THÈSES

D'ANALYSE

ET DE MÉCANIQUE

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

LE 28 AVRIL 1851,

PAR M. GERONIMO FRONTERA.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, N° 12.

1851.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM. MILNE EDWARDS, Doyen,	
THENARD, PONCELET, BIOT, DE MIRBEL,	Professeurs honoraires.
POUILLET, CONSTANT PREVOST, DUMAS, AUGUSTE DE SAINT-HILAIRE, DESPRETZ, STURM, DELAFOSSE, BALARD, LEFÉBURE DE FOURCY, LE VERRIER, CHASLES, CAUCHY, DUHAMEL, DE JUSSIEU, Lamé GEOFFROY-SAINT-HILAIRE, Delaunay	Professeurs.
VIEILLE, BERTRAND, MASSON, PELIGOT, PAYER, DUCHARTRE,	Agrégés.

THÈSE D'ANALYSE.

SUR UNE FORMULE DE M. CAUCHY.

§ I.

Objet de la Thèse.

1. Dans un Mémoire présenté, en 1831, à l'Académie des Sciences de Turin, et dont un extrait seulement a été publié dans le tome XVI du *Bulletin de Férussac*, M. Cauchy a fait connaître une formule remarquable susceptible d'un grand nombre d'applications importantes. En particulier, elle donne un moyen facile de retrouver la plupart des intégrales définies connues dont on fait usage dans les problèmes de physique mathématique et de mécanique; elle permet aussi d'en obtenir une multitude d'autres nouvelles.

Je me propose, dans cette Thèse, de faire connaître une nouvelle démonstration de cette formule et d'en développer les principales conséquences.

Après avoir rappelé quelques notions indispensables sur le calcul des résidus, j'établis la formule fondamentale de M. Cauchy, et j'examine avec détail un cas particulier qu'il n'a pas considéré. De cette formule fondamentale je déduis d'abord les principales formules publiées antérieurement par l'illustre géomètre, dans ses divers Mémoires sur les intégrales définies [*]. Je les applique à la détermination d'un certain nombre d'intégrales définies; en outre, j'indique l'usage des *valeurs principales* des intégrales définies indéterminées, fournies par l'application de ces formules. Je donne ensuite une démonstration simple du théorème relatif à la condition du développement d'une fonction par la série de Maclaurin, théorème également dû à M. Cauchy; en même temps je donne une formule qui permet de développer une fonction périodique en série de sinus et cosinus. Enfin, l'application de la formule fondamentale me donne une autre formule générale qui renferme celles que Lagrange et Laplace ont données pour le développement des fonctions implicites en séries.

Dans cette application, j'ai été conduit à des résultats que je crois nouveaux. Je prouve que la série de Lagrange n'exprime pas toujours le développement de la plus petite racine de l'équation

$$z = \alpha + \theta \varpi(z),$$

contrairement à l'assertion de l'illustre auteur [**]. Je fais connaître sous quelles conditions la proposition de Lagrange est généralement exacte.

Je termine en donnant une méthode pour trouver une limite supérieure du reste de la série de Lagrange, méthode qui s'applique également aux séries de Taylor et de Maclaurin.

§ II.

Notions sur le calcul des résidus.

2. Lorsqu'une fonction $f(z)$ devient infinie pour une valeur réelle ou imaginaire $z = a$, on peut généralement la mettre sous la

[*] *Voyez* le *Recueil des Savants étrangers*, tome I, les *Annales de Gergonne*, tomes XVI et XVII, et les *Exercices de Mathématiques*.

[**] *Voyez* la *Résolution des équations numériques*, note XI.

forme

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

m étant positif et $\varphi(z)$ ne devenant pas infini pour $z = a$. Alors, si m est entier, et si l'on développe $\varphi(z)$ par la série de Taylor suivant les puissances ascendantes de $z - a$, on aura

$$f(z) = \varphi(a)\frac{1}{(z-a)^m} + \frac{\varphi'(a)}{1}\frac{1}{(z-a)^{m-1}} + \dots$$
$$+ \frac{\varphi^{m-1}(a)}{1.2\ldots(m-1)}\cdot\frac{1}{z-a} + \psi(z),$$

où $\psi(z)$ désigne une fonction qui n'est point infinie pour $z = a$.

Nous appellerons, avec M. Cauchy, *résidu* de $f(z)$ relatif à la valeur $z = a$, le coefficient $\frac{\varphi^{m-1}(a)}{1.2\ldots(m-1)}$ de $\frac{1}{z-a}$. Pour le calculer, on formera la fonction

$$\varphi(z) = (z-a)^m f(z),$$

et, après l'avoir différentiée $m - 1$ fois, on fera, dans le résultat, $z = a$. Nous appellerons *résidu intégral* de $f(z)$ la somme des résidus de cette fonction relatifs aux diverses racines réelles et imaginaires de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0.$$

Pour indiquer le résidu intégral de $f(z)$, nous placerons la lettre $\mathcal{E}$ devant la fonction enfermée dans les parenthèses [ ], comme il suit :

$$\mathcal{E}\,[f(z)].$$

Pour indiquer le résidu, par rapport à une racine particulière $z = a$, et dont m désigne le degré de multiplicité, nous remplacerons la fonction $f(z)$ par la fonction identique

$$\frac{(z-a)^m f(z)}{(z-a)^m},$$

et nous entourerons de parenthèses, sous le signe $\mathcal{E}$, la différence

$(z-a)^m$ écrite en dénominateur; le résidu sera donc indiqué par la notation

$$\mathcal{E}\,\frac{(z-a)^m f(z)}{((z-a)^m)}.$$

Lorsque la fonction $f(z)$ se présente sous la forme fractionnaire

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\chi(z)},$$

pour indiquer la somme des résidus relatifs aux racines de l'équation

$$\chi(z)=0,$$

nous écrirons

$$\mathcal{E}\,\frac{\varphi(z)}{(\chi(z))}.$$

Au contraire, la notation

$$\mathcal{E}\,\frac{(\varphi(z))}{\chi(z)}$$

représentera la somme des résidus de $f(z)$ relatifs aux seules racines de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(z)}=0,$$

et l'on aura identiquement

$$\mathcal{E}\,(f(z))=\mathcal{E}\left(\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}\right)=\mathcal{E}\,\frac{\varphi(z)}{(\chi(z))}+\mathcal{E}\,\frac{(\varphi(z))}{\chi(z)}.$$

Pour indiquer la somme des résidus relatifs aux racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)}=0,$$

dont les parties réelles demeurent comprises entre deux limites x_0 et X_0, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre y_0 et Y_0, nous emploierons la notation

$$\overset{X_0}{\underset{x_0}{}}\mathcal{E}_{y_0}^{Y_0}\,(f(z)).$$

Dans la suite de cet écrit nous désignerons toujours par la lettre i l'imaginaire $\sqrt{-1}$ suivant l'usage généralement adopté.

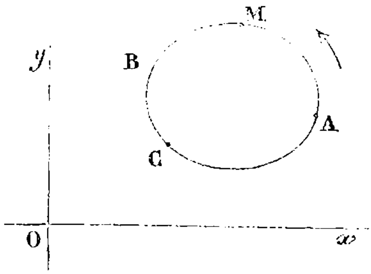
§ III.

Définition d'une intégrale définie prise le long d'un contour donné. — Démonstration d'une formule générale qui donne la valeur d'une pareille intégrale définie dans le cas où la fonction sous le signe $\int$ ne devient pas infinie sur le contour.

3. Soient

$$z = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

une variable imaginaire et $f(z)$ une fonction quelconque réelle ou imaginaire de z [*]. Considérons x, y comme des coordonnées rectangulaires, et supposons que $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ aient, en chaque point,



une valeur unique et réelle. Soit ABC... un contour fermé, tracé arbitrairement dans un plan; pour chaque point de ce contour, z aura une valeur déterminée et prendra un accroissement dz, quand on passera d'un point du contour à un point infiniment voisin. Si l'on suit un arc AM de ce contour, toujours dans le même sens, et si, pour chaque point de cet arc, on forme le produit $f(z)dz$, puis qu'on fasse la somme de tous ces produits, on aura ce que nous appellerons l'*intégrale définie* de $f(z)dz$ le long de l'arc AM.

4. Proposons-nous de calculer la valeur U de l'intégrale définie de $f(z)dz$ le long d'un contour entièrement fermé. Soient A le point pris

---

[*] Nous ne considérerons, toutefois, que les fonctions qui, pour chaque valeur de z, ont une dérivée déterminée et indépendante du rapport arbitraire que l'on peut établir entre l'accroissement infiniment petit de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire.

pour origine de cette intégrale définie, s une longueur variable comptée sur le contour dans un sens déterminé à partir du point A. et c le périmètre entier du contour; z sera fonction de s. En prenant s pour variable indépendante, on pourra mettre la valeur de U sous la forme d'une intégrale définie ordinaire dont les limites seront o et c; savoir :

$$U = \int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Pour avoir la valeur de cette intégrale, nous déterminerons d'abord la quantité infiniment petite dont elle varie quand on fait varier infiniment peu le contour c. Pour avoir une idée bien nette de cette variation, on peut concevoir que les différents points du contour c décrivent, dans un temps infiniment petit dt, des chemins infiniment petits, arbitraires d'ailleurs, dont les extrémités forment le nouveau contour. Alors la quantité z relative à un point du contour c varie avec le temps t, et, par conséquent, elle est une fonction de s et de t.

La limite supérieure c de l'intégrale U étant variable, nous commencerons par la transformer de manière à avoir des limites constantes. A cet effet, nous ferons

$$s = c\sigma,$$

et nous aurons

$$U = \int_0^1 f(z)\frac{dz}{d\sigma}\,d\sigma.$$

Si la fonction $f(z)$ reste finie et continue pour tous les points du contour c, on pourra différentier sous le signe $\int$ par rapport à t, et l'on aura

$$\frac{dU}{dt} = \int_0^1 \frac{d\left[f(z)\frac{dz}{d\sigma}\right]}{dt}\,d\sigma = \int_0^1 \frac{d\left[f(z)\frac{dz}{dt}\right]}{d\sigma}\,d\sigma;$$

et, par suite, en supposant que la dérivée $f'(z)$ reste aussi finie et continue pour tous les points du contour,

$$\frac{dU}{dt} = \left[f(z)\frac{dz}{dt}\right]_0^1.$$

Or, à cause de $s = c\sigma$, le même point du contour répond aux limites $\sigma = 0$, $\sigma = 1$. Donc, si, lorsqu'on revient au point de départ après avoir parcouru un contour entier, $f(z)$ reprend la même valeur, on aura

$$\frac{dU}{dt} = 0.$$

Supposons maintenant qu'on fasse varier t depuis la valeur 0 qui correspond au contour c jusqu'à une valeur finie quelconque t qui corresponde à un autre contour. On voit, par ce qui précède, que si $f(z)$ reste finie et continue, avec sa dérivée, pour toutes les valeurs de z qui correspondent aux divers points situés dans l'intervalle compris entre les deux contours, et si, en outre, cette fonction reprend la même valeur quand on revient à un même point situé dans cet intervalle, U aura la même valeur pour les deux contours.

Enfin, si $f(z)$ reste finie et continue avec sa dérivée pour tous les points du plan compris dans le contour c, la valeur de U sera nulle; car cette valeur restera la même si l'on rétrécit le contour de manière à le réduire à un point intérieur unique. Or, à ce moment, il est évident que l'intégrale s'annule, donc elle était nulle d'abord.

5. Cherchons maintenant la valeur de U relative à un contour donné, en supposant que $f(z)$ devienne infinie dans l'intérieur de ce contour, sans le devenir sur le contour même. Nous supposerons d'abord que $f(z)$ ne devient infinie, dans l'intérieur du contour, que pour un seul point (a, b).

Soient

$$\varphi(a, b) + i\psi(a, b) = z_1,$$

et

$$f(z) = \frac{A}{(z - z_1)^m} + \frac{B}{(z - z_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{H}{z - z_1} + \chi(z),$$

A, B, ..., H désignant des constantes, et $\chi(z)$ une fonction de z qui ne devient pas infinie dans l'intérieur du contour; on aura

$$U = A\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{(z - z_1)^m} + B\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{(z - z_1)^{m-1}} + \ldots$$
$$+ H\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z - z_1} + \int_0^c \chi(z)\frac{dz}{ds}ds.$$

La dernière intégrale du second membre est nulle, d'après ce qui précède, puisque $\chi(z)$ reste finie sur le contour et dans son intérieur. Les autres intégrales sont également nulles, excepté l'avant-dernière. En effet, on a

$$\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{(z-z_1)^m} = \left[\frac{1}{(1-m)(z-z_1)^{m-1}}\right]_0^c;$$

or aux limites $s=0$, $s=c$, répond le même point du contour. D'ailleurs, m étant entier, la différence $(z-z_1)^{m-1}$ reprendra la même valeur aux deux limites : donc le terme considéré est nul, et il en est de même de tous les autres, excepté de l'avant-dernier. Nous allons maintenant considérer ce terme en particulier.

On a

$$\int \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = \log(z-z_1) + \text{constante}$$

$$= \log\{\varphi(x,y)-\varphi(a,b)+i[\psi(x,y)-\psi(a,b)]\} + \text{constante};$$

donc, si l'on pose

$$\rho = \sqrt{[\varphi(x,y)-\varphi(a,b)]^2+[\psi(x,y)-\psi(a,b)]^2},$$

$$\cos\theta = \frac{\varphi(x,y)-\varphi(a,b)}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{\psi(x,y)-\psi(a,b)}{\rho},$$

on aura

$$\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = [\log\rho+\theta i]_0^c.$$

Le terme $[\log\rho]_0^c$ est égal à zéro, car ρ reprend la même valeur aux deux limites. Comme $\sin\theta$ et $\cos\theta$ reprennent aussi la même valeur aux deux limites, l'angle θ varie d'un nombre entier de circonférences en passant d'une limite à l'autre ; le second terme est donc égal à $2k\pi i$, et l'on a

$$\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = 2k\pi i,$$

et, par suite,

$$U = H\,2k\pi i.$$

6. Si $f(z)$ devenait infinie pour plusieurs points (a, b), (a', b'), (a'', b''),..., situés dans l'intérieur du contour donné, on aurait

$$U = [2\,\mathrm{H}k\pi + 2\,\mathrm{H}'k'\pi + 2\,\mathrm{H}''k''\pi + \ldots]\,i,$$

ou bien

$$(1) \qquad \int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\,ds = 2\pi i \sum \mathrm{H}k.$$

Telle est la formule que nous nous proposions de démontrer.

7. Reste maintenant à indiquer comment on peut obtenir les nombres $2k$, $2k'$,.... J'observe, pour cela, que si un arc de cercle varie d'une circonférence entière, le nombre de fois que sa tangente devient infinie, en passant du positif au négatif, surpasse de deux unités le nombre de fois qu'elle devient infinie, en passant du négatif au positif. Le nombre $2k$ est donc égal à l'excès du nombre de fois que la fraction

$$(2) \qquad \frac{\psi(x, y) - \psi(a, b)}{\varphi(x, y) - \varphi(a, b)} = \operatorname{tang} \theta$$

devient infinie, en passant du positif au négatif, sur le nombre de fois qu'elle devient infinie, en passant du négatif au positif, entre les limites de l'intégrale définie. Nous appellerons le nombre $2k$ *excès* ou *indice* de la fraction (2), relatif au contour donné. Remarquons que cet indice est nécessairement un nombre pair.

Pour le calculer on remplacera, dans la fraction, y par sa valeur en fonction de x tirée de l'équation du contour, et l'on aura une expression de la forme

$$(3) \qquad \frac{\Psi(x)}{\Phi(x)}.$$

On posera $\Phi(x) = 0$, et l'on cherchera les racines de cette équation qui répondent à des points du contour. On examinera ensuite si, quand x atteint une de ces racines, la fraction (3) passe du positif au négatif, ou bien si c'est le contraire qui a lieu; il suffira, pour le reconnaître, de déterminer le signe de $\Psi(x)$ et celui de $\Phi'(x)$, pour cette valeur particulière de x. En répétant le même calcul pour chacune des autres racines de l'équation

$$\Phi(x) = 0,$$

qui répondent au contour donné, on aura l'*excès* cherché.

Si x et y pouvaient, sur tout le contour, s'exprimer rationnellement en fonction de s, ou même d'une autre variable quelconque u, la fraction (3) serait alors une fraction rationnelle, et son *excès* pourrait se calculer plus simplement que par la méthode précédente, laquelle exige la résolution d'une équation qui est généralement d'un degré élevé. On peut consulter, sur ce sujet, un Mémoire sur le calcul des indices, présenté par M. Cauchy, en 1831, à l'Académie des Sciences de Turin; deux Mémoires de MM. Sturm et Liouville, insérés dans le tome I du *Journal de Mathématiques*, et un autre Mémoire de M. Cauchy, inséré dans le tome XV du *Journal de l'École Polytechnique*.

8. Soient

$$\varphi(x, y) = x \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = y,$$

il vient

$$z = x + iy, \quad \tang\theta = \frac{y - b}{x - a},$$

et l'excès $2k$ est alors égal à 2. Donc, dans le cas où $z = x + iy$, la formule (1) se réduit à la suivante :

$$\int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\,ds = 2\pi i \sum \mathrm{H},$$

ou bien

$$(4) \qquad \int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\,ds = 2\pi i\,\mathcal{E}(f(z)),$$

le signe $\mathcal{E}$ indiquant la somme des résidus de $f(z)$ relatifs à tous les points situés dans l'intérieur du contour. Cette dernière formule est celle qui a été donnée par M. Cauchy, dans son Mémoire.

§ IV.

Recherche d'une intégrale définie relative à un contour donné, lorsque la fonction sous le signe $\int$ devient infinie sur le contour.

9. Je vais examiner, dans ce paragraphe, ce qui arrive lorsque la fonction $f(z)$ devient infinie sur le contour donné; ce cas particulier n'a pas été considéré par M. Cauchy.

Pour abréger, je supposerai que $f(z)$ ne devienne infinie, sur le contour donné, que pour un seul point E, dont je représente les coordonnées par a et b; $f(z)$ peut d'ailleurs devenir infinie dans l'intérieur du contour. Cela posé, soit

$$\varphi(a, b) + i\psi(a, b) = z_1.$$

Si z_1 est une racine multiple de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0,$$

l'intégrale définie cherchée est généralement infinie ou indéterminée; ce cas ne présente aucun intérêt. Lorsque z_1 est une racine simple, l'intégrale définie cherchée est encore indéterminée, mais sa valeur principale s'exprime par une formule remarquable qui mérite d'être connue, et dont nous ferons usage.

On a alors

$$f(z) = \frac{\mathrm{H}}{z - z_1} + \varpi(z),$$

H désignant une constante et $\varpi(z)$ une fonction qui peut devenir infinie dans l'intérieur du contour, mais qui reste finie sur le contour lui-même; par suite,

$$\int_0^c f(z)\frac{dz}{ds}\,ds = \mathrm{H}\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}\,ds}{z - z_1} + \int_0^c \varpi(z)\frac{dz}{ds}\,ds.$$

La fonction $\varpi(z)$ restant finie sur le contour, la valeur du second terme pourra se calculer à l'aide de la formule (1) du paragraphe précédent; il suffit donc de chercher la valeur du premier terme.

10. En posant, comme dans le paragraphe précédent,

$$\rho = \sqrt{[\varphi(x, y) - \varphi(a, b)]^2 + [\psi(x, y) - \psi(a, b)]^2},$$

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\psi(x, y) - \psi(a, b)}{\varphi(x, y) - \varphi(a, b)},$$

nous aurons, pour l'intégrale indéfinie,

$$\int \frac{\frac{dz}{ds} ds}{z - z_1} = \log \rho + \theta i + \text{constante}.$$

Soient E_1 et E_2 deux points du contour infiniment voisins du point E et pris de part et d'autre de ce point. Désignons par ρ_1 et ρ_2, θ_1 et θ_2, les valeurs de ρ et de θ qui correspondent aux points E_1 et E_2. Nous aurons, pour l'intégrale définie,

$$\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds} ds}{z - z_1} = \lim \log \frac{\rho_2}{\rho_1} + i \lim(\theta_2 - \theta_1).$$

Supposons d'abord que le point E soit un point saillant. Faisons $EE_1 = \delta_1$, $EE_2 = \delta_2$, et désignons par λ_1 et λ_2 les angles que les tangentes au contour, au point E, font avec la partie positive de l'axe des x; les coordonnées des points E_1 et E_2 seront

$$x = a + \delta_1 \cos \lambda_1 + \ldots, \qquad x = a + \delta_2 \cos \lambda_2 + \ldots.$$
$$y = b + \delta_1 \sin \lambda_1 + \ldots, \qquad y = b + \delta_2 \sin \lambda_2 + \ldots.$$

Substituons dans l'équation

$$(1) \qquad z - z_1 = \varphi(x, y) - \varphi(a, b) + i[\psi(x, y) - \psi(a, b)]$$

les coordonnées du point E_1, et appelons A, B, C, D les valeurs respectives des dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{dy}$ pour $x = a$, $y = b$. Nous aurons

$$z - z_1 = [A \cos \lambda_1 + B \sin \lambda_1] \delta_1 + i[C \cos \lambda_1 + D \sin \lambda_1] \delta_1 + \ldots.$$

Posons

$$(2) \qquad \begin{cases} A \cos \lambda_1 + B \sin \lambda_1 = K_1 \cos \mu_1, \\ C \cos \lambda_1 + D \sin \lambda_1 = K_1 \sin \mu_1. \end{cases}$$

K_1 étant un nombre positif, et μ_1 un arc, également positif, compris entre o et 2π: il vient

$$z - z_1 = \delta_1 K_1 e^{\mu_1 i} + \ldots.$$

Identifiant cette valeur de $z - z_1$, qui correspond au point E_1, avec la valeur

$$z - z_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i},$$

qui répond au même point, nous aurons, en passant à la limite,

$$\lim \rho_1 = \lim K_1 \delta_1, \quad \lim \theta_1 = \mu_1 + 2m\pi.$$

En substituant, dans l'équation (1), les coordonnées du point E_2, et en posant

$$(3) \qquad \begin{cases} A\cos\lambda_2 + B\sin\lambda_2 = K_2\cos\mu_2, \\ C\cos\lambda_2 + D\sin\lambda_2 = K_2\cos\mu_2, \end{cases}$$

K_2 étant un nombre positif, et μ_2 un arc compris entre o et 2π, on trouvera, de même,

$$\lim \rho_2 = \lim K_2 \delta_2, \quad \lim \theta_2 = \mu_2 + 2n\pi;$$

et, par suite, on aura

$$\lim \log \frac{\rho_2}{\rho_1} = \lim \log \frac{\delta_2 K_2}{\delta_1 K_1}, \quad \lim(\theta_2 - \theta_1) = \mu_2 - \mu_1 + 2(m-n)\pi.$$

Soit I l'*excès*, relatif au contour, de la fraction qui exprime la valeur de $\tan\theta$, excès égal, comme l'on sait, au nombre des multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$, compris entre les valeurs extrêmes de l'arc : en désignant par ν le nombre de fois qu'on rencontre un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, en allant de μ_2 à μ_1, on aura

$$I = \nu + 2(m-n).$$

Le nombre ν, devant être pris positivement ou négativement suivant que μ_2 est plus grand ou plus petit que μ_1, a l'une des valeurs o, ± 1, ± 2. Donc

$$\lim(\theta_2 - \theta_1) = \mu_2 - \mu_1 + (I - \nu)\pi$$

et

$$(4)\qquad \int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = \lim \log \frac{K_2 \delta_2}{K_1 \delta_1} + [\mu_2 - \mu_1 + (1-\nu)\pi]\, i.$$

Cette intégrale définie est indéterminée, puisqu'elle dépend du rapport arbitraire $\frac{\delta_2}{\delta_1}$; mais si l'on pose

$$\frac{K_2 \delta_2}{K_1 \delta_1} = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\sqrt{(A\cos\lambda_1 + B\sin\lambda_1)^2 + (C\cos\lambda_1 + D\sin\lambda_1)^2}}{\sqrt{(A\cos\lambda_2 + B\sin\lambda_2)^2 + (C\cos\lambda_2 + D\sin\lambda_2)^2}},$$

on a pour sa valeur principale

$$(5)\qquad \int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = [\mu_2 - \mu_1 + (1-\nu)\pi]\, i.$$

11. Si le point E n'est pas un point saillant, EE_1 et EE_2 étant alors sur le prolongement l'un de l'autre, on a

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \pi;$$

et les équations (2) et (3) donnent

$$K_2 = K_1, \quad \mu_2 = \mu_1 \pm \pi;$$

d'où

$$\nu = \pm 1,$$

et

$$\int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = \lim \log \frac{\delta_2}{\delta_1} + \pi I i.$$

La valeur principale, dans ce cas, est

$$(6)\qquad \int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z-z_1} = \pi I i.$$

On peut remarquer que l'excès I est un nombre impair, lorsque $f(z)$ devient infinie sur le contour pour un point qui n'est pas un point saillant; car on trouve, dans ce cas,

$$I = 2(m-n)+1,$$

tandis que le même excès I est toujours un nombre pair quand $f(z)$ ne devient pas infinie sur le contour.

12. Si

$$\varphi(x, y) = x, \quad \psi(x, y) = y;$$

d'où

$$z = x + iy,$$

on a

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 1;$$

et, à cause des équations (2) et (3),

$$K_1 = 1, \quad \mu_1 = \lambda_1, \quad K_2 = 1, \quad \mu_2 = \lambda_2.$$

Par suite, il vient

$$\mu_2 - \mu_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = \omega, \quad I = \nu;$$

d'où

$$(7) \qquad \int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z - z_1} = \log\frac{\delta_2}{\delta_1} + \omega i;$$

et, pour la valeur principale,

$$(8) \qquad \int_0^c \frac{\frac{dz}{ds}ds}{z - z_1} = \omega i.$$

ω est l'angle des deux portions du contour qui aboutissent au point E, et sa valeur est ordinairement égale à π. Si le contour donné est un rectangle, la valeur de ω est $\frac{\pi}{2}$ aux sommets.

§ V.

Formules obtenues en prenant des contours particuliers.

13. Si l'on prend pour contour un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes des coordonnées, et que l'on désigne par x_0, y_0, X, Y les coordonnées de deux sommets opposés, la formule (1) du § III deviendra

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{X}\left[f(z)\frac{dz}{dx}\right]_{y_0} dx - \int_{x_0}^{X}\left[f(z)\frac{dz}{dx}\right]_{Y} dx + \int_{y_0}^{Y}\left[f(z)\frac{dz}{dy}\right]_{X} dy \\ &\qquad\qquad - \int_{y_0}^{Y}\left[f(z)\frac{dz}{dy}\right]_{x_0} dy = 2\pi i \sum \mathrm{H}k. \end{aligned}\right.$$

Les lettres y_0, Y,..., écrites à droite et au bas des parenthèses, expriment que, dans les fonctions comprises dans ces parenthèses, les valeurs particulières attribuées à ces lettres doivent être mises respectivement à la place de x ou y. Nous emploierons toujours la même notation pour indiquer des substitutions semblables.

14. Supposons que $f(z)$ ne devienne pas infinie dans l'intérieur du rectangle. Alors, si l'on pose

$$f(z)\frac{dz}{dx} = \mathrm{P} + i\mathrm{Q},\quad f(z)\frac{dz}{dy} = \mathrm{R} + i\mathrm{S},$$

la formule (A) se décompose dans les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{X} \mathrm{P}_{y_0}\,dx - \int_{x_0}^{X} \mathrm{P}_{Y}\,dx = \int_{y_0}^{Y} \mathrm{R}_{x_0}\,dy - \int_{y_0}^{Y} \mathrm{R}_{X}\,dy, \\ &\int_{x_0}^{X} \mathrm{Q}_{y_0}\,dx - \int_{x_0}^{X} \mathrm{Q}_{Y}\,dx = \int_{y_0}^{Y} \mathrm{S}_{x_0}\,dy - \int_{y_0}^{Y} \mathrm{S}_{X}\,dy. \end{aligned}\right.$$

Ces deux dernières formules se trouvent démontrées dans le Mémoire cité le premier, au § I.

En prenant le rectangle dans des positions particulières relativement aux axes, on obtiendra immédiatement beaucoup d'autres formules générales, que, du reste, on peut déduire de (A), en donnant des valeurs particulières aux limites des intégrales.

15. Si le contour est un quadrilatère mixtiligne formé par deux arcs de cercle concentriques et deux rayons, et qu'on fasse

$$x = r\cos p, \quad y = r\sin p,$$

on obtiendra la formule

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{r_0}^{R}\left[f(z)\frac{dz}{dr}\right]_{p_0} dr - \int_{r_0}^{R}\left[f(z)\frac{dz}{dr}\right]_{P} dr + \int_{p_0}^{P}\left[f(z)\frac{dz}{dp}\right]_{R} dp \\ &\qquad - \int_{p_0}^{P}\left[f(z)\frac{dz}{dp}\right]_{r_0} dp = 2\pi i \sum Hk, \end{aligned}\right.$$

formule dans laquelle r_0 et R désignent les rayons des deux arcs, p_0, P, les angles que les rayons qui servent à former le quadrilatère font avec la partie positive de l'axe des x.

On obtiendra des formules plus simples en prenant pour contour, au lieu d'un quadrilatère, soit une demi-circonférence, soit une circonférence entière, etc.

16. En appliquant la formule (4) du § III aux deux mêmes contours, ou en faisant dans les formules (A) et (B), $z = x + iy$, on trouve les deux formules suivantes :

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{X}[f(x + iy_0) - f(x + iY)]\,dx \\ &+ i\int_{y_0}^{Y}[f(X + iy) - f(x_0 + iy)]\,dy = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{x_0\ y_0}^{X\ Y}(f(z)), \end{aligned}\right.$$

$$(D)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{r_0}^{R}[f(re^{p_0 i})\,e^{p_0 i} - f(re^{Pi})\,e^{Pi}]\,dr \\ &+ i\int_{p_0}^{P}[f(Re^{pi})Re^{pi} - f(r_0e^{pi})\,r_0e^{pi}]\,dp = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{r_0\ p_0}^{R\ P}(f(z)). \end{aligned}\right.$$

17. Si $f(z)$ ou $f(x + iy)$ s'évanouit, 1° pour $x = \pm\infty$, quel que soit y; 2° pour $y = \infty$, quel que soit x, la formule (C) devient

$$(E)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{-\infty\ \ 0}^{+\infty\ +\infty}(f(x)).$$

Si $f(z)$ s'évanouit, 1° pour $x = \pm \infty$, quel que soit y; 2° pour $y = -\infty$, quel que soit x, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{}} \mathcal{E}_{-\infty}^{0} (f(x)).$$

La démonstration de la formule (E) est l'objet principal du Mémoire inséré dans les *Annales de Mathématiques*, et cité au § I.

Enfin, si $f(z)$ devient nulle, 1° pour $x = \pm \infty$, quel que soit y, 2° pour $y = \pm \infty$, quel que soit x, on aura

$$\text{(F)} \qquad \mathcal{E}(f(z)) = 0.$$

Il est bon d'observer, qu'en faisant varier la position du rectangle, la même formule fondamentale en fournira un grand nombre d'autres que nous croyons inutile de déduire ici.

18. En appliquant toujours la formule (4) du § III à un cercle dont le centre soit à l'origine, on trouve

$$\text{(G)} \qquad \int_0^{2\pi} z f(z)\,dp = 2\pi \overset{r}{\underset{0}{}} \mathcal{E}_0^{2\pi} (f(z)),$$

formule qui peut se déduire de (D) en particularisant les limites.

Si le produit $z f(z)$ se réduit à une constante C pour une valeur infinie du module de z, la dernière formule se réduit à la suivante,

$$\text{(H)} \qquad \mathcal{E}(f(z)) = \text{C},$$

le signe $\mathcal{E}$ désignant le résidu intégral de $f(z)$. Si la constante devient nulle, on a

$$\text{(K)} \qquad \mathcal{E}(f(z)) = 0.$$

Les formules (H) et (K) peuvent être appliquées à la sommation des séries lorsque l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

a une infinité de racines. Nous les appliquerons à quelques exemples.

19. Supposons maintenant que $f(z)$ soit égale au produit

$$\varphi(z).\text{F}(z)$$

de deux autres fonctions, dont l'une, $\text{F}(z)$, ne devient pas infinie dans l'intérieur d'un contour donné, ou du moins ne produise dans le résidu $\mathcal{E}[f(z)]$ relatif à ce contour que des termes dont la somme se réduit à zéro, tandis que l'autre fonction, $\varphi(z)$, peut devenir infinie dans ce contour. Désignons par z_1 une racine de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 0,$$

qui répond à un point situé dans ce contour, et par m son degré de multiplicité. Enfin, soient H_m et K_m deux quantités réelles déterminées par la formule

$$H_m + i K_m = \frac{D^m[\varphi(z)]_{z_1}}{1.2\ldots m}.$$

D'après ce qui a été dit au § II, nous aurons, pour le résidu relatif à ce contour,

$$(L)\quad \begin{cases} \mathcal{E}[\varphi(z)F(z)] \\ = \sum \left[\begin{array}{r} (H_{m-1} + i K_{m-1}) F(z_1) + (H_{m-2} + i K_{m-2}) F'(z_1) + \ldots \\ + (H + iK) \dfrac{F^{m-1}(z_1)}{1.2\ldots(m-1)} \end{array} \right] \end{cases}$$

En ayant égard à l'équation (L) et remplaçant $f(z)$ par sa valeur dans les formules qui précèdent, on obtiendra des formules nouvelles, desquelles on pourra en déduire une infinité d'autres en attribuant à $\varphi(z)$ et à $F(z)$ des valeurs particulières.

20. Les formules générales que nous venons d'établir comprennent explicitement ou implicitement toutes celles que M. Cauchy a données dans ses divers Mémoires sur les intégrales définies. En prenant pour $f(z)$ des valeurs particulières, on peut déduire de ces mêmes formules une infinité d'intégrales définies, dont la détermination est ainsi ramenée à la recherche des racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0,$$

renfermées entre certaines limites.

21. Lorsqu'on applique les formules que nous venons d'établir ou celles qu'on peut en déduire, il est essentiel de se rappeler que si $f(z)$ devient infinie pour des valeurs de z qui répondent à des points situés sur le contour considéré, il faut calculer, à l'aide des formules (6) ou (8) du § IV, les termes qui, dans l'expression de l'intégrale définie cherchée, proviennent de ces valeurs de z. On a vu, d'ailleurs, que l'intégrale définie est alors indéterminée et qu'on obtient seulement sa *valeur principale*.

§ VI.

Applications des formules obtenues dans le paragraphe précédent.

Application de la formule (A).

22. Si dans la formule (A) on prend

$$z = ax + ixy, \quad f(z) = e^{-z} z^{n-1},$$

a et n étant des nombres positifs, on obtiendra une formule dont le second membre sera toujours nul, si petit que soit x_0. Si l'on fait, dans cette dernière,

$$x_0 = 0, \quad X = \infty, \quad y = b,$$

elle deviendra

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-(a+ib)x} dx = \frac{\Gamma(n)}{(a+ib)^n}.$$

Cette dernière formule est précisément celle d'Euler, qui se trouve ainsi démontrée pour toutes les valeurs positives de n. Si l'on pose

$$a + ib = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (\cos\omega + i \sin\omega),$$

on en déduit les deux intégrales définies

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{\Gamma(n) \cos n\omega}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int^{\infty} x^{n-1} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{\Gamma(n) \sin n\omega}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Pour $a = 0$, $n = \frac{1}{2}$, et sachant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, ces deux intégrales définies deviennent

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin bx\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{16}},$$

et, en remplaçant x par x^2 dans ces dernières, il vient

$$\int_0^\infty \cos(bx^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(bx^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{16}}.$$

Application de la formule (C).

25. Prenons

$$f(z) = e^{-z^2}.$$

On trouve, en remplaçant y par a, les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^a e^{x^2}\,dx.$$

Prenons encore

$$f(z) = e^{-pz^2+qz}, \quad p = a + ig, \quad q = b + if,$$

a désignant une quantité positive, on trouve

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-px^2+qx}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-p(x+iY)^2+q(x+iY)}\,dx,$$

et l'égalité de ces deux intégrales est ainsi rigoureusement démontrée.

Si l'on remplace, dans l'intégrale du second membre, x par $x + h$, h étant déterminé par l'équation

$$h + iY = \frac{q}{2p},$$

on la ramènera à une intégrale connue et l'on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}[\cos(fx^2-gx)-i\sin(fx^2-gx)]\,dx$$
$$= e^{\frac{(b+ig)^2}{4(a+if)}}\sqrt{\frac{\pi}{a+if}}.$$

Applications de la formule (E).

24. En donnant à $f(z)$ diverses formes particulières qui satisfassent aux conditions énoncées au n° **17**, et si r désigne une quantité positive et m un nombre entier, on établira sans difficulté les formules générales:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(x)-F(-x)}{2i}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}F(0),$$
$$\int_0^{\infty} \frac{F(x)+F(-x)}{2}\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}F(ri),$$
$$\int_0^{\infty} \frac{F(x)-F(-x)}{2i}\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}F(ri),$$
$$\int_0^{\infty} \frac{F(x)+F(-x)}{2}\frac{r\,dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{4}[F(r)-F(-r)]\,i,$$
$$\int_0^{\infty} \frac{F(x)-F(-x)}{2i}\frac{r^2\,dx}{x(x^2+r^2)} = \frac{\pi}{2}[F(0)-F(ri)],$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{r-xi}\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(r-xi)^m} = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{r+xi}\,dx = 2\pi F(ri),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(r+xi)^m}\,dx = (-1)^{m-1}\frac{2\pi}{\Gamma(m)}\frac{d^{m-1}F(ri)}{dr^{m-1}}.$$

25. En ayant égard à la formule (L), dans laquelle on remplacera z_1 par $h+ki$, et a, b, r désignant toujours des quantités positives, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-xi)^{a-1}\varphi(x)\,dx = -2\pi[(K-Hi)(k-hi)^{a-1}+\ldots],$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{bxi}\varphi(x)\,dx = -2\pi[(K-Hi)\,e^{-bx}(\cos bh+i\sin bh)+\ldots],$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} l(1-rxi)\,\varphi(x)\,dx = -2\pi[(K-Hi)\,l(1+kr-hri)+\ldots],$$

. . . .

Chacune de ces formules se décomposera en deux équations réelles, lorsqu'on égalera séparément à zéro les parties réelles des deux membres et les coefficients de i. En opérant ainsi et prenant pour $\varphi(x)$ une fonction réelle, on obtiendra une multitude de formules.

Si maintenant on attribue aux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$, $\varphi(x)$, ou bien aux constantes a, b, r,..., des valeurs particulières, on déduira des formules générales qui précèdent un grand nombre d'intégrales définies connues, et une infinité d'autres nouvelles. Si, comme exemple, on prend pour $f(x)$ les deux fonctions

$$\frac{e^{bxi}}{x+ri}, \quad \frac{e^{bxi}}{x-ri},$$

on trouve immédiatement les intégrales définies suivantes :

$$\int_0^\infty \cos bx \frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} e^{-br}, \qquad \int_0^\infty \sin bx \frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2} e^{-br},$$

$$\int_0^\infty \cos bx \frac{r\,dx}{x^2-r^2} = -\frac{\pi}{2} \sin br, \qquad \int_0^\infty \sin bx \frac{x\,dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2} \cos br,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} \frac{r^2 dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-br}).$$

Applications de la formule (G).

26. En supposant dans cette formule

$$f(z) = \frac{\mathrm{F}(z)}{z},$$

$\mathrm{F}(z)$ ne devenant jamais infinie, on trouve

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(z)\,dp = 2\pi \mathrm{F}(0),$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x + re^{pi})\,dp,$$

en remplaçant $\mathrm{F}(z)$ par $\varphi(x+z)$. On trouvera avec la même facilité les deux formules générales,

$$\int_0^{2\pi} z^n \mathrm{F}(z)\,dp = 0, \quad \int_0^{2\pi} z^{-n} \mathrm{F}(z)\,dp = \frac{2\pi \mathrm{F}^n(0)}{1.2.3\ldots n}.$$

Applications des formules (H) *et* (F).

27. Si $\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$ est une fraction rationnelle dans laquelle le degré du dénominateur surpasse de deux unités celui du numérateur, et si, en même temps, l'équation

$$\chi(z) = 0$$

n'a que des racines simples, en désignant par a l'une quelconque des racines de cette équation, on aura

$$\sum \frac{\varphi(a)}{\chi'(a)} = 0.$$

Si le degré du dénominateur surpasse seulement d'une unité celui du numérateur, on aura

$$\sum \frac{\varphi(a)}{\chi'(a)} = \frac{A}{A_1},$$

A et A_1 désignant les coefficients des plus hautes puissances de z dans les deux termes de la fraction.

Si l'on remplace $f(z)$ par $\frac{F(z)}{z-a}$, $F(z)$ devenant nulle pour z infinie, on trouvera

$$F(a) = \mathcal{E} \frac{(F(z))}{a-z},$$

et en changeant a en z et z en u, u étant une nouvelle variable, il viendra

$$F(z) = \mathcal{E} \frac{(F(u))}{z-u}.$$

Cette dernière formule donne immédiatement le développement d'une fraction rationnelle en fractions simples et est susceptible d'un grand nombre d'autres applications.

28. Si $F(z)$ désigne une fonction qui reste finie pour $z = \infty$, on pourra faire, dans la formule (F),

$$f(z) = \frac{F(z)}{z-a},$$

et l'on aura, en changeant a en z et z en u,

$$F(z) = \mathcal{E}\,\frac{[F(u)]}{z-u}.$$

Si l'on prend

$$F(u) = \operatorname{cotang} u = \frac{\cos u}{\sin u},$$

on trouve immédiatement

$$(1)\qquad \operatorname{cotang} z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2-\pi^2} + \frac{2z}{z^2-4\pi^2} + \frac{2z}{z^2-9\pi^2} + \ldots.$$

Dans cette formule, z peut être réel ou imaginaire. On en déduit

$$(2)\qquad \operatorname{tang} z = \frac{2z}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \frac{2z}{9\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \frac{2z}{25\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - z^2} + \ldots;$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n} = \frac{4n}{\pi}\left[\frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{9n^2-1} + \frac{1}{25n^2-1} + \ldots\right].$$

Si, après avoir multiplié par dz les deux membres de l'équation (1), on les intègre entre les limites $\frac{\pi}{2}$ et z, on trouvera

$$\sin z = \frac{2z}{\pi}\cdot\frac{1-\frac{z^2}{\pi^2}}{1-\frac{1}{4}}\cdot\frac{1-\frac{z^2}{4\pi^2}}{1-\frac{1}{16}}\cdot\frac{1-\frac{z^2}{9\pi^2}}{1-\frac{1}{36}}\cdots.$$

Divisant par z les deux membres de cette égalité, faisant ensuite $z=0$, on en déduira

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

et

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

En intégrant entre les limites 0 et z les deux membres de l'équation (2), après les avoir multipliés par dz, on trouvera

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

§ VII.

Sur l'usage des valeurs principales des intégrales définies indéterminées.

29. Les formules établies précédemment font connaître un grand nombre d'intégrales définies dont les valeurs sont déterminées; elles donnent en outre les valeurs principales d'intégrales définies indéterminées dans lesquelles l'élément différentiel devient infini. Or, ces valeurs principales peuvent s'exprimer immédiatement par des intégrales définies entièrement déterminées; on connaîtra donc les valeurs de ces dernières. Nous allons en donner un exemple.

Dans la formule (E), § IV, posons

$$f(x) = \frac{(-ix)^{a-1}}{1+x},$$

a désignant un nombre plus petit que 1. On trouve alors

$$(-i)^{a-1}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} + i^a \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x} = \pi i^{a-1};$$

puis, en multipliant les deux membres par $(-i)^a$, et ayant égard à l'équation

$$(-i)^{2a-1} = \sin a\pi + i\cos a\pi,$$

on obtient les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x} = \pi \cot a\pi.$$

La première de ces deux intégrales est déterminée, et la seconde est réduite à sa valeur principale, qui est la limite de

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x} + \int_{1+\varepsilon}^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x},$$

lorsque ε tend vers zéro. Si l'on fait

$$x = (1-\varepsilon)z,$$

dans le premier terme, et

$$x = \frac{1+\varepsilon}{z},$$

dans le second, il viendra

$$\int_0^1 \left[\frac{(1-\varepsilon)^a z^{a-1}}{1-(1-\varepsilon)z} - \frac{(1+\varepsilon)^a z^{-a}}{1+\varepsilon - z} \right] dz;$$

en passant à la limite et remplaçant z par x, on aura

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-z}\, dx = \pi \cot a\pi,$$

équation qui donne la valeur d'une intégrale définie déterminée.

§ VIII.

Démonstration du théorème relatif au développement des fonctions explicites en séries convergentes. — Développement d'une fonction périodique en série de sinus et de cosinus.

30. Dans la formule (G), obtenue en prenant pour contour un cercle, remplaçons $f(z)$ par $\frac{F(z)}{z-a}$; a désignant une quantité dont le module est inférieur au rayon du cercle que l'on considère, et $F(z)$ une fonction qui reste finie et continue avec sa dérivée, et n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de z correspondante aux divers points de l'intérieur de ce cercle. Nous obtiendrons ainsi la formule suivante :

$$F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z F(z)}{z-a}\, dp;$$

et, en changeant a en z et z en u, u désignant une variable dont les valeurs correspondent aux points de la circonférence du cercle considéré, cette formule devient

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u F(u)}{u-z}\, dp.$$

Le module de z étant inférieur à celui de u, l'expression $\frac{u}{u-z}$ pourra se développer en série convergente, et en effectuant le développement, on obtiendra

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\,dp + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{-1}\,F(u)\,dp + \ldots$$
$$+ \frac{z^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{-n}\,F(u)\,dp + \ldots,$$

équation dont le second membre est une série convergente.

En différentiant les deux membres de la dernière équation n fois de suite par rapport à z, puis faisant, dans le résultat obtenu, $z=0$, on trouve

$$\frac{F^n(0)}{1.2.3\ldots n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{-n}\,F(u)\,dp;$$

par suite, on a

$$F(z) = F(0) + F'(0)z + \frac{F''(0)}{1.2}z^2 + \ldots;$$

ce qui est la série de Maclaurin, de laquelle on peut déduire, comme on sait, la série de Taylor.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. *Une fonction quelconque, réelle ou imaginaire,* $F(z)$, *ayant une valeur unique pour chaque valeur de* z, *sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable* z, *tant que le module de* z *restera inférieur à celui pour lequel la fonction proposée et sa dérivée cessent d'être finies et continues.*

Ainsi, en particulier, les fonctions $\cos z$, $\sin z$, e^z, ... seront toujours développables en séries convergentes; au contraire, les fonctions $(1+z)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{1-z}$, ... ne sont développables en série convergente que si le module de z est inférieur à l'unité.

31. Supposons dans (D), § V, les limites $p_0 = 0$, $P = 2\pi$; ce qui revient à supposer que le contour devienne une couronne circulaire.

Faisons, en outre,

$$r e^{pi} = u, \quad r_0 e^{pi} = v,$$

et remplaçons $f(z)$ par $\frac{F(z)}{z-a}$, a ayant un module compris entre r_0 et r, et $F(z)$ étant finie, continue et n'ayant qu'une seule valeur pour chaque valeur de z correspondant à un point situé dans la couronne circulaire; il viendra, en changeant dans le résultat obtenu, a en z,

$$(1) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u F(u)}{u-z} dp + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{v F(v)}{z-v}.$$

Or, le module de z étant plus grand que celui de v et plus petit que celui de u, les expresssions $\frac{u}{u-z}$, $\frac{v}{z-v}$ pourront se développer en séries convergentes. Donc $F(z)$ pourra également se développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et descendantes de la variable z; d'où résulte une généralisation du théorème précédent qui a été indiquée par M. le capitaine Laurent.

32. Les intégrales qui entrent dans l'équation (1) peuvent être prises le long d'un cercle quelconque décrit de l'origine comme centre avec un rayon compris entre r_0 et r. Donc, si l'on a

$$r_0 < 1 \quad \text{et} \quad r > 1,$$

on pourra faire

$$z = e^{\varpi i},$$

et, en prenant les intégrales le long d'un cercle de rayon 1, ce qui est permis, il viendra

$$F(e^{\varpi i}) = \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F(e^{pi})\,dp + e^{\varpi i}\int_0^{2\pi} F(e^{pi})\,e^{-pi}\,dp \\ &+ e^{2\varpi i}\int_0^{2\pi} F(e^{pi})\,e^{-2pi}\,dp + \ldots + e^{-\varpi i}\int_0^{2\pi} F(e^{pi})\,e^{pi}\,dp \\ &+ e^{-2\varpi i}\int_0^{2\pi} F(e^{pi})\,e^{2pi}\,dp + \ldots \end{aligned}\right\},$$

formule où ϖ désigne un angle réel et qui exige seulement que, pour le module 1 de z, la fonction $F(z)$ soit finie et continue avec sa dérivée, et n'ait qu'une seule valeur pour chaque valeur de z.

Soit maintenant $f(\varpi)$ une fonction finie et continue pour les valeurs de ϖ comprises entre zéro et 2π, et satisfaisant pour toutes valeurs réelles de ϖ à la condition

$$f(\varpi + 2\pi) = f(\varpi),$$

de sorte qu'elle sera finie et continue pour toutes valeurs réelles de ϖ, et, de plus, périodique. Si nous posons

$$f(\varpi) = F(e^{\varpi i}),$$

la fonction $F(z)$ jouira de la propriété d'être finie et continue pour le module 1 de z, et de n'avoir qu'une valeur pour chaque valeur de z; car les diverses valeurs de ϖ, qui répondent à une même valeur de z, différant entre elles de multiples de 2π, feront acquérir une même valeur à $f(\varpi)$, et par conséquent à $F(e^{\varpi i})$. On pourra donc appliquer la formule établie ci-dessus, ce qui donnera

$$f(\varpi) = \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(p)\,dp + e^{\varpi i}\int_0^{2\pi} f(p)\,e^{-pi}\,dp \\ \displaystyle + e^{2\varpi i}\int_0^{2\pi} f(p)\,e^{-2pi}\,dp + \ldots + e^{-\varpi i}\int_0^{2\pi} f(p)\,e^{pi}\,dp \\ \displaystyle + e^{-2\varpi i}\int_0^{2\pi} f(p)\,e^{2pi}\,dp + \ldots \end{array}\right\},$$

ou bien, en remplaçant $e^{\pm n\varpi i}$ par $\cos n\varpi \pm i \sin n\varpi$,

$$f(\varpi) = \frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(p)\,dp + \cos\varpi\int_0^{2\pi} f(p)\cos p\,dp \\ \displaystyle + \cos 2\varpi\int_0^{2\pi} f(p)\cos 2p\,dp + \ldots \\ \displaystyle + \sin\varpi\int_0^{2\pi} f(p)\sin p\,dp + \sin 2\varpi\int_0^{2\pi} f(p)\sin 2p\,dp + \ldots \end{array}\right\}.$$

§ IX.

Démonstration de la formule concernant le développement des fonctions implicites en séries.

33. Je vais montrer, dans ce paragraphe, comment le nombre des racines d'une équation qui répondent à des points situés dans l'intérieur d'un contour quelconque, la somme de ces racines et, plus généralement, une somme de fonctions semblables de ces racines, peuvent s'exprimer au moyen d'intégrales définies relatives à ce contour.

Si l'équation proposée est mise sous la forme

$$(1) \qquad \Pi(z) + \theta\varpi(z) = 0,$$

dans laquelle θ représente un nombre tel, que le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}$ soit constamment inférieur à 1, pour tous les points du contour, on arrive à ce théorème remarquable :

Le nombre des racines de l'équation (1) *est égal à celui des racines de l'équation*

$$(2) \qquad \Pi(z) = 0,$$

comprises dans le contour.

La somme des racines de l'équation (1), comprises dans le contour, peut alors s'exprimer à l'aide des racines de l'équation (2), par une série convergente, ce qui permet de calculer des valeurs approchées des racines correspondantes de l'équation (1). On arrive ainsi à une formule qui renferme implicitement celles que Lagrange et Laplace ont données pour le développement des fonctions en séries. Enfin, je termine en donnant une méthode pour calculer une limite du reste de la série de Lagrange, méthode qui s'applique également aux séries de Taylor et de Maclaurin.

34. Considérons un contour fermé c, et supposons que l'équation (1) ait m racines, égales ou inégales, qui correspondent à des points situés dans ce contour. Représentons par $f(z)$ le premier membre de cette équation, et désignons par $z_1, z_2, \ldots, z_m$ ces m racines. Enfin, désignons par $F(z)$ une fonction quelconque qui ne devienne pas infinie dans le contour considéré et qui ait une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de z. Cela posé, en appliquant à ce contour la formule (4) du § III, nous aurons

$$(3)\qquad m = \frac{1}{2\pi i}\int_0^c \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{ds}\,ds,$$

$$(4)\qquad F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^c F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{ds}\,ds.$$

35. Remplaçons dans l'équation (4) $f(z)$ et $f'(z)$ par leurs valeurs, elle deviendra

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^c F(z)\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}\frac{dz}{ds}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_0^c F(z)\,D_z\log\left[1 + \theta\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]\frac{dz}{ds}\,ds.$$

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de l'équation (2) comprises dans le contour, on aura de même

$$F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \ldots + F(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^c F(z)\frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)}\frac{dz}{ds}\,ds,$$

et, par conséquent,

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \ldots + F(\alpha_n)$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_0^c F(z)\,D_z\log\left[1 + \theta\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]\frac{dz}{ds}\,ds.$$

L'intégration par parties donne

$$\int F(z)\,D_z\log\left[1 + \frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]\frac{dz}{ds}\,ds$$
$$= F(z)\log\left[1 + \frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}\right] - \int F'(z)\log\left[1 + \frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Or, si le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}$ est inférieur à 1 pour tous les points du contour, la partie intégrée $F(z)\log\left[1 + \frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]$ reprendra la même valeur aux deux limites $s = 0$, $s = c$, et, par suite, il viendra

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \ldots + F(\alpha_n)$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_0^c F'(z)\log\left[1 + \theta\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Supposons

$$F(z) = 1;$$

en vertu de l'équation (3), la dernière formule se réduit à l'égalité

$$m = n$$

qui montre que les équations (1) et (2) ont le même nombre de racines comprises dans le contour. Le module de $\theta \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$ étant supposé inférieur à l'unité pour toutes les valeurs de z qui correspondent aux divers points du contour considéré, $\log\left[1 + \theta \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]$ peut se développer en série convergente, et l'on a finalement la formule suivante qu'il s'agissait d'établir, savoir,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = F(\alpha_1) + F(\alpha_2) + \ldots + F(\alpha_m) \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-\theta)^n}{n} \int_0^c F'(z) \left(\frac{\varpi z}{\Pi z}\right)^n \frac{dz}{ds}\, ds. \end{aligned}\right.$$

56. Lorsque les m racines de l'équation (1) comprises dans le contour sont à peu près égales à une même quantité α_1, si l'on peut faire

$$\Pi(z) = (z - \alpha_1)^m,$$

alors, en vertu de l'équation (4) du § III, et ce qui a été dit au § II, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^c F'(z) \frac{(\varpi z)^n}{(z - \alpha_1)^{mn}} \frac{dz}{ds}\, ds = \frac{D_z^{mn-1}[F'(z)(\varpi z)^n]_{\alpha_1}}{1.2.3\ldots(mn-1)};$$

par suite, la formule (5) devient, dans ce cas particulier,

$$\begin{aligned} &F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) \\ &= m F(\alpha_1) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-\theta)^n}{n} \frac{D_z^{mn-1}[F'(z)(\varpi z)^n]_{\alpha_1}}{1.2.3\ldots(mn-1)}. \end{aligned}$$

Si $m = 1$, on retrouve la série de Lagrange, savoir :

$$F(z_1) = F(\alpha_1) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-\theta)^n \frac{D_z^{n-1}[F'(z)(\varpi z)^n]_{\alpha_1}}{1.2.3\ldots n}.$$

5..

37. On voit par ce qui précède, que si l'on pouvait enfermer une racine quelconque de l'équation (2) dans un contour tel, que pour chaque point de ce contour le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{\Pi(z)}$ fût inférieur à 1, on saurait que l'équation (1) n'a qu'une seule racine comprise dans ce contour, et l'on pourrait la développer par une série analogue à celle de Lagrange. On comprend, d'après cela, que, si l'équation proposée a ses racines inégales, on pourra les développer toutes séparément par des séries convergentes; et l'on conçoit en même temps que la série de Lagrange ne doit pas exprimer toujours le développement de la plus petite racine de l'équation

$$(6) \qquad z - \alpha_1 + \theta\varpi(z) = 0,$$

où α_1 désigne une quantité quelconque. Nous allons montrer qu'effectivement cela n'a pas toujours lieu.

Prenons pour contour un cercle ayant pour centre l'origine et qui comprenne dans son intérieur le point qui répond à $z = \alpha_1$. Si, pour tous les points de ce cercle, le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{z - \alpha_1}$ est inférieur à 1, on peut affirmer, d'après ce qui précède, que la série de Lagrange donnera la plus petite racine de l'équation proposée. Si l'équation proposée a plusieurs racines réelles inférieures à α_1, ou même plusieurs racines imaginaires, dont le module soit inférieur à α_1, on ne pourra plus enfermer seuls dans un même cercle ayant pour centre l'origine, les points qui répondent à α_1 et à la plus petite racine de l'équation proposée; de sorte qu'on ne pourra rien affirmer immédiatement. Or je dis que, dans ce cas, la série de Lagrange donne généralement, des deux racines qui comprennent immédiatement α_1, celle qui diffère le moins de α_1. Pour le démontrer, posons

$$y = z - \alpha_1,$$

ce qui revient à changer l'origine; l'équation (6) deviendra

$$y + \theta\varpi(y + \alpha_1) = 0.$$

Supposons que de la nouvelle origine pour centre, on puisse décrire un cercle tel, que pour tous ses points le module de $\frac{\theta\varpi(y+\alpha_1)}{y}$ soit inférieur à 1; alors, d'après ce qui précède, la série de Lagrange exprime le développement de la plus petite valeur de y, et par suite, on a la valeur de z qui diffère le moins de α_1. Mais, lorsqu'on ne pourra pas tracer un pareil cercle, ce qui arrivera nécessairement dans certains cas, ni même un contour qui remplisse les conditions du cercle, on ne voit pas alors ce que la série de Lagrange peut représenter.

En résumé, si pour une valeur donnée de θ la série de Lagrange est convergente, et si l'on peut tracer un contour comprenant le point qui répond à α_1, et tel, que pour tous ses points le module de $\frac{\theta\varpi(z)}{z-\alpha_1}$ soit inférieur à 1, on est assuré de deux choses : 1° que l'équation (6) n'a qu'une seule racine comprise dans ce contour; 2° que la série de Lagrange exprime le développement de cette racine. Dans le cas où on ne saura pas tracer un pareil contour, on ne connaîtra pas ce que la série de Lagrange représente.

58. Lorsqu'on est parvenu à séparer les racines d'une équation, on peut obtenir des valeurs plus approchées de ces racines en opérant comme il suit. Prenons pour contour un cercle ayant pour centre l'origine, et supposons dans la formule (5)

$$\mathrm{F}(z) = z;$$

nous aurons

$$(7)\quad z_1 + z_2 + \ldots + z_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-\theta)^n}{n}\int_0^{2\pi} z\left(\frac{\varpi z}{\Pi z}\right)^n dp.$$

Si toutes les racines ont des modules différents, et si nous les supposons écrites par ordre de grandeur, z_1 étant la plus petite, à l'aide de la formule (7) on pourra d'abord calculer z_1 en prenant un cercle qui la contienne seule; puis $z_1 + z_2$, en prenant un second cercle qui ne renferme que ces deux racines, et ainsi de suite.

Dans le cas où plusieurs racines auraient des modules égaux, il faudrait alors partager le cercle en un nombre de secteurs suffisamment grand, pour que dans un même secteur il n'y ait pas deux racines ayant le même module, et faire pour chaque secteur, en particulier, ce que l'on ferait pour le cercle entier dans le cas où tous les modules sont différents. Ceci suppose que le module de $\theta \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$ soit inférieur à 1, pour tous les points de chacun des cercles ou de chacun des secteurs considérés.

39. Soit

$$z = f[a + \theta\varphi(z)],$$

et proposons-nous de trouver une fonction quelconque de z, $F(z)$.

Posons

$$z = f(a + u),$$

d'où résulte

$$u = \theta\varphi[f(a + u)].$$

Il s'agit alors de trouver $F[f(a + u)]$, ou $F(z)$. En appliquant la formule de Lagrange, il vient

$$F(z) = F[f(a)] + \sum_{n=1}^{n=\infty} \theta^n \frac{D^{n-1}\{F'[f(a)][\varphi f(a)]^n\}}{1.2.3\ldots n}.$$

Cette dernière formule est due à Laplace.

40. Nous compléterons ce qui est relatif à la série de Lagrange en indiquant une méthode due à M. Cauchy, pour calculer une limite supérieure, du reste, que l'on obtient en arrêtant cette série au terme de rang n.

Cette méthode, qui s'applique à toutes les séries dans lesquelles les coefficients de la variable s'expriment par des intégrales définies, repose sur deux théorèmes que nous nous bornerons à énoncer.

Théorème I. *Le module de l'expression*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,dp, \tag{8}$$

pour une valeur déterminée du module de la variable z, est toujours inférieur à la valeur maxima maximorum *du module correspondant de $f(z)$.*

THÉORÈME II. *La valeur du module de la même expression est indépendante du module de z, tant que ce dernier module est inférieur à celui pour lequel $f(z)$ cesse d'être finie et continue.*

D'après cela, si $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \mathrm{R}e^{\mathrm{P}i}, \tag{9}$$

on aura une limite supérieure du module de l'expression (8), la plus rapprochée possible, en cherchant la valeur *maxima maximorum* R_1 de R considéré comme fonction de p seulement, puis la valeur *minima minimorum* de R_1 considéré comme fonction de r, r désignant le module de z. Cette dernière valeur est appelée par M. Cauchy le *module principal de $f(z)$*. Or on trouve facilement que les valeurs particulières de p et de r, qui correspondent au module principal, satisfont aux équations

$$\mathrm{D}_p\mathrm{R} = 0, \quad \mathrm{D}_r\mathrm{R} = 0.$$

En ayant égard à ces deux équations, on déduit de l'équation (9) les deux suivantes :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}z = \mathrm{D}_p\mathrm{P}, \quad \frac{f'(z)}{f(z)}z = ir\mathrm{D}_r\mathrm{P},$$

équations qui ne peuvent subsister que si l'on a

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad f'(z) = 0.$$

Comme la valeur de z, qui répond au module principal, est généralement différente de 0, il en résulte que cette valeur de z est une des racines de l'équation que l'on obtient en égalant à 0 la dérivée de la fonction proposée.

41. Appliquons ce qui précède à la série (5) qui, ainsi que nous l'avons vu, comprend celle de Lagrange. Nous prendrons seulement pour contour un cercle. Le terme général de cette série est alors

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-\theta)^n}{n}\int_0^{2\pi}\left[z\mathrm{F}'(z)\left(\frac{\varpi z}{\Pi z}\right)^n\right]dp;$$

si r désigne le module de θ, R le module principal de $z\mathrm{F}'(z)$ et R celui de $\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$, le module de ce terme général sera inférieur, en valeur absolue, à

$$(rR)^n \frac{R}{n}.$$

Par suite, le module du reste, lorsqu'on arrête la série au terme du rang n, sera inférieur à

$$\frac{R}{n}\left[(rR)^n + (rR)^{n+1} + (rR)^{n+2} + \ldots\right] = \frac{R}{n}\,\frac{(rR)^n}{1 - rR}.$$

Or, la série étant supposée convergente, le produit rR est inférieur à l'unité, et, par conséquent, la valeur du reste diminue rapidement avec n.

Vu et approuvé,

Le 12 Novembre 1850.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

L'INSPECTEUR GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

Chargé de l'Administration de l'Académie de Paris,

CAYX.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR L'ATTRACTION DES CORPS EN GÉNÉRAL.

PROGRAMME.

THÉORÈME I. *Lorsque l'attraction de deux éléments est proportionnelle à leurs masses et à une fonction* $F(r)$ *de leur distance* r, *les composantes de l'attraction d'un corps, de figure quelconque, sur un point matériel, sont représentées par les dérivées partielles prises par rapport aux coordonnées de ce point de la fonction*

$$U = \mu \int\int\int \rho\varphi(r)\, dx\, dy\, dz,$$

dans laquelle $\varphi(r)$ *désigne une fonction qui a pour dérivée première* $F(r)$, ρ *la densité du corps attirant au point* x, y, z, *et* μ *la masse du point attiré.*

Nous ne considérerons que le cas où l'attraction, étant proportionnelle aux masses, s'exerce en raison inverse du carré de la distance.

Nous appellerons, d'après M. Gauss, *potentiel* d'un corps attirant relativement à un point attiré, la somme des molécules de ce corps, divisées par leurs distances respectives à ce point.

THÉORÈME II. V *désignant le potentiel d'un corps relativement à un point* (a, b, c) *et* ρ *la densité du corps en ce point, on a*

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi\rho \quad \text{ou à o},$$

suivant que le point considéré est intérieur ou extérieur au corps.

6

SURFACES DE NIVEAU.

Théorème III. *Le potentiel d'un corps relatif aux points d'une même surface de niveau est constant.*

Théorème IV. *Deux corps qui ont les mêmes surfaces de niveau, exercent la même action sur un point de l'espace à un facteur constant près.*

Théorème V. *Quand un corps est enveloppé de toutes parts par une surface fermée, la somme des attractions du corps sur les éléments superficiels de cette surface, estimées suivant les normales à ces éléments, est égale à la masse du corps multipliée par* 4π.

COUCHES DE NIVEAU RELATIVES A L'ATTRACTION D'UN CORPS.

Nous appellerons *couche de niveau relative à l'attraction d'un corps*, une couche matérielle infiniment mince et d'épaisseur constante, appliquée intérieurement sur une surface de niveau, et dont la densité, en chaque point, est exprimée par l'attraction du corps sur ce point.

Théorème VI. *Si l'on conçoit un canal quelconque dont les parois latérales soient normales aux surfaces de niveau, les masses interceptées dans deux couches seront entre elles dans le rapport des masses des deux couches.*

Théorème VII. *Le potentiel d'une couche sur un point extérieur est à la masse de la couche dans un rapport constant.*

Corollaire I. *Les attractions exercées par deux couches sur un même point extérieur ont la même direction, et ont leurs intensités proportionnelles aux masses des deux couches.*

Corollaire II. *Les couches de niveau ont les mêmes surfaces de niveau extérieures.*

Corollaire III. *Une couche quelconque a pour surfaces de niveau extérieures les surfaces de niveau du corps.*

Théorème VIII. *Le potentiel d'une couche relatif à un point intérieur est à la masse de cette couche comme le potentiel du corps relatif à un point de la surface externe de la couche est à la masse du corps.*

Corollaire. *Une couche n'exerce aucune action sur un point quelconque situé dans l'intérieur de la surface interne.*

Théorème IX. *Les attractions exercées par le corps et par une couche ont la même direction et sont entre elles, en grandeur, comme la masse du corps est à la masse de la couche.*

Théorème X. *Les couches de niveau ont même centre de gravité que le corps.*

Théorème XI. *Les axes principaux d'inertie ont même direction dans le corps et dans les couches de niveau.*

Vu et approuvé,

Le 12 Novembre 1850,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

L'Inspecteur général de l'Instruction publique,

Chargé de l'Administration de l'Académie de Paris,

CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.