École Impériale
Polytechnique.

1868-69

1re Division.

Résumé
du Cours d'Analyse
par Mr Hermite.

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES
CABINET DU DÉPARTEMENT
DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
1919
G 579 d I

Le Cours de deuxième année comprendra deux parties principales; la première ayant pour objet les intégrales définies, la seconde, les équations différentielles. On se rappelle que la notion d'intégrale définie s'est présentée en traitant la question de la quadrature des courbes, comme conséquence des principes élémentaires de l'emploi géométrique des infiniment petits. Ainsi on a établi que la courbe proposée étant donnée par l'équation

$$y = f(x)$$

l'aire comprise entre l'arc, l'axe des abscisses et deux ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1, est la limite de la somme :

$$dx\left[f(x_0) + f(x_0 + dx) + f(x_0 + 2dx) + \cdots\cdots + f\{x_0 + (n-1)dx\}\right]$$

lorsqu'en supposant : $n\,dx = x_1 - x_0$, on fait croître indéfiniment le nombre n des termes, et tendre dx vers zéro. Cette limite, qui, d'après sa signification, est une quantité entièrement déterminée, a été représentée par : $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, et désignée sous le nom d'intégrale définie de la fonction $f(x)$, prise depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$. Nous savons encore qu'une fonction $F(x)$ satisfaisant à la condition :

$$F'(x) = f(x)$$

se nomme l'intégrale indéfinie, et que l'on a généralement :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

On s'est proposé, dans le cours de première année, d'obtenir l'intégrale indéfinie des fonctions rationnelles, des fonctions irrationnelles qui dépendent de la racine carrée d'un polynôme, et des fonctions transcendantes contenant des exponentielles, des lignes trigonométriques, &c. Cette recherche a bientôt montré combien était restreint le nombre des intégrales qui s'obtiennent

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC - Cote : 579 d I

sous forme finie explicite, et on a été amené naturellement à envisager l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$$

qui est entièrement déterminée quand on donne x_0 et x_1, comme un nouveau mode d'existence de la quantité, demandant à être étudié directement et en lui-même. Ainsi s'est ouverte une voie large et féconde de belles recherches, qui depuis Euler et Legendre ont donné à l'analyse les plus importants résultats. Exposer, dans quelques cas simples, les méthodes propres à ces recherches, et les conséquences qu'elles ont données, sera donc le sujet de la première partie de ce cours; la seconde devant être consacrée à la théorie des équations différentielles, qui ouvre au développement des mêmes vues un autre champ d'un accès moins facile.

Nous entrerons en matière, et nous rendrons sensible la nécessité de cette étude, en considérant la quantité $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$ qui se trouve comme un intermédiaire entre les intégrales exprimables sous forme finie et celles qui ne le sont point. Effectivement l'intégrale indéfinie

$$I(x) = \text{arc tang } f(x)$$

étant donnée explicitement, il n'est cependant point possible, comme nous allons voir, de tirer de l'équation générale:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \text{arc tang } f(x_1) - \text{arc tang } f(x_0)$$

la valeur cherchée. Nous allons exposer l'analyse fort simple qui donne le résultat et conduit en même temps à d'importantes conséquences

De l'intégrale : $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$

I Considérons tout d'abord un cas particulier, et soit, par exemple $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, ce qui donne : $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$, d'où :

$$\int_0^2 \frac{d\left(\frac{x}{x^2-2}\right)}{1+\frac{x^2}{(x^2-2)^2}} = \text{arc tang } 1 = \frac{\pi}{4}$$

résultat dont la fausseté est manifeste, tous les éléments de l'intégrale étant négatifs, attendu que :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

$$\frac{d\left(\frac{x}{x^2-2}\right)}{1+\frac{x^2}{(x^2-2)^2}} = -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2+x^2}\,dx$$

La raison s'en trouve aisément dans ce fait élémentaire qu'il existe une infinité d'arcs répondant à une tangente donnée, de sorte qu'il est nécessaire de poser :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x} = \text{arc tang } f(x_1) - \text{arc tang } f(x_0) + n\pi$$

n étant un nombre entier inconnu, que nous allons déterminer en fixant la signification des termes arc tang $f(x_1)$, arc tang $f(x_0)$ par la convention qu'ils soient compris tous deux entre les limites $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Observons d'abord que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$ est une fonction continue de la limite supérieure x, car la différence :

$$\int_{x_0}^{x+h} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2\,dx} - \int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$$

ou bien :

$$\int_{x}^{x+h} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$$

qui s'exprime, comme on sait [1] par le produit : $h\,\frac{f'(x+\theta h)}{1+f^2(x+\theta h)}$ est infiniment petite avec h, l'expression $\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ étant finie pour toute valeur réelle de x. En faisant : $f(x) = \frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, et supposant $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ sont sans facteurs communs, on la rend manifeste, car elle devient : $\frac{\varphi(x)\chi'(x) - \varphi'(x)\chi(x)}{\varphi^2(x)+\chi^2(x)}$ et le dénominateur ne sera nul qu'en faisant à la fois $\varphi(x) = 0$, $\chi(x) = 0$, ce qui entraîne un facteur commun, contre l'hypothèse admise.

Cette remarque faite, je reviens à l'égalité :

---

[1] Cours de première année, page 169

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPF-01

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)} = \text{arc tang } f(x) - \text{arc tang } f(x_0) + n\pi$$

En y posant $x = x_0$, elle donne $n = 0$, et il est clair qu'on devra conserver cette détermination, tant que la fonction $f(x)$ restera finie, car x croissant d'une manière continue depuis la valeur $x = x_0$, arc tang $f(x)$ varie alors lui-même d'une manière continue. Mais on va voir qu'il n'en est plus de même quand $f(x)$ devient infinie, par exemple pour $x = K$. Examinons en effet, en nous rappelant que arc tang $f(x)$ est assujetti à ne pas dépasser les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, les valeurs successives de arc tang $f(K-\varepsilon)$, arc tang $f(K+\varepsilon)$, ε étant positif et très-petit. En admettant, pour fixer les idées, que $f(K-\varepsilon)$ soit positif, et $f(K+\varepsilon)$ négatif, les valeurs de arc tang $f(K-\varepsilon)$, lorsque ε décroît jusqu'à zéro, seront représentées par :

$$(A) \qquad \frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha',\ \frac{\pi}{2}-\alpha'',\ldots\ldots,\ \frac{\pi}{2}$$

où la suite : $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ est décroissante jusqu'à zéro ; celles de arc tang $f(K+\varepsilon)$, en faisant croître ε, seront de la forme :

$$(B) \qquad -\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),\ -\left(\frac{\pi}{2}-\beta'\right),\ -\left(\frac{\pi}{2}-\beta''\right),\ldots\ldots$$

les termes $\beta, \beta', \beta''\ldots$ allant en croissant depuis zéro. La série (B) placée à la suite de la série (A), rend manifeste la discontinuité de la fonction arc tang $f(x)$, pour $x = K$; mais on voit en même temps qu'en ajoutant aux termes de la seconde suite le nombre π, ils deviennent :

$$\frac{\pi}{2}+\beta,\ \frac{\pi}{2}+\beta',\ \frac{\pi}{2}+\beta'',\ldots\ldots$$

et forment alors avec la suite (A) un ensemble de valeurs parfaitement continues :

$$\frac{\pi}{2}-\alpha,\ \frac{\pi}{2}-\alpha',\ \frac{\pi}{2}-\alpha''\ldots,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\beta,\ \frac{\pi}{2}+\beta',\ \frac{\pi}{2}+\beta''\ldots\ldots$$

ou encore :

$$-\alpha,\ -\alpha',\ -\alpha'',\ldots\ldots,\ 0,\ \beta,\ \beta',\ \beta''\ldots\ldots\ldots$$

en retranchant $\frac{\pi}{2}$ de tous les termes. De là résulte qu'avec ces deux éléments discontinus, le nombre entier n, et la fonction arc tang $f(x)$, telle que nous l'avons définie, nous réalisons une fonction continue, en convenant que n passera brusquement de la valeur zéro à la valeur 1, lorsqu'en faisant croître x,

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPI.4.1

$f(x)$ passera du positif au négatif en devenant infinie. Semblablement, on trouverait qu'il faut prendre $n = -1$, quand $f(x)$ passe du négatif au positif en devenant infinie,[1] tandis que n reste nul, lorsque la fonction ne change pas de signe. Continuons maintenant à faire croître la variable depuis la valeur K, en considérant l'expression :

$$\text{arc tang } f(x) + \pi - \text{arc tang } f(x_0) + n'\pi$$

il est évident qu'en déterminant n' de manière qu'elle représente toujours une fonction continue, on sera ramené au même raisonnement et à la même conclusion que tout à l'heure ; on a donc le théorème suivant dû à Cauchy :[2]

Le nombre entier n dans l'équation :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f'(x)\,dx}{1+f'^2(x)} = \text{arc tang } f(x_1) - \text{arc tang } f(x_0) + n\pi$$

est égal à l'excès du nombre de fois que la fonction $f(x)$ passe en devenant infinie du positif au négatif sur le nombre de fois qu'elle passe en devenant infinie du négatif au positif.

Cauchy a attribué à n la dénomination d'indice de la fonction $f(x)$ entre les limites x_0, x_1 ; nous les représenterons en conséquence, de cette manière :

$$n = I_{x_0}^{x_1}\left[f(x)\right]$$

II. L'analyse précédente donne le premier exemple de considérations relatives à la discontinuité et à la multiplicité des valeurs d'une fonction dont il ait été fait usage dans ce Cours. Pour les rendre plus familières, je vais encore les employer dans une circonstance extrêmement simple, en cherchant la relation remarquable qui lie les nombres n relatifs à une fonction et à son inverse, c'est-à-dire :

$$n = I_{x_0}^{x_1}\left[f(x)\right] \qquad \text{et :} \qquad n' = I_{x_0}^{x_1}\left[\frac{1}{f(x)}\right]$$

Nous partirons à cet effet des deux relations :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\,f(x)}{1+f^2(x)} = \text{arc tang } f(x_1) - \text{arc tang } f(x_0) + n\pi$$

---

(1) Le cas se ramène immédiatement au précédent, en changeant $f(x)$ en $-f(x)$

(2) Mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites, et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes. — Turin 1831

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote: 5274 d.

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{1+\frac{1}{f^2(x)}} = \text{arc tang}\,\frac{1}{f(x_1)} - \text{arc tang}\,\frac{1}{f(x_0)} + n'\pi$$

et en remarquant que :

$$\frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{1+\frac{1}{f^2(x)}} = -\frac{f'(x)\,dx}{1+f^2(x)}$$

nous les ajouterons membre à membre, afin d'éliminer l'intégrale. De là résultera :

$$(n+n')\pi = \text{arc tang}\,f(x_0) + \text{arc tang}\,\frac{1}{f(x_0)} - \text{arc tang}\,f(x_1) - \text{arc tang}\,\frac{1}{f(x_1)}$$

et au premier abord on serait tenté de conclure que tous les termes se détruisent dans le second membre, d'après l'équation : $\text{arc tang}\,f(x) + \text{arc tang}\,\frac{1}{f(x)} = 0$. Mais ce serait oublier la convention faite sur la fonction : $\text{arc tang}\,f(x)$, qui doit toujours rester comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. De là suit en effet qu'on doit prendre :

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\,f(x)$$

seulement dans le cas où $f(x)$ est positif, et écrire :

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\,f(x) - \pi = -\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\,f(x)$$

si $f(x)$ est négatif. Nous en conclurons aisément qu'on a :

$n + n' = 0$ lorsque $f(x_0)$ et $f(x_1)$ sont de même signe ;
$n + n' = 1$ lorsque $f(x_0)$ est positif, $f(x_1)$ négatif ;
$n + n' = -1$ lorsque $f(x_0)$ est négatif, $f(x_1)$ positif.

Ces relations, découvertes encore par Cauchy, et qui font dépendre si simplement n de n', ont une grande importance, comme on va voir.

III Considérant, pour plus de simplicité, un exemple particulier, je suppose qu'on demande l'indice de la fonction $f(x) = \frac{x^2-2}{x^3-3x}$ entre les limites -2 et $+2$, qui donnent : $f(-2) = -1$, $f(+2) = +1$

Le théorème qui vient d'être démontré donnera :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5214.1

$$I_{-2}^{+2}\left[\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right]+I_{-2}^{+2}\left[\frac{x^3-3x}{x^2-2}\right]=-1.$$

Or, en divisant x^3-3x par x^2-2, on obtient :

$$\frac{x^3-3x}{x^2-2}=x-\frac{x}{x^2-2}$$

solution qui permet de remplacer l'indice du premier membre, par l'indice de la fraction plus simple : $\frac{-x}{x^2-2}$. En effet, ces deux fractions deviennent infinies en même temps, et dans le voisinage des valeurs de la variable qui les rendent infinies, elles prennent des valeurs très-grandes, par rapport auxquelles le terme x devient négligeable, de sorte qu'elles sont alors de même signe. Remarquant enfin que d'après la signification même de l'indice, on a évidemment : $I_{x_0}^{x_1}\left[-f(x)\right]=-I_{x_0}^{x_1}\left[f(x)\right]$, on conclura de l'identité formée par la division :

$$I_{-2}^{+2}\left[\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right]=I_{-2}^{+2}\left[\frac{x}{x^2-2}\right]-1$$

Or, il est clair qu'on peut opérer sur la fraction $\frac{x}{x^2-2}$ comme sur la proposée, ce qui donnera :

$$I_{-2}^{+2}\left[\frac{x}{x^2-2}\right]=I_{-2}^{+2}\left[\frac{2}{x}\right]-1$$

On aura enfin :

$$I_{-2}^{+2}\left[\frac{2}{x}\right]+I_{-2}^{+2}\left[\frac{x}{2}\right]=-1$$

ou simplement : $$I_{-2}^{+2}\left[\frac{2}{x}\right]=-1$$

car l'indice d'une fonction qui ne passe point par l'infini, comme $\frac{x}{2}$, est évidemment nul. De ces réductions successives on conclut :

$$I_{-2}^{+2}\left[\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right]=-1$$

et on a par suite :

$$\int_{-2}^{+2}\frac{d\,\frac{x^2-2}{x^3-3x}}{1+\left(\frac{x^2-2}{x^3-3x}\right)}=\text{arc tang}\,1-\text{arc tang}\,(-1)=-\frac{5\pi}{2}$$

IV. Toute fraction rationnelle $f(x)=\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, pourra être traitée évidemment

par le procédé qui vient d'être expliqué en considérant la fraction $\frac{x^2-2}{x^3-3x}$. Sans m'y arrêter, je remarquerai que si l'on suppose $f(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, on aura en désignant par $x=K$ une racine de dénomination égale à zéro, que je supposerai, pour plus de généralité, d'un ordre quelconque de multiplicité μ :

$$f(K+\varepsilon)=\frac{\varphi'(K+\varepsilon)}{\varphi(K+\varepsilon)}=\frac{\frac{\varphi^{\mu+1}(K)}{1.2\ldots\mu}\varepsilon^{\mu}+\frac{\varphi^{\mu+3}(K)}{1.2\ldots\mu+1}\varepsilon^{\mu+1}+\ldots}{\frac{\varphi^{\mu+1}(K)}{1.2\ldots\mu+1}\varepsilon^{\mu+1}+\frac{\varphi^{\mu+2}(K)}{1.2\ldots\mu+2}\varepsilon^{\mu+2}+\ldots}$$

ou sensiblement quand ε est très-petit :

$$f(K+\varepsilon)=\frac{\mu}{\varepsilon}$$

Cela montre qu'en faisant croître la variable entre deux limites quelconques, la fonction $f(x=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ passe toujours, en devenant infinie, du négatif au positif et jamais du positif au négatif. Par conséquent, l'indice de cette fonction est négatif et pris en valeur absolue entre les limites x_0 et x_1, donne précisément le nombre de racines de l'équation $\varphi(x)=0$ qui sont renfermées dans cet intervalle. Or, il serait bien facile de retrouver l'énoncé même du théorème de Sturm[1] dans la méthode de détermination de l'indice qui a été obtenue par la voie du calcul intégral, comme le fait Cauchy, mais il n'est point nécessaire d'entrer dans ce détail pour avoir ainsi un remarquable exemple des liens étroits qui existent entre ce calcul et l'Algèbre s'observe seulement que dans tous les cas, qu'il s'agisse d'une équation $\varphi(x)=0$ algébrique ou transcendante, le nombre n de ses racines, entre deux limites données x_0, x_1, s'exprime par l'intégrale définie dont nous venons de faire l'étude, en y supposant : $f(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$; on a en effet :

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\varphi''(x)\varphi(x)-\varphi'^2(x)}{\varphi'^2(x)+\varphi^2(x)}\,dx=\text{arc tang}\,\frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)}-\text{arc tang}\,\frac{\varphi'(x_0)}{\varphi(x_0)}-n\pi$$

de sorte que ce nombre pourrait se tirer de l'évaluation approximative de l'intégrale par la méthode des quadratures.

---

(1) Journal de M. Liouville Tome V. Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprise entre des limites données. Théorèmes de Rolle de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy, par M. l'abbé Moigno. —

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Code SPI.4.1

Remarques préliminaires sur les intégrales définies

1e Cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie à l'une des limites, ou entre les limites de l'intégration.

La définition précédemment rappelée est alors en défaut, et en abordant sous ce point de vue général l'étude des intégrales définies, ces cas appellent l'attention et donnent lieu aux observations suivantes:

I. Considérons d'abord un exemple qui s'est offert dans le cours de première année: $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$, où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie à la limite supérieure. Il est certain que l'intégrale est néanmoins finie et déterminée, car elle provient de celle ci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi \, d\varphi$, qui rentre dans les conditions générales, en y faisant $\sin \varphi = x$. Mettant à profit cette observation, j'envisage en général la fonction:

$$f(x) = \frac{F(x)}{(x_1 - x)^m}$$

qui devient infinie pour $x = x_1$, et supposant qu'entre les limites x_0 et x_1 $F(x)$ soit toujours fini, je vais montrer qu'un changement de variable fait disparaître l'infini à la limite supérieure, dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, lorsque l'exposant m est inférieur à l'unité.

Soit en effet

$$\frac{dx}{(x_1 - x)^m} = -dt$$

On aura, en faisant pour abréger: $1 - m = n$

$$x = x_1 - (nt)^{\frac{1}{n}}$$

de sorte qu'aux valeurs de x croissant de x_0 à x_1, correspondront les valeurs décroissantes de $t = \left(\frac{x_1 - x_0}{n}\right)^n = T$ à $t = 0$, qui seront finies si n est positif et différent de zéro. Ayant d'ailleurs:

$$f(x)\,dx = -F(x)\,dt$$

on en conclut:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = -\int_T^0 F(x)\,dt = \int_0^T F\left[x_1 - (nt)^{\frac{1}{n}}\right] dt$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code: SPA-J

et tous les éléments de la nouvelle intégrale sont finis, puisque, par hypothèse, $F'(x)$ est une quantité finie de x_0 à x_1.[1]

On peut encore traiter la question sous un autre point de vue en cherchant la limite pour ε positif et infiniment petit de l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Nous ferons alors, en employant les deux premiers termes de la série de Taylor :

$$F(x) = F(x_1) + (x-x_1)\,F'\left[x_1+\theta(x-x_1)\right]$$

ce qui donnera :

$$\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx = F(x_1)\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon}\frac{dx}{(x_1-x)^m} - \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon}(x_1-x)^m F'\left[x_1+\theta(x-x_1)\right]dx$$

Or, les éléments de la seconde intégrale seront tous finis pour $m>0$ et même pour $m=0$, lorsque ε atteint sa limite. Quant à la première, elle a pour valeur :

$$\frac{(x_1-x_0)^m-\varepsilon^m}{m}$$

ou bien :

$$\log(x_1-x_0)-\log\varepsilon$$

Si $m=0$, par conséquent, la limite de l'intégrale proposée pour $\varepsilon=0$ est finie dans le premier cas, et infinie dans le second. Et il en serait de même a fortiori pour des valeurs de l'exposant m, supérieures à l'unité. Prenant $m=2$, par exemple, on fera :

$$F(x) = F(x_1) + (x-x_1)\,F'(x_1) + \frac{1}{2}(x-x_1)^2 F''\left[x_1+\theta(x-x_1)\right]$$

et opérant comme tout à l'heure, on décomposera l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx$, en une partie finie pour $\varepsilon=0$, et dans les termes

$$F(x_1)\left(\frac{1}{x_1-x_0}-\frac{1}{\varepsilon}\right)+F'(x_1)\left(\log\varepsilon-\log(x_1-x_0)\right)$$

qui, alors, sont infiniment grands.

II. Lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x=K$

---

[1] Si la fonction $f(x)$ devenait infinie à la limite inférieure pour $x=x_0$, le raisonnement serait le même ; on poserait seulement : $f(x)=\frac{F'(x)}{(x-x_0)^m}$, au lieu de : $f(x)=\frac{F'(x)}{(x_1-x)^m}$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5276 d.

comprise entre les limites de l'intégration, on pose en suivant le même principe :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{K-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{K+\eta}^{x_1} f(x)\,dx$$

et on détermine comme nous venons de le faire, la limite de chacune des deux intégrales pour ε et η positifs et infiniment petits. Le cas de $m=1$, où l'on suppose : $f(x) = \frac{F'(x)}{x-K}$, donne lieu alors à une conclusion importante. Ayant en effet :

$$\int_{x_0}^{K-\varepsilon} f(x)\,dx = F(K)\log\frac{\varepsilon}{K-x_0} + \int_{x_0}^{K-\varepsilon} F'\left[K+\theta(x-K)\right]dx$$

$$\int_{K+\eta}^{x_1} f(x)\,dx = F(K)\log\frac{x_1-K}{\eta} + \int_{K+\eta}^{x_1} F\left(K+\theta(x-K)\right)dx$$

la somme des deux termes infinis pour $\varepsilon=0$, $\eta=0$, a pour valeur :

$$F(K)\log\frac{x_1-K}{K-x_0}\cdot\frac{\varepsilon}{\eta}$$

quantité qui n'est plus nécessairement infinie, et peut au contraire passer par tous les états de grandeur, le rapport des deux infiniment petits $\frac{\varepsilon}{\eta}$ étant arbitraire).

Cauchy a introduit heureusement en analyse, sous le nom de valeur principale de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, le cas particulier où l'on suppose $\varepsilon=\eta$, mais il ne sera point fait usage dans ce Cours de cette considération délicate, que le grand géomètre a rendue si féconde. Le cas de m supérieur à l'unité, rend infinies chacune des intégrales $\int_{x_0}^{K-\varepsilon} f(x)\,dx$, $\int_{K+\eta}^{x_1} f(x)\,dx$, ainsi que leur somme comme on le vérifie immédiatement. On doit donc regarder comme infinie, par exemple, l'expression :

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x^2}$$

a et b sont deux constantes positives puisqu'elles comprennent la valeur $x=0$, pour laquelle la fonction $\frac{1}{x^2}$ est infinie. En partant à cet effet de l'intégrale indéfinie

$$\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5216 (1)

sans tenir compte de cette circonstance, on se trouverait conduit au résultat évidemment absurde :

$$\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

puisque tous les éléments de l'intégrale proposée sont positifs

2° Cas où les limites des intégrales sont infinies

On sait à combien de paradoxes a donné lieu en analyse la considération a priori de l'infini, aussi est-il nécessaire de ne point perdre de vue qu'on doit toujours regarder l'expression $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$, comme la limite de $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, pour X croissant indéfiniment. Cette limite pourra être indéterminée comme on le voit, par l'équation :

$$\int_{x_0}^{X} \cos x\,dx = \sin X - \sin x$$

tandis qu'elle sera finie ou infinie dans l'exemple suivant :

$$\int_{x}^{X} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{X^n}\right)$$

suivant qu'on aura $n > 0$ ou $n < 0$: Du résultat relatif au premier cas, savoir : $\int_{x}^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n x^n}$ se tire la remarque suivante :[1] Supposons que la fonction $f(x)$ décroisse indéfiniment à partir d'une certaine limite : $x = x_1$ de manière à remplir la condition :

$$f(x) < \frac{K}{x^{n+1}}$$

où n est positif ; tous les éléments de l'intégrale $\int_{x_1}^{X} f(x)\,dx$ étant inférieurs à ceux de l'expression : $K \int_{x_1}^{X} \frac{dx}{x^{n+1}}$ dont la limite est finie pour $X = \infty$ cette intégrale sera elle-même alors finie, et par suite aussi la proposée qui est la somme des deux termes $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{X} f(x)\,dx$.

En admettant au contraire, à partir d'une certaine limite $x = x_1$ la condition : $f(x) \geqq \frac{K}{x^{n+1}}$, l'exposant n étant nul ou négatif, on mettra en-

---

(1) Cours de Calcul différentiel et intégral de M. Serret. Tome II, page 97

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 ( )

évidence dans l'intégrale une partie :

$$\int_{x_1}^{X} f(x)\,dx \gtreqless K \int_{x_1}^{X} \frac{dx}{x^{n+1}} \gtreqless \frac{K}{n}\left\{\frac{1}{x_1^{n}} - \frac{1}{X^{n}}\right\}$$

qui croît indéfiniment avec X, même dans le cas de $n = 0$, attendu qu'alors on a : $\int_{x_1}^{X} \frac{dx}{x} = \log \frac{X}{x_1}$. L'intégrale proposée sera donc alors infinie avec X.

3° Dérivée d'une intégrale définie.

Cette question, qui se présente si naturellement au point de vue où nous sommes placés de l'étude des intégrales définies, considérées comme un mode d'expression des fonctions, reçoit une solution très-facile dans le cas où les limites x_0, x_1, ne contiennent point la quantité qu'on fait varier et que nous désignerons par α. Soit donc :

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x,\alpha)\,dx$$

la dérivée étant la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, on aura pour h infiniment petit :

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha+h)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\,dx}{h}$$

ou encore : $\frac{dy}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x,\alpha+h) - f(x,\alpha)}{h}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx$

Une seule restriction est attachée à ce résultat, c'est que la fonction $f(x,\alpha)$ soit toujours finie pour toutes les valeurs de la variable x comprises entre les limites de l'intégration, et cette restriction, il est nécessaire de la mentionner, attendu, comme on en a donné plus haut la raison, que la fonction $f(x,\alpha)$ peut être infinie à l'une des limites, l'intégrale étant néanmoins finie et déterminée.

Supposons, en second que x_0 et x_1 contiennent α ; ce cas pourrait être ramené au précédent, car en faisant :

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)\,t$$

on aura une transformée dont les limites sont constantes, savoir

$$y = (x_1 - x_0)\int_0^1 f\left[x_0 + (x_1 - x_0)\,t, \alpha\right] dt$$

Mais si l'on veut conserver la variable x, soit pour un instant $F(x,\alpha)$ l'intégrale indéfinie, de sorte qu'on ait :

$$\frac{dF(x,\alpha)}{dx} = f(x,\alpha)$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274.1

$$\int_0^x e^{\alpha^2 x}\, d\alpha$$

$$2\alpha . x . e^{\alpha^2 x}$$

$$e^{f(\alpha)x} . f'(\alpha) . x$$

$$2x^2 \cdot x^2 -$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 A 1

on en conclura :

$$y = F(x_1, \alpha) - F(x_0, \alpha)$$

et il suffira alors d'appliquer la règle de la dérivée des fonctions dérivées.

On trouvera ainsi :

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha} - \frac{dF}{dx_0}\frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{dF(x,\alpha)}{d\alpha} - \frac{dF(x_0,\alpha)}{d\alpha}$$

Or : $\frac{dF}{dx_1} = f(x_1, \alpha)$, $\frac{dF}{dx_0} = f(x_0, \alpha)$, et les deux derniers termes représentent la dérivée de l'intégrale dans l'hypothèse où les limites ne varient point avec α, de sorte qu'en définitive il viendra :

$$\frac{dy}{d\alpha} = f(x_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha} - f(x_0, \alpha)\frac{dx_0}{d\alpha} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}\, dx$$

Cette formule est d'un grand usage dans l'analyse et nous en allons en faire plusieurs applications importantes. Mais nous montrerons auparavant par un exemple la nécessité d'avoir égard à la restriction indiquée plus haut, en supposant :

$$y = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x - x^2}}$$

En effet, la formule renferme alors, d'une part le terme infini : $f(x_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha}$, et de l'autre l'intégrale : $\int_0^{\alpha} \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha x - x^2}}\right) dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \frac{x\, dx}{(\alpha x - x^2)\sqrt{\alpha x - x^2}}$ qui est elle-même infinie, car le facteur $x - \alpha$ entre au dénominateur sous le signe $\int$, avec l'exposant $\frac{3}{2}$, supérieur à l'unité. C'est le cas d'employer un changement de variables qui rende les limites constantes en posant $x = \alpha t$, ce qui donnera :

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t - t^2}}$$

quantité indépendante de α et dont la dérivée par conséquent est nulle.

Voici comment plusieurs applications de la formule que nous venons d'établir, ayant pour but de familiariser avec son usage et de montrer son importance en analyse.

I. En premier lieu, je reviendrai sur un résultat concernant l'intégrale

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.4.1

$\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{1-x^2}}$ où n est un nombre entier positif quelconque, et qui a été établi dans le Cours de 1re année, savoir :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{1-x^2}} = N \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} + \frac{P\sqrt{1-x^2}}{(x-a)^n}$$

N désignant une constante et P un polynome entier en x. La valeur de N a été obtenue sous la forme suivante :

$$N = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1.2\ldots n} \quad \frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}$$

que nous allons retrouver maintenant d'une manière facile et très-directe, comme on va voir. Faisant d'abord $x=1$ et $x=-1$ dans la relation précédente, et retranchant membre à membre, on en déduira :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{1-x^2}} = N \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi N}{\sqrt{a^2-1}}$$

attendu que (page 133)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

et à cette occasion, je fais observer qu'on doit supposer ici $a > 1$, sans quoi l'intégrale se présentant sous forme imaginaire, serait en réalité indéterminée. Différentions maintenant cette égalité par rapport à a, n fois de suite, on en déduira successivement :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{1-x^2}} = -\pi \frac{d(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{da}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1.2\,dx}{(x-a)^3\sqrt{1-x^2}} = -\pi \frac{d^2(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{da^2}$$

etc., d'où, en général

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)^{n+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{1.2.3\ldots n} \quad \frac{d^n(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}$$

On a donc la relation :

$$\frac{-\pi N}{\sqrt{a^2-1}} = -\frac{\pi}{1.2\ldots n} \quad \frac{d^n(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}$$

et par conséquent :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPM.J

$$N = \frac{\sqrt{a^2-1}}{1.2\ldots n}\ \frac{d^n(a^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{da^n} = \frac{\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{-1}}{1.2\ldots n}\ \frac{d^{n-1}(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^{n-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-a^2}}{1.2\ldots n}\ \frac{d^n(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{da^n}$$

comme on l'avait trouvé par une autre méthode.

II. Je considère en second lieu l'expression suivante :

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n} f(z)\, dz.$$

où $f(z)$ est une fonction quelconque ne renfermant pas x, x_0 une constante et n un nombre entier positif. En différentiant par rapport à x qui se trouve sous le signe d'intégration et à la limite supérieure, on aura un premier terme, à savoir la valeur pour $z = x$ de la fonction : $\frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n} f(z)$, terme qui s'évanouit, de sorte qu'il vient simplement :

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{n(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots n} f(z)\, dz = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f(z)\, dz$$

On passe donc de y à $\frac{dy}{dx}$ en changeant n en $n-1$, de sorte qu'on aura successivement :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} f(z)\, dz,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)} f(z)\, dz \text{ \&c}$$

et $\frac{d^ny}{dx^n} = \int_{x_0}^{x} f(z)\, dz$. Mais maintenant la quantité placée sous le signe d'intégration ne s'annule plus pour $z = x$, le terme relatif à la limite supérieure reparaît donc et se trouve seul, puisque $f(z)$ ne contenant pas x, le second terme dépendant de $\frac{df(z)}{dx}$ disparaît. Nous aurons, par suite :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = f(x)$$

résultat important à plusieurs égards, comme on va voir.

Et d'abord, on observera que cette équation différentielle, envisagée directement, donne pour y l'intégrale multiple d'ordre $n+1$ de $f(x)$, d'où cette conséquence qu'une telle expression se réduit, quel que soit n, à une intégrale simple. Ainsi, on a en particulier

$$\int dx \int f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\, dz$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 ( )

$$\int dx \int dx \int f(x)\,dx = \frac{1}{1.2}\int_{x_0}^{x}(x-z)^2 f(z)\,dz$$

et il serait facile de mettre en évidence les constantes arbitraires amenées dans le premier membre par les intégrations successives, d'où l'on voit que notre intégrale simple :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n} f(z)\,dz$$

qui satisfait à l'équation différentielle, n'en donne point la solution la plus générale. Mais si l'on fait pour un instant :

$$y = F(x) + y_1$$

cette solution s'obtient de la manière la plus prompte, en ayant :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = 0$$

ou bien : $\frac{d}{dx}\,\frac{d^n y_1}{dx^n} = 0$, on en conclura : $\frac{d^n y_1}{dx^n} = C$. Semblablement, on tirera de cette équation mise sous la forme : $\frac{d}{dx}\,\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n+1}} = C$, $\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = Cx + C$

et il est clair qu'en continuant ainsi de proche en proche on trouvera :

$$y_1 = \frac{Cx^n}{1.2\ldots n} + \frac{C'x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \cdots + C^{(n-1)}x + C^{(n)}$$

ce qui est un polynome du degré n à coefficients arbitraires. Nous avons fait de cette manière, la théorie complète des quadratures successives d'une même fonction qui, appartenant essentiellement au Cours de l'année dernière n'aurait pu y être traitée d'une manière aussi facile et aussi rapide. Sur ce sujet, j'ajoute encore une remarque.

Considérons l'équation :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{n+1}}$$

qui évidemment est satisfaite pour $y = f(x)$ et dont nous possédons, par ce qui précède, la solution générale sous la forme :

$$y = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(z)\,dz + \pi(x)$$

$\pi(x)$ étant un polynome arbitraire de degré n. Pour une détermination convenable de ce polynome, on doit donc avoir :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274.1

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(z)\,dz + \Pi(x)$$

Or, nous parviendrons à cette détermination en faisant $x = x_0$, dans l'équation précédente et les n premières dérivées par rapport à x. Ayant en effet les dérivées de l'intégrale, obtenues plus haut et qui donnent :

$$f'(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots n-1} f^{(n+1)}(z)\,dz + \Pi'(x)$$

$$f''(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2\ldots n-2} f^{(n+1)}(z)\,dz + \Pi''(x)$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(z)\,dz + \Pi^{(n)}(x)$$

nous en déduirons :

$$\Pi(x_0) = f(x_0), \quad \Pi'(x_0) = f'(x_0) \ldots\ldots \Pi^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

et par conséquent :

$$\Pi(x) = \Pi(x_0 + x - x_0) = \Pi(x_0) + \frac{x-x_0}{1}\Pi'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\Pi''(x_0)$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n}\Pi^{(n)}(x_0)$$
$$= f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0)$$

Cette expression du polynome $\Pi(x)$ donne la relation :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0)$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(z)\,dz$$

c'est à dire la série de Taylor, avec une nouvelle forme analytique du reste, représenté par une intégrale définie, et affranchie du nombre indé= =terminé θ, compris entre zéro et l'unité.

III. Un dernier point de vue sous lequel il reste à considérer la différentiation des intégrales définies, se rapporte à l'importante question de la formation des équations différentielles. Soit, pour premier exemple, la transcendante :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - JPMC - Cote : 5214 J

$$y = \int \theta(z)\,(z-x)^{\mu+n-1}\,dz.$$

en faisant :

$$\theta(z) = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots\ldots(z-l)^{\lambda-1}$$

et désignant par n le nombre des quantités $a, b, \ldots\ldots l$. Si l'on différentie par rapport à x, on aura :

$$-\frac{dy}{dx} = (\mu+n-1)\int \theta(z)\,(z-x)^{\mu+n-2}\,dz$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\mu+n-1)(\mu+n-2)\int \theta(z)\,(z-x)^{\mu+n-3}\,dz$$

(A) .....

$$(-1)^n\frac{d^ny}{dx^n} = (\mu+n-1)(\mu+n-2)\ldots\ldots\mu\int \theta(z)(z-x)^{\mu-1}\,dz$$

Or, il existe entre ces intégrales indéfinies, au nombre de $n+1$, une relation linéaire que je vais établir. Prenons à cet effet la dérivée par rapport à x de l'expression :

$$\Theta(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots\ldots(z-l)^{\lambda}(z-x)^{\mu}$$

dérivée que nous savons d'avance devoir contenir en facteur :

$$(z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1}\ldots\ldots(z-l)^{\lambda-1}(z-x)^{\mu-1} = \theta(z)\,(z-x)^{\mu-1}$$

Prenons pour abréger :

$$(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l) = F(z)$$

$$\frac{\alpha F(z)}{z-a} + \frac{\beta F(z)}{z-b} + \ldots\ldots + \frac{\lambda F(z)}{z-l} = f(z)$$

le calcul donne :

$$\Theta'(z) = \left[\mu F(z) + (z-x)\,f(z)\right]\theta(z)\,(z-x)^{\mu-1}$$

et il suffit d'écrire :

$$F(z) = F(x+z-x) = F(x) + \frac{z-x}{1}F'(x) + \ldots\ldots + \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n}F^n(x)$$

$$f(z) = f(x+z-x) = f(x) + \frac{z-x}{1}f'(x) + \ldots\ldots + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots n-1}f^{(n-1)}(x)$$

pour conclure de cette égalité en l'intégrant par rapport à z :

$$\Theta(z) = \mu F(x)\int \theta(z)\,(z-x)^{\mu-1}\,dz + \mu F'(x)\int \theta(z)\,(z-x)^{\mu}\,dz + \ldots\ldots\ldots$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

$$+ \frac{\mu F^{(x)}(x)}{1.2\ldots n} \int \theta(z)(z-x)^{\mu+n-1} dz$$

$$+ f(x) \int \theta(z)(z-x)^{\mu} dz + f'(x) \int \theta(z)(z-x)^{\mu+1} dz + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}x}{1.2\ldots n-1} \int \theta(z)(z-x)^{\mu+n-1} dz$$

C'est la relation linéaire annoncée, elle conduit immédiatement, d'après les équations (Λ), après avoir multiplié les deux membres par : $(-1)^n(\mu+n-1)(\mu+n-2)\ldots(\mu+1)$, à l'équation différentielle suivante :

$$(-1)^n(\mu+n-1)(\mu+n-2)\ldots(\mu+1)\,\Theta(z) = F(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{\mu F'(x)}{1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$+ \frac{\mu(\mu+1)F''(x)}{1.2.}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots + (-1)^n \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)F^{n}(x)}{1.2.3\ldots n} y \Big]$$

$$- \Big[f(x)\frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} - \frac{\mu+1}{1} f'(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)f''(x)}{1.2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n-1} y \Big]$$

On a alors :

$$y = \int (z-1)^{\alpha-1}(z+1)^{\beta-1}(z-x)^{\mu+1} dz.$$

et la relation :

$$(\mu+1)(z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}(z-x)^{\mu} = (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \Big[(\alpha+\beta+2\mu)x+\alpha-\beta\Big]\frac{dy}{dx} + (\mu+1)(\alpha+\beta+\mu)y$$

En supposant α et β positifs, le premier membre s'évanouissant pour $z=1$ et $z=-1$, on en conclura que l'intégrale définie

$$y = \int_{-1}^{+1} (z-1)^{\alpha-1}(z+1)^{\beta-1}(z-x)^{\mu+1} dz.$$

donne :

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \Big[(\alpha-\beta+2\mu)x+\alpha-\beta\Big]\frac{dy}{dx} + (\mu+1)(\alpha+\beta+\mu)y = 0$$

Cette équation, célèbre par les travaux dont elle a été l'objet, définit comme cas particulier, les polynomes X_n de Legendre, les fonctions cos n (arc cos x) etc., et en l'embrassant dans toute sa généralité la série de 4 éléments de Gauss. (1)

---

(1) On nomme ainsi la série : $1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2 + \ldots\ldots$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5214

Passons aux transcendantes : $y = \int \theta(z) e^{zx} dx$, où je suppose toujours :

$$\theta(z) = (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1} \cdots\cdots (z-l)^{\lambda-1}$$

le calcul est entièrement semblable, mais plus simple. Il d'abord on a :

$$\frac{dy}{dx} = \int z\,\theta(z)\, e^{zx}\, dz$$

$$(B) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \int z^2 \theta(z)\, e^{zx}\, dz$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \int z^n \theta(z)\, e^{zx}\, dz$$

Prenant maintenant la dérivée par rapport à z de l'expression :

$$\Theta(z) = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta} \cdots\cdots (z-l)^{\lambda} e^{zx}$$

on trouvera :

$$\Theta'(z) = \left[x F(z) + f(z)\right] \theta(z)\, e^{zx}$$

$F(z)$ et $f(z)$ désignant les mêmes polynomes que précédemment. Faisant donc :

$$F(z) = A z^n + B z^{n-1} + \cdots\cdots + G z + H.$$
$$f(z) = a z^{n-1} + b z^{n-2} + \cdots\cdots + f z + g$$

il viendra, en intégrant les deux membres par rapport à z :

$$\Theta(z) = x\left[A \int z^n \theta(z) e^{zx} dz + B \int z^{n-1} \theta(z) e^{zx} dz + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + G \int z\, \theta(z) e^{zx} dz + H \int \theta(z) e^{zx} dz\right]$$
$$+ \left[a \int z^{n-1} \theta(z) e^{zx} dx + b \int z^{n-2} \theta(z) e^{zx} dz + \cdots\cdots + f \int \theta(z) e^{zx} dz + g \int \theta z\, e^{zx} dz\right]$$

et par conséquent, d'après les équations (B)

$$\Theta(z) = x\left[A \frac{dy}{dx^n} + B \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + G \frac{dy}{dx} + H\right]$$
$$+ a \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + b \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + f \cdot \frac{dy}{dx} + g$$

Soit encore : $n = 2$, $\alpha = \beta$, $a = 1$, $b = -1$, nous aurons :

$$y = \int (z^2 - 1)^{\alpha-1} e^{zx}\, dz$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5276 d.1

et l'équation :

$$(z^2-1)\, e^{zx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} - xy$$

Supposant donc α positif, le premier membre s'évanouira pour $z=1$, $z=-1$, et nous en conclurons que l'intégrale :

$$y = \int_{-1}^{+1} (z^2-1)^{\alpha-1} e^{zx}\, dz$$

vérifie l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

Cette équation, en y changeant x en $x\sqrt{-1}$, prend cette forme :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\alpha\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

qui s'offre dans les plus importantes applications de l'analyse, notamment dans la théorie de la chaleur, et dans l'astronomie, où elle définit une fonction connue sous le nom de transcendante de Bessel (1)

4° De l'intégration sous le signe $\int$

Soit, comme précédemment, $y = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\, dx$, α étant un paramètre variable que je supposerai ne point entrer dans les limites x_0, x_1. Faisons, en désignant par α_0 une constante

$$F(x,\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x,\alpha)\, d\alpha$$

je dis qu'on aura :

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} y\, d\alpha = \int_{x_0}^{x} F(x,\alpha)\, dx$$

En effet, les deux membres de cette égalité sont des fonctions de α qui ont même dérivée, car on a :

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x,\alpha)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF(x,\alpha)}{d\alpha}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\alpha)\, dx = y$$

et comme ils s'évanouissent simultanément pour $\alpha = \alpha_0$, ils sont identiques.

Voici une application importante de cette formule.

---

(1) Die Fourier-Besselsche Function. Mémoire de M. Heine. Journal de Crelle 1867.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC Cote: 5214.1

Considérons l'intégrale : $A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$, qu'on démontre aisément avoir une valeur finie en la décomposant en ces deux termes :

$$A = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$$

Ayant toujours en effet pour $x > 1$, $e^{-x^2} < e^{-x}$, on en conclut

$$\int_1^\infty e^{-x^2} dx < \int_1^\infty e^{-x} dx$$

et cette dernière intégrale a la valeur finie $\frac{1}{e}$

Introduisons maintenant un paramètre α dans A, en posant $x = \alpha t$, nous aurons :

$$A = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2} \alpha \, dt$$

et par suite :

$$A e^{-\alpha^2} = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 (1-t^2)} \alpha \, dt$$

Or, on peut aisément obtenir l'intégrale du second membre par rapport à α, car on a :

$$e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha = \frac{d}{d\alpha}\left(-\frac{e^{-\alpha^2(1-t^2)}}{2(1+t^2)}\right)$$

et la règle précédemment établie donne par suite :

$$A \int_0^\alpha e^{-\alpha^2} d\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{e^{-\alpha^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right] dt$$

Faisant donc α infiniment grand, on obtiendra :

$$A^2 = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

d'où, par conséquent : $A = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.[1] C'est à Laplace qu'on doit la découverte de ce résultat, et telle est son importance, qu'il s'affe de lui même dans plusieurs circonstances. Ainsi, on considère, dans la théorie des fonctions elliptiques, la transcendante représentée par la série : $\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 a^2} = 1 + 2e^{-a^2} + 2e^{-4a^2} + 2e^{-9a^2} + \ldots\ldots$

et dont l'étude forme une branche intéressante de l'analyse. L'une de ses propriétés est exprimée par l'équation :

$$a\left(1 + 2e^{-a^2} + 2e^{-4a^2} + 2e^{-9a^2} + \ldots\ldots\right) = \sqrt{\pi}\left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2}{a^2}} + 2e^{-4\frac{\pi^2}{a^2}} + 2e^{-9\frac{\pi^2}{a^2}} + \ldots\ldots\right)$$

et si l'on y suppose a infiniment petit, en faisant $a = d\alpha$, et se rappelant qu'en général :

---

[1] Cette démonstration est tirée des Cours de Calcul différentiel et intégral de M. Serret, Tome II, page 196.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,d\alpha = d\alpha\Big[f(0)+f(d\alpha)+f(2d\alpha)+\dots \\ +f(-d\alpha)+f(-2d\alpha)+\dots\Big]$$

le premier membre sera précisément $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha$, tandis que le second se réduit à $\sqrt{\pi}$, et on retrouve par cette voie, la valeur (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$$

5° Méthode de Laplace pour l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances. (2)

De telles expressions s'offrent fréquemment en analyse, et en particulier dans le calcul des probabilités, en vue duquel Laplace a imaginé cette méthode, imparfaite sous le rapport de la rigueur, mais qui donne des résultats extrêmement importants, qu'on ne saurait obtenir par une autre voie. Voici le principe très-simple sur lequel elle repose :

I. Distinguant deux cas principaux à l'égard de l'intégrale définie : $\int_{x_0}^{x_1} f(x)^x dx$, je supposerai dans le premier que $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$, et croisse continuellement jusqu'à $x = x_1$. Cela étant, je change de variable en faisant :

$$f(x) = f(x_1)e^{-t}$$

et d'après cette relation, t décroîtra de l'infini à zéro, lorsque x va en augmentant de x_0 à x_1. Il en résulte d'ailleurs :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = f(x_1)\int_{\infty}^{0} e^{-t}\,dx$$

et il s'agit maintenant d'obtenir x en fonction de t.

Soit à cet effet : $f(x) = e^{F(x)}$ et $x = x_1 + \xi$, ce qui donnera :

$$F(x_1+\xi) = F(x_1) - t$$

ou, en développant le premier membre :

$$\xi F'(x_1) + \frac{\xi^2}{1.2}F''(x_1) + \frac{\xi^3}{1.2.3}F'''(x_1) + \dots\dots = -t$$

La méthode des coefficients indéterminés donnera aisément :

$$\xi = -\frac{1}{F'(x_1)}t - \frac{F''(x)}{2F'^3(x_1)}t^2 - \frac{3F''^2(x_1) - F'(x_1)F'''(x_1)}{6F'^5(x_1)}t^3 \dots\dots$$

d'où : $$dx = d\xi = -dt\left[\frac{1}{F'(x_1)} + \frac{F''(x)}{F'^3(x_1)}t + \dots\dots\dots\right]$$

---

(1) Cauchy – Journal de M. Liouville Tome 5 page 154

(2) Théorie analytique des probabilités, page 97.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

et par suite, après avoir interverti les limites

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = f(x_1)\int_0^\infty e^{-t}\left[\frac{1}{F'(x_1)} + \frac{F''(x_1)}{F'^3(x_1)}\,t + \cdots\cdots\right]dt$$

Il n'est donc plus besoin, pour effectuer le calcul, que de connaître les valeurs des intégrales définies de la forme : $\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$. Or, en partant de l'équation connue :

$$\int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{1}{a}$$

t changeant a en $1-a$, ce qui donne :

$$\int_0^\infty e^{-(1-a)t}\,dt = \frac{1}{1-a}$$

on trouvera, en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de a :

$$\int_0^\infty e^{-(1-a)t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\left(1 + \frac{at}{1} + \frac{a^2t^2}{1.2} + \cdots\cdots + \frac{a^nt^n}{1.2\ldots n} + \cdots\cdots\right)dt$$

$$= (1 + a + a^2 + \cdots\cdots + a^n + \cdots\cdots$$

et en égalant les coefficients de a^n, on obtient :

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = 1.2\ldots\ldots n$$

II. Le point essentiel dans ce qui précède, est la convergence de la série tirée de l'équation :

$$F(x_1 + \xi) = F(x_1) - t$$

et qui donne ξ développé suivant les puissances croissantes de t. Laplace ayant en vue le cas où l'on suppose $f(x) = \varphi(x)^n$, nous trouverons, en faisant : $\varphi(x) = e^{\Phi(x)}$ que cette relation devient alors :

$$\Phi(x_1 + \xi) = \Phi(x_1) - \frac{t}{n}$$

de sorte que le développement procédant suivant les puissances de $\frac{t}{n}$, on est suffisamment fondé, l'exposant étant un grand nombre, à admettre la convergence. Et dans le cas plus général où l'on aurait :

$$f(x) = \varphi(x)^n \chi(x)$$

cela serait à fort peu près de même, car on peut écrire :

$$f(x) = \left[\varphi(x)\,\chi(x)^{\frac{1}{n}}\right]^n.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

et le facteur $\chi(x)^{\frac{1}{n}}$, tendant vers l'unité lorsque n augmente, on est sensiblement ramené au premier cas. Nous voyons par là que le caractère essentiel de la méthode de Laplace est de conduire à une expression de l'intégrale $\int_x^x \varphi^n(x)\,\chi(x)\,dx$, sous forme d'une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de n. A ce point de vue, la méthode peut être parfois modifiée, de manière à devenir plus facile, et je vais en donner un exemple.

III. Considérons l'intégrale $\int_0^a \frac{x^{n-1}dx}{1+x}$, où la fonction $\frac{x^{n-1}}{1+x}$ remplit les conditions que nous avons admises, en allant toujours en croissant de zéro à $\frac{a^{n-1}}{1+a}$. Au lieu de la chercher sous la forme : $\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{n^3}+\mathcal{G}^{ca}\cdots\cdots$, nous poserons :

$$\int_0^a \frac{x^{n-1}dx}{1+x} = \frac{a^{n-1}}{1+a}\left[\frac{G}{n}+\frac{H}{n(n+1)}+\frac{K}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\right]$$

et les coefficients G, H, K, qui dépendent de a, mais non de n, s'obtiendront comme il suit : Je changerai n en $n+1$, et en employant les relations suivantes :

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

.....

on aura

$$\int_0^a \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{a^n}{1+a}\left[G\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n(n+1)}\right)+H\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\right)+\cdots\right]$$

Or, en ajoutant membre à membre, et observant que :

$$\int_0^a \frac{x^{n-1}dx}{1+x} + \int_0^a \frac{x^n dx}{1+x} = \int_0^a x^{n-1}dx = \frac{a^n}{n}$$

nous trouverons aisément l'identité :

$$\frac{a(1+a)}{n} = \frac{G(1+a)}{n} + \frac{H(1+a)-aG}{n(n+1)} + \frac{K(1+a)-2aH}{n(n+1)n+2}+\cdots$$

qui donne ces valeurs, d'une loi simple :

$$G = a\,,\quad H = \frac{a^2}{1+a}\,,\quad K = \frac{2a^3}{(1+a)^2}\,,\ \ldots\ldots$$

d'où résulte :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

$$\int_0^a \frac{x^{n-1}dx}{1+x} = \frac{a^n}{1+a}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{a}{1+a}\right) + \frac{1.2}{n(n+1)(n+2)}\left(\frac{a}{1+a}\right)^2 + \frac{1.2.3.}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\left(\frac{a}{1+a}\right)^3 + \cdots\right]$$

On trouverait de même : (*)

$$\int_0^a \frac{x^{2n}dx}{1+x^2} = \frac{a^{2n+1}}{1+a^2}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right) + \frac{2.4}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2 + \frac{2.4.6}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^3 + \cdots\cdots\right]$$

IV. Revenant à l'intégrale générale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, nous passerons au second cas qui donne lieu aux applications les plus nombreuses et les plus importantes. C'est lorsque la fonction $f(x)$ s'annulant aux deux limites, n'aura dans l'intervalle qu'un seul maximum pour $x = K$. Pour fixer les idées, nous admettrons qu'elle soit positive dans cet intervalle, ce qui entraîne la condition $F''(K) < 0$, d'après la théorie des maxima et minima. Cela étant, nous changerons encore de variable en faisant :

$$f(x) = f(K)\,e^{-t^2}$$

et on voit par cette relation que t croîtra de $-\infty$ à zéro, lorsque x augmentera de x_0 à K, et ensuite de zéro à $+\infty$, lorsque x augmentera de K à x_1. Nous aurons par conséquent :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = f(K)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dx$$

et s'il s'agissait de l'intégrale $\int_K^{x_1} f(x)\,dx$, il est évident qu'il suffirait de faire croître t de zéro à $+\infty$, ce qui donnera :

$$\int_K^{x_1} f(x)\,dx = f(K)\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dx$$

Pour exprimer maintenant x en série ordonnée suivant les puissances croissantes de t ; nous ferons : $x = K + \xi$, $f(x) = e^{F(x)}$ d'où par conséquent, cette équation :

(*) Les intégrales sont les termes complémentaires des développements en séries des fonctions $L(1+a)$ arc tang a, qu'on obtient lorsqu'on prend pour point de départ le développement en série des fonctions dérivées :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots\cdots \mp x^{n-1} \pm \frac{x^{n-1}}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots\cdots \mp x^{2n-2} \pm \frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

$$F(K+\xi) = F(K) - t^2$$

En considérant donc d'une manière toute spéciale comme précédemment le cas de $f(x) = \varphi(x)^n$, nous trouverons en posant $\varphi(x) = e^{\Phi(x)}$

$$\Phi(K+\xi) = \Phi(K) - \frac{t^2}{n}$$

de sorte que la valeur de ξ, procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{t}{\sqrt{n}}$, on aura, pour admettre la convergence de la série, lorsque n est un grand nombre, une raison plausible qui s'appliquera encore au cas général de $f(x) = \varphi^n(x)\chi(x) = \left[\varphi(x)\chi^{\frac{1}{n}}(x)\right]^n$.

Revenant à l'équation

$$F(K+\xi) = F(K) - t^2$$

ou bien en développant et ayant égard à la condition $F'(K) = 0$

$$\frac{\xi^2}{1.2} F''(K) + \frac{\xi^3}{1.2.3} F'''(K) + \ldots\ldots = -t^2$$

nous observons qu'on a : $F(x) = \log f(x)$, $F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$F''(x) = \frac{f''(x) f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$, de sorte que la valeur $x = K$ donnant :

$f'(K) = 0$, $f''(K) < 0$, la quantité $F''(K) = \frac{f''(K)}{f(K)}$ sera négative

Nous supposerons essentiellement $F''(K)$ différent de zéro, et nous ferons en conséquence

$$\frac{1}{2} F''(K) = -K^2$$

et par la méthode des coefficients indéterminés, nous obtiendrons facilement :

$$\xi = \frac{1}{K} t + \frac{F'''(K)}{12 K^4} t^2 + \frac{5 F'''^2(K) - 3 F''(K) F^{IV}(K)}{288 K^7} t^3 + \ldots\ldots$$

On en tire :

$$dx = d\xi = dt \left[\frac{1}{K} + \frac{F'''(K)}{6 K^4} t + \frac{5 F'''^2(K) - 3 F''(K) F^{IV}(K)}{96 K^7} t^2 \ldots\ldots\right]$$

ce qui donnera, pour l'intégrale proposée :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = f(K) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left[\frac{1}{K} + \frac{F'''(K)}{6 K^4} t + \frac{5 F'''^2(K) - 3 F''(K) F^{IV}(K)}{96 K^7} + \ldots\right] dt$$

Dans le cas où la limite inférieure serait la valeur de la variable à laquelle correspond le maximum de $f(x)$, on aurait l'expression suivante :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5216 d.

$$\int_K^{x_1} f(x)\,dx = f(K)\int_0^\infty e^{-t^2}\left[\frac{1}{K} + \frac{F'''(K)}{6K^4}t + \frac{5F'''^2(K) - 3F''(K)F''''(K)}{9^2 K^7}t^2 + \dots\right]dt$$

Ainsi, il ne reste plus dans les deux cas qu'à déterminer $\int_0^\infty t^n e^{-t^2}\,dt$.

Soit d'abord $n = 2m+1$, nous ferons $x = t^2$ dans l'égalité donnée plus haut :

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx = 1.2.3\dots m$$

et il viendra :

$$2\int_0^\infty t^{2m+1} e^{-t^2}\,dt = 1.2.3\dots m$$

Soit ensuite : $n = 2m$, on posera dans l'intégrale :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$x = t\sqrt{\alpha}$, ce qui donne :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Changeant ensuite α en $1-\alpha$ et développant les deux membres suivant les puissances de α, nous trouverons :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\left(1 + \frac{\alpha x^2}{1} + \frac{\alpha^2 x^4}{1.2} + \dots + \frac{\alpha^m x^{2m}}{1.2\dots m} + \dots\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2 + \dots + \frac{1.3.5\dots 2m-1}{2.4.6\dots 2m}\alpha^m + \dots\right)$$

d'où, en égalant les coefficients de α^m

$$\int_0^\infty x^{2m} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1.3.5\dots 2m-1}{2.4.6\dots 2m}\,1.2.3\dots m = \sqrt{\pi}\,\frac{1.3.5\dots 2m-1}{2^{m+1}}$$

L'accroissement rapide que prennent ces intégrales quand l'exposant m augmente, diminue, comme on voit, la convergence de la série donnée par la méthode de Laplace. Cette méthode a néanmoins une importance que feront apprécier les applications suivantes :

V. Soit en premier lieu l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$; à la limite supérieure, la fonction $\cos x$ s'annule, tandis que à la limite inférieure correspond son maximum qui est l'unité ; nous ferons en conséquence :

$$\cos^n x = e^{-t^2}$$

et la simplicité de cette relation permettra d'opérer plus directement que dans le cas général. Nous trouverons en effet en différentiant :

$$n\cos^{n-1}x\,\sin x\,dx = 2te^{-t^2}dt = 2t\cos^n x\,dt$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274.1

d'où : $$dx = \frac{2\cos x\, t\, dt}{n \sin x} = \frac{2t\,dt}{n}\, e^{-\frac{t^2}{n}} \left(1 - e^{-\frac{2t^2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et il reste seulement à développer le second membre suivant les puissances de t.

Or, on a :

$$1 - e^{-\frac{2t^2}{n}} = \frac{2t^2}{n} - \frac{4t^4}{1.2.n^2} + \frac{8t^6}{1.2.3.n^3} - \cdots\cdots$$

par conséquent :

$$\left(1 - e^{-\frac{2t^2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2t^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{4t^4}{1.2.3.n^2} - \cdots\cdots\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{24n^2} + \cdots\cdots\right)$$

et : $$dx = dt\sqrt{\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n} + \frac{t^4}{1.2.n^2} - \cdots\cdots\right)\left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{24n^2} + \cdots\cdots\right)$$

$$= dt\sqrt{\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{24n^2} - \cdots\cdots\right)$$

La transformée en t est donc :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\sqrt{\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^4}{24n^2} - \cdots\cdots\right) dt = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \cdots\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et l'on en conclut, pour l'intégrale proposée :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{128n^3} + \cdots\cdots\right)$$

Or, en rapprochant cette relation, où n est quelconque, de la valeur connue de l'intégrale quand n est un nombre entier, par exemple un nombre pair $2m$, savoir :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2},$$ on trouve le résultat suivant

$$\frac{1.3.5\ldots\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots\ldots 2m} = \frac{1}{\sqrt{m\pi}}\left(1 - \frac{1}{8m} + \frac{1}{128m^2} - \frac{5}{1024m^3} + \cdots\cdots\right)$$

d'autant plus approché que m est plus considérable. (×)

(×) En faisant : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{m^2} + \frac{\gamma}{m^3} + \cdots\cdots\right)$ les coefficients $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ peuvent s'obtenir aussi par l'identité :

$$1 + \frac{\alpha}{m+1} + \frac{\beta}{(m+1)^2} + \frac{\gamma}{(m+1)^3} + \cdots\cdots = \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\alpha}{m-1} + \frac{\beta}{(m-1)^2} + \frac{\gamma}{(m-1)^3} + \cdots\cdots\right)$$

conséquence de la relation :

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\, dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\, dx$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : 5274-1

VI. Soit en second lieu l'intégrale $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$; la fonction $x^n e^{-x}$ s'annule aux deux limites, et a dans l'intervalle un maximum pour $x = n$. On fera donc :

$$x^n e^{-x} = K^n e^{-n} e^{-t^2}$$

ou bien :

$$n \log x - x = n \log n - n - t^2$$

et en posant : $x = n + \xi$:

$$n \log\left(1 + \frac{\xi}{n}\right) - \xi = -t^2$$

Or, la méthode générale appliquée à cette équation donne pour résultat :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288 n^2} + \cdots\cdots\right)$$

et si l'on suppose n un nombre entier, on arrive à cette formule importante et si souvent employée :

$$1.2.3 \ldots\ldots n = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288 n^2} + \cdots\cdots\right)$$

VII. Considérons en terminant, une fonction $f(x)$ qui en s'annulant aux limites x_0, x_1, a dans l'intervalle d'autres racines, $\alpha, \beta, \ldots \lambda$. On voit, par la décomposition suivante :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \cdots\cdots + \int_{\lambda}^{x_1} f(x)\, dx$$

que la méthode de Laplace pourra s'y appliquer, en considérant ses divers termes, pourvu qu'entre deux racines consécutives, la fonction $f(x)$ n'offre jamais qu'un maximum. Enfin, on pourrait admettre qu'une des limites x_0, x_1, ou toutes deux, correspondraient à des maxima de $f(x)$ et tel serait le cas de l'intégrale :

$$\int_0^\pi (\cos\alpha + \cos x)^n dx$$

qu'on traitera de cette manière. Observant que la fonction $\cos\alpha + \cos x$ est un maximum pour $x = 0$, et s'annule pour $x = \pi - \alpha$, on écrira :

$$\int_0^\pi (\cos\alpha + \cos x)^n dx = \int_0^{\pi-\alpha} (\cos\alpha + \cos x)^n dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (\cos\alpha + \cos x)^n dx$$

Mais en posant : $x = \pi - t$, on aura :

$$\int_{\pi-\alpha}^{\pi} (\cos\alpha + \cos x)^n dx = \int_0^\alpha (\cos\alpha - \cos t)^n dt = (-1)^n \int_0^\alpha (\cos t - \cos\alpha)^n dt$$

et cette transformation ramène la seconde intégrale à être prise entre deux

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

limites, dont l'inférieure correspond à un maximum, et la supérieure à une racine de la fonction à intégrer. Les formules générales donnent alors très-facilement

$$\int_0^{\pi-\alpha} (\cos\alpha + \cos x)^n \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1+\cos\alpha\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2-\cos\alpha}{8n} + \cdots\cdots\right)$$

$$\int_0^{\alpha} (\cos t - \cos\alpha)^n \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1-\cos\alpha\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2+\cos\alpha}{8n} + \cdots\cdots\right)$$

Si $\cos\alpha$ est positif, cette seconde intégrale est extrêmement petite pour n très-grand, de sorte qu'on a alors sensiblement :

$$\int_0^{\pi} (\cos\alpha + \cos x)^n \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1+\cos\alpha\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

ou bien si l'on pose : $\cos\alpha = a$

$$\int_0^{\pi} (a + \cos x)^n \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1+a\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Or, on a rencontré cette intégrale dans le Cours de 1ère année, (page 134) sous la forme : *

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(a+z)^n \, dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi \left[a^n + \frac{1.3}{2.4} n_2 a^{n-2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} n_4 a^{n-4} + \cdots\cdots \right].$$

n_2, n_4, &c., les coefficients de $z^2, z^4, \ldots\ldots$ dans $(1+z)^n$. Il en résulte que pour de très-grandes valeurs de n, on a, à fort peu près, lorsque a est supposé moindre que l'unité :

$$a^n + \frac{1.3}{2.4} n_2 a^{n-2} + \frac{1.3.5}{2.4.6} n_4 a^{n-4} + \cdots\cdots = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \left(1+a\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Laplace, à qui est dû ce résultat, (x) a découvert également par la même voie, que le polynôme X_n de Legendre, à savoir :

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ldots n} \left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots\cdots \right)$$

pour n très-grand, et x moindre que l'unité, se réduisait à fort peu près à l'expression :

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \; \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right) \operatorname{arc\,cos} x - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{1-x^2}}$$

On voit, par ces exemples, la puissance et la portée de la méthode du grand géomètre, que nous venons d'exposer rapidement, et par laquelle nous terminerons les considérations générales sur les intégrales définies.

Des intégrales intérieures.

(x) Théorie analytique des probabilités, p. 170.

* $\int_{-1}^{+1} \frac{(a+z)^n dz}{\sqrt{1-z^2}}$, que l'on fait coïncider avec la précédente en posant $z = \cos x$, et dans le cas de n entier, on est parvenu à la valeur

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Code 5291.1

Des intégrales Eulériennes.

On nomme ainsi les expressions suivantes :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

et c'est la seconde, désignée par Legendre dans les exercices de Calcul intégral, de cette manière :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

que nous occuperas seule, la première s'y ramenant par l'égalité :

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

que j'indique sans en donner de démonstration. La fonction Γ a été depuis Euler et Lagrange, l'objet des travaux des plus grands géomètres, parmi lesquels on doit principalement citer Gauss, Cauchy, Mr. Weierstrass; mais nous ne donnerons dans ce Cours que les propositions les plus élémentaires et dont voici les énoncés :

I. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

II $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

III $\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-an+\frac{1}{2}}\Gamma(na)$

I. Le premier théorème résulte de l'identité :

$$\frac{d}{dx}\left(x^a e^{-x}\right) = a x^{a-1}e^{-x} - x^a e^{-x}$$

qui donne par l'intégration :

$$x^a e^{-x} = a\int x^{a-1}e^{-x}dx - \int x^a e^{-x}dx.$$

Or, le terme $x^a e^{-x}$ s'annule si a est positif, pour $x=0$, et $x=\infty$, de sorte qu'en faisant successivement ces deux hypothèses, on retrouvera, en retranchant membre à membre les égalités qui en résultent :

$$a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx - \int_0^\infty x^a e^{-x}dx = 0$$

ou bien :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

Voici maintenant quelques conséquences à en déduire. Changeant suc=

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

-cessivement a en $a+1$, $a+2$, ... on aura :

$$\Gamma(a+2) = (a+1)\Gamma(a+1)$$
$$\Gamma(a+3) = (a+2)\Gamma(a+2)$$

.....

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1)$$

et en multipliant membre à membre :

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)\Gamma(a)$$

Si l'on observe que l'hypothèse $a=1$, donne :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

on retrouvera par cette égalité, le résultat précédemment obtenu et relatif à un nombre entier n quelconque, savoir :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = 1.2.3\ldots\ldots n$$

En voici une seconde, sur laquelle repose le 3e théorème.

Soit pour un instant :

$$f(a) = \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$$

je dis que l'expression :

$$\frac{f(a)\,n^{an}}{\Gamma(na)}$$

ne change point quand on y change a en $a+1$, c'est à dire que l'on a :

$$\frac{f(a+1)\,n^{an+n}}{\Gamma(na+n)} = \frac{f(a)\,n^{an}}{\Gamma(na)}$$

ou bien :

$$\frac{f(a+1)}{\Gamma(na+n)} = \frac{1}{n^n}\,\frac{f(a)}{\Gamma(na)}$$

On le démontre immédiatement en changeant a en : $a+\frac{1}{n}$, $a+\frac{2}{n}$, ... $a+\frac{n-1}{n}$, dans l'égalité :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

et multipliant membre à membre, on obtient ainsi :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPA.J

$$f(a+1) = a\left(a+\frac{1}{n}\right)\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(a+\frac{n-1}{n}\right) f(a)$$

$$= \frac{na(na+1)(na+2)\cdots\cdots(na+n-1)}{n^n} f(a)$$

On a d'ailleurs :

$$\Gamma(a+n) = a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n-1)\,\Gamma(a)$$

et en remplaçant a par na :

$$\Gamma(na+n) = na(na+1)(na+2)\cdots\cdots(na+n-1)\,\Gamma(na)$$

de sorte qu'en divisant membre à membre, nous obtenons le résultat annoncé :

$$\frac{f(a+1)}{\Gamma(na+n)} = \frac{1}{n^a}\,\frac{f(a)}{\Gamma(a)}$$

On remarque le procédé analytique par lequel on déduit de la première propriété de la fonction Γ une combinaison qui est une fonction périodique dont la période est l'unité. L'objet du troisième théorème est d'établir que cette fonction est constante, et d'en donner la valeur.

II. Le deuxième théorème se démontre en partant de l'égalité :

$$\int_0^\infty e^{-(1+x)z}\,dz = \frac{1}{1+x}$$

multipliant ensuite les deux membres par x^{a-1} et intégrant entre les limites $x=0$, $x=\infty$, sous la condition que a soit positif et moindre que l'unité. Effectivement, dans l'expression

$$x^{a-1}\int_0^\infty e^{-(1+x)z}\,dz = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-(1+x)z}\,dz$$

la quantité sous le signe $\int$ étant $x^{a-1}e^{-(1+x)z} = \left(x^{a-1}e^{-zx}\right)e^{-z}$ peut au moyen de la fonction Γ s'intégrer par rapport à x, entre les limites indiquées, car on a :

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(a)$$

et en changeant x en mx :

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-mx}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{m^a}$$

de sorte que :

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-zx}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{z^a}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

De là l'égalité :

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(a)}{z^a} e^{-z} dz = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$$

dont le premier membre est évidemment :

$$\Gamma(a) \int_0^\infty z^{-a} e^{-z} dz = \Gamma(a)\, \Gamma(1-a)$$

et l'on a, par conséquent :

$$\Gamma(a)\, \Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$$

Ainsi, il ne reste plus qu'à déterminer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1} dx}{a+x}$, qu'on déduit, comme nous allons voir, de celle-ci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} dx}{1+x^{2n}}$$

où m et n sont deux nombres entiers, le premier étant moindre que le second. Amené de cette manière, et dans une circonstance importante à appliquer les considérations relatives aux intégrales finies entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable, j'entrerai dans quelques détails à ce sujet.

III. Et d'abord je rappelle avant d'envisager l'hypothèse des limites infinies que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$ où $f(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, sera indéterminée, si le dénominateur de $f(x)$ s'annule pour une valeur réelle α, comprise entre x_0 et x_1 (Voyez ci-dessus, page 11). Elle serait même infinie si le dénominateur renfermait au carré le facteur $x-\alpha$, de sorte que nous devons supposer toutes les racines de ce dénominateur, simples et imaginaires. Posons maintenant, d'après les théories de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples :

$$f(x) = \Pi(x) + \sum \frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{1}}$$

$\Pi(x)$ désignant un polynome entier, ce qui donnera :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \Pi(x)\, dx + \sum A \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}$$

Le premier terme $\int_{x_0}^{x_1} \Pi(x)\, dx$, est, comme on voit, une expression entière

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : 5291.1

ou x_0 et x_1, qui devient, ou indéfiniment grande avec ces quantités, ou indéterminée comme différence d'infinies, de sorte qu'on doit supposer $\Pi(x)=0$, c'est à dire le degré du numérateur inférieur à celui du dénominateur. Quant à l'expression:

$$\int \frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\log\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]+\sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$

d'où l'on tire:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\log\frac{(x_1-\alpha)^2+\beta^2}{(x_0-\alpha)^2+\beta^2}+\sqrt{-1}\left(\text{arc tang}\,\frac{x_1-\alpha}{\beta}-\text{arc tang}\,\frac{x_0-\alpha}{\beta}\right)$$

sans introduire dans le second membre un terme $n\pi\sqrt{-1}$, la fonction sous le signe arc tang ne devenant jamais infinie (voyez la 1re leçon). Elle montre qu'en faisant grandir x_0 et x_1, la partie réelle devient sensiblement:

$$\frac{1}{2}\log\frac{x_1^2}{x_0^2}$$

et dépend du rapport arbitraire entre les limites infinies, tandis que la partie imaginaire tend vers la limite entièrement déterminée: $+\pi\sqrt{-1}$ si β est positif et $-\pi\sqrt{-1}$ si β est négatif. Ainsi la limite de l'intégrale proposée $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, contient la partie: $\frac{1}{2}\log\frac{x_1^2}{x_0^2}\sum A$, et n'aura de valeur déterminée qu'autant qu'elle disparaîtra, ce qui entraîne la condition $\sum A=0$.(x) Et comme on a précisément pour x infini: $x f(x)=\sum A$, cette condition signifie que le degré du numérateur doit être inférieur de deux unités à celui du dénominateur.

Plaçons-nous maintenant, pour abréger, dans le cas d'une fonction rationnelle entièrement réelle, de sorte que les fractions simples, étant deux à deux imaginaires conjuguées, on puisse écrire:

$$f(x)=\sum\left[\frac{G-H\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{G+H\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right]$$

en supposant toujours, pour fixer les idées, β positif. La condition $\sum A=0$ donne alors: $\sum G=0$, et l'intégrale conduit à la formule:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi\sum H$$

L'application en est facile, car en faisant $f(x)=\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, on aura

---

(x) La supposition de $x_1=-x_0$, qui fait évanouir le logarithme, correspond exactement à ce que Cauchy nomme la valeur principale de l'intégrale proposée.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote: 5274-1

par les formules de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

$$G\,H = G_{-}H\sqrt{-1} = \frac{X(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{\varphi'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$$

Soit donc, dans le cas particulier que nous avons en vue : $X(x) = x^{2m}$, $\varphi(x) = x^{2n}+1$; les conditions précédentes sont évidemment remplies, si l'on suppose $m < n$, et on aura, par la résolution comme de l'équation binome :

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \cos\frac{(2K+1)\pi}{2n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2K+1)\pi}{2n}$$

D'ailleurs on reconnaît à l'inspection de cette formule, que les racines où β est positif s'obtiendront en attribuant au nombre entier K, les valeurs $0, 1, 2 \ldots\ldots n-1$, et comme on a :

$$\frac{X(x)}{\varphi'(x)} = \frac{x^{2m}}{2n\,x^{2n-1}} = \frac{x^{2m+1}}{2n\,x^{2n}}\text{, on en conclut :}$$

$$G_{-}H\sqrt{-1} = -\frac{1}{2n}\left[\cos\frac{(2m+1)(2K+1)\pi}{2n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2m+1)(2K+1)\pi}{2n}\right]$$

d'où :

$$H = \frac{1}{2n}\sin\frac{(2m+1)(2K+1)\pi}{2n}$$

et par conséquent, si l'on fait pour abréger : $\frac{(2m+1)\pi}{2n} = \alpha$

$$\Sigma\,H = \frac{1}{2n}\left[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots\ldots + \sin(2n-1)\alpha\right]$$

Cette somme de sinus d'arcs en progression arithmétique, s'évalue aisément au moyen de l'identité suivante :

$$2\sin\alpha\left[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots\ldots + \sin(2n-1)\alpha\right] = (1-\cos 2\alpha) + (\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left[\cos 2(n-1)\alpha - \cos 2n\alpha\right]$$
$$= 1 - \cos 2n\alpha = 2.$$

attendu que $2n\alpha = (2m+1)\pi$. Ainsi on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

et par suite, la fonction $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ restant la même quand on y change x en $-x$.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

$$2\int_0^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

La variable x restant maintenant positive, faisons la substitution : $x^{2n} = z$, et posons : $\frac{2m+1}{2n} = a$, et cette relation donnera :

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ce qui est le résultat cherché. A la vérité, il ne se trouve établi qu'en supposant la quantité a représentée par la fraction commensurable : $\frac{2m+1}{2n}$, mais une telle fraction peut approcher d'aussi près qu'on veut d'une quantité quelconque moindre que l'unité, et comme les deux membres de l'égalité sont des fonctions continues de a, elle se trouve établie pour toutes les valeurs de cette quantité. Le théorème que nous venons de démontrer :

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

donne pour $a = \frac{1}{2}$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

d'où :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\,e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi}$$

et on retrouve en faisant $x = t^2$, l'intégrale obtenue par une autre voie :

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

IV. Le troisième théorème sur la fonction Γ, exprimée par l'égalité :

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{-an+\frac{1}{2}}\,\Gamma(na)$$

et dont la découverte appartient à Legendre et à Gauss, a été établi par Cauchy en partant de la remarque précédemment faite, que la quantité :

$$\frac{f(a)\,n^{na}}{\Gamma(na)}$$

et l'on a fait : $f(a) = \Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

ne change point quand on y remplace a par $a+1$, d'où résulte qu'on peut en re-chercher la valeur en supposant a aussi grand qu'on le veut. Nous ferons usage, en conséquence, de l'équation approchée de Laplace :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1) = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + \cdots\cdots\right)$$

et en premier lieu nous montrerons qu'elle donne, en négligeant les termes en $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, &c :

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi}$$

Soit pour cela : $n+1 = a$, il viendra d'abord en prenant le logarithme des deux membres :

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log(a-1) - (a-1) + \log \sqrt{2\pi} + \log\left[1 + \frac{1}{12(a-1)} + \cdots\cdots\right]$$

et il suffit ensuite de remarquer que l'on a

$$\log(a-1) = \log a - \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} -$$

$$\log\left[1 + \frac{1}{12(a-1)} + \cdots\cdots\right] = \log\left(1 + \frac{1}{12a} + \cdots\cdots\right) = \frac{1}{12a} + \cdots\cdots$$

Posons maintenant pour un instant

$$\varphi(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi}$$

D'où :

$$\varphi'(a) = \log a - \frac{1}{2a}$$

$$\varphi''(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2}$$

. . . . . .

La formule :

$$\varphi\left(a + \frac{K}{n}\right) = \varphi(a) + \frac{K}{n} \varphi'(a) + \frac{K^2}{2n^2} \varphi''(a) + \cdots\cdots$$

montre qu'en négligeant encore $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, &c ..... on a simplement :

$$\varphi\left(a + \frac{K}{n}\right) = \varphi(a) + \frac{K}{n} \log a.$$

et par conséquent

$$\varphi(a) + \varphi\left(a + \frac{1}{n}\right) + \varphi\left(a + \frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + \varphi\left(a + \frac{n-1}{n}\right) =$$

$$n\,\varphi(a) + \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots\cdots + \frac{n-1}{n}\right) \log a = n\,\varphi(a) + \frac{n-1}{2} \log a$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 J

De là on conclut que :

$$\log f(a) = \log \Gamma(a) + \log \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \log \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right)$$

$$= n\left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - na + n \log \sqrt{2\pi} + \frac{n-1}{2} \log a$$

$$= \left(na - \frac{1}{2}\right)\log a - na + n \log \sqrt{2\pi}$$

et comme on a d'ailleurs :

$$\log \Gamma(na) = \left(na - \frac{1}{2}\right)\log na - na + \log \sqrt{2\pi}$$

il vient en retranchant membre à membre :

$$\log f(a) - \log \Gamma(na) = -\left(na - \frac{1}{2}\right)\log n + (n-1)\log \sqrt{2\pi}$$

et par conséquent :

$$\log f(a) - \log \Gamma(na) + na \log n = \frac{1}{2}\log n + (n-1)\log \sqrt{2\pi}$$

Or, en revenant des logarithmes aux exponentielles, on obtient :

$$\frac{f(a)\, n^{na}}{\Gamma(na)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, le premier membre, fonction périodique de la variable, ayant l'unité pour période, se réduit à une constante, dont la valeur donne précisément le théorème qu'il s'agissait de démontrer.

V. On vient de voir, par ce qui précède, l'importance de la valeur approchée de $\Gamma(n)$, quand on la limite à son premier terme ; aussi je vais encore revenir sur ce résultat pour en donner une démonstration entièrement rigoureuse, que M. Liouville a tirée avec beaucoup de simplicité de la méthode même de Laplace. (×) Le point de départ de cette méthode consiste à poser, comme on l'a vu :

$$x^n e^{-x} = n^n e^{-n} e^{-t^2}$$

puis : $x = n + \xi$ pour en déduire la valeur de $d\xi$ en fonction de t.

Or, de l'équation obtenue en prenant les logarithmes, savoir :

$$\xi - n \log\left(1 + \frac{\xi}{n}\right) = t^2.$$

on tire d'abord :

$$d\xi = dt\left(2t + \frac{2nt}{\xi}\right)$$

(×) Journal de Mathématiques pures et appliquées. Tome XI, page 464.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPF.41

Si l'on développe ensuite $\log\left(1+\frac{\xi}{n}\right)$ par la formule de Taylor limitée à ses trois premiers termes, il viendra

$$\frac{n\xi^2}{2(n+\theta\xi)^2} = t^2$$

θ étant compris entre zéro et l'unité, et on en conclut :

$$\frac{nt}{\xi} = \sqrt{2n} - 2\theta t$$

d'où :

$$d\xi = dx = dt\left[\sqrt{2n} + (1-\theta)t\right]$$

Nous avons par conséquent :

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n^n e^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dx = n^n e^{-n}\left[\sqrt{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt + 2\int_{-\infty}^{+\infty} t(1-\theta)e^{-t^2}dt\right]$$

La première intégrale est $\sqrt{\pi}$, la seconde, où θ est variable avec t, mais reste toujours positif et inférieur à l'unité, a évidemment pour limite supérieure :

$$\int_0^\infty te^{-t^2}dt = \frac{1}{2}$$

de sorte qu'on peut écrire avec un nombre λ plus petit que l'unité, cette équation entièrement rigoureuse :

$$\Gamma(n+1) = n^n e^{-n}\left(\sqrt{2n\pi} + \lambda\right)$$

Renvoyant pour l'étude approfondie de l'approximation de la fonction Γ au Cours de Calcul différentiel et intégral de M. Serret (Tome II, page 214), je termine ce qui concerne les intégrales Eulériennes, en indiquant sans démonstrations plusieurs formules importantes.

(*) VI. Considérons en premier lieu la dérivée de $\Gamma(a)$, à savoir :

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\log x\, e^{-x}dx$$

et qui paraît conduire à une transcendante plus compliquée que la fonction elle-même ; un calcul facile lui donne cette nouvelle forme :

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a)\int_0^\infty\left[e^{-x} - (1+x)^{-a}\right]dx$$

de sorte que l'on a :

$$\frac{d\log\Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty\left[e^{-x} - (1+x)^{-a}\right]dx$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

de sorte que l'on a :

$$\frac{d \log \Gamma(a)}{da} = \int_0^\infty \left[e^{-x} - (1+x)^{-a} \right] dx$$

On en conclut ce développement en série :

$$\frac{d \log \Gamma(a)}{da} = -C + \frac{a-1}{a} + \frac{a-1}{2(a+1)} + \frac{a-1}{3(a+2)} + \frac{a-1}{4(a+3)} + \cdots\cdots$$

où C représente l'intégrale :

$$\int_0^\infty \left[e^{-x} - (1+x)^{-1} \right] dx = 0,577215..$$

qu'on nomme la constante d'Euler. Et par là, on voit immédiatement que pour $a = 1$, ou $a < 1$, la dérivée de $\log \Gamma(a)$ est négative ; pour $a = 2$, elle prend la valeur positive :

$$-C + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = -C + 1$$

de sorte qu'entre $a = 1$ et $a = 2$, il y a une valeur de cette quantité qui s'annule. On obtient d'ailleurs pour la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 \log \Gamma(a)}{da^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdot$$

et cette fonction étant positive quel que soit a, $\log \Gamma(a)$ et par conséquent $\Gamma(a)$ a un seul minimum. Legendre a trouvé qu'il était donné pour $a = 1,4616321....$ et avait pour valeur : $0,8856032.....$

On a aussi cette expression :

$$\log \Gamma(a) = \int_0^\infty \left[(a-1) e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}} \right] \frac{dx}{x}$$

où l'on peut introduire une constante positive α, en changeant x en αx, et obtenir ainsi l'intégrale :

$$\int_0^\infty \left[(a-1) e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x} - e^{-a\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} \right] \frac{dx}{x}$$

dont la valeur par conséquent est indépendante de α. Cette remarque a été utilisée par Cauchy (*) pour établir deux théorèmes remarquables que voici :

1° Toute identité en x de la forme :

(*) Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique mathématique. Tome II.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

$$A\,\frac{x^{a}-1}{x^{\alpha}-1}+B\,\frac{x^{b}-1}{x^{\beta}-1}+\ldots\ldots=G+H\,x^{h}+K\,x^{K}+\ldots\ldots$$

ou $A, B, \ldots G, H, K, \ldots$ sont des constantes, et les exposants de x dans les deux membres, des nombres positifs, entraîne la relation :

$$A\log\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)+B\log\Gamma\left(\frac{b}{B}\right)+\ldots\ldots=H\log h+K\log K+\ldots\ldots$$
$$+A\left(1-\frac{a}{\alpha}\right)\log\alpha\,B\left(1-\frac{b}{\beta}\right)\log\beta+\ldots\ldots$$

Ainsi, par exemple, on a, n étant entier :

$$\frac{x^{n}-1}{x-1}=1+x+x^{2}+\ldots\ldots+x^{n-1}$$

et il en résulte :

$$\log\Gamma(n)=\log 1+\log 2+\ldots\ldots+\log(n-1)$$

d'où, comme on le savait déjà :

$$\Gamma(n)=1.2\ldots\ldots n-1$$

2° Toute identité de cette nouvelle forme, où les exposants de x sont toujours supposés positifs :

$$A\,\frac{x^{a}}{x^{\alpha}-1}+B\,\frac{x^{b}}{x^{\beta}-1}+\ldots\ldots=H\,x^{h}+K\,x^{K}+\ldots\ldots$$

conduit à la relation :

$$A\log\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)+B\log\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)+\ldots\ldots=H\log h+K\log K+\ldots\ldots$$
$$+A\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{\alpha}\right)\log\alpha+B\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{\beta}\right)\log\beta+\ldots\ldots$$
$$+(A+B+\ldots\ldots)\log\sqrt{2\pi}$$

Multiplions par exemple, par $\frac{x^{a}}{x^{n}-1}$, les divers termes de l'identité précédente, on en tirera :

$$\frac{x^{a}}{x^{n}-1}+\frac{x^{a+1}}{x^{n}-1}+\frac{x^{a+2}}{x^{n}-1}+\ldots\ldots+\frac{x^{a+n-1}}{x^{n}-1}-\frac{x^{a}}{x-1}=0$$

par conséquent :

$$\log\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)+\log\Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right)+\log\Gamma\left(\frac{a+2}{n}\right)+\ldots+\log\Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right)-\log\Gamma(a)$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.PV.J.1

$$= (n-1)\log\sqrt{2\pi} + \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{a+1}{n}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{a+n-1}{n}\right)\right]\log n.$$

$$= (n-1)\log\sqrt{2\pi} - \left(a-\frac{1}{2}\right)\log n$$

c'est à dire le 3e théorème démontré tout à l'heure.

Enfin, j'indiquerai ce développement donné par M. Kummer qui suppose a compris entre zéro et l'unité :

$$\log\Gamma(a) = \left(C+\log\sqrt{2\pi}\right)(1-2a) - \frac{1}{2}\log\frac{\sin a\pi}{\pi} + \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\log n}{n}\sin 2na\pi$$

et dont on déduit immédiatement encore le second et le troisième théorème sur les fonctions Γ.

De l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1}\frac{f(z)}{x-z}\,dz$.

Nous supposerons que la fonction $f(z)$ soit constamment de même signe, lorsque la variable z croît de x_0 à x_1. Nous admettrons aussi que x soit plus grand que x_1, de telle sorte qu'entre les limites de l'intégration, on puisse remplacer la fraction $\frac{1}{x-z}$ par son développement : $\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2}+\frac{z}{x^3}+\cdots\cdots$ et en faisant pour abréger :

$$S_n = \int_{x_0}^{x_1} z^n f(z)\,dz$$

poser l'équation :

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\cdots \text{ &c.}$$

Ces intégrales, représentées par S_0, S_1, S_2, &c., donnent lieu à une théorie importante de calcul intégral, dont voici le point de départ.

On définit une suite de polynomes

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots\cdots\ \varphi_n(x)$$

du premier, du second et du n^e degré en général, par la condition que le produit :

$$\left(\frac{S_0}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\cdots\cdots\right)\varphi_n(x)$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote: 5214.1

développé suivant les puissances décroissantes de la variable, manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots\ldots \frac{1}{x^n}$. Cela posé, nous démontrerons que l'on a :

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n(x)\, \varphi_{n'}(x)\, f(x)\, dx = 0$$

lorsque les nombres n et n' sont différents. En second lieu, et par la voie du calcul intégral, nous établirons que l'équation

$$\varphi_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre x_0 et x_1. Nous terminerons enfin par quelques remarques sur le développement des fonctions en séries de la forme :

$$A_0 + A_1 \varphi_1(x) + A_2 \varphi_2(x) + \ldots\ldots + A_n \varphi_n(x) + \ldots\ldots$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots$ étant des coefficients constants.

I. Soit : $\varphi_n(x) = A x^n + B x^{n-1} + \ldots\ldots + K x + L$

on trouve facilement pour le coefficient de $\frac{1}{x^{i+1}}$, dans le produit :

$$\left(\frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{S_i}{x^{i+1}} \ldots\right)\left(A x^n + B x^{n-1} + \ldots\ldots + K x + L\right)$$

la quantité : $\quad A S_{n+i} + B S_{n+i-1} + \ldots\ldots + K S_{i+1} + L S_i$

Les coefficients $A, B, \&^{ca}$, dépendent donc des n équations linéaires et homogènes :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &A S_n + B S_{n-1} + \ldots\ldots + K S_1 + L S_0 = 0 \\ &A S_{n+1} + B S_n + \ldots\ldots + K S_2 + L S_1 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A S_{2n} + B S_{2n-1} + \ldots\ldots + K S_n + L S_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

$\varphi_n(x)$ peut être ainsi représenté par le déterminant du système :

$$\left\{\begin{matrix} x^n & x^{n-1} & & x & 1 \\ S_n & S_{n-1} & & S_1 & S_0 \\ S_{n+1} & S_n & & S_2 & S_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{2n} & S_{2n-1} & & S_n & S_{n-1} \end{matrix}\right\}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

et il sera prouvé tout à l'heure qu'elles donnent dans tous les cas pour les rapports des inconnues, des valeurs entièrement déterminées. Or, l'une quelconque d'entre elles, à savoir :

$$A\,S_{n+i} + B\,S_{n+i+1} + \ldots\ldots + K\,S_{i+1} + L\,S_i = 0$$

en se rappelant qu'on a posé : $S_n = \int_{x_0}^{x_1} x^n f(x)\,dx$, prend cette forme :

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(A\,x^{n+i} + B\,x^{n+i-1} + \ldots\ldots + K\,x^{i+1} + L\,x^i\right) f(x)\,dx = 0$$

et on en conclut que pour $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$, on a :

$$\int_{x_0}^{x_1} x^i \varphi_n(x) f(x)\,dx = 0$$

Soit donc :

$$\chi(x) = a\,x^{n-1} + b\,x^{n-2} + \ldots\ldots + h\,x + k$$

un polynome à coefficients arbitraires du degré $n-1$; nous comprendrons ces divers résultats dans la seule égalité :

$$\int_{x_0}^{x_1} \chi(x)\,\varphi_n(x) f(x)\,dx = 0$$

Elle donne immédiatement le premier théorème, car il suffit de prendre : $\chi(x) = \varphi_n(x)$ en supposant n' inférieur à n ; le second qui a pour objet l'équation $\varphi_n(x) = 0$, s'en déduit par la méthode suivante due à Legendre :(x)

II Considérant d'abord l'équation $\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n(x) f(x)\,dx = 0$, on voit que $\varphi(x)$ doit au moins une fois changer de signe, entre les limites x_0 et x_1, sans quoi, d'après la supposition faite sur la fonction $f(x)$, tous les éléments étant de même signe, l'intégrale ne pourrait être nulle. Admettant ainsi une première racine $x = \alpha$, je fais :

$$\varphi_n(x) = (x-\alpha)\,P$$

et j'envisage l'équation

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)\,\varphi_n(x) f(x)\,dx = 0$$

ou bien :

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)^2\,P\,f(x)\,dx = 0$$

Elle montre que P doit encore changer au moins une fois de signe entre.

(x) Exercices de Calcul intégral Tome II page 254.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

les limites de l'intégration, de sorte que l'équation $P=0$ admet une racine $x=\beta$ et l'on peut faire :

$$P = (x-\beta)\, Q$$

Or, on continuera le même raisonnement à l'aide de la relation

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)(x-\beta)\varphi_n(x) f(x)\, dx = 0.$$

qui devient en effet :

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2\, Q\, f(x)\, dx = 0$$

et de proche en proche, nous voyons de la sorte que l'équation $\varphi_n(x)=0$, a n racines réelles et comprises entre x_0 et x_1. J'ajoute qu'elles sont inégales, car si l'on avait, par exemple :

$$\varphi_n(x) = (x-\alpha)^\mu (x-\beta)\cdots(x-\lambda)$$

l'équation : $$\int_{x_0}^{x_1} (x-\beta)\cdots(x-\lambda)\,\varphi_n(x) f(x)\, dx = 0$$

pour μ parr, donnerait : $$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)^\mu (x-\beta)^2 \cdots (x-\lambda)^2 f(x)\, dx = 0$$

Et en supposant μ impair, la suivante savoir :

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)(x-\beta)\cdots(x-\lambda)\,\varphi_n(x) f(x)\, dx = 0$$

deviendrait : $$\int_{x_0}^{x_1} (x-\alpha)^{\mu+1} (x-\beta)^2 \cdots (x-\lambda)^2 f(x)\, dx = 0$$

ce qui est dans les deux cas impossible.

De ce qui précède, résulte immédiatement ce que nous avons annoncé à l'égard du système des équations (1). Car si elles ne déterminent point les inconnues, sauf un facteur commun, et que $n-2$ d'entre elles, par exemple, soient fonctions linéaires des deux autres, le polynome $\varphi_n(x)$ renfermant deux coefficients arbitraires, on pourrait introduire dans l'équation $\varphi_n(x)=0$ telle racine qu'on voudrait en dehors de l'intervalle compris entre x_0 et x_1.

(*) III. Considérons, pour faire l'application la plus simple, le cas où la fonction $f(x)$ est constante, et les limites x_0 x_1 respectivement égales à -1 et $+1$. Nous aurons alors :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x-z} = \log\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\cdots\right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d 1

ce qui donne aisément :

$$\varphi_1(x) = x$$
$$\varphi_2(x) = 3x^2 - 1$$
$$\varphi_3(x) = 5x^3 - 3x$$
$$\varphi_4(x) = 35x^4 - 30x^2 + 3$$
$$\varphi_5(x) = 63x^5 - 70x^3 + 15x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On obtient en effet :

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\,\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{3x^2} + \cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\,\varphi_2(x) = 3x + \frac{4}{15x^3} + \cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\,\varphi_3(x) = \left(5x^2 - \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{35x^4} + \cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\,\varphi_4(x) = \left(35x^3 - \frac{55x}{3}\right) - \frac{36}{315x^5} + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or, ces fonctions sont précisément les polynômes de Legendre, $X_1, X_2, X_3, \&c.$ définis dans le Cours de 1ère année, (Voyez page 136) par le développement :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \cdots\cdots + \alpha^n X_n + \cdots\cdots$$

et pour lesquels nous avons obtenu (page 180) l'équation :

$$(x^2-1)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2x\frac{dX_n}{dx} - n(n+1)X_n = 0$$

Et on pouvait le prévoir d'après la relation :

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'}\, dx = 0$$

qui a été aussi démontrée ; mais il serait difficile, au point de vue où nous sommes placés en ce moment, de retrouver l'égalité : $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum \alpha^n X_n$, c'est l'équation différentielle qui on obtient aisément, comme on va voir :

A cet effet, et en écrivant $\varphi(x)$ au lieu de $\varphi_n(x)$ pour simplifier, je partirai de ce que le produit : $\log\frac{x+1}{x-1}\,\varphi(x)$ développé suivant les puissances décroissantes de la variable, contient, d'après sa définition même, une partie entière $\Gamma(x)$, et une autre de la forme :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274 J

$$\chi(x) = \frac{\alpha}{x^{n+1}} + \frac{\beta}{x^{n+2}} + \cdots\cdots$$

Cela posé, la dérivée de l'équation identique :

$$\log \frac{x+1}{x-1} \cdot \varphi(x) = F(x) + \chi(x)$$

étant :

$$\log \frac{x+1}{x-1} \varphi'(x) - \frac{2}{x^2-1} \varphi(x) = F'(x) + \chi'(x)$$

on en conclura :

$$\log \frac{x+1}{x-1} \varphi'(x)(x^2-1) = \left[2\varphi(x) + F'(x)(x^2-1)\right] + \chi'(x)(x^2-1)$$

$$= F_1(x) + \chi'(x)(x^2-1)$$

en désignant par $F_1(x)$ un polynôme entier. Prenant encore la dérivée de cette équation, nous obtiendrons

$$\log \frac{x+1}{x-1} \frac{d}{dx}\left[\varphi'(x)(x^2-1)\right] = \left[2\varphi'(x) F_1'(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[\chi'(x)(x^2-1)\right]$$

Or, le multiplicateur du logarithme est un polynome de même degré que $\varphi(x)$ et à l'égard duquel nous reproduisons l'équation même de définition de $\varphi(x)$, car la partie entière du second membre est du degré $-(n+1)$ comme le montre l'égalité :

$$\frac{d}{dx}\left[\chi'(x)(x^2-1)\right] = \frac{n(n+1)\alpha}{x^{n+1}} + \mathcal{G}^{\text{ce}} \cdots\cdots$$

Ayant donc établi tout à l'heure que cette définition ne comporte d'arbitraire qu'un facteur constant, nous obtiendrons, en désignant ce facteur par λ, l'équation :

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi'(x)(x^2-1)\right] = \lambda \varphi(x)$$

ou bien :

$$(x^2-1)\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

D'ailleurs elle doit admettre pour solution le polynôme du degré n :

$$\varphi(x) = A x^n + B x^{n-1} + \cdots\cdots + K x + L$$

substituant et égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de la variable, on trouvera, en considérant seulement les termes du plus haut degré $\lambda = n(n+1)$ ce qui fournit le résultat cherché. Mais une autre conséquence résulte d'elle-même, et résulte de ce qu'on a d'une part :

$$\log \frac{x+1}{x-1} \varphi(x) = F(x) + \chi(x)$$

et de l'autre :

$$\log \frac{x+1}{x-1} n(n+1)\varphi(x) = \left[2\varphi'(x) + F_1'(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[\chi'(x)(x^2-1)\right]$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : 5274-1

On en conclut en effet, entre les parties entières, la relation

$$2\,\Phi'(x) + F_1'(x) = n(n+1)\,F(x)$$

et entre les autres dont le développement ne contient que des puissances négatives, celle-ci :

$$\frac{d}{dx}\left[X'(x)\,(x^2-1)\right] = n(n+1)\,X(x)$$

qui reproduit précisément l'équation différentielle en $\varphi(x)$ (x)

Cette équation admet donc des solutions d'une nature bien différente, à savoir un polynôme entier du degré n, et une série infinie de la forme :

$$X(x) = \frac{\alpha}{x^{n+1}} + \frac{\beta}{x^{n+2}} + \&c \ldots\ldots$$

fait analytique important, sur lequel on reviendra dans la théorie des équations linéaires du second ordre.

IV. Soit en second lieu $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, on aura :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} = \pi\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{x^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{x^7} + \ldots\ldots\right)$$

d'où les valeurs successives.

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$\varphi_3(x) = 4x^3 - 3x$$

. . . . . .

qui donnent en effet les relations :

$$\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{1}{2x^2} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{x^2-1}} = 2x + \frac{1}{4x^3} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\varphi_3(x)}{\sqrt{x^2-1}} = (4x^2-1) + \frac{1}{8x^4} + \ldots\ldots$$

. . . . . .

Les premiers polynômes $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ conduisent à supposer qu'on a, en général :

$$\varphi_n(x) = \cos n\,(\text{arc}\cos x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

(x) Über die Gaussische Quadratur, und eine Verallgemeinerung derselben, par Mr. Christoffel, Journal de Crelle, tome 55.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

et c'est ce que nous allons prouver, en partant de ce fait, que la seule et unique équation :

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2-1}} = F(x) + \chi(x)$$

définit, (sauf un facteur constant) les trois expressions : $\varphi(x)$, $F(x)$, $\chi(x)$, sous les conditions que $\varphi(x)$ et $F(x)$ sont des polynômes entiers des degrés n et $n-1$, et $\chi(x)$ un développement en série de la forme : $\chi(x) = \frac{\alpha}{x^{n+1}} + \frac{\beta}{x^{n+2}} + \frac{\gamma}{x^{n+3}} + \&c.$

Qu'on fasse en effet :

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n = \varphi(x) + \sqrt{x^2-1}\ F(x)$$

$\varphi(x)$ et $F(x)$ seront des polynômes entiers des degrés n et $n-1$ qui vérifieront aussi l'égalité :

$$\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n = \varphi(x) - \sqrt{x^2-1}\ F(x)$$

Or, on en tire, en multipliant membre à membre :

$$1 = \left[\varphi(x) + \sqrt{x^2-1}\ F(x)\right]\left[\varphi(x) - \sqrt{x^2-1}\ F(x)\right]$$

et par conséquent :

$$\varphi(x) - \sqrt{x^2-1}\ F(x) = \frac{1}{\varphi(x) + \sqrt{x^2-1}\ F(x)}$$

ou bien :

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2-1}} = F(x) + \frac{1}{\left[\varphi(x) + \sqrt{x^2-1}\ F(x)\right]\sqrt{x^2-1}}$$

Nous voyons par là que les polynômes $\varphi(x)$ et $F(x)$ provenant de $(x+\sqrt{x^2-1})^n$ donnent la solution de l'équation proposée, car l'expression : $\frac{1}{\left[\varphi(x)+\sqrt{x^2-1}\,F(x)\right]\sqrt{x^2-1}}$ développée suivant les puissances décroissantes de la variable, est évidemment de la forme attribuée à $\chi(x) = \frac{\alpha}{x^{n+1}} + \frac{\beta}{x^{n+2}} + \&c. \ldots$

(*) La relation

$$(1)\quad \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2-1}} = F(x) + \chi(x)$$

conduit aussi à une équation différentielle, d'une manière très simple, en partant de la remarque que l'égalité suivante :

$$\sqrt{x^2-1}\ \varphi_0(x) = F_0(x) + \chi_0(x)$$

définit encore complètement, sauf un facteur constant, les trois fonctions qui y entrent, sous la condition que $\varphi_0(x)$ et $F_0(x)$ sont des polynômes des degrés $n-1$ et n,

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

et $\chi_0(x)$ une série infinie : $\frac{\alpha_0}{x^n} + \frac{\beta_0}{x^{n+1}} + \ldots\ldots \mathcal{E}^{ca}$. Effectivement, l'équation proposée donne une première égalité de cette forme, en l'écrivant ainsi

$$\sqrt{x^2-1}\ F(x) = \varphi(x) - \sqrt{x^2-1}\ \chi(x)$$

et l'on en trouve une seconde en prenant les dérivées des deux membres ce qui donne d'abord :

$$\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{x\,\varphi(x)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = F'(x) + \chi'(x)$$

puis en éliminant $\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2-1}}$ et multipliant par x^2-1 :

$$\sqrt{x^2-1}\ \varphi'(x) = \left[x\,F(x) + (x^2-1)\,F'(x)\right] + \left[x\,\chi(x) + (x^2-1)\,\chi'(x)\right]$$

Il s'en suit qu'en désignant par λ et μ des facteurs constants, on peut faire :

$$F(x) = \lambda\ \varphi'(x)$$
$$\varphi(x) = \mu\left[x\,F(x) + (x^2-1)\,F'(x)\right]$$

d'où résulte :

$$\varphi(x) = \lambda\mu\left[x\,\varphi(x) + (x^2-1)\,\varphi''(x)\right]$$

Pour déterminer le coefficient de $\lambda\mu$, nous ferons :

$$\varphi(x) = A\,x^n + B\,x^{n-1} + \mathcal{E}^{ca}\ldots\ldots$$

et nous trouverons, en substituant et égalant à zéro le coefficient de x^n : $\lambda\mu = \frac{1}{n^2}$, ce qui reproduit l'équation bien connue :

$$(x^2-1)\,\varphi''(x) + x\,\varphi'(x) - n^2\varphi(x) = 0$$

à laquelle satisfait le polynome $\varphi(x) = \cos n\,(\operatorname{arc}\cos x)$.

V. J'arrive maintenant aux conséquences de l'équation générale :

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n(x)\,\varphi_{n'}(x)\,f(x)\,dx = 0$$

qui offre la propriété caractéristique et essentielle des polynômes tirés de l'intégrale définie : $\int_{x_0}^{x_1} \frac{f(z)}{x-z}\,dz$. Soit proposé de développer une fonction quelconque $\Phi(x)$, en série de la forme suivante :

$$\Phi(x) = A_0 + A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots\ldots + A_n\varphi_n(x) + \ldots\ldots$$

les coefficients $A_0, A_1, A_2 \ldots\ldots$ étant supposés constants, et la variable comprise entre les limites x_0 et x_1. On obtiendra immédiatement la valeur de A_n en multiplian-

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

ces deux membres par $\varphi_n(x) f(x) dx$ et intégrant ensuite entre x_0 et x_1. Effectivement, tous les termes dans le second membre disparaissent, sauf le suivant :

$$A_n \int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^2(x)\, f(x)\, dx$$

dont le coefficient ne peut être nul, les éléments de l'intégrale étant de même signe, et l'on en conclut :

$$A_n = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n(x) f(x) \Phi x\, dx}{\int_{x_0}^{x_1} \varphi_n^2(x) f(x)\, dx}$$

Ici, on peut remarquer que l'équation $\varphi_n(x) = 0$ ayant n racines réelles et inégales comprises entre x_0 et x_1, la fonction $f(x)\,\Phi(x)$ se trouve multipliée dans l'intégrale du numérateur de A_n, par un facteur qui change $n+1$ fois de signe entre ces limites. Or, aux infiniment petits près du second ordre, une fonction prend des valeurs égales et de signes contraires avant et après le passage par zéro, et la fonction $f(x)\,\Phi(x)$ variant alors infiniment peu, on voit que le facteur $\varphi_n(x)$ amène dans le voisinage de ses racines des éléments de l'intégrale infiniment peu différents et de signes contraires, d'où résulte un motif d'admettre que l'intégrale diminue de valeur quand le nombre de ces racines augmente. Ce n'est point là toutefois une preuve suffisante de la convergence de la série, et le procédé qui a permis d'obtenir difficilement l'expression de A_n, ne constitue pas une démonstration rigoureuse de l'égalité :

$$\Phi(x) = \Sigma A_n \varphi_n(x)$$

J'admettrai donc qu'elle ait lieu en effet, pour expliquer ce que présente de caractéristique ce genre de développement des fonctions. Supposons d'abord, pour plus de simplicité $f(x) = 1$, de sorte que $\varphi_n(x)$ devienne la fonction X_n de Legendre, savoir :

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.4\ldots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right)$$

et soit $F(x)$ la série limitée à ses $n+1$ premiers termes savoir :

$$F(x) = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots\ldots + A_n X_n$$

L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\Phi(x) - F(x)\right]^2 dx$$

qui représente pour toutes les valeurs de la variable croissant de x_0 à x, par degrés égaux à dx, la somme des carrés des erreurs, obtenues en remplaçant Φx par $F(x)$, est un minimum ; ainsi, tout autre polynôme $\Psi(x)$ de degré n, tel par exemple, que les $n+1$ premiers termes de la série de MacLaurin donnera nécessairement :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : 5274-1

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\Phi(x)-\Psi(x)\right]^2 dx > \int_{x_0}^{x_1}\left[\Phi(x)-F(x)\right]^2 dx$$

En effet, l'expression :

$$F(x)=A_0+A_1X_1+A_2X_2+\cdots\cdots+A_nX_n$$

contenant $n+1$ coefficients arbitraires, représente tout polynôme de degré n, et si l'on cherche d'après les théories des maxima et minima des fonctions de plusieurs variables, les valeurs de ces coefficients qui rendent minimum l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\Phi(x)-A_0-A_1X_1-A_2X_2-\cdots\cdots A_nX_n\right]^2 dx$$

on trouve immédiatement, en égalant à zéro la dérivée prise par rapport à l'un quelconque d'entre eux : A_i, la condition :

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\Phi(x)-A_0-A_1X_1-A_2X_2-\cdots\cdots-A_nX_n\right]X_i\,dx=0$$

Or, on en tire précisément la valeur obtenue précédemment, c'est à dire :

$$A_i=\frac{\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)X_i\,dx}{\int_{x_0}^{x_1}X_i^2\,dx}$$

et dans le cas général où la fonction $f(z)$ reste quelconque, au lieu d'être supposée constante, le même raisonnement prouve que le polynôme :

$$F(x)=A_0+A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\cdots\cdots+A_n\varphi_n(x)$$

rend minimum l'expression toute semblable

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\Phi(x)-F(x)\right]^2 f(x)\,dx$$

où les carrés des erreurs sont affectés du multiplicateur $f(x)$ (x)

Je terminerai en citant dans le cas le plus simple de $f(x)=1$, quelques

---

(x) Voir sur ce sujet, qui se rapporte à l'interpolation par la méthode des moindres carrés, un Mémoire de M. Tchebichev, intitulé : Sur les fractions continues, (Journal de M. Liouville, Année 1858) et une Note ajoutée par M. Bienaymé à la traduction de ce Mémoire. C'est aussi à M. Tchebichev et à M. Heine, qui appartient la théorie de l'intégrale : $\int_{x_0}^{x_1}\frac{f(z)}{x-z}\,dz$, qui vient d'être exposée.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 (1)

exemples de développements obtenus par M. Bauer (Journal de Crelle, 56) :

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^m = \frac{1}{m+1} + \frac{3m}{(m+1)(m+2)} X_1 + \frac{5m(m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)} X_2 + \frac{7m(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} X_3 +$$

$$\log\left(\frac{2}{1+x}\right) = 1 + \frac{3}{1.2} X_1 - \frac{5}{2.3} X_2 + \frac{7}{3.4} X_3 - \&^{ca} \ldots$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 X_2 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 X_4 + 13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 X_6 + \ldots\right]$$

Le calcul des fonctions X_n pour une valeur donnée de la variable, se ferait dans ce genre de développement, en employant, au lieu de l'expression générale indiquée plus haut, la relation :

$$(n+1) X_{n+1} = (2n+1) x X_n - n X_{n-1}$$

qui permettrait de les calculer facilement de proche en proche.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.4.1

Intégrales définies. — Seconde partie.

Définition des intégrales prises entre des limites imaginaires.

La notion de l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$, qui s'est offerte dans la question de la quadrature des courbes, comme conséquence immédiate des principes de l'emploi des infiniment petits en géométrie, suppose essentiellement réelles la fonction $f(x)$ et les limites x_0, x_1. A la vérité, on a pu facilement étendre la définition au cas de $f(x)$ imaginaire et de la forme : $\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\chi(x)$ en convenant de poser :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{x_1} \chi(x)\,dx$$

Et dans le cas où l'on connaît l'intégrale indéfinie $F(x)$, la relation

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

suffit encore à fixer le sens du premier membre, lorsque les limites x_0, x_1 sont des quantités imaginaires quelconques. Mais le plus souvent, $F(x)$ n'est donné que par un développement en série dont il est nécessaire de changer la forme analytique suivant la grandeur du module de la variable. De là de nombreuses difficultés qui ont laissé leur trace dans l'histoire de la science, et que Cauchy a levées en donnant de l'intégrale définie une idée entièrement nouvelle. Cette conception si simple et si féconde du grand géomètre occupe maintenant une place considérable dans l'analyse ; nous allons l'exposer, et nous y joindrons, pour en faire comprendre la portée, quelques-unes de ses plus importantes conséquences. (*)

I. Soit $x_0 = a_0 + b_0\sqrt{-1}$, $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}$; pour fixer le sens de l'expression

(*) Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, par Cauchy (1825).
Théorie des résidus, par M. Laurent, répétiteur à l'École Polytechnique.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote: 5274.1

$$\int_{a_0+b_0\sqrt{-1}}^{a_1+b_1\sqrt{-1}} f(z)\,dz$$

nous ferons un changement de variable en posant :

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

les fonctions $\varphi(t)$ et $\chi(t)$ étant réelles et assujetties à ces conditions que t croissant de t_0 à t_1 on ait :

$$\varphi(t_0) + \sqrt{-1}\,\chi(t_0) = a_0 + b_0\sqrt{-1}$$
$$\varphi(t_1) + \sqrt{-1}\,\chi(t_1) = a_1 + b_1\sqrt{-1}$$

Cela posé, nous conviendrons d'opérer la substitution de la variable t à z, comme on le fait dans une intégrale à limites réelles et de poser en conséquence :

$$\int_{a_0+b_0\sqrt{-1}}^{a_1+b_1\sqrt{-1}} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f\left[\varphi(t)+\sqrt{-1}\,\chi(t)\right]\left[\varphi'(t)+\sqrt{-1}\,\chi'(t)\right]dt$$

On obtient ainsi, dans le second membre, une intégrale relative à une variable réelle, croissant de t_0 à t_1, et qui rentre dans la définition ordinaire, si, comme nous le supposerons essentiellement, on peut séparer la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans :

$$f\left[\varphi(t)+\sqrt{-1}\,\chi(t)\right]$$

et par conséquent dans le produit de cette quantité par : $\varphi'(t)+\sqrt{-1}\,\chi'(t)$. A ce changement de variable est attachée la considération géométrique que voici :

Faisons correspondre à toute quantité imaginaire :

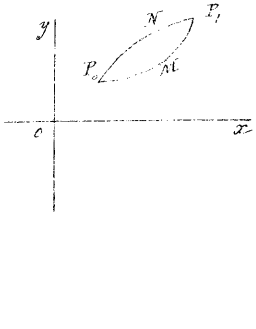
$$z = x + \sqrt{-1}\,y.$$

un point d'un plan dont l'abscisse et l'ordonnée par rapport à deux axes rectangulaires soient x et y. La relation précédente

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

sera représentée par la courbe :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \chi(t)$$



partant, d'après les conditions posées, du point P_0 qui figure la limite inférieure, et aboutissant au point P_1 correspondant à la limite supérieure. Cette courbe servira suivant l'expression de M. Neumann, de fil conducteur pour l'intégration de $f(z)$ dz entre ces limites

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5216 d.1

proposées. Or, elle peut varier du point P_0 au point P_1 d'une manière quelconque, et c'est en ce moment qu'apparaît l'élément nouveau apporté dans la définition de l'intégrale, alors même qu'il s'agirait d'une fonction et de limites telles. Sous ce point de vue plus étendu, d'une loi quelconque de succession des valeurs de la variable entre les deux limites, voici la première question à traiter.

II. Considérons entre P et P_1 deux courbes infiniment voisines : PMP_1, PNP_1, afin de comparer les valeurs de l'intégrale proposée qui se rapportent à chacune d'elles. En prenant pour les équations de la première :

$$x = \varphi(t) \qquad y = \chi(t)$$

celle de la seconde pourrait se représenter ainsi :

$$x = \varphi(t) + \varepsilon u \qquad y = \chi(t) + \varepsilon v$$

ε étant une quantité infiniment petite, u et v deux fonctions de t qui devront s'évanouir pour $t = t_0$ et $t = t_1$, et si l'on fait

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

$$\zeta = u + \sqrt{-1}\,v$$

les deux valeurs de l'intégrale seront :

$$A = \int_{t_0}^{t_1} f(z)\,dz$$

$$A + dA = \int_{t_0}^{t_1} f(z + \varepsilon\zeta)\,(dz + \varepsilon\,d\zeta)$$

Cela étant, je supposerai la fonction $f(z)$ finie pour tous les points de la ligne PMP_1, et j'admettrai, de plus, qu'à partir de l'un quelconque de ses points on puisse faire aux infiniment petits près du second ordre :

$$f(z + \varepsilon\zeta) = f(z) + \varepsilon\zeta f'(z)$$

On en conclura, en négligeant encore un terme en ε^2 :

$$f(z + \varepsilon\zeta)\,(dz + \varepsilon\,d\zeta) = f(z)\,dz + \varepsilon\left[\zeta f'(z)\,dz + f'(z)\,d\zeta\right]$$

$$= f(z)\,dz + \varepsilon\,d\left[\zeta f(z)\right].$$

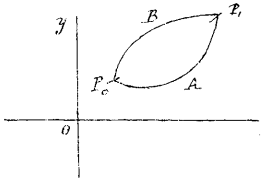
d'où, par conséquent,

$$\int f(z + \varepsilon\zeta)\,(dz + \varepsilon\,d\zeta) = \int f(z)\,dz + \varepsilon\zeta f(z)$$

Prenant maintenant pour limites $t = t_0$, $t = t_1$, le terme infiniment

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 J

petit de premier ordre. $\zeta f(z)$ disparaît à cause du facteur $\zeta = u + \sqrt{-1}\,V$, qui s'évanouit dans les deux cas, de sorte que l'accroissement dA de l'intégrale se réduit à un infiniment petit du second ordre. Il en résulte que si chacune des fonctions $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ reçoit successivement des accroissements infiniment petits du premier ordre, dont la somme présente un accroissement fini, l'accroissement correspondant de A sera infiniment petit du premier ordre, c'est à dire nul. Nous aurons donc cette proposition de Cauchy, étendue par Riemann.



L'intégrale proposée ne changera point de valeur en passant d'une courbe $P_0 A P_1$ à toute autre $P_0 B P_1$, si pour une valeur de z représentant un point quelconque de l'intérieur du contour $P_0 A P_1 B P_0$, on peut faire, ω étant infiniment petit :

$$f(z+\omega) = f(z) + \omega f'(z)$$

aux infiniment petits près du second ordre.

III. Lorsque cette condition est remplie, nous conviendrons dorénavant de dire, pour abréger, que la fonction $f(z)$ est continue dans l'intérieur du contour considéré, cette extension de l'expression de continuité, limitée jusqu'à présent aux variables réelles, se trouvant ainsi amenée naturellement et recevoir une signification parfaitement précise.(1) Les polynômes entiers en z, les quantités e^z, $\sin z$, $\cos z$, &c. seront donc des fonctions continues dans toute l'étendue du plan, mais il n'en est plus de même si l'on prend : $f(z) = \frac{1}{z-a}$ ou : $f(z) = (z-a)^{\frac{1}{m}}$ dans tous les cas où l'exposant n'est pas entier et positif, car on a dans le voisinage de la valeur $z = a$: $f(a+\omega) = \frac{1}{\omega}$ ou bien : $f(a+\omega) = \omega^{\frac{1}{m}}$. La condition analytique de la proposition précédente cesse donc d'être remplie à l'égard d'un contour renfermant le point qui correspond à $z = a$, et ce sont ces cas qui mettront en évidence l'effet de l'élément nouveau introduit dans l'opération d'intégration. Avant d'en commencer l'étude, je ferai les remarques suivantes :

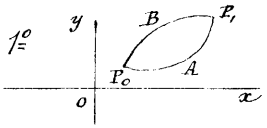
L'intégration

---

(1) J'omets, pour abréger, les considérations relatives à la définition de la dérivée, dans le cas de variables imaginaires, renvoyant pour ce point à la théorie des résidus de M. Laurent, page 10, ainsi que la distinction de fonctions monogènes ou non monogènes, qui nous sera inutile. Voyez aussi l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet. Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

1°



L'intégrale d'une fonction, prise tout le long d'un contour fermé est nulle, si elle est continue à son intérieur.

Soient en effet : $(P_0 A P_1)$ et $(P_0 B P_1)$ les intégrales prises le long des chemins : $P_0 A P_1$, $P_0 B P_1$, nous aurons établi la relation :

$$(P_0 A P_1) = (P_0 B P_1)$$

ou bien : $$(P_0 A P_1) - (P_0 B P_1) = 0.$$

Or, en supposant tous les points de $P_0 B P_1$ donnés par l'expression :

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

en faisant croître t de t_0 à t_1, on aura :

$$(P_0 B P_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(z)\,dz$$

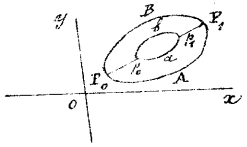
et comme le même chemin sera décrit dans le sens inverse $P_1 B P_0$, si l'on fait décroître t de t_1 à t_0, il est clair qu'on obtient pour la valeur correspondante de l'intégrale :

$$(P_1 B P_0) = \int_{t_1}^{t_0} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z)\,dz = -(P_0 B P_1)$$

L'équation : $$(P_0 A P_1) - (P_0 B P_1) = 0$$

contenant l'énoncé de la première proposition nous apprend donc que l'intégrale prise tout le long du contour fermé est nulle.

2°



Considérant deux contours dont l'un enveloppe l'autre ; l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long du premier : $P_0 A P_1 B P_0$, ou du second : $p_0 a p_1 b p_0$ aura dans les deux cas la même valeur, si $f(z)$ est une fonction continue dans leur intervalle.

Joignons par un chemin non interrompu, les points P_0 et p_0 d'une part, P_1 et p_1 de l'autre ; on aura, dans l'hypothèse admise :

$$(P_0 A P_1) = (P_0 p_0) + (p_0 a p_1) + (p_1 P_1)$$

$$(P_1 B P_0) = (P_1 p_1) + (p_1 b p_0) + (p_0 P_0)$$

Or, il suffit, pour obtenir le résultat annoncé, d'ajouter ces équations membre à membre ; sachant d'établir en effet que les intégrales prises en sens contraire le long d'un même chemin, sont égales sauf le signe, on aura :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5216 (1)

$$(P_0 p_0) + (p_0 P_0) = 0$$
$$(P_1 p_1) + (p_1 P_1) = 0$$

d'où, par conséquent :

$$(P_0 A P_1) + (P_1 B P_0) = (p_0 a p_1) + (p_1 b p_0)$$

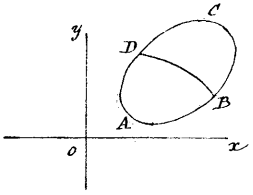
ou bien, évidemment :

$$(P_0 A P_1 B P_0) = (p_0 a p_1 b p_0)$$

3° Considérons plus généralement un contour fermé S, qui en renferme d'autres en nombre quelconque $S_1, S_2, S_3 \ldots\ldots$ ne se coupant point. En désignant par (S) l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise tout le long du contour extérieur, et par $(S_1), (S_2), (S_3) \ldots\ldots$ les quantités analogues relatives aux diverses courbes fermées intérieures, on aura :

$$(S) = (S_1) + (S_2) + (S_3) + \ldots\ldots$$

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède. Partageons en effet le contour S figuré par $ABCD$, au moyen d'une ligne BD qui isole dans la partie ABD l'une des courbes fermées S_1. En ajoutant au second membre de la relation identique :



$$(S) = (AB) + (BC) + (CD) + (DA)$$

la quantité nulle : $(BD) + (DB)$

on aura :

$$(S) = \left[(AB) + (BD) + DA)\right] + \left[(BC) + (CD) + DB)\right]$$

c'est à dire : $\quad (S) = (ABDA) + (BCDB)$

Or, le premier terme $(ABDA)$ se réduit à (S_1) et on voit qu'en opérant sur le second, comme on a fait sur S, on mettra successivement en évidence $(S_2) + (S_3) + \&^{\text{ce}}$.

Ces remarques préliminaires faites, je viens à mon objet.

IV. Soit en premier lieu $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Comme ligne d'intégration comprenant la valeur $z = a$, qui rend la fonction discontinue, je ferai choix d'un cercle de rayon ρ, ayant son centre au point qui représente cette valeur, et je pourrai, en conséquence :

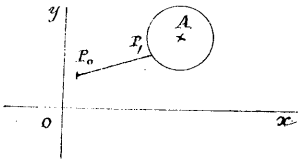
$$z = a + \rho(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) = a + \rho e^{t\sqrt{-1}}$$

On aura ainsi, en faisant décrire le cercle entier à la variable z, c'est à dire en prenant pour t les limites t_0 et $t_0 + 2\pi$:

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5274.1

$$\int \frac{dz}{z-a} = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \frac{\rho\, d\left(e^{t\sqrt{-1}}\right)}{\rho\, e^{t\sqrt{-1}}} = 2\pi\sqrt{-1}$$

et c'est le premier exemple d'un résultat différent de zéro, pour l'intégration d'une fonction tout le long d'un contour fermé.



Nous en tirons la conséquence importante que voici. Soient P_0, P_1, A les points correspondants aux quantités x_0, x_1, a et $(P_0P_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dz}{z-a}$ la valeur de l'intégrale effectuée en suivant un chemin déterminé quelconque de P_0 à P_1. Imaginons qu'à partir de P_1, on fasse décrire à la variable un nombre m-de fois, un cercle de rayon AP_1, ayant son centre en A, de manière à revenir à ce point P_1; on obtiendra ainsi la première détermination (P_0P_1) augmentée de $2m\pi\sqrt{-1}$. Le fait des valeurs multiples de la fonction logarithmique, et leur expression complète, résultant donc de l'opération même de l'intégration envisagée sous le point de vue plus étendu où nous nous plaçons maintenant. Et si l'on fait en général :

$$f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \cdots\cdots + \frac{L}{z-l}$$

on obtiendra les diverses déterminations de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(z)\,dz$, en ajoutant à une déterminée quelconque la quantité.

$$2\pi\sqrt{-1}\,(mA + nB + \cdots\cdots + rL)$$

$m, n, \ldots\ldots r$ étant des nombres entiers positifs ou négatifs.(*) Ainsi, pour pour $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, nous aurons : $A = -B = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$, ce qui donnera un multiple entier de π, résultat bien connu, en partant de l'origine trigonométrique de la fonction arc tang x, mais qui n'aurait pu se tirer de l'intégrale envisagée uniquement au point de vue d'une succession de valeurs réelles de la variable.

Ajoutons à l'égard de l'expression :

(*) Les valeurs négatives s'obtiennent en prenant pour limites de t dans les relations de la forme : $z = a\rho(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$, t_0 et $t_0 - 2\pi$, au lieu de t_0 et $t_0 + 2\pi$, ce qui revient à décrire le même cercle, dans un autre sens.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - JPMC - Cote : 5214 J

$$mA + nB + \ldots\ldots + rL.$$

cette importante remarque de Jacobi, qu'elle peut représenter dès qu'il y figure deux constantes, A et B, incommensurables entre elles, toute quantité réelle, quelle qu'elle soit, avec une approximation indéfinie. Et si l'on admettait trois termes, A, B, C, réels ou imaginaires, mais qui ne puissent vérifier aucune relation de la forme :

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

où α, β, γ sont entiers, elle pourra converger indéfiniment vers telle quantité réelle ou imaginaire que l'on voudra. On voit aussi que l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)dx$ sera complètement indéterminée si on laisse arbitraire la loi de succession des valeurs de la variable entre les deux limites

V. Soit en second lieu $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}$, m étant entier positif supérieur à l'unité, et faisons comme précédemment :

$$z = a + \rho(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

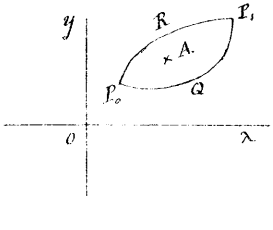
L'intégrale indéfinie étant :

$$\int \frac{dz}{(z-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(z-a)^{m-1}}$$

on trouvera en introduisant la variable t, l'expression périodique :

$$-\frac{1}{(m-1)\rho^{m-1}}\left[\cos(m-1)t - \sqrt{-1}\sin(m-1)t\right]$$

qui reprend la même valeur aux limites $t = t_0$, $t = t_0 + 2\pi$. Le résultat de l'intégration est donc zéro, et il en sera de même en remplaçant le cercle par un contour fermé quelconque : $P_0 Q P_1 R P_0$, comprenant le point correspondant à $z = a$. Ainsi l'intégrale de la fonction $\frac{dz}{(z-a)^m}$, prise le long des deux chemins $P_0 Q P_1$ et $P_0 R P_1$, a la même valeur, et par là nous voyons quelle différence il faut faire entre ces deux genres de discontinuités dont le type est donné par les expressions : $\frac{1}{z-a}$ et $\frac{1}{(z-a)^m}$. Les deux cas en effet, présentent une exception à la démonstration du théorème sur l'égalité des valeurs d'une intégrale effectuée entre les mêmes



Document numérisé par la Bibliothèque nationale de France et Mario Carlo - JPMC - Cote : 5274.1

limites suivant deux chemins différents; mais dans le second, cette égalité a lieu néanmoins, tandis que dans le premier, on obtient :

$$(P_0 Q P_1) = (P_0 R P_1) + 2\pi\sqrt{-1}$$

De là résulte qu'à l'égard de toute fonction $f(z)$ composée d'une partie continue $F(z)$ et d'une partie discontinue, telle que :

$$\frac{A}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^\alpha}$$

$$+ \frac{B}{z-b} + \frac{B_1}{(z-b)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_{\beta-1}}{(z-b)^\beta}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{L}{z-l} + \frac{L_1}{(z-l)^2} + \cdots\cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{(z-l)^\lambda}$$

les constantes $A, B, \ldots\ldots L$ figureront seules dans le résultat d'une intégration effectuée le long d'un contour fermé quelconque S. Décrivons en effet autant de cercles : $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ayant pour centres les points correspondants à $z = a, b, \ldots\ldots l$, et de rayons assez petits pour éviter toute intersection, qu'il y a de ces points contenus dans le contour proposé S. La relation générale établie précédemment (§ III), savoir :

$$(S) = (S_1) + (S_2) + \cdots\cdots$$

donne immédiatement pour le résultat de cette intégration :

$$(S) = 2\pi\sqrt{-1}\,(A + B + \cdots\cdots)$$

On voit par là le rôle important, dans le calcul intégral, des quantités A, B, &c., qui ont reçu de Cauchy le nom de résidus de la fonction $f(z)$ relatifs aux valeurs $z = a, b$, &c. Je terminerai ces généralités sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, en remarquant d'après ce grand géomètre, que A, par exemple, peut être défini comme le coefficient de $\varepsilon^{\alpha-1}$, dans le développement de

$$\varepsilon^\alpha f(a+\varepsilon)$$

suivant les puissances ascendantes de ε. On a en effet :

$$f(a+\varepsilon) = F(a+\varepsilon) + \frac{A}{\varepsilon} + \frac{A_1}{\varepsilon^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{\varepsilon^\alpha}$$

$$+ \frac{B}{a-b+\varepsilon} + \frac{B_1}{(a-b+\varepsilon)^2} + \cdots\cdots$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{L}{a-l+\varepsilon} + \frac{L_1}{(a-l+\varepsilon)^2} + \cdots\cdots\cdots$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPI.4.1

et en admettant que la fonction $F(z)$ étant continue, on puisse développer $F(a+\varepsilon)$ suivant les puissances croissantes de ε, comme il en est évidemment de même des termes : $\frac{1}{b-a+\varepsilon}, \ldots \frac{1}{l-a+\varepsilon}$, et de leurs puissances, nous en tirerons immédiatement le résultat annoncé.

Soit par exemple la fonction $f(z) = \text{cotang}\, z$, qui devient infinie pour $z = K\pi$, K étant entier, on trouvera :

$$\varepsilon \,\text{cotang}\,(K\pi + \varepsilon) = \varepsilon \,\text{cotang}\, \varepsilon = 1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \ldots\ldots$$

par conséquent les résidus relatifs à $z = K\pi$ seront égaux à l'unité. En supposant : $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, nous aurions semblablement :

$$\frac{\varepsilon}{\sin(K\pi+\varepsilon)} = (-1)^K \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} = (-1)^K \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6} + \ldots\ldots\right)$$

et les résidus seront représentés par $(-1)^K$. Prenons enfin : $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$, et introduisons le facteur ε^2, ce qui donnera :

$$\frac{\varepsilon^2}{\sin^2(K\pi+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 \varepsilon^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\ldots$$

le second membre n'ayant point de termes de premier degré en ε, tous les résidus de la fonction sont nuls.

Après avoir exposé ce qu'il y a de plus essentiel dans l'extension donnée par Cauchy à la notion élémentaire d'intégrale définie, je vais en présenter quelques applications qui montreront combien cette idée a été importante et féconde pour l'analyse.

Détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation algébrique, dans un contour donné.

I. Soit $F(z) = 0$ l'équation proposée, $a, b, \ldots K, l$ ses racines, et $\alpha, \beta, \ldots \gamma, \lambda$, leurs degrés de multiplicité. On aura :

$$F(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-K)^\gamma (z-l)^\lambda$$

et en prenant la dérivée logarithmique des deux membres :

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \ldots\ldots + \frac{\varkappa}{z-K} + \frac{\lambda}{z-l}$$

d'où l'on voit que les résidus de la fonction $f(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$, relatifs aux racines

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 (1)

$a, b \ldots l$, sont respectivement les nombres entiers $\alpha, \beta, \ldots \lambda$. Cela posé, soit S un contour fermé quelconque, $a, b, \ldots k$ celles des racines qui correspondent à des points renfermés dans son intérieur, nous savons que l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise tout le long de ce contour, a pour valeur :

$$(S) = 2\pi\sqrt{-1}\,(\alpha + \beta + \ldots \ldots \varkappa) = 2m\sqrt{-1}$$

m désignant le nombre des racines, $a, b, \ldots k$, prises respectivement avec leur degré de multiplicité. Ainsi, on obtiendra m en déterminant l'intégrale, ce que Cauchy a fait de la manière suivante :

Soit $$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

l'expression de la variable imaginaire assujettie à décrire le contour fermé S, de sorte que t croissant de t_0 à t_1, on parte d'un point de ce contour, pour y revenir après l'avoir décrit en entier, ce qui entraîne les conditions :

$$\varphi(t_0) = \varphi(t_1) \qquad \chi(t_0) = \chi(t_1)$$

Introduisant cette variable t dans l'intégrale proposée :

$$\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$$

et faisant pour cela :

$$F\left[\varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)\right] = \Theta(t) + \sqrt{-1}\,\Theta_1(t)$$

de manière que $\Theta(t)$ et $\Theta_1(t)$ soient deux fonctions réelles, nous aurons pour transformée :

$$(S) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\Theta'(t) + \sqrt{-1}\,\Theta_1'(t)}{\Theta(t) + \sqrt{-1}\,\Theta_1(t)}.$$

et en mettant en évidence la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$:

$$(S) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\Theta'(t)\,\Theta(t) + \Theta_1'(t)\,\Theta_1(t)}{\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)}\,dt + i\int_{t_0}^{t_1} \frac{\Theta(t)\,\Theta_1'(t) - \Theta_1(t)\,\Theta'(t)}{\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)}$$

Or, on a :

$$\int \frac{\Theta'(t)\,\Theta(t) + \Theta_1'(t)\,\Theta_1(t)}{\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)}\,dt = \frac{1}{2}\log\left[\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)\right]$$

mais les fonctions $\varphi(t)$ et $\chi(t)$ prenant la même valeur aux limites t_0 et t_1, il en est de même par suite de $\Theta(t)$ et $\Theta_1(t)$, et la partie réelle de (S) s'évanouit. Quant au coefficient de $\sqrt{-1}$, il nous est déjà connu, nous avons obtenu en effet, (Voy. 3 page 3)

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\Theta(t)\,\Theta_1'(t) - \Theta_1(t)\,\Theta'(t)}{\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)}\,dt = \operatorname{arc\,tang}\frac{\Theta_1(t_1)}{\Theta(t_1)} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\Theta_1(t_0)}{\Theta_1(t_0)}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 A

$$+ (m' - m'')\pi$$

m' désignant combien de fois le rapport $\frac{\Theta_1(t)}{\Theta(t)}$, passe en devenant infini, du positif au négatif, et m'' le nombre de fois qu'il passe en devenant infini, du négatif au positif, lorsque t croît de t_0 à t_1. Et comme les termes arc tang se détruisent puisque les fonctions $\Theta(t)$, $\Theta_1(t)$ reprennent la même valeur aux limites, nous aurons simplement :

$$(S) = 2m\pi\sqrt{-1} = (m' + m'')\pi\sqrt{-1}$$

d'où
$$m = \frac{m' - m''}{2}$$

Cette égalité est l'expression du mémorable théorème de Cauchy, que nous aurons ainsi démontré en suivant la voie même de l'inventeur.(*)

On remarquera la supposition faite que la ligne fermée d'intégration S soit donnée en attribuant à t dans la relation

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

des valeurs constamment croissantes de t_0 à t_1 ; cette supposition est nécessaire, parce qu'elle est admise dans la détermination de l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\Theta(t)\,\Theta_1'(t) - \Theta_1(t)\,\Theta'(t)}{\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)}\,dt$$

dont nous avons fait usage.

II. Soit en premier lieu pour le contour S un cercle de rayon ρ ayant son centre à l'origine. On fera :

$$z = \rho(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

en prenant les limites : $t = t_0$, $t = t_0 + 2\pi$, et si nous représentons le premier membre de l'équation proposée de cette manière :

$$F(z) = a_0(\cos\alpha_0 + \sqrt{-1}\sin\alpha_0)z^\mu + a_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)z^{\mu-1} + \ldots\ldots$$

on aura : $\Theta(t) = a_0\cos(\mu t + \alpha_0)\rho^\mu + a_1\cos\left[(\mu-1)t + \alpha_1\right]\rho^{\mu-1} + \ldots\ldots$

$\Theta_1(t) = a_1\sin(\mu t + \alpha_1)\rho^\mu + a_1\sin\left[(\mu-1)t + \alpha_1\right]\rho^{\mu-1} + \ldots\ldots$

Ces expressions, pour une grande valeur du rayon ρ se réduisent sensiblement à leur premier terme, et dans cette supposition, on obtiendra immédiatement :

(*) Mémoires sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites, et sur les avantages qui offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

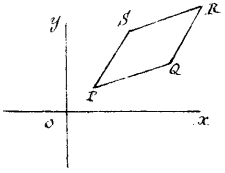
$$\int_{t_0}^{t_0+2\pi} \frac{\Theta(t)\,\Theta_1'(t) - \Theta_1(t)\,\Theta'(t)}{\Theta^2(t) + \Theta_1^2(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \mu\,dt = 2\mu\pi$$

et en effet le nombre m des racines devient alors le degré même de l'équation.

(X) Le même cercle sera aussi donné par la relation :

$$z = \rho\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{-1}\,\frac{2t}{1+t^2}\right)$$

en faisant croître t de $-\infty$ à $+\infty$. Mais alors les fonctions $\Theta(t)$ et $\Theta_1(t)$ seront des polynômes entiers divisés par $(1+t^2)^{\mu}$, de sorte qu'on saura déterminer l'indice intégral : $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta_1(t)}{\Theta(t)}\right]$ par le procédé qui sert de base à la démonstration du théorème de Sturm, et le nombre m des racines contenues dans l'intérieur du cercle sera la moitié de cet indice.



Le même procédé s'applique dans une infinité d'autres cas, parmi lesquels je considérerai seulement un parallélogramme $PQRS$, dont les sommets P, Q, R, S, soient déterminés respectivement par les quantités imaginaires : p, $p+a$, $p+a+b$, $p+b$. Nous voyons qu'alors le contour représenté généralement par la relation

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

ne s'exprime plus par une seule et unique forme analytique. On décompose donc l'intégrale $\int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ qui doit être effectuée tout le long du parallélogramme de la manière suivante.

$$(PQRSP) = (PQ) + (QR) + (RS) + (SP)$$

et les quatre termes du second membre s'obtiendront en employant ces relations où la variable réelle t, croît de zéro à l'unité, savoir :

$$z = p + at \qquad \text{pour } (PQ)$$
$$z = p + a + bt \qquad (QR)$$
$$z = p + b + a(1-t) \qquad (RS)$$
$$z = p + b(1-t) \qquad (SP)$$

Si l'on pose :

$$F(p+at) = A + A_1\sqrt{-1}$$
$$F(p+a+bt) = B + B_1\sqrt{-1}$$
$$F[p+b+a(1-t)] = C + C_1\sqrt{-1}$$
$$F[p+b(1-t)] = D + D_1\sqrt{-1}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote: 5274 d.

$A, A_1, B, B_1, \mathcal{C}^{ca}$ seront des polynômes entiers en t et le nombre m des racines de l'équation proposée $E(z) = 0$, contenue dans l'intérieur du parallélogramme sera donné par la relation :

$$2m = I_0^1\left[\frac{A_1}{A}\right] + I_0^1\left[\frac{B_1}{B}\right] + I_0^1\left[\frac{C_1}{C}\right] + I_0^1\left[\frac{D_1}{D}\right]$$

※ III. Le théorème de Cauchy n'est point limité aux équations algébriques; et peut, dans beaucoup de cas, donner le nombre des racines, $a, b, \ldots K$, d'une équation transcendante $f(z) = 0$ comprises dans un contour S. Soient respectivement comme plus haut, $\alpha, \beta, \ldots x$ les degrés de multiplicité de ces racines, on obtiendra d'abord leur nombre :

$$m = \alpha + \beta + \ldots\ldots + x$$

au moyen de l'intégrale

$$(S) = \int \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

si la différence :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \left(\frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \ldots\ldots + \frac{x}{z-K}\right)$$

est dans l'intérieur de S une fonction continue, car cette condition entraîne l'égalité :

$$\int\left[\frac{f'(z)}{f(z)} - \left(\frac{\alpha}{z-a} - \frac{\beta}{z-b} - \ldots\ldots - \frac{x}{z-K}\right)\right] dz = 0$$

c'est à dire $\quad (S) = 2\pi\sqrt{-1}(\alpha + \beta + \ldots + x) = 2m\pi\sqrt{-1}$

Faisant donc comme précédemment

$$z = \varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)$$

de manière que z décrive le contour S en faisant croître t de t_0 à t_1, et ensuite :

$$f\left[\varphi(t) + \sqrt{-1}\,\chi(t)\right] = \Theta(t) + \sqrt{-1}\,\Theta_1(t)$$

nous aurons : $\quad 2m = I_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\Theta_1(t)}{\Theta(t)}\right]$

Or, on peut déterminer cet indice alors même que $\frac{\Theta_1(t)}{\Theta(t)}$ est une fonction transcendante ; je vais le montrer en considérant l'équation célèbre de Képler :

$$z = \alpha + \varepsilon \sin z$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.

et supposant, comme on le fait en astronomie, α réel compris entre zéro et π, ε réel aussi et compris entre zéro et l'unité. M. Serret a fait de cette équation l'objet d'un beau et savant travail, dans lequel il établit que les racines imaginaires se distribuent suivant la loi bien simple que voici. (x)

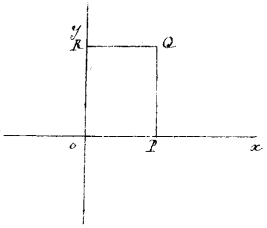
Considérons le système des droites parallèles à l'axe des y, et dont les distances à cet axe sont les multiples successifs de π. Dans la première bande déterminée par les droites $x = 0$, $x = \pi$, se trouvera la racine réelle, unique de l'équation, située sur l'axe des abscisses. Ensuite dans les bandes de rang pair limitées par les deux droites :

$$x = 2K\pi, \qquad x = (2K+1)\pi$$

et à l'exclusion des autres, on aura deux racines imaginaires conjuguées. Ces résultats si remarquables ont attiré l'attention de Cauchy, qui en a donné une démonstration tirée de son théorème général, et c'est en suivant la même voie que nous allons y parvenir.

Changeant d'abord z en $2K\pi + z$, et faisant : $\omega = 2K\pi - \alpha$, l'équation deviendra :

$$f(z) = z + \omega - \varepsilon \sin z = 0$$



Cela posé, je considère le rectangle $OPQR$, dont la base $OP = \pi$ et la hauteur $PQ = a$; les côtés sont aussi représentés savoir :

OP	par $z = t$	t croissant de zéro à π	
PQ	$z = \pi + t\sqrt{-1}$	id ..... à a	
QR	$z = \pi + a\sqrt{-1} - t$	id ..... à π	
RO	$z = (a-t)\sqrt{-1}$	id ..... à a	

Or, on voit immédiatement que les indices relatifs aux côtés OP, PQ et RO sont nuls, car la fonction $f(z)$ étant mise sous la forme : $\Theta(t) + \sqrt{-1}\,\Theta_1(t)$, on a pour OP : $\Theta(t) = 0$, et à l'égard de PQ et RO, la partie réelle $\Theta(t)$ est constante, donc l'indice disparaît encore, car son existence suppose le passage par l'infini de l'expression : $\dfrac{\Theta_1(t)}{\Theta(t)}$. L'indice relatif à QR donne ainsi le nombre m des racines de la proposée, contenues dans le rectangle, et comme on trouve

$$f(\pi + a\sqrt{-1} - t) = \pi + \omega - t - \varepsilon G \sin t + \sqrt{-1}\,(a + \varepsilon H \cos t)$$

(x) Comptes-rendus, Années 1857, et dans les Annales de l'Observatoire impérial.

Document numérisé par la Bibliothèque nationale Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5214.1

en posant pour un instant :

$$G = \frac{e^{a} + e^{-a}}{2} \qquad H = \frac{e^{a} - e^{-a}}{2}$$

on en conclut :

$$2m = \int_0^{\pi} \left[\frac{a + \varepsilon H \cos t}{\pi + \omega - t - \varepsilon G \sin t} \right]$$

Le résultat conduit à employer maintenant la relation de Cauchy, entre les indices de deux fonctions réciproques, (voyez page 6) savoir :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[f(t) \right] + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{f(t)} \right] = 0 \quad \text{pour } f(t_0) \text{ et } f(t_1) \text{ de même signe}$$

$$= +1 \qquad f(t_0) > 0 \quad f(t_1) < 0$$

$$= -1 \qquad f(t_0) < 0 \quad f(t_1) > 0$$

Or, notre fonction, prenant aux limites zéro et π les valeurs : $\frac{a + \varepsilon H}{\pi + \omega}$, $-\frac{\varepsilon H - a}{\omega}$, de signe contraire, dès que a a atteint une certaine limite, nous obtiendrons :

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{a + \varepsilon H \cos t}{\pi + \omega - t - \varepsilon G \sin t} \right] = 1 - \int_0^{\pi} \left[\frac{\pi + \omega - t - \varepsilon G \sin t}{a + \varepsilon H \cos t} \right]$$

Mais en attribuant à la hauteur du rectangle a une valeur considérable, on a sensiblement :

$$\frac{\pi + \omega - t - \varepsilon G \sin t}{a + \varepsilon H \cos t} = \frac{-\varepsilon G \sin t}{\varepsilon H \cos t}$$

de sorte que le passage par l'infini se fera pour $t = \frac{\pi}{2}$, et $\operatorname{tang} t$ ayant alors l'unité positive pour indice, nous en conclurons :

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{a + \varepsilon H \cos t}{\pi + \omega - t - \varepsilon G \sin t} \right] = 2.$$

On a donc $m = 1$, c'est à dire une seule racine dans l'intérieur du rectangle.

Un calcul tout semblable, effectué sur l'équation déduite de la proposée en y

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5210 d.1

en y changeant z en $(2K+1)\pi + z$, à savoir :

$$z + (2K+1)\pi - \alpha + \varepsilon \sin z = 0$$

donnera pour le nombre m' des racines contenues dans l'intérieur du même rectangle transporté dans une bande de rang impair :

$$2m' = \int_0^\pi \left[\frac{a - \varepsilon H \cos t}{(2K+2)\pi - \alpha - t + \varepsilon G \sin t}\right]$$

Mais la fonction ayant aux limites zéro et π, les valeurs

$$-\frac{\varepsilon H - a}{(2K+2)\pi - \alpha} \qquad \frac{\varepsilon H + a}{(2K+1)\pi - \alpha}$$

il faudra prendre :

$$\int_0^\pi \left[\frac{a - \varepsilon H \cos t}{(2K+2)\pi - \alpha - t + \varepsilon G \sin t}\right] = -1 - \int_0^\pi \left[\frac{(2K+2)\pi - \alpha - t + \varepsilon G \sin t}{a - \varepsilon H \cos t}\right]$$

et nous en conclurons $m' = 0$, conformément aux résultats obtenus pour la première fois par M. Lenet.

IV. Voici sur cette application du calcul intégral à la théorie des équations que nous venons d'exposer, une dernière remarque. Toute intégrale prise entre des limites réelles : $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$ étant représentée approximativement par la somme :

$$\frac{t_1 - t_0}{n}\left[f(t_0) + f\left(t_0 + \frac{t_1 - t_0}{n}\right) + \cdots + f\left[t_0 + (n-1)\frac{t_1 - t_0}{n}\right]\right]$$

dont elle est la limite pour n infini, on peut se proposer d'appliquer ce résultat à l'expression du nombre m des racines d'une équation $F(z) = 0$, contenues dans un contour donné S, savoir :

$$2m\pi\sqrt{-1} = \int \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = (S)$$

Pour plus de simplicité, je supposerai que S soit un cercle de rayon ρ, ayant son centre à l'origine des coordonnées, de sorte qu'on aura :

$$z = \rho(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

d'où :

$$dz = z\sqrt{-1}\,dt$$

et en prenant pour limites de t zéro et 2π :

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z F'(z)}{F(z)}\,dt$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

Soit donc pour un instant :

$$f(t) = \frac{z F'(z)}{F(z)}$$

nous en conclurons cette valeur approchée du nombre des racines :

$$m = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots\cdots + f\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\right]$$

qui se détermine aisément, comme on va voir :

Partant à cet effet de la relation :

$$\frac{z F'(z)}{F(z)} = \frac{\alpha z}{z-a} + \frac{\beta z}{z-b} + \cdots\cdots + \frac{\lambda z}{z-l}$$

et considérant pour fixer les idées le terme $\frac{z}{z-a}$, je remarque que la valeur :

$$z = \rho(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$$

donne pour $t = \frac{2K\pi}{n}$:

$$z = \rho\,\theta$$

où θ est l'une quelconque des racines de l'équation $x^n = 1$, de sorte qu'il s'agit d'obtenir la somme :

$$\sum \frac{\rho\theta}{\rho\theta - a} = \sum \frac{\theta}{\theta - \frac{a}{\rho}}$$

relative à ces diverses racines. Or, les formules élémentaires de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, conduisait à l'identité :

$$\frac{n}{1-x^n} = \sum \frac{\theta}{\theta - x}$$

d'où l'on tire immédiatement, en faisant $x = \frac{a}{\rho}$:

$$\frac{n}{1-\left(\frac{a}{\rho}\right)^n} = \sum \frac{\theta}{\theta - \frac{a}{\rho}}$$

Opérant de la même manière sur les divers termes $\frac{z}{z-b}, \ldots \frac{z}{z-l}$, on obtiendra le résultat cherché, savoir :

$$m = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots\cdots + f\left[\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]\right]$$

$$= \frac{\alpha}{1-\left(\frac{a}{\rho}\right)^n} + \frac{\beta}{1-\left(\frac{b}{\rho}\right)^n} + \cdots\cdots + \frac{\lambda}{1-\left(\frac{l}{\rho}\right)^n}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

et on voit bien en effet que la fraction $\frac{1}{1-\left(\frac{a}{\rho}\right)^n}$ où le module de la racine a est inférieur à ρ, convergeant vers l'unité pour des valeurs croissantes de n, tandis que les autres ont zéro pour limite, cette expression tend vers le nombre m. Désignons un instant par $F'_n(z)=0$ l'équation aux puissances n^{es} des racines de la proposée $F(z)=0$, nous trouverons aisément qu'on a aussi

$$m = \frac{z\,F'_n(z)}{F_n(z)} \text{ pour } z=\rho^n$$ Voici quelques applications numériques de cette formule. Soit l'équation:

$$2z^3 - 6z^2 + \rho z - 2 = 0,$$

qui admet les racines $z=2$, $z=\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1}$, on obtient en supposant $\rho=1$

pour	$n=2$	$m=1,267$
	$n=4$	$m=1,533$
	$n=8$	$m=2,129$
	$n=16$	$m=2,008$
	$n=32$	$m=2,00003$

Prenons pour second exemple le cas de l'équation:

$$2z^3 + z^2 + 3z - 2 = 0$$

qui admet pour racines : $z=\frac{1}{2}$ $z=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$, on trouvera en faisant encore $\rho=1$,

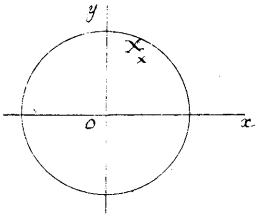
pour	$n=2$	$m=1,958$
	$n=4$	$m=1,129$
	$n=8$	$m=1,118$
	$n=16$	$m=0,993$
	$n=32$	$m=0,9999$

Série de Maclaurin. — Série de Lagrange.

La série de Maclaurin a été démontrée dans le Cours de 1re année, par l'emploi du théorème de Rolle, de sorte qu'on a dû supposer la variable essentiellement réelle. Nous allons maintenant reprendre la question par une autre méthode qui permettra d'étendre la formule au cas de valeurs réelles ou imaginaires.

Soit $f(z)$ une fonction continue dans l'intérieur d'un cercle S de rayon ρ, ayant son centre à l'origine des coordonnées, et x une quantité imaginaire de module moindre que ρ. En décrivant un second cercle σ de rayon infiniment petit ε, et dont le centre soit au point X correspondant à x, il est

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 ( )



voudent que dans tout l'intervalle compris entre les deux courbes, l'expression suivante :

$$\frac{f(z)}{z-x}$$

sera encore une fonction continue, ainsi les intégrales (S) et (6) prises le long des deux circonférences seront égales. Or, on a :

$$(6) = \int_0^{2\pi} \frac{f(x+\varepsilon e^{t\sqrt{-1}})}{\varepsilon e^{t\sqrt{-1}}} d(\varepsilon e^{t\sqrt{-1}})$$

$$= \sqrt{-1} \int_0^{2\pi} f(x+\varepsilon e^{t\sqrt{-1}})\, dt$$

et la condition de continuité exprimée généralement par la relation (Voyez page 60)

$$f(z+\omega) = f(z) + \omega f'(z)$$

fait voir qu'à un infiniment près du même ordre que ε, on obtient :

$$(6) = \sqrt{-1} \int_0^{2\pi} f(x)\, dt = 2\pi\sqrt{-1}\, f(x)$$

Nous avons donc la relation :

$$(S) = \int \frac{f(z)}{z-x} dz = 2\pi\sqrt{-1}\, f(x)$$

qui démontre immédiatement la possibilité du développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x. Il suffit en effet d'employer la série élémentaire :

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \cdots\cdots$$

qui dans le cas actuel est convergente, puisque le module de x est inférieur à ρ module de z, et l'on obtient :

$$2\pi\sqrt{-1}\, f(x) = \int \frac{f(z)}{z} dz + x \int \frac{f(z)}{z^2} dz + x^2 \int \frac{f(z)}{z^3} dz + \cdots\cdots$$

les diverses intégrales étant prises le long du cercle de rayon ρ. Elles s'obtiennent d'ailleurs en remarquant que l'équation dont nous sommes partis, donne en prenant les dérivées n^{es} des deux nombres :

$$2\pi - 1 \frac{d^n f(x)}{dx^n} = 1.2\ldots n \int \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5216 d.

et par conséquent, pour $x = 0$

$$2\pi\sqrt{-1}\,.\,f^{(n)}(0) = \int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Cette méthode de Cauchy conduit donc au développement de $f(x)$ par la série de Maclaurin, mais avec cette extension, que la variable peut recevoir toutes les valeurs imaginaires dont le module est inférieur à la plus petite des quantités qui rendent la fonction discontinue. Ainsi, à l'égard des fonctions: $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tang} x$, et $(1+x)^m$, lorsque l'exposant n'est pas un nombre entier positif, le développement suivant les puissances croissantes de x subsiste tant que le module est inférieur à l'unité; il a lieu dans toute l'étendue du plan pour les fonctions: e^x, $\sin x$, $\cos x$.

II. On doit à Lagrange une formule d'une grande importance en analyse, par laquelle on développe en série, suivant les puissances croissantes de α, une racine ou une fonction d'une racine de l'équation:

$$z = a + \alpha f(z)$$

Voici cette formule:

$$z = a + \frac{\alpha}{1} f(a) + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d.f^2(a)}{da} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\,\frac{d^2 f^3(a)}{da^2} + \cdots$$

et en général, en désignant par $F(z)$ une fonction continue de z:

$$F(z) = F(a) + \frac{\alpha}{1} F'(a) f(a) + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d\left[F'(a) f^2(a)\right]}{da} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^{n-1}\left[F'(a) f^n(a)\right]}{da^{n-1}} + \cdots$$

Parfois aussi, on prend l'équation sous la forme suivante:

$$z = f(a + \alpha z)$$

et l'on emploie cette expression, où figure en dénominateur la dérivée du premier membre de cette équation, savoir:

$$\frac{F(a+\alpha z)}{1-\alpha f'(a+\alpha z)} = F(a) + \frac{\alpha}{1}\,\frac{d\left[F(a) f(a)\right]}{da} + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d^2\left[F(a) f^2(a)\right]}{da^2} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n\left[F(a) f^n(a)\right]}{da^n} + \cdots$$

Pour familiariser avec ces nouveaux développements et en montrer l'utilité, j'indiquerai avant de les démontrer, les applications suivantes:

1° Soit l'équation binôme:

$$z = a + \alpha z^m.$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPE.d.1

on obtiendra immédiatement :

$$z = a + \frac{\alpha}{1} a^m + \frac{\alpha^2}{1.2} 2m\, a^{2m-1} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} 3m(3m-1)\, a^{3m-2} + \dots$$
$$+ \frac{\alpha^n}{1.2..n} nm(nm-1)\dots(nm-n+2)\, a^{nm-n+1} + \dots$$

et cette série sera convergente pour toute valeur de α inférieure à :

$$\left(\frac{m-1}{m-x}\right)^m \frac{x}{m-1}$$

2° Soit l'équation de Képler

$$z = nt + e \sin z$$

en posant pour abréger $nt = a$, et employant pour effectuer les différentiations l'expression d'une puissance quelconque de $\sin a$, en fonction linéaire des sinus et cosinus des arcs multiples, nous trouverons :

$$z = a + e \sin a + \frac{e^2}{1.2.2} 2 \sin 2a$$
$$+ \frac{e^3}{1.2.3.2^2} (3^2 \sin 3a - 3 \sin a)$$
$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.2^3} (4^3 \sin 4a - 4.2^3 \sin 2a)$$
$$+ \frac{e^5}{1.2.3.4.5.2^4} \left(5^4 \sin 5a - 5.3^4 \sin 3a + \frac{5.4}{1.2} \sin a\right)$$
$$+ \dots\dots$$

$$\cos z = \cos a + \frac{e}{2} (\cos 2a - 1)$$
$$+ \frac{e^2}{1.2.2^2} (3 \cos 3a - 3 \cos a)$$
$$+ \frac{e^3}{1.2.3.2^3} (4^2 \cos 4a - 4\, 2^2 \cos 2a)$$
$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.2^4} \left(5^3 \cos 5a - 5.3^3 \cos 3a + \frac{5.4}{1.2} \cos a\right)$$
$$+ \frac{e^5}{1.2.3.4.5\, 2^5} \left(6^4 \cos 6a - 6.4^4 \cos 4a + \frac{6.5}{1.2} 2^4 \cos 2a\right)$$
$$+ \dots\dots\dots$$

et ces développements seront convergents tant que e sera inférieur à la limite $0,6627434\dots$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274-1

3° Comme exemple d'une équation mise sous la forme :

$$z = f(a + \alpha z)$$

Soit :

$$z = (a + \alpha z)^2 - 1$$

nous obtiendrons la série :

$$\frac{1}{1 - 2\alpha(a + \alpha z)} = 1 + \frac{\alpha}{1} \frac{d(a^2-1)}{da} + \frac{\alpha^2}{1.2} \frac{d^2(a^2-1)^2}{da^2} + \cdots + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} \frac{d^n(a^2-1)^n}{da^n}$$

Or, on tire de l'équation proposée la valeur :

$$1 - 2\alpha(a + \alpha z) = \sqrt{1 - 4\alpha a + 4\alpha^2}$$

de sorte qu'en changeant α en $\frac{\alpha}{2}$ et écrivant x au lieu de a, il viendra :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} = \sum \alpha^n X_n = \sum \alpha^n \frac{1}{1.2\ldots n.2^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

Le résultat est d'une grande importance, non pas, comme les précédents, au point de vue du calcul numérique, mais comme donnant une expression des polynômes de Legendre, qui conduit de la manière la plus immédiate à toutes leurs propriétés. (x) J'arrive maintenant à la démonstration de la série de Lagrange

III. Cette démonstration repose sur la formule importante que voici :

Soit $F(z) = 0$ une équation dont le premier membre est une fonction continue dans toute l'étendue du plan, $z_1, z_2, \ldots z_m$, ses diverses racines contenues dans l'intérieur d'un contour fermé quelconque S, que je supposerai essentiellement n'appartenir jamais à l'équation dérivée $F'(z) = 0$, et enfin $\Pi(z)$ une fonction continue comme $F(z)$, je dis que l'intégrale

$$\int \frac{\Pi(z)}{F(z)} dz$$

effectuée le long de S, aura pour valeur :

(x) Pour l'équation différentielle, on remarque qu'on a, en posant : $y = (x^2-1)^n$, $(x^2-1)\frac{dy}{dx} - 2nxy = 0$, et il suffit de prendre la dérivée d'ordre $n+1$, du premier membre. Le théorème de Rolle, appliqué n fois de suite à l'équation : $(x^2-1)^n = 0$, montre ensuite que toutes les racines de l'équation $X_n = 0$ sont réelles, et comprises entre -1 et $+1$. Enfin, la relation : $\int U \frac{d^n V}{dx^n} dx = U \frac{d^{n-1}V}{dx^{n-1}} - \frac{dU}{dx} \frac{d^{n-2}V}{dx^{n-2}} + \cdots + (-1)^n \int V \frac{d^n U}{dx^n} dx$, Cours de 1re année, (page 111) donne le théorème fondamental en supposant $V = x^2 - 1$, U, un polynôme entier de degré moindre que n, et prenant pour limites -1 et $+1$.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 (.)

$$(S) = 2\pi\sqrt{-1}\left[\frac{\pi(z_1)}{F'(z_1)} + \frac{\pi(z_2)}{F'(z_2)} + \cdots\cdots + \frac{\pi(z_m)}{F'(z_m)}\right]$$

En effet, l'expression $\frac{\pi(z)}{F'(z)}$ n'est discontinue dans l'intérieur du contour d'intégration, que pour les valeurs : $z_1, z_2, \ldots\ldots z_m$, et en décrivant m cercles, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_m$ de rayons infiniment petits ε, ayant leurs centres aux points correspondants à $z_1, z_2, \ldots\ldots z_m$, on aura :

$$(S) = (\sigma_1) + (\sigma_2) + \cdots\cdots + (\sigma_m)$$

Or, chacune des intégrales du second membre s'obtient par le procédé déjà employé à propos de la série de Maclaurin § I. En considérant (σ_1) par exemple, nous posons :

$$z = z_1 + \varepsilon(\cos t + \sqrt{-1}\sin t) = z_1 + \varepsilon e^{t\sqrt{-1}}$$

d'où :

$$(\sigma_1) = \int_0^{2\pi} \frac{\pi(z_1 + \varepsilon e^{t\sqrt{-1}})}{F(z_1 + \varepsilon e^{t\sqrt{-1}})}\, \varepsilon e^{t\sqrt{-1}}\, dt\sqrt{-1}$$

et comme les fonctions $\pi(z)$ et $F(z)$ sont continues, il vient aux infiniment petits près du même ordre que ε :

$$\pi(z_1 + \varepsilon e^{t\sqrt{-1}}) = \pi(z_1)$$

$$\frac{\varepsilon e^{t\sqrt{-1}}}{F(z_1 + \varepsilon e^{t\sqrt{-1}})} = \frac{1}{F'(z_1)}$$

et par conséquent :

$$(\sigma_1) = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\pi(z_1)}{F'(z_1)}$$

La formule ainsi démontrée, subsiste même dans le cas des racines égales, lorsqu'on y suppose : $\pi(z) = F'(z)$, et donne comme on l'a déjà vu, le nombre des racines contenues dans l'intérieur de S, en tenant compte de leurs degrés de multiplicité. En faisant :

$$\pi(z) = F'(z)\,\Phi(z)$$

où $\Phi(z)$ est une fonction continue, on obtiendrait si l'on nomme respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_m$, les degrés de multiplicité des racines, la relation :

$$(S) = 2\pi\sqrt{-1}\left[\alpha_1\Phi(z_1) + \alpha_2\Phi(z_2) + \cdots\cdots + \alpha_m\Phi(z_m)\right]$$

Bien que je n'aie pas à l'employer, je m'y arrête un moment, car elle conduit à la résolution générale de l'équation quelconque $F(z) = 0$, au moyen d'intégrales définies. Prenons pour le contour S, un cercle par exemple ; le théorème

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

de Cauchy fait connaître le nombre des racines qu'il renferme, on pourra donc, en diminuant progressivement le rayon, faire en sorte qu'une seule racine z_1 y soit contenue, et alors une fonction continue quelconque de cette racine, sera donnée par l'expression :

$$\alpha_1 \Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_S \frac{F'(z)}{F(z)} \Phi(z)\, dz$$

Mais il s'agit d'utiliser, en vue du calcul effectif, ce résultat remarquable, qui suffirait seul à justifier l'importance attachée à l'étude des intégrales définies. Dans le cas d'une racine simple, la série de Lagrange répond de la manière la plus directe à cet objet, comme on va voir.

IV. En premier lieu, voici un théorème important de Cauchy à l'égard des intégrales prises le long d'un contour fermé S.

Remplaçons dans la variable imaginaire $z = x + y\sqrt{-1}$, x et y par leurs valeurs relatives à un point quelconque de la courbe S, exprimées en fonction de l'arc s de cette courbe. Si l'on nomme σ, le périmètre total, on aura pour toute fonction $F(z)$, cette expression :

$$(S) = \int_0^\sigma F(z) \frac{dz}{ds}\, ds$$

or, l'introduction de la variable réelle s conduit à une limite supérieure très simple du module de l'intégrale. Effectivement, la relation bien connue :

$$\text{Mod}(A + A' + A'' + \ldots) < \text{mod}\, A + \text{mod}\, A' + \text{Mod}\, A + \ldots$$

permet d'écrire : $$\text{Mod} \int_0^\sigma F(z) \frac{dz}{ds}\, ds < \int_0^\sigma \text{Mod}\left[F(z) \frac{dz}{ds}\right] ds$$

et comme le module de $\frac{dz}{ds}$ est l'unité, puisqu'on a généralement :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

on en conclut : $$\text{Mod}(S) < \int_0^\sigma \text{Mod}\left[F(z)\right] ds$$

Nommant donc K, le plus grand des modules que puisse acquérir la fonction $F(z)$, le long de S, nous aurons tiuplement :

$$\text{Mod}(S) < K\sigma$$

Ce résultat établi, j'arrive à l'équation proposée, savoir :

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0$$

et considérant un contour fermé S, de périmètre σ, que comprend le point correspondant

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote: 5279 d 1

à $z = a$, je limite la constante α, par la condition que le long de S, le module maximum G, de l'expression

$$\frac{\alpha f(z)}{z-a}$$

soit inférieur à l'unité. Je dis alors, l'équation admet dans l'intérieur du contour, une seule racine, dont la série de Lagrange donne le développement suivant les puissances croissantes de α.

Considérant à cet effet l'intégrale $(S) = \int \frac{\Pi(z)}{F(z)} dz$ effectuée le long de S, et faisant usage du développement en progression géométrique :

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z-a-\alpha f(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{\alpha f(z)}{(z-a)^2} + \frac{\alpha^2 f^2(z)}{(z-a)^3} + \cdots\cdots$$

nous établirons facilement d'abord que la série obtenue :

$$(S) = \int \frac{\Pi z}{z-a} dz + \int \frac{\alpha \Pi(z) f(z)}{(z-a)^2} dz + \int \frac{\alpha^2 \Pi(z) f^2(z)}{(z-a)} dz + \cdots\cdots$$

est convergente. Effectivement, si l'on nomme H le plus grand module de la fonction $\frac{\Pi(z)}{z-a}$, le long de S, le module maximum du produit :

$$\frac{\alpha^2 \Pi(z) f^n(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

ne pourra évidemment dépasser : $G^n H$, et la remarque de Cauchy donnera l'inégalité

$$\text{mod} \int \frac{\alpha^n \Pi(z) f^n(z)}{(z-a)^{n+1}} dz < 6\, G^n H$$

J'en conclus que la somme des modules de tous les termes de la série, à partir du n^e, est moindre que la progression géométrique :

$$6\, G^n H + 6\, G^{n+1} H + \cdots\cdots = \frac{6\, G^n H}{1-G}$$

progression décroissante, puisqu'on a supposé $G < 1$. Le module du reste de la série est donc, à plus forte raison, inférieur à la quantité : $\frac{6\, G^n H}{1-G}$, qui décroît indéfiniment quand n augmente. La convergence ainsi démontrée, les coefficients des diverses puissances de α se déterminent comme il suit :

Partons à cet effet de la relation :

$$2\pi\sqrt{-1}\, \frac{d^n F(x)}{dx^n} = 1.2\ldots n \int \frac{F(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPI.d.1

où l'intégrale est prise le long d'un cercle, et plus généralement suivant un contour quelconque, comprenant le point qui correspond à la quantité x, avec la condition que $F(z)$ soit continue à l'intérieur de ce contour. Soit donc $x = a$ et $F(z) = \pi(z) f^n(z)$; cette expression étant par hypothèse continue dans toute l'étendue du plan, on peut prendre S pour ligne d'intégration, ce qui donne immédiatement pour le coefficient de α^n, la valeur :

$$\int \frac{\pi(z) f^n(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{1.2\ldots n} \frac{d^n[\pi(a) f^n(a)]}{da^n}.$$

et on en conclura :

$$(S) = \int \frac{\pi(z)}{z-a-\alpha f(z)} dz = 2\pi\sqrt{-1}\left\{\pi(a) + \frac{\alpha}{1}\frac{d[\pi(a) f(a)]}{da} + \frac{\alpha^2}{1.2}\frac{d^2[\pi(a) f^2(a)]}{da^2} + \ldots\right\}$$

$$= 2\pi\sqrt{-1}\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n[\pi(a) f^n(a)]}{da^n}$$

Ceci établi, j'introduis la supposition de :

$$\pi(z) = F'(z) = 1 - \alpha f(z)$$

que je sais devoir me donner la valeur

$$(S) = 2m\pi\sqrt{-1}$$

où m est en tenant compte des degrés de multiplicité, le nombre des racines de l'équation proposée, renfermées dans l'intérieur de S. On en obtient ainsi :

$$\sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n[(1-\alpha f'(a)) f^n(a)]}{da^n} = \sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n[f^n(a)]}{da^n}$$

$$- \sum \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n}\frac{d^n[f'(a) f^n(a)]}{da^n}$$

mais on a :

$$\frac{d^n[f'(a) f^n(a)]}{da^n} = \frac{1}{n+1}\frac{d^{n+1}[f^{n+1}(a)]}{da^{n+1}}$$

ce qui conduit à la différence des deux séries :

$$\sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n[f^n(a)]}{da^n} - \sum \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\frac{d^{n+1}[f^{n+1}(a)]}{da^{n+1}}$$

où tous les termes en α se détruisent, le terme constant qui est égal à l'unité restant seul. Parvenant donc à l'égalité :

$$(S) = 2\pi\sqrt{-1}$$

on en conclut : $m = 1$, ce qui nous assure l'existence d'une seule et unique racine z,

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

de l'équation proposée dans l'intérieur du contour S. L'expression générale de l'intégrale S, donnée au § III, se réduit par conséquent au seul terme : $2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\pi(z_1)}{F'(z_1)}$, et en écrivant z au lieu de z_1, nous en tirons la formule cherchée :

$$\frac{\pi(z)}{F'(z)} = \frac{\pi(z)}{1-\alpha f(z)} = \sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n[\pi(a)f^n(a)]}{da^n}$$

A la vérité, ce n'est pas encore sous sa forme habituelle, la série de Lagrange; mais posons :

$$\pi(z) = \Phi(z)\left[1-\alpha f(z)\right]$$

ce qui donnera d'abord :

$$\sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n[\pi(a)f^n(a)]}{da^n} = \sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n[\Phi(a)f^n(a)]}{da^n} - \sum \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n[\Phi(a)f'(a)f^n(a)]}{da^n}$$

En séparant dans la première série le terme constant $\Phi(a)$ qu'elle contient seule, et réunissant ensuite dans les deux séries les termes en α^{n+1}, on obtiendra pour résultat :

$$\frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\,\frac{d^{n+1}[\Phi(a)f^{n+1}(a)]}{da^{n+1}} - \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n[\Phi(a)f'(a)f^n(a)]}{da^n}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\left\{\frac{d^{n+1}[\Phi(a)f^{n+1}(a)]}{da^{n+1}} - (n+1)\,\frac{d^n[\Phi(a)f'(a)f^n(a)]}{da^n}\right\}$$

Or, nous avons évidemment :

$$\frac{d^{n+1}[\Phi(a)f^{n+1}(a)]}{da^{n+1}} - (n+1)\,\frac{d^n[\Phi(a)f'(a)f^n(a)]}{da^n}$$

$$= \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{d[\Phi(a)f^{n+1}(a)]}{da} - (n+1)\,\Phi(a)f'(a)f^n(a)\right\} = \frac{d^n[\Phi'(a)f^{n+1}(a)]}{da^n}$$

ce qui donne bien le résultat de Lagrange :

$$\Phi(z) = \Phi(a) + \frac{\alpha}{1}\left[\Phi'(a)f(a)\right] + \frac{\alpha^2}{1.2}\,\frac{d[\Phi'(a)f^2(a)]}{da} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\alpha^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\,\frac{d^n[\Phi'(a)f^{n+1}(a)]}{da^n} + \ldots\ldots$$

Me bornant à avoir ainsi démontré la convergence de la série, et défini avec précision celle des racines de l'équation :

$$z = a + \alpha f(z)$$

dont elle représente la valeur, je renverrai, pour beaucoup d'autres questions intéressantes sur le même sujet, au beau travail fait par M. Charles Rouché, dans le 39e cahier du Journal de l'école Polytechnique.(x)

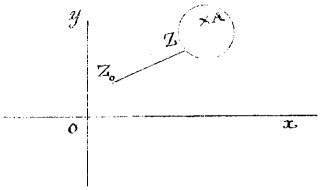
(x) On verra également avec le plus grand fruit, parmi les nombreux Mémoires de Cauchy sur la série de Lagrange, celui que nous avons déjà cité « Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites 39e ».

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

Fonctions non uniformes : Valeurs multiples des intégrales : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

C'est seulement aux fonctions uniformes que nous avons appliqué jusqu'ici la notion d'intégration considérée sous le point de vue général d'une loi quelconque de succession des valeurs de la variable. De telles fonctions peuvent être continues comme des polynômes entiers, ou devenir infinies pour des valeurs finies de la variable, comme des quotients de polynômes, et nous avons trouvé, dans le fait même de ces discontinuités l'origine et le principe des résultats importants qui viennent de nous occuper. Mr Neumann(*) a attribué la dénomination de pôle à toute valeur $z=a$ qui, rendant infinie une fonction, annule son inverse, lorsque cette fonction inverse est continue dans l'intérieur d'un contour fermé comprenant le point correspondant à $z=a$. Ainsi, dans l'expression $\frac{\pi(z)}{F(z)}$, que nous venons de considérer à propos de la série de Lagrange, en supposant le numérateur et le dénominateur des fonctions continues dans toute l'étendue du plan, (Synectiques), les pôles seront les racines de l'équation $F(z)=0$. Nous devions indiquer cette dénomination et celle de discontinuité polaire, introduite ou employée par l'éminent géomètre avec le plus grand succès avant de considérer un autre genre de discontinuité, dont voici l'origine, dans le cas le plus simple et le plus élémentaire.

I. Je reviens à cet effet aux valeurs multiples de la fonction logarithmique $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z-a}$, obtenues précédemment en faisant décrire à la variable un chemin composé comme il suit ; une première partie Z_0Z, ayant pour points de départ et d'arrivée Z_0 et Z, qui correspondent aux limites z_0, z ; et une seconde où l'on part du point Z pour y revenir après avoir décrit m fois un contour renfermant le point A, qui figure le pôle $z=a$. Le premier chemin donnant pour résultat de l'intégration la valeur (Z_0Z) le second y ajoute $2m\pi\sqrt{-1}$, par conséquent, la fonction



$$u = e^{\frac{1}{\mu}\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z-a}}$$

où je suppose μ entier, conduira, dans les mêmes circonstances, aux valeurs :

$$e^{\frac{(Z_0\ Z_1)}{\mu}} \quad \theta e^{\frac{(Z_0\ Z_1)}{\mu}}$$

(*) Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, 9e leçon Section IV.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274.1

le facteur $\theta = e^{\frac{2m\pi}{\mu}\sqrt{-1}}$ étant une racine quelconque de l'équation $x^{\mu} = 1$.

Or, on a :

$$u = \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

par conséquent, le pôle de la fonction uniforme $\frac{1}{z-a}$ est devenu à l'égard de la fonction algébrique, un point possédant cette propriété, qu'en faisant décrire à la variable un contour fermé qui le renferme, la fonction ne reprend point la même valeur en revenant au point de départ, mais donne successivement toutes les racines de l'équation rationnelle irréductible :

$$u^{\mu} = \frac{z-a}{z_0-a}$$

Nous avons aussi le premier exemple d'une fonction non uniforme, bien que ses valeurs se succèdent par degrés infiniment petits, et puissent, comme la variable z, être représentées par un chemin non interrompu. La définition d'une telle fonction aurait pu d'ailleurs se tirer de l'équation même, après avoir établi que les μ racines varient toutes en même temps par une succession de valeurs infiniment voisines. Mais l'expression sous forme exponentielle, employée par Riemann, donne immédiatement la propriété caractéristique, d'après laquelle A a reçu la dénomination de point de ramification ou d'embranchement, attendu que les divers rameaux ou branches de la fonction à déterminations multiples, sont amenés par la révolution de z autour de ce point, tandis qu'en dehors ces diverses valeurs peuvent être assimilées complètement à un système de μ fonctions séparément uniformes. Tel est donc, généralement, le mode d'existence propre aux fonctions non uniformes de n'être continues que par rapport à un chemin déterminé de la variable z, et de pouvoir acquérir des valeurs différentes, pour les mêmes valeurs de cette variable, lorsqu'on y parvient par une autre loi de succession.

Soit, pour donner un second exemple :

$$F(z) = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l)$$

et

$$u = e^{\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z}\frac{F'(z)}{F(z)}dz} = \left[\frac{F(z)}{F(z_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

chacun des pôles de la fonction rationnelle $\frac{F'(z)}{F(z)}$ devient encore, à l'égard de u, un point de ramification. Faisant correspondre en effet les points Z_0 et Z aux limites z_0 et z ; à la valeur obtenue en suivant un chemin déterminé quelconque entre ces points, savoir :

$$(Z_0\, Z) = \int_{z_0}^{z}\frac{F'(z)}{F(z)}dz$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPE.d.1

s'ajoutera la quantité $2\pi\sqrt{-1}$, si l'on fait décrire à la variable, un contour fermé partant de z pour y revenir en comprenant l'un quelconque des pôles dans son intérieur. Or, on a :

$$e^{\frac{1}{2}\left[(Z_0 Z)+2\pi\sqrt{-1}\right]} = -e^{\frac{1}{2}(Z_0 Z)}$$

de sorte que z reprenant sa valeur, la fonction u s'échange avec l'autre racine de l'équation rationnelle :

$$u^2 = \frac{F(z)}{F(z_0)}$$

Et plus généralement, si le contour fermé comprend m pôles, on sera amené à l'expression :

$$e^{\frac{1}{2}\left[(Z_0 Z)+2m\pi\sqrt{-1}\right]} = (-1)^m e^{\frac{1}{2}(Z_0 Z)} .$$

donc, pour m pair, la fonction revient à sa valeur initiale en même temps que la variable, tandis qu'il y a échange dans le cas de m impair.

Des résultats analogues ont été obtenus (*) pour toutes les fonctions algébriques définies comme racines de l'équation de degré μ :

$$A_0 u^\mu + A_1 u^{\mu-1} + \dots\dots + A_\mu = 0$$

dont les coefficients sont des polynomes entiers en z. Les points de ramification, dans ce cas général, sont donnés par l'équation rationnelle et entière en z, formée en égalant à zéro le produit des carrés des différences des racines u, multiplié par le facteur $A_0^{2\mu-2}$. Mais nous nous bornerons à l'exemple qui vient d'être traité, d'un simple radical carré, exemple suffisant pour notre objet, qui est maintenant de montrer le rôle des points de ramification dans l'intégration des fonctions non uniformes.

II. Soit comme précédemment :

$$F(z) = (z-a)(z-b)\dots\dots(z-l)$$

toute expression composée rationnellement avec la variable et le radical $\sqrt{F(z)}$, et que nous savons réductible (Cours de 1ère année, page 4) à la forme :

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\sqrt{F(z)}}$$

le numérateur étant rationnel en z, donne lieu à ce fait algébrique, que, dans le voisinage de l'un des points de ramification $z=a$, par exemple, on ne peut pas, avec

(*) M. Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques, dans le Journal de M. Liouville, tome XV, 1850.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274.1

infiniment petits près du second ordre en ω, poser :

$$f(a+\omega) = f(a) + \omega f'(a)$$

Effectivement, on obtient :

$$f(a+\omega) = \frac{\Phi(a)}{\omega^{\frac{1}{2}}\sqrt{F'(a)}}$$

ou encore :

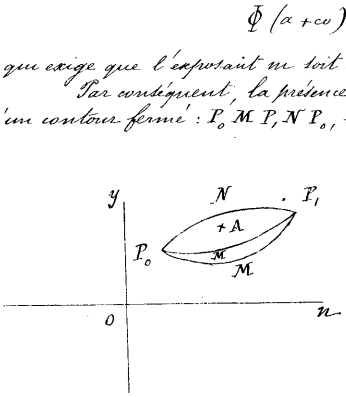
$$f(a+\omega) = \frac{K\omega^{m-\frac{1}{2}}}{\sqrt{F'(a)}}$$

Si l'on suppose :

$$\Phi(a+\omega) = K\omega^{m}$$

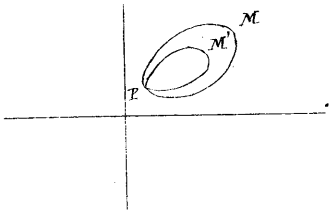
ce qui exige que l'exposant m soit entier, positif ou négatif.

Par conséquent, la présence d'un point A de ramification dans l'intérieur d'un contour fermé : $P_0 M P_1 N P_0$, met en défaut la démonstration donnée (page 60) pour établir l'égalité des valeurs de l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long des deux chemins $(P_0 M P_1)$, $(P_0 N P_1)$. Il en serait de même, à plus forte raison, dans le cas de deux ou d'un plus grand nombre de pareils points ; on doit donc se borner à dire que les deux intégrales $(P_0 M P_1)$, $(P_0 M' P_1)$ seront égales lorsque la fonction $f(z)$ n'aura dans l'intervalle des deux courbes, non-seulement aucun des points $z = a, b, \ldots l$, mais encore aucun des pôles de la fonction uniforme $\Phi(z)$.



Et sous ces conditions on peut supposer que le point P_1 revienne au point de départ P_0 après avoir décrit une courbe fermée, d'où cette proposition dont on verra bientôt l'application :

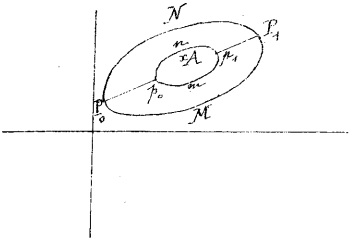
L'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise à partir du point P, le long de la courbe PMP, aura la ~~même valeur~~, si en partant du même point, on décrit un second contour PM'P intérieur au premier, et tel que dans leur intervalle, la fonction $f(z)$ n'ait ni pôles, ni points de ramification.



II. — Ici se place une observation importante. Pourquoi, en effet, dans l'énoncé

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274.1

précédent cette condition d'un point commun aux deux contours, lorsqu'il semblerait naturel d'envisager deux courbes fermées dont l'une enveloppe l'autre, la fonction $f(z)$ étant continue dans leur intervalle.



Reprenons en effet le raisonnement employé précédemment (page 61) à l'égard des fonctions uniformes, pour reconnaître comment va intervenir la propriété caractéristique d'une fonction non uniforme, en supposant, dans le contour intérieur, un point de ramification. Cette propriété consiste en ce qu'on ne retrouve pas la même valeur aux points P_0 et p_0, lorsque la variable z, partie de ces points, y est revenue après avoir décrit les contours fermés : $P_0 M P_1 N P_0$, et $p_0 m p_1 n p_0$, et voici ce qui en résulte.

Ayant posé, pour les ajouter membre à membre, les deux relations :

$$(P_0 M P_1) = (P_0 p_0) + (p_0 m p_1) + (p_1 P_1)$$

$$(P_1 N P_0) = (P_1 p_1) + (p_1 n p_0) + (p_0 P_0)$$

j'observe que si les deux termes : $(P_1 p_1)$, $(p_1 P_1)$ se détruisent, il n'en est pas de même de $(P_0 p_0)$ et $(p_0 P_0)$, car la fonction $f(z)$ ayant une valeur dans l'intégrale représentée par $(P_0 p_0)$, elle est prise avec une autre détermination dans l'intégrale $(p_0 P_0)$. Ainsi dans le cas de $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\sqrt{F(z)}}$, ces termes s'ajoutent, les deux valeurs de la fonction étant égales et de signes contraires.

On voit qu'il en serait exactement de même si le contour intérieur renfermait plusieurs points de ramification en nombre impair, tandis qu'on aurait l'égalité propre aux fonctions uniformes.

$$(P_0 M P_1 N P_0) = (p_0 m p_1 n p_0)$$

dans le cas où ces points seraient en nombre pair, la fonction reprenant alors la même valeur au point de départ et d'arrivée.

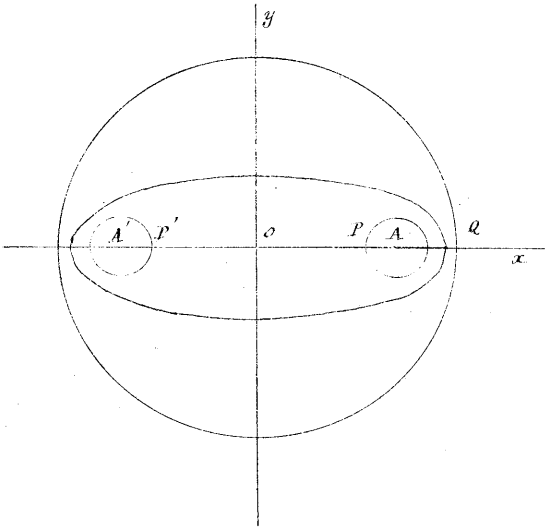
III. Soit proposé, pour donner un exemple du dernier cas, de déterminer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

$F(z)$ étant un polynôme entier quelconque en z.

Traçons un premier contour fermé S, (Voir la figure à la page suivante) comprenant les deux points de ramification A et A', qui correspondent à $z = 1$, $z = -1$, et un second Σ, représenté par un cercle de rayon très grand : $\rho = OQ$, ayant son centre à l'origine des coordonnées.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote: 5274-1



On aura, d'après ce qu'on vient de voir, l'égalité $(S)=(\Sigma)$; cela étant, je remplace le contour S par celui-ci, où σ et σ_1 désignent les cercles de rayons infiniment petits AP et $A'P'$, savoir :

$$OP+\sigma+PO+OP'+\sigma_1+P'O$$

La fonction $\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}$ étant évidemment continue dans l'intervalle des deux contours, je puis poser :

$$(S)=(OP)+(\sigma)+(PO)+(OP')+(\sigma_1)+(P'O)$$

Or, les intégrales (σ) et (σ_1) sont infiniment petites, car en faisant :

$$z=1+\varepsilon e^{t\sqrt{-1}}$$

où ε est infiniment petit, on aura, par exemple :

$$(\sigma_1)=\int_0^{2\pi}\frac{F(1+\varepsilon e^{t\sqrt{-1}})}{\sqrt{1-(1+\varepsilon e^{t\sqrt{-1}})^2}}\,\varepsilon e^{t\sqrt{-1}}\,dt\,\sqrt{-1}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon}\,F(1+\varepsilon e^{t\sqrt{-1}})}{\sqrt{2e^{-t\sqrt{-1}}+\varepsilon}}\,dt$$

quantité qui s'évanouit avec ε. Mais après avoir décrit ce cercle infiniment petit autour du point A, on ne retrouve plus en revenant au point P, la même valeur du radical $\sqrt{1-z^2}$; c'est cette valeur changée de signe qui figure dans l'intégration effectuée le long de PO, de sorte qu'on a, d'une part, en négligeant une quantité infiniment petite :

$$OP=\int_0^1\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

et de l'autre :

$$(PO)=\int_1^0\frac{F(z)}{-\sqrt{1-z^2}}\,dz=-\int_1^0\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

$$=+\int_0^1\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

Et comme nous obtiendrions d'une manière semblable :

$$(OP) = \int_0^{-1} \frac{F(z)}{-\sqrt{1-z^2}}\, dz = -\int_0^{-1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

$$(P'O) = \int_{-1}^{0} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = -\int_0^{-1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

nous en conclurons simplement :

$$(S) = 2\int_0^{1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz - 2\int_0^{-1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = 2\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}$$

Quant à l'intégrale (Σ) prise le long du cercle :

$$z = \rho e^{t\sqrt{-1}}$$

du rayon ρ très grand, elle se détermine en développant suivant les puissances descendantes de la variable, la quantité :

$$\frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{F(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{z\sqrt{-1}}$$

Isolons à cet effet dans le numérateur, le terme indépendant de z, en posant :

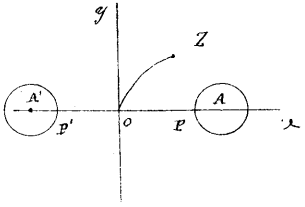
$$F(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = A + \Sigma A_n z^n$$

l'intégrale $\int \frac{A\, dz}{z\sqrt{-1}}$, effectuée le long du cercle Σ aura pour valeur $2A\pi$, et toutes les autres $\int \frac{A_n z^n}{z\sqrt{-1}}\, dz$, où n est un nombre entier positif ou négatif, s'évanouiront. On aura donc :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = A\pi.$$

comme on l'a obtenu par une autre méthode dans le Cours de 1re année (p. 128).

IV. Considérons maintenant l'intégrale de la même fonction :



$\int_0^z \frac{F(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}}$, prise en suivant un chemin quelconque depuis l'origine des coordonnées jusqu'au point z correspondant à la limite supérieure z, et que nous désignerons par OZ. Si nous partons du point O pour y revenir après avoir décrit le contour fermé S comprenant

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

les deux points de ramification, et qu'ensuite nous reprenons le chemin OZ, la valeur obtenue pour l'intégrale sera :

$$2\int_{-1}^{+1}\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}+(OZ)$$

Plus généralement, on trouvera :

$$2m\int_{-1}^{+1}\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}+(OZ)$$

m étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, suivant que le contour S aura été décrit m fois dans le sens :

$$OP+\theta+PO+OP'+\theta_1+P'O$$

ou dans le sens inverse :

$$OP'+\theta_1+P'O+OP+\theta+PO$$

Mais si l'on part de l'origine pour y revenir après avoir décrit le chemin

$$OP+\theta+PO$$

qui comprend un seul point de ramification, le radical $\sqrt{1-z^2}$ figurera avec un signe contraire dans l'intégrale effectuée le long de (OZ), et le résultat de l'intégration sera en conséquence :

$$2\int_{0}^{1}\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}-(OZ)$$

En employant le contour :

$$OP'+\theta_1+P'O$$

on trouverait :

$$2\int_{0}^{-1}\frac{F(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}-(OZ)$$

et on voit ainsi, par cette analyse, due à M. Puiseux, comment les points de ramification d'une fonction donnent naissance aux valeurs multiples d'une intégrale. En particulier, si l'on fait $F(z)=1$, la partie constante A, du développement de l'expression $F(z)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, sera simplement l'unité, et nous obtiendrons :

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=2\int_{0}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\pi$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

Par conséquent, pour une valeur donnée de z, l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

sera susceptible de recevoir toutes les déterminations comprises dans les formules :

$$2m\pi + u$$

$$(2m+1)\pi - u$$

ce qui donne à l'égard de la fonction $z = \sin u$, les propriétés fondamentales :

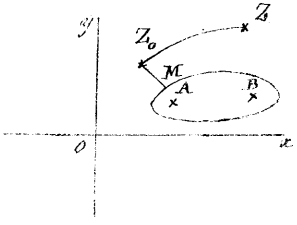
$$\sin(2m\pi + u) = \sin u$$

$$\sin\left[(2m+1)\pi - u\right] = \sin u.$$

V. L'expression plus générale

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}}$$

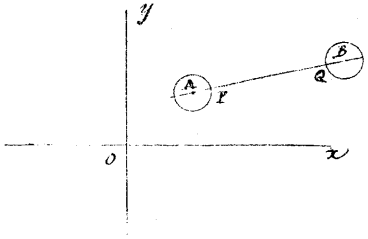
appartenant à la classe des intégrales Abéliennes lorsque $\Phi(z)$ est une fonction rationnelle, conduit à des résultats analogues.



Faisons correspondre Z_0, Z, aux limites, A et B aux points de ramification a et b. En partant du point Z pour y revenir, après avoir décrit un contour fermé S qui ne comprend aucun pôle de $\Phi(z)$, ni aucun autre point de ramification, nous aurons pour résultat de l'intégration :

$$(Z_0 M) + (S) + (M Z_0)$$

ce qui se réduit évidemment à (S) quantité qu'on peut donc ajouter à toute détermination $(Z_0 L)$ obtenue à un chemin quelconque entre les points Z_0 et Z. Pour calculer l'intégrale (S) décrivons autour de A et B des cercles C et C_1 de rayons infiniment petits AB et BC, nous substituerons à S le contour :



$$PQ + C_1 + QP + C$$

où le chemin tracé de A et B est quelconque. Cela étant, on aura à un infiniment petit près

$$(P.Q) = \int_a^b \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote: 5274-1

Sachant ensuite, qu'après avoir tourné autour du point B, le radical doit être pris avec un signe contraire dans l'intégrale (QP), nous en conclurons :

$$(QP) = -\int_b^a \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}} = +\int_a^b \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}}$$

D'ailleurs les intégrales (6) et (6,) étant infiniment petites comme on l'a établi précédemment dans une circonstance toute semblable, il en résulte que :

$$(S) = (PQ) + (QP) = 2\int_a^b \frac{\Phi(z)\,dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-l)}}$$

On convient ordinairement que dans cette expression de (S), l'intégrale sera rectiligne, c'est à dire obtenue en suivant une ligne droite du point A au point B. C'est ce que nous admettons en considérant le cas de l'intégrale elliptique de première espèce :

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

dont les valeurs multiples seront, d'après ce qu'on vient d'établir, ainsi représentées :

$$2m\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}} + 2n\int_1^{\frac{1}{K}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}} + u$$

m et n étant des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Supposant la constante K qu'on nomme le module, réelle et inférieure à l'unité, on pose :

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

et

$$K'\sqrt{-1} = \int_1^{\frac{1}{K}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

ou plutôt :

$$K' = \int_1^{\frac{1}{K}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-K^2z^2)}}$$

de sorte que K' soit une quantité réelle comme K. On lui donne une autre forme en employant la substitution :

$$z = \frac{1}{K}\sqrt{1-(1-K^2)z^2}$$

ce qui conduit à la valeur suivante :

$$K' = \int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1-z^2)\left[1-(1-K^2)z^2\right]}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

On voit par là qu'en posant : $K'^2 = 1 - K^2$, les quantités K et K' seront respectivement les mêmes fonctions du module K et du module complémentaire K'. Cela étant l'expression des valeurs multiples de l'intégrale devient :

$$4mK + 2m'K'\sqrt{-1} + u$$

de sorte que la fonction inverse de l'intégrale, c'est à dire la fonction de u déterminée par l'équation :

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

admet les deux fonctions : $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$.

VI. La fonction doublement périodique ainsi définie joue un grand rôle en analyse, sous le nom de transcendante elliptique ; elle est du nombre extrêmement restreint des fonctions inverses des intégrales qui sont uniformes, toutes les autres devant être considérées comme des racines d'équations transcendantes. Tel serait le cas, par exemple, de l'abscisse d'un point d'une ellipse considéré comme fonction de l'arc complet à partir d'une origine fixe jusqu'à ce point. Cette quantité, qu'une analogie superficielle conduirait à considérer comme une généralisation des fonctions circulaires, et dont la définition analytique serait ainsi donnée :

$$\int \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}\, dx = S$$

en nommant e l'excentricité, et supposant le grand axe égal à l'unité, est en réalité la racine d'une équation transcendante, tout aussi bien que l'abscisse d'un segment de cercle considérée comme fonction de ce segment. Alors, en effet, on a :

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = S$$

ce qui devient, en posant : $x = \sin\frac{\varphi}{2}$

$$\varphi + \sin\varphi = 4S$$

c'est donc l'équation de Képler, dans le cas particulier de l'excentricité égale à l'unité, et nous savons, par l'étude qui en a été faite (page 71) qu'elle admet une infinité de racines imaginaires. Or, à quelles circonstances analytiques peut-il tenir que l'équation :

$$u = \int f(z)\, dz$$

donne pour z une valeur unique, un nombre fini et limité, ou un nombre infini de valeurs différentes en fonction de u ? Si l'on observe que :

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{f(z)}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

on voit que la question ainsi posée nous conduit à la théorie des équations différentielles du premier ordre. C'est tous ce point de vue qui a été traité par MM. Briot et Bouquet, dans deux Mémoires qui comptent parmi les plus beaux travaux analytiques de notre époque. (*) Mais les limites de ce Cours ne nous permettront pas d'aborder ces importantes recherches, et nous terminerons ce que nous avons eu pour but d'exposer relativement aux intégrales définies, et à l'étude générale des fonctions, par une indication succincte des propriétés des transcendantes elliptiques.

Propriétés de la transcendante de Jacobi.

I. L'exponentielle e^x est l'élément unique auquel se ramènent les transcendantes uniformes $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, étudiées dans les éléments, puisqu'on a :

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \; \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}$$

Néanmoins, il est absolument nécessaire d'introduire directement les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ en leur attribuant une dénomination spéciale, car le cosinus ne peut se ramener au sinus que par la formule

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

qui cache son caractère de fonction uniforme, ou par celle-ci :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

en changeant de variable. Quant à la tangente, son introduction se justifie par ce seul fait que la dérivée $\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = 1 + \operatorname{tang}^2 x$, s'exprime rationnellement par la fonction, ce qui n'a lieu ni pour le sinus ni pour le cosinus.

En passant de ces transcendantes élémentaires aux fonctions elliptiques, on rencontre de même un seul et unique élément analytique, qui, servant de fondement à leur théorie, donne lieu à diverses combinaisons, ayant, si l'on peut dire, leur

(*) Recherches sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Intégrations des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques. — Journal de l'École Polytechnique, 36e Cahier.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC - Cote : 5214 J

existence propre, et devant, par suite, être considérées directement et en elles-mêmes. Pour les définir, et donner l'origine des nouvelles notations introduites, reprenons l'équation:

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

dont il a été précédemment question. Si l'on pose $z = \sin\varphi$, l'intégrale elliptique prend cette forme:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}}$$

et Legendre, qui en a fait principalement usage, donne à l'angle φ le nom d'amplitude de l'intégrale. On écrit en conséquence:

$$\varphi = \text{amplitude}(u)$$

ou, pour abréger: $\varphi = \text{am}\,(u)$

d'où: $z = \sin\varphi = \sin\text{am}\,(u)$

C'est l'une des transcendantes qui vont nous occuper, et il est nécessaire d'y joindre les suivantes, savoir:

$$\sqrt{1-z^2} = \cos\text{am}\,(u)$$

$$\sqrt{1-K^2z^2} = \Delta\,\text{am}\,(u)$$

qui sont aussi des fonctions uniformes de la variable, et doublement périodiques, comme la première.

Les définitions posées, voici la fonction découverte par Jacobi, qui, au fond, figure seule dans leur expression, et sur laquelle repose par conséquent toute la théorie des fonctions elliptiques. Soit, comme plus haut:

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K^2z^2)}}$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-K'^2z^2)}}$$

la variable étant supposée réelle, et le radical positif dans les deux intégrales, qui seront ainsi réelles et positives.

Soit encore: $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$

nous écrivons, en adoptant les notations du grand géomètre:

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \cdots\cdots\cdots$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPF.d.i

ou bien : $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots\ldots$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx.$$

Elle est donc la quantité qui joue un rôle si important en analyse, et dont nous allons faire l'étude, en nous limitant aux points les plus simples.

II En premier lieu, nous établirons la propriété suivante. Observant qu'on a :

$$\Theta(x + 2K) = \Theta(x)$$

je dis que l'expression :

$$e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\Theta(x)$$

se reproduit encore, mais sauf le signe quand on change x en $x + 2K'\sqrt{-1}$. Reprenons pour cela l'équation même de définition, que nous mettrons sous la forme :

$$\Theta(x) = \sum (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi x}{K}\sqrt{-1}}$$

et en remplaçant q par sa valeur : $e^{-\pi\frac{K}{K'}}$

$$\Theta(x) = \sum (-1)^n e^{\frac{\pi}{KK'}(nxK'\sqrt{-1} - n^2K'^2)}$$

Il en résulte cette transformation remarquable, savoir :

$$e^{-\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\Theta(x) = \sum (-1)^n e^{\frac{\pi}{4KK'}(x + 2nK'\sqrt{-1})^2}$$

Or, le nombre entier n prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, on peut changer n en $n-1$ dans le terme général, et écrire :

$$\sum (-1)^n e^{\frac{\pi}{4KK'}(x + 2nK'\sqrt{-1})^2} = \sum (-1)^{n-1} e^{\frac{\pi}{4KK'}\left[x + 2(n-1)K'\sqrt{-1}\right]^2}$$

Mettant ensuite $x + 2K'\sqrt{-1}$ à la place de x, nous obtenons l'égalité :

$$\sum (-1)^n e^{\frac{\pi}{4KK'}(x + 2K'\sqrt{-1} + 2nK'\sqrt{-1})^2} = -\sum (-1)^n e^{\frac{\pi}{4KK'}(x + 2nK'\sqrt{-1})^2}$$

qui démontre la proposition annoncée. On verra bientôt sortir de cette propriété si facile à établir, l'expression analytique du fait de la double périodicité dans les fonctions $\sin am\, x$, $\cos am\, x$, $\Delta\, am\, x$; mais voici d'abord les conséquences qu'il faut en déduire.

III. De même qu'on envisage $\sin x$ ordinairement dans la théorie des fonctions circulaires, les quantités $\sin x$ et $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ je considérerai avec $\Theta(x)$ la fonction

$$\Theta(x + K) = \Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots\ldots$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

Et agissant d'une manière semblable à l'égard des expressions:

$$e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\Theta(x) = \sum (-1)^n e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2nK'\sqrt{-1})^2}$$

$$e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\Theta_1(x) = \sum e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2nK'\sqrt{-1})^2}$$

en augmentant la variable de la demi-période $K'\sqrt{-1}$, je ferai:

$$e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+K'\sqrt{-1})^2}\,\Theta(x+K'\sqrt{-1}) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,H(x)\sqrt{-1}$$

$$e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+K'\sqrt{-1})^2}\,\Theta_1(x+K'\sqrt{-1}) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,H_1(x)$$

le facteur $\sqrt{-1}$ étant placé dans la première relation pour obtenir une fonction $H(x)$ réelle comme $H(x)$, et le facteur exponentiel ayant pour effet, comme on va voir, de conserver à ces deux fonctions la période réelle $2K$. On tire de là, en effet, en écrivant pour abréger $i = \sqrt{-1}$:

$$e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta(x+iK') = i.H(x)$$

$$e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta_1(x+iK') = H_1(x).$$

Or, ces relations donnent, par le changement de x en $x+K$, en observant que: $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$:

$$e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta_1(x+iK') = H(x+K)$$

$$i\,e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta(x+iK') = H_1(x+K)$$

et en les comparant aux précédentes, on en conclut immédiatement:

$$H(x+K) = H_1(x)$$

$$H_1(x+K) = -H(x)$$

d'où, par conséquent: $H(x+2K) = -H(x)$

$$H_1(x+2K) = -H_1(x)$$

C'est d'ailleurs ce qui ressort du développement en série, qu'on tire en considérant, par exemple $H_1(x)$ de l'équation

$$H_1(x) = e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta_1(x+iK')$$

$$= e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\sum q^{n^2} e^{\frac{n i\pi}{K}(x+iK')}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

Si nous remplaçons q par sa valeur : $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ il viendra en faisant passer le facteur exponentiel sous le signe Σ :

$$H_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{\frac{i\pi}{K}\left[(n+\frac{1}{2})x + (n+\frac{1}{2})^2 i K'\right]}$$

Cela étant, je pose pour un moment :

$$(n) = e^{\frac{i\pi}{K}\left[(n+\frac{1}{2})x + (n+\frac{1}{2})^2 i K'\right]}$$

de sorte qu'on ait :

$$H_1(x) = (0) + (1) + (2) + \cdots + (n) + \cdots$$
$$+ (-1) + (-2) \qquad + (-n) + \cdots$$

En groupant les termes de cette manière, savoir :

$$H_1(x) = \left[(0) + (-1)\right] + \left[(1) + (-2)\right] + \cdots + \left[(n) + (-n-1)\right] + \cdots$$

et remarquant que :

$$(n) + (-n-1) = 2\sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2K}$$

on en conclura :

$$H_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi x}{2K} + \cdots$$

Quant à la fonction $H(x)$, la relation : $H(x) = -H_1(x+K)$ nous donnera immédiatement :

$$H(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi x}{2K} - \cdots$$

Nous avons achevé maintenant la déduction en partant de $\Theta(x)$ des quantités nécessaires à l'expression des trois fonctions désignées plus haut par $\sin am\, x$, $\cos am\, x$, $\Delta am\, x$. On a en effet :

$$\sin am\, x = \frac{1}{\sqrt{K}}\,\frac{H(x)}{\Theta(x)}$$

$$\cos am\, x = \sqrt{\frac{K'}{K}}\,\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}$$

$$\Delta am\, x = \sqrt{K'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}$$

le caractère de fonctions uniformes et la propriété de la double périodicité se trouvent mis en évidence, comme on va voir.

IV. Considérons, pour fixer les idées, la série qui représente $\Theta(x)$, savoir :

$$\Sigma\,(-1)^n q^{n^2} e^{\frac{ni\pi x}{K}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 (.)

Je dis qu'elle est convergente pour une valeur quelconque : $x = a + ib$, car le terme général a alors pour module la quantité :

$$q^{n^2} e^{\frac{n\pi b}{K}}$$

dont la racine n^e : $q^n e^{\frac{\pi b}{K}}$ décroît indéfiniment quand n augmente, q étant moindre que l'unité. Ainsi cette fonction, et par conséquent, celles qui en ont été déduites, restent finies et continues pour toutes les valeurs réelles et imaginaires de la variable. Mais c'est la double périodicité qu'il importe surtout de reconnaître dans les expressions de nos trois fonctions. J'observe pour cela que la relation précédemment démontrée :

$$e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2iK')^2}\,\Theta(x+2iK') = -e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\,\Theta(x)$$

donne en simplifiant : $\Theta(x+2iK') = -\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}$

et on aurait de même : $\Theta_1(x+2iK') = +\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}$

En second lieu, si l'on change x en $x+iK'$ dans les équations qui définissent $H(x)$ et $H_1(x)$ savoir :

$$\begin{cases} e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta(x+iK') = i\,H(x) \\ e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,\Theta_1(x+iK') = H_1(x) \end{cases}$$

on en conclura :

$$\begin{cases} e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,H(x+iK') = i\,\Theta(x) \\ e^{\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}\,H_1(x+iK') = \Theta_1(x) \end{cases}$$

Mettant maintenant dans les deux dernières $x+iK'$ au lieu de x, et comparant avec celles qui précèdent, nous obtiendrons :

$$H(x+2iK') = -H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}$$

$$H_1(x+2iK') = +H_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}$$

Or, il suffit de réunir ces deux systèmes de relations, savoir :

$$\begin{cases} \Theta(x+2K) = +\Theta(x) \\ \Theta_1(x+2K) = +\Theta_1(x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} \Theta(x+2iK') &= -\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')} \\ \Theta_1(x+2iK') &= +\Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} H(x+2K) = -H(x) \\ H_1(x+2K) = -H_1(x) \end{cases} \qquad \begin{aligned} H(x+2iK') &= -H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')} \\ H_1(x+2iK') &= +H_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')} \end{aligned}$$

pour reconnaître de quelle manière en résultent des fonctions doublement périodiques, et démontrer les égalités fondamentales :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

$$\begin{cases} \sin am\,(x+2K) = -\sin am\,x \\ \sin am\,(x+2iK') = +\sin am\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos am\,(x+2K) = -\cos am\,x \\ \cos am\,(x+2iK') = -\cos am\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\,am\,(x+2K) = +\Delta\,am\,x \\ \Delta\,am\,(x+2iK') = -\Delta\,am\,x \end{cases}$$

L'objet de la théorie des fonctions elliptiques se trouve suffisamment indiqué par ces beaux et importants résultats dont la découverte est due à Jacobi. Nous nous proposons maintenant d'en donner la démonstration.

V. Je rappellerai d'abord cette formule importante, qui donne l'expression de l'intégrale d'une fonction uniforme $f(z)$ prise le long d'un contour fermé quelconque S, savoir :

$$(S) = (C_1) + (C_2) + \cdots\cdots\cdots + (C_m)$$

$C_1, C_2, \ldots C_m$ étant m cercles de rayons infiniment petits ayant leurs centres aux divers pôles $z_1, z_2, \ldots z_m$ de la fonction $f(z)$, lu supposant :

$$f(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}$$

de sorte que les pôles soient les racines de l'équation $F(z) = 0$, on obtient, comme nous l'avons vu :

$$2\mu i\pi = (S)$$

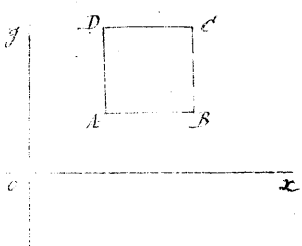
μ désignant, en tenant compte des degrés de multiplicité, le nombre de ces racines. Cette formule, qui est le principe du théorème de Cauchy sur les équations algébriques, et que nous avons dit s'étendre aux équations transcendantes, s'applique en effet de la manière la plus facile à l'équation :

$$\Theta(z) = 0.$$

et c'est la première question qui sera traitée en poursuivant l'étude de cette fonction, où m'interviennent les constantes K et K', au lieu de représenter les intégrales :

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

seront supposées des quantités positives quelconques.



Considérons à cet effet, un rectangle $ABCD$, dont les côtés parallèles aux axes Ox, Oy, soient :

$$AB = 2K, \qquad BC = 2K'$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5214

L'intégrale d'une fonction uniforme quelconque $f(z)$, prise le long du contour ABCDA, sera :

$$(S) = (AB) + (BC) + (CD) + (DA)$$

ou encore :

$$(S) = (AB) + (BC) - (DC) - (AD)$$

Or, en désignant par a la quantité imaginaire qui correspond au sommet A, les intégrales relatives aux divers côtés s'obtiendront évidemment en faisant :

pour : $\left.\begin{array}{ll} AB & z = a + t \\ DC & z = a + 2iK' + t \end{array}\right\}$ t croissant de zéro à $2K$

$\left.\begin{array}{ll} AD & z = a + it \\ BC & z = a + 2K + it \end{array}\right\}$ t croissant de zéro à $2K'$

En groupant les termes de cette manière :

$$(S) = \Big[(AB) - (DC)\Big] + \Big[(BC) - (AD)\Big]$$

nous en conclurons :

$$(S) = \int_0^{2K} \Big[f(a+t) - f(a+2iK'+t)\Big]dt + i\int_0^{2K'} \Big[f(a+2K+it) - f(a+it)\Big]dt$$

Appliquons cette formule générale au cas où l'on suppose

$$f(z) = \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}$$

les relations précédemment obtenues savoir :

$$\Theta(z+2K) = \Theta(z)$$

$$\Theta(z+2iK') = -\Theta(z)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(z+iK')}$$

conduisent facilement à celles-ci :

$$f(z+2K) = f(z)$$

$$f(z+2iK) = f(z) - \frac{i\pi}{K}$$

et il en résulte :

$$(S) = \int_0^{2K} \frac{i\pi}{K}\, dt = 2i\pi$$

La relation : $2\mu i\pi = (S)$, où μ est le nombre des racines contenues dans le contour donne ainsi : $\mu = 1$, et cette conclusion importante s'étend aux autres fonctions $\Theta_1(z)$, $H(z)$, $H_1(z)$, car leurs dérivées logarithmiques satisfont encore aux conditions :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC - Cote : 5.79.1

$$f(z+2K) = f(z) \qquad f(z+2iK') = f(z) - \frac{i\pi}{K}$$

Ce point établi, concevons qu'on remplace la quantité α, par $\alpha + 2mK + 2niK'$, en attribuant successivement aux nombres entiers m et n toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$. Le tout décomposera le plan en rectangles égaux à ABCD, et par ce qui précède, nous saurons d'avoir que chacun d'eux renferme une seule et unique racine.

J'ajoute qu'en désignant par $z = \alpha$ la solution contenue dans le rectangle primitif ABCD, on aura :

$$z = \alpha + 2mK + 2niK'$$

pour la racine contenue dans le rectangle déterminé par les entiers m et n, de sorte que les points correspondants aux racines soient biunivoquement placés dans les deux cas. C'est ce qui résulte en effet de la formule :

$$\Theta(z + 2mK + 2niK') = (-1)^n \Theta(z)\, e^{-\frac{ni\pi}{K}(z+niK')}$$

en supposant $z = \alpha$, d'où nous voyons que toutes les solutions de l'équation $\Theta(z) = 0$ sont données par l'expression :

$$z = \alpha + 2mK + 2niK'$$

où la solution particulière $z = \alpha$ reste à déterminer. J'observe à cet effet que, dans la relation précédemment établie :

$$\Theta(z + iK') = i\, H(z)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2z+iK')}$$

la fonction $H(z)$ est impaire et s'évanouit pour $z = 0$. Ainsi, on peut prendre $\alpha = iK'$, et en résumé, nous obtenons :

$$z = 2mK + (2n+1)iK'$$

Cette même relation montre que toutes les solutions de l'équation $H(z) = 0$ sont comprises dans la formule analogue :

$$z = 2mK + 2niK'$$

et en se rappelant que :

$$H_1(z) = H(K+z)$$
$$\Theta_1(z) = \Theta(K+z)$$

on trouvera immédiatement les formules :

$$z = (2m+1)K + 2niK'$$

pour l'équation : $H_1(z) = 0$ et :

$$z = (2m+1)K + (2n+1)iK'$$

pour l'équation $\Theta_1(z) = 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5214.1

VI. Je viens à la formule générale rappelée tout à l'heure :

$$(S) = (G_1) + (G_2) + \cdots\cdots\cdots + (G_m)$$

en prenant encore pour S le contour $ABCD$ de sorte qu'on aura :

$$(S) = \int_0^{2K} \left[f(a+t) - f(a+2iK'+t) \right] dt + i \int_0^{2K'} \left[f(a+2K+it) - f(a+it) \right] dt$$

La fonction uniforme $f(z)$ est quelconque dans cette formule ; or, en la supposant doublement périodique, et remplissant les conditions :

$$f(z+2K) = f(z)$$

$$f(z+2iK') = f(z)$$

on obtient immédiatement $(S) = 0$, et c'est là ce qui va servir de base à l'analyse que je vais exposer. Mais pour la rendre plus facile à saisir, je vais d'abord, en suivant la même marche, traiter, au lieu des fonctions doublement périodiques, les fonctions rationnelles, afin d'obtenir ainsi leur décomposition en ces termes élémentaires qu'on nomme fractions simples.

Observons à cet effet, qu'en prenant pour S un cercle de rayon infini ayant son centre à l'origine, on a également $(S) = 0$, lorsque $f(z)$ est une fraction rationnelle de degré -2. Cette condition sera remplie si l'on suppose :

$$f(z) = \frac{\pi(z)}{F(z)(z-x)}$$

$\pi(z)$ étant un polynôme de degré inférieur à $F(z)$, et dans ce cas, les pôles seront, d'une part, les racines $z = a, b, \ldots l$ de l'équation $F(z) = 0$, et de l'autre $z = x$. Plaçons-nous d'abord dans le cas des racines simples, on aura (voyez page 80)

$$(G_1) = \frac{2i\pi(a)}{F'(a)(x-a)}, \qquad (G_2) = \frac{2i\pi(b)}{F'(b)(x-b)} \quad \&c.$$

D'ailleurs, l'intégrale relative au pôle $z = x$ étant : $-\dfrac{2i\pi\pi(x)}{F(x)}$, la condition : $(S) = 0$ donne immédiatement en divisant par $2i\pi$, la formule connue :

$$\frac{\pi(x)}{F(x)} = \frac{\pi(a)}{F'(a)(x-a)} + \frac{\pi(b)}{F'(b)(x-b)} + \cdots\cdots + \frac{\pi(l)}{F'(l)(x-l)}$$

Supposons, en second lieu, que $z = a$ par exemple, soit racine double, et faisons : $F(z) = (z-a)^2 \Phi(z)$. La détermination de l'intégrale :

$$(G_1) = \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{it}) \varepsilon e^{it} dt$$

où ε est infiniment petit, est toujours donnée, comme précédemment, par le

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 (1)

coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de cette quantité de :

$$f(a+h) = \frac{\Pi(a+h)}{h^2\Phi(a+h)} \quad \frac{1}{x-a-h}$$

Or, on a, d'une part :

$$\frac{\Pi(a+h)}{h^2\Phi(a+h)} = \frac{\Pi(a) + h\Pi'(a) + \cdots}{h^2\left[\Phi(a) + h\Phi'(a) + \cdots\right]}$$

$$= \frac{\Pi(a)}{\Phi(a)} \frac{1}{h^2} + \frac{\Pi'(a)\Phi(a) - \Pi(a)\Phi'(a)}{\Phi^2(a)} \frac{1}{h} + \cdots$$

de l'autre :

$$\frac{1}{x-a-h} = \frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \cdots$$

de sorte que ce coefficient obtenu par la multiplication des deux développements est :

$$\frac{\Pi(a)}{\Phi(a)} \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{\Pi'(a)\Phi(a) - \Pi(a)\Phi'(a)}{\Phi^2(a)} \frac{1}{x-a}$$

Or, en général, il est clair que s'il s'agit d'une racine multiple d'ordre n, le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de l'expression :

$$f(a+h) = \frac{\Pi(a+h)}{F(a+h)} \frac{1}{x-a-h}$$

conduira à l'ensemble des fractions simples :

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a}$$

et depuis longtemps, Lagrange avait présenté sous cette forme que le calcul des résidus donne si facilement la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Après l'avoir succinctement indiquée à cause de son importance, j'arrive à la question toute semblable, comme on va voir, de la décomposition en éléments simples, d'une fonction uniforme doublement périodique.

VII. Soit, pour abréger :

$$\theta = \Theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots$$
$$\theta_1 = \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$
$$\eta = H(K) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \cdots$$

nous poserons, en faisant usage du système de notation introduit par M.r

Weierstrass, dans la théorie des fonctions elliptiques et Abéliennes : (*)

$$al(x) = \frac{\theta_1 H(x)}{\sqrt{\theta}\,\Theta(x)}$$

$$al(x)_1 = \frac{\theta H_1(x)}{\sqrt{\theta}\,\Theta(x)}$$

$$al(x)_2 = \frac{\theta \Theta_1(x)}{\theta_1 \Theta(x)}$$

On obtient ainsi, comme conséquence des relations fondamentales :

$$\Theta(x + 2K) = \Theta(x)$$

$$\Theta(x + 2iK') = -\Theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}$$

et de celles qui concernent $\Theta_1(x)$, $H(x)$, $H_1(x)$:

$$\begin{cases} al(x + 2K) = -al(x) \\ al(x + 2iK') = +al(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} al(x + 2K)_1 = -al(x)_1 \\ al(x + 2iK')_1 = -al(x)_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} al(x + 2K)_2 = +al(x)_2 \\ al(x + 2iK')_2 = -al(x)_2 \end{cases}$$

J'ajoute que le dénominateur commun $\Theta(x)$ admettant pour racine simple $x = iK'$, nous pourrons, en supposant h infiniment petit, écrire :

$$al(iK' + h) = \frac{\alpha}{h}$$

$$al(iK' + h)_1 = \frac{\alpha'}{h}$$

$$al(iK' + h)_2 = \frac{\alpha''}{h}$$

(*) Le symbole al, formé avec les initiales du mot allemand alle, n'appelle que pour toutes les valeurs de la variable, les fonctions sont représentées par une seule et même expression analytique.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 (1)

$\alpha, \alpha', \alpha''$ étant des constantes qui seront déterminées plus tard.

Cela posé, je vais montrer que les trois fonctions ainsi définies jouent le rôle d'éléments simples, à l'égard des fonctions uniformes doublement périodiques, exactement comme l'expression $\frac{1}{x}$ pour les fonctions rationnelles.

En premier lieu, soit $F(x)$ une fonction ayant la même périodicité que $al(x)$, c'est-à-dire, telle qu'on ait, par conséquent :

$$F(z+2K) = -F(z)$$

$$F(z+2iK') = +F(z)$$

En posant

$$f(z) = F(z)\, al\,(x-z)$$

nous en conclurons :

$$f(z+2K) = f(z)$$

$$f(z+2iK') = f(z)$$

et c'est à l'intégrale de cette fonction que j'appliquerai le théorème établi plus haut, à savoir :

$$(S) = 0$$

le contour S étant le rectangle $ABCD$.

Soient à cet effet : $z = a, b, \ldots K$ les pôles de $F(z)$ à l'intérieur du rectangle, et supposons :

$$F(a+h) = \frac{A}{h}, \qquad F(b+h) = \frac{B}{h}, \ldots F(K+h) = \frac{K}{h}$$

nous en conclurons :

$$f(a+h) = \frac{A\, al(x-a)}{h}, \quad f(b+h) = \frac{B\, al(x-b)}{h} \quad \text{&c.}$$

Quant au facteur $al(x-z) = \frac{\theta_1 H(x-z)}{\vartheta_3 \Theta(x-z)}$, il a été établi que le dénominateur ne s'évanouit qu'une seule fois dans l'intérieur de $ABCD$, en posant (*)

$$x - z = iK'$$

De cette proposition, dont on voit actuellement l'importance, résulte que ce facteur introduit dans $f(z)$ le seul pôle

$$z = x - iK'$$

à l'égard duquel on obtient :

(*) On devrait écrire $x - z = iK' + 2mK + 2niK'$, la quantité x étant arbitraire ; mais rien n'empêche de placer le sommet A, qui est un point quelconque du plan de manière à avoir $m = 0$, $n = 0$, comme nous l'avons supposé.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.

$$f(x-iK'+h) = F(x-iK')\,\mathrm{al}(iK'-h)$$
$$= -\frac{\alpha F'(x-iK')}{h}$$

Ayant donc

$$(S) = 2i\pi\left[A\,\mathrm{al}(x-a)+B\,\mathrm{al}(x-b)+\dots\dots+K\,\mathrm{al}(x-K)-\alpha F(x-iK')\right]$$

la condition $(S)=0$ donne immédiatement la formule :

$$\alpha F(x-iK') = A\,\mathrm{al}(x-a)+B\,\mathrm{al}(x-b)+\dots\dots+K\,\mathrm{al}(x-K)$$

qui rend manifeste l'analogie avec l'expression d'une fonction rationnelle décomposée en fractions simples.

On voit en outre que des fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$, de même périodicité que $\mathrm{al}(x_1)$ et $\mathrm{al}(x_2)$, et telles qu'on ait :

$$\begin{cases} F_1(x+2K) = -F_1(x) \\ F_1(x+2iK') = -F_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2(x+2K) = +F_2(x) \\ F_2(x+2iK') = -F_2(x) \end{cases}$$

donneront lieu aux résultats suivants, où je suppose, pour ne point multiplier les notations que les pôles soient encore désignés par a, b ..... K, savoir :

$$\alpha' F_1(x-iK') = A'\,\mathrm{al}(x-a)_1+B'\,\mathrm{al}(x-b)_1+\dots\dots+K'\,\mathrm{al}(x-K)_1$$

$$\alpha'' F_2(x-iK') = A''\,\mathrm{al}(x-a)_2+B''\,\mathrm{al}(x-b)_2+\dots\dots+K''\,\mathrm{al}(x-K)_2$$

Enfin, si l'on considère ce dernier cas, savoir :

$$\mathcal{F}(x+2K) = \mathcal{F}(x)$$
$$\mathcal{F}(x+2iK') = \mathcal{F}(x)$$

en partant de l'expression :

$$f(z) = \mathcal{F}(z)\,\frac{\mathrm{al}(x-z)}{\mathrm{al}(z)}$$

et admettant qu'on ait toujours pour h infiniment petit :

$$\mathcal{F}(a+h) = \frac{\mathcal{A}}{h}, \quad \mathcal{F}(b+h) = \frac{\mathcal{B}}{h}, \dots\dots\dots \mathcal{F}(K+h) = \frac{\mathcal{K}}{h}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

on trouvera cette nouvelle formule :(x)

$$\mathcal{F}'(x-iK') = \mathcal{F}(0) + \frac{\mathfrak{A}\, al\,(x-a)}{al\,(x)\, al\,(a)} + \frac{\mathcal{B}\, al\,(x-b)}{al\,(x)\, al\,(b)} + \cdots\cdots + \frac{\mathcal{K}\, al\,(x-K)}{al\,(x)\, al\,(K)}$$

VIII. Jusqu'ici, j'ai toujours admis que les pôles des diverses fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, &c, correspondaient à des racines simples des équations : $\frac{1}{F(x)} = 0$, $\frac{1}{F_1(x)} = 0$, &c..... Afin de voir quelle modification sera amenée par la présence d'une racine multiple $x = a$, d'ordre $n+1$, posons pour h infiniment petit :

$$F(a+h) = \frac{A^{(n)}}{h^{n+1}} + \frac{A^{(n-1)}}{h^{n}} + \cdots\cdots + \frac{A'}{h^2} + \frac{A}{h}$$

et employons le développement donné par la formule de Taylor, savoir :

$$al\,(x-a-h) = al\,(x-a) - \frac{h}{1}\Big[al\,(x-a)\Big]' + \frac{h^2}{1.2}\Big[al\,(x-a)\Big]'' - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{h^n}{1.2\ldots n}\Big[al\,(x-a)\Big]^{n}$$

On en conclura pour le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans l'expression :

$$f(a+h) = F(a+h)\, al\,(x-a-h)$$

la quantité suivante :

$$A\; al\,(x-a) - \frac{A'}{1}\Big[al\,(x-a)\Big]' + \frac{A''}{1.2}\Big[al\,(x-a)\Big]'' - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{A^{n}}{1.2\ldots n}\Big[al\,(x-a)\Big]^{(n)}$$

qui remplacera donc le seul terme $A\; al\,(x-a)$ dans l'expression de $F(x-iK')$.

Voici une application importante de ce résultat :

Prenons pour $F(x)$ un polynôme entier impair en $al\,(x)$,

$$F(x) = G\; al\,(x) + H\; al^3(x) + \cdots\cdots + M\; al^{2m+1}(x)$$

on aura une fonction de mêmes périodicité que $al\,(x)$, et n'offrant qu'un seul pôle $a = iK'$ avec l'ordre de multiplicité $2m+1$, de sorte que si l'on fait $n = 2m$, nous obtiendrons :

$$\alpha F(x-iK') = A\, al\,(x-iK') - \frac{A'}{1}\Big[al\,(x-iK')\Big]' + \cdots\cdots + \frac{A^{(2m)}}{1.2\ldots 2m}\Big[al\,(x-iK')\Big]^{(2m)}$$

et par conséquent, en changeant x en $x+iK'$:

(x) C'est à M. Liouville qu'est due l'expression par un sinus d'amplitude des fonctions doublement périodiques. Voir sur ce sujet l'ouvrage de MM. Briot et Bouquet : Théorie des fonctions doublement périodiques, &c .....

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - DUN - SIB

$$\alpha F(x) = A\, al(x) - \frac{A'}{1}\frac{d\, al(x)}{dx} + \cdots + \frac{A^{(2m)}}{1.2\ldots 2m}\frac{d^{2m} al(x)}{dx^{2m}}$$

De plus, il est aisé de voir que tous les coefficients A', A''', &c. ... $A^{(2m-1)}$ dont l'indice est un nombre impair, sont nécessairement nuls. En effet, la fonction : $al(x) = \frac{l\, H(x)}{\pi\, \Theta(x)}$ change de signe avec la variable, et il en est de même de $F'(x)$, tandisque les dérivées d'ordre impair $\frac{d\, al(x)}{dx}$, $\frac{d^3 al(x)}{dx^3}$, &c., conservent la même valeur. Les dérivées disparaîtront donc en formant la combinaison : $F(x) - F(-x) = 2F(x)$, ce qui revient à dire qu'on a : $A' = 0$, $A''' = 0$, &c.

Et semblablement, si l'on désigne par $F_1(x)$ et $F_2(x)$ des polynômes entiers impairs de degré $2m+1$, composés respectivement avec $al(x_1)$, $al(x_2)$, on obtiendra d'abord :

$$\alpha' F_1(x) = A_1\, al(x)_1 - \frac{A'_1}{1}\frac{d\, al(x)_1}{dx} + \cdots + \frac{A_1^{(2m)}}{1.2\ldots 2m}\frac{d^{2m} al(x)_1}{dx^{2m}}$$

$$\alpha'' F_2(x) = A_2\, al(x)_2 - \frac{A'_2}{1}\frac{d\, al(x)_2}{dx} + \cdots + \frac{A_2^{(2m)}}{1.2\ldots 2m}\frac{d^{2m} al(x)_2}{dx^{2m}}$$

Observant ensuite que $al(x)_1$, $al(x)_2$ et par conséquent $F_1(x)$, $F_2(x)$ ne changent point quand on change x en $-x$, tandisque dans les seconds membres les dérivées d'ordre impair changent de signe, il arrive, comme précédemment, qu'elles disparaissent encore, dans les combinaisons :

$$F_1(x) + F_1(-x) = 2F_1(x), \text{ et } F_2(x) + F_2(-x) = 2F_2(x)$$

Ces résultats concernant les trois transcendantes qui figurent comme éléments simples dans l'expression des fonctions uniformes doublement périodiques, doivent être rapprochés de la relation :

$$A\left(\frac{1}{x}\right) + B\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + N\left(\frac{1}{x}\right)^n = A\left(\frac{1}{x}\right) - B\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} + \cdots - (-1)^{n-1} N\, 1.2\ldots n-1 \frac{d^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{dx^{n-1}}$$

où entre l'élément $\frac{1}{x}$ de toute fonction rationnelle. Elle donnent immédiatement une conséquence importante consistant en ce que, si l'on représente l'une quelconque des trois fonctions $al(x)$, $al(x)_1$, $al(x)_2$ par z, on peut poser :

$$z^3 = \alpha z + \beta \frac{d^2 z}{dx^2},$$

ou sous une autre forme :

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2az^3 + bz$$

a et b étant des coefficients constants. Multipliant par $2\frac{dz}{dx}$, et intégrant, on en tire :

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = az^4 + bz^2 + c$$

et par suite :

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{az^4 + bz^2 + c}}$$

Ces fonctions sont donc chacune l'inverse d'une intégrale elliptique de 1ère espèce; mais nous allons reprendre cette question pour l'approfondir davantage, en suivant une autre marche.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274.1

* IX. J'ai remarqué que les trois fonctions :

$$al(x)_1 \quad al(x)_2$$
$$al(x) \quad al(x)_2$$
$$al(x) \quad al(x)_1$$

sont respectivement de même périodicité que :

$$al(x), \quad al(x)_1, \quad al(x)_2$$

et au lieu du cube ont seulement le carré de $\Theta(x)$ en dénominateur, de sorte qu'on peut immédiatement poser :

$$al(x)_1 \, al(x)_2 = A \frac{d\, al(x)}{dx} + B\, al(x)$$

$$al(x) \, al(x)_2 = A' \frac{d\, al(x)_1}{dx} + B' al(x)_1$$

$$al(x) \, al(x)_1 = A'' \frac{d\, al(x)_2}{dx} + B'' al(x)_2$$

D'ailleurs, en changeant comme tout à l'heure x en $-x$, on trouve immédiatement que les constantes B, B', B'', sont nulles, faisant donc, pour abréger l'écriture :

$$u = al(x)$$

$$v = al(x)_1$$

$$w = al(x)_2$$

Nous obtenons le système suivant de trois équations différentielles du premier ordre, qu'on trouve dans la théorie de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a point de force accélératrice, savoir :

$$\frac{du}{dx} = A\, v w$$

$$\frac{dv}{dx} = A'\, u w$$

$$\frac{dw}{dx} = A''\, u v$$

Or, on en tire :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

$$\frac{u\,du}{A} = \frac{v\,dv}{A'} = \frac{w\,dw}{A''}$$

et par conséquent :

$$v^2 = \frac{A'}{A}\,u^2 + G$$

$$w^2 = \frac{A''}{A}\,u^2 + H$$

G et H désignant des constantes qui se déterminent en faisant $x=0$, car les expressions :

$$al(x) = \frac{\theta_1\,H(x)}{\vartheta_1\,\Theta(x)}$$

$$al(x)_1 = \frac{\theta\,H_1(x)}{\vartheta_1\,\Theta(x)}$$

$$al(x)_2 = \frac{\theta\,\Theta_1(x)}{\theta_1\,\Theta(x)}$$

d'après la signification même des quantités $\theta, \theta_1, \vartheta_1$, donnent :

$$al(0) = 0, \qquad al(0)_1 = 1, \qquad al(0)_2 = 1.$$

on en conclut immédiatement : $G = 1$, $H = 1$.

Venons en second lieu à : A, A', A''. Il résulte de l'équation

$$\frac{du}{dx} = A\,v\,w$$

que A est la valeur de la dérivée $\frac{du}{dx}$ pour $x=0$, ou encore la limite du rapport $\frac{al(x)}{x}$ pour x infiniment petit. C'est en ce moment que nous particulariserons les constantes K et K', restées quelconques jusqu'ici, de manière à obtenir :

$$A = \text{limite}\ \frac{\theta_1\,\frac{H(x)}{x}}{\vartheta_1\,\Theta(x)} = 1$$

c'est à dire :

$$\frac{\pi}{2K}\cdot\frac{\theta_1}{\vartheta_1}\cdot\frac{2\sqrt[4]{q} - 6\sqrt[4]{q^9} + 10\sqrt[4]{q^{25}} - \ldots}{\theta} = 1$$

ou bien :

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{\theta_1\left(2\sqrt[4]{q} - 6\sqrt[4]{q^9} + 10\sqrt[4]{q^{25}} - \ldots\right)}{\vartheta_1\,\theta}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 J

de sorte que désormais K, et par suite K', d'après l'équation $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ seront considérés comme fonction de la seule variable q. Vos équations deviennent ainsi :

$$V^2 = A' u^2 + 1$$
$$W^2 = A'' u^2 + 1$$

Je mets d'abord $x = K$ dans la première, ce qui donne :

$$u = \frac{\theta_1 H(K)}{\vartheta_1 \Theta(K)} = \frac{\theta_1 \vartheta_1}{\vartheta_1 \theta_1} = 1$$

$$v = \frac{\theta H_1(K)}{\vartheta_1 \Theta(K)} = \frac{\theta H(iK)}{\vartheta_1 \Theta(K)} = 0$$

et par conséquent : $A' = -1$.

Je poserai ensuite $x = K + iK'$ dans la seconde, et employant les relations :

$$\Theta(x + iK') = i H(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}$$

$$H(x + iK') = i \Theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}$$

$$\Theta_1(x + iK') = H_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}$$

$$H_1(x + iK') = \Theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')}$$

d'où l'on conclut :

$$al(x + iK') = \frac{\theta_1 \Theta(x)}{\vartheta_1 H(x)}$$

$$al(x + iK')_1 = \frac{\theta \Theta_1(x)}{i \vartheta_1 H(x)}$$

$$al(x + iK')_2 = \frac{\theta H_1(x)}{i \theta_1 H(x)}$$

et par conséquent :

$$u = al(K + iK') = \left(\frac{\theta_1}{\vartheta_1}\right)^2$$

$$v = al(K + iK')_1 = \frac{1}{i}\left(\frac{\theta}{\vartheta_1}\right)^2$$

$$W = al(K + iK')_2 = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 1

nous obtiendrons immédiatement : $K'' = -\left(\frac{D_1}{\theta_1}\right)^4$

Soit donc :

$$\sqrt{K} = \frac{D_1}{\theta_1} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + \dots\dots}$$

on aura d'une part

$$V^2 = 1 - u^2$$
$$W^2 = 1 - K^2 u^2$$

et de l'autre ces équations différentielles

$$\frac{du}{dx} = V W$$

$$\frac{dV}{dx} = -u W$$

$$\frac{dW}{dx} = -K^2 u V$$

dont la première conduit à l'expression :

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-K^2u^2)}}$$

que nous avions en vue d'obtenir. Elle montre en effet que la fonction $u = al(x)$ n'est autre que le sinus d'amplitude de la variable, et que l'on a $V = al(x)_1 = \cos am(x)$, $W = al(x)_2 = \Delta am(x)$

X. En m'arrêtant à ces résultats, je ferai encore remarquer ces deux points de vue si différents tout lesquels se présente la théorie des fonctions elliptiques. Ainsi on peut partir de la relation :

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-K^2u^2)}}$$

ou de l'équation différentielle :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = (1-u^2)(1-K^2u^2)$$

pour arriver à l'expression de u par les transcendantes $\Theta(x)$, $H(x)$ &c. C'est dans cet ordre d'idées, suivi d'abord par Abel et Jacobi, que Mr Weierstrass a ouvert une voie nouvelle, où il a dû conduit à ses grandes découvertes de l'expression des fonctions inverses des intégrales de différentielles algébriques quelconques. En second lieu, et comme nous venons de le faire, on prend pour point de départ la transcendante $\Theta(x)$ au moyen-

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

de laquelle se composent des fonctions doublement périodiques qui on démontre a posteriori être les inverses des intégrales elliptiques. Des méthodes très diverses peuvent être employées à cet effet. Et celle dont nous avons fait usage en vue principalement d'offrir une application du calcul des résidus de Cauchy, est essentiellement limitée au seul cas des fonctions elliptiques. D'autres, découvertes par Göpel et Rosenhain, sont plus générales et s'appliquent aux fonctions de plusieurs variables analogues à $\Theta(x)$, qui donnent naissance à des transcendantes à périodicité multiple. C'est ainsi qu'ont été obtenues sous forme de quotients de séries synectiques en x et y les fonctions symétriques de u et v définies par les équations :

$$\int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} + \int \frac{dv}{\sqrt{\varphi(v)}} = x$$

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{\varphi(u)}} + \int \frac{v\,dv}{\sqrt{\varphi(v)}} = y$$

où $\varphi(u)$ est un polynome du 6e degré en u. Les travaux les plus remarquables dans cette voie sont dus à Riemann, arrivé comme M. Weierstrass aux fonctions inverses des intégrales de différentielles algébriques quelconques, mais par des principes entièrement différents de ceux de ses prédécesseurs, et qui paraissent devoir imprimer à l'art analytique un caractère tout nouveau. J'indiquerai encore un ouvrage de MM. Clebsh et Gordan, Theorie der Abelschen Functionen, où les notions approfondies de la géométrie moderne sur les courbes algébriques ont donné le moyen d'obtenir, par une méthode plus élémentaire, les principaux résultats qui concernent ces belles théories du calcul intégral.

Équations différentielles.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1

Équations différentielles.

Considérations préliminaires.

Nous savons déjà qu'on nomme équation différentielle d'ordre n, toute relation de la forme :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

n étant l'indice de la plus haute dérivée de y qui y figure. Obtenir les solutions quand elles existent sous forme explicite, ou étudier les fonctions nouvelles que cette relation définit, tel est encore l'objet de la théorie des équations différentielles. Dans ce sujet si vaste, la première question concerne l'existence même d'une fonction satisfaisant à la relation proposée, et c'est seulement de nos jours qu'elle a reçu, par les travaux de Cauchy, une solution rigoureuse. MM. Briot et Bouquet sont ensuite parvenus au même but par une méthode beaucoup plus simple, et plus facile que celle du grand géomètre, dans leur Mémoire sur les propriétés des fonctions définies par une équation différentielle (Journal de l'École Polytechnique, 36e cahier). Je n'exposerai pas toutefois leur analyse, afin d'abréger, et je me bornerai à en indiquer les principaux résultats.

I. Considérant d'abord l'équation du premier ordre :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

nous aurons ce théorème :

Si la fonction $f(x, y)$ est continue par rapport à x et y, quand ces variables restent comprises respectivement dans des circonférences de rayons R et R', décrites des points x_0 et y_0 comme centres, il existe une fonction satisfaisant à l'équation différentielle, et se réduisant à y_0 pour $x = x_0$. De plus, cette fonction est continue dans l'intérieur d'un cercle dont le centre est x_0, le rayon étant déterminé par la formule :

$$r = R\left(1 - e^{-\frac{R'}{2MR}}\right)$$

où M désigne le module maximum de $f(x, y)$ pour les valeurs considérées

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.PV.J.1

des variables x et y, et dans cet intervalle, elle représente la solution générale de la proposée.

Cette proposition importante s'étend à un système d'un nombre quelconque d'équations du premier ordre. Soit, pour fixer les idées, deux fonctions y, z, et les relations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z)$$

on aura ce nouveau théorème.

Si les fonctions $f(x, y, z)$ sont continues, quand les variables x, y, z, restent respectivement dans des circonférences de rayons : R, R', R'', décrites des points x_0, y_0, z_0, comme centres, il existe deux fonctions y et z, satisfaisant aux équations différentielles proposées et qui se réduisent à y_0 et z_0 pour $x = x_0$. Les deux fonctions sont continues dans l'intérieur d'un cercle dont le centre est x_0 et le rayon déterminé par la formule : (x)

$$r = R\left(1 - e^{-\frac{R}{3RM}}\right)$$

où R est le plus petit des rayons R' R'' et M le plus grand des modules de $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ pour les valeurs considérées des variables. Dans l'intérieur de ce cercle, ces fonctions représentent la solution générale des équations proposées, dont l'existence n'est ainsi démontrée qu'en admettant cette limitation de la variable.

Cela posé, je reprends l'équation d'ordre n :

$$F\left(x, y \frac{dy}{dx} \ldots\ldots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

et j'observe qu'on peut immédiatement la remplacer par un système de n équations du premier ordre. Soit par exemple, $n = 3$, il suffira de faire :

$$\frac{dy}{dx} = z \qquad \frac{dz}{dx} = u$$

pour obtenir la relation : $F\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}\right) = 0$

ce qui donne bien un système de trois équations du premier ordre entre y, z, et u. Or, ce système pouvant être vérifié dans une certaine étendue des valeurs de la variable indépendante x, par trois fonctions, se réduisant pour $x = x_0$

(x) M.r Serret, Cours de Calcul différentiel et intégral, 2e volume, p. 363.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5214.1

à des quantités quelconques, y_0, z_0, u_0, nous en concluons que dans les mêmes limites, l'équation du troisième ordre :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$$

admet pour solution générale une fonction y renfermant trois constantes arbitraires y_0, z_0, u_0, qui sont les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, en supposant $x = x_0$. Et en général, nous dirons que toute équation différentielle d'ordre n, a pour <u>intégrale générale</u>, une fonction renfermant n constantes indéterminées représentant les valeurs de cette fonction et de ses $n-1$ premières dérivées, quand on y fait $x = x_0$.

II. Les deux formes analytiques que nous venons de rencontrer, d'une seule équation d'ordre n entre x et y, ou d'un système de n équations de premier ordre entre x, y et $n-1$ autres fonctions, ont leurs avantages propres, et doivent être employées, l'une ou l'autre, suivant les circonstances. C'est encore la seule forme dont il sera fait usage dans le théorème suivant, qui établit une liaison importante entre la théorie des équations différentielles où n'entre qu'une variable indépendante, et celle des équations aux différences partielles où le nombre des variables indépendantes est quelconque.

Me bornant au cas le plus simple, soient :

$$\begin{cases} y = F(x, y_0, z_0) \\ z = F_1(x, y_0, z_0) \end{cases}$$

les solutions avec deux constantes arbitraires y_0, z_0, du système :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z) \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} y_0 = \Phi(x, y, z) \\ z_0 = \Phi_1(x, y, z) \end{cases}$$

les expressions que donne la résolution par rapport aux quantités y_0 et z_0. Si on les remplace par deux autres quantités arbitraires $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ $\Phi_1(x_0, y_0, z_0)$, de manière à avoir :

$$\begin{cases} \Phi(x_0, y_0, z_0) = \Phi(x, y, z) \\ \Phi_1(x_0, y_0, z_0) = \Phi_1(x, y, z) \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

on obtiendra les solutions des équations proposées sous une forme où l'on voit immé=
=diatement qu'elles sont vérifiées identiquement pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.
Or, il vient, en différentiant la première, par exemple, par rapport à x :

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$$

ou bien :

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} f(x,y,z) + \frac{d\Phi}{dz} f_1(x,y,z) = 0$$

relation qui devra encore être satisfaite comme celles dont elle est la conséquence pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Mais ces trois quantités sont arbitraires, c'est donc dire qu'elle est identique en x, y, z. Il s'ensuit que l'équation aux différences partielles :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f(x,y,z) + \frac{du}{dz} f_1(x,y,z) = 0$$

admet nécessairement une solution, à savoir :

$$u = \Phi(x,y,z)$$

et il est clair qu'elle serait encore vérifiée en posant :

$$u = \Phi_1(x,y,z).$$

J'ajoute qu'une combinaison quelconque des deux fonctions déterminées de x, y, z, Φ et Φ_1, savoir :

$$u = F(\Phi, \Phi_1)$$

sera, quelle que soit la fonction F, une solution de la même équation. On a effec=
tivement, en écrivant pour abréger f et f_1 à la place de $f(x,y,z)$ et $f_1(x,y,z)$:

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f + \frac{du}{dz} f_1 = \frac{dF}{d\Phi}\left(\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} f + \frac{d\Phi}{dz} f_1\right)$$
$$+ \frac{dF}{d\Phi_1}\left(\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Phi_1}{dy} f + \frac{d\Phi_1}{dz} f_1\right)$$

et on reconnaît immédiatement que le second membre est nul. Cette propriété des in=
=tégrales du système des équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z) \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x,y,z)$$

est d'autant plus digne de remarque, qu'elle donne, par cette expression que nous venons de considérer :

$$u = F(\Phi, \Phi_1)$$

la solution générale de l'équation aux différences partielles :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f + \frac{du}{dz} f_1 = 0.$$

En effet, toute fonction de x, y, z, pouvant, comme on le voit,

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274.1

aisément, s'écrire sous cette forme :

$$u = F(x, \Phi, \Phi_1)$$

nous trouverons, par la substitution dans l'équation aux différences partielles, la condition :

$$\frac{dF}{dx} = 0,$$ de sorte que la valeur de u, satisfaisant à l'équation aux différences partielles s'obtient par une combinaison arbitraire des deux seules fonctions Φ et Φ_1,

III. Je terminerai ces préliminaires en indiquant succinctement le moyen d'éliminer une inconnue entre deux équations différentielles. Soient d'abord les deux relations :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z)$$

en différentiant la première, ce qui donne :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}$$

l'élimination de z sera immédiatement ramenée à la question algébrique de l'élimination des deux quantités z et $\frac{dz}{dx}$, entre cette relation et les deux proposées, et on voit que l'équation finale est du second ordre par rapport à y. S'il s'agit en second lieu des équations :

$$f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

$$f_1\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0$$

nous opérerons d'une manière analogue, en différentiant chacune d'elles deux fois de suite, de manière à ajouter quatre relations nouvelles aux deux proposées. L'élimination de z sera encore ramenée à la question algébrique de l'élimination entre six équations des cinq inconnues suivantes

$$z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^4z}{dx^4},$$

et le résultat sera une équation du 4e ordre en y. Dans tous les cas on procédera de même, et je n'insisterai pas plus longtemps sur cette méthode, dont il ne sera fait aucun usage dans ce cours.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPE.A.I

Équations différentielles du premier ordre.

I. Je considérerai en premier lieu l'équation linéaire :

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = F(x)$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions quelconques de la variable indépendante. Une méthode générale d'une extrême importance en analyse, celle de la variation des constantes arbitraires qui sera exposée plus tard dans la théorie des équations linéaires d'ordre quelconque, à savoir :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} f_1(x) + \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} f_2(x) + \cdots + y f_n(x) = F(x)$$

donne le procédé très-simple d'intégration que voici :

Soit d'abord l'équation privée de second membre :

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = 0$$

on observe que la solution s'obtient immédiatement, car on en déduit :

$$\frac{dy}{y} + f(x)\, dx = 0$$

d'où, en désignant par C une constante arbitraire :

$$\log y + \int f(x)\, dx = \log C$$

et par conséquent :

$$y = C e^{-\int f(x) dx}$$

Cela posé, je remplace dans ce résultat la constante C par une fonction u de la variable indépendante, et je représente la solution de l'équation proposée avec un second membre $F(x)$ par :

$$y = u e^{-\int f(x) dx}$$

Or, il vient, en substituant :

$$\frac{du}{dx} e^{-\int f(x) dx} = F(x)$$

de sorte que la nouvelle inconnue se déterminant à l'aide de quadratures par la formule :

$$u = \int F(x) e^{\int f(x) dx} dx + C$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5PV.41

on obtient en définitive :

$$y = e^{-\int f(x)dx} \int F(x)\, e^{\int f(x)dx} dx + C\, e^{-\int f(x)dx}$$

Supposons, par exemple, $f(x)$ égale à une constante a, nous trouverons :

$$y = e^{-ax} \int F(x)\, e^{ax} dx + C\, e^{-ax}$$

pour solution de l'équation :

$$\frac{dy}{dx} + ay = F(x)$$

Supposons de plus que la fonction $F(x)$ soit un polynôme entier, nous aurons, comme on l'a établi dans le Cours de 1re année :

$$\int F(x)\, e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{F(x)}{a} - \frac{F'(x)}{a^2} + \frac{F''(x)}{a^3} - \cdots\cdots \right]$$

de sorte que la valeur de y se réduit à cette forme très-simple :

$$y = \mathcal{F}(x) + C\, e^{-ax}$$

en écrivant, pour abréger :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{F(x)}{a} - \frac{F'(x)}{a^2} + \frac{F''(x)}{a^3} - \cdots\cdots$$

Ce polynôme $\mathcal{F}(x)$ est d'ailleurs une des solutions de l'équation différentielle correspondant à $C = 0$; on a donc :

$$\mathcal{F}'(x) + a\,\mathcal{F}(x) = F(x)$$

Je remarquerai encore que sous forme d'intégrale, il faut écrire :

$$\mathcal{F}(x) = e^{-ax} \int_{-\infty}^{x} F(x)\, e^{ax} dx$$

lorsque la constante a est positive ; et dans le cas contraire :

$$\mathcal{F}(x) = e^{-ax} \int_{+\infty}^{x} F(x)\, e^{ax} dx$$

Ces expressions montrent que l'équation $F(x) = 0$, n'ayant que des racines imaginaires, ou des racines réelles d'un ordre de multiplicité pair, il en est de même de l'équation :

$$\mathcal{F}(x) = 0$$

car l'intégrale ayant tous ses éléments de même signe, la fonction $\mathcal{F}(x)$ gardera aussi le même signe, quelle que soit la variable.

II. Soient en second lieu les deux équations :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

$$y^2 + z^2 = \varphi^2(x)$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \chi^2(x)$$

où les seconds membres sont des fonctions quelconques. Comme la première est algébrique, on pourrait aisément obtenir une équation différentielle du premier ordre, ne renfermant qu'une seule inconnue, mais on ne tirerait aucun profit de ce calcul, et il convient d'opérer comme il suit :

Posons, en introduisant une fonction auxiliaire u :

$$y = \varphi(x) \sin u$$
$$z = \varphi(x) \cos u$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \sin u + \varphi(x) \cos u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x) \cos u - \varphi(x) \sin u \frac{du}{dx}$$

On en déduira en substituant :

$$\varphi'^2(x) + \varphi^2(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \chi^2(x)$$

de sorte que u se déterminera par une simple quadrature :

$$u = \int \frac{\sqrt{\chi^2(x) - \varphi'^2(x)}}{\varphi(x)} dx$$

et nous obtiendrons pour la solution cherchée, en mettant la constante arbitraire en évidence :

$$y = \varphi(x) \sin\left[C + \int \frac{\sqrt{\chi^2(x) - \varphi'^2(x)}}{\varphi(x)} dx\right]$$
$$z = \varphi(x) \cos\left[C + \int \frac{\sqrt{\chi^2(x) - \varphi'^2(x)}}{\varphi(x)} dx\right]$$

Les équations que nous venons de traiter s'offrent en géométrie, quand on cherche toutes les courbes dont le rayon de courbe est une fonction donnée $F(s)$ de l'arc s. En désignant en effet par x et y les coordonnées d'un point de la courbe exprimées en fonction de s, on aura :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$
$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{F^2(s)}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274.1

Or, nos formules deviendront :

$$\frac{dx}{ds} = \sin\left[C + \int \frac{ds}{F(s)}\right]$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos\left[C + \int \frac{ds}{F(s)}\right]$$

et l'on en conclura, en désignant par a et b deux nouvelles constantes arbitraires :

$$x = a + \int \sin\left[C + \int \frac{ds}{F(s)}\right] ds$$

$$y = b + \int \cos\left[C + \int \frac{ds}{F(s)}\right] ds$$

Dans le cas particulier où le rayon de courbure est une constante ρ, les intégrations s'effectuent immédiatement, et il vient :

$$x = a + \int \sin\left(C + \frac{s}{\rho}\right) ds = a - \rho \cos\left(C + \frac{s}{\rho}\right)$$

$$y = b + \int \cos\left(C + \frac{s}{\rho}\right) ds = b + \rho \sin\left(C + \frac{s}{\rho}\right)$$

ce qui conduit bien à l'équation d'un cercle de rayon ρ :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$$

III. C'est à l'aide de quadratures qu'on a obtenu dans les deux cas précédents l'intégrale de l'équation différentielle du premier ordre. Mais parfois on peut arriver à une relation simplement algébrique entre les variables et la constante arbitraire. En voici quelques exemples dont on appréciera bientôt l'importance.

Soit d'abord l'équation :

$$\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

elle donne, en désignant par a une constante :

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx + \int \sqrt{1-x^2}\,dy = a$$

Or, en intégrant par parties, on obtient :

$$\int \sqrt{1-y^2}\,dx = x\sqrt{1-y^2} - \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dy = y\sqrt{1-x^2} - \int \frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPF.J.1

d'où résulte, en ajoutant membre à membre :

$$a = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - \int xy\left(\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

ou simplement : $$a = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

l'intégrale disparaissant en vertu de l'équation proposée, qui revient à :

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Mais sous cette forme, elle conduit immédiatement à la solution suivante :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{const}^{e}$$

ou encore à celle-ci :

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{1-a^2}}$$

en déterminant la constante du second membre de manière à avoir pour $x=0$ $y=\alpha$. Or, la relation algébrique

$$a = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

donnant précisément $y=a$ quand on suppose $x=0$, établit entre x, y et a la même liaison que l'équation linéaire entre les intégrales. Et en effet, si l'on pose :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \xi \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \eta \qquad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{1-a^2}} = \alpha$$

c'est à dire : $$x = \sin\xi \qquad y = \sin\eta \qquad a = \sin\alpha$$

cette intégrale algébrique n'est autre que la formule fondamentale de la théorie des fonctions circulaires, savoir :

$$\sin\alpha = \sin(\xi+\eta) = \sin\xi\cos\eta + \sin\eta\cos\xi.$$

IV. Voici un autre exemple donné par Euler de l'intégrale algébrique complète d'une équation différentielle, exemple célèbre dans l'histoire de la science, comme ayant été l'origine de la théorie des fonctions elliptiques.

Soit entre les deux variables x et y, une relation algébrique quelconque :

$$F(x,y) = 0.$$

je remarque d'abord qu'ayant par la différentiation

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

si l'on remplace x par sa valeur en fonction de y dans $\frac{dF}{dx}$, et y par sa valeur en fonction de x dans $\frac{dF}{dy}$, on trouvera un résultat de cette forme :

$$dx\,\varphi(y) + \chi(x)\,dy = 0$$

ou bien :

$$\frac{dx}{\chi(x)} + \frac{dy}{\varphi(y)} = 0$$

Nous en conclurons comme tout à l'heure, que l'équation proposée $F(x,y) = 0$ donnant $y = a$ pour $x = 0$, elle aura pour conséquence l'équation transcendante :

$$\int_0^x \frac{dx}{\chi(x)} + \int_0^y \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_0^a \frac{dy}{\varphi(y)}$$

mais, toutefois, elle ne représentera l'intégrale complète de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\chi(x)} + \frac{dy}{\varphi(y)} = 0$$

qu'autant que la quantité a sera complètement arbitraire.

Appliquons la remarque précédente au cas où les calculs qu'elle suppose peuvent s'effectuer, c'est à dire quand $F(x,y)$ est du second degré par rapport aux deux variables. Soit donc :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x^2(ay^2 + a'y + a'') \\ &\quad + x(by^2 + b'y + b'') \\ &\quad + cy^2 + c'y + c'' \\ &= y^2(ax^2 + bx + c) \\ &\quad + y(a'x^2 + b'x + c') \\ &\quad + a''x^2 + b''x + c'' \end{aligned}$$

on aura immédiatement :

$$\frac{dF}{dx} = \varphi(y) = \sqrt{(by^2 + b'y + b'')^2 - 4(ay^2 + a'y + a'')(cy^2 + c'y + c'')}$$

$$\frac{dF}{dy} = \chi(x) = \sqrt{(a'x^2 + b'x + c')^2 - 4(ax^2 + bx + c)(a''x^2 + b''x + c'')}$$

et la relation transcendante à laquelle nous sommes ainsi amené, se rapporte aux intégrales elliptiques de première espèce.

Ceci établi, j'observe que le système :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5274.1

$$\begin{Bmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{Bmatrix}$$

étant supposé symétrique, et exprimé de cette manière par six nouvelles constantes, savoir :

$$\begin{Bmatrix} A, & B'', & B' \\ B'', & A', & B \\ B', & B', & A'' \end{Bmatrix}$$

nous aurons : $\varphi(x) = \chi(x)$, de sorte qu'en faisant :

$$\varphi(x) = \sqrt{\alpha x^4 - \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}$$

l'équation différentielle devient :

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}} + \frac{dy}{\sqrt{\alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon}} = 0$$

et ne contient, comme on voit, que cinq coefficients sous forme homogène. Or l'équation algébrique, en renfermant un de plus, qui pourra servir de constante arbitraire, se trouvera être l'intégrale complète, exactement comme la relation :

$$a = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

à l'égard de l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Je prends pour exemple :

$$F(x,y) = y^2(K^2a^2x^2 - 1) - 2y.\, x\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}$$
$$- x^2 + a^2$$

ce qui donnera :

$$\varphi(x) = \sqrt{4x^2(1-a^2)(1-K^2a^2) - 4(K^2a^2x^2-1)(-x^2+a^2)}$$
$$= 2a\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}$$

Par conséquent, la quantité a disparaît comme facteur commun dans les deux termes de l'équation différentielle qui devient simplement :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}} = 0$$

et l'équation proposée avec la constante arbitraire a en représente l'intégrale

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.)

complète. Je m'arrête un instant à ce résultat, en raison de son importance.

V. En résolvant par rapport à y, l'équation intégrale :

$$y^2(K^2a^2x^2-1)-2y.x\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}-x^2+a^2=0$$

on obtient ces deux valeurs :

$$y=\frac{-x\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}+a\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2}}{1-K^2a^2x^2}$$

$$y=\frac{-x\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}-a\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}{1-K^2a^2x^2}$$

La première donne, comme on voit : $y=a$ pour $x=0$, et en posant, pour abréger :

$$\Phi(x)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}}$$

elle correspond à la relation :

$$\Phi(x)+\Phi(y)=\Phi(a)$$

La seconde donnant $y=-a$ correspond à celle-ci :

$$\Phi(x)+\Phi(y)=\Phi(-a)=-\Phi(a)$$

de sorte qu'en faisant :

$$\Phi(x)=\xi \qquad \Phi(y)=\eta \qquad \Phi(a)=\alpha$$

c'est à dire :

$$x=\sin am\,\xi \qquad y=\sin am\,\eta \qquad a=\sin am\,\alpha$$

nous aurons d'une part :

$$\sin am\,\eta=\sin am(\alpha-\xi)=\frac{-\sin am\,\xi\cos am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha+\sin am\,\alpha\cos am\,\xi\,\Delta am\,\xi}{1-K^2\sin^2am\,\alpha\sin^2am\,\xi}$$

et de l'autre :

$$\sin am(\eta)=\sin am(-\alpha-\xi)=\frac{-\sin am\,\xi\cos am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha-\sin am\,\alpha\cos am\,\xi\,\Delta am\,\xi}{1-K^2\sin^2am\,\alpha\sin^2am\,\xi}.$$

ou bien :

$$\sin am(\alpha+\xi)=\frac{\sin am\,\xi\cos am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha+\sin am\,\alpha\cos am\,\xi\,\Delta am\,\xi}{1-K^2\sin^2am\,\alpha\sin^2am\,\xi}$$

Or, ces relations, et celles-ci qui en découlent, savoir :

$$\cos am(\alpha+\xi)=\frac{\cos am\,\alpha\cos am\,\xi-\sin am\,\alpha\,\Delta am\,\alpha\sin am\,\xi\,\Delta am\,\xi}{1-K^2\sin^2am\,\alpha\sin^2am\,\xi}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

$$\Delta\,\mathrm{am}(\alpha+\xi) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha\,\Delta\,\mathrm{am}\,\xi - K^2 \sin\mathrm{am}\,\alpha \cos\mathrm{am}\,\alpha \sin\mathrm{am}\,\xi \cos\mathrm{am}\,\xi}{1 - K^2 \sin^2\mathrm{am}\,\alpha \sin^2\mathrm{am}\,\xi}$$

ont été le point de départ et la base des découvertes d'Abel et de Jacobi sur la théorie des fonctions elliptiques. Il faut étudier dans les écrits des deux analystes l'enchaînement de leurs idées, et cette succession de résultats extraordinaires qui ont illustré leur nom, et ont eu sur la direction même de la science à notre époque une influence considérable. (*) Mais à Euler appartient l'honneur d'avoir ouvert une voie si féconde, et l'importance que l'immortel géomètre attribue à sa découverte montre qu'il en avait bien pressenti toute la portée. On en a le témoignage dans l'expression de son étonnement et de son admiration, lorsque Lagrange parvint le premier par une voie directe au même résultat. Voici ses propres paroles :

« Postquam diu et multum in persantanda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ « desudassem, atque inprimis in methodum directam, quae viâ facili ac planâ « ad ejus integrale perduceret, nequaquam inquisivissem; penitus obstupui, cum mihi « nunciaretur, in volumine quarto Miscellaneorum Taurinensium ab illustri de Lagrange, « talem methodum esse expositam, &c. (Institutions de Calcul Intégral, tome IV, page 465.)

Nous allons donner cette méthode avec la simplification qu'y a introduite Mr. Richelot, comme dernier exemple d'intégration pour les équations différentielles du première ordre.

V. Opérant au fond sur les sinus d'amplitude, Lagrange pose, en introduisant une nouvelle variable :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}} = d\xi$$

de sorte qu'on ait :

$$\frac{dx}{d\xi} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)}$$

$$\frac{dy}{d\xi} = \sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}$$

Soit ensuite :

$$X = x + y$$

$$Y = x - y$$

(*) Legendre, qui à tant de titres on regarde comme le fondateur de la théorie des fonctions elliptiques, a, en effet, beaucoup facilité la voie à ses successeurs; c'est le fait de la double périodicité de la fonction inverse, immédiatement découvert par Abel et Jacobi, qui lui a fait défaut, et a imprimé à son traité des fonctions elliptiques, un caractère analytique si restreint.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 (.)

ce qui donne :

$$\frac{dX}{d\xi} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)} + \sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}$$

$$\frac{dY}{d\xi} = \sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)} - \sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}$$

et, par conséquent :

$$\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi} = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)} + \sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}}{x-y}$$

En différentiant de nouveau par rapport à ξ, les radicaux disparaissent, et il vient :

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi}\right) = \frac{\left[-(1+K^2)(x+y) + 2K^2(x^3+y^3)\right](x-y) - \left[(1-x^2)(1-K^2x^2) - (1-y^2)(1-K^2y^2)\right]}{(x-y)^2}$$

ce qui se réduit à la relation très-simple :

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi}\right) = K^2(x^2-y^2) = K^2XY$$

Multiplions maintenant les deux membres par le facteur : $\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi}$, nous en conclurons :

$$\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi}\right) = K^2\ \frac{X\,dX}{d\xi}$$

et, en intégrant :

$$\left(\frac{1}{Y}\ \frac{dX}{d\xi}\right)^2 = K^2X^2 + C$$

Cette équation, en y comprenant X et Y par leurs valeurs en x et y, donne l'intégrale cherchée, savoir :

$$\left[\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-K^2x^2)} + \sqrt{(1-y^2)(1-K^2y^2)}}{x-y}\right]^2 = K^2(x+y)^2 + C$$

et si l'on veut obtenir $y = a$ pour $x = 0$, la constante C devra être aussi déterminée, savoir :

$$C = \left[\frac{1+\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}}{a}\right]^2 - K^2a^2 = \frac{2-(1+K^2)a^2 + 2\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}}{a^2}$$

Cette méthode de Lagrange a une portée beaucoup plus étendue que celle d'Euler, essentiellement limitée à l'intégration de l'équation qui vient de nous occuper. Jacobi et M. Richelot ont montré en effet qu'elle s'applique à des transcendantes plus générales que les fonctions elliptiques, et qui sont l'objet du théorème célèbre d'Abel dont je vais dire quelques mots.

VI. Soit $\varphi(x)$ un polynôme du cinquième degré par exemple

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.PV.41

en x ; il est alors impossible d'intégrer algébriquement l'équation :

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = 0$$

mais les intégrales complètes, et sous forme algébrique du système des deux équations simultanées :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \dfrac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + \dfrac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} = 0 \\[2ex] \dfrac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \dfrac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}} + \dfrac{z\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}} = 0 \end{cases}$$

s'obtiennent comme il suit :

Ayant déterminé les constantes a, b, c, de manière que le polynôme suivant du cinquième degré en T :

$$\varphi(T) - (aT^2 + bT + c)^2$$

admette pour racines $T = x$, $T = y$, $T = z$, je nomme T_0 et T_1 les racines de l'équation du second degré :

$$\frac{\varphi(T) - (aT^2 + bT + c)^2}{(T-x)(T-y)(T-z)} = 0$$

Cela étant, les intégrales du système proposé, avec deux constantes arbitraires C et C', seront :

$$\begin{cases} T_0 = C \\ T_1 = C' \end{cases}$$

Tel est, dans un cas particulier auquel s'applique la méthode de Lagrange, le résultat découvert par Abel, et dont la démonstration se placerait naturellement à cette partie du Cours. C'est en partant de ce théorème qu'on établit à l'égard des fonctions de deux variables définies par les équations :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = \xi$$

$$\int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = \eta$$

la proposition suivante : Posant :

$$x = \lambda(\xi, \eta) \qquad y = \lambda_1(\xi, \eta)$$

les fonctions :

$$\lambda(\xi + \xi', \eta + \eta'), \quad \lambda_1(\xi + \xi', \eta + \eta')$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

s'expriment algébriquement au moyen des quantités :

$$\lambda(\xi, \eta) \,, \qquad \lambda_1(\xi, \eta)$$
$$\lambda(\xi', \eta') \,, \qquad \lambda_1(\xi', \eta)$$

Cette propriété rend manifeste l'analogie de ces fonctions de deux variables dont il a déjà été question précédemment (Voyez p. 116) avec les simples transcendantes circulaires et elliptiques. Mais je ne m'étendrai point davantage sur ce sujet, et je terminerai la théorie des équations différentielles du premier ordre, en donnant une construction géométrique simple de l'intégrale d'Euler pour l'équation :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

VII. Je reprends à cet effet l'équation symétrique en x et en y :

$$F(x, y) = 0$$

considérée au § IV, et dans laquelle on a :

$$\begin{aligned} F(x, y) = {} & x^2(Ay^2 + B''y + B') \\ & + x(B''y^2 + A'y + B) \\ & + B'y^2 + By + A'' \end{aligned}$$

Cela posé, je remarque qu'en faisant :

$$y^2 = X \qquad y = Y,$$

et

$$x^2 = X' \qquad x = Y',$$

cette équation devient la polaire d'un point X', Y', par rapport à la conique

$$AX^2 + A'Y^2 + A'' + 2BY + 2B'X + 2B''XY = 0$$

Or, ayant :

$$Y^2 = X$$
$$Y'^2 = X'$$

à toute valeur de la variable x, correspondra un point déterminé $X'Y'$, sur la parabole :

$$Y^2 = X$$

et il est clair qu'aux deux racines de l'équation du second degré en y :

$$F(x, y) = 0$$

correspondront les points d'intersection de la polaire par rapport à la même parabole.

La conique que nous envisagerons, est, dans le cas de l'équation d'Euler :

$$F(x, y) = y^2(k^2a^2x^2 - 1) - 2yx\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)} - x^2 + a^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d 1

l'hyperbole :

$$K^2 a^2 X^2 - 2\sqrt{(1-a^2)(1-K^2a^2)}\,Y^2 - 2X + a^2 = 0$$

ainsi, en faisant : $a = \sin am\,\alpha$, et prenant sur la parabole le point : $X' = \sin^2 am\,\xi$, $Y' = \sin am\,\xi$, la construction donnera d'une part les valeurs de :

$$X = \sin^2 am(\alpha - \xi) \qquad Y = \sin am(\alpha - \xi)$$

et de l'autre, celle des quantités :

$$X = \sin^2 am(\alpha + \xi) \qquad Y = -\sin am(\alpha + \xi)$$

Mais on peut aller plus loin, et déduire du point (X', Y') que je représente par A, deux séries indéfinies de points que je représente par :

$$A_1, A_2, A_3, \mathcal{E}^{ca}$$

et

$$A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \mathcal{E}^{ca}$$

tous étant situés sur la parabole, et tels que l'un quelconque d'entre eux, A_{n-1} soit par rapport à la conique le pôle de la droite qui joint A_{n-1} et A_{n+1}. Cela étant, les coordonnées du point A_n seront :

$$X_n = \sin^2 am(\xi + n\alpha) \qquad Y_n = (-1)^n \sin am(\xi + n\alpha)$$

Equations différentielles d'ordre quelconque.

Nous savons déjà que toute équation différentielle d'ordre n admet une solution, au moins dans une certaine étendue des valeurs de la variable, et que la solution la plus générale est donnée par une fonction renfermant n constantes arbitraires qui sont les valeurs de cette fonction et de ses $n-1$ premières dérivées pour une valeur quelconque $x = x_0$ de la variable. Cette proposition est fondamentale pour ce qui va suivre, et je vais immédiatement en montrer quelques applications.

I. Soit proposé, par exemple, d'obtenir en coordonnées rectangulaires, l'équation de toutes les courbes dont le rayon de courbure a une valeur constante ρ. On sait d'avance qu'un cercle de rayon ρ ayant son centre en un point quelconque satisfait à la condition posée qui conduit à l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \rho$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79.1.1

L'expression :

$$y = b + \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2}$$

est donc une solution, et comme on peut évidemment disposer des constantes a et b de manière que y et $\frac{dy}{dx}$ prennent des valeurs arbitraires pour $x = x_0$, elle est la solution générale. Par conséquent, on obtient sans calcul cette conséquence à laquelle nous étions déjà arrivés (page 135), qu'il n'y a point d'autre courbe que le cercle dont le rayon de courbure soit constant.

Soit proposée en second lieu la condition que le rayon de courbure soit en chaque point proportionnel au cube de la normale. La longueur de la normale étant : $y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. (Cours de 1re année, page 57)

on a, en désignant par K une constante, l'équation du second ordre :

$$K \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = y^3\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

ou bien, en simplifiant :

$$K = y^3 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Or, le cercle $\qquad x^2 + y^2 = K$

satisfait encore à la question, le rayon de courbure et la normale ayant pour valeur commune $\sqrt{K}$, si on en déduit la solution générale comme il suit :

Soit : $\qquad x' = ax + b$

nous aurons :

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^2\frac{d^2y}{dx'^2}$$

d'où cette équation transformée :

$$K = a^2y^3\frac{d^2y}{dx'^2}$$

qu'on ramène à la proposée en y remplaçant y par $\frac{y}{\sqrt{a}}$. Il s'en suit que de la solution :

$$y = \sqrt{K - x},$$

on en conclut une autre :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{K - (ax+b)^2}$$

contenant deux constantes arbitraires a et b, et qui est par conséquent la solution générale. Mais voici un cas moins restreint, dans lequel la solution générale se déduit encore d'une solution particulière quelconque :

II. Soit d'abord le système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 = F(x) \\ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = F_1(x) \\ u^2 + v^2 + w^2 = F_2(x) \end{cases}$$

J'observe que l'élimination de v et w par exemple, donnera une équation différentielle du 3e ordre en u, car en différentiant une fois la première équation, deux fois la seconde et trois fois la dernière, nous fournirons entre les huit quantités :

$$v, \quad \frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \frac{d^3v}{dx^3}$$

$$w, \quad \frac{dw}{dx}, \quad \frac{d^2w}{dx^2}, \quad \frac{d^3w}{dx^3}$$

neuf relations purement algébriques, et d'où on tirera d'une part cette équation du 3e ordre en u, et de l'autre les valeurs de v et w en fonction rationnelle de u et de ses dérivées. L'équation du 3e ordre conduisant pour l'expression générale de u à une fonction qui renferme trois constantes arbitraires, ces mêmes constantes figureront dans les quantités v et w là, elles s'introduisent immédiatement et sous une forme simple, comme on va voir, dès qu'on donne une solution particulière quelconque, savoir

$$u = U, \qquad v = V, \qquad w = W$$

Faisons en effet :

$$\begin{cases} u = aU + a'V + a''W \\ v = bU + b'V + b''W \\ w = cU + c'V + c''W \end{cases}$$

les neuf coefficients étant tels qu'on ait identiquement :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

$$U^2+V^2+W^2 = u^2+v^2+w^2$$

et s'exprimant dès lors au moyen de trois angles arbitraires par les formules d'Euler pour la transformation des coordonnées rectangulaires dans l'espace, en d'autres également rectangulaires. On aura ainsi

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = a\dfrac{dU}{dx} + a'\dfrac{dV}{dx} + a''\dfrac{dW}{dx} \\[2ex] \dfrac{dv}{dx} = b\dfrac{dU}{dx} + b'\dfrac{dV}{dx} + b''\dfrac{dW}{dx} \\[2ex] \dfrac{dw}{dx} = c\dfrac{dU}{dx} + c'\dfrac{dV}{dx} + c''\dfrac{dW}{dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = a\dfrac{d^2U}{dx^2} + a'\dfrac{d^2V}{dx^2} + a''\dfrac{d^2W}{dx^2} \\[2ex] \dfrac{d^2v}{dx^2} = b\dfrac{d^2U}{dx^2} + b'\dfrac{d^2V}{dx^2} + b''\dfrac{d^2W}{dx^2} \\[2ex] \dfrac{d^2w}{dx^2} = c\dfrac{d^2U}{dx^2} + c'\dfrac{d^2V}{dx^2} + c''\dfrac{d^2W}{dx^2} \end{cases}$$

et par suite :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 = \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2W}{dx^2}\right)^2$$

Ainsi la solution particulière dont nous sommes partis, en donne une autre contenant trois constantes arbitraires, et qui représente par conséquent la solution générale. Le résultat a une conséquence géométrique que voici :

Soit proposé de déterminer une courbe dans l'espace, connaissant en fonction de l'arc s le rayon de courbure R et le rayon de torsion r. On aura, si l'on désigne les coordonnées par :

$$x = \varphi(s) \qquad y = \psi(s) \qquad z = \chi(s)$$

ces trois équations (Cours de 1ère Année, page 90) :

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) + \chi'^2(s) = 1$$

$$\varphi''^2(s) + \psi''^2(s) + \chi''^2(s) = \frac{1}{R^2}$$

$$\varphi'''^2(s) + \psi'''^2(s) + \chi'''^2(s) = \frac{1}{R^2 r^2} + \frac{1}{R^2} + \left[\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds}\right]^2$$

Elles reviennent à celles que nous venons de traiter en posant :

$$\varphi'(s) = u \qquad \psi'(s) = v \qquad \chi'(s) = w$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPF-01

et il en résulte que si l'on connaît une courbe particulière quelconque répondant à la question, savoir :

$$x = \Phi(s) \qquad y = \Psi(s) \qquad z = X(s)$$

et par suite, une solution des équations en u, v, w :

$$\Phi'(s) = U, \qquad \Psi'(s) = V \qquad X'(s) = W$$

la solution générale sera :

$$u = \varphi'(s) = a\,\Phi'(s) + a'\Psi'(s) + a''X'(s)$$
$$v = \psi'(s) = b\,\Phi'(s) + b'\Psi'(s) + b''X'(s)$$
$$w = \chi'(s) = c\,\Phi'(s) + c'\Psi'(s) + c''X'(s)$$

En intégrant par rapport à s et désignant par c, c', c'' trois constantes, nous en conclurons,

$$\varphi(s) = C + a\,\Phi(s) + a'\Psi(s) + a''X(s)$$
$$\psi(s) = C' + b\,\Phi(s) + b'\Psi(s) + b''X(s)$$
$$\chi(s) = C'' + c\,\Phi(s) + c'\Psi(s) + c''X(s)$$

Or, ces formules montrent que toutes les courbes cherchées ne sont que la courbe donnée placée d'une manière quelconque par rapport aux axes coordonnés. C'est la conséquence que nous voulions obtenir, et par là en particulier, se trouve établi sans calcul le théorème démontré pour la première fois par Mr Puiseux, que l'hélice est la seule courbe ayant en chaque point la même courbure et la même torsion. (*)

Les considérations précédentes s'étendent d'elles-mêmes à des équations de même forme, à un nombre quelconque d'inconnues : $\sum_{n=0}^{n=K} \left(\frac{d^i u_n}{dx^i}\right)^2 = F_i(x)$ l'indice i prenant successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots K$. On peut aussi les appliquer à ces relatives :

$$\Theta\left(\frac{du}{dx^2}, \frac{d^2v}{dx^2}, \frac{d^2w}{dx^2}\right) = F(x)$$
$$\Theta\left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dy}\right) = F_1(x)$$
$$\Theta(u, v, w) = F_2(x)$$

(*) Voyez dans l'application de l'Analyse à la Géométrie de Monge, page 519, la méthode par laquelle M. Serret a traité la même question et démontré analytiquement le beau théorème de M. Bertrand, que l'hélice tracée sur un cylindre quelconque est la seule courbe pour laquelle le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion soit constant.

Document numérisé par la Bibliothèque nationale de France et Mario Carlo - JPMC - Cote : 5214.1

$\Theta(u, v, w)$ étant un polynome du second degré à coefficients constants en u, v, w, mais il suffit d'avoir fait ressortir par les exemples ci-dessus le rôle et l'importance du théorème sur le nombre des constantes qui entrent dans la solution la plus générale d'une équation différentielle).

Equations différentielles linéaires.

I. C'est à Euler qu'est due la méthode suivante d'intégration dans le cas où, les coefficients étant supposés constants, l'équation à la forme :

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \gamma \frac{d^2 y}{dx^2} + \cdots\cdots + \lambda \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

Posons $y = e^{ax}$, d'où : $\frac{dy}{dx} = a e^{ax}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = a^2 e^{ax}, \ldots\ldots$

$\frac{d^n y}{dx^n} = a^n e^{ax}$, en substituant, et après avoir divisé par l'exponentielle e^{ax} on obtiendra la condition :

$$\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \cdots\cdots + \lambda a^n = 0$$

Nommant donc : $a, b, \ldots\ldots K$, les n racines de l'équation :

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \cdots\cdots + \lambda z^n = 0$$

on en conclura autant de solutions particulières :

$$y_1 = e^{ax}, \quad y_2 = e^{bx}, \ldots\ldots \quad y_n = e^{Kx}$$

Or, la solution générale en résulte immédiatement sous cette forme :

$$y = A e^{ax} + B e^{bx} + \cdots\cdots + K e^{Kx}$$

$A, B, \ldots\ldots K$ étant n constantes arbitraires. En effet on a, à l'égard des équations différentielles linéaires sans second membre, à coefficients constants ou variables, cette importante propriété, qu'en désignant par y_1 et y_2 deux solutions particulières, la combinaison :

$$y = A y_1 + B y_2$$

où figure deux constantes arbitraires, est encore une solution. C'est ce que l'on tire immédiatement des égalités

$$\alpha y_1 + \beta \frac{dy_1}{dx} + \gamma \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \cdots\cdots + \lambda \frac{d^n y_1}{dx^n} = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

$$\alpha y_2 + \beta \frac{dy_2}{dx} + \gamma \frac{d^2 y_2}{dx^2} + \cdots\cdots + \lambda \frac{d^n y_2}{dx^n} = 0$$

et les ajoutant membre à membre après avoir multiplié la première par A et la seconde par B, on aura ainsi :

$$\alpha (A y_1 + B y_2) + \beta \frac{d(A y_1 + B y_2)}{dx} + \cdots\cdots + \lambda \frac{d^n (A y_1 + B y_2)}{dx^n} = 0$$

En appliquant plusieurs fois de suite cette proposition, nous conclurons de proche en proche que la somme d'un nombre quelconque de solutions multipliées respectivement par des constantes arbitraires, satisfait encore à l'équation proposée. Nous sommes ainsi assurés que l'expression :

$$y = A e^{ax} + B e^{bx} + \cdots\cdots + K e^{Kx}$$

représente une solution, quelles que soient les constantes A, B, ... K, et nous aurons en toute rigueur démontré qu'elle est l'intégrale générale, en faisant voir qu'elles peuvent se déterminer par ces conditions où $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots \mathcal{K}$ sont quelconques, savoir :

$$y = \mathcal{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \mathcal{B}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \mathcal{K}$$

la variable x ayant une valeur déterminée arbitraire.

Prenons, pour plus de simplicité, cette valeur égale à zéro, et on obtiendra les n équations du premier degré en A, B ..... K :

$$A + B + \cdots\cdots + K = \mathcal{A}$$

$$Aa + Bb + \cdots\cdots + Kk = \mathcal{B}$$

$$Aa^2 + Bb^2 + \cdots\cdots + Kk^2 = \mathcal{C}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + \cdots\cdots + Kk^{n-1} = \mathcal{K}$$

qu'on résout en effet comme il suit.

Posons pour un instant :

$$(z-b)(z-c)\ldots(z-k) = p + qz + rz^2 + \cdots\cdots + z^{n-1}$$

et ajoutons les membre après les avoir respectivement multipliées par les coefficients $p, q, r \ldots 1$, de ce polynôme, on en conclura :

$$A(p + qa + ra^2 + \cdots\cdots + a^{n-1})$$
$$+ B(p + qb + rb^2 + \cdots\cdots + b^{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : 5291.d.1

$$+ K(p + qK + rK^2 + \dots\dots + K^{n-1})$$
$$= \mathcal{A}p + \mathcal{B}q + \dots\dots\dots\dots + \mathcal{K}$$

Or, d'après la nature même du polynome $p + qz + rz^2 + \dots\dots + z^{n-1}$, les coefficients de $B, C, \dots\dots K$, sont nuls, le coefficient de A a pour valeur $(a-b)(a-c)\dots\dots(a-K)$, de sorte qu'on obtient :

$$A = \frac{\mathcal{A}p + \mathcal{B}q + \dots\dots\dots + \mathcal{K}}{(a-b)(a-c)\dots(a-K)}$$

et il est évident que les autres inconnues se trouveraient toutes de même.

II. Soit par exemple l'équation :

$$n^2 y + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

n désignant une quantité réelle. Nous aurons la relation :

$$n^2 + z^2 = 0.$$

d'où : $z = \pm n\sqrt{-1}$, et par conséquent :

$$y = A e^{nx\sqrt{-1}} + B e^{-nx\sqrt{-1}}$$

expression qu'on peut mettre sous cette autre forme :

$$y = A(\cos nx + \sqrt{-1}\sin nx) + B(\cos nx - \sqrt{-1}\sin nx)$$
$$= (A+B)\cos nx + \sqrt{-1}(A-B)\sin nx$$

Posons : $\quad A + B = P \qquad \sqrt{-1}(A-B) = Q$

et nous aurons ce résultat où P et Q remplacent A et B comme constantes arbitraires, savoir :

$$y = P\cos nx + Q\sin nx$$

Or, en général, si en supposant réels les coefficients de l'équation différentielle proposée, il arrive que l'équation en z ait des racines imaginaires, ces racines seront conjuguées deux à deux, et en faisant par exemple :

$$a = m + n\sqrt{-1} \qquad\qquad b = m - n\sqrt{-1}$$

on pourra toujours donner une forme explicitement réelle à la partie de l'intégrale représentée par : $Ae^{ax} + Be^{bx}$. En effet, nous aurons d'abord :

$$Ae^{ax} + Be^{bx} = e^{mx}(Ae^{nx\sqrt{-1}} + Be^{-nx\sqrt{-1}})$$

et par conséquent d'après ce qu'on vient d'établir :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.PI.J.1

$$Ae^{ax}+Be^{bx}=e^{nx}(P\cos nx+Q\sin nx)$$

III. L'intégrale générale

$$y=Ae^{ax}+Be^{bx}+\dots\dots+Ke^{Kx}$$

de l'équation différentielle :

$$\alpha y+\beta\frac{dy}{dx}+\gamma\frac{d^2y}{dx^2}+\dots\dots+\lambda\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

présente un cas d'exception lorsque deux ou plusieurs des quantités $a, b, \dots K$ sont égales entre elles. Si l'on suppose par exemple $a=b$ le nombre des constantes arbitraires se trouve réduit à $n-1$, puisque A et B ne figurent plus dans l'expression de y que par leur somme $A+B$. C'est qu'en effet la forme analytique à laquelle nous sommes parvenus subit alors une modification importante que donne aisément le procédé suivant dû à D'Alembert.

Concevons qu'on altère infiniment peu les coefficients de l'équation proposée de telle sorte que b, au lieu d'être égal à a, en diffère d'une quantité infiniment petite δ. Des deux solutions e^{ax}, $e^{(a+\delta)x}$ on tirera alors celle-là :

$$Ae^{ax}+Be^{(a+\delta)x}=e^{ax}(A+Be^{\delta x})$$

et en développant en série l'exponentielle $e^{\delta x}$,

$$Ae^{ax}+Be^{(a+\delta)x}=e^{ax}\left[A+B+B\delta x+\frac{B\delta^2x^2}{1.2}+\dots\right]$$

Or, on peut faire, en changeant de constantes arbitraires :

$$A+B=P \qquad B\delta=Q$$

ce qui donnera :

$$Ae^{ax}+Be^{(a+\delta)x}=e^{ax}\left(P+Qx+\frac{Q\delta x^2}{1.2}+\dots\right)$$

d'où on conclut à la limite pour $\delta=0$ cette nouvelle forme de la solution avec deux constantes arbitraires P et Q, savoir :

$$Pe^{ax}+Qxe^{ax}$$

Le même procédé donnerait dans le cas des trois racines égales à a l'expression :

$$Pe^{ax}+Qxe^{ax}+Rx^2e^{ax}$$

mais voici un autre moyen d'arriver à ces résultats.

Remplaçons dans l'équation proposée :

$$\alpha y+\beta\frac{dy}{dx}+\gamma\frac{d^2y}{dx}+\dots\dots+\lambda\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

la fonction y par une autre inconnue z en posant :

$$y = e^{\omega x} z$$

ω étant constante. On aura successivement :

$$\frac{dy}{dx} = e^{\omega x}\left(\omega z + \frac{dz}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\omega x}\left(\omega^2 z + 2\omega\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\right)$$

. . . . . .

de sorte qu'on peut poser :

$$\alpha y + \beta\frac{dy}{dx} + \dots\dots + \lambda\frac{d^n y}{dx^n} = \left(P z + Q\frac{dz}{dx} + \dots\dots + S\frac{d^n z}{dx^n}\right)e^{\omega x}$$

en désignant par $P, Q \dots S$ des coefficients constants. Or, on les détermine immédiatement par cette hypothèse particulière :

$$z = e^{hx}$$

d'où résulte :

$$y = e^{(\omega + h)x}$$

et l'équation précédente devient, en supprimant dans les deux membres le facteur $e^{(\omega+h)x}$:

$$\alpha + \beta(\omega + h) + \dots\dots + \lambda(\omega + h)^n = P + Qh + \dots\dots + Sh^n$$

de sorte que, si l'on fait pour un moment :

$$F(\omega) = \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \dots\dots + \lambda\omega^n$$

on aura :

$$P = F(\omega) \qquad Q = \frac{F'(\omega)}{1} \dots\dots \qquad S = \frac{F^{(n)}(\omega)}{1.2\dots n}$$

La transformée en z étant ainsi :

$$F(\omega)z + \frac{F'(\omega)}{1}\frac{dz}{dx} + \frac{F''(\omega)}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2} + \dots\dots + \frac{F^{(n)}(\omega)}{1.2\dots n}\frac{d^n z}{dx^n} = 0$$

on voit que si $\omega = a$ est une racine simple de l'équation $F(\omega) = 0$, elle se vérifie en faisant $\omega = a$ et $z = \text{const}^e = A$, d'où résulte :

$$y = A e^{ax}$$

Si a est une racine double satisfaisant aux deux conditions :

$$F(\omega) = 0 \qquad F'(\omega) = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.1

il suffit de poser $\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$, c'est à dire $z = P + Qx$, ce qui donne :

$$y = Pe^{ax} + Qxe^{ax}$$

et en général $\omega = a$ étant une racine multiple d'ordre i, l'équation sera vérifiée si l'on fait : $\frac{d^i z}{dx^i} = 0$, ce qui conduit pour z à un polynome à coefficients quelconques de degré $i-1$ en x. On a donc dans ce cas :

$$y = e^{ax}\left(P + Qx + Rx^2 + \ldots\ldots Tx^{i-1}\right)$$

IV. — Le résultat que nous venons d'établir s'applique à l'intégration de l'équation :

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \gamma \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots\ldots + \lambda \frac{d^n y}{dx^n} = F(x)$$

$F(x)$ étant un polynome entier quelconque dont je représenterai le degré par $i-1$. Si l'on prend en effet la dérivée d'ordre i des deux membres, on obtient :

$$\alpha \frac{d^i y}{dx^i} + \beta \frac{d^{i+1} y}{dx^{i+1}} + \gamma \frac{d^{i+2} y}{dx^{i+2}} + \ldots\ldots + \lambda \frac{d^{n+i} y}{dx^{n+i}} = 0$$

et par suite pour l'équation en z :

$$\alpha z^i + \beta z^{i+1} + \gamma z^{i+2} + \ldots\ldots + \lambda z^{n+i} = 0$$

ou bien

$$z^i\left(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots\ldots + \lambda z^n\right) = 0$$

Ayant donc d'une part les racines $z = a, b \ldots K$, on en conclura dans la valeur de y une première partie, savoir :

$$u = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots\ldots + Ke^{Kx}$$

Mais en outre, il existe une racine multiple d'ordre i égale à zéro à laquelle correspondra par conséquent un polynôme entier $\mathcal{F}(x)$ de degré $i-1$ (x) à coefficients arbitraires, de sorte que l'intégrale de l'équation proposée sera renfermée dans l'expression :

$$y = u + \mathcal{F}(x)$$

Or, la première partie, $y = u$ est la solution de l'équation sans second membre, de sorte que le polynôme $\mathcal{F}(x)$ satisfait isolément à l'équation avec second membre, et doit être entièrement déterminée par cette condition. Nous sommes ainsi amenés à poser, en employant la méthode des coefficients indéterminés :

(x) Si une ou plusieurs des racines a, b, &c., étaient elles-mêmes nulles, $\mathcal{F}(x)$ serait du degré $i, i+1$, &c. —

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5291

$$\mathcal{F}(x) = P + Qx + Rx^2 + \ldots\ldots + Tx^{i-1}$$

puis à substituer ce qui conduira, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, à i équations du premier degré entre les inconnues $P, Q, R \ldots\ldots T$. Mais on peut opérer plus simplement comme il suit :

Considérons cette identité que donne aisément l'opération élémentaire de la division algébrique :

$$\frac{1}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \lambda z^n} = \alpha_0 + \beta_0 z + \gamma_0 z^2 + \ldots\ldots + \mu_0 z^{i-2} + \nu z^{i-1} + \ldots\ldots$$

on en tire :

$$1 = (\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots\ldots)(\alpha_0 + \beta_0 z + \gamma z^2 + \ldots\ldots)$$

et par conséquent les relations suivantes :

$$1 = \alpha\alpha_0$$

$$0 = \alpha\beta_0 + \beta\alpha_0$$

$$0 = \alpha\gamma_0 + \beta\beta_0 + \gamma\alpha_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont la loi est manifeste. Cela posé, je dis qu'on aura :

$$\mathcal{F}(x) = \alpha_0 F(x) + \beta_0 F'(x) + \gamma_0 F''(x) + \ldots\ldots + \nu_0 F^{(i-1)}(x)$$

car en substituant dans l'équation différentielle, on trouve pour le premier membre :

$$\alpha\left[\alpha_0 F(x) + \beta_0 F'(x) + \gamma_0 F''(x) + \ldots\ldots + \nu_0 F^{(i-1)}(x)\right]$$
$$+ \beta\left[\alpha_0 F'(x) + \beta_0 F''(x) + \ldots\ldots + \mu_0 F^{(i-1)}(x)\right]$$
$$\ldots\ldots + \gamma\left[\alpha_0 F''(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

ou encore :

$$\alpha\alpha_0 F(x) + (\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) F'(x) + (\alpha\gamma_0 + \beta\beta_0 + \gamma\alpha_0) F''(x) + \ldots\ldots$$

ce qui, d'après les relations posées, se réduit identiquement à $F(x)$.

Soit, par exemple, l'équation déjà traitée (page 133)

$$\alpha y + \frac{dy}{dx} = F(x)$$

nous poserons :

$$\frac{1}{\alpha + z} = \frac{1}{\alpha} - \frac{z}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^3} - \frac{z^3}{\alpha^4} + \ldots\ldots$$

d'où, par suite :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{F(x)}{\alpha} - \frac{F'(x)}{\alpha^2} + \frac{F''(x)}{\alpha^3} - \ldots\ldots$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.PH.J.

comme on l'a obtenu par une autre méthode.

V. Soit encore l'équation :

$$dy + \beta \frac{dy}{dx} + \cdots\cdots + \lambda \frac{d^n y}{dx^n} = e^{\omega x} F(x)$$

on la ramènera à la précédente en posant comme au § III.

$$y = e^{\omega x} z$$

cette transformation ayant pour effet de faire disparaître l'exponentielle comme facteur commun dans les deux membres. Il s'ensuit que l'équation proposée admet une solution de la forme :

$$y = e^{\omega x} \mathcal{F}(x)$$

$\mathcal{F}(x)$ étant un polynome entier en x du même degré en général que $F(x)$; de sorte que si l'on fait :

$$y = e^{\omega x} \mathcal{F}(x) + u$$

on aura simplement :

$$\alpha u + \beta \frac{du}{dx} + \cdots\cdots + \lambda \frac{d^n u}{dx^n} = 0$$

Je remarque enfin que les solutions correspondantes à ces diverses valeurs du second membre, savoir :

$$e^{\omega_1 x} F_1(x), \quad e^{\omega_2 x} F_2(x) \text{ &c.}$$

étant respectivement représentées par :

$$e^{\omega_1 x} \mathcal{F}_1(x), \quad e^{\omega_2 x} \mathcal{F}_2(x), \text{ &c.}$$

la somme :

$$e^{\omega_1 x} \mathcal{F}_1(x) + e^{\omega_2 x} \mathcal{F}_2(x)$$

sera la solution correspondant à la valeur du second membre, représentée par la somme :

$$e^{\omega_1 x} F(x) + e^{\omega_2 x} F_2(x)$$

Nous nous arrêterons, dans la question des équations linéaires à coefficients constants, à ces résultats, qui, tout à l'heure, seront rattachés à d'autres plus généraux concernant les équations linéaires à coefficients variables, dont nous allons nous occuper.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code : SPI.d.1

I. Je considère d'abord les équations sans second membre, de la forme :

$$(A)\quad Gy + H\frac{dy}{dx} + K\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots\cdots\cdots + R\frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

$G, H, K, \ldots\ldots R$ étant des fonctions quelconques de la variable indépendante, et j'établirai à leur égard ces deux propositions.

1° Étant donnée une solution quelconque $y = y_1$, je dis qu'on peut ramener la proposée à une autre équation également linéaire, sans second membre, et d'ordre $n-1$.

J'observe en effet que l'expression $y = Ay_1$ sera aussi une solution, (si on suppose) A une constante ; cela étant, je fais :

$$y = zy_1$$

en remplaçant par une nouvelle inconnue cette constante. On en tire successivement :

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = z\frac{d^2y_1}{dx^2} + z\frac{dz}{dx}\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d^2z}{dx^2}$$

. . . . . .

de sorte que l'équation transformée en z sera linéaire, d'ordre n, mais manquera du terme en z dont le coefficient :

$$Gy_1 + H\frac{dy_1}{dx} + K\frac{d^2y_1}{dx^2} + \cdots\cdots + R\frac{d^ny_1}{dx^n}$$

est nul par hypothèse. La réduction annoncée s'obtient ainsi immédiatement en posant :

$$\frac{dz}{dx} = u.$$

et il est aisé de voir qu'en se donnant une seconde solution $y = y_2$ de la proposée, on vérifierait par cette valeur :

$$u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

cette équation en u qui serait donc réductible à l'ordre $n-2$. Continuant de proche en proche le même raisonnement, nous conclurons, qu'étant donné un nombre quelconque i de solution de l'équation en y, on pourra la ramener à une équation linéaire sans second membre, d'ordre $n-i$, pourvu que dans les transformations opérées successivement, on ne soit jamais conduit à

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5.79 J.1

une combinaison donnant zéro pour solution d'une des équations intermédiaires.

2° Je dis que l'intégrale générale de la proposée (A) est comme dans le cas des coefficients constants, de la forme :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots\cdots + C_n y_n$$

$C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$ étant des constantes arbitraires, et $y_1, y_2 \ldots y_n$ des fonctions déterminées de la variable indépendante.

On vient de voir en effet qu'en posant : $y = z y_1$, où y_1 est une solution quelconque, et $\frac{dz}{dx} = u$, d'où :

$$y = y_1 \int u \, dx$$

la fonction u est déterminée par une équation linéaire d'ordre $n-1$. Supposant donc que la proposition ait lieu à l'égard des équations d'ordre $n-1$, on pourra faire :

$$u = C_2 u_2 + C_3 u_3 + \cdots\cdots + C_n u_n$$

$C_2, C_3, \ldots\ldots C_n$ étant des constantes. Il en résultera, en intégrant par rapport à x et désignant la constante arbitraire par C_1 :

$$\int u \, dx = C_1 + C_2 \int u_2 \, dx + C_3 \int u_3 \, dx + \cdots\cdots + C_n \int u_n \, dx$$

et par conséquent :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int u_2 \, dx + C_3 y_1 \int u_3 \, dx + \cdots\cdots + C_n y_1 \int u_n \, dx$$

ce qui démontre la proposition pour les équations d'ordre n. Or, elle est vraie dans le cas des équations linéaires :

$$Gy + H \frac{dy}{dx} = 0$$

dont l'intégrale est :

$$y = A e^{-\int \frac{G}{H} dx} = A y_1$$

donc elle a lieu pour un ordre quelconque. On va en voir immédiatement une application importante, et nous allons en déduire, en effet, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, le moyen d'intégrer une équation dont le second membre est une fonction quelconque de la variable, lorsqu'on connaît la solution générale de la même équation sans second membre.

II. Pour plus de simplicité, je considère le cas particulier du 3e ordre :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 d.

$$Gy + H\frac{dy}{dx} + K\frac{d^2y}{dx^2} + L\frac{d^3y}{dx^3} = V.$$

V étant une fonction quelconque de x, et je suppose que l'on ait la solution complète de l'équation sans second membre :

$$Gy + H\frac{dy}{dx} + K\frac{d^2y}{dx^2} + L\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Par ce qui précède, nous savons, d'une part, qu'elle sera de la forme :

$$y = Au + Bv + Cw$$

A, B, C, désignant trois constantes arbitraires, et en second lieu, qu'on pourra les déterminer de manière à avoir pour x une valeur quelconque x_0 de la variable, et par conséquent quel que soit x :

$$y = Au + Bv + Cw = \mathcal{A}$$

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx} = \mathcal{B}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dx^2} + C\frac{d^2w}{dx^2} = \mathcal{C}$$

de sorte que le déterminant du système :

$$\left\{\begin{matrix} u, & v, & w \\ \frac{du}{dx}, & \frac{dv}{dx}, & \frac{dw}{dx} \\ \frac{d^2u}{dx^2}, & \frac{d^2v}{dx^2}, & \frac{d^2w}{dx^2} \end{matrix}\right\}$$

doit être nécessairement différent de zéro. Cela étant, je remplace les constantes par des fonctions de la variable, afin de représenter la solution de l'équation avec second membre, et observant qu'on peut établir entre A, B, C, deux relations à volonté, j'égale à zéro dans la valeur de $\frac{dy}{dx}$, savoir :

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx} + \frac{dA}{dx}u + \frac{dB}{dx}v + \frac{dC}{dx}w$$

la somme des trois derniers termes en posant :

$$\frac{dA}{dx}u + \frac{dB}{dx}v + \frac{dC}{dx}w = 0$$

De là résulte que $\frac{dy}{dx}$ aura la même forme qu'en supposant A, B, C

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

constants, et en différentiant de nouveau, il viendra :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dx^2} + C\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dA}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{dB}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dC}{dx}\frac{dw}{dx}$$

Faisant donc encore :

$$\frac{dA}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{dB}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dC}{dx}\frac{dw}{dx} = 0$$

nous obtiendrons :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = A\frac{d^3u}{dx^3} + B\frac{d^3v}{dx^3} + C\frac{d^3w}{dx^3} + \frac{dA}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dB}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dC}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}$$

et si l'on substitue dans l'équation proposée, on trouvera immédiatement, en se rappelant que u, v, w, satisfont à l'équation sans second membre, la condition :

$$\frac{dA}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dB}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dC}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} = V$$

Les trois dérivées $\frac{dA}{dx}, \frac{dB}{dx}, \frac{dC}{dx}$, sont donc déterminées par ces équations du premier degré :

$$\frac{dA}{dx}u + \frac{dB}{dx}v + \frac{dC}{dx}w = 0$$

$$\frac{dA}{dx}\frac{du}{dx} + \frac{dB}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dC}{dx}\frac{dw}{dx} = 0$$

$$\frac{dA}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dB}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dC}{dx}\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{V}{L}$$

équations toujours possibles d'après l'observation précédemment faite sur le déterminant formé avec les coefficients des inconnues, et on obtendra par conséquent, les trois fonctions A, B, C, par de simples quadratures.

III. Soit comme application, l'équation suivante :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = V = f(x)$$

on prendra pour l'intégrale complète de l'équation sans second membre, l'expression :

$$y = A + 2Bx + Cx^3$$

ce qui conduira aux relations :

$$\frac{dA}{dx} + 2\frac{dB}{dx}x + \frac{dC}{dx}x^2 = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.

$$\frac{dB}{dx} + \frac{dC}{dx}\, x = 0$$

$$2\,\frac{dC}{dx} = f(x)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}\, x^2 f(x), \quad \frac{dB}{dx} = -\frac{1}{2}\, x f(x), \quad \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}\, f(x)$$

et par suite :

$$y = \frac{1}{2}\left[\int x^2 f(x)\,dx - 2x\int x f(x)\,dx + x^2\int f(x)\,dx\right]$$

Cette expression de l'intégrale de la fonction $f(x)$ prise trois fois successivement revient à la formule générale établie page 16 :

$$y = \frac{1}{1.2\ldots n}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n f(z)\,dz.$$

et s'en déduit immédiatement en faisant $n = 2$.

Soit encore l'équation :

$$\alpha y + \beta\,\frac{dy}{dx} + \gamma\,\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots + \lambda\,\frac{d^n y}{dx^n} = F(x)$$

dont le premier membre est à coefficients constants. En l'égalant à zéro, on aura donc, pour solution générale :

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots\ldots + Ke^{Kx}$$

et nous serons amenés aux équations :

$$\frac{dA}{dx}\,e^{ax} + \frac{dB}{dx}\,e^{bx} + \ldots\ldots + \frac{dK}{dx}\,e^{Kx} = 0$$

$$\frac{dA}{dx}\,ae^{ax} + \frac{dB}{dx}\,be^{bx} + \ldots\ldots + \frac{dK}{dx}\,Ke^{Kx} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dA}{dx}\,a^{n-1}e^{ax} + \frac{dB}{dx}\,b^{n-1}e^{bx} + \ldots\ldots + \frac{dK}{dx}\,K^{n-1}e^{Kx} = F(x)$$

déjà résolues précédemment, (voyez page 140). Si l'on fait pour un instant :

$$\varphi(z) = (z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-K)$$

on aura :

$$e^{ax}\,\frac{dA}{dx} = \frac{F(x)}{\varphi'(a)}, \quad e^{bx}\,\frac{dB}{dx} = \frac{F(x)}{\varphi'(b)}, \ldots\ e^{Kx}\,\frac{dK}{dx} = \frac{F(x)}{\varphi'(x)}$$

d'où :

$$y = \frac{e^{ax}}{\varphi'(a)}\int e^{-ax}F(x)\,dx + \frac{e^{bx}}{\varphi'(b)}\int e^{-bx}F(x)\,dx + \ldots\ldots + \frac{e^{Kx}}{\varphi'(K)}\int e^{-Kx}F(x)\,dx$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214.1

Ainsi, dans le cas spécial où $F(x)$ sera un polynôme entier, nous obtiendrons sous une forme toute nouvelle le polynôme $\mathcal{F}(x)$ déterminé par la formule :

$$\mathcal{F}(x) = \alpha_0 F(x) + \beta_0 F'(x) + \gamma_0 F''(x) + \ldots\ldots$$

où les coefficients $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$, résultent de l'identité :

$$\frac{1}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + \lambda z^n} = \alpha_0 + \beta_0 z + \gamma_0 z^2 + \ldots$$

On a en effet :

$$\mathcal{F}(x) = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} \int_{\pm\infty}^{x} e^{-ax} F(x)\,dx + \frac{e^{bx}}{\varphi(b)} \int_{\pm\infty}^{x} e^{-bx} F(x)\,dx + \ldots\ldots + \frac{e^{kx}}{\varphi(k)} \int_{\pm\infty}^{x} e^{-kx} F(x)\,dx$$

le signe + étant pris dans les intégrales qui correspondent à des racines $a, b, \ldots k$ positives ou à partie réelle positive, et le signe — dans celles où figurent des racines négatives ou à parties réelle négative. Le cas où elles sont toutes réelles donne lieu à cette propriété, que l'équation $\mathcal{F}(x) = 0$ a, au plus, autant de réelles que l'équation $F(x) = 0$. (Nouvelles annales de Mathématiques, 1867, page 25).

Il nous, reste, après avoir établi ces propositions générales de la théorie des équations linéaires, à donner des exemples d'intégration dans le cas des coefficients variables.

IV. Soit en premier lieu l'équation :

$$\alpha y + \beta (ax+b) \frac{dy}{dx} + \gamma (ax+b)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots + \lambda (ax+b)^n \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

où $\alpha, \beta \ldots \lambda, a, b$, sont des constantes. Changeons de variable en posant :

$$ax + b = e^t$$

on aura :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^2 \left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

. . . . . .

par conséquent :

$$(ax+b)\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dt}$$

$$(ax+b)^2 \frac{d^2y}{dx^2} = a^2\left(-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

. . . . . .

d'où l'on voit que la transformée en t sera à coefficients constants. Mais pour le démontrer d'une manière plus complète, posons généralement :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 (.)

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^m \left(p\frac{dy}{dt} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^m y}{dt^m}\right)$$

$p, q, \ldots s$ étant des constantes, et prenons les dérivées des deux membres par rapport à x, il viendra :

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\right)^m \left(p\frac{dy}{dt} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^m y}{dt^m}\right)$$
$$+ \left(\frac{a}{ax+b}\right)^m \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dt} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^m y}{dt^m}\right)$$

Or, on a d'une part :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{ax+b}\right)^m = -m\left(\frac{a}{ax+b}\right)^{m+1}$$

et de l'autre :

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dt} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^m y}{dt^m}\right) = \frac{d}{dt}\left(p\frac{dy}{dt} + q\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^m y}{dt^m}\right)\frac{dt}{dx}$$
$$= \left(p\frac{d^2y}{dt^2} + q\frac{d^3y}{dt^3} + \cdots\cdots + s\frac{d^{m+1}y}{dt^{m+1}}\right)\frac{a}{ax+b}$$

donc :

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = \left(\frac{a}{ax+b}\right)^{m+1}\left[-mp\frac{dy}{dt} + (p-mq)\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^{m+1}y}{dt^{m+1}}\right]$$

Ainsi la dérivée d'ordre $m+1$ a la même forme que la dérivée d'ordre m et la substitution employée conduit bien à une équation linéaire à coefficients constants.

Voici un second exemple plus caractéristique de l'intégration d'une équation à coefficients variables.

V. Désignant par $F(x)$ un polynôme du n^e degré, et par ω une quantité constante, je considérerai cette équation d'ordre n, savoir :

$$F(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\omega-1}{1}F'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}F''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots$$
$$\cdots + \frac{(\omega-1)(\omega-2)\cdots(\omega-n)}{1.2\ldots\ldots n}F^{(n)}(x).y = 0$$

et j'opérerai comme il suit :

Soit $x = a$ l'une quelconque des racines de l'équation $F(x) = 0$, l'identité

$$F(a) = F(x+a-x) = F(x) + \frac{a-x}{1}F'(x) + \cdots\cdots + \frac{(a-x)^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(x)$$

donnera celle-ci :

$$F(x) + \frac{a-x}{1}F'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2}F''(x) + \cdots\cdots + \frac{(a-x)^n}{1.2\ldots\ldots n}F^{(n)}x = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Code: SPA.J

ou encore, en multipliant par $(a-x)^{-\omega}$:

$$F(x)(a-x)^{-\omega}+\frac{(a-x)^{-(\omega-1)}}{1}F'(x)+\frac{(a-x)^{-(\omega-2)}}{1.2.}F''(x)+\dots+\frac{(a-x)^{-(\omega-n)}}{1.2\dots n}F^{(n)}(x)=0$$

Cela étant, je fais :

$$y=(a-x)^{-(\omega-n)}$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx}=(\omega-n)(a-x)^{-(\omega-n+1)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(\omega-n)(\omega-n+1)(a-x)^{-(\omega-n+2)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=(\omega-n)(\omega-n+1)(\omega-n+2)(a-x)^{-(\omega-n+3)}$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(\omega-n)(\omega-n+1)(\omega-n+2)\dots(\omega-1)(a-x)^{-\omega}$$

et j'observe que l'identité précédente, multipliée par le produit :

$$(\omega-n)(\omega-n+1)(\omega-n+2)\dots(\omega-1)$$

prend cette forme, savoir :

$$F(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\frac{\omega-1}{1}F'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}F''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots+\frac{(\omega-1)(\omega-2)\dots(\omega-n)}{1.2\dots\dots n}F^{(n)}(x)y=0$$

Or, on obtient ainsi l'équation proposée, qui est donc vérifiée en posant :

$$y=(a-x)^{n-\omega}$$

la quantité a étant une quelconque des racines de l'équation $F(x)=0$. Par conséquent, si l'on fait :

$$F(x)=(x-a)(x-b)\dots\dots(x-K)$$

on compose, en multipliant par des constantes arbitraires $A, B \dots K$, les n solutions particulières correspondantes à chaque racine, l'intégrale cherchée, savoir :

$$y=A(a-x)^{n-\omega}+B(b-x)^{n-\omega}+\dots\dots+K(K-x)^{n-\omega}$$

Mais ici, comme à l'égard des équations linéaires à coefficients constants, il se présente un cas d'exception lorsque deux ou plusieurs des quantités $a, b \dots K$, sont égales. C'est qu'alors en effet, la forme analytique de l'intégrale subit

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - JPMC - Cote : 5214 J

une modification que donne aisément le procédé de d'Alembert, dont nous ferons ainsi une seconde application.

Posons à cet effet, en supposant, par exemple, les deux racines a et b infiniment voisines :

$$b = a + \delta$$

on en conclura :

$$(b-x)^{n-\omega} = (a-x+\delta)^{n-\omega} = (a-x)^{n-\omega} + \delta(n-\omega)(a-x)^{n-\omega-1} + \cdots\cdots$$

et par suite :

$$A(a-x)^{n-\omega} + B(b-x)^{n-\omega} = (A+B)(a-x)^{n-\omega} + \delta B(n-\omega)(a-x)^{n-\omega-1} + \cdots\cdots$$

Or, en changeant de constante et faisant :

$$A + B = P \qquad \delta B = Q$$

il viendra à la limite, pour $\delta = 0$:

$$A(a-x)^{n-\omega} + B(b-x)^{n-\omega} = P(a-x)^{n-\omega} + Q(a-x)^{n-\omega-1}$$

Je remarquerai enfin que le cas de ω entier et non supérieur à n donne lieu à des exceptions d'une autre nature, et à des modifications plus profondes dans la forme de l'intégrale. En supposant par exemple $\omega = n$, on a :

$$y = C + A\log(a-x) + B\log(b-x) + \cdots\cdots + K\log(K-x)$$

C étant une constante arbitraire, et $A, B, \ldots K$, devant satisfaire à la condition :

$$A + B + \cdots\cdots + K = 0$$

En général, pour $\omega = n - i$, l'intégrale sera :

$$y = C + C'x + C''x^2 + \cdots\cdots + C^{(i)}x^i$$
$$+ A(a-x)^i \log(a-x) + B(b-x)^i \log(b-x) + \cdots\cdots + K(K-x)^i \log(K-x)$$

$C, C', \ldots C^{(i)}$ étant des constantes entièrement arbitraires, tandis que $A, B, \ldots K$, doivent vérifier les relations :

$$A + B + \cdots\cdots + K = 0$$
$$Aa + Bb + \cdots\cdots + KK = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Aa^i + Bb^i + \cdots\cdots + KK^i = 0$$

Ces expressions montrent que les discontinuités de la fonction définie par l'équation différentielle correspondent aux valeurs de la variable qui annulent

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote: 5/71 J.1

le coefficient de la dérivée de l'ordre le plus élevé; on voit aussi, et d'une manière bien facile, ce que devient cette fonction quand on fait décrire à la variable un contour fermé comprenant une ou plusieurs des quantités $a, b, \ldots K$ en étendant ainsi aux équations linéaires le point de vue sous lequel ont été étudiées les intégrales prises entre des limites imaginaires.

*** VI.** La théorie des intégrales elliptiques et Abéliennes, conduit à un type d'équations linéaires se plaçant naturellement après celle que nous venons d'intégrer et que pour abréger je représenterai de cette manière:

$$\left[F(x)\right] = 0$$

en posant:

$$\left[F(x)\right] = F(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\omega-1}{1}F'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}F''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{(\omega-1)(\omega-2)\ldots(\omega-n)}{1.2\ldots\ldots n}F^{(n)}(x)\,y$$

Considérant en effet l'expression semblable relative à un polynome de degré $n-1$ $f(x)$, et dans laquelle je change ω en $\omega-1$, savoir:

$$\left[f(x)\right] = f(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{\omega-2}{1}f'(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{(\omega-2)(\omega-3)}{1.2}f''(x)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(\omega-2)(\omega-3)\ldots(\omega-n)}{1.2\ldots\ldots n-1}f^{(n-1)}(x)\,y$$

ces équations seront:

$$\left[F(x)\right] + \left[f(x)\right] = 0$$

et on obtient la solution comme il suit:

Soit: $$F(x) = (x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-K)$$

et: $$\alpha = \frac{f(a)}{F'(a)}, \quad \beta = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots\ldots x = \frac{f(K)}{F'(K)}$$

l'intégrale:

$$y = \int (z-a)^{-(\alpha+1)}(z-b)^{-(\beta+1)}\ldots\ldots(z-K)^{-(x+1)}(z-x)^{\omega-n}\,dz$$

donnera identiquement:

$$\left[F(x)\right] + \left[f(x)\right] = (z-a)^{-\alpha}(z-b)^{-\beta}\ldots\ldots(z-K)^{-x}(z-x)^{-(\omega-1)}$$

et par suite nous aurons:

$$\left[F(x)\right] + \left[f(x)\right] = 0$$

en prenant pour limites de l'intégrale deux quelconques des racines de l'équation $F(x) = 0$, auxquelles correspondent dans le second membre

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote: 5274 d.

des exposants positifs. Le résultat suit immédiatement de ce que nous avons établi précédemment lorsqu'il a été traité de la différentiation sous le signe $\int$ (voyez, page 29); je le rappelle ici pour indiquer comme particulièrement important le cas de l'équation du second ordre considérée par Gauss, M. Kummer et Riemann dans leurs recherches sur la série hypergéométrique.

Sur les rapports de la théorie des équations différentielles linéaires avec les équations algébriques.

I. La théorie des équations différentielles linéaires offre avec la théorie des équations algébriques plusieurs points de rapprochement dignes d'intérêt et dont nous avons eu un premier exemple en exposant la méthode d'Euler pour l'intégration des équations à coefficients constants. Voici sur ce sujet quelques remarques qui en feront mieux sentir le caractère et l'importance, et auxquelles on est amené par les considérations suivantes.

J'observe d'abord qu'étant donnée l'équation :

$$Gy + H\frac{dy}{dx} + \cdots\cdots + L\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

toute dérivée de y d'un ordre m supérieur à $n-1$ peut s'exprimer ainsi :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = py + q\frac{dy}{dx} + \cdots\cdots + s\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

les coefficients $p, q, \ldots\ldots s$ étant des fonctions connues de la variable. Admettant en effet cette relation pour une valeur quelconque de m, je dis qu'elle subsiste pour la dérivée d'ordre $m+1$, car en différentiant, il vient :

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} = p\frac{dy}{dx} + q\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots\cdots + s\frac{d^n y}{dx^n}$$
$$+ \frac{dp}{dx}y + \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} + \cdots\cdots + \frac{ds}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

et il suffit de remplacer $\frac{d^n y}{dx^n}$ par sa valeur tirée de la proposée, en fonction linéaire des dérivées d'ordre inférieur à n pour obtenir la forme demandée. La proposition ayant lieu pour $m = n$, est ainsi démontrée, quel que soit m.

En voici une conséquence :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote: 5274.1

Soit z une nouvelle fonction liée à y par cette relation où $P, Q, \ldots S$ ne contiennent que la variable x, savoir :

$$z = Py + Q\frac{dy}{dx} + \ldots\ldots + S\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

Les $n+1$ quantités :

$$z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^nz}{dx^n}$$

pourront, d'après ce qui précède, s'exprimer linéairement et sous forme homogène, par :

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

il existe donc entre elles une équation linéaire que donnera l'élimination, par conséquent, z dépend, comme y, d'une équation différentielle linéaire d'ordre n. Cette conclusion peut être rapprochée du théorème algébrique suivant : Étant donnée une équation du n^e degré :

$$F(y) = 0$$

si l'on pose :

$$z = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots\ldots + \lambda y^{n-1}$$

la transformée en z sera du même degré que l'équation en y. Mais l'analogie s'étend plus loin comme on va voir.

II. Je dis d'abord que si deux fonctions satisfont l'une et l'autre à une équation linéaire, il en est de même de leur somme et de leur produit. Soit d'abord

$$u = y + z$$

y et z dépendant d'équations d'ordre n et p. Les $n+p+1$ quantités

$$u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n+p}u}{dx^{n+p}}$$

pourront s'exprimer linéairement par celles-ci :

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

et :

$$z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}$$

qui sont au nombre de $n+p$. L'élimination conduira donc à une équation différentielle linéaire d'ordre $n+p$ en u.

Considérons ensuite le produit :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5214.1

$$v = y\,z$$

et formons les dérivées de v jusqu'à l'ordre np. A l'égard de y, ces quantités s'exprimeront encore comme ci-dessus par :

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ldots\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

et de même à l'égard de z, par :

$$z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \ldots\ldots\ \frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}}$$

donc, d'après la formule élémentaire pour la dérivée d'ordre quelconque d'un produit, on est assuré que les $np+1$ termes de la suite :

$$v,\ \frac{dv}{dx},\ \frac{d^2v}{dx^2},\ \ldots\ldots\ \frac{d^{np}v}{dx^{np}}$$

dépendent linéairement de ces expressions :

$$\frac{d^a y}{dx^a}\cdot\frac{d^b z}{dx^b}$$

au nombre de np seulement, les indices a et b ne devant prendre que les valeurs :

$$a = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ n-1$$

$$b = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ p-1$$

et l'on aura donc une équation d'ordre np, en v. Soit, pour donner un exemple, ces deux relations :

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + m\,x\,y + \alpha\,y = 0$$

$$(x^2-1)\frac{d^2z}{dx^2} + m\,x\,z + \beta\,z = 0$$

nous trouverons :

$$(x^2-1)^2\frac{d^4u}{dx^4} + (2m+4)(x^3+4)\frac{d^3u}{dx^3} + \left[(m+\alpha+\beta)(x^2-1) - m+2\right]\frac{d^2u}{dx^2} + m(\alpha+\beta)x\frac{du}{dx} + \alpha\beta u = 0$$

III. En appliquant plusieurs fois de suite chacune des remarques précédentes, on voit que si un nombre quelconque de fonctions satisfont à des équations linéaires, il en est de même de leur somme et de leur produit. Or, toute expression rationnelle et entière par rapport à plusieurs quantités, n'étant autre chose qu'une somme de produits de ces quantités, nous pouvons étendre à de telles expressions

la conclusion qui précède. Ici s'offre une nouvelle analogie avec le théorème algébrique si souvent employé, que toute fonction rationnelle des racines de plusieurs équations est aussi racine d'une équation de même nature, la différence essentielle à remarquer, consistant en ce qu'on se limite aux fonctions rationnelles entières dans la théorie des équations différentielles, tandis qu'on envisage en Algèbre des fonctions rationnelles quelconques. Mais suivons les conséquences de ce rapprochement. Une équation algébrique étant donnée, on peut se demander si elle n'aurait point pour origine une combinaison rationnelle de racines d'équations de degré égal ou moindre; c'est même ainsi, en faisant entrer seulement des radicaux dans la combinaison, qu'a été si longtemps posée la question de la résolution des équations. Or, à l'égard d'une équation différentielle linéaire, on peut semblablement demander si elle ne proviendrait pas d'une fonction entière composée avec les intégrales d'autres équations différentielles. Mais de ces deux questions, dont l'énoncé est presque identique, c'est la question algébrique qui seule a reçu des découvertes profondes d'Abel et de Galois au commencement de solution. Rien dans cette voie n'a encore été entrepris à l'égard des équations différentielles; ainsi on n'a aucune méthode pour reconnaître, par exemple dans cette équation de 4e ordre:

$$(x^2-1)^2\frac{d^4u}{dx^4}+(2m+4)(x^3-x)\frac{d^3u}{dx^3}+\left[(m+\alpha+\beta)(x^2-1)-m+2\right]\frac{d^2u}{dx^2}+m(\alpha+\beta)x\frac{du}{dx}+\alpha\beta u=0$$

la somme $u=y+z$ des solutions des équations du second ordre:

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+mx\frac{dy}{dx}+\alpha y=0$$

$$(x^2-1)\frac{d^2z}{dx^2}+mx\frac{dz}{dx}+\beta z=0$$

ni dans celle-ci:

$$(x^2-1)\frac{d^3v}{dx^3}+6x(x^2-1)\frac{d^2v}{dx^2}+\left[(6+3\alpha+3\beta)(x^2-1)+4\right]\frac{dv}{dx}+2(\alpha+\beta)xV=0.$$

le produit $v=xy$ lorsqu'on suppose $m=2$. Peut-être tirera-t-on quelque lumière sur ces questions importantes, de l'étude des propriétés des intégrales relatives aux valeurs imaginaires de la variable, qui a été entreprise par un géomètre allemand, M. Fuchs. En remarquant enfin que rien absolument n'autorise à considérer dans les équations différentielles linéaires à deux termes des fonctions ayant un mode d'existence plus simple et pouvant jouer le rôle d'élément analytique, comme les radicaux en algèbre, je termine par l'énoncé d'une proposition où se trouve encore un rapprochement entre les deux théories. On sait qu'étant donnée une équation de degré n qui a toutes les racines communes avec une autre de degré $n+p$, on peut ramener la détermination de toutes les autres racines à une équation de degré p. Or, en considérant de même une équation linéaire:

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5214

$$\frac{d^{n+p}y}{dx^{n+p}} + P_1 \frac{d^{n+p-1}y}{dx^{n+p-1}} + P_2 \frac{d^{n+p-2}y}{dx^{n+p-2}} + \cdots\cdots = 0$$

d'ordre $n+p$, et une autre d'ordre n :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + Q_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots = 0$$

dont toutes les intégrales appartiennent à la première, celle-ci pourra s'intégrer à l'aide d'une équation d'ordre p. En prenant en effet pour inconnue auxiliaire la quantité :

$$u = \frac{d^n y}{dx^n} + Q_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots$$

on obtiendra une équation linéaire d'ordre p pour transformée en u. (Voyez la démonstration donnée par M. Liouville dans les comptes-rendus, Tome 8, page 790.)

Des équations du second ordre.

L'intégration des équations aux dérivées partielles qu'on rencontre dans les applications de l'analyse à la physique, a conduit à faire l'étude des équations du second ordre sous un point de vue qui a donné un grand nombre de beaux résultats. Voici quelques courtes indications sur ce sujet auquel s'attache principalement le nom du célèbre géomètre français Sturm.

I. Je dis en premier lieu que toute équation :

$$A \frac{d^2y}{dx^2} + B \frac{dy}{dx} + C y = 0.$$

peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x) \frac{dy}{dx}\right] + X(x)\, y = 0$$

Effectivement, si l'on développe, et qu'on multiplie par un facteur indéterminé λ, il suffira de poser :

$$A = \lambda\, \varphi(x) \qquad B = \lambda\, \varphi'(x) \qquad C = \lambda\, X(x)$$

d'où : $\varphi(x) = e^{\int \frac{B}{A} dx}$, $X(x) = \frac{C}{A} e^{\int \frac{B}{A} dx}$, $\lambda = A e^{-\int \frac{B}{A} dx}$

Cela étant, j'adopterai cette forme pour arriver à une expression simple de l'intégrale complète, lorsqu'on connaît une solution particulière $y = y_1$, et au lieu d'employer la méthode de la variation des constantes

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274.1

arbitraires qui conduirait au résultat en posant comme on l'a vu plus haut :

$$y = y_1 \int z\, dx$$

j'opérerai comme il suit :

Considérant les deux relations :

$$\varphi(x) \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \varphi'(x) \frac{dy_1}{dx} + \chi(x) y_1 = 0$$

$$\varphi(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \varphi'(x) \frac{dy}{dx} + \chi(x) y = 0$$

je multiplie la première par y, la seconde par y_1 et je retranche. Il vient ainsi :

$$\varphi(x) \left(y \frac{d^2 y_1}{dx^2} - y \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \varphi'(x) \left(y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

ou bien : $\varphi(x) \frac{d}{dx} \left(y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} \right) + \varphi'(x) \left(y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} \right) = 0$

et par suite : $\frac{d}{dx} \left[\varphi(x) \left(y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} \right) \right] = 0$

Nous tirons de là : $\varphi(x) \left(y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} \right) = C$

d'où :

$$y \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy}{dx} = \frac{C}{\varphi(x)}$$

Si la fonction $\varphi(x)$ ne s'évanouit jamais, cette relation met en évidence cette propriété, qu'en faisant croître x, les fonctions y et y_1 s'annulent alternativement tant qu'elles restent continues. En ce moment, je me borne à en déduire l'expression de y, qu'on obtient en divisant les deux membres par y_1^2, car il vient ainsi :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{y_1} \right) = \frac{C}{\varphi(x) y_1^2}$$

et en intégrant :

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{C\, dx}{\varphi(x) y_1^2} + C'$$

d'où enfin :

$$y = C y_1 \int \frac{dx}{\varphi(x) y_1^2} + C' y_1$$

II. Introduisons maintenant dans l'équation du second ordre un paramètre variable z en y remplaçant la fonction $\chi(x)$ par $z\chi(x)$, et soient y et y_1 deux solutions relatives à z et z_1, de sorte que l'on ait :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 (.)

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]+r\chi(x)y=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]+r_1\chi(x)y_1=0$$

ce qui suppose, comme on voit $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ indépendants du paramètre. Les quantités y et y_1 donnent lieu au théorème important que voici :

Différentions l'expression : $y_1 \cdot \varphi(x)\frac{dy}{dx}$, il viendra :

$$\frac{d}{dx}\left[y_1\cdot\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]=\varphi(x)\frac{dy}{dx}\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]$$

ou bien :
$$\frac{d}{dx}\left[y_1\cdot\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]=\varphi(x)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx}-r\,y\,y_1\,\chi(x)$$

On aurait évidemment aussi :

$$\frac{d}{dx}\left[y\cdot\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]=\varphi(x)\frac{dy}{dx}\frac{dy_1}{dx}-r_1\,y\,y_1\,\chi(x)$$

Or, on conclut de ces deux relations :

$$(r_1-r)\,y\,y_1\,\chi(x)=\frac{d}{dx}\left[y_1\cdot\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]-\frac{d}{dx}\left[y\cdot\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]$$

$$(r_1-r)\frac{dy}{dx}\frac{dy}{dx}\varphi(x)=r_1\frac{d}{dx}\left[y_1\cdot\varphi(x)\frac{dy}{dx}\right]-r\frac{d}{dx}\left[y\cdot\varphi(x)\frac{dy_1}{dx}\right]$$

et par conséquent :

$$(r_1-r)\int y\,y_1\,\chi(x)\,dx=\varphi(x)\left(y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}\right)$$

$$(r_1-r)\int\frac{dy}{dx}\frac{dy_1}{dx}\varphi(x)\,dx=\varphi(x)\left(r_1 y_1\frac{dy}{dx}-r y\frac{dy_1}{dx}\right)$$

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ s'annule pour deux valeurs $x=\alpha$, $x=\beta$, entre lesquelles les fonctions y, y_1, $\chi(x)$ soient continues, nous aurons :

$$\int_\alpha^\beta y\,y_1\,\chi(x)\,dx=0$$

$$\int_\alpha^\beta\frac{dy}{dx}\frac{dy_1}{dx}\varphi(x)\,dx=0$$

Ces théorèmes, qui supposent essentiellement les conditions de continuité dont nous venons de parler, ont une grande importance et sont d'un fréquent usage dans la physique mathématique. J'en donnerai un exemple en considérant l'équation :

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-n(n+1)\,y=0$$

à laquelle satisfont, comme on l'a établi (page 50) les polynomes X_n de Legendre. Elle se met immédiatement sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right]-n(n+1)\,y=0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 J

$$\varphi(x) = x^2 - 1, \quad \chi(x) = 1, \quad r = -n(n+1)$$

et l'on aura :

Or, à deux valeurs entières n et n' correspondent les deux polynômes $X_n, X_{n'}$ qui sont fonctions continues de la variable entre les limites -1 et $+1$, racines de l'équation $\varphi(x) = 0$. Nous retrouverons ainsi le théorème exprimé par l'égalité :

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} \, dx = 0$$

auquel s'ajoute le suivant :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dX_n}{dx} \frac{dX_{n'}}{dx} (1 - x^2) = 0$$

Soit encore l'équation :

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - n^2 y = 0$$

en la mettant sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx}\right] + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

on obtiendra la relation : $\int_{-1}^{+1} \frac{y y_1 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, y et y_1 correspondant aux valeurs n et n_1. Mais c'est dans le seul cas où ces valeurs seront entières que les conditions de continuité sont remplies. On trouve aisément, en effet, cette expression de l'intégrale générale de l'équation proposée, savoir :

$$y = C \cos\left[n \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C'\right]$$

qui représentera un polynome entier de degré n en x pour $C' = 0$ lorsque n est entier, et une racine d'équation algébrique lorsque n est une fraction. En supposant n incommensurable, la valeur de y donne, comme il est aisé de le voir, une infinité de déterminations réelles infiniment voisines, dont l'origine se trouve dans les diverses lois de succession de la variable x à l'égard de l'intégrale $\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ce fait, pour le remarquer encore, montre que l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle n'est établie que par rapport à une loi déterminée de succession des valeurs de la variable.

Je passe maintenant à l'indication succincte des propriétés découvertes par Sturm à l'égard des équations du second ordre, et étendues depuis par M. Liouville aux équations linéaires d'un ordre quelconque.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5216 d.

※ III. Posons dans l'équation précédente :

$$\xi = \int X(x)\,dx$$

ou bien $d\xi = X(x)\,dx$ et faisons : $\varphi(x)\,X(x) = \Phi(\xi)$, elle prendra la forme :

$$\frac{d}{d\xi}\left[\Phi(\xi)\frac{dy}{d\xi}\right] + ry = 0$$

Cela posé, en déterminant les deux constantes arbitraires de l'intégrale de sorte que pour $\xi = \xi_0$ les quantités y, $\frac{dy}{d\xi}$ aient des valeurs positives, et de plus, supposant positive la fonction $\Phi(\xi)$ on aura cette proposition :

1° Si l'on pose $y = 0$ en attribuant à ξ une valeur déterminée ξ_1 supérieure à ξ_0, on forme une équation en r dont les racines sont en nombre infini, toutes réelles, positives et inégales.

2° Si l'on considère chacune d'elles comme donnant naissance à une fonction particulière y, la première de ces fonctions, celle qui répond à la plus petite racine conserve toujours le même signe lorsque la variable ξ croît de ξ_0 à ξ_1. Celle qui répond à la n-e racine s'évanouit et change de signe $n-1$ fois dans le même intervalle. Deux fonctions correspondantes à deux racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre, alternativement, et celle qui répond à la plus grande racine s'évanouit la première à partir de $\xi = \xi_0$.

Intégration des différentielles totales des fonctions de plusieurs variables. – Équations aux différences partielles.

La plupart des théories exposées dans ce Cours ont eu pour objet les fonctions d'une seule variable, et c'est dans un bien petit nombre de circonstances qu'on a considéré des fonctions contenant plusieurs variables indépendantes. Dans les éléments cependant, les analogies les plus évidentes conduisent à se poser à l'égard de ces fonctions des questions importantes, mais on est immédiatement arrêté par des difficultés qui manifestent une profonde différence de nature entre ces deux genres d'expressions. Rien de plus naturel, par exemple, que de chercher les relations entre les coefficients de deux équations algébriques à deux inconnues et leurs solutions, ou encore, * de former un nouveau système admettant toutes celles des équations proposées, et celles-là seules, moins la solution donnée. On peut aussi essayer d'étendre à deux équations la théorie des racines égales, le théorème de Sturm, mais dans ces diverses questions, la nature des fonctions de deux variables se montre

* lorsqu'on donne une solution,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5274 J

déjà avec les difficultés qui lui sont propres. Et dans d'autres qui en sont voisines, toute analogie qui pourrait servir de guide se trouve entièrement supprimée. On ne peut à coup sûr se proposer de décomposer en une somme de termes le quotient de deux polynômes $\frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}$, comme on le fait pour la fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{\chi(x)}$, et tant de belles et nombreuses conséquences de la décomposition en fractions simples ne semblent jamais devoir trouver leurs analogues pour les fonctions de plusieurs variables. Rien en est rien cependant; ces analogies se reproduisent ultérieurement et ont des conséquences importantes montrant que l'étude des fonctions de plusieurs variables ouvre à l'Analyse un vaste champ d'études qui ont déjà produit à notre époque d'importants résultats. Telle est par exemple l'extension de la série de Lagrange au cas de deux équations à deux inconnues (*) l'extension avec intégrales doubles du théorème d'Abel sur les sommes d'intégrales, découvertes par Jacobi, et la théorie des fonctions inverses des intégrales Abéliennes. C'est dans cette théorie que la notion des différentielles totales dont nous avons fait usage une seule fois à propos de la courbure des surfaces, joue un rôle important. Elle se présente également et d'une manière essentielle dans les équations aux différences partielles, et en rapprochant ces deux sujets, nous donnerons en premier lieu la méthode due à Cauchy pour l'intégration des différentielles totales, dans le cas de deux variables indépendantes.

I. Étant proposé de trouver une fonction u de deux variables dont la différentielle totale, à savoir :

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy$$

soit une expression donnée :

$$\varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy$$

on est conduit aux deux équations :

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x,y), \qquad \frac{du}{dy} = \chi(x,y)$$

qui donnent immédiatement entre les fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ une relation nécessaire. Effectivement, si l'on différentie la première par rapport à y, et la seconde par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d\varphi(x,y)}{dy}, \qquad \frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

et sachant que : $\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx}$, on en conclut :

(*) Voyez, sur cette question, un article publié par M. Laurent dans les Comptes-rendus Septembre 1868.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC - Cote : 5.79.1

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

Or, on peut trouver la fonction u, cette condition remplie, comme on va voir.

Ayant en effet : $\frac{du}{dx} = \varphi(x,y)$

nous poserons :

$$u = \int \varphi(x,y)\,dx$$

l'intégrale étant prise en traitant y comme une constante de sorte que la constante arbitraire doit être une fonction de y que nous mettrons en évidence en écrivant :

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + \theta(y)$$

la limite inférieure x_0 étant alors indépendante de y. Il reste à satisfaire à la relation :

$$\frac{du}{dy} = \chi(x,y)$$

ce qui donne : $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x,y)}{dy}\,dx + \frac{d\theta(y)}{dy} = \chi(x,y)$

Mais ayant : $\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$

on en conclut, en intégrant les deux membres par rapport à x :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x,y)}{dy}\,dx = \chi(x,y) - \chi(x_0,y)$$

de sorte qu'il vient simplement :

$$\frac{d\theta(y)}{dy} = \chi(x_0,y)$$

équation où ne figure plus la variable x. Nous en tirons :

$$\theta(y) = \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y)\,dy$$

et l'on a par conséquent, pour la fonction cherchée :

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y)\,dy$$

II. L'expression très-simple que nous venons d'obtenir renferme deux constantes x_0 et y_0 que l'on pourrait croire, au premier abord, entrer indépendamment l'une de l'autre dans le résultat. Il importe donc de montrer qu'en vertu de la condi-

tion

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - JFMC Cote 5214.1

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

elles se réduisent à un terme additif arbitraire, et c'est ce que nous ferons en démontrant que deux fonctions u et v de deux variables, ayant même différentielle totale, ne diffèrent que par une constante. Raisonnant comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous conclurons de l'égalité :

$$du = dv$$

celle-ci : $$d(u-v) = 0$$

d'où : $$\frac{d(u-v)}{dx} = 0 \qquad \frac{d(u-v)}{dy} = 0$$

Or, la première de ces équations montre que $u-v$ est indépendant de x et la seconde de y.

III. Étant donnée une expression $\varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy$, qui n'est point intégrable parce que la condition

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

n'est point satisfaite, on peut la rendre une différentielle exacte en multipliant par un facteur λ, de manière à avoir :

$$\frac{d\lambda \cdot \varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\lambda \cdot \chi(x,y)}{dx}$$

ou bien : $$\lambda \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\lambda}{dy}\varphi = \lambda \frac{d\chi}{dx} + \frac{d\lambda}{dx}\chi$$

Nous avons ainsi une équation aux différences partielles, dont une solution quelconque suffirait pour donner un résultat important, à savoir la solution générale de l'équation du premier ordre :

$$\varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy = 0$$

Effectivement, si l'on détermine par ce qui précède une fonction $\pi(x,y)$, telle que : $$\lambda\left[\varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy\right] = d\pi(x,y)$$

la proposée revenant à :

$$d\pi(x,y) = 0$$

donne immédiatement : $$\pi(x,y) = C$$

Bientôt nous pourrons donner la solution générale de cette équation aux différences partielles qui malheureusement repose sur l'intégration de l'équation

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.1

du premier ordre, de sorte que la considération du facteur d'intégrabilité paraît peu utile en cette circonstance. En réalité, on obtient cependant une transformation de problème et qui n'est pas sans avantage, l'équation en λ admettant d'après sa nature un nombre infini de solutions dont quelques-unes peuvent présenter un caractère qui les fait aisément reconnaître. M. Serret en a donné un exemple intéressant dans son Cours de Calcul différentiel et Intégral (page 462) en traitant par cette méthode l'équation :

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

ou plutôt :

$$dx\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + dy\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = 0$$

et parvenant au facteur :

$$\lambda = \frac{1}{1-k^2x^2y^2}$$

On a en effet :

$$\frac{dx\sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)} + dy\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = d\left[\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\right]$$

d'où résulte l'intégrale algébrique d'Euler.

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = a$$

J'arrive maintenant, et sans m'arrêter plus longtemps sur ce sujet, à la théorie des équations aux différences partielles.

On a établi dans les préliminaires de la théorie des équations différentielles, qu'en représentant par :

$$c = \Phi(x, y, z)$$

$$c_1 = \Phi_1(x, y, z)$$

les intégrales générales des deux équations simultanées :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z)$$

l'expression :

$$u = F(\Phi, \Phi_1)$$

où figure une combinaison F des quantités Φ et Φ_1 vérifie la relation :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f(x,y,z) + \frac{du}{dz} f_1(x,y,z) = 0$$

Or, on a ainsi un exemple important de l'origine d'une équation aux différences partielles, amenée par l'élimination d'une fonction arbitraire qui entre d'une certaine manière dans l'expression d'une fonction de plusieurs variables. Les plus importantes applications du calcul à la Physique conduisent à ce genre de relations dont il importe au plus haut point d'approfondir la nature, et qui ont été l'objet continuel des travaux des géomètres depuis l'époque même des fondations du calcul intégral. Il ne sera donné ici que quelques notions succinctes sur ce sujet si vaste, et j'aurai principalement en vue l'intégration des équations du premier ordre, où les divisions partielles entrent linéairement. Je commencerai toutefois par indiquer, d'après Euler, un exemple de la formation d'une équation d'ordre n par l'élimination de n fonctions arbitraires.

I. Soit à cet effet :

$$z = \Phi_1(x+ay) + \Phi_2(x+by) + \cdots\cdots + \Phi_n(x+Ky)$$

$a, b, \ldots K$ étant des constantes, et $\Phi_1, \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_n$ des fonctions quelconques. Si l'on désigne par $\varphi_i(x)$ la dérivée d'ordre n de $\Phi_i(x)$, on trouvera immédiatement,

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi_1(x+ay) + \varphi_2(x+by) + \cdots\cdots + \varphi_n(x+Ky)$$

$$\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} = a\varphi_1(x+ay) + b\varphi_2(x+by) + \cdots\cdots + K\varphi_n(x+Ky)$$

$$\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} = a^2\varphi_1(x+ay) + b^2\varphi_2(x+by) + \cdots\cdots + K^2\varphi_n(x+Ky)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^n z}{dy^n} = a^n\varphi_1(x+ay) + b^n\varphi_2(x+by) + \cdots\cdots + K^n\varphi_n(x+Ky)$$

et l'élimination des n quantités $\varphi_1(x+ay), \varphi_2(x+by), \ldots\ldots \varphi_n(x+Ky)$ nous ramenant à une question algébrique connue, donne pour résultat :

$$\frac{d^n z}{dy^n} - \Sigma a \frac{d^{n-1}z}{dx\,dy^{n-1}} + \Sigma ab \frac{d^{n-2}z}{dx^2 dy^{n-2}} - \cdots\cdots \pm abc\ldots K \frac{d^n z}{dx^n} = 0$$

en désignant par Σa la somme, par Σab, $\Sigma abc, \ldots\ldots$ la somme des produits deux à deux, trois à trois, des quantités $a, b, c, \ldots\ldots K$. Soit par exemple $n = 2$, et :

$$z = \Phi_1(x+ay) + \Phi_2(x+by)$$

on aura :

$$\frac{d^2 z}{dy^2} - (a+b)\frac{d^2 z}{dx\,dy} + ab\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - JPMC Cote 5214.1

et il est dans ce cas très-facile de prouver que la valeur de u donne la solution la plus générale de l'équation aux différences partielles du second ordre qu'on vient d'obtenir. Changeons en effet de variables en posant :

$$x' = x + ay \qquad y' = x + by$$

et nous trouverons pour transformée :

$$\frac{d^2 z}{dx'\,dy'} = 0$$

Or, en écrivant cette équation sous la forme :

$$\frac{d}{dx'}\left(\frac{dz}{dy'}\right) = 0$$

on en conclut d'abord :

$$\frac{dz}{dy'} = F(y')$$

d'où :

$$z = \int F(y')\,dy' + C.$$

Or, la constante C n'est constante que par rapport à y' et représente par conséquent une fonction quelconque de l'autre variable x', de sorte que z est nécessairement la somme de deux fonctions arbitraires de quantités $x' = x + ay$ et $y' = x + by$.

II. La fixation du nombre de fonctions arbitraires qui doivent entrer dans la solution générale d'une équation aux différences partielles d'ordre supérieur au premier, est une question complexe et obscure qui ne semble pas susceptible d'une solution générale comme celle du nombre des constantes arbitraires dans l'intégrale d'une équation différentielle d'ordre quelconque. En le laissant de côté, je vais donner l'intégration linéaire du premier ordre :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} f(x, y, z) = f_1(x, y, z)$$

d'après la méthode de Jacobi, que j'exposerai dans le cas de deux variables, mais qui s'applique, quel que soit le nombre de variables indépendantes.

Le point de départ de cette méthode consiste dans le résultat obtenu p. 120, que la solution la plus générale de l'équation :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f(x, y, z) + \frac{du}{dz} f_1(x, y, z) = 0$$

est

$$u = F(\Phi, \Phi_1)$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5214 d.

F désignant une combinaison quelconque des fonctions Φ et Φ_1, qui égalées respectivement à des constantes C et C' donnent les intégrales du système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z)$$

Concevons à cet effet que z devienne une fonction de x et y déterminée par l'équation

$$u = 0$$

Les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, s'obtiendront par les relations :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 0$$

et comme on a par hypothèse :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f(x, y, z) + \frac{du}{dz} f_1(x, y, z) = 0$$

nous en conclurons :

$$\frac{du}{dz}\left[\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} f(x, y, z) - f_1(x, y, z)\right] = 0$$

Or, $\frac{du}{dz}$ n'étant point nul en général, il viendra :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} f(x, y, z) = f_1(x, y, z)$$

ce qui établit pour l'équation proposée l'existence d'une solution contenant une fonction arbitraire. Soit d'ailleurs :

$$u = \pi(x, y, z) = 0.$$

la relation qui donnerait toute autre solution, on aura comme tout à l'heure :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy} = 0.$$

ce qui donne :

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.1

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}$$

et conduit, en substituant dans la proposée, à la condition :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} f(x, y, z) + \frac{du}{dz} f_1(x, y, z) = 0$$

Il est ainsi prouvé que l'équation :

$$\mathcal{F}(\Phi, \Phi_1) = 0$$

ou encore, sous une autre forme :

$$\Phi_1 = \mathcal{F}(\Phi)$$

donne pour z l'expression la plus générale qui puisse vérifier l'équation aux différences partielles linéaire du premier ordre.

Voici quelques applications de ce résultat :

III. L'équation du plan tangent en un point x, y, z d'une surface étant :

$$Z - z = (X - x)\frac{dz}{dx} + (Y - y)\frac{dz}{dy}$$

on trouverait : 1° pour exprimer qu'il est parallèle à la droite :

$$x = az, \qquad y = bz$$

quel que soit le point de contact, la condition :

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

2° qu'il passe par un point fixe α, β, γ, celle-ci :

$$\gamma - z = (\alpha - x)\frac{dz}{dx} + (\beta - y)\frac{dz}{dy}$$

Or, ces conditions sont caractéristiques des surfaces cylindriques et coniques, car l'équation :

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

s'intégrera en posant : $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = dz$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie - UPMC Cote 5274 d.

et ces équations simultanées donnent :

$$C = x - az$$

$$C' = y - bz.$$

On tire delà : $\mathcal{F}(x - az,\ y - bz) = 0$

ou si l'on veut : $x - az = \mathcal{F}(y - bz)$

ce qui est en quantités finies, l'équation des cylindres.

Considérons, en second lieu, la relation : $\gamma - z = (\alpha - x)\frac{dz}{dx} + (\beta - y)\frac{dz}{dy}$

nous poserons : $\frac{dx}{x-\alpha} = \frac{dy}{y-\beta} = \frac{dz}{z-\gamma}$

d'où évidemment : $C = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}$ $\quad C_1 = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$

et par suite : $\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \mathcal{F}\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)$

pour solution générale de l'équation aux différences partielles qui représente ainsi des surfaces coniques.

Exprimons en dernier lieu que la normale en un point x, y, z, savoir :

$$X - x + \frac{dz}{dx}(Z - z) = 0, \qquad Y - y + \frac{dz}{dy}(Y - y) = 0$$

rencontre la droite : $x = az + \alpha$, $\quad y = bz + b$

nous parviendrons à la condition :

$$(y - bz - \beta)\frac{dz}{dx} - (x - az - \alpha)\frac{dz}{dy} = b(x - \alpha) - a(y - \beta)$$

et cette équation aux différences partielles s'intègre comme il suit : Faisons d'abord :

$$\frac{dx}{y - bz} = \frac{-dy}{x - az} = \frac{dz}{bx - ay}$$

la solution de ces équations simultanées s'obtient en introduisant une variable t, et égalant les trois rapports à dt, ce qui donne :

$$dx = (y - bz)\,dt$$

$$dy = (x - az)\,dt$$

$$dz = (bx - ay)\,dt$$

On tire de là en effet ces deux relations :

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0$$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.1

qui s'intègrent immédiatement et conduisent à la solution cherchée, savoir :

$$C = ax + by + z \,. \qquad C_1 = x^2 + y^2 + z^2 \,.$$

L'intégrale de l'équation aux différences partielles étant donc :

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(ax + by + z)$$

représente des surfaces de révolution dont l'axe est la droite

$$x = az + \alpha \,, \qquad y = bz + \beta$$

Fin.

Document numérisé par la Bibliothèque numérique Pierre et Marie Curie - UPMC - Cote : 5279 d.

Table des Matières

A. M. D. G

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire d'Lyon et Mons-Centre - LIRAC - Cnrs - 13 Mai 1