q,2}^{(2p)}\mu^4 + \ldots,$$

$$\frac{d^{2q}\nu^{2p}}{dx^{2q}} = \mathrm{N}_{q,0}^{(2p)} + \mathrm{N}_{q,1}^{(2p)}\nu^2 + \mathrm{N}_{q,2}^{(2p)}\nu^4 + \ldots.$$

CHAPITRE II.

INTRODUCTION DE LA FONCTION $\varphi(x)$.

§ I. — Propriétés de la fonction $\varphi(x)$.

18. Nous désignons par $\varphi(x)$ une fonction de x satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \mathfrak{F} + \mathfrak{P}\varphi^2 + \mathfrak{G}\varphi^4,$$

et, par suite, à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \mathfrak{V}\varphi + 2\mathcal{G}\varphi^3,$$

qui se déduit de la précédente par dérivation.

19. Par des raisonnements analogues à ceux du Chapitre précédent, nous verrions que les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ sont des polynômes entiers en φ, parfaitement déterminés, tandis que les dérivées d'ordre impair sont des fonctions irrationnelles de φ, imparfaitement déterminées.

20. Nous verrions de même que les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ sont des fonctions de x impaires ou paires, suivant que l'exposant π est lui-même impair ou pair, de façon que nous avons

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \mathrm{F}_{q,0}^{(2p+1)}\varphi + \mathrm{F}_{q,1}^{(2p+1)}\varphi^3 + \mathrm{F}_{q,2}^{(2p+1)}\varphi^5 + \ldots,$$

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p}}{dx^{2q}} = \mathrm{F}_{q,0}^{(2p)}\varphi + \mathrm{F}_{q,1}^{(2p)}\varphi^2 + \mathrm{F}_{q,2}^{(2p)}\varphi^4 + \ldots.$$

§ II. — Emploi de la fonction $\varphi(x)$.

21. Les coefficients $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{V}$, $\mathcal{G}$ étant indéterminés, il est bien clair que les six équations (13) du Chapitre précédent sont contenues, comme cas particuliers, dans les deux équations (18) du Chapitre actuel. Mais les dérivées d'ordre pair des fonctions $\lambda^\pi(x)$, $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$ ne dépendent (14) que des six premières équations, de même que les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$ ne dépendent que des deux dernières. Ces dérivées-là sont donc contenues dans ces dérivées-ci comme cas particuliers.

22. Il nous suffit, par conséquent, d'étudier les dérivées d'ordre pair de $\varphi^\pi(x)$: c'est ce que nous allons faire. Quant au passage de ces dérivées des puissances de φ à celles des puissances de λ, μ, ν, il n'y aura, pour l'effectuer, qu'à remplacer, dans tous nos résultats,

$$\varphi,\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{V},\ \mathcal{G},\ \mathrm{F},\ f$$

respectivement par

$$\begin{array}{llllll} \lambda, & 1, & -(1+k^2), & k^2, & \mathrm{L}, & l, \\ \mu, & 1-k^2, & 2k^2-1, & -k^2, & \mathrm{M}, & m, \\ \nu, & k^2-1, & 2-k^2, & -1, & \mathrm{N}, & n. \end{array}$$

CHAPITRE III.

CALCUL DES DÉRIVÉES D'ORDRE PAIR.

§ I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$.

23. Nous avons posé (20)

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \mathrm{F}_{q,0}^{(2p+1)}\varphi + \mathrm{F}_{q,1}^{(2p+1)}\varphi^3 + \mathrm{F}_{q,2}^{(2p+1)}\varphi^5 + \ldots.$$

Il s'ensuit que le calcul de la dérivée d'ordre $2q$ de la fonction $\varphi^{2p+1}(x)$ revient à celui des quantités

$$\mathrm{F}_{q,0}^{(2p+1)}, \quad \mathrm{F}_{q,1}^{(2p+1)}, \quad \mathrm{F}_{q,2}^{(2p+1)},$$

24. Pour calculer ces quantités, considérons la dérivée d'ordre $2q-2$. D'après ce qui précède, nous avons

$$\frac{d^{2q-2}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q-2}} = \sum_r \mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)}\varphi^{2r+1}.$$

Il en résulte

$$\frac{d^{2q-1}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q-1}} = \frac{d\varphi}{dx}\sum_r (2r+1)\,\mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)}\varphi^{2r},$$

et par suite

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\sum_r (2r+1)\,\mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)}\varphi^{2r} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\sum_r (2r+1)\,2r\,\mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)}\varphi^{2r-1},$$

et, enfin,

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \sum\nolimits_r (2r+1)\,\mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)}\left[(2r)\,\mathcal{A}\varphi^{2r-1} + (2r+1)\,\mathcal{B}\,\varphi^{2r+1} + (2r+2)\,\mathcal{G}\varphi^{2r+3}\right].$$

Cette dernière égalité, comparée à celle qu'on a écrite (**23**), nous donne la relation

$$\mathrm{F}_{q,r}^{(2p+1)} = (2r-1)(2r)\,\mathcal{G}\,\mathrm{F}_{q-1,r-1}^{(2p+1)} + (2r+1)^2\,\mathcal{B}\,\mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)} + (2r+2)(2r+3)\,\mathcal{A}\,\mathrm{F}_{q-1,r+1}^{(2p+1)},$$

qui lie entre elles les quatre quantités

$$\mathrm{F}_{q,r}^{(2p+1)},\quad \mathrm{F}_{q-1,r-1}^{(2p+1)},\quad \mathrm{F}_{q-1,r}^{(2p+1)},\quad \mathrm{F}_{q-1,r+1}^{(2p+1)},$$

et qui, nous fournissant la première à l'aide des trois autres, nous permet de calculer les $\mathrm{F}_q^{(2p+1)}$ à l'aide des $\mathrm{F}_{q-1}^{(2p+1)}$.

25. Mais, avant de procéder à ce calcul, nous pouvons tirer de cette relation le nombre des termes de la dérivée d'ordre $2q$ de la fonction $\varphi^{2p+1}(x)$.

Cette formule nous montre, en effet, que, si $q-1$ est inférieur à p, il s'introduit deux termes nouveaux quand on passe de la dérivée d'ordre $2q-2$ à la dérivée d'ordre $2q$, mais qu'il ne s'en introduit qu'un seul dans tous les autres cas.

Par suite, le premier terme de cette dernière dérivée contient φ avec l'exposant $2(p-q)+1$ ou l'exposant 1, suivant que q est inférieur à p ou qu'il lui est, soit égal, soit supérieur. Le dernier terme contient toujours φ avec l'exposant $2(p+q)+1$; donc, lorsque q est inférieur à p, le nombre des termes de la dérivée est $2q+1$, et, dans tous les autres cas, il est $p+q+1$.

On a donc

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}} = \sum_{r'}^{p+q}{}_r\,\mathrm{F}_{q,r}^{(2p+1)}\,\varphi^{2r+1},$$

la limite inférieure r' étant égale à $p-q$ si p est plus grand que q, et à zéro dans tous les autres cas.

26. Revenons au calcul des quantités $F_{q,0}^{(2p+1)}$, $F_{q,1}^{(2p+1)}$, $F_{q,2}^{(2p+1)}$, ..., et formons un tableau de ces quantités, en cette sorte

$$
\begin{array}{c}
F_{0,p}^{(2p+1)}, \\
F_{1,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{1,p}^{(2p+1)} \quad F_{1,p+1}^{(2p+1)}, \\
F_{2,p-2}^{(2p+1)} \quad F_{2,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{2,p}^{(2p+1)} \quad F_{2,p+1}^{(2p+1)} \quad F_{2,p+2}^{(2p+1)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
F_{q-1,0}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,1}^{(2p+1)} \dots F_{q-1,p-2}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p+1}^{(2p+1)} \quad F_{q-1,p+2}^{(2p+1)} \dots F_{q-1,p+q-1}^{(2p+1)}, \\
F_{q,0}^{(2p+1)} \quad F_{q,1}^{(2p+1)} \dots F_{q,p-2}^{(2p+1)} \quad F_{q,p-1}^{(2p+1)} \quad F_{q,p}^{(2p+1)} \quad F_{q,p+1}^{(2p+1)} \quad F_{q,p+2}^{(2p+1)} \dots F_{q,p+q-1}^{(2p+1)} \quad F_{q,p+q}^{(2p+1)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

La relation précédente (24) nous montre que, dans ce tableau, chaque terme $F_{q,t}^{(2p+1)}$ d'une ligne horizontale se déduit des trois termes les plus voisins de la ligne horizontale immédiatement supérieure par l'opération suivante :

On multiplie :

Le terme *à gauche* au-dessus par.	$(2r-1)(2r)\mathcal{G}$
Le terme *verticalement* au-dessus par. . . .	$(2r+1)^2\mathcal{P}$
Le terme *à droite* au-dessus par.	$(2r+2)(2r+3)\mathcal{D}$

puis on ajoute les trois produits obtenus.

27. On peut même donner au calcul une disposition telle, que le calculateur soit dispensé de se préoccuper des indices des quantités F.

Considérons, en effet, deux lignes horizontales quelconques, mais consécutives, du tableau précédent. Au haut de la colonne verticale remplie par les F dont le second indice inférieur est r, marquons le nombre impair $2r+1$, et faisons de même pour toutes les colonnes verticales contenant des F; au haut de chaque colonne vide séparant deux des colonnes pleines précédentes, marquons le nombre pair compris entre les nombres impairs de ces deux colonnes pleines, nous obtenons le tableau suivant :

...	$2r-3$	$2r-2$	$2r-1$	$2r$	$2r+1$	$2r+2$	$2r+3$	$2r+4$	$2r+5$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

et la règle pourra être énoncée ainsi :

Pour obtenir un F *à l'aide des trois* F *supérieurs dont il dépend, on multiplie chacun de ceux-ci :*

Par le nombre impair marqué au haut de sa colonne ;

Par le nombre pair ou impair, marqué au haut de la colonne vide ou pleine, qu'il faut traverser ou suivre pour aller à lui en partant du coefficient F *que l'on cherche ;*

Par la quantité $\mathfrak{D}$, *la quantité* $\mathcal{G}$ *ou la quantité* $\mathfrak{V}$, *suivant qu'on arrive à lui en montant à droite, à gauche ou verticalement ;*

Enfin on ajoute les trois produits obtenus.

§ II. — Puissances paires de $\varphi(x)$.

28. Nous avons posé (20),

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p}}{dx^{2q}} = F_{q,0}^{(2p)} + F_{q,1}^{(2p)}\varphi^2 + F_{q,2}^{(2p)}\varphi^4 + \ldots .$$

Le calcul de la dérivée d'ordre $2q$ de la fonction $\varphi^{2p}(x)$ revient, par conséquent, à celui des quantités

$$F_{q,0}^{(2p)},\quad F_{q,1}^{(2p)},\quad F_{q,2}^{(2p)},\quad \ldots .$$

29. Par des raisonnements et des calculs tout à fait analogues aux précédents (24), nous trouvons

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p}}{dx^{2q}} = \sum_r (2r)\, F_{q-1,r}^{(2p)}\left[(2r-1)\,\mathfrak{D}\varphi^{2r-2} + (2r)\,\mathfrak{V}\varphi^{2r} + (2r+1)\,\mathcal{G}\varphi^{2r+2}\right],$$

et, par suite,

$$F_{q,r}^{(2p)} = (2r-2)(2r-1)\,\mathcal{G}F_{q-1,r-1}^{(2p)} + (2r)^2\,\mathfrak{V}F_{q-1,r}^{(2p)} + (2r+1)(2r+2)\,\mathfrak{D}F_{q-1,r+1}^{(2p)}.$$

Cette dernière formule lie entre elles les quatre quantités

$$F^{(2p)}_{q,r}, \quad F^{(2p)}_{q-1,r-1}, \quad F^{(2p)}_{q-1,r}, \quad F^{(2p)}_{q-1,r+1},$$

et permet de calculer la première à l'aide des trois autres.

30. Cette formule nous montre d'abord que le nombre des termes de la dérivée d'ordre pair $2q$ de la fonction $\varphi^{2p}(x)$ est égal à $2q+1$ tant que q est inférieur à p et à $p+q+1$ dans tous les autres cas, et il s'ensuit que nous pouvons écrire

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p}}{dx^{2q}} = \sum_{r'}^{p+q} {}_r \, F^{(2p)}_{q,r}\,\varphi^{2r},$$

la limite inférieure r' étant égale à $p-q$ tant que q est inférieur à p, et à zéro dans tous les autres cas.

31. Formons avec les quantités $F^{(2p)}_{q,0}$, $F^{(2p)}_{q,1}$, $F^{(2p)}_{q,2}$, ... le tableau que voici :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & F^{(2p)}_{0,p}, & & & & & & \\
 & & & F^{(2p)}_{1,p-1} & F^{(2p)}_{1,p} & F^{(2p)}_{1,p+1}, & & & & & \\
 & & F^{(2p)}_{2,p-2} & F^{(2p)}_{2,p-1} & F^{(2p)}_{2,p} & F^{(2p)}_{2,p+1} & F^{(2p)}_{2,p+2}, & & & & \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & & & & \\
F^{(2p)}_{q-1,0} & F^{(2p)}_{q-1,1} \ldots & F^{(2p)}_{q-1,p-2} & F^{(2p)}_{q-1,p-1} & F^{(2p)}_{q-1,p} & F^{(2p)}_{q-1,p+1} & F^{(2p)}_{q-1,p+2} \ldots & F^{(2p)}_{q-1,p+q-1}, & & & \\
F^{(2p)}_{q,0} & F^{(2p)}_{q,1} \ldots & F^{(2p)}_{q,p-2} & F^{(2p)}_{q,p-1} & F^{(2p)}_{q,p} & F^{(3p)}_{q,p+1} & F^{(2p)}_{q,p+2} \ldots & F^{(2p)}_{q,p+q-1} & F^{(2p)}_{q,p+q}, & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & &
\end{array}$$

La relation (29) nous montre que, dans ce tableau, chaque quantité $F^{(2p)}_{q,r}$ d'une ligne horizontale se déduit des trois quantités les plus voisines de la ligne horizontale immédiatement supérieure par l'opération suivante :

On multiplie

La quantité *à gauche* au-dessus par...... . $(2r-2)(2r-1)\mathcal{G}$
La quantité *verticalement* au-dessus par..... $(2r)^2\mathcal{V}$
La quantité *à droite* au-dessus par....... . $(2r+1)(2r+2)\mathcal{D}$

puis on ajoute les trois produits obtenus.

32. Pour calculer les quantités $F^{(2p)}$ sans avoir à nous préoccuper de leurs indices inférieurs, prenons deux lignes horizontales quelconques, mais consécutives du tableau précédent; au haut de la colonne verticale remplie par les F dont le second indice inférieur est r, marquons le nombre pair $2r$, et faisons de même pour toutes les colonnes verticales contenant des F; au haut de chaque colonne verticale vide séparant deux des colonnes pleines précédentes, marquons le nombre impair compris entre les nombres pairs de ces deux colonnes pleines; nous obtenons le tableau suivant :

...	$2r-4$	$2r-3$	$2r-2$	$2r-1$	$2r$	$2r+1$	$2r+2$	$2r+3$	$2r+4$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	F	...	F	...	F	...	F	...	F	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

et la règle précédente (31) pourra être énoncée ainsi :

Pour obtenir un F *à l'aide des trois* F *supérieurs dont il dépend, on multiplie chacun de ceux-ci :*

Par le nombre pair marqué au haut de sa colonne ;

Par le nombre impair ou pair marqué au haut de la colonne vide ou pleine qu'il faut traverser ou suivre pour aller à lui en partant du coefficient F *que l'on cherche ;*

Par la quantité $\mathcal{D}$, *la quantité* $\mathcal{G}$ *ou la quantité* $\mathcal{V}$, *suivant qu'on arrive à lui en montant à droite, à gauche ou verticalement ;*

Enfin on ajoute les trois produits obtenus.

CHAPITRE IV.

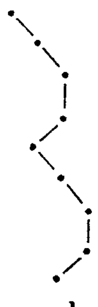
EXPRESSION DES $F^{(n)}$ A L'AIDE DES CHEMINS TERNAIRES.

§ I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$.

33. Supposons qu'on ait calculé par la seconde règle (**27**) le triangle des quantités $F^{(2p+1)}$; mais que, dans le cours des calculs, on n'ait effectué aucune réduction. La quantité $F^{(2p+1)}_{q,r}$ sera un polynôme composé de plusieurs termes contenant chacun un coefficient numérique et une puissance d'exposant positif ou nul de chacune des quantités $\mathcal{G}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$.

34. Le nombre de ces termes est évidemment celui des chemins qui conduisent du premier polynôme $F^{(2p+1)}_{0,p}$ du tableau au polynôme considéré $F^{(2p+1)}_{q,r}$, ou qui permettent de remonter de celui-ci à celui-là conformément à la règle, c'est-à-dire en ne passant jamais d'un F quelconque qu'à l'un des trois F les plus voisins de la ligne horizontale qui suit ou précède immédiatement.

35. Pour préciser autant que possible, supposons maintenant, comme dans tout ce qui va suivre, ces chemins parcourus de bas en haut. Si nous marquons un point à tous les F placés sur l'un quelconque d'entre eux, et si nous traçons, en même temps, les droites qui joignent chacun de ces points au suivant, nous obtenons une ligne brisée, analogue à celle de la figure ci-contre, qui présente évidemment des points, des traits verticaux et des traits obliques, montant à 45 degrés, les uns vers la droite, les autres vers la gauche.



Ces chemins présentant ainsi des traits de trois sortes, nous les nommons *chemins ternaires*.

36. A l'un quelconque de ces chemins correspond un des termes du polynôme $F^{(2p+1)}_{q,r}$. Ce terme est le produit de tous les facteurs apportés par chacun des traits verticaux ou obliques et par chacun des points, à l'exception du point de départ, qui constituent le chemin. Il résulte d'ailleurs immédiatement de la loi de formation (27) du tableau des $F^{(2p+1)}$ que tout point, sauf le point de départ, apporte le nombre impair de sa colonne; que tout trait montant soit verticalement, soit à gauche, soit à droite, apporte le nombre impair ou pair de la colonne qu'il suit ou traverse, multiplié soit par $\mathcal{V}$, soit par $\mathcal{G}$, soit par $\mathcal{D}$.

37. Un chemin ternaire quelconque, montant du polynôme considéré $F_{q,r}^{(2p+1)}$ au polynôme initial $F_{0,p}^{(2p+1)}$, contient $q+1$ points et q traits tant verticaux qu'obliques. Si l'on désigne par v le nombre des traits verticaux, par d celui des traits montant vers la droite, par g celui des traits montant vers la gauche, on a évidemment, entre v, d, g, p, q et r, les deux relations

$$d+g=q-v,$$

$$d+r=g+p.$$

38. Un chemin ternaire est complétement déterminé lorsqu'on connaît les seconds indices inférieurs des F placés aux points où il passe, et l'ordre dans lequel ces points se succèdent. Les seconds indices inférieurs correspondant à deux points consécutifs sont d'ailleurs deux nombres égaux ou ne différant entre eux, dans un sens ou dans l'autre, que d'une seule unité. Il suffit donc, pour former l'un quelconque des chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$, d'écrire une suite de $q+1$ nombres entiers et non négatifs, dont le premier soit r et le dernier p, et tels que la différence de deux consécutifs d'entre eux soit toujours l'un des trois nombres -1, 0, $+1$.

Le chemin étant déterminé, le terme qui lui correspond dans le polynôme $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est déterminé également, car ce terme est le produit des facteurs apportés par les éléments du chemin, et nous savons (36) quel facteur apporte chaque élément.

39. Considérons un chemin ternaire quelconque, montant de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$. Appelons, en général, h_t et v_t le nombre des points et le nombre des traits verticaux de ce chemin, placés sur la colonne pleine marquée $2t+1$; appelons de même d_t et g_t le nombre des traits obliques montant vers la droite et celui des traits obliques montant vers la gauche qui traversent la colonne vide marquée $2t$. Les lettres v, g, d, conservant leurs significations précédentes (37), nous aurons

$$\begin{aligned} h_0+h_1+h_2+h_3+\ldots &= q+1, \\ v_0+v_1+v_2+v_3+\ldots &= v, \\ g_1+g_2+g_3+\ldots &= g, \\ d_1+d_2+d_3+\ldots &= d; \end{aligned}$$

et le terme de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ correspondant à ce chemin sera le produit

$$\frac{1}{2r+1}\, 1^{h_0}\, 3^{h_1}\, 5^{h_2}\, 7^{h_3}\ldots 1^{v_0}\, 3^{v_1}\, 5^{v_2}\, 7^{v_3}\ldots 2^{g_1}\, 4^{g_2}\, 6^{g_3}\ldots 2^{d_1}\, 4^{d_2}\, 6^{d_3}\ldots \mathfrak{V}^v \mathfrak{G}^g \mathfrak{D}^d,$$

qu'on peut écrire aussi

$$\frac{1}{2r+1}\, 1^{h_0+v_0}\, 3^{h_1+v_1}\, 5^{h_2+v_2}\, 7^{h_3+v_3}\ldots 2^{g_1+d_1}\, 4^{g_2+d_2}\, 6^{g_3+d_3}\ldots \mathfrak{V}^v \mathfrak{G}^g \mathfrak{D}^d,$$

le facteur $\frac{1}{2r+1}$ provenant, dans chacun de ces deux produits, de ce que le point de départ, qu'on a compté dans h_r, n'apporte absolument rien.

40. Si donc on convient que le signe $\sum$ s'étende à tous les chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$, on a identiquement

$$F_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1}\sum\left(1^{h_0+v_0}\, 3^{h_1+v_1}\, 5^{h_2+v_2}\, 7^{h_3+v_3}\ldots 2^{g_1+d_1}\, 4^{g_2+d_2}\, 6^{g_3+d_3}\ldots \mathfrak{V}^v \mathfrak{G}^g \mathfrak{D}^d\right).$$

41. D'après ce qui précède, deux points ou deux traits de même direction, par cela seul qu'ils appartiennent à la même colonne verticale, donnent les mêmes facteurs dans le résultat. Ces deux points, comme ces deux traits, peuvent donc, à l'égard de ce résultat, être dits *points* ou *traits équivalents*. Par suite, parmi les chemins ternaires ayant les mêmes extrémités, tous ceux qui se composent d'éléments équivalents chacun à chacun donnent finalement des termes identiques.

Distribuons les chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$ en groupes, tels que tous les chemins d'un même groupe soient ainsi composés d'éléments équivalents chacun à chacun; appelons Ω le nombre des chemins du groupe dont fait partie le chemin type considéré ci-dessus (39); et convenons d'étendre le signe $\sum$ non plus, comme plus haut (40), à tous les chemins ternaires, mais seulement à tous les groupes de ces chemins; nous pourrons écrire

$$F_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \left(1^{h_0+v_0}\, 3^{h_1+v_1}\, 5^{h_2+v_2} \ldots 2^{g_1+d_1}\, 4^{g_2+d_2}\, 6^{g_3+d_3} \ldots \mathcal{V}^{v} \mathcal{G}^{g} \mathcal{D}^{d} \right).$$

§ II. — Puissances paires de $\varphi(x)$.

42. Si, dans le calcul du tableau des $F^{(2p)}$, on n'effectue aucune réduction, la quantité $F_{q,r}^{(2p)}$ est un polynôme dont tous les termes contiennent un coefficient numérique et une puissance positive ou nulle de chacune des quantités $\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}$.

Le nombre de ces termes est évidemment celui des chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p)}$ à $F_{0,p}^{(2p)}$.

Chacun de ces chemins peut être représenté par une suite de points et de traits verticaux ou obliques et fournit un terme dans le polynôme $F_{q,r}^{(2p)}$. Ce terme est le produit des facteurs apportés par les différents éléments du chemin, et il résulte évidemment de la loi de formation (32) du tableau des $F^{(2p)}$ que tout point, sauf le point de départ, apporte le nombre pair de sa colonne; que tout trait montant soit verticalement, soit à gauche, soit à droite, apporte le nombre pair ou impair de la colonne qu'il suit ou traverse multiplié soit par $\mathcal{V}$, soit par $\mathcal{G}$, soit par $\mathcal{D}$.

43. Un chemin ternaire quelconque, montant de $F_{q,r}^{(2p)}$ à $F_{0,p}^{(2p)}$, contient $q+1$ points et q traits; et si l'on appelle v, g, d les nombres respectifs des traits montant soit verticalement, soit à gauche, soit à droite, on a

$$d + g = q - v,$$
$$d + r = g + p;$$

Le chemin est déterminé quand on connaît les seconds indices inférieurs des $F^{(2p)}$ placés aux points où il passe. Pour former un chemin, il suffit donc d'écrire une suite de $q+1$ nombres entiers, positifs ou nuls, dont le premier soit r et le dernier p, et tels que deux consécutifs d'entre eux aient toujours pour différence l'un des trois nombres $-1, 0, +1$.

44. Soit un chemin ternaire quelconque, montant de $F^{(2p)}_{q,r}$ à $F^{(2p)}_{0,p}$. Appelons, en général, h_t et v_t le nombre des points et le nombre des traits verticaux de ce chemin placés sur la colonne pleine marquée $2t$; appelons de même d_t et g_t le nombre des traits obliques montant vers la droite et celui des traits obliques montant vers la gauche, qui traversent la colonne vide marquée $2t+1$; nous aurons

$$\begin{aligned} h_0+h_1+h_2+h_3+\ldots &= q+1, \\ v_0+v_1+v_2+v_3+\ldots &= v, \\ g_0+g_1+g_2+g_3+\ldots &= g, \\ d_0+d_1+d_2+d_3+\ldots &= d; \end{aligned}$$

et le terme de $F^{(2p)}_{q,r}$ correspondant à ce chemin sera le produit

$$\frac{1}{2r}\,0^{h_0}\,2^{h_1}\,4^{h_2}\ldots 0^{v_0}\,2^{v_1}\,4^{v_2}\ldots 1^{g_0}\,3^{g_1}\,5^{g_2}\ldots 1^{d_0}\cdot 3^{d_1}\,5^{d_2}\ldots \mathcal{V}^v\,\mathcal{G}^g\,\mathcal{D}^d,$$

qu'on peut écrire aussi

$$\frac{1}{2r}\,0^{h_0+v_0}\,2^{h_1+v_1}\,4^{h_2+v_2}\ldots 1^{g_0+d_0}\,3^{g_1+d_1}\,5^{g_2+d_2}\ldots \mathcal{V}^v\,\mathcal{G}^g\,\mathcal{D}^d;$$

le facteur $\frac{1}{2r}$ provenant, dans chacune de ces expressions, de ce que le point de départ, qu'on a compté dans h_r, n'apporte absolument rien.

45. Si le point de départ est situé dans la première colonne verticale de gauche, le dénominateur $2r$ devient nul et fait disparaître l'un des zéros du numérateur.

En général, si le chemin ternaire que l'on considère a un point (autre que le point de départ), dans cette première colonne verticale de gauche, il fournit un terme nul. Pour épargner au calculateur la considération de pareils chemins, on peut énoncer ainsi la règle pour former un chemin ternaire : écrire une suite de $q+1$ nombres entiers et supérieurs à zéro (le point de départ pouvant seul être nul), dont le premier soit r et le dernier p, et tels que la différence de deux consécutifs d'entre eux égale toujours l'un des trois nombres -1, 0, $+1$.

46. Si nous supposons que le signe $\sum$ s'étende à tous les chemins ternaires montant de $F_{q,r}^{(2p)}$ à $F_{0,p}^{(2p)}$, même à ceux qui donnent des termes nuls, nous avons identiquement

$$F_{q,r}^{(2p)} = \frac{1}{2r}\sum\left(0^{h_0+r_0}\, 2^{h_1+r_1}\, 4^{h_2+r_2} \ldots 1^{g_0+d_0}\, 3^{g_1+d_1}\, 5^{g_2+d_2} \ldots \mathfrak{P}^r\, \mathfrak{G}^g\, \mathfrak{D}^d\right).$$

47. Groupons nos chemins ternaires de telle sorte que tous les chemins d'un même groupe présentent des éléments équivalents chacun à chacun (41); nommons Ω le nombre des chemins du groupe dont fait partie le chemin type considéré ci-dessus (44); étendons enfin le signe $\sum$, non plus comme précédemment (46) à tous les chemins, mais seulement à tous les groupes de chemins; nous pourrons écrire

$$F_{q,r}^{(2p)} = \frac{1}{2r}\sum\Omega\left(0^{h_0+r_0}\, 2^{h_1+r_1}\, 4^{h_2+r_2} \ldots 1^{g_0+d_0}\, 3^{g_1+d_1}\, 5^{g_2+d_2} \ldots \mathfrak{P}^r\, \mathfrak{G}^g\, \mathfrak{D}^d\right).$$

§ III. — Calcul des chemins ternaires.

48. Les formules que nous venons de donner, d'abord pour $F_{q,r}^{(2p+1)}$, ensuite pour $F_{q,r}^{(2p)}$, permettent de calculer chacune de ces quantités directement, c'est-à-dire sans avoir besoin de calculer auparavant aucune des quantités précédentes. Celles de ces formules qui répondent aux groupes de chemins sont un peu plus simples que les autres; mais toutes exigent que l'on forme le tableau des chemins ternaires montant soit de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ à $F_{0,p}^{(2p+1)}$, soit de $F_{q,r}^{(2p)}$ à $F_{0,p}^{(2p)}$.

49. Pour former ces chemins, on écrira toutes les suites possibles de $q+1$ nombres entiers non négatifs, dont le premier soit r et le der-

nier p, et tels que la différence de deux quelconques consécutifs d'entre eux égale toujours l'un des trois nombres -1, 0, $+1$.

On voit que le tableau des chemins pour le calcul de $F_{q,r}^{(2p)}$ sera le même que pour le calcul de $F_{q,r}^{(2p+1)}$. Seulement, dans le cas de $F_{q,r}^{(2p)}$, on supprimera, puisqu'ils ne donnent (45) que des termes nuls, tous les chemins présentant, ailleurs qu'au point de départ, un ou plusieurs zéros.

50. On abrége beaucoup la formation du tableau des chemins ternaires en écrivant d'abord les deux suites de $q+1$ nombres, correspondant, l'une au chemin qui s'écarte le plus vers la droite et l'autre à celui qui s'écarte le plus vers la gauche. Ces deux chemins sont deux chemins limites. Un nombre d'un chemin ternaire quelconque ne peut jamais être ni plus grand que le nombre de même rang du chemin limite de droite, ni plus petit que le nombre de même rang du chemin limite de gauche.

CHAPITRE V.

EXPRESSION DES $f^{(n)}$ A L'AIDE DES CHEMINS BINAIRES.

§ I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$.

51. Nous avons vu (43) que les trois nombres v, g, d, exposants respectifs des trois quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}$ dans le terme général de $F_{q,r}^{(2p+1)}$, sont liés entre eux par les deux relations

$$g+d=q-v,$$
$$d+r=g+p.$$

De la première, il résulte que $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est un polynôme homogène de degré q par rapport aux trois quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}$:

De la seconde, que la différence des exposants g et d est constante et toujours égale à celle des nombres r et p; et que, dans chaque terme de $F_{q,r}^{(2p+1)}$, g est inférieur, égal ou supérieur à d, suivant que r est de son côté inférieur, égal ou supérieur à p, c'est-à-dire suivant que, dans le tableau des quantités $F^{(2p+1)}$, la quantité considérée $F_{q,r}^{(2p+1)}$ est placée au-dessous et à gauche, verticalement au-dessous, ou bien au-dessous et à droite de la quantité initiale $F_{0,p}^{(2p+1)}$;

Des deux ensemble, que les trois exposants d'un terme quelconque de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ sont déterminés dès qu'on donne l'un quelconque d'entre eux; et, par conséquent, qu'on obtient la même suite en ordonnant, soit par rapport aux puissances décroissantes de $\mathfrak{V}$, soit par rapport aux puissances croissantes de $\mathfrak{G}$, soit par rapport aux puissances croissantes de $\mathfrak{D}$.

52. Ordonnons par rapport aux puissances décroissantes de $\mathfrak{V}$. Comme les exposants g et d ont une différence constante (dont nous représentons par e la valeur absolue), ils augmentent en même temps, chacun d'une unité, quand on passe d'un terme au suivant. Par suite, les exposants de $\mathfrak{V}$ forment une progression arithmétique dont la raison est -2 et dont le premier terme est $q-e$. Nous pouvons donc écrire

$$F_{q,r}^{(2p+1)} = f_{q,r,0}^{(2p+1)} \mathfrak{V}^{q-e} \mathfrak{G}^{\mathrm{G}} \mathfrak{D}^{\mathrm{D}} + f_{q,r,1}^{(2p+1)} \mathfrak{V}^{q-e-2} \mathfrak{G}^{\mathrm{G}+1} \mathfrak{D}^{\mathrm{D}+1} + \ldots + f_{q,r,i}^{(2p+1)} \mathfrak{V}^{q-e-2i} \mathfrak{G}^{\mathrm{G}+i} \mathfrak{D}^{\mathrm{D}+i} +$$

les exposants G et D étant égaux, le plus petit à zéro, le plus grand à e.

53. Le problème qui nous occupe est ainsi ramené à la recherche de l'expression générale de $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$.

Pour obtenir cette expression, nous remarquerons d'abord que tous les termes de $F_{q,r}^{(2p+1)}$ qui contiennent $\mathfrak{V}$ avec l'exposant $q-e-2i$ sont ceux qui proviennent des chemins ternaires présentant chacun $q-e-2i$ traits verticaux. Si, dans ces derniers, nous supprimons tous ces traits verticaux, et, en même temps, tous les points qui les surmontent immédiatement, nous obtenons, en rapprochant les tronçons restants par un mouvement de translation verticale, des chemins nouveaux contenant chacun $e+2i$ traits, tous obliques, et $e+2i+1$ points. Ces nouveaux chemins ne présentant que des traits de deux sortes, ceux qui montent vers la droite et ceux qui montent vers la gauche, nous les nommerons *chemins binaires*, les distinguant ainsi des chemins ternaires considérés jusqu'à présent.

54. Ces chemins binaires seront complétement déterminés si l'on fait connaître, dans l'ordre où ils se succèdent, les seconds indices inférieurs correspondant à leurs différents points. Pour former l'un quelconque d'entre eux, il suffit donc d'écrire une suite de $e+2i+1$ nombres, entiers et non négatifs, dont le premier soit r et le dernier p, et tels que la différence de deux quelconques consécutifs d'entre eux égale toujours l'un des deux nombres $+1$, -1.

55. Considérons l'un quelconque de ces chemins binaires, et appelons h_t, g_t, d_t les nombres respectifs de points situés sur la colonne pleine marquée $2t+1$, de traits montant vers la gauche et de traits montant vers la droite, situés sur la colonne vide marquée $2t$. Nous avons

$$\begin{aligned} h_0+h_1+h_2+h_3+\ldots &= e+2i+1,\\ g_1+g_2+g_3+\ldots &= \text{G}+i,\\ d_1+d_2+d_3+\ldots &= \text{D}+i. \end{aligned}$$

56. Cherchons de combien de chemins ternaires ce chemin binaire résulte, ou, en d'autres termes, combien de chemins ternaires on en peut déduire en y rétablissant, de toutes les manières possibles, $q-e-2i$ couples formés chacun d'un trait vertical surmonté d'un point.

Soit, en général, ϖ_t le nombre de ces couples que nous rétablissons, en les y intercalant, sur la colonne pleine marquée $2t+1$. Puisque le chemin binaire considéré (55) présente h_t points sur cette colonne, nos ϖ_t couples pourront y être placés d'autant de manières différentes qu'il y a de façons de former le nombre ϖ_t par l'addition de h_t nombres entiers positifs ou nuls. Or, si l'on convient de regarder la factorielle $0!$ comme égale à l'unité, ce dernier nombre est donné par l'expression

$$\frac{(\varpi_t+h_t-1)!}{\varpi_t!\,(h_t-1)!}.$$

Donc, si l'on décompose le nombre $q-e-2i$ en plusieurs parties $\varpi_0, \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_t, \ldots$, compatibles avec le chemin binaire considéré,

4

c'est-à-dire telles que w_t soit forcément nulle dès qu'il arrive à h_t de l'être, mais puisse être nulle sans que h_t le soit, alors, parmi les chemins ternaires fournis par le chemin binaire considéré, le nombre de ceux qui proviennent de la présente décomposition est égal à

$$\frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!(h_0-1)!}\,\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}\,\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!}\cdots$$

Donc, si l'on étend le signe $\sum$ à toutes les décompositions de $q-e-2i$ compatibles avec le chemin binaire considéré, le nombre total des chemins ternaires fournis par ce chemin binaire est donné par l'expression

$$\sum\frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!(h_0-1)!}\,\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}\,\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!}\cdots$$

57. Si l'on se rappelle ce que fournissent (36) chaque point et chaque trait vertical ou oblique d'un chemin ternaire, on voit, pour le chemin binaire considéré :

Que les points fournissent le produit

$$\frac{1}{2r+1}\,1^{h_0}3^{h_1}5^{h_2}\cdots,$$

le facteur $\frac{1}{2r+1}$ provenant de ce que le point de départ, compté dans h_r, ne fournit absolument rien ;

Que les traits montant vers la gauche fournissent le produit

$$\mathcal{G}^{\mathrm{G}+i}\,2^{g_1}4^{g_2}6^{g_3}\cdots;$$

Que les traits montant vers la droite fournissent le produit

$$\mathcal{D}^{\mathrm{D}+i}\,2^{d_1}4^{d_2}6^{d_3}\cdots;$$

Et enfin que les couples verticaux intercalés fournissent le produit

$$\mathcal{V}^{q-e-2i}\sum\frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!(h_0-1)!}\,1^{2w_0}\,\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}\,3^{2w_1}\,\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!}\,5^{2w_2}\cdots.$$

58. Mais $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ est la somme des résultats fournis par tous les chemins binaires représentés par $e+2i+1$ nombres dont le premier est r

et le dernier p. Si donc nous étendons le premier $\sum$ ci-dessous à tous ces chemins binaires, en laissant au second sa signification des deux paragraphes précédents, nous obtenons la formule suivante :

$$f_{q,r,i}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Bigg[1^{h_0} 3^{h_1} 5^{h_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots \\ \times \sum \frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!(h_0-1)!} 1^{2w_0} \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!} 3^{2w_1} \frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!} 5^{2w_2} \ldots \Bigg].$$

59. Étant donné l'un quelconque des chemins binaires considérés, on a évidemment

$$g_{t+1} + d_t = 2h_t$$

si t n'est égal ni à r ni à p;

$$g_{t+1} + d_t = 2h_t - 1$$

si t est égal à l'un des nombres r et p; et, enfin,

$$g_{t+1} + d_t = 2h_t - 2$$

si t est égal à la fois à r et à p, dans le cas où ceux-ci seraient égaux entre eux.

Évidemment aussi, on a

$$g_t = d_t,$$

si $2t$ est inférieur ou supérieur aux deux nombres $2r+1$, $2p+1$ en même temps;

$$g_t = d_t + 1,$$

lorsque r est supérieur à p et que $2t$ est compris entre $2r+1$ et $2p+1$;

$$g_t = d_t - 1,$$

lorsque r est inférieur à p et que $2t$ est aussi compris entre $2r+1$ et $2p+1$.

Il s'ensuit qu'il existe, entre les quantités $g_0, g_1, g_2, \ldots, d_0, d_1, d_2, \ldots, h_0, h_1, h_2, \ldots$, des équations du premier degré en nombre égal à celui des quantités $g_0, g_1, g_2, \ldots, d_0, d_1, d_2, \ldots$. Par suite, ces dernières quantités sont déterminées dès que l'on connaît les quantités $h_0, h_1, h_2, \ldots$. Par suite, deux chemins binaires, pour lesquels $h_0, h_1, h_2, \ldots$ ont les mêmes valeurs, sont équivalents.

60. Cela étant, assemblons les chemins binaires, de telle sorte que ceux d'un même groupe soient ainsi équivalents; appelons Ω le nombre des chemins binaires du groupe dont fait partie le chemin binaire type de la formule précédente (58); le second $\sum$ conservant toujours la même signification, et le premier s'étendant, non plus comme précédemment, à tous les chemins binaires, mais seulement à tous les groupes de ces chemins, cette formule (58) pourra s'écrire ainsi :

$$f_{a,r,i}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \Big[1^{h_0} 3^{h_1} 5^{h_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots \\ \times \sum \frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!(h_0-1)!} 1^{2w_0} \frac{(w_1+h-1)!}{w_1!(h_1-1)!} 3^{2w_1} \frac{(w_2+(h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!} 5^{2w_2} \ldots \Big].$$

§ II. — Puissances paires de $\varphi(x)$.

61. Des raisonnements analogues à ceux qui précèdent (51) nous montrent que $F_{q,r}^{(2p)}$ est un polynôme homogène du degré q par rapport aux trois quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}$; que, dans tous les termes de $F_{q,r}^{(2p)}$, la différence des exposants g et d des quantités $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{D}$ est constante et égale à celle des nombres r et p; enfin qu'on peut écrire

$$F_{q,r}^{(2p)} = f_{q,r,0}^{(2p)} \mathfrak{V}^{q-e} \mathfrak{G}^{G} \mathfrak{D}^{D} + f_{q,r,1}^{(2p)} \mathfrak{V}^{q-e-2} \mathfrak{G}^{G+1} \mathfrak{D}^{D+1} + \ldots + f_{q,r,i}^{(2p)} \mathfrak{V}^{q-e-2i} \mathfrak{G}^{D+i} \mathfrak{D}^{D+i} + \ldots,$$

la lettre e désignant la valeur absolue de la différence des nombres r et p; et les exposants G et D étant égaux, le plus grand à e et le plus petit à zéro.

62. Les termes de $F_{q,r}^{(2p)}$ qui contiennent $\mathfrak{V}$ avec l'exposant $q-e-2i$ proviennent des chemins ternaires contenant chacun $q-e-2i$ traits verticaux; et ceux-ci, par la suppression de ces traits verticaux ainsi que des points qui les surmontent immédiatement, donnent naissance à des chemins binaires que l'on formera en écrivant, de toutes les manières possibles, une suite de $e+2i+1$ nombres entiers et non négatifs, dont le premier soit r et le dernier p, et tels que la différence de deux quelconques consécutifs d'entre eux soit toujours égale à l'un des nombres -1, $+1$.

63. Considérons l'un quelconque de ces chemins binaires, et appelons h_t, g_t, d_t les nombres respectifs de points situés sur la colonne pleine marquée $2t$, de traits montant vers la gauche et de traits montant vers la droite situés sur la colonne vide marquée $2t+1$. Nous avons

$$\begin{aligned} h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + \ldots &= e + 2i + 1, \\ g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \ldots &= G + i, \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots &= D + i. \end{aligned}$$

64. Pour obtenir le nombre des chemins ternaires que donne ce chemin binaire lorsqu'on y rétablit, de toutes les manières possibles, les couples supprimés, appelons w_t le nombre de ces couples que nous rétablissons sur la colonne pleine marquée $2t$. Puisque le chemin binaire considéré présente h_t points sur cette colonne, nos w_t couples pourront y être placés d'un nombre de façons différentes, exprimé par la formule

$$\frac{(w_t + h_t - 1)!}{w_t!\,(h_t - 1)!},$$

dans laquelle on convient de regarder toujours la factorielle $0!$ comme égale à l'unité. Et, par conséquent, si l'on décompose le nombre $q - e - 2i$ en plusieurs parties w_0, w_1, w_2, ..., w_t, ..., compatibles avec le chemin binaire considéré, c'est-à-dire telles que w_t soit forcément nulle, dès qu'il arrive à h_t de l'être, mais puisse être nulle sans que h_t le soit, parmi les chemins ternaires fournis par le chemin binaire considéré, le nombre de ceux qui proviennent de la présente décomposition sera égal à

$$\frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!\,(h_0 - 1)!}\,\frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!\,(h_1 - 1)!}\,\frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!\,(h_2 - 1)!}\cdots.$$

Donc, si l'on étend le signe $\sum$ à toutes les décompositions de $q - e - 2i$ compatibles avec le chemin binaire considéré, le nombre total des chemins ternaires fournis par ce chemin binaire est donné par l'expression

$$\sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!\,(h_0 - 1)!}\,\frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!\,(h_1 - 1)!}\,\frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!\,(h_2 - 1)!}\cdots.$$

65. Pour le chemin binaire considéré, les points fournissent (42) le produit

$$\frac{1}{2r}\, 0^{h_0}\, 2^{h_1}\, 4^{h_2} \ldots,$$

le facteur $\frac{1}{2r}$ provenant de ce que le point de départ, qui est compté dans h_r, ne fournit absolument rien.

Les traits montant vers la gauche fournissent le produit

$$\mathcal{G}^{G+i}\, 1^{g_0}\, 3^{g_1}\, 5^{g_2} \ldots;$$

les traits montant vers la droite fournissent le produit

$$\mathcal{D}^{D+i}\, 1^{d_0}\, 3^{d_1}\, 5^{d_2} \ldots,$$

et enfin les couples verticaux intercalés fournissent le produit

$$\mathcal{Q}^{q-e-2i} \sum \frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!\,(h_0-1)!}\, 0^{2w_0}\, \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!\,(h_1-1)!}\, 2^{2w_1}\, \frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!\,(h_2-1)!}\, 4^{2w_2} \ldots.$$

On a donc, en étendant le premier $\sum$ ci-dessous à tous ces chemins binaires et laissant au second sa signification habituelle,

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2r} \sum \Bigg[0^{h_0}\, 2^{h_1}\, 4^{h_2} \ldots\, 1^{g_0+d_0}\, 3^{g_1+d_1}\, 5^{g_2+d_2} \ldots \\ \times \sum \frac{(w_0+h_1-1)!}{w_0!\,(h_1-1)!}\, 0^{2w_0}\, \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!\,(h_1-1)!}\, 2^{2w_1}\, \frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!\,(h_2-1)!}\, 4^{2w_2} \ldots \Bigg].$$

66. Si r devient nul, le facteur $\frac{1}{2r}$ détruit un facteur zéro du numérateur. Pour n'avoir point à s'occuper de tous ces facteurs zéros, il suffit de rejeter tous les chemins binaires donnés par les suites de nombres contenant un zéro ailleurs qu'au point de départ; de supprimer le nombre w_0 dans la décomposition de $q - e - 2i$, c'est-à-dire de décomposer seulement ce nombre en parties w_1, w_2, w_3, ...; de regarder enfin $\frac{1}{2r}$ comme égal à l'unité lorsque r devient nul. On obtient ainsi la formule plus simple

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2r} \sum \Bigg[2^{h_1}\, 4^{h_2} \ldots\, 1^{g_0+d_0}\, 3^{g_1+d_1}\, 5^{g_2+d_2} \ldots \\ \times \sum \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!\,(h_1-1)!}\, 2^{2w_1}\, \frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!\,(h_2-1)!}\, 4^{2w_2} \ldots \Bigg].$$

67. En groupant maintenant ces chemins binaires délivrés des zéros comme on l'a fait précédemment (60), on obtient la formule suivante :

$$f_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2r}\sum \Omega \Big[2^{h_1} 4^{h_2} \ldots 1^{g_0+d_0} 3^{g_1+d_1} 5^{g_2+d_2} \ldots \\ \times \sum \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!\,(h_1-1)!} 2^{2w_1} \frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!\,(h_2-1)!} 4^{2w_2} \ldots \Big].$$

§ III. — Chemins binaires.

68. Les formules qui donnent $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ et $f_{q,r,i}^{(2p)}$ reposent l'une et l'autre sur la formation des chemins binaires de $e+2i+1$ points, dont le premier correspond à l'indice r et le dernier à l'indice p. Il existe toutefois, entre les deux calculs, cette différence considérable qu'il faut, pour obtenir $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, prendre tous ces chemins, tandis que, pour obtenir $f_{q,r,i}^{(2p)}$, on doit négliger tous ceux d'entre eux qui présentent le nombre zéro ailleurs qu'au point de départ.

69. De même que pour les chemins ternaires (50), on abrége singulièrement la formation du tableau des chemins binaires en cherchant d'abord les deux chemins binaires limites, c'est-à-dire les deux chemins binaires de $e+2i+1$ nombres qui partant de r arrivent à p en s'écartant le plus possible, l'un vers la droite, l'autre vers la gauche.

70. La substitution des chemins binaires aux chemins ternaires offre ce très-grand avantage que les chemins binaires nécessaires pour calculer soit $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$, soit $f_{q,r,i}^{(2p)}$ ne dépendent absolument pas de q; par suite, ces chemins, une fois obtenus, nous donnent le moyen de calculer non pas seulement $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ et $f_{q,r,i}^{(2p)}$, mais encore tous les $f^{(\pi)}$ qui ne diffèrent de ceux-ci que par la valeur de q.

CHAPITRE VI.

FONCTION GÉNÉRATRICE DES $f^{(n)}$.

§ I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$.

71. Considérons le chemin binaire, ou plutôt le groupe des chemins binaires répondant à un système déterminé de valeurs des quantités $h_0, h_1, h_2, \ldots$, et étudions l'expression correspondante

$$\sum \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!\,(h_0 - 1)!}\, 1^{2w_0}\, \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!\,(h_1 - 1)!}\, 3^{2w_1}\, \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!\,(h_2 - 1)!}\, 5^{2w_2} \cdots$$

On retrouvera évidemment cette même expression si l'on forme les suites

$$\sum_0^\infty {}_{w_0} \frac{(w_0 + h_0 - 1)!}{w_0!\,(h_0 - 1)!}\,(1^2 z)^{w_0},$$

$$\sum_0^\infty {}_{w_1} \frac{(w_1 + h_1 - 1)!}{w_1!\,(h_1 - 1)!}\,(3^2 z)^{w_1},$$

$$\sum_0^\infty {}_{w_2} \frac{(w_2 + h_2 - 1)!}{w_2!\,(h_2 - 1)!}\,(5^2 z)^{w_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qu'on les multiplie toutes entre elles, qu'on prenne dans le produit l'ensemble des termes en z^{q-e-2i} et qu'on remplace dans ces termes z par l'unité.

Or la suite

$$\sum_0^\infty {}_{w_t} \frac{(w_t + h_t - 1)!}{w_t!\,(h_t - 1)!}\,[(2t+1)^2 z]^{w_t}$$

est justement celle qu'on obtient en développant, suivant les puissances croissantes de z, la fraction rationnelle

$$\frac{1}{[1 - (2t+1)^2 z]^{h_t}};$$

donc nous obtiendrons notre expression complète en développant, suivant les puissances croissantes de z, la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-1^2z)^{h_0}(1-3^2z)^{h_1}(1-5^2z)^{h_2}(1-7^2z)^{h_3}\ldots},$$

en prenant, dans ce développement, le terme en z^{q-e-2i}, et remplaçant, dans ce terme, z par l'unité.

72. Il suit immédiatement de là que, si nous étendons le $\sum$ ci-dessous à tous les groupes de chemins binaires servant au calcul de $f^{(2p+1)}_{q,r,i}$, il suffira, pour obtenir ce coefficient, de développer l'expression

$$\frac{1}{2r+1}\sum\Omega\,\frac{1^{h_0}\,3^{h_1}\,5^{h_2}\ldots 2^{g_1+d_1}\,4^{g_2+d_2}\,6^{g_3+d_3}\ldots}{(1-1^2z)^{h_0}(1-3^2z)^{h_1}(1-5^2z)^{h_2}(1-7^2z)^{h_3}\ldots},$$

suivant les puissances croissantes de z; de prendre dans ce développement le terme en z^{q-e-2i} et d'y remplacer z par l'unité.

73. Cette dernière expression peut s'écrire

$$\sum\frac{u}{(1-1^2z)^{h_0}(1-3^2z)^{h_1}(1-5^2z)^{h_2}\ldots},$$

u étant un numérateur qui est relatif au groupe considéré de chemins binaires, qui dépend de r, de p et de i, mais nullement de q ni de z.

74. Désignons par H_t la plus grande valeur que puisse prendre h_t dans tous les chemins binaires servant au calcul de $f^{(2p+1)}_{q,r,i}$. Ce nombre H_t est parfaitement déterminé lorsque l'on donne r, p et i. Si, en effet, on désigne par $\overline{rp}$ le plus petit et par $\overline{RP}$ le plus grand des deux nombres r et p, on obtient très-facilement les résultats suivants :

Si t est inférieur à $\overline{rp}-i$, H_t est nul;

Si t est égal ou supérieur à $\overline{rp}-i$, mais inférieur à $\overline{rp}$, H_t est égal à $i+1+t-\overline{rp}$;

Si t n'est ni inférieur à $\overline{rp}$, ni supérieur à $\overline{RP}$, H_t est égal à $i+1$;

Si t est supérieur à $\overline{RP}$, mais non à $\overline{RP}+i$, H_t est égal à $i+1-t+\overline{RP}$;

Enfin, si t est supérieur à $\overline{RP}+i$, H_t est nul.

75. Cela étant, on peut prendre, pour dénominateur commun de toutes les fractions comprises dans le $\sum$ précédent (73), le produit

$$(1-1^2z)^{H_0}(1-3^2z)^{H_1}(1-5^2z)^{H_2}\ldots[1-(2l+1)^2z]^{H_l}\ldots.$$

Il s'ensuit que la somme de toutes ces fractions peut s'écrire

$$\frac{U}{(1-1^2z)^{H_0}(1-3^2z)^{H_1}(1-5^2z)^{H_2}\ldots},$$

le dénominateur étant d'un degré η égal à

$$H_0+H_1+H_2+\ldots,$$

et le numérateur étant d'un degré inférieur à η.

Il s'ensuit aussi que cette dernière fraction est la fonction génératrice des coefficients

$$f^{(2p+1)}_{e+2i,r,i},\quad f^{(2p+1)}_{e+2i+1,r,i},\quad f^{(2p+1)}_{e+2i+2,r,i},\quad\ldots,$$

c'est-à-dire du coefficient général $f^{(2p+1)}_{q,r,i}$ considéré comme fonction de q, les indices r et i étant supposés constants.

§ II. — Puissances paires de $\varphi(x)$.

76. Considérons tous les chemins binaires répondant à un système déterminé de valeurs des quantités $h_0, h_1, h_2, \ldots$. L'expression correspondante

$$\sum\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}2^{2w_1}\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!}4^{2w_2}\ldots$$

n'est autre chose que le coefficient de z^{q-e-2i} dans le produit des suites

$$\sum_{w_1}^{\infty}\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}(2^2z)^{w_1},$$

$$\sum_{w_2}^{\infty}\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!}(4^2z)^{w_2},$$

$$\sum_{w_3}^{\infty}\frac{w_3+(h_3-1)!}{w_3!(h_3-1)!}(6^2z)^{w_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais ces suites sont justement les développements, suivant les puissances croissantes de z, des fractions rationnelles

$$\frac{1}{(1-2^2 z)^{h_1}}, \quad \frac{1}{(1-4^2 z)^{h_2}}, \quad \frac{1}{(1-6^2 z)^{h_3}}, \quad \ldots.$$

Donc l'expression considérée n'est autre chose que le coefficient de z^{q-e-2i} dans le développement, suivant les puissances croissantes de z, de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(1-2^2 z)^{h_1}(1-4^2 z)^{h_2}(1-6^2 z)^{h_3}\ldots}.$$

77. Il suit immédiatement de là que, si nous étendons le $\sum$ ci-dessous à tous les groupes de chemins binaires servant au calcul de $f_{q,r,i}^{(2p)}$, il suffira, pour obtenir ce nombre, de prendre le coefficient de z^{q-e-2i} dans le développement, suivant les puissances croissantes de z, de la fraction

$$\frac{1}{2r}\sum \Omega \frac{2^{h_1} 4^{h_2} 6^{h_3}\ldots 1^{g_0+d_0} 3^{g_1+d_1} 5^{g_2+d_2}\ldots}{(1-2^2 z)^{h_1}(1-4^2 z^{h_2}(1-6^2 z)^{h_3}\ldots}.$$

78. Cette dernière expression peut s'écrire

$$\sum \frac{u}{(1-2^2 z)^{h_1}(1-4^2 z)^{h_2}(1-6^2 z)^{h_3}\ldots},$$

u étant un numérateur qui est relatif au groupe considéré de chemins binaires, qui dépend de r, de p et de i, mais nullement de q ni de z.

79. Désignons par H_1, H_2, H_3, ... les plus grandes valeurs que puissent prendre respectivement h_1, h_2, h_3, ... dans le calcul de $f_{q,r,i}^{(2p)}$. Il est facile de voir que ces valeurs sont les mêmes que dans le cas (74) des puissances impaires.

80. Prenons pour dénominateur commun de toutes les fractions du $\sum$ précédent (78) le produit

$$(1-2^2 z)^{H_1}(1-4^2 z)^{H_2}(1-6^2 z)^{H_3}\ldots,$$

et faisons la somme de ces fractions. La fraction totale

$$\frac{U}{(1-2^2z)^{H_1}(1-4^2z)^{H_2}(1-6^2z)^{H_3}\ldots},$$

dont le numérateur est un polynôme en z d'un degré inférieur au degré du dénominateur, sera la fonction génératrice des coefficients

$$f^{(2p)}_{e+2i,r,i},\quad f^{(2p)}_{e+2i+1,r,i},\quad f^{(2p)}_{e+2i+2,r,i},\quad \ldots,$$

c'est-à-dire du coefficient général $f^{(2p)}_{q,r,i}$ regardé comme une fonction de q, les indices r et i étant supposés constants.

CHAPITRE VII.

EXPRESSION ANALYTIQUE DES $f^{(n)}$.

§ I. — Puissances impaires de $\varphi(x)$.

81. Comme nous l'avons vu (75), le coefficient $f^{(2p+1)}_{q,r,i}$ admet pour fonction génératrice la fraction rationnelle

$$\frac{U}{(1-1^2z)^{H_0}(1-3^2z)^{H_1}(1-5^2z)^{H_2}\ldots},$$

dont le numérateur est un polynôme entier en z de degré inférieur au dénominateur.

Or, depuis les travaux de Moivre, on sait qu'une pareille fraction engendre une série récurrente proprement dite, dont la loi se résume dans l'équation qu'on obtient en égalant le dénominateur à zéro, après y avoir remplacé z par $\frac{1}{z}$.

Donc les coefficients considérés sont les termes d'une série récurrente proprement dite, dont la loi est résumée par l'équation

$$(z-1^2)^{H_0}(z-3^2)^{H_1}(z-5^2)^{H_2}(z-7^2)^{H_3}\ldots=0.$$

82. Si nous appelons η le degré de cette équation, c'est-à-dire la somme

$$H_0+H_1+H_2+H_3+\ldots,$$

nous pouvons dire que les coefficients considérés forment une série récurrente proprement dite, d'ordre η. En d'autres termes, chacun de ces coefficients est une fonction linéaire déterminée des η coefficients précédents.

83. Toutes les fois que l'équation qui résume la loi d'une série récurrente proprement dite est exactement résoluble, on peut, en appliquant les règles de Lagrange, obtenir l'expression analytique du terme général de la série. Ici cette équation, non-seulement est résoluble, mais se présente spontanément résolue : nous pouvons donc écrire immédiatement la formule suivante :

$$f_{q,ri}^{(2p+1)}=\sum \xi_t(q)\,(2t+1)^q,$$

$\xi(q)$ étant un polynôme entier en q du degré H_t-1, et la caractéristique $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de t pour lesquelles H_t n'est pas nul.

84. Cette expression de $f_{q,r,i}^{(2p+1)}$ ne contient d'autres indéterminées que les coefficients numériques des polynômes $\xi_t(q)$. Ces coefficients, dans le polynôme $\xi_t(q)$, répondant à une valeur donnée de t, sont au nombre de H_t; donc, dans toute l'expression, leur nombre est égal au degré η.

Pour les déterminer, on calculera directement, d'une manière quelconque, les η premiers des coefficients considérés, ou, plus généralement, η quelconques d'entre eux; on égalera les η valeurs trouvées aux η valeurs correspondantes fournies par la formule précédente; puis on résoudra le système des η équations du premier degré ainsi obtenu.

§ II. — Puissances paires de $\varphi(x)$.

85. La fonction génératrice du coefficient $f_{q,r,i}^{(2p)}$ est (80) la fonction rationnelle

$$\frac{U}{(1-2^2z)^{H_1}(1-4^2z)^{H_2}(1-6^2z)^{H_3}\cdots}$$

On en déduit, en raisonnant comme dans ce qui précède, les résultats que voici :

Les coefficients $f_{q,r,i}^{(2p)}$, considérés comme fonctions de q, forment une série récurrente proprement dite.

La loi de cette série est résumée par l'équation

$$(z-2^2)^{H_1}(z-4^2)^{H_2}(z-6^2)^{H_3}\cdots=0.$$

Si l'on désigne par η la somme

$$H_1+H_2+H_3+\ldots,$$

cette série récurrente est de l'ordre η, de façon que chaque coefficient est une fonction linéaire déterminée des η coefficients précédents.

On peut poser

$$f_{q,r,i}^{(2p)}=\sum \xi_t(q)\,(2t)^q,$$

$\xi_t(q)$ étant un polynôme entier en q, de degré H_t-1, et la caractéristique $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de t supérieures à zéro pour lesquelles H_t n'est pas nul.

Enfin les η indéterminées que présente le second membre de cette dernière formule peuvent être calculées à l'aide du système de η équations du premier degré, qu'on obtient en égalant η valeurs des $f^{(2p)}$ obtenues directement aux η valeurs correspondantes fournies par notre formule.

DEUXIÈME PARTIE.

PREMIERS DÉVELOPPEMENTS.

CHAPITRE I.

FORME DES DÉVELOPPEMENTS.

§ I. — Développement de $\lambda^\pi(x)$.

86. La fonction elliptique $\lambda(x)$ s'annule quand x devient égal à zéro; et, pour cette même valeur de x, sa dérivée première $\frac{d\lambda}{dx}$ se réduit à l'unité.

Il résulte de là, et de ce que nous avons dit (14) sur les dérivées de $\lambda(x)$, que, pour x égal à zéro, toutes les dérivées d'ordre pair de $\lambda(x)$ s'annulent, tandis que les dérivées d'ordre impair ne s'annulent point.

Par suite, $\lambda(x)$ est une fonction impaire de x et nous pouvons écrire

$$\lambda(x) = A_0^{(1)}\frac{x}{1!} - A_1^{(1)}\frac{x^3}{3!} + A_2^{(1)}\frac{x^5}{5!} - A_3^{(1)}\frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

87. On voit ainsi que $\lambda(x)$ est égal à x multiplié par une fonction paire de x. Il s'ensuit que $\lambda^\pi(x)$ est le produit de x^π par une fonction paire de x, et, par suite, que l'on a

$$\lambda^\pi(x) = A_0^{(\pi)}\frac{x^\pi}{\pi!} - A_1^{(\pi)}\frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)}\frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - A_3^{(\pi)}\frac{x^{\pi+6}}{(\pi+6)!} + \ldots.$$

La fonction $\lambda^\pi(x)$ est donc une fonction paire ou impaire de x, suivant que l'exposant π est lui-même pair ou impair.

§ II. — Développements de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

88. Les deux fonctions elliptiques $\mu(x)$ et $\nu(x)$ deviennent égales chacune à l'unité lorsque x devient égal à zéro; et, pour cette même valeur de x, les dérivées premières $\frac{d\mu}{dx}$, $\frac{d\nu}{dx}$ s'annulent l'une et l'autre.

Il suit de là, et de ce que nous avons dit (14) sur les dérivées des fonctions elliptiques, que toutes les dérivées d'ordre impair de $\mu(x)$ et de $\nu(x)$ s'annulent en même temps que x, tandis que les dérivées d'ordre pair ne s'annulent point. Les fonctions $\mu(x)$ et $\nu(x)$ sont donc toutes deux des fonctions paires de x; nous pouvons donc écrire

$$\mu(x) = B_0^{(1)} - B_1^{(1)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(1)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(1)} \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$\nu(x) = C_0^{(1)} - C_1^{(1)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(1)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(1)} \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

89. Les puissances $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$ sont aussi, par conséquent, des fonctions paires de x; donc nous avons

$$\mu^\pi(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$\nu^\pi(x) = C_0^{(\pi)} - C_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

CHAPITRE II.

EMPLOI DES DÉRIVÉES D'ORDRE PAIR.

§ I. — Développement de $\lambda^\pi(x)$.

90. Le calcul du développement de $\lambda^\pi(x)$ n'est autre chose que celui des coefficients $A^{(\pi)}$. L'emploi de nos dérivées d'ordre pair permet d'effectuer ce calcul, car, comme nous allons le montrer, les coefficients $A^{(\pi)}$ s'expriment d'une manière extrêmement simple à l'aide des quantités $L^{(\pi)}$.

91. Considérons d'abord $A_q^{(2p+1)}$. Ce coefficient est égal à $(-1)^q$ multiplié par le résultat de la substitution de zéro à x dans la dérivée d'ordre impair $2(p+q)+1$ de la fonction $\lambda^{2p+1}(x)$. Or cette dérivée, pour cette valeur de x, devient justement égale au coefficient de la première puissance de λ dans la dérivée immédiatement précédente, dont l'ordre est pair et égal à $2(p+q)$. Ce dernier coefficient est $L_{p+q,0}^{(2p+1)}$; donc

$$A_q^{(2p+1)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p+1)}.$$

92. Considérons maintenant $A_q^{(2p)}$. Ce coefficient est égal à $(-1)^q$ multiplié par le résultat de la substitution de zéro à x dans la dérivée d'ordre pair $2(p+q)$ de la fonction $\lambda^{2p}(x)$. Ce résultat n'est autre que le premier terme de cette dérivée, ordonnée suivant les puissances croissantes de λ. Ce premier terme est $L_{p+q,0}^{(2p)}$. Donc

$$A_q^{(2p)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p)}.$$

§ II. — Développements de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

93. Calculer les développements de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$, c'est calculer les coefficients $B^{(\pi)}$ et $C^{(\pi)}$. L'emploi de nos dérivées d'ordre pair suffit pour effectuer ce calcul; car, comme nous allons le voir, ces coefficients $B^{(\pi)}$, $C^{(\pi)}$ s'expriment d'une manière très-simple à l'aide des quantités $M^{(\pi)}$, $N^{(\pi)}$.

94. Les coefficients $B_q^{(\pi)}$, $C_q^{(\pi)}$ ne sont autre chose que les produits par $(-1)^q$ des résultats de la substitution de zéro à x dans les dérivées d'ordre pair $2q$ des fonctions $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$. Or, pour cette valeur de x, les fonctions μ et ν se réduisent chacune à l'unité. Par suite, les dérivées considérées se réduisent l'une et l'autre à la somme de leurs coefficients, et nous avons

$$B_q^{(\pi)} = (-1)^q \sum_r M_{q,r}^{(\pi)},$$

$$C_q^{(\pi)} = (-1)^q \sum_r N_{q,r}^{(\pi)},$$

le signe $\sum$, dans chacune de ces formules, s'étendant à toutes les valeurs de r compatibles avec la valeur donnée de π et la valeur donnée de q.

CHAPITRE III.

CALCUL DES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS.

---

§ I. — Développement de $\lambda^\pi(x)$.

95. D'après ce qui précède, pour obtenir les coefficients $A_1^{(\pi)}$, $A_2^{(\pi)}$, $A_3^{(\pi)}, \ldots$ du développement de $\lambda^\pi(x)$, il suffit d'opérer ainsi :

Former le tableau des $F^{(\pi)}$ conformément aux règles données dans notre première Partie;

Prendre les $F_{q,0}^{(\pi)}$ qui en constituent la première colonne verticale à gauche;

Remplacer, dans ces derniers termes, les quantités $\mathfrak{D}$, φ, $\mathcal{G}$ respectivement par 1, $-(1+k^2)$, k^2;

Enfin donner aux résultats obtenus le signe $+$ ou le signe $-$ alternativement.

96. Pour bien attribuer aux résultats les signesq ui leur conviennent, il est bon de remarquer que le premier terme $F_{q,0}^{(\pi)}$ qui ne s'annule point a toujours le signe $+$.

On peut voir d'ailleurs facilement qu'on n'a plus du tout à se préoccuper des signes des résultats, et qu'on obtient exactement et immédiatement les coefficients de $\lambda^\pi(x)$, si, remplaçant toujours dans les $F_{q,0}^{(\pi)}$ les quantités $\mathfrak{D}$ et $\mathcal{G}$ par 1 et par k^2, on substitue à φ, non plus $-(1+k^2)$, mais simplement $1+k^2$.

§ II. — Développements de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

97. D'après ce qui précède, pour obtenir les coefficients $B^{(\pi)}$, $C^{(\pi)}$ des développements des fonctions $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$, il suffit d'opérer ainsi :

Former le tableau des $F^{(\pi)}$ d'après les règles données;

Dans les termes de ce tableau, remplacer les quantités $\mathfrak{D}$, φ, $\mathcal{G}$ respectivement par $1-k^2$, $2k^2-1$, $-k^2$, ce qui donne le tableau des $M^{(\pi)}$; puis par k^2-1, $2-k^2$, -1, ce qui fournit celui des $N^{(\pi)}$;

Enfin faire la somme des $M^{(\pi)}$ et celle des $N^{(\pi)}$ de chaque ligne horizontale, en ayant soin de multiplier par $(-1)^q$ la somme des termes de la ligne d'indice q.

Ces sommes ainsi multipliées forment les unes la suite des $B^{(\pi)}$, les autres celle des $C^{(\pi)}$.

§ III. — Abréviations.

98. Nos moyens de calculer les quantités $F^{(\pi)}$, $L^{(\pi)}$, $M^{(\pi)}$, $N^{(\pi)}$ sont tout à fait analogues à ceux qu'on emploie pour former le triangle de Pascal. Vu la difficulté bien connue des présentes recherches, on peut regarder ces moyens comme simples. Voici quelques remarques permettant d'abréger les calculs.

99. Si l'on veut calculer les développements des trois fonctions $\lambda^\pi(x)$, $\mu^\pi(x)$, $\nu^\pi(x)$, il suffit de former le seul tableau des $F^{(\pi)}$, puisque ce tableau fait connaître, par sa colonne verticale de gauche, les coefficients de $\lambda^\pi(x)$, et, par ses lignes horizontales, ceux de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

100. Si l'on ne demande que le développement de $\lambda^\pi(x)$, et qu'on s'arrête au terme $F^{(\pi)}_{q,0}$, on peut se dispenser, en formant le tableau des $F^{(\pi)}$, de calculer tous les $F^{(\pi)}$ qui se trouveraient au-dessous de la droite indéfinie menée par les deux termes $F^{(\pi)}_{q,0}$, $F^{(\pi)}_{q-1,1}$.

101. Si l'on ne cherche que les développements de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$, et que l'on ne veuille pas aller, dans le tableau des $F^{(\pi)}$, au delà de la ligne horizontale d'ordre q, il est inutile de calculer les différents termes de cette dernière ligne : on peut obtenir leur somme, d'une manière fort simple, à l'aide des termes de la ligne précédente.

Reprenons, en effet, les formules

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p+1}}{dx^{2q}}=\sum_r (2r+1)\,F^{(2p+1)}_{q-1,r}\left[(2r)\,\mathcal{D}\varphi^{2r-1}+(2r+1)\,\mathcal{V}\varphi^{2r+1}+(2r+2)\,\mathcal{G}\varphi^{2r+3}\right],$$

$$\frac{d^{2q}\varphi^{2p}}{dx^{2q}}=\sum_r (2r)\,F^{(2p)}_{q-1,r}\left[(2r-1)\,\mathcal{D}\varphi^{2r-2}+(2r)\,\mathcal{V}\varphi^{2r}+(2r+1)\,\mathcal{G}\varphi^{2r+2}\right],$$

que nous avons établies précédemment (24 et 29). Pour φ égal à l'unité, elles deviennent

$$\sum_r F_{q,r}^{(2p+1)} = \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)} [(2r)\mathfrak{D} + (2r+1)\mathfrak{P} + (2r+2)\mathfrak{G}],$$

$$\sum_r F_{q,r}^{(2p)} = \sum_r (2r) F_{q-1,r}^{(2p)} [(2r-1)\mathfrak{D} + (2r)\mathfrak{P} + (2r+1)\mathfrak{G}].$$

Or, dans les trois fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$, nous avons identiquement

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{P} + \mathfrak{G} = 0;$$

par suite

$$(2r)\mathfrak{D} + (2r+1)\mathfrak{P} + (2r+2)\mathfrak{G} = \mathfrak{G} - \mathfrak{D},$$

et de même

$$(2r-1)\mathfrak{D} + (2r)\mathfrak{P} + (2r+1)\mathfrak{G} = \mathfrak{G} - \mathfrak{D};$$

donc nos dernières formules peuvent s'écrire

$$\sum_r F_{q,r}^{(2p+1)} = (\mathfrak{G} - \mathfrak{D}) \sum_r (2r+1) F_{q-1,r}^{(2p+1)},$$

$$\sum_r F_{q,r}^{(2p)} = (\mathfrak{G} - \mathfrak{D}) \sum_r (2r) F_{q-1,r}^{(2p)}.$$

Comme la différence $\mathfrak{G} - \mathfrak{D}$ est d'ailleurs égale à -1 pour la fonction $\mu(x)$ et à $-k^2$ pour la fonction $\nu(x)$, on voit que la somme des F de la dernière ligne s'obtient très-facilement à l'aide des F de la ligne précédente.

CHAPITRE IV.

EXPRESSION DES COEFFICIENTS A L'AIDE DES CHEMINS TERNAIRES.

§ I. — Coefficients de $\lambda^\pi(x)$.

102. Supposons d'abord l'exposant π impair et égal à $2p+1$. Nous savons qu'on a (91)

$$A_q^{(2p+1)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p+1)},$$

et aussi (41), en étendant le signe $\sum$ à tous les groupes de chemins ternaires montant de $L_{p+q,0}^{(2p+1)}$ à $L_{0,p}^{(2p+1)}$,

$$L_{p+q,0}^{(2p+1)} = \sum \Omega\left[1^{h_0+r_0} 3^{h_1+r_1} 5^{h_2+r_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots (-1)^v (1+k^2)^v k^{2g}\right].$$

Or, des relations (37),

$$d + g = q - v,$$
$$d + r = g + p,$$

nous déduisons, dans le cas actuel,

$$v = q - 2g.$$

Donc, à l'intérieur du $\sum$ précédent, on peut remplacer $(-1)^v$ par $(-1)^q$; et comme $(-1)^q$ est le même pour tous les groupes de chemins considérés, on peut mettre ce facteur en dehors du signe $\sum$. Quand on passe de L à A, il faut multiplier par un nouveau facteur $(-1)^q$, qui, avec le précédent, donne $(-1)^{2q}$, c'est-à-dire $+1$; donc on a

$$A_q^{(2p+1)} = \sum \Omega\left[1^{h_0+r_0} 3^{h_1+r_1} 5^{h_2+r_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots (1+k^2)^v k^{2g}\right].$$

103. Supposons maintenant π égal au nombre pair $2p$. Nous avons (92)

$$A_q^{(2p)} = (-1)^q L_{p+q,0}^{(2p)},$$

et aussi (47)

$$L_{p+q,0}^{(2p)} = \sum \Omega\left[2^{h_1+r_1} 4^{h_2+r_2} \ldots 1^{g_0+d_0} 3^{g_1+d_1} 5^{g_2+d_2} \ldots (-1)^v (1+k^2)^v k^{2g}\right],$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les groupes qu'on peut former avec les chemins ternaires montant de $L_{p+q,0}^{(2p)}$ à $L_{0,p}^{(2p)}$, et ne contenant jamais le nombre zéro ailleurs qu'au point de départ.

Ici encore on a

$$v = q - 2g,$$

et l'on peut écrire

$$A_q^{(2p)} = \sum \Omega \left[2^{h_1+v_1} 4^{h_2+v_2} \ldots 1^{g_0+d_0} 3^{g_1+d_1} 5^{g_2+d_2} \ldots (1+k^2)^v k^{2g} \right].$$

§ II. — Coefficients de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

104. Supposons π égal au nombre impair $2p+1$. Nous avons (54),

$$B_q^{(2p+1)} = (-1)^q \sum_r M_{q,r}^{(2p+1)},$$

$$C_q^{(2p+1)} = (-1)^q \sum_r N_{q,r}^{(2p+1)}.$$

De plus, nous avons (41)

$$M_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \left[1^{h_0+v_0} 3^{h_1+v_1} 5^{h_2+v_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots (2k^2-1)^v (-1)^g k^{2g} (1-k^2)^d \right],$$

$$N_{q,r}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \left[1^{h_0+v_0} 3^{h_1+v_1} 5^{h_2+v_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots (2-k^2)^v (-1)^g (k^2-1)^d \right].$$

Donc

$$^{+1)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \left[1^{h_0+v_0} 3^{h_1+v_1} 5^{h_2+v_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+v_2} 6^{g_3+d_3} \ldots (2k^2-1)^v (-1)^g k^{2g} (1-k^2)^d \right.\right.$$

$$^{-1)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2r+1} \sum \Omega \left[1^{h_0+v_0} 3^{h_1+v_1} 5^{h_2+v_2} \ldots 2^{g_1+d_1} 4^{g_2+d_2} 6^{g_3+d_3} \ldots (2-k^2)^v (-1)^g (k^2-1)^d \right] \right\}.$$

105. Lorsque π est égal au nombre pair $2p$, nous avons de même

$$^{p)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2r} \sum \Omega \left[2^{h_1+v_1} 4^{h_2+v_2} 6^{h_3+v_3} \ldots 1^{g_0+d_0} 3^{g_1+d_1} 5^{g_2+d_2} \ldots (2k^2-1)^v (-1)^g k^{2g} (1-k^2)^d \right] \right\}$$

$$^{p)} = (-1)^q \sum \left\{ \frac{1}{2r} \sum \Omega \left[2^{h_1+v_1} 4^{h_2+v_2} 6^{h_3+v_3} \ldots 1^{g_0+d_0} 3^{g_1+d_1} 6^{g_2+d_2} \ldots (2-k^2)^v (-1)^g (k^2-1)^d \right] \right\}.$$

CHAPITRE V.

EXPRESSION DES COEFFICIENTS A L'AIDE DES CHEMINS BINAIRES.

§ I. — Coefficients de $\lambda^\pi(x)$.

106. Considérons d'abord le cas où π est égal au nombre impair $2p+1$. Il suit immédiatement de ce qui précède que nous pouvons poser

$$A_q^{(2p+1)} = a_{q,0}^{(2p+1)}(1+k^2)^q + a_{q,1}^{(2p+1)}(1+k^2)^{q-2}k^2 + \ldots + a_{q,i}^{(2p+1)}(1+k^2)^{q-2i}k^{2i} + \ldots,$$

et qu'alors

$$a_{q,i}^{(2p+1)} = (-1)^q\, l_{p+q,0,i}^{(2p+1)}.$$

Tout revient à calculer $a_{q,i}^{(2p+1)}$ ou bien $l_{p+q,0,i}^{(2p+1)}$. Cette dernière expression se déduisant immédiatement de celle de $f_{p+q,0,i}^{(2p+1)}$, nous trouvons (60)

$$a_{q,i}^{(2p+1)} = \sum \Omega\Big[1^{h_0}\,3^{h_1}\,5^{h_2}\ldots\;2^{g_1+d_1}\,4^{g_2+d_2}\,6^{g_3+d_3}\ldots \times \sum \frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!\,(h_0-1)!}\,1^{2w_0}\,\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!\,(h_1-1)!}\,3^{2w_1}\ldots\Big].$$

107. Dans le cas où π est égal au nombre pair $2p$, nous pouvons poser de même

$$A_q^{(2p)} = a_{q,0}^{(2p)}(1+k^2)^q + a_{q,1}^{(2p)}(1+k^2)^{q-2}k^2 + \ldots + a_{q,i}^{(2p)}(1+k^2)^{q-2i}k^{2i} + \ldots,$$

et nous trouvons (67)

$$a_{q,i}^{(2p)} = \sum \Omega\Big[2^{h_1}\,4^{h_2}\,6^{h_3}\ldots\;1^{g_0+d_0}\,3^{g_1+d_1}\,5^{g_2+d_2}\ldots \times \sum \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!\,(h_1-1)!}\,2^{2w_1}\,\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!\,(h_2-1)!}\,4^{2w_2}\ldots\Big].$$

§ II. — Coefficients de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

108. Supposons π impair et égal à $2p+1$. Alors nous avons

$$M_{q,r}^{(2p+1)} = (-1)^G k^{2G}(1-k^2)^D \Big[m_{q,r,0}^{(2p+1)}(2k^2-1)^{q-e} - m_{q,r,1}^{(2p+1)}(2k^2-1)^{q-e-2}k^2(1-k^2)+\ldots$$
$$+(-1)^i m_{q,r,i}^{(2p+1)}(2k^2-1)^{q-e-2i}k^{2i}(1-k^2)^i+\ldots$$

$$N_{q,r}^{(2p+1)} = (-1)^G(k^2-1)^D\Big[n_{q,r,0}^{(2p+1)}(2-k^2)^{q-e} - n_{q,r,1}^{(2p+1)}(2-k^2)^{q-e-2}(k^2-1)+\ldots$$
$$+(-1)^i n_{q,r,i}^{(2p+1)}(2-k^2)^{q-e-2i}(k^2-1)^i+\ldots\Big].$$

Dans la première formule, remplaçons $1-k^2$ par k^2-1, et, dans la seconde, k^2-1 par $1-k^2$. Il n'y aura plus en évidence, entre les crochets, que le seul signe $+$, et en dehors le facteur $(-1)^G$ sera remplacé par $(-1)^{G+D}$, c'est-à-dire par $(-1)^e$.

Remplaçons de même, dans la première formule, $2k^2-1$ par $1-2k^2$, et, dans la seconde, $2-k^2$ par k^2-2. Nous introduisons ainsi partout le facteur $(-1)^{q-e}$ qui, multiplié par $(-1)^e$, donne $(-1)^q$.

Enfin, en passant de M et N à B et C, nous devrons multiplier encore par $(-1)^q$, de telle sorte que chaque expression, prise dans son entier, sera multipliée par $(-1)^{2q}$, c'est-à-dire par $+1$.

Nous aurons donc, en désignant par $b_{q,r,i}^{(2p+1)}$ et $c_{q,r,i}^{(2p+1)}$ les coefficients respectifs de $(1-2k^2)^{q-e-2i}k^{2G+2i}(k^2-1)^{D+i}$ et de $(k^2-2)^{q-e-2i}(1-k^2)^{D+i}$ dans les développements de $B_q^{(2p+1)}$ et $C_q^{(2p+1)}$,

$$b_{q,r,i}^{(2p+1)} = m_{q,r,i}^{(2p+1)},$$

$$c_{q,r,i}^{(2p+1)} = n_{q,r,i}^{(2p+1)},$$

et, par suite,

$$b_{q,r,i}^{(2p+1)} = c_{q,r,i}^{(2p+1)} = \frac{1}{2r+1}\sum\Omega\Big[1^{h_0}3^{h_1}5^{h_2}\ldots 2^{g_1+d_1}4^{g_2+d_2}6^{g_3+d_3}\ldots$$
$$\times\sum\frac{(w_0+h_0-1)!}{w_0!(h_0-1)!}1^{2w_0}\frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}3^{2w_1}\ldots\Big].$$

109. Nous trouvons de même, pour π égal au nombre pair $2p$,

$$b_{q,r,i}^{(2p)} = c_{q,r,i}^{(2p)} = \frac{1}{2r}\sum \Omega\left[2^{h_1}4^{h_2}6^{h_3}\ldots 1^{g_0+d_0}3^{g_1+d_1}5^{g_2+d_2}\ldots \sum \frac{(w_1+h_1-1)!}{w_1!(h_1-1)!}2^{2w_1}\frac{(w_2+h_2-1)!}{w_2!(h_2-1)!}4^{2w_2}\ldots\right].$$

110. Cette égalité des deux coefficients $b_{q,r,i}^{(\pi)}$, $c_{q,r,i}^{(\pi)}$ montre que les développements de $\mu^{\pi}(x)$ et $\nu^{\pi}(x)$ se déduisent l'un de l'autre avec la plus grande facilité.

CHAPITRE VI.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES DES COEFFICIENTS $a^{(\pi)}$, $b^{(\pi)}$, $c^{(\pi)}$.

§ I. — Coefficients de $\lambda^{\pi}(x)$.

111. Il suit de ce qui précède que les suites formées par les coefficients $a_{q,i}^{(2p+1)}$ et $a_{q,i}^{(2p)}$, lorsque q prend des valeurs entières consécutives, tandis que p et i restent constants, ont pour fonctions génératrices respectives

$$\frac{U^{(2p+1)}}{(1-1^2z)^{H_0}(1-3^2z)^{H_1}(1-5^2z)^{H_2}\ldots},$$

$$\frac{U^{(2p)}}{(1-2^2z)^{H_1}(1-4^2z)^{H_2}(1-6^2z)^{H_3}\ldots},$$

les numérateurs de ces deux fractions étant, par rapport à z, de degrés inférieurs aux degrés respectifs des dénominateurs.

112. Ici $\overline{rp}$ est égal à zéro et $\overline{RP}$ à p : donc nous avons

$$\begin{aligned}
H_0 = H_1 = H_2 = \ldots = H_p &= i+1,\\
H_{p+1} &= i,\\
H_{p+2} &= i-1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
H_{p+i} &= 1;
\end{aligned}$$

donc nos deux fonctions génératrices peuvent s'écrire

$$\frac{U^{(2p+1)}}{\prod_{0}^{p}{}_t[1-(2t+1)^2z]^{i+1}\times\prod_{p+1}^{p+i}{}_t[1-(2t+1)^2z]^{p+i+1-t}},$$

$$\frac{U^{(2p)}}{\prod_{1}^{p}{}_t[1-(2t)^2z]^{i+1}\times\prod_{p+1}^{p+i}{}_t[1-(2t)^2z]^{p+i+1-t}}.$$

§ II. — Coefficients de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

113. Les coefficients égaux $b_{q,r,i}^{(2p+1)}$, $c_{q,r,i}^{(2p+1)}$ d'une part, les coefficients égaux $b_{q,r,i}^{(2p)}$, $c_{q,r,i}^{(2p)}$ de l'autre, où q prend des valeurs entières consécutives, tandis que p, r et i restent constants, ont pour fonctions génératrices, les premiers, la fraction

$$\frac{U^{(2p+1)}}{(1-1^2z)^{H_0}(1-3^2z)^{H_1}(1-5^2z)^{H_2}\cdots},$$

les seconds, la fraction

$$\frac{U^{(2p)}}{(1-2^2z)^{H_1}(1-4^2z)^{H_2}(1-6^2z)^{H_3}\cdots}.$$

114. Dans ces deux fractions, les exposants consécutifs de chaque dénominateur forment une suite d'entiers consécutifs croissant jusqu'à i inclusivement, lesquels sont suivis d'entiers tous égaux à $i+1$, lesquels sont suivis enfin d'entiers consécutifs décroissants, dont le premier est égal à i et le dernier à l'unité. Le premier de tous ces exposants est égal à l'unité si $\overline{rp}$ est supérieur ou au moins égal à i; il est égal à $i+1-\overline{rp}$ si l'indice i est supérieur à $\overline{rp}$. En d'autres termes, la première valeur qu'il faille donner à t est celle du premier entier, nul ou positif, qui rend $i+1+t-\overline{rp}$ supérieur à zéro, dans le cas où π est impair, et, dans le cas où π est pair, celle du plus petit entier supérieur à zéro, qui rend supérieure à zéro la même quantité $i+1+t-\overline{rp}$.

Appelons τ cette première valeur de t (qui peut n'être pas la même dans les deux expressions); les fractions précédentes pourront s'écrire

$$\frac{U^{(2p+1)}}{\prod_t^{\overline{rp}-1}{}_{\tau}[1-(2t+1)^2z]^{i+1+t-\overline{rp}}\times\prod_t^{\overline{RP}}{}_{\overline{rp}}[1-(2t+1)^2z]^{i+1}\times\prod_t^{\overline{RP}+i}{}_{\overline{RP}+1}[1-(2t+1)^2z]^{i+1-t+\overline{RP}}},$$

$$\frac{U^{(2p)}}{\prod_t^{\overline{rp}-1}{}_{\tau}[1-(2t)^2z]^{i+1+t-\overline{rp}}\times\prod_t^{\overline{RP}}{}_{\overline{rp}}[1-(2t)^2z]^{i+1}\times\prod_t^{\overline{RP}+i}{}_{\overline{RP}+1}[1-(2t)^2z]^{i+1-t+\overline{RP}}}$$

115. Il va sans dire que, si $\overline{rp}$ était nul, la plus petite valeur de t, suivant que π serait impair ou pair, devrait être zéro ou l'unité.

CHAPITRE VII.

EXPRESSION ANALYTIQUE DES COEFFICIENTS a, b, c.

§ I. — Coefficients de $\lambda^\pi(x)$.

116. Nous avons trouvé, dans le Chapitre précédent, la fonction génératrice des coefficients $a_{q,i}^{(\pi)}$. En nous reportant au Chapitre VII de la première Partie, nous voyons immédiatement que les coefficients $a_{0,i}^{(\pi)}$, $a_{1,i}^{(\pi)}$, $a_{2,i}^{(\pi)}$, ... forment une série récurrente proprement dite, dont la loi est résumée, suivant que π est impair ou pair, par la première ou la seconde des équations suivantes :

$$\prod_{t=0}^{p}[z-(2t+1)^2]^{i+1}\times\prod_{t=p+1}^{p+i}[z-(2t+1)^2]^{p+i+1-t}=0,$$

$$\prod_{t=1}^{p}[z-(2t)^2]^{i+1}\times\prod_{t=p+1}^{p+i}[z-(2t)^2]^{p+i+1-t}=0.$$

117. Pour la première de ces équations, le degré est

$$(i+1)(p+1)+\tfrac{1}{2}i(i+1);$$

pour la seconde, il est

$$(i+1)p+\tfrac{1}{2}i(i+1).$$

Tels sont aussi les ordres des deux séries récurrentes, formées par les coefficients $a^{(2p+1)}$ et $a^{(2p)}$.

118. D'après le Chapitre VII de la première Partie, nous pouvons écrire les deux formules suivantes :

$$a_{q,i}^{(2p+1)}=\sum_{0}^{p}{}_{t}\,\Xi_t(q)\,(2t+1)^{2q}+\sum_{p+1}^{p+i}{}_{t}\,\xi_t(q)\,(2t+1)^{2q},$$

$$a_{q,i}^{(2p)}\;=\sum_{1}^{p}{}_{t}\,\Xi_t(q)\,(2t)^{2q}+\sum_{p+1}^{p+i}{}_{t}\,\xi_t(q)\,(2t)^{2q},$$

dans lesquelles $\Xi_t(q)$ est un polynôme entier en q, toujours du degré i et $\xi_t(q)$ un polynôme entier en q du degré $p+i-t$.

119. Chacune des formules précédentes contient des indéterminées en nombre égal à l'ordre de la série récurrente dont elle exprime le terme général. On déterminera ces indéterminées par le moyen indiqué déjà (84 et 85).

120. L'équation (116), qui définit la première de nos deux séries récurrentes, admet $i+1$ fois l'unité pour racine; si nous supprimons à son premier membre le facteur $(z-1)^{i+1}$, le degré de cette équation, comme l'ordre de la série récurrente qui lui correspond, diminue de $i+1$ unités. On peut voir facilement que la nouvelle série récurrente obtenue est formée par les différences d'ordre $i+1$ des coefficients $a_{0,i}^{(2p+1)}, a_{1,i}^{(2p+1)}, a_{2,i}^{(2p+1)}, \ldots.$ On en pourrait déduire immédiatement l'expression générale de ces différences.

§ II. — Coefficients de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$.

121. Les fonctions génératrices des coefficients $b_{q,r,i}^{(2p+1)}$, $c_{q,r,i}^{(2p+1)}$, $b_{q,r,i}^{(2p)}$, $c_{q,r,i}^{(2p)}$, dans lesquels q seul varie, nous font voir que ces coefficients forment une série récurrente proprement dite, dont la loi est représentée, lorsque π est impair, par l'équation

$$\prod_{\tau}^{\overline{rp}-1}{}_t\,[z-(2t+1)^2]^{i+1+t-\overline{rp}}\times\prod_{\overline{rp}}^{\overline{\mathrm{RP}}}{}_t\,[z-(2t+1)^2]^{i+1}\times\prod_{\overline{\mathrm{RP}}+1}^{\overline{\mathrm{RP}}+i}{}_t\,[z-(2t+1)^2]^{i+1-t+\overline{\mathrm{RP}}}=0,$$

et, lorsque π est pair, par l'équation

$$\prod_{\tau}^{\overline{rp}-1}{}_t\,[z-(2t)^2]^{i+1+t-\overline{rp}}\times\prod_{\overline{rp}}^{\overline{\mathrm{RP}}}{}_t\,[z-(2t)^2]^{i+1}\times\prod_{\overline{\mathrm{RP}}+1}^{\overline{\mathrm{RP}}+i}{}_t\,[z-(2t)^2]^{i+1-t+\overline{\mathrm{RP}}}=0,$$

τ ayant la signification indiquée précédemment (114) et n'étant pas forcément le même dans les deux équations.

122. Chacune de ces équations a un nombre de racines égal à

$$\tfrac{1}{2}(2i+1+\tau-\overline{rp})(\overline{rp}-\tau)+(i+1)(\overline{\mathrm{RP}}-\overline{rp}+1)+\tfrac{1}{2}i(i+1).$$

Tel est aussi l'ordre de la série récurrente.

123. Nous pouvons donc poser, en général,

$$b_{q,r,i}^{(2p+1)}=c_{q,r,i}^{(2p+1)}=\sum_{\tau}^{\overline{rp}-1}{}_t\,\chi_t(q)(2t+1)^{2q}+\sum_{\overline{rp}}^{\overline{\mathrm{RP}}}{}_t\,\Xi_t(q)(2t+1)^{2q}+\sum_{\overline{\mathrm{RP}}+1}^{\overline{\mathrm{RP}}+i}{}_t\,\xi_t(q)(2t+1)^{2q},$$

$$b_{q,r,i}^{(2p)}=c_{q,r,i}^{(2p)}=\sum_{\tau}^{\overline{rp}-1}{}_t\,\chi_t(q)(2t)^{2q}+\sum_{\overline{rp}}^{\overline{\mathrm{RP}}}{}_t\,\Xi_t(q)(2t)^{2q}+\sum_{\overline{\mathrm{RP}}+1}^{\overline{\mathrm{RP}}+i}{}_t\,\xi_t(q)(2t)^{2q},$$

et, dans ces formules, $\chi_t(q)$, $\Xi_t(q)$, $\xi_t(q)$ représentent des polynômes entiers en q, dont les degrés sont respectivement

$$i+t-\overline{rp},\quad i,\quad i-t+\overline{\mathrm{RP}}.$$

124. Chacune de ces deux dernières formules présente un nombre d'indéterminées égal à l'ordre de la série récurrente qui lui correspond. On calculera ces indéterminées par le procédé habituel.

125. Dans tout ce que nous venons de dire sur les coefficients de $\mu^\pi(x)$ et de $\nu^\pi(x)$, nous avons supposé $\overline{rp}$ supérieur à zéro. Si $\overline{rp}$ était nul, le premier $\prod$ des équations et le premier $\sum$ des formules générales disparaîtraient. La première de toutes les valeurs de t serait zéro si π était impair, l'unité si π était pair.

TROISIÈME PARTIE.

DÉVELOPPEMENTS DÉFINITIFS.

CHAPITRE I.

DÉVELOPPEMENT DE $\lambda^\pi(x)$.

§ I. — Forme de $A_q^{(\pi)}$.

126. Quelle que soit la valeur paire ou impaire de l'exposant π, nous avons (**106** et **107**)

$$A_q^{(\pi)} = a_{q,0}^{(\pi)}(1+k^2)^q + a_{q,1}^{(\pi)}(1+k^2)^{q-2}k^2 + \ldots + a_{q,i}^{(\pi)}(1+k^2)^{q-2i}k^{2i} + \ldots.$$

Il résulte évidemment de cette formule que $A_q^{(\pi)}$ est un polynôme entier en k^2, et, par suite, que nous pouvons poser

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)}k^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)}k^4 + \ldots + \alpha_{q,i}^{(\pi)}k^{2i} + \ldots.$$

127. Nous nous proposons de calculer $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ en fonction de q, l'indice i étant supposé constant.

§ II. — Forme de $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$.

128. En comparant le développement de $A_q^{(\pi)}$ en fonction des quantités $\alpha^{(\pi)}$ au développement de la même expression en fonction des quantités $a^{(\pi)}$, nous trouvons

$$\alpha_{q,i}^{(\pi)} = a_{q,i}^{(\pi)} + Y_{q-2i+2}^{1} a_{q,i-1}^{(\pi)} + Y_{q-2i+4}^{2} a_{q,i-2}^{(\pi)} + Y_{q-2i+6}^{3} a_{q,i-3}^{\pi} + \ldots,$$

les symboles Y_{q-2i+2}^{1}, Y_{q-2i+4}^{2}, Y_{q-2i+6}^{3}, ... représentant respectivement les nombres de combinaisons simples de $q-2i+2$, $q-2i+4$, $q-2i+6$, ... objets, pris 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ...

129. Cette formule nous permet d'établir que $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ est absolument de la même forme que $a_{q,i}^{(\pi)}$, c'est-à-dire est la somme algébrique des puissances $q^{\text{ièmes}}$ des nombres

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots,\ (2p+2i+1)^2,$$

ou des nombres

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots,\ (2p+2i)^2,$$

suivant que π est pair ou impair, multipliées respectivement par des polynômes entiers en q, dont nous avons indiqué les degrés.

D'abord il est visible que $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ contiendra les puissances $q^{\text{ièmes}}$ de ces mêmes nombres et celles de ces nombres seulement. Reste à voir si les degrés des polynômes en q correspondants sont dans $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$ les mêmes que dans $a_{q,i}^{(\pi)}$.

Il en est ainsi dans le premier terme du développement de $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, puisque ce premier terme est justement $a_{q,i}^{(\pi)}$.

Dans le second terme, les polynômes fournis par $a_{q,i}^{(\pi)}$ ont tous leurs degrés moindres d'une unité. Mais ils sont tous multipliés par Y^1_{q-2i+2}, qui est du premier degré en q. Donc, dans ce second terme, les polynômes en q ont mêmes degrés que dans le premier.

Il en est encore de même des polynômes du troisième terme, puisque ceux-ci résultent des polynômes fournis par $a^{(\pi)}_{q,i-2}$, dont les degrés sont moindres de deux unités, multipliés tous par Y^2_{q-2i+4}, c'est-à-dire par un polynôme du second degré en q.

Et ainsi de suite.

130. En résumé, le coefficient $\alpha^{(\pi)}_{q,i}$ se présente exactement sous la même forme que le coefficient $a^{(\pi)}_{q,i}$.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT DE $\mu^{\pi}(x)$.

§ I. — Forme de $B^{(\pi)}_q$.

131. Des formules (94), jointes aux formules (108) et à la définition de $b^{(\pi)}_{q,r,i}$, nous déduisons l'expression suivante :

$$B^{(\pi)}_q = \sum_0^{p+q} {}_r\, k^{2G}(k^2-1)^D\left[b^{(\pi)}_{q,r,0}(1-2k^2)^{q-e} + b^{(\pi)}_{q,r,1}(1-2k^2)^{q-e-2}k^2(k^2-1) + b^{(\pi)}_{q,r,2}(1-2k^2)^{q-e-4}k^4(k^2-1)^2\right.$$

132. Il est évident ainsi que $B^{(\pi)}_q$ est un polynôme entier en k^2. Nous pouvons donc poser

$$B^{(\pi)}_q = \beta^{(\pi)}_{q,0} + \beta^{(\pi)}_{q,1}k^2 + \beta^{(\pi)}_{q,2}k^4 + \ldots + \beta^{(\pi)}_{q,i}k^{2i} + \ldots.$$

133. Nous nous proposons de déterminer l'expression analytique de $\beta^{(\pi)}_{q,i}$ en fonction de la variable q, l'indice i étant supposé constant.

§ II. — Forme de $\beta^{(\pi)}_{q,i}$.

134. Pour obtenir cette expression de $\beta^{(\pi)}_{q,i}$, nous allons chercher le coefficient de k^{2i} correspondant, dans le $\sum$ précédent (**131**), à chaque valeur de r; puis nous ajouterons tous ces coefficients.

Il suffira évidemment de considérer les valeurs de r depuis $r = 0$ jusqu'à $r = p + i$, car les valeurs supérieures à celle-ci ne donneraient aucun terme en k^{2i}. Cette remarque permet d'abréger le calcul de $\beta^{(\pi)}_{q,i}$. En effet, elle remplace la limite $p + q$ par la limite $p + i$, et i, qui ne peut dépasser q, lui est en général inférieur.

135. Supposons d'abord r supérieur à p. Nous avons à trouver le coefficient de k^{2i} dans le développement

$$k^{2(r-p)}\left[b^{(\pi)}_{q,r,0}(1-2k^2)^{q-e} + b^{(\pi)}_{q,r,1}(1-2k^2)^{q-e-2}k^2(k^2-1) + b^{(\pi)}_{q,r,2}(1-2k^2)^{q-e-4}k^4(k^2-1)^2 + \ldots\right].$$

Il est visible que ce coefficient est égal à $b^{(\pi)}_{q,r,p+i-r}$; plus $b^{(\pi)}_{q,r,p+i-r-1}$, multiplié par un polynôme du premier degré en q; plus $b^{(\pi)}_{q,r,p+i-r-2}$, multiplié par un polynôme du second degré en q, et ainsi de suite.

En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut (**129**), nous voyons que le coefficient ainsi formé est exactement de la même forme que son premier terme, c'est-à-dire que $b^{(\pi)}_{q,r,p+i-r}$.

136. Supposons, en second lieu, r égal à p. Il s'agit pour nous de calculer le coefficient de k^{2i} dans le développement, ordonné suivant les puissances de k, de l'expression

$$b^{(\pi)}_{q,p,0}(1-2k^2)^{q} + b^{(\pi)}_{q,p,1}(1-2k^2)^{q-2}k^2(k^2-1) + b^{(\pi)}_{q,p,2}(1-2k^2)^{q-4}k^4(k^2-1)^2 + \ldots.$$

Ce coefficient est évidemment égal au nombre $b^{(\pi)}_{q,p,i}$; plus le nombre $b^{(\pi)}_{q,p,i-1}$, multiplié par un polynôme du premier degré en q; plus le nombre $b^{(\pi)}_{q,p,i-2}$, multiplié par un polynôme du second degré en q, et ainsi de suite.

Et l'on verrait facilement encore que le résultat final est exactement de la même forme que $b^{(\pi)}_{q,p,i}$.

137. Supposons enfin r inférieur à p. Il nous faut chercher le coefficient de k^{2i} dans l'expression

$$(k^2-1)^{p-r}\Big[b^{(\pi)}_{q,r,0}(1-2k^2)^{q-e}+b^{(\pi)}_{q,r,1}(1-2k^2)^{q-e-2}k^2(k^2-1)+b^{(\pi)}_{q,r,2}(1-2k^2)^{q-e-4}k^4(k^2-1)^2+$$

Ce coefficient est évidemment égal au nombre $b^{(\pi)}_{q,r,i}$; plus le nombre $b^{(\pi)}_{q,r,i-1}$, multiplié par un polynôme du premier degré en q; plus le nombre $b^{(\pi)}_{q,r,i-2}$, multiplié par un polynôme du second degré en q, et ainsi de suite.

Et l'on prouverait encore que ce coefficient est exactement de la même forme que $b^{(\pi)}_{q,r,i}$.

138. Il suit de tout cela que $\beta^{(\pi)}_{q,i}$ est de la même forme que l'expression

$$\sum_{0}^{p}{}_{r}\, b^{(\pi)}_{q,r,i}+\sum_{p+1}^{p+i}{}_{r}\, b^{(\pi)}_{q,r,p+i-r},$$

abstraction faite des simplifications qui se pourraient présenter dans cette dernière expression.

139. Dans cette somme (138), remplaçons chaque $b^{(\pi)}$ par son expression analytique. Nous obtenons évidemment $\beta^{(\pi)}_{q,i}$ sous la forme d'un polynôme dont chaque terme contient la puissance $q^{\text{ième}}$ du carré d'un nombre entier, multipliée par un polynôme en q.

Pour déterminer la forme finale de $\beta^{(\pi)}_{q,i}$, nous avons donc à résoudre ces deux questions : d'abord déterminer les nombres entiers dont les carrés y sont élevés à la puissance $q^{\text{ième}}$; ensuite déterminer le degré du polynôme entier en q, qui multiplie chacun de ces carrés.

140. Les nombres entiers dont les carrés sont élevés à la puissance $q^{\text{ième}}$ ont la forme $2t+1$ ou $2t$, suivant que π est impair ou pair.

Dans $b_{q,r,j}^{(\pi)}$, j étant quelconque, la plus grande valeur (**121**) de t est, dans tous les cas, $\overline{\mathrm{RP}}+j$; la plus petite est τ, cette limite τ étant définie comme précédemment (**114**). De là ces conséquences :

La plus haute valeur de t, dans tous les $b^{(\pi)}$ de la formule précédente (**138**), est égale à $p+i$; et chacun de ces $b^{(\pi)}$ donne un terme présentant cette valeur maxima de t;

Celui des coefficients $b^{(\pi)}$ qui donne la plus petite valeur de t est le coefficient $b_{q,0,i}^{(\pi)}$. Cette plus petite valeur de t est le plus petit nombre entier, non négatif si π est impair, supérieur à zéro si π est pair, qui rende supérieure à zéro l'expression $i+1+t$. En d'autres termes, c'est zéro si π est impair, et l'unité si π est pair.

Donc le coefficient $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ présentera, si π est impair, la suite des puissances

$$1^{2q},\quad 3^{2q},\quad 5^{2q},\quad \ldots,\quad [2(p+i)+1]^{2q};$$

et, si π est pair, la suite

$$2^{2q},\quad 4^{2q},\quad 6^{2q},\quad \ldots,\quad [2(p+i)]^{2q}.$$

Nous pouvons remarquer que le terme $b_{q,0,i}^{(\pi)}$ présente à lui seul, exactement et complétement, suivant que π est impair ou pair, l'une ou l'autre de ces deux suites.

141. Cherchons le degré du polynôme entier en q qui multiplie chacune de ces puissances $2q^{\text{ièmes}}$, c'est-à-dire les valeurs des degrés correspondant aux valeurs successives de t.

Considérons un $b_{q,r,j}^{(\pi)}$ quelconque de la formule précédente (**138**); les valeurs successives de t, prises dans l'ordre décroissant, y sont

$$p+i,\quad p+i-1,\quad p+i-2,\quad \ldots,\quad \tau.$$

Les valeurs des degrés correspondant à ces valeurs décroissantes de t forment une suite de nombres entiers consécutifs croissants, dont le premier est zéro, suivis d'entiers tous égaux à la valeur maxima j, lesquels terminent la suite ou sont suivis eux-mêmes d'entiers consécutifs décroissants.

La plus haute valeur de t est la même dans tous les $b^{(\pi)}$ de la formule que nous étudions; le nombre des valeurs de t ne dépasse, dans aucun des $b^{(\pi)}$ considérés, ce qu'il est dans $b^{(\pi)}_{q,0,i}$; le maximum j ne dépasse jamais non plus la valeur qu'il atteint dans ce même coefficient $b^{(\pi)}_{q,0,i}$.

Donc, dans la formule considérée (138), le degré du polynôme, entier en q, correspondant à une valeur déterminée de t, est le même que dans $b^{(\pi)}_{q,0,i}$.

142. En résumé, le coefficient cherché $\beta^{(\pi)}_{q,i}$ est exactement de la même forme que $b^{(\pi)}_{q,0,i}$.

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DE $\nu^{\pi}(x)$.

§ I. — Forme de $C^{(\pi)}_q$.

143. Des formules (94), jointes aux formules (108) et à la définition de $c^{(\pi)}_{q,r,i}$, nous déduisons l'égalité

$$C^{(\pi)}_q = \sum_0^{p+q} {}_r (1-k^2)^{\mathrm{D}} \left[c^{(\pi)}_{q,r,0}(k^2-2)^{q-e} + c^{(\pi)}_{q,r,1}(k^2-2)^{q-e-2}(1-k^2) + c^{(\pi)}_{q,r,2}(k^2-2)^{q-e-4}(1-k^2)^2 + \ldots \right.$$

qui nous montre que $C^{(\pi)}_q$ est un polynôme entier en k^2.

144. Nous ne pouvons, dans le cas actuel, ordonner comme dans le cas précédent (132), par rapport aux puissances croissantes de k^2, parce que le coefficient de k^{2i}, par exemple, au lieu de dépendre seulement d'un nombre de termes constant avec l'exposant i et indépendant de q, est fonction d'un nombre de termes qui varie avec q, lors même que l'exposant i demeure invariable.

145. Nous ordonnons donc par rapport aux puissances décroissantes de k^2.

Pour cela, nous reprenons la formule (**143**), qui nous donne $C_q^{(\pi)}$, et, dans l'expression qui suit le Σ, nous divisons le polynôme entre crochets par $(k^2)^{q-e}$, et la partie extérieure par $(k^2)^e$ mis sous la forme $(k^2)^G (k^2)^D$. Tout le second membre de l'égalité se trouve ainsi divisé par $(k^2)^q$; et, en rétablissant le facteur k^{2q} en avant du Σ, nous pouvons écrire

$$C_q^{(\pi)} = k^{2q} \sum_{0}^{p+q}{}_r \left(\frac{1}{k^2}\right)^G \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^D$$
$$\times \left[c_{q,r,0}^{(\pi)} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)^{q-e} + c_{q,r,1}^{(\pi)} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)^{q-e-2} \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) + c_{q,r,2}^{(\pi)} \left(1 - \frac{2}{k^2}\right)^{q-e-4} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2 \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)^2 + \ldots\right.$$

Dans cette nouvelle formule, le $\sum$ est un polynôme entier au $\frac{1}{k^2}$, que nous pouvons écrire

$$\gamma_{q,0}^{(\pi)} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} \frac{1}{k^2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} \frac{1}{k^4} + \ldots + \gamma_{q,i}^{(\pi)} \frac{1}{k^{2i}} + \ldots.$$

Il s'ensuit que nous avons

$$C_q^{\pi} = \gamma_{q,0}^{(\pi)} k^{2q} + \gamma_{q,1}^{(\pi)} k^{2q-2} + \gamma_{q,2}^{(\pi)} k^{2q-4} + \ldots + \gamma_{q,i}^{(\pi)} k^{2q-2i} + \ldots,$$

et nous nous proposons de déterminer la forme analytique de $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ en fonction de q, l'indice i étant supposé invariable.

§ II. — Forme de $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$.

146. Si nous nous rappelons que $c_{q,r,i}^{(\pi)}$ et $b_{q,r,i}^{(\pi)}$ sont égaux entre eux, nous voyons immédiatement que le $\sum$ de la formule précédente (**145**) n'est autre chose que l'expression même de $B_q^{(\pi)}$, dans laquelle on aurait remplacé k^2 par $\frac{1}{k^2}$. Donc ce $\sum$, ordonné par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{k^2}$ doit présenter les mêmes coefficients que $B_q^{(\pi)}$ ordonné par rapport aux puissances croissantes de k^2. Donc $\gamma_{q,i}^{(\pi)} = \beta_{q,i}^{(\pi)}$.

Or le coefficient $\beta_{q,i}^{(\pi)}$ est exactement de la même forme que $b_{q,0,i}^{(\pi)}$, et ce dernier coefficient est égal à $c_{q,0,i}^{(\pi)}$. Donc le coefficient $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ est de la même forme que $c_{q,0,i}^{(\pi)}$.

CHAPITRE IV.

RÉSUMÉ.

§ I. — Forme des coefficients $\alpha^{(\pi)}$, $\beta^{(\pi)}$, $\gamma^{(\pi)}$.

147. D'après ce qui précède, les coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$ ont respectivement la même forme que les coefficients $a_{q,i}^{(\pi)}$, $b_{q,0,i}^{(\pi)}$, $c_{q,0,i}^{(\pi)}$.

148. Donc les coefficients [1] $\alpha_{q,i}^{(2p+1)}$, $\beta_{q,i}^{(2p+1)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p+1)}$ sont tous les trois de la première, et $\alpha_{q,i}^{(2p)}$, $\beta_{q,i}^{(2p)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p)}$ tous les trois de la seconde des deux formes suivantes :

$$\sum_{0}^{p}{}_t \Xi_t(q)(2t+1)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t \xi_t(q)(2t+1)^{2q},$$

$$\sum_{1}^{p}{}_t \Xi_t(q)(2t)^{2q} + \sum_{p+1}^{p+i}{}_t \xi_t(q)(2t)^{2q},$$

[1] Afin de prendre date, nous avons consigné ces derniers résultats dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences. Voir *Comptes rendus*, séance du 10 juillet 1876.

dans lesquelles $\Xi_t(q)$ est un polynôme entier en q toujours du degré i, et $\xi_t(q)$ un polynôme entier en q du degré $p+i-t$.

§ II. — Séries récurrentes et fonctions génératrices.

149. Donc les coefficients $\alpha_{q,i}^{(\pi)}$, $\beta_{q,i}^{(\pi)}$, $\gamma_{q,i}^{(\pi)}$, où q est variable et i constant, sont chacun les termes d'une série récurrente proprement dite.

Si π est impair et égal à $2p+1$, cette série est définie par l'équation

$$\prod_{0}^{p}{}_t[z-(2t+1)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t[z-(2t+1)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

dont le degré est $(p+1)(i+1)+\frac{1}{2}i(i+1)$.

Si π est pair et égal à $2p$, cette série est définie par l'équation

$$\prod_{1}^{p}{}_t[z-(2t)^2]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t[z-(2t)^2]^{p+i+1-t} = 0,$$

dont le degré est $p(i+1)+\frac{1}{2}i(i+1)$.

150. La fonction génératrice de cette série récurrente est, dans le cas où π est impair,

$$\frac{U^{(2p+1)}}{\prod_{0}^{p}{}_t[1-(2t+1)^2z]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t[1-(2t+1)^2z]^{p+i+1-t}},$$

et, dans le cas où π est pair,

$$\frac{U^{(2p)}}{\prod_{1}^{p}{}_t[1-(2t)^2z]^{i+1} \times \prod_{p+1}^{p+i}{}_t[1-(2t)^2z]^{p+i+1-t}};$$

et, dans chacune de ces fractions, le numérateur est un polynôme entier en z, de degré inférieur au degré du dénominateur.

151. Les différences d'ordre $i+1$ des coefficients $\alpha_{q,i}^{(2p+1)}$, $\beta_{q,i}^{(2p+1)}$, $\gamma_{q,i}^{(2p+1)}$ sont aussi chacune le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation s'obtient en supprimant, dans celle des équations précédentes qui correspond aux valeurs impaires de π (149), le facteur $(z-1)^{i+1}$ relatif à celle des racines de cette équation qui est égale à l'unité.

On pourrait écrire immédiatement, soit l'équation, soit la fonction génératrice de cette nouvelle série.

§ III. — Détermination des constantes.

152. Il se présente, soit dans l'expression des coefficients α, β, γ, soit dans le numérateur des fonctions génératrices, un certain nombre de constantes indéterminées. On calcule les valeurs de ces constantes qui répondent à des valeurs données de l'exposant π et de l'indice i de la façon indiquée plusieurs fois déjà.

153. En procédant ainsi pour les coefficients

$$\alpha_{q,i}^{(\pi)}, \quad \beta_{q,i}^{(\pi)}, \quad \gamma_{q,i}^{(\pi)},$$

on arrive, non plus seulement à la forme, mais à l'expression même de ces coefficients, de sorte que le problème que nous nous étions proposé de résoudre nous paraît résolu.

Vu et approuvé.

Paris, le 11 décembre 1876.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

THÈSE D'ALGÈBRE.

TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE

DÉTERMINÉE

A LA FAÇON DES SÉRIES RÉCURRENTES.

PROGRAMME.

I. Une série est déterminée à la façon des séries récurrentes lorsque l'on donne, en même temps que les valeurs de ses premiers termes, une relation du premier degré, absolument quelconque, liant chaque terme de cette série à un ou plusieurs des termes précédents.

Nombre de quantités, sommes, intégrales, dérivées $n^{\text{ièmes}}$, etc., sont les termes généraux de séries qui se présentent déterminées spontanément à la façon des séries récurrentes.

Le problème que nous nous proposons de résoudre consiste à trouver l'expression du terme général d'une série ainsi déterminée.

II. Ce problème n'a été résolu jusqu'à présent, et d'une façon fort incomplète, que dans le cas très-particulier où la relation du premier degré présente un nombre fixe de termes et où tous ses coefficients sont constants, c'est-à-dire que dans le cas des séries récurrentes proprement dites et des séries récurrentes de Lagrange.

Nous le résolvons d'une façon complète, dans tous les cas possibles, et cette solution, générale et toute nouvelle, forme l'objet principal du présent travail.

Pour exposer cette solution, désignons par U_1, U_2, U_3, ... les termes de la série considérée. L'équation qui lie chaque terme à quelques-uns des précédents peut toujours s'écrire

$$\mathrm{U}_n = u_n + \sum_{k}^{\lambda_n} {}_{1} \mathrm{A}_k^{(n)} \mathrm{U}_{n-k},$$

u_n étant une quantité connue, fonction de n; λ_n un entier, fonction de n et au plus égal à $n - 1$; $\mathrm{A}_k^{(n)}$ un coefficient, fonction de n et de k.

Cela étant, on a évidemment

$$\mathrm{U}_n = \sum_{p=1}^{n} \Psi(n, p) \cdot u_p;$$

et nous démontrons que $\Psi(n, p)$ est égal à l'expression

$$\sum \mathrm{A}_{k_1}^{(n_1)} \mathrm{A}_{k_2}^{(n_2)} \mathrm{A}_{k_3}^{(n_3)} \cdots,$$

dans laquelle la caractéristique $\sum$ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ qui satisfont à ces conditions :

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = n - p;$$
$$n_1 = k_1 + p,$$
$$n_t = k_t + n_{t-1},$$
$$0 < k_t \leq \lambda_{n_t}.$$

III. Quand on applique cette expression générale à des exemples particuliers, on obtient des résultats très-différents les uns des autres. Ces différences proviennent surtout des formes différentes qu'affecte la relation du premier degré. On est ainsi conduit à énumérer et à classer ces différentes formes.

Pour effectuer cette classification, on remarque que la relation du premier degré présente trois arguments distincts : n et k dans le coefficient $\mathrm{A}_k^{(n)}$, n dans la limite λ_n.

Il se peut que $\mathrm{A}_k^{(n)}$ dépende ou ne dépende pas de n, dépende ou ne dépende pas de k. Il se peut de même que λ_n varie toujours avec n, ou qu'il devienne, à partir d'une certaine valeur de n, absolument constant.

Ces différentes manières d'être de la relation du premier degré, relativement à ces trois arguments, sont autant de caractères pouvant servir de fondements à une classification. Ils conduisent naturellement à reconnaître que les formes distinctes de la relation du premier degré sont au nombre de huit.

IV. Il convient, pour chacune de ces huit formes, de chercher ce que devient l'expression du terme général, puis d'appliquer le résultat obtenu à l'étude d'une série particulière donnée.

Dans plusieurs cas, l'expression du terme général ne se modifie pour ainsi dire pas; dans les autres, elle se simplifie notablement. Dans le cas, par exemple, où rentrent les séries récurrentes proprement dites et les séries récurrentes de Lagrange, on obtient, pour le terme général, deux expressions nouvelles, très-simples, et n'exigeant ni l'une ni l'autre la résolution préalable d'aucune équation.

Les séries, en très-grand nombre, qui, dans les Mathématiques actuelles, sont déterminées spontanément à la façon des séries récurrentes, se répartissent très-inégalement entre les huit cas considérés. Dans trois de ces cas, on ne rencontre pour ainsi dire aucun exemple : il en faut imaginer soi-même; dans les cinq autres, on n'a qu'à choisir parmi ceux qui se présentent en foule. En prenant comme exemples la série de Cassini et la série ayant pour terme général le nombre des substitutions irréductibles, on arrive à des expressions remarquables; en prenant comme exemple la série dont le terme général est la somme des puissances semblables des racines d'une équation, on parvient, pour cette somme, à quatre expressions, dont l'une constitue la formule de Waring et dont les trois autres sont nouvelles.

Vu et approuvé.

Paris, le 11 décembre 1876.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.