

VA
1

TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ ET DE MAGNÉTISME

THÉORIE ET APPLICATIONS
INSTRUMENTS ET MÉTHODES DE MESURE ÉLECTRIQUE

COURS PROFESSÉ A L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE TÉLÉGRAPHIE

PAR

A. VASCHY

Ingénieur des Télégraphes, Répétiteur à l'École Polytechnique.

TOME PREMIER



PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET C^{IE}, ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

MAISON A LIÈGE, RUE DES DOMINICAINS, 7

1890

Tous droits réservés.

P.R. 225A(1)

PRÉFACE

Ce traité est, à quelques développements près, la reproduction du cours créé par J. Raynaud à l'École supérieure de télégraphie et qui m'a été confié à la mort de ce fonctionnaire éminent et si regretté.

La théorie proprement dite de l'électricité et du magnétisme fait l'objet du premier volume ; j'y suppose connus les principaux phénomènes dont on trouve la description dans les traités élémentaires de physique. Le tome II, qui débute par quelques applications théoriques à la télégraphie, à la téléphonie et à l'étude générale des courants périodiques, est surtout consacré à la description des instruments et des méthodes de mesure électrique.

Dans le développement de la théorie j'ai évité toute hypothèse sur la nature des phénomènes électriques et la structure moléculaire des corps. Du reste les lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme et les propriétés importantes qui en découlent sont indépendantes des hypothèses que l'on peut émettre à cet égard. Elles constituent des relations mathématiques entre des quantités dont la nature physique nous est encore inconnue, mais dont la réalité n'est point douteuse (quantité d'électricité, force électrique ou magnétique, etc.). Ce sont des résultats acquis, que nous exprimons dans un langage provisoire, mais qui subsisteront avec toute autre forme de langage.

Deux lois expérimentales posées par Coulomb ont permis de faire une étude mathématique complète de l'électrostatique et du magnétisme. La théorie des courants dans le régime permanent découle de la loi d'Ohm. Celle de l'électromagnétisme, de l'électrodynamique et de l'induction électromagnétique a pour base la loi élémentaire de Laplace relative à l'action d'un aimant sur un courant. Enfin, à défaut d'une loi non encore démontrée expérimentalement, une hypothèse due au génie de Maxwell, et d'après laquelle « la variation du flux d'induction d'un tube de force dans un diélectrique donnerait lieu aux mêmes effets magnétiques qu'un courant », a permis d'achever en quelque sorte l'édifice et d'établir une théorie générale des phénomènes électriques et magnétiques comprenant les faits déjà connus et mettant, en outre, en évidence la vitesse finie de propagation des ondes électromagnétiques. L'importance capitale des conséquences qui en résultent fait vivement désirer une vérification expérimentale de l'hypothèse de Maxwell ; les vérifications tentées jusqu'ici ne paraissent point concluantes. Quoi qu'il en soit, l'idée de la transmission des actions de proche en proche, émise depuis longtemps, notamment par Faraday, paraît s'imposer aujourd'hui avec un certain caractère d'évidence. La notion des actions s'exerçant directement à distance entre des masses électriques ou magnétiques lui est équivalente dans l'étude de la plupart des phénomènes *à l'état d'équilibre* ; mais elle lui est absolument inférieure *dans l'étude de l'état variable*.

Pour étendre les lois déjà établies au cas des milieux hétérogènes, il suffit d'une nouvelle hypothèse, qui se traduit soit par la conservation du flux d'induction électrique ou magnétique le long d'un tube de force, soit par l'existence de la polarisation des diélectriques ou de l'aimantation induite.

La considération de l'électrisation et de l'aimantation induites sur certains corps est très commode dans l'étude des phénomènes statiques, quoiqu'elle conduise à une expression incorrecte de l'énergie potentielle. Mais il ne semble point qu'il y ait là autre chose qu'une fiction et que les divers corps se

divisent naturellement en plusieurs catégories jouissant de propriétés réellement distinctes, suivant que leur pouvoir inducteur électrique ou magnétique est supérieur, égal ou inférieur à celui du vide. Il y a même avantage à rendre la théorie indépendante de cette fiction; c'est ce que j'ai tâché de faire.

Je n'ai pas cru devoir m'étendre beaucoup sur la théorie encore si imparfaite des phénomènes désignés sous les noms de saturation magnétique et d'hystérésis. Pour la même raison je n'ai point indiqué les calculs que l'on trouve ordinairement dans les traités, notamment celui de Maxwell, sur la constitution intérieure des aimants. La loi fondamentale de Coulomb ne s'applique point à ces divers cas; les calculs sont incorrects et ne sont point d'ailleurs susceptibles de vérification expérimentale.

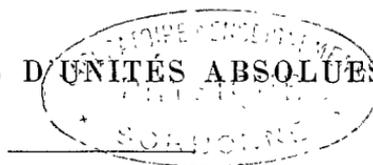
Indépendamment des renvois que j'ai faits, dans le cours de cet ouvrage, à divers traités et mémoires relatifs à l'électricité et au magnétisme, je dois une mention spéciale aux cours de physique de MM. Cornu et Potier, que j'ai suivis à l'École polytechnique et dont j'ai pu emprunter l'esprit et la méthode dans l'exposé de plusieurs questions.

A. V.

TRAITÉ
D'ÉLECTRICITÉ
ET
DE MAGNÉTISME

PRÉLIMINAIRES

SYSTÈMES D'UNITÉS ABSOLUES



1. *Unités mécaniques.* — Les principales grandeurs qui interviennent en géométrie et en mécanique sont les suivantes : *Longueur* (nous désignerons par la lettre *L* l'unité qui sert à la mesurer), *Temps* (*T*), *Masse* (*M*), *Surface* (*S*), *Volume* (*U*), *Densité* (*D*), *Vitesse* (*V*), *Accélération* (*A*), *Force* (*F*), *Travail* (*W*), *Puissance* (*P*), *Elasticité* (*E*), etc.

Rien n'empêche de choisir arbitrairement chacune des unités, et c'est ainsi que l'on procédait autrefois. Mais il est bien plus rationnel de chercher à les rattacher les unes aux autres. Ainsi une surface étant proportionnelle au produit de deux longueurs, on a été amené à prendre pour l'unité *S* la surface d'un carré ayant pour côté la longueur *L* déjà choisie comme unité, ce que l'on exprime par la formule symbolique :

$$S = L^2$$

La surface d'un rectangle a alors pour valeur numérique le produit des nombres représentant les longueurs des côtés, sans introduction de coefficients de proportionnalité.

Pour une raison semblable, l'unité de volume sera représentée symboliquement par :

$$U = L^3$$

De même, une densité étant, par définition, le rapport d'une masse à un volume ; une vitesse étant le rapport d'une longueur au temps mis à la parcourir ; une accélération étant l'accroissement d'une vitesse dans l'unité de temps (c'est-à-dire une vitesse divisée par un temps, et non simplement une vitesse); une force étant proportionnelle à la grandeur de la masse sur laquelle elle agit et à l'accélération qu'elle lui imprime; un travail étant défini comme le produit d'une force par une longueur parcourue; une puissance étant le travail produit dans l'unité de temps; le coefficient d'élasticité d'un corps étant la force de traction par unité de surface qui doublerait la longueur du corps, si les propriétés élastiques de celui-ci étaient compatibles avec un tel allongement ; — on est conduit à poser :

$$D = M . U^{-1} = L^{-3}M$$

$$V = L . T^{-1} = LT^{-1}$$

$$A = V . T^{-1} = LT^{-2}$$

$$F = M . A = LMT^{-2}$$

$$W = F . L = L^2MT^{-2}$$

$$P = W . T^{-1} = L^2MT^{-3}$$

$$E = F . S^{-1} = L^{-1}MT^{-2}$$

Ainsi des douze unités que nous avons en premier lieu, il n'y en a que trois, savoir celles de longueur, de masse et de temps, qui soient irréductibles les unes aux autres ; elles sont dites *unités fondamentales*. Les neuf autres sont dites *unités dérivées* ; les formules précédentes, qui les rattachent aux unités fondamentales, font connaître leurs dimensions d'homogénéité.

Les unités de longueur, de masse et de temps étant fixées, les autres en découlent facilement. Pour rappeler le principe à l'aide duquel on a relié ces diverses unités, et par opposition aux systèmes arbitraires qui régnaient antérieurement, on a donné à celui qui vient d'être développé le nom de *système d'unités absolues*.

On aurait pu, pour faire concorder le système scientifique

de mesures avec le système commercial, faire de l'unité de force une des trois unités fondamentales et considérer celle de masse comme dérivée. Mais comme l'étalon commercial de force est représenté par le poids d'une certaine masse bien définie (masse d'un décimètre cube d'eau distillée à 4° C.) et que ce poids, proportionnel à l'intensité de la pesanteur, a des valeurs différentes aux divers points du globe, tandis que la masse reste invariable, le désir d'avoir un système acceptable pour tous les pays a dicté le choix du système d'unités fondamentales : L, M, T.

Ajoutons que, d'une manière générale, on peut considérer comme fondamentales trois unités quelconque, *pourvu qu'elles soient irréductibles entre elles*. On peut prendre, par exemple, le système M, V, F, si l'on y trouve avantage à un point de vue quelconque. Mais l'on ne pourrait adopter aucun des deux systèmes : M, A, F et : M, V, W, parce que la connaissance des unités M de masse et A d'accélération entraîne celle de l'unité $F = M A$ de force, et que, le travail étant équivalent à une force vive $M V^2$, l'unité W de travail découle de celles de masse M et de vitesse V.

Nous n'insisterons pas sur la simplification qu'un système d'unités absolues apporte dans les applications numériques par la suppression de coefficients de transformation (ou coefficients parasites) souvent incommensurables. Mais il est utile d'en mettre en évidence l'intérêt au point de vue de l'homogénéité des formules.

2. Homogénéité des formules. — Remarquons d'abord que l'addition ou la comparaison de deux grandeurs n'a de sens que si ces grandeurs sont de même nature et, par suite, ont mêmes dimensions. On n'ajoute pas une longueur à un temps, ni une masse à une accélération. Par contre, le carré d'une vitesse est comparable ou homogène au produit d'une accélération par une longueur : On se rappelle la formule : $v^2 = 2gh$, relative à la vitesse v acquise par un corps tombant d'une hauteur h . Les termes v^2 et gh ont mêmes dimensions : $L^2 T^{-2}$. Quant au coefficient 2, il ne compte pas au point de vue des dimensions ; on dit que ses dimensions sont nulles ($L^0 M^0 T^0$), ou bien que c'est un coefficient purement numérique. Il indique en effet, le rapport

numérique qui existe entre les quantités v^2 et gh , comparables entre elles.

D'une manière générale les grandeurs qui ont mêmes dimensions d'homogénéité sont comparables entre elles. Cela tient à ce que les formules $A = LT^{-2}$, $F = LMT^{-2}$, ... servent non seulement à rattacher les unités dérivées aux unités fondamentales, mais encore à définir en quelque sorte la nature des grandeurs A , F , ... Considérées comme *unités*, les quantités L , M , T , A , F , ... se rapportent aux étalons de longueur, de masse, ... ; considérées comme *dimensions*, elles se rapportent à la nature mécanique ou physique des grandeurs en question. Il y a lieu d'établir une distinction très nette entre ces deux ordres d'idées.

Les nombres $\pi = 3,1416$ — $e = 2,71828$ — ... sont des coefficients purement numériques. Il en est de même d'un angle (rapport de l'arc au rayon) et des valeurs d'un sinus, d'une tangente, d'un logarithme, d'une exponentielle, etc. Une quantité soumise aux symboles *sin*, *tang*, *log*, ... doit elle-même avoir des dimensions nulles. Les formules $\sin l$, e^v , où l est une longueur et v une vitesse, pèchent donc contre l'homogénéité.

Les quantités qui gardent une valeur constante dans le cours des calculs, en particulier les constantes physiques : intensité g de la pesanteur, vitesse a de la lumière, etc., ne doivent pas être considérées comme des coefficients purement numériques. Leur valeur numérique, au lieu d'être invariable, dépend des unités fondamentales choisies. Cette observation est d'une grande importance.

Supposons que l'on ait établi une relation de forme quelconque, par exemple :

$$\varphi(l, u, d, g, f) = 0$$

dans laquelle nous mettons en évidence toutes les quantités, constantes ou variables, dont les dimensions ne sont pas nulles : longueur l , volume u , densité d , intensité g de la pesanteur, force f . On peut mettre cette relation sous la forme tout aussi générale :

$$\psi\left(l, \frac{u}{l^3}, ud, \sqrt{\frac{l}{g}}, \frac{f}{udg}\right) = 0$$

puisque, à chaque système de valeurs des nouveaux paramètres $l, \frac{u}{l^3}, ud, \dots$, correspond un système bien déterminé de valeurs des paramètres primitifs l, u, d, g, f .

Or $\frac{u}{l^3}$ et $\frac{f}{udg}$ ont des dimensions nulles, tandis que l est une longueur, ud une masse et $\sqrt{\frac{l}{g}}$ un temps. Si donc on fait varier arbitrairement l'unité de longueur, les unités de masse et de temps restant constantes, l variera aussi arbitrairement, mais les quatre autres quantités, $\frac{u}{l^3}, ud, \dots$ resteront constantes. Pour que l'équation $\psi = 0$ soit toujours satisfaite, il faut évidemment qu'en réalité elle ne contienne plus la quantité l . De même elle ne doit contenir ni ud ni $\sqrt{\frac{l}{g}}$, et elle se réduit finalement à :

$$\psi \left(\frac{u}{l^3}, \frac{f}{udg} \right) = 0$$

équation nécessairement homogène, puisqu'elle ne renferme que des grandeurs $\frac{u}{l^3}$ et $\frac{f}{udg}$ de dimensions nulles.

Cet exemple suffit à montrer pourquoi toute relation physique doit être homogène, c'est-à-dire réductible à une équation ne renfermant que des grandeurs de dimensions nulles.

Nous avons supposé que les trois unités fondamentales L, M, T sont irréductibles entre elles. Elles le sont effectivement, au moins dans l'état actuel de la science, et les tentatives faites jusqu'ici pour les relier entre elles par des lois naturelles, telles que celle de la gravitation universelle, ne reposent que sur des illusions.

3. Application du principe d'homogénéité. — Les simples considérations d'homogénéité permettent quelquefois de calculer *a priori* une formule, à un coefficient numérique près. Proposons-nous, comme exemple, de déterminer la durée t de l'oscillation d'un pendule de longueur l , de masse m , soumis au poids mg , et abandonné à lui-même sous l'angle α avec la verticale. La relation cherchée se pose sous la forme

$$\varphi (l, m, t, mg, \alpha) = 0$$

ou, ce qui revient au même :

$$\psi \left(l, m, t, t \sqrt{\frac{g}{l}}, \alpha \right) = 0$$

Comme $t\sqrt{\frac{g}{l}}$ et α sont de dimensions nulles, tandis que l , m et t sont respectivement une longueur, une masse et un temps, cette équation doit, par un raisonnement analogue au précédent, se réduire à :

$$\psi\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, \alpha\right) = 0$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \chi(\alpha)$$

Telle est la valeur de la durée t de l'oscillation, pourvu que les résistances passives ou d'autres causes n'entrent pas en jeu. Pour des valeurs infiniment petites de α , la fonction $\chi(\alpha)$ diffère infiniment peu de la constante $\chi(0) = k$; alors :

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

k est une constante numérique. On sait qu'elle est égale à π .

4. Unités calorifiques. — L'étude de la chaleur introduit de nouvelles grandeurs : *Quantité de chaleur* (Ch), *Température* (Θ), *Chaleur spécifique* (Γ), *Conductibilité thermique* (X), etc. Par la définition même de la chaleur spécifique et de la conductibilité, les unités Γ et X se rattachent directement aux unités Ch, Θ et à celles de la mécanique; ce seront donc des unités dérivées. Il reste à considérer Ch et Θ .

En vertu d'un principe démontré d'une manière constante par l'expérience, une quantité de chaleur ch est équivalente à un certain travail w . C'est ce qu'exprime la relation :

$$w = J. ch$$

dans laquelle J est un coefficient purement numérique, égal à 425 si l'unité W = 1 kilogrammètre et l'unité Ch = 1 calorie (grande). On peut, si on le préfère, prendre Ch = W, et alors J = 1; c'est ce que nous ferons souvent dans les applications électriques. Quoi qu'il en soit, Ch est une unité dérivée, faisant double emploi avec W, comme le ferait une unité spéciale, de force vive ou de couple mécanique.

Quant à l'unité Θ de température, elle n'a pu être rattachée au système L, M, T, et elle constitue, dans l'état actuel de nos connaissances, une quatrième unité fondamentale. Il nous manque donc une loi ou un principe analogue à celui de l'équivalence de la chaleur et du travail. On a bien déduit du principe de Carnot une définition de la température absolue; mais cette définition, ne faisant connaître que le rapport de deux températures, ne peut rien apprendre sur les dimensions de Θ .

Les équations de la thermodynamique, étant établies indépendamment de toute relation entre Θ et les unités mécaniques fondamentales, doivent subsister quelles que soient les dimensions de Θ et, par suite, être homogènes par rapport au système L, M, T, Θ .

5. Unités électriques et magnétiques. — Pour bien comprendre ce qui va être dit au sujet des unités électriques et magnétiques, il est nécessaire de connaître déjà les lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme qui sont rappelées ci-dessous. Néanmoins il nous a paru utile d'exposer dès le début des considérations qui seront invoquées dans tout le cours de ce traité.

Les principales grandeurs que l'on rencontre en électricité et magnétisme sont les suivantes : *Quantité d'électricité* (nous désignerons par la lettre Q son unité et ses dimensions), *Potentiel* (V), *Capacité* (C), *Intensité d'un courant* (I), *Résistance électrique* (R), *Quantité de magnétisme* (μ), *Potentiel magnétique*, etc.

Rappelons d'abord que, par définition, le potentiel V est tel qu'une quantité Q d'électricité, passant de ce potentiel V au potentiel zéro, dégage (sous forme de travail, de chaleur, etc.) une somme d'énergie W proportionnelle au produit Q V. Le coefficient de proportionnalité étant, comme l'équivalent mécanique J de la chaleur, indépendant de la nature des corps électrisés et de toutes circonstances physiques, on le prend égal à l'unité, et l'on pose : $W = Q V$. D'autre part la capacité C d'un corps chargé d'une quantité Q au potentiel V est égale à $\frac{Q}{V}$; — l'intensité I est le rapport de la quantité Q d'électricité écoulée à la durée T de l'écoulement; enfin la résistance R d'un conducteur renfermant une force électro-motrice V et traversé par le courant I

est donnée par le rapport $\frac{V}{I}$. Les unités V, C, I, R seront donc rattachées à Q et aux unités mécaniques par les formules de dimensions :

$$\left. \begin{aligned} V &= W Q^{-1} \\ C &= Q V^{-1} = W^{-1} Q^2 \\ I &= T^{-1} Q \\ R &= V I^{-1} = T W Q^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Quant aux unités Q et μ , pour les définir, il faut se reporter à l'une des lois fondamentales suivantes :

$$f = k \frac{qq'}{r^2} \quad (\text{COULOMB, Electrostatique}) \quad (2)$$

$$f = k' \frac{\mu\mu'}{r^2} \quad (\text{COULOMB, Magnétisme}) \quad (3)$$

$$f = k'' \frac{\mu i ds}{r^2} \quad (\text{LAPLACE, Electromagnétisme}) \quad (4)$$

$$f = k''' \frac{i i' ds ds'}{r^2} \propto \alpha \quad (\text{AMPÈRE, Electrodynamique}) \quad (5)$$

f désignant la force répulsive qui s'exerce entre deux quantités d'électricité q et q' situées à la distance r l'une de l'autre, ou entre deux quantités de magnétisme μ et μ' , ou entre un pôle magnétique μ et un élément de courant i de longueur ds , ou entre deux éléments de courants $i ds$ et $i' ds'$; k , k' , k'' et k''' désignant des coefficients constants pour chaque milieu. Dans la formule d'Am-père, α désigne une fonction ($\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta'$) trigonomé-trique de dimensions nulles (voir *Electrodynamique*).

Ces lois expérimentales ne suffiraient pas pour définir Q et μ , puisque chacune d'elles apporte une nouvelle grandeur $k, k' \dots$ qui est elle-même une quantité physique et dont on ne connaît pas les dimensions. Toutefois nous démontrerons dans la suite que le coefficient k'' et k' k''' ont des valeurs indépendantes de la nature des corps et de toutes circonstances physiques, de telle sorte que l'on peut les considérer comme des coefficients purement numé-riques. On choisit pour leurs valeurs numériques, qui *a priori* sont arbitraires :

$$k'' = 1 \quad \text{et} \quad k' k''' = 2$$

Ceci posé, considérant les relations (2) et (5) au point de vue des

dimensions, divisons-les membre à membre, en remarquant que ds et ds' sont des longueurs et que le rapport de q à i est un temps. On trouve ainsi que le rapport de k à k''' ou, ce qui revient au même, le produit $k k'$ a les dimensions du carré d'une vitesse. Si l'on possédait une nouvelle relation de dimensions entre les coefficients k, k', k''' , les dimensions de chacun d'eux se trouveraient donc déterminées. Cette relation complémentaire nous fait défaut (comme en thermodynamique, § 4).

Le produit $k k'$ ayant les dimensions du carré d'une vitesse, l'un au moins des coefficients k et k' doit avoir des dimensions, qui sont en rapport avec sa nature physique. S'il l'on ne veut pas s'exposer à une fausse interprétation de la nature des phénomènes, on doit donc considérer *a priori* ces deux coefficients comme pourvus de dimensions inconnues, sans faire aucune hypothèse sur eux. Mais au point de vue du choix des *unités* ou *étalons*, il n'y a pas d'inconvénients à fixer arbitrairement les dimensions de k ou de k' .

En pratique, pour suppléer à l'insuffisance des données expérimentales et ne pas faire de Q une nouvelle unité fondamentale, on a recours à des hypothèses. On prendra, par exemple, la formule fondamentale d'électrostatique (Coulomb), et, à défaut de données sur la nature de k , on en fera un coefficient purement numérique, c'est-à-dire dépourvu de dimensions, ce qui constitue l'hypothèse la plus simple. Les dimensions de Q seront alors données par : $F = Q^2 L^{-2}$, d'où : $Q = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$. Quant aux dimensions de μ , on les déduira de la formule (4) de Laplace dans laquelle k'' est un coefficient numérique, ce qui donne : $F = \mu IL^{-1}$, ou $\mu = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$. Ajoutons que l'on prend comme valeur numérique de k l'unité, afin de simplifier les calculs.

Les dimensions que l'on vient d'obtenir pour Q et μ entraînent celles de V, C, \dots au moyen des formules (1). On a ainsi un système de dimensions dit *électrostatique*. Si, au contraire, on considère comme purement numérique le coefficient k' de la loi fondamentale de magnétisme, cette nouvelle hypothèse conduit à un nouveau système de dimensions, dit *électromagnétique*. Les tableaux ci-dessous résument les principales formules de dimensions dans les deux systèmes :

Système électrostatique.

$$Q_s = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

$$V_s = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

$$C_s = L$$

$$I_s = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$$

$$R_s = L^{-1} T$$

$$\mu_s = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$$

Système électromagnétique.

$$Q_m = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$$

$$V_m = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$$

$$C_m = L^{-1} T^2$$

$$I_m = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

$$R_m = L T^{-1}$$

$$\mu_m = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Un troisième système, dit *électrodynamique*, consisterait à faire de k''' (formule fondamentale d'électrodynamique) un coefficient numérique. Les dimensions que l'on obtient ainsi sont évidemment les mêmes que celles du système électromagnétique, à cause de la relation entre k' et k''' .

Comme la plupart des mesures que l'on a à effectuer dans l'industrie se rapportent à des phénomènes électromagnétiques, électrodynamiques ou magnétiques, on s'est arrêté, pour les besoins de la pratique, au choix du système électromagnétique, qui a l'avantage de simplifier les formules usuelles. Dans ce système, en effet, les coefficients k' et k'' sont égaux à l'unité, et k''' est égal à 2.

Toutes les formules d'Electricité et de Magnétisme sont également vraies dans les systèmes électrostatique et électromagnétique de dimensions. Elles sont indépendantes des dimensions du coefficient k , dont on peut considérer l'unité K comme fondamentale, concurremment avec les unités mécaniques L , M , T . Au lieu de K , on peut prendre comme unité fondamentale, soit Q , soit V ... Si l'on prend Q par exemple, les dimensions des autres grandeurs seront données par les équations (1). Le principe d'homogénéité, appliqué comme au § 3, sera dès lors d'un plus grand secours que si l'on n'avait que les trois unités fondamentales L , M , T , ainsi que le montre l'exemple suivant :

Sur une ligne télégraphique de longueur l , de capacité C , de résistance R , on envoie le courant d'une pile de force électromotrice E (la force électromotrice est de la nature d'un potentiel). On demande quelle sera l'intensité i du courant au poste d'arrivée au bout du temps t .

La fonction i ne dépendant que t, l, C, R, E , on posera :

$$i = f(t, l, C, R, E)$$

f étant à priori une fonction inconnue de ces cinq paramètres. Mais cette relation peut s'écrire :

$$i = \frac{E}{R} \varphi \left(t, l, E, CE^2, \frac{t}{CR} \right)$$

$\frac{E}{R}$ ayant les dimensions d'une intensité, la fonction φ doit être de dimensions nulles. Les produits CR et CE^2 ayant respectivement les dimensions d'un temps T et d'une énergie W (soit dans le système électrostatique, soit dans le système électromagnétique ou dans tout autre, comme il est facile de s'en assurer), si l'on prend comme unités fondamentales L, T, W et E , on voit qu'en réalité la fonction φ est indépendante des paramètres t, l, E et CE^2 , et que la fonction i se réduit à la forme :

$$i = \frac{E}{R} \varphi \left(\frac{t}{CR} \right)$$

On n'a donc plus qu'une fonction d'un seul paramètre $\frac{t}{CR}$; on en déduit la loi de similitude énoncée par Sir W. Thomson (voir *Propagation du courant sur une ligne télégraphique*).

6. Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques. — Si l'on pose :

$$k k' = a^2$$

a représente une constante spécifique pour chaque milieu. Ses dimensions sont celles d'une vitesse, et l'on a trouvé expérimentalement, dans le cas de l'air, que sa valeur est égale à celle de la vitesse de la lumière.

On a, dans le système électrostatique :

$$k = 1 \quad \text{et par suite} \quad k' = a^2$$

dans le système électromagnétique, au contraire :

$$k' = 1 \quad \text{et par suite} \quad k = a^2$$

Si l'on désigne respectivement par q_s et q_m les valeurs numériques d'une même quantité q d'électricité dans les deux systèmes électrostatique et électromagnétique, on aura, en supposant $q' = q$ dans la formule (2) :

$$f = \frac{q_s^2}{r^2} = a^2 \frac{q_m^2}{r^2}$$

Il en résulte :

$$q_s = a q_m$$

et, puisque la valeur numérique de q_s est a fois plus grande que celle de q_m , l'unité Q_s doit être a fois plus faible que Q_m . On aura ainsi les formules de transformation d'un système à l'autre :

$$Q_m = a Q_s$$

$$V_m = \frac{1}{a} V_s$$

$$C_m = a^2 C_s$$

$$I_m = a I_s$$

$$R_m = \frac{1}{a^2} R_s$$

$$\mu_m = \frac{1}{a} \mu_s$$

7. Système d'unités C. G. S. — Les systèmes électrostatique et électromagnétique se rapportent aux dimensions des diverses grandeurs, et le choix des unités ou étalons reste indéterminé.

Le congrès des Electriciens, réuni à Paris en 1881, a adopté, comme valeurs des unités absolues de longueur, de masse et de temps, le centimètre, le gramme et la seconde (par abréviation C. G. S.).

L'unité de force et celle de travail ont reçu respectivement les noms de dyne ($\delta\nu\nu\alpha\mu\iota\sigma = \text{force}$) et d'erg ($\epsilon\rho\gamma\omicron\nu = \text{travail}$); elles ont un rapport incommensurable avec le kilogramme et le kilogrammètre. En effet, le poids d'une masse m étant mg , si l'on prend la masse du kilogramme, on doit poser : $m = 1000$. D'autre part, g , étant approximativement égal à 9,81 (plus exactement : 9,8088 à Paris) lorsque le mètre est pris pour unité de longueur, devient égal à 981 dans le système C. G. S. Donc le poids d'un kilo-

gramme est égal à 981,000 unités C. G. S. ou dynes. Il en résulte :

$$1 \text{ dyne} = \frac{1}{981.000} \text{ kilogramme-poids.}$$

De même:

$$1 \text{ erg} = \frac{1}{98.100.000} \text{ kilogrammètre.}$$

L'équivalent mécanique de la chaleur, dans le système C. G. S., est le nombre d'ergs équivalent à une petite calorie (poids d'eau égal à 1 gramme, élévation de température de 1 degré). Si l'on admet qu'une grande calorie vaut 425 kgm, on trouve :

$$J = 425 \frac{98.100.000}{1000} = 4,17 \times 10^7 \text{ C. G. S.}$$

Les grandeurs des unités électriques et magnétiques résultent des formules qui servent à les définir. Il est nécessaire de spécifier le système, électromagnétique ou électrostatique, dans lequel elles sont évaluées.

Exemples numériques : La résistance spécifique du cuivre recuit à 0° est égale à 1584 unités électromagnétiques C. G. S. — L'intensité du magnétisme terrestre (Paris 1^{er} janvier 1886) est égale à 0,4644 et la composante horizontale à 0,1943 unités électromagnétiques C. G. S. — La différence de potentiel correspondante à la production d'une étincelle entre deux plateaux parallèles situés à la distance de 0^m,4056 est, d'après Sir W. Thomson : 13,95 unités électrostatiques C. G. S.

8. Système pratique d'unités. — En pratique les unités électromagnétiques, dont on fait un emploi constant, ont, dans le système C. G. S. les unes (C_m, \dots) des valeurs beaucoup trop grandes, les autres (V_m, R_m, \dots) des valeurs beaucoup trop faibles. On a donc été conduit à prendre d'autres unités d'un usage plus commode. Mais le changement de ces unités dérivées entraîne celui des unités fondamentales. Les valeurs de L, M, T dans le nouveau système, dit *pratique*, sont respectivement :

10⁹ centimètres (soit environ le quart du méridien terrestre) ;

10⁻¹¹ grammes ;

1 seconde.

L'unité pratique de force est $\frac{1}{100^e}$ de dyne = $\frac{10^{-7} \text{ kilogrammes-poids.}}{9.81}$
 Celle de travail vaut 10^7 ergs = $\frac{1 \text{ kilogrammètre}}{9.81}$ Quant aux unités
 électriques pratiques, elles ont les valeurs et portent les noms
 qui suivent :

coulomb	=	10^{-1}	Q_m	C. G. S.
volt	=	10^8	V_m	—
farad	=	10^{-9}	C_m	—
ampère	=	10^{-1}	I_m	—
ohm	=	10^9	R_m	—

Ces valeurs se déduisent des formules de dimensions. Ainsi, V_m ayant pour dimensions $L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$, et d'autre part les unités L et M étant respectivement multipliées par 10^9 et 10^{-11} quand on passe du système C. G. S. au système pratique, l'unité V_m se trouvera multipliée par $10^{\frac{27}{2}} \times 10^{-\frac{11}{2}} = 10^8$.

Le produit d'un potentiel par une intensité étant une *puissance* le produit du volt par l'ampère, appelé quelquefois volt-ampère ou *watt*, est l'unité pratique de puissance. Sa valeur est égale à $\frac{1k^m}{9.81}$ par seconde, soit à $\frac{1}{736}$ cheval-vapeur. On donne aussi quelquefois le nom de *joule* à l'unité pratique de travail ou d'énergie.

Les grandeurs magnétiques sont évaluées généralement dans le système C. G. S., les unités magnétiques pratiques étant d'un usage incommode.

9. Etalons électriques. — Certaines unités électriques, telles que celles de capacité, de force électromotrice et surtout de résistance sont susceptibles d'être représentées par des étalons. La détermination de l'unité absolue de résistance, définie *a priori* par des considérations théoriques, a fait l'objet des recherches scientifiques les plus délicates. L'unité *pratique* de résistance adoptée en 1884 à suite de ces recherches, c'est-à-dire l'*ohm légal*, est la résistance d'une colonne de mercure de 1^{mm} de section et de 106^{cm} de longueur, à la température 0° . L'étalon ainsi défini n'a, de même que le mètre légal, qu'une valeur approchée (à quelques millièmes près) de celle de l'ohm défini théoriquement; d'après des recherches récentes, la valeur $106^{cm},25$ paraît plus probable. Quatre étalons prototypes, construits au Bureau international des poids et mesures

et déposés à l'École supérieure de Télégraphie, à Paris, représentent la valeur de l'ohm légal, sauf des écarts qui ont été déterminés à moins de $\frac{1}{100.000}$ près ¹.

L'intensité de courant ne comporte pas d'étalon. L'ampère légal concorde avec l'ampère défini théoriquement et susceptible d'être mesuré, par exemple, à l'aide d'une boussole des tangentes. Il en est de même pour le coulomb.

Le volt légal est la force électromotrice qui donnerait un courant d'un ampère dans un circuit de résistance égale à un ohm légal. Il est représenté à peu près par la force *e. m.* d'un élément Daniell ; plus exactement celle-ci est égale, dans des conditions bien définies, à 1^{volt},07.

Les multiples et sous-multiples les plus employés en électricité ont pour préfixes : *méga*, *kilo*, *milli*, *micro*, suivant que l'unité est multipliée par 10^6 , 10^3 , 10^{-3} ou 10^{-6} . Exemples :

le megohm	=	10^6	ohms
le kilowatt	=	10^3	wats = 1 ^{ch. v.} , 36
le milliampère	=	10^{-3}	ampère
le microvolt	=	10^{-6}	volt
le microfarad	=	10^{-6}	farad

On trouve dans l'industrie des boîtes de résistances étalonnées avec soin en ohms légaux, et des condensateurs étalonnés en microfarads, unité plus commode que le farad.

10. Considérations générales.— En résumé l'adoption d'un système d'unités absolues simplifie considérablement les calculs numériques. En outre la notion des *dimensions* permet de vérifier l'homogénéité des équations, et surtout elle conduit souvent à une interprétation physique frappante des formules. Ainsi, dans le problème du pendule, $\sqrt{\frac{l}{g}}$ a les dimensions d'un temps ; on present donc, *a priori*, qu'il doit avoir une signification physique en rapport avec la durée des oscillations. On a vu que c'est précisément l'expression de cette durée à un coefficient numérique près. — Pour un corps isotrope, *e* et *d* représentant son élasticité et sa densité, il est facile de voir que $\sqrt{\frac{e}{d}}$ a, les dimensions d'une

¹ *Annales télégraphiques*, 1884, p. 379.

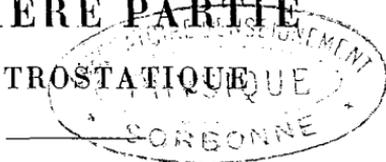
vitesse ; on sait que c'est précisément la formule de la vitesse de propagation des vibrations longitudinales dans ce corps. — En électricité, si l'on prend le produit kk' des coefficients des formules fondamentales (2) et (3), on voit qu'il a les dimensions du carré d'une vitesse ; on a trouvé numériquement pour la valeur de ce produit le carré de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Maxwell en a déduit que les ébranlements électriques ou électromagnétiques doivent se propager dans l'éther comme les ébranlements lumineux et avec la même vitesse, établissant ainsi entre les phénomènes optiques et électriques un lien nouveau, qu'il eût été difficile de soupçonner sans le secours des mesures absolues.

Si l'on connaissait les dimensions des coefficients k et k' , aussi bien que celles de leur produit, un nouveau jour viendrait assurément éclairer la nature intime des phénomènes électriques, de même que la connaissance des dimensions de la température Θ apporterait des indications importantes sur la constitution et les mouvements moléculaires des corps. Des hypothèses, telles que celles sur lesquelles sont fondés les systèmes électrostatique et électromagnétique, ne peuvent conduire, à cet égard, qu'à des résultats d'un sens au moins douteux, puisqu'une même grandeur, la capacité par exemple, est une longueur dans le premier système et l'inverse d'une accélération dans le second.

La relation intime que l'on a découverte entre les phénomènes physiques de divers ordres s'est traduite dès d'abord sous la forme d'un principe, que l'on a généralisé de plus en plus, celui de la conservation de l'énergie, nous en ferons un usage constant, ayant à considérer l'énergie sous ses manifestations les plus diverses : énergie électrostatique = produit d'une quantité d'électricité par un potentiel ; énergie potentielle d'un courant = demi-produit de son coefficient de self-induction par le carré de l'intensité ; énergies mécanique, calorifique, chimique ; énergie élastique = produit d'un volume par un coefficient d'élasticité ; énergie due à la gravitation. Ces diverses énergies se transforment sans cesse les unes dans les autres ; leur somme est toujours invariable.

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE



CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS ET LOIS FONDAMENTALES

11. Loi de Coulomb. — Nous ne rappellerons point les phénomènes fondamentaux relatifs à l'électrisation par frottement et par induction, et nous renverrons pour leur description aux traités élémentaires d'électricité. On sait que deux corps électrisés s'attirent ou se repoussent suivant la nature de l'électrisation qu'ils ont reçue. Coulomb, étudiant ces actions dans des circonstances très variées, a démontré expérimentalement que la loi qui les régit peut être représentée par la formule :

$$f = k \frac{q q'}{r^2} \quad (4)$$

q et q' désignant les charges électriques de deux corps conducteurs très petits en présence, r leur distance, f la force avec laquelle ils se repoussent et k un coefficient constant. La force f est dirigée suivant le rayon r .

Cette formule est générale et s'applique aussi bien au cas des attractions qu'à celui des répulsions. Il suffit pour cela de considérer comme étant de signes contraires les charges q et q' de deux corps qui s'attirent ; la valeur de f étant alors négative représentera une répulsion négative, c'est-à-dire une attraction.

La loi de Coulomb ne peut être démontrée expérimentalement qu'en ce qui concerne l'action de deux corps électrisés. Pour

analyser le phénomène, on a été amené à supposer qu'une charge q est divisible en éléments répartis à la surface du conducteur (ou dans la masse même si le corps est diélectrique) et que ces divers éléments exercent ou subissent individuellement des actions régies par la formule de Coulomb. C'est là une hypothèse qui n'est justifiable que si elle conduit à des résultats vérifiés par l'expérience.

En définissant la charge ou quantité d'électricité q que possède un corps, on suppose implicitement que cette quantité est invariable et indestructible comme la matière. Il n'est pas inutile de bien faire ressortir expérimentalement cette invariabilité. Si l'on introduit un ou plusieurs corps électrisés dans la cavité d'un conducteur creux, on constate l'apparition, à la surface extérieure de celui-ci, d'une charge électrique. Cette charge ne change pas si l'on vient à décharger les corps électrisés en leur faisant toucher la paroi intérieure du conducteur creux, et l'on peut la prendre comme définition de la somme des charges des corps introduits dans la cavité. Cette nouvelle définition concorde entièrement par ses conséquences expérimentales et théoriques, avec celle qui a été donnée par Coulomb. Que l'on vienne ensuite à répartir la charge totale, ainsi mesurée, sur d'autres corps par voie de conduction ou d'induction et que l'on mesure au moyen du conducteur creux la quantité totale d'électricité répandue sur tous ces corps, on trouve la même valeur que précédemment. On peut encore, dans la même cavité, remplacer l'air par un autre milieu isolant ou diélectrique, développer sur certains corps une nouvelle électrisation par le frottement ou toute autre cause, etc. ; aucune variation n'apparaîtra dans l'électrisation extérieure du conducteur creux, c'est-à-dire que la somme des quantités d'électricité produites à l'intérieur est nulle.

Faraday le premier avait énoncé ce fait explicitement en observant « qu'il est impossible de communiquer à la matière une charge absolue et indépendante d'une seule espèce d'électricité » ; ce qui veut dire que l'on ne saurait donner à un corps quelconque une quantité d'électricité sans faire apparaître quelque autre part une quantité égale et de signe contraire. Le principe de Faraday est comparable à celui de l'égalité de l'action et de la

réaction ; en effet, de même que l'apparition d'une nouvelle quantité d'électricité entraîne celle d'une quantité égale et de signe contraire, de même une force quelconque ne peut se produire dans un système matériel sans qu'il se produise ailleurs une force égale et opposée.

Revenons à la formule de Coulomb. Elle contient un coefficient k , que l'on regarde comme constant. Mais si l'on observe les actions électriques dans deux milieux différents entre deux corps chargés de quantités invariables q et q' d'électricité et placés à une distance invariable r , on trouve que la force f_1 exercée dans le second milieu est différente de la force f dans le premier. Il en résulte forcément que les valeurs k et k_1 du coefficient sont différentes dans les deux milieux, et l'on a, d'après la relation (1) :

$$\frac{k_1}{k} = \frac{f_1}{f}$$

Le coefficient k est donc une quantité physique dépendant des qualités de chaque milieu : pression, température, etc. Il est, au même titre que la densité, l'élasticité, etc., une caractéristique du milieu, et doit être considéré comme ayant des dimensions déterminées.

Maxwell a émis l'avis que ce coefficient est proportionnel à l'inverse du carré de l'indice de réfraction ou au carré de la vitesse a de la lumière dans un milieu transparent, de sorte que l'on aurait :

$$k = a^2 \alpha$$

α étant un coefficient numérique ou une autre quantité physique. Quoiqu'il en soit, il ne paraît pas douteux que la connaissance de la nature de k apporterait une vive lumière dans l'étude des phénomènes électriques et peut-être même de la constitution des corps.

En l'absence de données certaines, on fait diverses hypothèses à ce sujet, comme nous l'avons expliqué au § 5. En considérant k comme ayant des dimensions nulles, c'est-à-dire en en faisant un coefficient numérique, que l'on prend égal à l'unité, on obtient le

système de dimensions électrostatique. La formule de Coulomb devient :

$$f = \frac{q q'}{r^2}$$

le diélectrique est alors supposé être de l'air, dont on prend la constante k comme unité. Pour le cas d'un autre diélectrique, le coefficient k doit reparaitre dans la formule (1) avec la valeur numérique correspondant à chaque cas.

L'inverse du coefficient k (1 pour l'air, — 3 pour le verre, — 2,5 pour la gutta-percha, etc.) s'appelle le *pouvoir inducteur spécifique* du milieu (voir § 20).

Les dimensions de la quantité d'électricité dans le système électrostatique sont donc :

$$Q_1 = LF^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Les vraies dimensions de Q seraient $LF^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} K^{-\frac{1}{2}}$, K représentant les dimensions actuellement inconnues de k .

Le coefficient k variant d'un corps à un autre et n'étant pas le même en général pour les corps électrisés que pour le milieu ambiant, on peut se demander si l'emploi de la formule de Coulomb (1), dans laquelle la valeur de k est celle correspondant au milieu, est bien légitime. Si les corps électrisés sont des diélectriques et que leurs charges ne soient pas distribuées de manière à être *d'elles-mêmes en équilibre* comme sur un conducteur, la formule de Coulomb n'est effectivement plus applicable. Mais si les corps électrisés sont des conducteurs ou si leurs charges sont d'elles-mêmes en équilibre, de telle sorte que chacun d'eux soit à un potentiel constant en tous ses points, on peut, sans troubler l'équilibre ni modifier les actions électriques, creuser des cavités à l'intérieur de ces corps ou modifier leur substance et la remplacer, par exemple, par celle du milieu ambiant, auquel cas le coefficient k serait constant dans tout l'espace; la formule de Coulomb est donc correcte dans ce cas.

Nous avons encore une remarque à présenter au sujet de la loi de Coulomb. On a essayé de se passer de la preuve expérimentale de ce savant, sous prétexte que la précision de ses mesures n'est

pas absolue ; et l'on démontre la loi de l'inverse du carré de la distance en s'appuyant sur ce fait que l'électricité se porte entièrement à la surface des conducteurs¹. Mais pour cela on fait des hypothèses, notamment en admettant l'existence d'une électricité *neutre* qui serait *décomposée* dans l'intérieur d'un conducteur si la force électrique n'y était pas nulle. La méthode expérimentale de Coulomb a au moins l'avantage d'être exempte d'hypothèses sur la nature de l'électricité.

12. Densité électrique. — Dans l'hypothèse de la matérialité de l'électricité, on supposait celle-ci répartie à la surface d'un conducteur et y constituant une couche d'épaisseur excessivement petite, mais variable aux différents points. Le mot « épaisseur » n'est plus employé, mais on appelle *densité superficielle* électrique en un point la partie de la charge du conducteur qui est supposée exister en ce point sur l'unité de surface. Quelle que soit la nature des phénomènes, la densité électrique correspond à un élément existant réellement. Coulomb la mesurait au moyen de son plan d'épreuve. Poisson et Plana l'ont calculée dans divers cas, notamment dans celui de deux sphères conductrices à distance ou au contact ; le résultat de leurs calculs concorde d'une manière satisfaisante avec celui des expériences de Coulomb².

Dans le cas d'un diélectrique dont la masse est électrisée, la quantité d'électricité contenue en un point dans l'unité de volume s'appelle *densité de volume* en ce point. On considère encore quelquefois un cas idéal où l'électricité serait répartie sur une ligne, et l'on donne le nom de *densité linéaire* à la quantité d'électricité existant sur l'unité de longueur.

Les dimensions électrostatiques de ces diverses grandeurs sont :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour la densité linéaire :} & Q, L^{-1} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \\ \text{— — — superficielle :} & Q, L^{-2} = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \\ \text{— — — de volume :} & Q, L^{-3} = L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \end{array}$$

¹ Nous renverrons, pour cette intéressante démonstration, aux traités de Maxwell, § 74^e, et de MM. Mascart et Joubert, § 42.

² Voir, pour ces calculs et leur vérification : Mascart : *Electricité statique*, tome I.

13. Tension électrique. — La couche (fictive) électrique située à la surface d'un conducteur tend à s'échapper dans le diélectrique. Elle exerce donc sur celui-ci une tension croissante avec la charge et qui, poussée à une certaine limite, produit une étincelle ou décharge disruptive. Même pour des tensions moindres, on observe une déperdition plus ou moins lente de la charge, qui se traduit par une effluve ou un vent électrique et, dans l'obscurité, par des aigrettes lumineuses. Le vent électrique est dû à la pression exercée par la charge du conducteur sur les molécules d'air qui se sont électrisées à son contact et qui sont ainsi chassées à distance.

La tension électrique, étant dirigée à l'extérieur du conducteur, diminue d'autant l'effet de la pression de l'air (ou de tout autre diélectrique) sur celui-ci. Ainsi une bulle de savon électrisée se gonflera jusqu'à ce que, abstraction faite des forces moléculaires, la pression intérieure fasse équilibre à la pression atmosphérique diminuée de la tension électrique, et celle-ci ne pourra devenir supérieure à la pression ambiante sans que la bulle éclate.

Il semblerait, par analogie, que la cause de l'étincelle doive être l'excès de la tension électrique p sur la pression atmosphérique H . Il n'en est rien. Aux pressions ordinaires, de 760^{mm} de mercure par exemple, la valeur limite de p qui détermine la production d'une étincelle est beaucoup plus faible que H , tandis que l'inverse a lieu dans l'air excessivement raréfié ; dans ce dernier cas la valeur de p va même en croissant lorsque H décroît indéfiniment (ce fait se produit à partir de la pression de 3^{mm} de mercure dans certaines expériences).

La tension électrique ne doit pas être assimilée, en tous ses effets, à une tension mécanique. Elle n'en est pas moins de la nature d'une pression spécifique ou pression par unité de surface, et a pour dimensions :

$$FL^{-2} = L^{-1}MT^{-2}$$

quel que soit le système de dimensions adopté : électrostatique, électromagnétique ou autre.

14. Potentiel électrique. — Lorsqu'on relie par un fil fin conducteur deux corps électrisés très éloignés, il se produit en général un courant, qui va de l'un à l'autre à travers le fil et dont la durée

est excessivement courte; puis l'équilibre s'établit. En promenant alors l'extrémité du fil fin à la surface de l'un des corps, on remarque que l'équilibre n'est pas troublé, bien qu'aux divers points de la surface touchée la densité et la tension soient variables. Le flux d'électricité n'est donc pas dû à des différences de densité ni de tension. Il n'a pas non plus pour cause la différence des charges des deux corps, car deux sphères électrisées réunies par un fil fin ont, dans l'état d'équilibre, des charges proportionnelles à leurs rayons respectifs et, par conséquent, différentes l'une de l'autre. La tendance au mouvement électrique doit donc être attribuée à un nouvel élément, que l'on a appelé le potentiel. Par définition, la différence des potentiels ou force électromotrice entre deux points A et B est la cause qui tend à produire le mouvement électrique de A vers B.

On a traduit mathématiquement cette définition vague de la manière suivante. Prenons deux points A et B à une distance infiniment petite dx , et soit X la projection suivant AB de la force électrique qui s'exercerait sur l'unité Q d'électricité placée en A. Le travail produit par cette force pendant le déplacement de Q, de A en B, serait égal au produit Xdx .

Si la projection X de la force et, par suite, le travail Xdx sont positifs, l'électricité est poussée de A vers B. On dit alors que le potentiel du point A est plus élevé que celui de B, ou que la variation dV du potentiel V, lorsqu'on passe de A en B, est négative. Si au contraire Xdx est négatif, dV est positif. Pour compléter la définition du potentiel, on conviendra dès lors de prendre :

$$dV = - Xdx$$

d'où :

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2)$$

Cette équation intégrée le long d'un chemin quelconque entre deux points A et B, situés à distance finie l'un de l'autre, donnera :

$$V_A - V_B = \int_A^B Xdx$$

dx désignant un élément du chemin suivi, dont la direction peut être constante ou variable d'un point à un autre.

Ce raisonnement suppose que le potentiel V a, en chaque point tel que A ou B , une valeur déterminée, et par suite que l'intégrale $\int_A^B X dx$ dépend seulement de la position des points extrêmes et non du chemin suivi dans l'intervalle. Nous allons montrer qu'il en est effectivement ainsi.

Le potentiel V en un point résulte de la présence des quantités d'électricité q_1, q_2, q_3, \dots qui produisent le *champ électrique*. L'une quelconque de ces quantités q , placée en M , exerçant sur l'unité d'électricité en A une force définie par la loi de Coulomb : $f = k \frac{q}{r^2}$, le travail auquel elle donne lieu, dans le déplacement

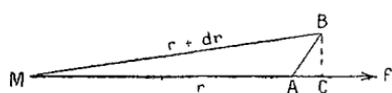


Fig. 1.

de A en B , est égal au produit de la force f par la projection AC du chemin AB supposé infiniment petit sur la force, soit $f \times AC$.

Or, la distance $MB = r + dr$ étant égale à sa projection MC , à un infiniment petit près du second ordre (d'après un théorème connu), il en résulte que AC est égal à dr , et le travail $f \times AC$ est égal à $kq \frac{dr}{r^2}$. Comme, d'autre part, le travail produit par la force résultante due aux quantités q_1, q_2, q_3, \dots est la somme des travaux produits par les forces composantes f_1, f_2, f_3, \dots , ce travail, que nous avons représenté par $X dx$ ou $(-dV)$ aura pour expression :

$$-dV = \Sigma kq \frac{dr}{r^2} = -d \left(\Sigma k \frac{q}{r} \right)$$

Il en résulte

$$V = \Sigma k \frac{q}{r} + C$$

C étant une constante arbitraire que l'on peut prendre égale à zéro. L'expression du potentiel sera donc finalement :

$$V = k \Sigma \frac{q}{r} \quad (3)$$

En prenant un point B à une distance infiniment grande des quantités q_1, q_2, \dots on voit que, les valeurs de r devenant infinies, V_B est nul, et le travail $(V_A - V_B)$ produit par les forces électriques dans le déplacement de A en B se réduit à V_A . Ce travail V_A est évidemment égal à celui qu'il faudrait dépenser pour amener

l'unité d'électricité de l'infini au point A *en surmontant les forces électriques*. Pratiquement il suffit de prendre B en dehors du champ ou bien en l'un des points où le potentiel V_B est nul.

Ainsi pour amener l'unité d'électricité du potentiel zéro au potentiel V, il faut dépenser un travail ou une somme d'énergie égale à V, qui ne se retrouve ni sous forme de force vive, ni sous forme de chaleur. Cette énergie, qui paraît détruite se retrouvera intégralement sous forme mécanique (travail d'un moteur électrique), calorifique (échauffement d'un conducteur par la décharge électrique), ou chimique (décomposition d'un liquide dans un voltamètre), etc., lorsque la quantité d'électricité en question sera ramenée au potentiel zéro. Actuellement elle est à l'état latent ou *potentiel*; de là le nom donné à cette grandeur V.

Il est à remarquer que la connaissance de la valeur absolue du potentiel nous est inaccessible. On peut en effet diviser $\Sigma \frac{q}{r}$ en deux parties : $\Sigma \frac{q'}{r} + \Sigma \frac{q''}{r}$, la seconde partie se rapportant aux quantités q''_1, q''_2, \dots qui se trouvent à des distances r tellement grandes que la valeur de $\Sigma \frac{q''}{r}$ reste sensiblement constante dans l'étendue limitée du champ où l'on opère. Or cette valeur $\Sigma \frac{q''}{r}$ nous est inconnue, parce que, la variation de ce potentiel V'' étant insensible, la force électrique — $\frac{\partial V''}{\partial x}$ (voir formule 2) l'est également et que son existence ne peut dès lors être constatée. Il en résulte que l'on ne peut déterminer que des différences de potentiel, telles que $V_A - V_B$. La connaissance des potentiels absolus V_A et V_B importe peu d'ailleurs, puisque les forces électriques ne dépendent que des différences de potentiels. C'est ce qui ressort bien de la formule (2), définissant la force électrique X suivant une direction dx en fonction du potentiel V. Il n'y a donc aucun inconvénient à prendre arbitrairement le zéro de potentiel; ordinairement on prend pour zéro le potentiel de la terre ou celui des parois du laboratoire où l'on opère.

L'emploi simultané des mots : *force électrique* pour désigner X, qui est le quotient d'une différence de potentiel par une longueur, et *force électromotrice* pour désigner une différence de potentiel ($V_A - V_B$), peut prêter à confusion; toutefois il est consacré par l'usage. Il suffit de signaler la distinction à faire entre

ces deux grandeurs. Par contre on doit éviter d'employer, comme on le fait encore quelquefois, le mot *tension*, qui a un sens bien déterminé (pression par unité de surface $L^{-1} MT^{-2}$), pour désigner une force électromotrice.

Les dimensions du potentiel (3) ou de la force électromotrice sont celles de la grandeur : $k \Sigma \frac{q}{r}$, c'est-à-dire : $K Q L^{-1} = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$. Dans le système électrostatique, K ayant des dimensions nulles, on a :

$$V_e = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

15. Surfaces équipotentielles. — Sur un conducteur en équi-

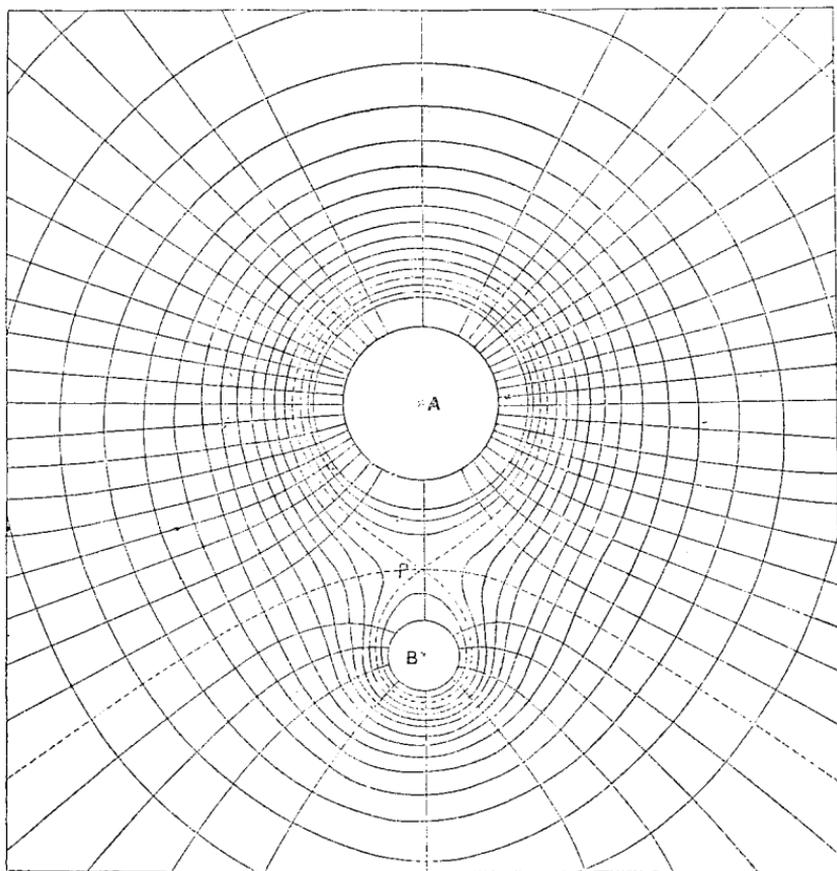


Fig. 2. — A = 20, B = 5, P = point d'équilibre, $AP = \frac{2}{3} AB$

libre électrostatique, la force électromotrice ($V^A - V^B$) étant nulle

entre deux points quelconques, le potentiel est constant. Mais dans le diélectrique environnant il varie d'un point à un autre.

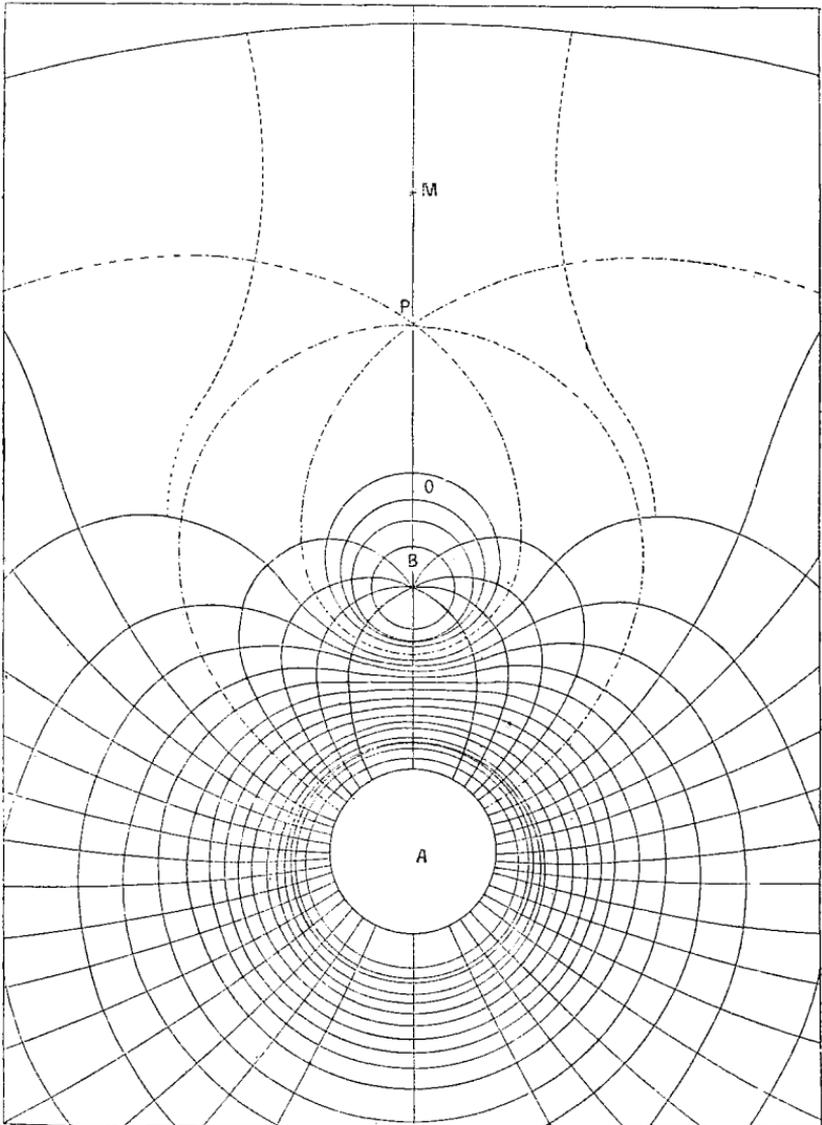


Fig. 3. — ($A = 20$, $B = -5$, $AP = 2 AB$)

Les points où le potentiel a une valeur déterminée V_0 constituent une surface représentée par l'équation : $V(x, y, z) = V_0$. Une telle surface est dite *équipotentielle*. On peut supposer l'espace sillonné de surfaces équipotentielles correspondant à des

valeurs V_0, V_1, V_2, \dots variant par exemple, en progression arithmétique. L'écartement de deux d'entre elles consécutives est d'autant plus grand en général que l'on s'éloigne davantage des charges électriques répandues dans le champ. Les figures 2 et 3 ci-contre, extraites du *Traité d'Electricité et de Magnétisme* de Maxwell, montrent les sections méridiennes des surfaces équipotentielles de révolution dues à deux quantités d'électricité, concentrée aux points A et B et égales respectivement à + 20 et + 5 sur la figure 2, à + 20 et - 5 sur la figure 3.

Le potentiel en un point de l'espace situé aux distances respectives r_1 et r_2 des points A et B est, d'après la formule (3), en faisant abstraction du coefficient k :

$$\frac{20}{r_1} + \frac{5}{r_2} \text{ dans le cas de la figure 1}$$

$$\frac{20}{r_1} - \frac{5}{r_2} \text{ dans le cas de la figure 2}$$

Pour des points très voisins de A, le potentiel est très grand et se réduit sensiblement à $\frac{20}{r_1}$. Les surfaces équipotentielles aux environs de A sont donc sensiblement des sphères ayant leur centre en A. Il en est de même aux environs de B. Cela est très visible sur les deux figures.

Pour des points très éloignés de A et de B, r_1 et r_2 étant sensiblement égaux, le potentiel est réduit à $\frac{20 + 5}{r}$ dans le premier cas, à $\frac{20 - 5}{r}$ dans le second cas. Les surfaces équipotentielles se confondent à peu près avec des sphères entourant à la fois A et B et ayant leur centre en l'un de ces points. On voit assez bien sur la figure 2 comment les surfaces équipotentielles se transforment en s'éloignant de A et de B, en tendant vers la forme sphérique.

Deux surfaces correspondantes à des potentiels différents ne se rencontrent pas. Mais une surface équipotentielle peut se composer de plusieurs nappes distinctes. Ainsi, sur la figure 2, une surface correspondante à un potentiel très élevé comprend deux nappes, qui sont sensiblement des sphères décrites autour des points A et B avec des rayons r_1 et r_2 très petits et dans le rapport de 20 à 5 (potentiels $\frac{20}{r_1} = \frac{5}{r_2}$). Les surfaces éloignées à faibles potentiels sont au contraire à une seule nappe. Le passage entre

ces deux sortes de surfaces équipotentielles est constitué par une surface à deux nappes se raccordant en un point P (tracé en pointillé).

On doit faire abstraction ici des trajectoires orthogonales de ces diverses surfaces, qui sont tracées sur les figures 2 et 3, et qui représentent des lignes de forces. Elles seront étudiées au paragraphe suivant.

On appelle quelquefois surfaces de *niveau* les surfaces équipotentielles, en les assimilant aux surfaces horizontales ou plutôt concentriques à la sphère terrestre, sur lesquelles le potentiel dû à la pesanteur est constant en tous les points.

16. Lignes de force. — Si une quantité d'électricité décrit un chemin dx quelconque situé sur une surface de niveau, la variation de potentiel étant nulle, on a :

$$- dV = Xdx = 0$$

Par conséquent, la composante X de la force électrique F au point considéré suivant la direction dx est nulle; il en résulte que la force F est normale à la surface de niveau, à moins qu'elle ne soit nulle. Pour un déplacement dn suivant la normale dans le sens des potentiels décroissants, la force suivant cette direction étant précisément F , la variation de potentiel ($- dV$) sera donnée par :

$$- dV = Fdn$$

d'où :

$$F = - \frac{dV}{dn}$$

Cette formule est un cas particulier de celle qui fait connaître la composante de la force dans une direction quelconque :

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

On appelle *lignes de force* des lignes tangentes en chaque point à la direction de la force électrique. Ce sont donc les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles. Les figures 2 et 3 donnent le tracé de ces lignes. Aux environs des points A et B,

les surfaces équipotentielles étant à peu près sphériques, les lignes de force sont sensiblement dirigées suivant les rayons aboutissant en ces points. Sur la figure 2, toutes ces lignes issues du pôle B, qui est le plus faible, vont aboutir en A ; d'autres lignes partent de A pour s'éloigner à l'infini.

17. Points et lignes d'équilibre. — Une quantité d'électricité placée en un point où la force F est nulle s'y tient en équilibre. Un tel point s'appelle *point d'équilibre*. Tel est le point P situé à des distances r_1 et r_2 dans le rapport de $\sqrt{20}$ à $\sqrt{5}$ ou de 2 à 1 : sur la figure 2, entre A et B ; sur la figure 3, en dehors de AB. D'une manière générale la force est nulle en tout point où deux nappes d'une même surface équipotentielle se raccordent sous un certain angle et où, par conséquent, la normale à la surface est indéterminée.

En un point d'équilibre, la force F étant nulle, il en est de même de la variation de potentiel $dV = -X dx$ sur une longueur infiniment petite dx dans une direction quelconque ; c'est-à-dire que le potentiel V passe en ce point par un maximum ou un minimum, ou bien est constant (comme à l'intérieur d'un conducteur). L'équilibre est instable dans le cas du maximum ; car, le potentiel décroissant dans tous les sens à partir du point en question, si la quantité q (positive) d'électricité est écartée de ce point, elle tendra à s'en écarter davantage. L'équilibre est stable au contraire dans le cas du minimum, et indifférent lorsque le potentiel est constant dans toutes les directions. Ajoutons toutefois qu'en un point d'équilibre le potentiel peut être maximum pour certaines directions et minimum pour d'autres ; l'équilibre est alors stable ou instable, suivant que l'on considère des déplacements suivant ces dernières directions ou suivant les premières. Ces propriétés sont exactement les mêmes que celles de l'équilibre des corps en mécanique.

Une ligne telle que la force électrique est nulle en chacun de ses points est une *ligne d'équilibre*¹.

¹ Voir dans Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, ou dans Mascart et Joubert, *Leçons sur l'Electricité et le Magnétisme*, l'étude mathématique de divers cas d'équilibre.

18. Énergie d'un système électrisé. — Par suite de la définition du potentiel, l'énergie nécessaire pour amener une quantité q d'électricité du potentiel zéro au potentiel V est égale à qV .

Considérons les diverses charges élémentaires q_1, q_2, \dots, q_n constituant un système électrisé. L'énergie potentielle W de ce système est la somme des énergies dépensées pour amener ces charges à leur position actuelle, en présence les unes des autres. Le produit $q_i V_i$ représente l'énergie dépensée pour amener q_i en présence des autres charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$. La somme $\Sigma qV = q_1 V_1 + \dots + q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots$ des produits semblables sera le double de l'énergie potentielle W , puisqu'elle comprend, pour chaque groupe (q_i, q_j) , le travail dépensé pour amener q_i en présence de q_j et celui dépensé pour amener q_j en présence de q_i , ce qui fait double emploi. Il en résulte que W est la moitié de $\Sigma q V$:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma q V \quad (4)$$

Cette énergie potentielle est celle que le système électrisé est susceptible de restituer, sous forme de travail mécanique, de chaleur, d'énergie chimique, etc., par voie de décharge ou tout autrement, lorsque les charges q_1, q_2, \dots retombent au potentiel zéro.

On sait que les forces électriques dépendent des différences de potentiel, mais non des potentiels absolus. En est-il de même de l'énergie W ? Si l'on ajoute une constante V_0 aux potentiels V , la formule (4) devient :

$$W' = \frac{1}{2} \Sigma q (V + V_0) = \frac{1}{2} \Sigma q V + \frac{1}{2} V_0 \Sigma q$$

ou

$$W' = W + \frac{1}{2} V_0 \Sigma q$$

On voit que $W' = W$, autrement dit que l'énergie ne dépend pas des potentiels absolus, lorsqu'il s'agit d'un système électrisé dont la charge totale Σq est nulle. Cela est vrai même quand ce système se trouve dans un champ électrique variable dû à un autre système électrisé quelconque. Ainsi la valeur de l'énergie W pour un système dans lequel Σq est nul, est indépendante du zéro choisi pour le potentiel.

19. Capacité électrostatique. — Si l'on suppose un corps conducteur A électrisé et isolé dans l'espace, le potentiel V de ce corps sous l'action de sa propre charge Q est proportionnel à celle-ci. En effet si l'on multiplie par n la densité électrique en chaque point et par suite la charge totale Q , le potentiel est également multiplié par n et reste constant sur le conducteur. On a donc un nouvel état d'équilibre, et il n'y a pas d'autre distribution possible de la charge nQ sur le conducteur, ainsi qu'on le verra plus loin. Le rapport $\frac{Q}{V} = C$ s'appelle la capacité électrostatique du corps en question.

Les dimensions de la capacité électrostatique sont donc $Q V^{-1}$, soit dans le système électrostatique :

$$C, = L$$

Dans le cas où le conducteur électrisé A se trouve en présence d'autres conducteurs B, C, \dots , la présence de ceux-ci change la distribution électrique sur A ; et, pour une même valeur de Q , la valeur de V varie d'une manière arbitraire avec la position et l'électrisation des corps voisins. Le rapport $\frac{Q}{V}$ n'a donc plus de sens, à moins que l'on ne spécifie les conditions dans lesquelles se trouvent ces corps..

On appelle en général *capacité du corps A en présence des conducteurs B, C, \dots* la valeur du rapport $\frac{Q}{V}$ lorsque ceux-ci sont maintenus au potentiel zéro. Mais au lieu de cette définition, on adopte quelquefois la suivante : En supposant le système B, C, \dots maintenu à un potentiel uniforme V' et chargé d'une quantité $-Q$ d'électricité égale et de signe contraire à la charge Q de A , la capacité de A est égale au rapport $\frac{Q}{V - V'}$. Cette définition concorde avec la précédente lorsque le système B, C, \dots se réduit, par exemple, à un conducteur B enveloppant complètement A . En effet tout corps électrisé A placé à l'intérieur d'un conducteur creux B induit sur la surface interne de celui-ci, comme on le démontrera au § 22 (corollaire II,) une charge $-Q$ égale et de signe contraire à la sienne propre $+Q$. D'autre part, on peut supposer, sans changer les actions électriques, les potentiels V et V' des corps A et B diminués de la même quantité V' . Ces deux

potentiels deviennent alors $V - V'$ et zéro, et la première définition donne le même résultat que la seconde. Mais il n'en est plus de même si le corps B ou le système B, C, \dots est extérieur à A .

Si les corps B, C, \dots sont isolés et préalablement à l'état neutre, et que l'on vienne à électriser le conducteur A , le potentiel V de celui-ci sera encore proportionnel à la charge Q . Le rapport $\frac{Q}{V} = C$, pris comme définition de la capacité de A dans ce nouveau cas, ne répond pas à la première définition, ni à la seconde, sauf dans le cas d'un corps B enveloppant A complètement.

Chacune des trois définitions qui viennent d'être données de la capacité a sa raison d'être suivant les cas : la première, par exemple, dans le cas d'un fil télégraphique aérien A électrisé en présence d'un second B qui communique avec la terre ; la troisième, dans le cas où le fil B est isolé. Dans le cas où les corps A et B forment un condensateur fermé (cas d'un câble télégraphique sous-marin à enveloppe métallique), les trois définitions conviennent ; mais nous nous servons surtout de la seconde : $C = \frac{Q}{V - V'}$. Lorsque nous parlerons de la charge Q d'un condensateur, il sera sous-entendu que les deux conducteurs en présence constituant le condensateur ont des charges $+Q$ et $-Q$ égales et de signes contraires.

L'énergie électrique d'un condensateur chargé est, d'après la formule (4) et en tenant compte de la relation : $Q = C(V - V')$:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum q V = \frac{1}{2} Q (V - V') \\ &= \frac{1}{2} C (V - V')^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Si l'on décharge le condensateur sans production de travail mécanique ou chimique, l'énergie calorifique développée soit dans l'air sous forme d'étincelle, soit dans le conducteur traversé par la décharge, doit être égale à W . De là une vérification expérimentale possible, si l'on mesure cet échauffement et que d'autre part on calcule la capacité C . La théorie est du reste venue, sur ce point, après les expériences de Riess, relatives à l'échauffement produit par la

décharge de bouteilles de Leyde dans des circonstances variées ¹. Le résultat de ces expériences confirme entièrement la théorie.

Si on laisse se rapprocher infiniment peu les armatures d'un condensateur, la capacité C s'accroît de dC , et la différence de potentiel des armatures décroît. La charge Q restant constante, l'énergie potentielle $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ décroît d'une quantité $-dW = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} dC = \frac{1}{2} (V - V')^2 dC$, précisément égale au travail accompli par les actions électriques.

Supposons qu'au contraire pendant le rapprochement la différence de potentiel $(V - V')$ soit maintenue constante par la mise en communication des armatures du condensateur avec les pôles d'une source électrique, une pile par exemple. La charge Q s'accroît de $dQ = (V - V') dC$. Les actions électriques en jeu, étant les mêmes que précédemment, accomplissent le même travail $dT = \frac{1}{2} (V - V')^2 dC$; et cependant l'énergie potentielle $W = \frac{1}{2} C (V - V')^2$, au lieu de décroître, s'accroît de la quantité $dW = \frac{1}{2} (V - V')^2 dC = dT$. C'est que la pile fournit au condensateur une somme d'énergie $dW + dT = (V - V')^2 dC = (V - V') dQ$, dont une moitié est consacrée à produire le travail extérieur dT et l'autre à accroître de dW l'énergie du condensateur.

20. Pouvoir inducteur spécifique. — La formule du potentiel

$$V = k \Sigma \frac{q}{r}$$

montre qu'à égalité de charges les potentiels sont proportionnels au coefficient k du milieu diélectrique. Il en résulte que la capacité $C = \frac{Q}{V}$ est inversement proportionnelle à k . Désignons par k_1 le coefficient relatif à l'air (dont la valeur est égale à 1 dans le système électrostatique et au carré de 300,000 kilomètres par seconde dans le système électromagnétique), et posons.

$$k = \frac{k_1}{\mu}$$

La capacité C d'un corps, en présence d'autres conducteurs, dans un diélectrique de coefficient k , sera égale à μ fois la capa-

¹ *Électricité statique*, t. II, par M. Mascart.

cité qui correspondrait au cas où le milieu serait de l'air ; μ est dit le *pouvoir inducteur* ou la *capacité inductive spécifique* du diélectrique en question par rapport à l'air.

La détermination du pouvoir inducteur spécifique de diverses substances offre un grand intérêt : 1° au point de vue pratique, notamment en télégraphie, où la capacité électrostatique des fils à enveloppe de caoutchouc ou de gutta-percha est une cause sérieuse de retard dans les transmissions ; 2° au point de vue théorique, la principale vérification de la théorie électromagnétique de la lumière de Maxwell consistant dans ce fait que le coefficient k doit être proportionnel au carré de la vitesse de la lumière pour un diélectrique transparent, ou bien que le pouvoir inducteur $\mu = \frac{k_1}{k}$ doit être égal au carré de l'indice de réfraction.

Cavendish est le premier qui ait mesuré le pouvoir inducteur spécifique de divers diélectriques solides (entre 1771 et 1781) ; ses expériences n'ont été publiées qu'en 1879 par Maxwell. Faraday en 1837 effectua des mesures semblables sur des solides, des liquides et des gaz, mais sans résultat pour ces derniers. Depuis 1871, de nombreux savants se sont livrés à des recherches du même genre. Les principales méthodes employées par eux sont les suivantes :

1° Comparaison de la charge que prend un condensateur de forme invariable, chargé à une différence de potentiel déterminée, quand l'espace compris entre les deux conducteurs ou *armatures* en présence est successivement de l'air ou d'autres substances. Ce procédé a été employé sous plusieurs formes et combiné notamment avec la méthode de réduction à zéro.

2° Comparaison des attractions exercées par un conducteur électrisé sur une balle sphérique placée dans une position invariable, suivant que cette balle est métallique ou constituée par une masse de la substance diélectrique étudiée (Méthode de Boltzmann, 1873). Le rapport α de l'attraction exercée sur la balle métallique à celle exercée sur la balle diélectrique étant donné par l'expérience, le pouvoir inducteur μ du diélectrique se calcule par la formule (voir § 32, 4°).

$$\mu = \frac{\alpha + 2}{\alpha - 1}$$

3° Méthode des oscillations électriques (Schiller). — Méthode de

la balance d'induction électrostatique (Gordon), etc. On trouvera dans le *Traité expérimental d'Electricité et de Magnétisme*, de Gordon (traduction Raynaud), de longs développements sur ces diverses méthodes et sur les résultats obtenus.

M. Boltzmann a, le premier, réussi à mettre en évidence la différence des pouvoirs inducteurs des différents gaz (1874). Les chiffres obtenus par lui, dans des expériences où la pression variait de 760^{mm} à 10^{mm} de mercure, montrent que l'excès du pouvoir inducteur μ d'un gaz sur une certaine valeur μ_0 voisine de l'unité est proportionnel à sa densité d :

$$\frac{\mu - \mu_0}{d} = \text{const.}$$

Tout porte donc à croire qu'il en est ainsi à la limite et que le pouvoir inducteur μ tend, lorsque la pression diminue indéfiniment, vers la valeur μ_0 , qui est la même pour tous les gaz et que l'on peut appeler le *pouvoir inducteur du vide*; μ est toujours supérieur à μ_0 . Les recherches de MM. Ayrton et Perry (1877) sont venues confirmer ce fait.

M. Boltzmann a fait connaître un autre résultat très important (1874). En mesurant le pouvoir inducteur μ d'un échantillon de soufre cristallisé, il a trouvé des valeurs différentes dans différentes orientations, les valeurs correspondantes aux directions des trois axes d'élasticité étant : 4,773 — 3,970 — 3,814. Ce fait doit sans doute se produire dans tout diélectrique anisotrope.

On n'a pas cherché seulement à déterminer par une expérience la capacité inductive de chaque substance. On a étudié l'influence de la température, de la pression et surtout de la durée de l'électrisation. Les nombres varient beaucoup, pour un même diélectrique, suivant l'origine de l'échantillon employé, les manipulations qu'il a subies, etc.; ils varient, pour un même échantillon, avec le temps et sans cause extérieure apparente¹.

Au sujet de l'influence de la température, il existe peu de données. Toutefois, M. Palaz a trouvé, en opérant sur des liquides,

¹ Voir les recherches de Gaugain sur les capacités inductives : *Annales télégraphiques*, 1865, p. 129-178.

que la capacité inductive décroît quand la température augmente, et que le coefficient de variation de cette capacité, pour une variation de température de 1°, est 0,00308 pour le benzol et 0,00366 pour le toluol¹.

21. Phénomène de la charge résiduelle. — Le principal obstacle que l'on rencontre dans la détermination des pouvoirs inducteurs spécifiques tient au phénomène bien connu de la charge résiduelle. Les nombres trouvés sont d'autant plus faibles que la durée de l'électrisation à laquelle sont soumis les échantillons est plus courte. La grandeur de la charge prise par un condensateur sous une force électromotrice déterminée est due aux causes suivantes :

1° Au moment où la communication est établie entre la source électrique et le condensateur, celui-ci absorbe instantanément (ou plutôt en un temps extrêmement court, à la condition que la résistance opposée au courant de charge soit très faible) une charge dont la valeur ne dépend que de la forme du condensateur et de la nature du diélectrique ; la connaissance de cette charge, dite instantanée, ferait connaître la vraie valeur du coefficient μ .

2° Si on laisse le condensateur en communication avec la source, la charge s'accroît encore lentement pendant un certain temps. On peut expliquer ce fait en disant que, sous l'action de la force électrique s'exerçant entre les armatures, le diélectrique s'altère peu à peu, cette altération ayant pour effet d'augmenter la capacité inductive. Le diélectrique serait semblable à une tige imparfaitement élastique qui, soumise à une traction ou à un couple de torsion déterminés, prendrait instantanément un allongement ou une torsion *proportionnels* à l'effort exercé, mais qui en outre continuerait à subir lentement une torsion ou un allongement dits *permanents* ; le mot *permanent* n'est d'ailleurs pas tout à fait exact. Cette comparaison ne manque pas de justesse, puisqu'on a réussi à mettre en évidence expérimentalement une déformation réelle du diélectrique ; mais elle est incomplète. On verra en effet, au § 78, que si la lame diélectrique interposée entre les armatures d'un condensateur n'est pas parfaitement iso-

¹ *Lumière électrique*, 31 juillet 1886.

lante ou homogène, cela suffit pour donner lieu au phénomène de la charge lentement croissante. Ce fait a été signalé par Maxwell.

3° Si le diélectrique présente une certaine conductibilité, même très faible, ce qui est le cas général, le courant qui va de la source au condensateur continue indéfiniment et finit par prendre une intensité sensiblement constante; mais ce courant n'accroît plus effectivement la charge du condensateur, il ne sert qu'à la maintenir constante, celle-ci tendant en effet à se dissiper d'elle-même par voie de conduction d'une armature à l'autre.

Pendant la décharge d'un condensateur on observe des phénomènes analogues à ceux qui ont lieu pendant la charge. En réunissant métalliquement les deux armatures, on produit la décharge instantanée d'une quantité d'électricité sensiblement égale à la charge instantanée. Puis, en isolant aussitôt après les armatures, on peut obtenir au bout de quelque temps une décharge résiduelle, qui peut être suivie de plusieurs autres d'intensités décroissantes.

A cause de la durée des opérations, le pouvoir inducteur spécifique mesuré n'est pas le même suivant que l'on observe la charge ou la décharge du condensateur. Cette différence est d'autant plus accusée que la deuxième et la troisième causes signalées ci-dessus ont plus d'influence. On doit donc s'attacher à ne laisser le condensateur chargé que le moins longtemps possible. Divers expérimentateurs ont même fait usage de courants de charge alternativement positifs et négatifs, les charges se succédant périodiquement à des intervalles très rapprochés (Boltzmann : $\frac{1}{360^e}$ de seconde; Gordon $\frac{1}{12000^e}$; Schiller $\frac{1}{20000^e}$) de manière que les effets de sens contraires de deux charges consécutives sur la substance du diélectrique se contrarient,

On voit, en résumé, que l'on peut considérer la capacité d'un condensateur comme le rapport de la charge qu'il prend en un temps extrêmement court à la force électromotrice de la source avec laquelle il est mis en communication. Aussi les nombres fournis par divers savants pour le pouvoir inducteur d'une même substance sont-ils d'autant plus concordants *en général* que les durées d'électrisation adoptées par eux sont plus courtes. Voici du reste quelques chiffres relatifs au pouvoir inducteur, à la tem-

pérature ordinaire, des isolants les plus employés dans l'industrie électrique :

DIÉLECTRIQUE	POUVOIR inducteur	DURÉE de l'électrisation en secondes	NOM DES OBSERVATEURS
Air (à 0° et 760 ^{mm}).....	1,00000	»	»
Vide	0,99941	»	Boltzmann.
Paraffine	1,99	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Id.	2,32	$\frac{1}{360}$	Boltzmann.
Id.	8,12	45	Id.
Soufre.....	2,58	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Id.	3,90	$\frac{1}{360}$	Boltzmann.
Gomme laque.....	2,74	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Ebonite.....	2,28	Id.	Id.
Caoutchouc noir.....	2,22	Id.	Id.
Id. vulcanisé gris.....	2,50	Id.	Id.
Gutta-percha.....	2,46	Id.	Id.
Chatterton compound.....	2,55	Id.	Id.
Essence de térébenthine.....	2,15	$\frac{1}{25}$	Silow.
Benzine cristallisée	2,20	Id.	Id.
Pétrole rectifié.....	2,19	$\frac{1}{50}$	Palaz.
Sulfure de carbone.....	1,81	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
Id.	2,61	$\frac{1}{50}$	Palaz.
Verre :			
Flint double très dense :			
1° après la fonte.....	3,16	$\frac{1}{12000}$	Gordon.
2° 18 mois après.....	3,84	Id.	Id.
Flint léger :			
1° après la fonte.....	3,01	Id.	Id.
2° 18 mois après.....	3,44	Id.	Id.

Ces chiffres ne sont que des approximations. Ainsi certains échantillons de gutta ont un pouvoir inducteur égal à 3 ou 4, ou même davantage.

CHAPITRE II

THÉORÈMES GÉNÉRAUX D'ÉLECTROSTATIQUE

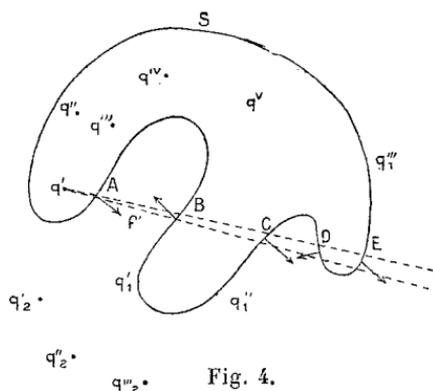
22. **Théorème de Green.** — Si dans un milieu homogène on considère une surface fermée quelconque S , on a :

$$\int_S -\frac{1}{k} \frac{dV}{dn} dS = 4\pi q + 2\pi q_1 \quad (1)$$

q désignant la quantité totale d'électricité qui se trouve à l'intérieur de S , q' la quantité totale répandue sur la surface même, $-\frac{dV}{dn}$ la composante suivant la normale *extérieure* à S de la force électrique

au point où se trouve l'élément dS , et l'intégrale \int_S étant étendue à tous les éléments dS de la surface.

En effet la composante normale $-\frac{dV}{dn}$ est la somme des composantes des forces élémentaires dues aux diverses quantités $q', q'', \dots q'_1, q''_1, \dots q'_2, q''_2, \dots$ existantes dans le champ



(fig. 4). L'une de ces forces, due à q' par exemple, a pour expression :

$$f' = k \frac{q'}{r^2}$$

Or si du sommet q' on décrit un cône ayant une ouverture infiniment petite $d\omega$, c'est-à-dire découpant une surface égale à $d\omega$ sur une sphère de rayon 1 ayant q' pour centre, ce cône détachera

sur la surface S des éléments dS aux divers points A, B, C, D, E . En désignant par α' l'angle que fait la normale en l'un de ces points, A par exemple, avec le rayon $q'A$ ou r , on a la relation :

$$dS = \frac{r^2 d\omega}{\cos \alpha'}$$

Comme au même point on a : $f' = k \frac{q'}{r^2}$, il en résulte :

$$f' \cos \alpha' dS = k q' d\omega$$

Cette valeur de $f' \cos \alpha' dS$, étant indépendante de r , de α' et de la grandeur de l'élément dS , sera la même pour les éléments découpés par le cône $d\omega$ en B, C, D, E . Toutefois aux points B et D elle doit être changée de signe, l'angle α' du rayon r et de la normale extérieure à la surface étant obtus et, par suite $\cos \alpha'$ étant négatif. La somme des valeurs de $f' \cos \alpha' dS$ pour les éléments A, B, C, D, E , se réduit donc à $k q' d\omega$, c'est-à-dire à kq' multiplié par l'angle solide sous lequel on voit du point q' la face intérieure de l'élément A .

Supposons l'espace environnant q' rempli de cônes tels que le précédent. Les divers éléments dS de la surface se trouveront tous découpés, et l'on aura, en faisant la somme des quantités $f' \cos \alpha' dS$ sur toute la surface :

$$\int_s f' \cos \alpha' dS = \int kq' d\omega = 4\pi kq'$$

puisque la somme des angles solides $d\omega$ sous lesquels on voit de q' la surface intérieure de S est 4π , c'est-à-dire la surface totale de la sphère de rayon 1. Chaque quantité q'', q''', \dots , donnant d'ailleurs une équation semblable, on aura, par voie d'addition, pour toutes ces quantités comprises à l'intérieur de S :

$$\int_s \Sigma f \cos \alpha' dS = 4\pi k \Sigma q' = 4\pi kq$$

En appliquant le même raisonnement à une quantité q'_1 , située à la surface même, comme l'angle solide sous lequel on voit de q'_1 la surface intérieure de S n'est plus que la moitié de 4π , on aura :

$$\int_s f'_1 \cos \alpha'_1 dS = \int kq'_1 d\omega = 2\pi kq'_1$$

d'où, en ajoutant toutes les relations semblables relatives à q''_1, q'''_1, \dots :

$$\int_S \Sigma f_1 \cos \alpha_1 dS = 2\pi k \Sigma q'_1 = 2\pi k q_1$$

Enfin pour les quantités q'_2, q''_2, \dots extérieures à la surface, comme de leurs positions on ne voit pas la face intérieure de S, $\int d\omega$ est nul et l'on peut écrire :

$$\int_S \Sigma f_2 \cos \alpha_2 dS = 0$$

Mais $(\Sigma f \cos \alpha + \Sigma f_1 \cos \alpha_1 + \Sigma f_2 \cos \alpha_2)$ n'est autre chose que la composante normale $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$ de la force résultante au point où se trouve l'élément dS . Par suite, en ajoutant membre à membre les équations précédentes, on trouve bien la relation :

$$\int_S -\frac{1}{k} \frac{dV}{dn} dS = 4\pi q + 2\pi q_1 \quad (1)$$

Remarque. — Si l'on convient d'attribuer la charge q_1 de la surface, moitié à l'espace intérieur, moitié à l'espace extérieur à S, le second membre de l'équation précédente peut s'écrire simplement $4\pi q$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\int_S -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS = q \quad (1')$$

Corollaire I. — Il ne peut y avoir de l'électricité en équilibre dans la masse d'un conducteur.

En effet, si l'on applique l'équation (1') à une partie d'un conducteur limitée par une surface S quelconque, grande ou petite, V étant constant, $-\frac{dV}{dn}$ est nul en tous les points. Donc q est nul aussi; ce qui démontre la proposition énoncée.

Corollaire II. — En supposant que la surface S menée dans la masse d'un conducteur M_1 enveloppe une cavité, telle que A_1 (fig. 5), dans laquelle se trouvent des corps électrisés, la quantité

totale q d'électricité à l'intérieur de S étant nulle, il en résulte que la charge électrique induite sur la paroi de la cavité par les corps électrisés est égale et de signe contraire à leur charge totale.

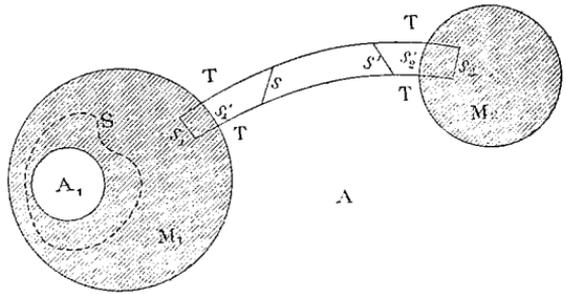


Fig. 5.

Corollaire III. — Si un élément dS d'une

surface S contient une couche électrique σdS de densité σ , cet élément apporte dans le second membre de (1) un terme égal à $2\pi\sigma dS$, et dans le premier membre un élément égal à $\frac{1}{k} f_n dS$, f_n désignant la composante normale $-\frac{dV}{dn}$ de la force électrique. En remplaçant sur la surface S l'élément dS par un autre dS' intérieur à dS , infiniment voisin et ayant même contour, le terme $2\pi\sigma dS$ disparaît du second membre de (1), puisque la charge σdS devient extérieure à S ; et dans le premier membre $\frac{1}{k} f_n dS$ est remplacé par $\frac{1}{k} f'_n dS'$, f'_n désignant la composante normale de la force sur dS' . En comparant la nouvelle équation (1) à la précédente, on trouve :

$$\frac{1}{k} (f_n dS - f'_n dS') = 2\pi\sigma dS$$

ou, comme dS' est sensiblement égal à dS :

$$f_n - f'_n = 2\pi k \sigma \tag{2}$$

De même, si l'on remplace dS par un élément dS'' extérieur, $2\pi\sigma dS$ sera remplacé dans le second membre de (1) par $4\pi\sigma dS$, et l'on aura :

$$f''_n - f_n = 2\pi k \sigma \tag{2'}$$

La composante normale de la force en un point d'une surface électrisée varie donc brusquement de la quantité $2\pi k\sigma$ lorsqu'on passe, soit d'un point intérieur et infiniment voisin à la surface, soit de la surface à un point extérieur infiniment voisin. La com-

posante f_n sur la surface même est la moyenne des deux valeurs voisines :

$$f_n = \frac{1}{2}(f'_n + f''_n) \quad (2'')$$

23. Tubes de force ou d'induction. — Si l'on considère les lignes de force passant par les divers points du contour d'un élément de surface s_1 quelconque (fig. 5), ces lignes forment dans l'espace la surface latérale d'une sorte de canal TT, auquel on a donné le nom de tube de force ou tube d'*induction*; s_1 est une section, plane ou courbe, de ce tube. Appliquons l'équation (1) à la surface S constituée par un tube de force et deux sections quelconques s_1 et s_2 de ce tube. Nous étudierons les cas suivants :

1° Le tube ne contient d'électricité ni à l'intérieur, ni à la surface. Dans ce cas le second membre de (1) est nul et, par suite, le premier également. Mais la composante normale $-\frac{dV}{dn}$ est nulle sur la surface latérale du tube, puisque celle-ci est tangente à la direction de la force en chaque point. L'intégrale \int_s se réduit donc aux parties relatives aux sections s_1 et s_2 :

$$\int_{s_1} -\frac{1}{k} \frac{dV}{dn} dS + \int_{s_2} -\frac{1}{k} \frac{dV}{dn} dS = 0$$

ou :

$$\int_{s_1} \frac{1}{k} \frac{dV}{dn} dS = \int_{s_2} -\frac{1}{k} \frac{dV}{dn} dS$$

Si le tube était un canal traversé par un courant de matière incompressible, le débit ou flux serait le même à travers une section quelconque S_1 ou S_2 . Or le flux, à travers S_2 par exemple, est la somme des produits de chaque élément dS de cette section par la composante normale de la vitesse d'écoulement. Par analogie $-\frac{dV}{dn}$ étant la composante normale de la force électrique, on appelle quelquefois flux de force à travers la surface S_1 l'intégrale $\int_{s_1} -\frac{dV}{dn} dS$. On peut donc exprimer la formule précédente en

disant que le flux de force $\int_{s_1} \frac{dV}{dn} dS$ entrant par la section S_1 dans

le tube est égal au flux $\int_{s_2} -\frac{dV}{dn} dS$ sortant par la section S_2 ; ou,

par abréviation, que le flux de force $\int -\frac{dV}{dn} dS$, compté toujours dans le même sens, est le même à travers toute section du tube.

2° Si le tube contient une quantité q d'électricité, l'équation (1) indique que l'excès du flux $\int_{s_2} -\frac{dV}{dn} dS$, sortant par la section s_2

sur le flux $\int_{s_1} \frac{dV}{dn} dS$ entrant par S_1 est égal à $4\pi k q$. En

d'autres termes, si l'on donne le nom de *flux d'induction* (voir au § 24 la raison de cette dénomination) à l'intégrale

$\int_s \frac{-1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS$, le flux d'induction le long du tube s'accroît, lors-

qu'on passe de S_1 à S_2 , d'une valeur égale à la quantité q d'électricité que l'on rencontre entre ces deux sections.

3° Considérons un tube de force limité à deux sections S_1 et S_2 sur lesquelles la force $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$ est nulle. Il en résulte d'après l'équation (1), que la quantité totale d'électricité dans le tube est nulle; ou bien la quantité q , contenue dans la partie du tube comprise entre la section initiale S_1 et une section quelconque S , est égale et de signe contraire à la quantité contenue entre S et la section terminale S_2 .

D'ailleurs l'équation (1) appliquée à la partie $S_1 S$ donne :

$$\int_s -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS = q$$

puisque $-\frac{dV}{dn}$ est nul sur S_1 . Le flux d'induction à travers une section quelconque du tube représente donc précisément la quantité q d'électricité existant en arrière de S , ou bien la quantité, changée de signe, existant en avant de S dans le tube. S'il n'y a pas d'électricité de S_1 jusqu'en S'_1 par exemple, dans cet intervalle

$\int_s \frac{dV}{dn} dS$ est nul; en supposant la section du tube infiniment petite,

cette intégrale se réduit à l'élément $-\frac{dV}{dn} dS$, et l'on a : $-\frac{dV}{dn} = 0$.

La force $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$ est donc nulle dans l'intervalle $S_1 S'_1$. Ceci montre que le tube de force ne commence réellement qu'à la première section S'_1 sur laquelle on rencontre une électrisation; de même il se termine en réalité à la dernière section S'_2 présentant des traces d'électrisation.

On conviendra qu'un tube de force ou d'induction prend naissance sur une surface, telle que S'_1 , électrisée positivement; il part dès lors dans le sens positif de la force, c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants, et prend fin sur une surface électrisée négativement, telle que S'_2 . Les éléments ou points S'_1 et S'_2 sont dits éléments ou points correspondants.

24. Rôle des conducteurs. — Un tube de force $S'_1 S'_2$ (fig. 5), arrivant à la surface d'un conducteur M_1 ou M_2 , s'y arrête forcément, puisqu'à l'intérieur de ce conducteur la force $-\frac{dV}{dn}$ est nulle. Si M_1 renferme une cavité A_1 à l'intérieur de laquelle se trouvent des corps électrisés, les tubes de force existant dans cette cavité ne peuvent, pour la même raison, sortir de cette cavité et pénétrer dans la masse environnante du conducteur. Comme chaque tube *complet* renferme une quantité totale d'électricité égale à zéro, il en résulte que la charge répandue sur la surface interne du conducteur doit être égale et de signe contraire à la charge totale des corps existant dans la cavité. On retombe ainsi sur le corollaire II du paragraphe 22.

S'il n'y a pas d'électricité à la surface des conducteurs M_1 et M_2 ni à l'extérieur, il ne peut, par là même, y avoir des tubes d'induction dans le milieu ambiant; c'est-à-dire que le champ électrique y est nul, lors même que des corps électrisés existeraient à l'intérieur de la cavité A_1 . Réciproquement les charges extérieures n'ont aucune action dans cette cavité. On exprime cette propriété des conducteurs en disant qu'ils jouent le rôle d'écrans électriques entre deux milieux tels que A_1 et A , qu'ils séparent complètement au point de vue des actions électriques.

Il résulte encore de là que la charge induite sur la paroi de la cavité par les corps électrisés situés à l'intérieur produit en tout point extérieur à l'espace A_1 une action égale et de signe contraire

à celle de la charge même de ces corps, ou bien une action égale à celle de la charge de ces corps changée de signe. La distribution de l'électricité sur ces corps étant quelconque ainsi que la forme de la paroi enveloppante, on en conclut que des charges électriques quelconques pourront toujours être remplacées par une couche électrique répartie sur une surface enveloppante, mais seulement au point de vue des actions extérieures à cette surface.

Si un conducteur M_2 est influencé par un conducteur électrisé M_1 , il lui est relié par des tubes d'induction tels que $S'_1 S'_2$; et si le diélectrique environnant n'est pas électrisé, la charge induite sur la base terminale S'_2 d'un tube est égale et de signe contraire à celle qui existe sur la base initiale S'_1 . Chaque charge élémentaire positive q de M_1 va, en quelque sorte, *induire* une charge négative, égale à $-q$ sur M_2 par l'intermédiaire d'un tube; d'où le nom de tube d'*induction* donné à celui-ci et le nom de flux d'induction donné à la charge q . Certains tubes s'en vont à l'infini, ou plutôt en dehors du champ, chercher des quantités d'électricité égales et de signe contraire à celles qui leur ont donné naissance sur les corps électrisés dans le champ.

Si l'on applique l'équation (1) à une surface fermée $S_1 S'_1$ (fig. 5) ayant un élément infiniment petit S'_1 situé à la surface du conducteur et chargé de la quantité $S'_1 \sigma$, il vient, en remarquant : 1° que $-\frac{dV}{dn}$ est nul partout ailleurs que sur S'_1 , 2° que $q = 0$ et $q_1 = \sigma S'_1$:

$$-\frac{dV}{dn} s'_1 = 2\pi k \sigma s'_1$$

ou :

$$-\frac{dV}{dn} = f_o = 2\pi k \sigma \quad (3)$$

f_o représente la force électrique s'exerçant sur l'unité d'électricité placée à la surface même du conducteur, et σ représente la densité électrique en S'_1 . La force ou *tension* s'exerçant sur la quantité σ répandue sur l'unité de surface est :

$$p = f_o \sigma = 2\pi k \sigma^2 \quad (4)$$

La force électrique $-\frac{dV}{dn} = f_i$ en dehors et *très près* du conducteur est égale, non pas à f_o , mais au double de f_o . En effet le flux

d'induction $-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} s$ à travers une section quelconque S du tube partant de l'élément S'_1 est égal à la charge $\sigma S'_1$ comme on l'a vu plus haut. Si la section S est prise très près de la base S'_1 , elle est sensiblement égale à S'_1 . On a alors :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} s'_1 &= \sigma s'_1 \\ -\frac{dV}{dn} &= f_1 = 4\pi k \sigma = 2 f_0 \end{aligned} \quad (5)$$

On peut donc écrire la formule (4) :

$$p = 2\pi k \sigma^2 = \frac{1}{8\pi k} f_1^2 \quad (5')$$

Les formules (3) et (5) sont des conséquences de (2) (2') et (2'') (§ 22), si l'on remarque que la force électrique à l'intérieur du conducteur est nulle !

Exemple numérique. — Pour que la tension électrique p à la surface d'un conducteur électrisé fût égale à la pression atmosphérique, c'est-à-dire à 1.033 grammes ou 1.033×981 dynes par centimètre carré, il faudrait que l'on eût : $p = 1.033 \times 981 = 1.013.373$ dans la formule :

$$f_1 = -\frac{dV}{dn} = 4\pi k \sigma = \pm \sqrt{8\pi k p}$$

En unités électrostatiques C. G. S, on trouve, tous calculs faits ($k = 1$) :

$$\begin{aligned} \text{densité } \sigma &= \pm 402 \\ -\frac{dV}{dn} &= \pm 5065 \end{aligned}$$

En exprimant ces résultats en unités pratiques, on voit que la densité superficielle de la charge devrait être égale à $\pm 0,134$ microcoulomb par centimètre carré, et que la variation de potentiel suivant la normale à la surface du conducteur devrait être de 1.519.000 volts par centimètre, soit de plus de 150 volts par millième de millimètre, variation extrêmement grande par rapport à celles que l'on obtient ordinairement. Peu importe d'ailleurs que la charge soit positive ou négative et que le potentiel absolu du

conducteur soit faible ou très fort. — Une variation de 151^{vols},9 par millimètre ne produirait qu'une tension égale à un millionième d'atmosphère.

25. Problème de la distribution électrique — Considérons dans un milieu homogène quelconque un parallépipède rectangle à côtés infiniment petits dx , dy , dz parallèles à trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , et appliquons-lui l'équation (1) en supposant la densité électrique par unité de volume égale à ρ .

L'intégrale $\int -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS$ est la somme des valeurs de $\left(-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS\right)$ pour chacune des six faces du parallépipède. Pour la face d'abscisse x et d'aire $dy dz$, $-\frac{1}{k} \frac{dV}{dn}$ est égal à $\left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x}\right)_x$ puisque la normale est dirigée vers les x négatifs. Pour l'autre face d'aire $dy dz$, mais d'abscisse $(x + dx)$, $-\frac{1}{k} \frac{dV}{dn}$ est égal à $\left(-\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x+dx}$. La somme des valeurs de $\left(-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS\right)$ pour ces deux faces est donc :

$$\begin{aligned} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x}\right) dy dz - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\right] dy dz \\ = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx dy dz \end{aligned}$$

En ajoutant les deux autres termes semblables correspondant aux groupes des faces perpendiculaires aux axes des y et des z , et remarquant que la charge q contenue à l'intérieur du parallépipède est $\rho dx dy dz$, on trouve l'équation suivante, qui doit être vérifiée en tout point du milieu :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right) + 4\pi \rho = 0 \quad (6)$$

ou en multipliant par la constante k

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi k \rho = 0 \quad (6')$$

soit, pour abrégier :

$$\Delta V + 4\pi k \rho = 0$$

ΔV désignant la somme des trois dérivées secondes, somme que

l'on rencontre dans de nombreuses questions de physique mathématique. L'équation (6') a été établie par Poisson. En supposant $\rho = 0$, Laplace avait obtenu l'équation :

$$\Delta V = 0 \quad (6'')$$

L'intégration de l'équation (6) introduit des fonctions arbitraires. Pour déterminer la forme de ces fonctions on aurait à tenir compte des données du problème dans chaque cas particulier. Si, par exemple, on a des conducteurs aux potentiels respectifs V_1, V_2, \dots on écrira qu'aux surfaces de ces divers conducteurs on a : $V = V_1, V = V_2, \dots$ Si, au lieu des potentiels des conducteurs, on connaît leurs charges totales, on écrira, pour chacun d'eux, que son potentiel a une valeur constante inconnue et que l'intégrale $\int -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS$ à sa surface est égale à la valeur de sa charge. Lorsque l'expression de V sera complètement déterminée, on aura, par là même, la valeur de la densité $\sigma = -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn}$ en un point quelconque de la surface des conducteurs, la grandeur et le sens des actions exercées par les corps électrisés les uns sur les autres, etc. Le problème de la distribution électrique sera résolu.

26. Cas d'un milieu diélectrique hétérogène. — Nous n'avons jusqu'ici considéré que le cas d'un milieu homogène. Dans le cas où le milieu est composé de deux diélectriques A et B, de coefficients k et k' différents, séparés par une surface Σ (fig. 6), la loi de Coulomb :

qu'ici considéré que le cas d'un milieu homogène. Dans le cas où le milieu est composé de deux diélectriques A et B, de coefficients k et k' différents, séparés par une surface Σ (fig. 6), la loi de Coulomb :

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

n'est plus applicable, lors même que les charges q et q' se trou-

veraient dans un même diélectrique, A par exemple. Les résultats précédents, déduits de la loi de Coulomb, ne sont donc plus

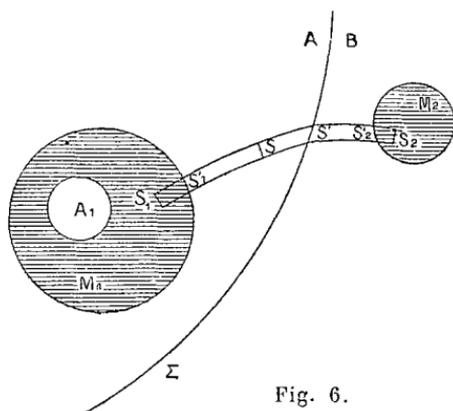


Fig. 6.

applicables. Pour les généraliser, les données expérimentales faisant défaut, on doit recourir à une hypothèse.

Il paraît *naturel* d'admettre que la propriété essentielle d'un tube d'induction, savoir que la quantité totale d'électricité qu'il renferme est nulle, est absolument générale, puisqu'elle est indépendante du coefficient k . Ceci admis, il en résulte que le flux d'induction à travers un élément S' découpé sur la surface Σ par le tube $S'_1S'_2$ a même valeur, que l'on considère la section S' comme appartenant à la portion S'_1S' du tube ou à la portion $S'S'_2$; cette valeur est égale à la quantité d'électricité existant dans le tube en arrière de S' , ou bien à la quantité existant en avant changée de signe. Si l'élément S' est recouvert d'une couche électrique $S'\sigma$ de densité σ , $S'\sigma$ représentera l'accroissement du flux d'induction à travers la section du tube lorsqu'on franchit l'élément S' . En faisant $S'=1$, cette propriété est exprimée par la formule :

$$\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} + \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)' + \sigma = 0 \quad (7)$$

dans laquelle $-\frac{dV}{dn}$ représente la composante normale, comptée de B vers A , de la force électrique dans le milieu A tout près de S' ; et $-\left(\frac{dV}{dn}\right)'$ la composante normale, comptée de A vers B , de la force dans le milieu B tout près de S' .

Cette propriété, étant admise à la surface de séparation de deux milieux A et B , devra être étendue au cas où le tube d'induction traverse successivement des milieux différents A, B, C, \dots en nombre quelconque et, par suite, au cas d'un milieu dont la nature varie d'une manière continue. D'une manière générale, le flux total d'induction sortant d'un tube par deux sections S_1 et S_2 sera égal à la quantité totale d'électricité q contenue dans le tube entre S_1 et S_2 :

$$\int_{S_1} -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS + \int_{S_2} -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS = q$$

Or l'espace intérieur à une surface S quelconque pouvant être divisé en tubes d'induction, à chacun desquels est applicable l'équation précédente, l'addition de toutes les équations sembla-

bles relatives aux divers tubes terminés à la surface S reconstituera l'équation (1') ou (1), mais celle-ci étant étendue au cas où le coefficient K a une valeur variable aux divers points de S .

Le raisonnement du § 23 qui a conduit à l'équation (6) subsiste lorsque k est variable; mais alors cette équation ne peut plus s'écrire sous la forme (6'). Le problème de la distribution électrique se résoudra donc de la même manière qu'au § 23, sauf la complication des calculs, qui est plus grande à cause de la variabilité de k . Toutefois, indépendamment des conditions relatives aux surfaces des conducteurs, on pourra avoir à tenir compte de relations de la forme (7) relatives aux surfaces Σ séparant deux diélectriques de nature différente.

A la rigueur les conditions précédentes aux surfaces ne suffisent pas pour calculer le potentiel électrique en chaque point de l'espace. L'expérience montre en effet que le potentiel subit en général une variation brusque à la surface de séparation de deux corps. Le passage d'une quantité q d'électricité à travers cette surface entraîne une dépense d'énergie proportionnelle à q , soit $q e$, laquelle correspond à un accroissement e de potentiel, qui est défini par cette propriété même. Lorsque les deux corps ne sont pas soumis à un champ électrique, le potentiel est constant en tous les points de chacun d'eux; donc leur différence de potentiel au contact est constante dans toute l'étendue de leur surface de séparation. En est-il de même sous l'action d'un champ électrique? Il semble et l'on admet que cette différence de potentiel est encore constante et indépendante du champ existant; c'est une nouvelle hypothèse que l'on introduit et qui

permet d'achever la détermination du problème de la distribution électrique.

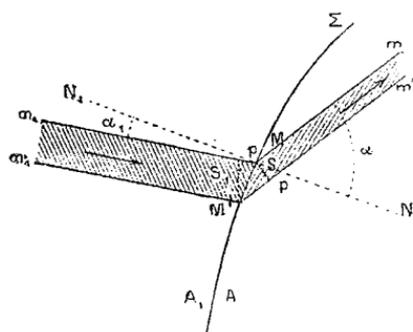


Fig. 7.

27. Réfraction des tubes d'induction. — Considérons un tube d'induction ($m_1 m'_1, mm'$) passant d'un milieu A_1 (de l'air par exemple) à un milieu A . Il y a réfraction à la surface de séparation

Σ des deux corps. Si l'on suppose que la différence de potentiel

au contact de A_1 et de A est nulle ou constante en tout point de Σ , la composante $-\frac{\partial V}{\partial x}$ de la force électrique suivant une direction dx tangente à Σ est la même en un point M dans les deux milieux. Les composantes normales seules peuvent différer. Donc, en un point M quelconque les directions de la force électrique dans les deux milieux sont dans un même plan normal à Σ ; ce que l'on peut exprimer en disant que le plan de réfraction est normal à cette surface.

Soient s_1 et s les sections droites du tube incident et du tube réfracté. Si α_1 et α désignent les angles d'incidence et de réfraction, et σ la portion de la surface Σ découpée par le tube, on a :

$$\sigma = \frac{s}{\cos \alpha} = \frac{s_1}{\cos \alpha_1}$$

D'autre part, la projection $-\frac{\partial V}{\partial x}$ de la force sur la surface a pour expression $-\frac{dV}{dn} \sin \alpha$ dans le milieu A , et $-\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 \sin \alpha_1$ dans le milieu A_1 . Donc :

$$\frac{dV}{dn} \sin \alpha = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 \sin \alpha_1$$

Enfin le flux d'induction q étant le même tout le long du tube, on a :

$$q = -\frac{1}{4\pi k_1} \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 s_1 = -\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{dV}{dn}\right) s$$

De ces équations on tire :

$$k \operatorname{tg} \alpha = k_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_1}{k} = \mu \quad (8)$$

μ désignant le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique A si A_1 est de l'air, ou plus généralement le rapport des pouvoirs inducteurs spécifiques des substances A et A_1 . La formule (8) montre qu'il y a un rapport constant, égal à μ , entre les tangentes des angles de réfraction et d'incidence. Le tube s'écarte le plus de la normale dans le milieu qui a le plus grand pouvoir inducteur spécifique.

Lorsque le pouvoir inducteur de la substance A est extrêmement grand, le rapport $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1}$ est très grand lui-même; et dans le cas limite où μ serait infini, l'angle α_1 serait nul, sauf aux points où les lignes de force dans le milieu A sont parallèles à la surface Σ ; c'est-à-dire que les tubes d'induction venant de A, tomberaient normalement sur la surface Σ . En outre, k devenant nul, la force $-\frac{dV}{dn} = \frac{4\pi kq}{S}$ le serait également, c'est-à-dire que le potentiel resterait constant dans la masse A. A ce double point de vue, un diélectrique de pouvoir inducteur infini jouirait donc des propriétés d'un conducteur et serait un écran électrique parfait entre deux régions de l'espace qui seraient séparées par lui.

28. Polarisation des diélectriques. — Soit un corps diélectrique D non électrisé plongé dans un milieu diélectrique différent D_1 .

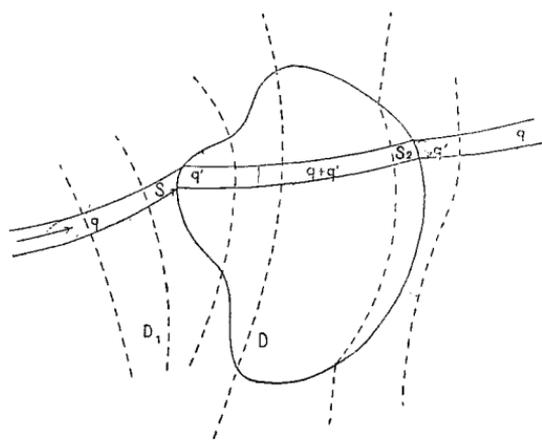


Fig. 8.

Cherchons à quelle condition la substance D pourra être remplacée, dans le volume qu'elle occupe, par celle du diélectrique D_1 sans que la distribution des potentiels et, par suite, de la force électrique soit altérée en aucun point du champ. Il faut et il suffit pour cela qu'après cette substitution, la même

distribution des potentiels satisfasse encore, pour le volume en question : 1° à l'équation (6') de Poisson en chaque point, 2° aux conditions à la surface. Or la densité ρ étant nulle dans l'espace D, l'équation (6') devient indépendante de k et est vérifiée d'elle-même après comme avant la substitution. Quant à la condition relative à la surface, on y satisfera de la manière suivante.

Considérons un tube d'induction découpant sur la surface les éléments S_1 et S_2 , et dont le flux d'induction avant la substitution était q , de telle sorte que :

$$q = -\frac{1}{4\pi k_1} \left(\frac{dV}{dn} \right)_1 s_1 = -\frac{1}{4\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right) s_1$$

$-\frac{dV}{dn}$ et $\left(\frac{dV}{dn} \right)_1$ désignant les composantes normales de la force en S_1 dans les deux milieux. Après la substitution, le flux d'induction du même tube est encore q à l'extérieur du volume D ; mais à l'intérieur il est devenu :

$$-\frac{1}{4\pi k_1} \left(\frac{dV}{dn} \right) s_1 = \frac{k}{k_1} q = \frac{1}{\mu} q$$

Le flux s'accroît donc de la quantité :

$$q' = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) q = -\alpha q \quad (9)$$

lorsqu'on traverse la surface de séparation. Donc l'élément S_1 doit être précisément chargé d'une quantité d'électricité égale à $-\alpha q$. On verrait de même que l'élément S_2 doit être chargé de la quantité αq .

Il résulte de là que, dans le calcul des actions électriques, on peut supposer le diélectrique de coefficient k remplacé par un volume égal du diélectrique de coefficient k_1 , semblable à celui du milieu ambiant, à la condition de supposer que chaque tube d'induction q induit sur la surface du volume en question une charge $-\alpha q$ à l'entrée et une charge αq à la sortie. Dans le cas d'un diélectrique D de pouvoir inducteur spécifique infini, le coefficient α est égal à 1, et la charge induite par un tube à son arrivée sur un tel diélectrique est $-q$ comme dans le cas d'un conducteur. Ceci complète l'analogie déjà signalée à la fin du § 27 entre un diélectrique de pouvoir inducteur infini et un conducteur. Il y a lieu de remarquer que les charges $-q$ et $+q$ induites sur un conducteur sont réelles et peuvent être isolées ou enlevées séparément par un plan d'épreuve, tandis que les charges $-\alpha q$ et $+\alpha q$ induites à la surface du diélectrique sont des quantités fictives introduites dans les calculs pour rendre compte d'une manière simple de la perturbation apportée dans un champ électrique par la présence du corps D . La charge totale induite sur D

est toujours nulle et ne peut être altérée par l'application du plan d'épreuve.

En résumé les actions électriques sont les mêmes que si elles s'exerçaient à travers tous les milieux diélectriques ou conducteurs suivant la loi de Coulomb :

$$f = k \frac{qq'}{r^2}$$

dans laquelle k aurait toujours la même valeur, à la condition de supposer une charge électrique convenable répartie à la surface de séparation de deux milieux différents. Cette manière de considérer les choses a l'avantage de justifier l'extension générale que l'on donne à loi de Coulomb. Elle est en outre commode au point de vue du calcul des attractions ou répulsions de divers corps situés dans un champ électrique. Mais elle ne saurait être admise à certains points de vue, notamment pour le calcul de l'énergie électrique, car dans l'expression de cette énergie (§ 18) :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma qV$$

les charges fictives aq et $-aq$ introduiraient un terme additionnel, qui ne serait pas nul et fausserait par conséquent le résultat. Du reste, si les considérations précédentes suffisent pour rendre compte des actions à distance, elles ne peuvent mettre en évidence l'action réellement exercée par le champ électrique en chaque point d'un milieu homogène, action démontrée expérimentalement sous diverses formes (V. chap. iv).

On attribue souvent une existence réelle à l'électrisation apparente $-aq$ à la surface du diélectrique D, et on l'explique de la manière suivante : Dans un champ électrique, tout diélectrique subit une sorte de *polarisation*, telle qu'une portion quelconque, même infiniment courte, d'un tube de force se recouvre sur ses deux bases de charges électriques égales et de signes contraires, dont la valeur commune est celle de $q' = -aq$ trouvée ci-dessus, et qui proviennent de la décomposition du fluide neutre sous l'action du champ. Si l'on conçoit un tube limité à la surface du diélectrique D (fig. 8) et décomposé en tubes élémentaires très courts, la surface de séparation de deux de ceux-ci contient à la

fois une charge q' appartenant au premier et une charge $-q'$ appartenant au second. Ces charges se neutralisent donc deux à deux, sauf à la surface de D , où l'on doit observer l'électrisation $-q'$ à un bout et $+q'$ à l'autre.

Les deux charges $-q'$ et $+q'$ développées aux extrémités de chaque tube élémentaire par la force électrique $-\frac{dV}{dn}$ sont d'ailleurs proportionnelles à celle-ci, car l'on a :

$$q' = -\alpha q = \frac{\alpha}{4\pi k} \frac{dV}{dn} s$$

Si l'on suppose que s soit une section droite du tube, le rapport $-\frac{q'}{s}$ représente l'intensité d'électrisation induite ou la *polarisation* du diélectrique au point considéré. Le rapport constant de la polarisation à la force $-\frac{dV}{dn}$ est :

$$\alpha = \frac{\alpha}{4\pi k} = \frac{\mu - 1}{4\pi k_1} \quad (10)$$

Suivant que le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique D est supérieur ou inférieur à celui de D_1 , $(\mu - 1)$ et par suite α sont positifs ou négatifs. Dans le premier cas l'électrisation apparente de D est de même signe que l'électrisation réelle qui serait induite sur un conducteur ; D est alors attiré par les corps électrisés. Dans le second cas, D prend une électrisation apparente de sens contraire et est repoussé par les corps électrisés.

Certains diélectriques, après avoir été *polarisés* par l'action de corps électrisés voisins, restent polarisés en partie, c'est-à-dire conservent une électrisation rémanente lorsque ces corps sont retirés. Ce sont les mêmes diélectriques qui donnent lieu au phénomène de la charge résiduelle (§ 21). Ces phénomènes, dont les lois sont très complexes, rendent inapplicable la loi de Coulomb. Comme ils existent également dans les corps magnétiques, nous aurons lieu de revenir sur ce sujet dans la théorie du magnétisme.

29. Nouvelle expression de l'énergie électrique. — L'énergie d'un champ électrique est exprimée par la formule (4) du § 18 :

$$W = \frac{1}{2} \sum qV$$

V désignant le potentiel au point où se trouve une quantité q d'électricité.

Considérons d'abord la partie ΣqV relative aux quantités q contenues dans un tube d'induction complet. On sait que pour un tel tube $\Sigma q = 0$ (§ 23, 3^e). On peut dès lors poser :

$$\Sigma qV = \Sigma q(V - V_1)$$

V_1 désignant le potentiel au point où finit le tube. Si S_0 et S_1 sont les sections initiale et finale du tube, et S une section quelconque, q désignant une quantité d'électricité située en S , on peut rempla-

cer $(V - V_1)$ par l'intégrale $\int_s^{s_1} -\frac{dV}{dn} dn$, prise le long du chemin n suivi par le tube entre S et S_1 :

$$\Sigma qV = \Sigma q \int_s^{s_1} -\frac{dV}{dn} dn$$

Le second membre de cette équation est une somme de produits dans laquelle chaque élément tel que $-\frac{dV}{dn} dn$ se trouve multiplié par la somme de toutes les quantités q situées entre la section initiale S_0 et la section S , c'est-à-dire par le flux d'induction $-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} S$. Donc on a encore :

$$\Sigma qV = \int_{s_0}^{s_1} \left(-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} s \right) \left(-\frac{dV}{dn} dn \right)$$

et :

$$\frac{1}{2} \Sigma qV = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du$$

en désignant par du le volume $S \cdot dn$ d'une longueur dn du tube d'induction au point où la section droite est S .

Ce résultat s'énoncera ainsi :

La fraction de l'énergie W relative au tube considéré peut se calculer comme si elle était répandue dans le volume entier du tube, l'énergie par unité de volume en chaque point étant $\frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2$.

Le même énoncé s'applique au calcul de l'énergie totale W , qui est la somme des fractions relatives aux divers tubes qui remplissent le champ. Nous écrirons donc :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du \quad (11)$$

l'intégrale s'étendant ici au volume entier du champ. La forme de cette expression montre que l'énergie d'un système électrisé est essentiellement positive. Pour qu'elle fût nulle, il faudrait que chaque élément de l'intégrale fût nul, ce qui ne peut avoir lieu que si la force $-\frac{dV}{dn}$ est nulle elle-même en chaque point, c'est-à-dire si en réalité il n'y a pas de champ électrique.

30. Superposition de deux états d'équilibre électrique. — Considérons un système de corps électrisés, et soient : ρ_1 la densité de volume de l'électricité, σ_1 la densité superficielle, et V_1 le potentiel en un point quelconque du champ. Soit un deuxième état, dans lequel nous désignerons par ρ_2 , σ_2 et V_2 les nouvelles valeurs de ces quantités. Si l'on considère un troisième état, dans lequel la densité de volume serait $(\rho_1 + \rho_2)$ et la densité superficielle $(\sigma_1 + \sigma_2)$, c'est-à-dire dans lequel les charges électriques des deux premiers états seraient superposées, le nouveau potentiel sera évidemment la somme $(V_1 + V_2)$ des potentiels dus aux deux systèmes de charges. La force électrique en un point sera la résultante géométrique des forces correspondant aux deux premiers états, et les deux premiers systèmes étant en équilibre, il en sera de même du troisième.

On exprime ce résultat en disant que la superposition de deux états d'équilibre est un nouvel état d'équilibre. Ce théorème s'étend évidemment à la superposition d'un nombre quelconque d'états d'équilibre.

31. Théorème : L'état d'équilibre d'un système électrisé est unique. — La signification de ce théorème sera précisée par sa démonstration même dans les cas suivants :

1° On donne en chaque point du milieu diélectrique la densité de volume ρ et la densité superficielle σ , et pour chacun des con-

ducteurs la charge totale Q . Il s'agit de démontrer que ces données suffisent pour déterminer la distribution des charges sur les divers conducteurs et la répartition du potentiel et de la force électrique en tout point de l'espace, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir plusieurs états différents d'équilibre du champ électrique qui soient compatibles avec les données.

Supposons en effet que les données (ρ , σ , Q) puissent correspondre à deux états différents dans lesquels les potentiels en un même point seraient respectivement V_1 et V_2 . Superposons les états d'équilibre désignés abrégativement par :

$$\rho, \sigma, Q, V_1$$

et :

$$-\rho, -\sigma, -Q, -V_2$$

On obtient (§ 30) un nouvel état d'équilibre possible, représenté par

$$\rho - \rho = 0, \sigma - \sigma = 0, Q - Q = 0, V_1 - V_2$$

et dans lequel la charge totale de chaque conducteur serait nulle, ainsi que la densité électrique en tout point du milieu diélectrique, L'énergie $W = \frac{1}{2} \Sigma q V$ d'un tel champ est nulle; car, pour chaque conducteur, le potentiel étant constant, l'expression $\Sigma q V$ peut s'écrire $V \Sigma q$ et, par suite, est nulle. Il en résulte, d'après ce qui a été dit au § 29, que dans le nouvel état d'équilibre il n'y a pas de champ électrique. Par suite, en réalité les deux états superposés étaient identiques au signe près : $V_1 - V_2 = 0$.

2° On donne en chaque point du diélectrique les densités ρ et σ , et pour chaque conducteur le potentiel V . Supposons que ces données puissent correspondre à deux états d'équilibre différents, dans lesquels les charges d'un même conducteur seraient respectivement Q_1 et Q_2 .

Superposons les états :

$$\rho, \sigma, V, Q_1 \\ -\rho, -\sigma, -V, -Q_2$$

On obtient un nouvel état d'équilibre :

$$\rho - \rho = 0, \sigma - \sigma = 0, V - V = 0, Q_1 - Q_2$$

dans lequel l'énergie $W = \frac{1}{2} \Sigma qV$ est nulle, puisque les quantités q sont nulles dans tout le diélectrique et que les potentiels le sont sur tous les conducteurs. On en tire la même conclusion que précédemment.

On pourrait varier encore les données en supposant connus les potentiels dans certaines régions du milieu diélectrique et les densités ρ et σ dans les autres régions, etc. Les exemples précédents suffisent pour montrer comment le théorème en question pourra être étendu à d'autres cas.

32. Images électriques. — Lorsque, dans un milieu homogène, on donne la position et la grandeur des diverses charges électriques, on en peut déduire directement, par voie de sommations ou d'intégrations, le potentiel et la force électrique en chaque point, ainsi que les attractions ou répulsions des divers corps. Mais en général on ne connaît pas la distribution de l'électricité; le problème est alors plus compliqué. Ainsi pour un conducteur on ne connaît, par exemple, que la charge totale ou le potentiel, et la connaissance *a priori* de la distribution sur ce conducteur est remplacée par la condition que le potentiel y est le même en tous les points. Au lieu d'attaquer le problème directement par l'intégration des équations aux dérivées partielles (6) et (7), qui est en général très compliquée, on cherche ordinairement à en rattacher la solution à d'autres déjà connues et à appliquer des méthodes spéciales à chaque cas particulier.

Supposons, par exemple, que les charges électriques d'un champ étant connues, on ait déterminé la forme d'une surface équipotentielle Σ , fermée ou à nappes infinies. Cette surface divise l'espace en deux parties A et B; soient Q_1 et Q_2 les systèmes de charges situés respectivement dans ces deux parties.

On peut imaginer un nouvel état d'équilibre ne différant du précédent qu'en ce que le potentiel serait constant dans l'espace B et égal à celui de la surface Σ . L'équation (6) serait en effet vérifiée en chaque point du milieu, et il n'y aurait, pour satisfaire à la condition (7) sur la surface Σ , qu'à supposer une certaine couche électrique répartie sur celle-ci. Cette couche n'est autre que celle qui équivaut (§ 24), au point de vue des actions élec-

triques dans l'espace A, au système Q_2 séparé de A par la surface Σ . Maintenant, le potentiel étant constant dans l'espace B, remplaçons-y le milieu qui s'y trouve par une substance conductrice; rien ne sera changé au point de vue électrique.

Si, inversement, on donne le système Q_1 et un conducteur limité par la surface Σ , le problème de la distribution électrique se trouvera tout résolu. On n'aura, pour calculer le potentiel ou la force en un point quelconque, qu'à remplacer le conducteur donné par un système électrique fictif, qui n'est autre que le système Q_2 du problème précédent. Ensuite on calculera la densité électrique (τ) en un point quelconque de la surface Σ du conducteur par la formule :

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi k \sigma$$

La charge totale du conducteur sera Q_2 . Si, sans changer le système Q_1 , on veut que la charge du conducteur ait une autre valeur quelconque Q , on n'aura qu'à superposer à la charge déjà calculée Q_2 , une nouvelle couche ($Q - Q_2$) répartie sur la surface Σ comme si elle existait seule dans le champ (principe de la superposition des états d'équilibre, § 30).

Une solution analogue pourra être employée si la surface donnée Σ est celle d'un corps diélectrique. Mais il est nécessaire que, pour cela, le problème à résoudre soit précisément l'inverse d'un cas

déjà résolu, comme il a été expliqué ci-dessus. Plus on aura étudié à l'avance de cas semblables, plus l'on pourra résoudre de cas inverses; mais leur nombre jusqu'ici est très limité.

Tel est le principe de la méthode des images électriques, que l'on comprendra mieux par les applications suivantes.

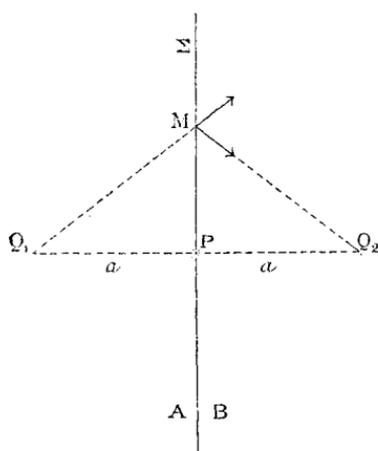


Fig. 9.

1° Cas d'un conducteur plan indéfini. — Considérons le champ électrique dû à deux quantités d'électricité q_1 et $-q_1$, placées en Q_1 et

Q_2 (fig. 9). Le plan indéfini Σ mené perpendiculairement à la droite qui les joint et à égale distance de chacune d'elles, est la surface de potentiel zéro. Le champ électrique du côté A de ce plan ne sera donc pas changé si l'on suppose que le côté B soit occupé par une substance conductrice recouverte, sur sa surface Σ d'une couche $-q_1$ d'électricité, dont la distribution se calculera par la formule :

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi k_1 \sigma$$

Sous l'action de q_1 et de $-q_1$, la force $-\frac{dV}{dn}$ en un point M, comptée de B vers A, en désignant par α l'angle MQ_1P , est $-\frac{2k_1q_1}{r^2} \cos \alpha = -\frac{2k_1q_1a}{r^3}$. Il en résulte :

$$\sigma = -\frac{aq_1}{2\pi r^3} \quad (12)$$

On vérifierait facilement que la charge totale $\int \sigma dS$ sur la surface indéfinie Σ est égale à $-q_1$. L'attraction $\int 2\pi k_1 \sigma^2 dS$ exercée par q_1 sur le conducteur ou par le conducteur sur q_1 est égale à l'action réciproque de q_1 et de $-q_1$, c'est-à-dire $k_1 \left(\frac{q_1}{2a}\right)^2$.

La formule de σ fait connaître la distribution de la charge induite sur un conducteur plan Σ , maintenu au potentiel zéro, par une quantité q_1 d'électricité placée à la distance a . La quantité $-q_1$ qui produirait en tout point du milieu A le même effet que le conducteur, s'appelle *l'image électrique* de la quantité q_1 par rapport au plan Σ . Elle coïncide, comme on le voit, avec l'image optique.

Dans le milieu A, les tubes coniques d'induction issus de l'image $-q_1$ coïncident avec des tubes qui seraient issus de q_1 et réfléchis sur Σ . On peut exprimer cette propriété en disant qu'en présence d'un conducteur plan Σ , le champ électrique résulte de la superposition des tubes issus de q_1 et des mêmes tubes réfléchis sur la surface plane Σ .

Si, au lieu d'une seule quantité q_1 , on a un système électrique Q, en regard du conducteur plan Σ , on pourra remplacer ce conducteur, pour le calcul des actions électriques, par l'image du sys-

tème Q_1 par rapport au plan Σ . Cette image n'est autre que ce que nous avons appelé ci-dessus le système Q_2 .

2° *Cas de deux diélectriques différents séparés par une surface plane.* — Supposons que les espaces A et B (fig. 9) soient occupés par des substances diélectriques de coefficients k_1 et k_2 , et que l'on ait en Q_1 une quantité q_1 d'électricité. Pour calculer le potentiel et la force électrique en chaque point, on sait (§ 28) que l'on peut supposer la substance k_2 remplacée par la substance k_1 dans l'espace B, à la condition de répartir sur le plan Σ une couche électrique telle que les expressions de $-\frac{1}{4\pi k_1} \left(\frac{dV}{dn}\right)_1$ et de $-\frac{1}{4\pi k_2} \left(\frac{dV}{dn}\right)_2$, calculées pour des points infiniment voisins de M et pris respectivement du côté A et du côté B, aient des valeurs égales (n est la direction de la normale à Σ) :

$$-\frac{1}{k_1} \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 = -\frac{1}{k_2} \left(\frac{dV}{dn}\right)_2$$

Or, d'après le corollaire III du § 22 :

$$\begin{cases} -\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 = f_n - 2\pi k_1 \sigma \\ -\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = f_n + 2\pi k_1 \sigma \end{cases}$$

f_n désignant la composante normale à Σ de la force due à q_1 :

Il en résulte :

$$\frac{f_n - 2\pi k_1 \sigma}{k_1} = \frac{f_n + 2\pi k_1 \sigma}{k_2}$$

d'où

$$\sigma = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \frac{f_n}{2\pi k_1}$$

ou :

$$\sigma = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \frac{dq_1}{2\pi r^3} \quad (13)$$

Cette valeur de σ est égale à celle donnée par (12), multiplié par le coefficient constant $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$.

Or la couche σ , dans le cas du conducteur plan, équivalait, au point de vue des actions dans le milieu A, à une quantité $-q_1$ placée

en Q_2 . Donc la couche σ , dans le cas qui nous occupe, sera équivalente : 1° au point de vue des actions dans le milieu A, à une quantité $-\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} q_1$ placée en Q_2 ; 2° au point de vue des actions dans B, à une quantité égale placée en Q_1 , en supposant toujours l'espace B rempli par la substance k_1 .

En résumé, pour calculer la force électrique en un point quelconque du champ dans le cas actuel, on supposera tout le champ occupé par le diélectrique k_1 ; la force en un point de l'espace A sera due à des charges q_1 et $-\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} q_1$ placées respectivement en Q_1 et Q_2 ; la force en un point de l'espace B sera due à des charges q_1 et $-\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} q_1$ placées en Q_1 . Cet énoncé s'étend facilement au cas d'un nombre quelconque de charges telles que q_1 .

On peut exprimer symboliquement cette propriété en imaginant que les tubes d'induction issus de q_1 sont en partie réfléchis sur Σ et en partie transmis dans le milieu B. La fraction du flux d'induction transmise est : $1 - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}$;

la fraction complémentaire $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ est réfléchie avec changement de signe.

Le problème est donc encore résolu ici par la considération des images électriques. Mais l'image, au lieu d'être égale à la quantité q_1 , lui est inférieure, et peut d'ailleurs être de signe contraire ou de même signe qu'elle, suivant que $(k_1 - k_2)$ est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que le diélectrique k_2 a un pouvoir inducteur spécifique plus élevé ou moins élevé que le diélectrique k_1 . L'attraction du diélectrique B sur la quantité q_1 est égale à celle qu'exercerait l'image $-\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} q_1$ placée en Q_2 , c'est-à-dire :

$$\frac{k_1 (k_1 - k_2)}{k_1 + k_2} \left(\frac{q_1}{2a} \right)^2$$

Dans le cas de trois diélectriques k_1 , k_2 et k_3 séparés par des plans parallèles Σ_1 et Σ_2 , la quantité q_1 donnera lieu à des images successives sur ces deux surfaces, de même qu'un objet placé entre deux miroirs parallèles donne une infinité d'images. Ces images vont en s'affaiblissant indéfiniment ¹. On peut encore dire que chaque

¹ Voir le développement de cette question dans les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, de MM. Mascart et Joubert, § 150.

tube d'induction issu de q_1 , en arrivant sur la surface Σ_1 donne lieu à un tube réfléchi et à un tube transmis suivant la loi indiquée plus haut. L'un de ces tubes, rencontrant ensuite la surface Σ_2 donne lieu à un tube réfléchi et à un tube transmis suivant une loi analogue. Le réfléchi revient sur Σ_1 où le même phénomène se reproduit ; ainsi de suite.

3° *Cas d'un conducteur sphérique.* — Considérons, dans un milieu

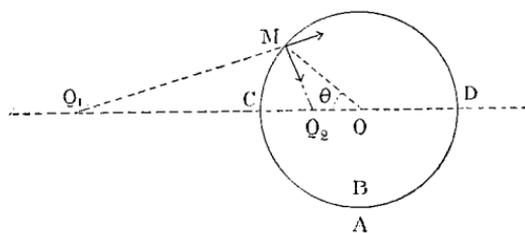


Fig. 10.

homogène, le champ électrique dû à deux quantités d'électricité inégales et de signes contraires, q_1 et $-\alpha q_1$, placées en Q_1 et Q_2 (fig. 10). Si r_1 et r_2 sont les distances d'un point M à Q_1 et Q_2 , le

potentiel en M est $\left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{\alpha q_1}{r_2}\right)$. La surface de potentiel zéro pour équation : $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\alpha q_1}{q_1} = \alpha$. Le rapport $\frac{r_2}{r_1}$ étant constant, cette surface est, comme on le sait, une sphère dont le centre O est sur la droite $Q_1 Q_2$. Si l'on désigne par R le rayon de la sphère, par d et d' les distances $O Q_1$ et $O Q_2$, on a les relations connues :

$$\frac{R}{d} = \frac{d'}{R} = \sqrt{\frac{d'}{d}} = \alpha$$

En un point M de la sphère équipotentielle, la force électrique est dirigée suivant la normale MO , de M vers O , et a pour valeur la somme des composantes suivant MO des forces $\frac{k_1 q_1}{r_1^2}$ et $-\frac{k_1 \alpha q_1}{r_2^2}$ dues aux charges q_1 et $-\alpha q_1$, soit :

$$\frac{dV}{dn} = \frac{k_1 q_1}{r_1^3} \frac{d \cos \theta}{r_1} - R \frac{k_1 \alpha q_1}{r_2^3} \frac{d' \cos \theta}{r_2} = \frac{k_1 q_1}{r_1^3} \frac{d - d'}{\alpha}$$

en tenant compte des relations : $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{d'}{d}} = \alpha$.

D'après ce qui a été dit plus haut, rien ne sera changé au champ extérieur à la sphère si l'on suppose celle-ci remplie d'une subs-

cance conductrice, à la condition qu'elle soit recouverte d'une touche électrique ayant pour densité en chaque point :

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi k_1} \frac{dV}{dn} = -\frac{q_1}{4\pi r_1^2} \frac{d-d'}{\alpha} \quad (14)$$

Si donc on donne une quantité d'électricité q_1 placée à une distance d d'une sphère conductrice de rayon R , on aura un état d'équilibre en supposant la sphère recouverte d'une couche électrique dont la densité aux divers points suit la loi (14), α désignant le rapport $\frac{R}{d}$ et d' étant égal à $\frac{R^2}{d}$. La charge totale de la sphère est alors $-\alpha q_1$. Si l'on veut que sa charge totale soit Q , on n'aura qu'à superposer à la couche précédente une couche $(Q + \alpha q_1)$ répartie uniformément sur la surface; l'équilibre subsistera évidemment. Au cas où Q est nulle, la couche uniforme $(Q + \alpha q_1)$ se réduit à αq_1 .

Le potentiel en un point quelconque du champ se calculera comme s'il était dû 1° à la quantité q_1 donnée en Q_1 ; 2° à une quantité $-\alpha q_1$ appelée l'image électrique de q_1 par rapport à la sphère et placée en Q_2 , à la distance d' du centre O ; 3° à la couche uniforme $(Q + \alpha q_1)$, que l'on peut supposer concentrée en O . La quantité q_1 subit, de la part de l'image $-\alpha q_1$ une attraction $\frac{k_1 \alpha q_1^2}{(d-d')^2} = \frac{k_1 \alpha q_1^2 d^2}{(d^2 - R^2)^2}$, et de la part de la couche $(Q + \alpha q_1)$ une répulsion $\frac{k_1 q_1 (Q + \alpha q_1)}{d^2}$.

En faisant abstraction de la charge Q , l'action extérieure de la sphère conductrice se réduit donc à celle de deux charges fictives $-\alpha q_1$ et αq_1 situées respectivement en Q_2 et en O . Lorsque la distance de q_1 à la sphère augmente indéfiniment, le champ dû à q_1 seul devient sensiblement uniforme et d'intensité : $\frac{k_1 q_1}{d^2} = f$. Supposons que f tende vers une limite finie; les quantités $\alpha q_1 = \left(\frac{dR}{k_1}\right) f$ et $-\alpha q_1$ deviennent infiniment grandes en même temps qu'elles se rapprochent indéfiniment. La distance MQ_2 devient sensiblement égale au rayon R diminué de la projection $d' \cos \theta$ de OQ_2 sur OM , de telle sorte que la composante normale, comptée de M vers O , de la force due aux quantités $-\alpha q_1$ et αq_1 est :

$$\frac{k_1 \alpha q_1}{(R - d' \cos \theta)^2} - \frac{k_1 \alpha q_1}{R^2} = \frac{2k_1 \alpha q_1 d' \cos \theta}{R^3} = 2f \cos \theta$$

La force électrique résultante au point M de la sphère conductrice doit être la somme de cette composante normale $2f \cos \theta$ et de la composante normale $f \cos \theta$ due au champ uniforme f , soit $3f \cos \theta$. Il en résulte que la densité électrique σ induite à la surface de la sphère dans le champ uniforme f est :

$$\sigma = - \frac{3f}{4\pi k_1} \cos \theta \quad (15)$$

Le potentiel et la force en un point quelconque à l'extérieur se calculeront en remplaçant la sphère par le système fictif $(-aq_1, aq_1)$. La distance infiniment petite $OQ_2 = d'$ est indéterminée. Le produit $aq_1 d' = \frac{R^3 f}{k_1}$ intervient seul; on l'appelle le moment du système en question.

4° Cas d'un corps diélectrique sphérique dans un champ uniforme. — Dans le cas précédent, la force électrique étant nulle à l'intérieur de la sphère conductrice, c'est que la couche électrique dont la densité σ est donnée par la formule (15) y produit un champ uniforme $-f$ égal et de sens contraire au champ f . La composante normale, dirigée de M vers O de la force due à la couche σ seule, est donc, pour un point infiniment voisin de M :

$$\text{A l'intérieur : } -f \cos \theta$$

$$\text{A l'extérieur : } -f \cos \theta - 4\pi k_1 \sigma = 2f \cos \theta$$

Supposons maintenant que, le milieu étant homogène et le champ uniforme, on établisse sur une surface sphérique CMD (fig. 10) une couche de densité $\varepsilon\sigma$, ε désignant une constante et σ étant encore donnée par la formule (15). La composante normale en M de la force due à cette couche sera :

$$\text{A l'intérieur : } -\varepsilon f \cos \theta$$

$$\text{A l'extérieur : } +2\varepsilon f \cos \theta$$

La composante normale de la force due au champ uniforme étant elle-même $f \cos \theta$, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, on aura comme résultantes :

$$\text{A l'intérieur : } (1 - \varepsilon) f \cos \theta$$

$$\text{A l'extérieur : } (1 + 2\varepsilon) f \cos \theta$$

et leur rapport $\frac{1 - \varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$ est constant en tous les points de la sphère.

Le potentiel et la force, en tout point du champ, ne seront pas changés si l'on supprime la couche $\varepsilon\sigma$, à la condition que l'on suppose la sphère remplie, non plus du diélectrique k_1 , mais d'un diélectrique k_2 tel que $\frac{k_2}{k_1}$ soit précisément égal à ce rapport $\frac{1 - \varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$; d'où :

$$\varepsilon = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + 2k_2} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$$

Il en résulte que, si dans un champ uniforme (k_1, f) on introduit une sphère diélectrique k_2 , la densité de la couche électrique apparente induite à sa surface est représentée par la formule :

$$\varepsilon \sigma = - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{3f}{4\pi k_1} \cos \theta \quad (16)$$

Le champ électrique à l'intérieur de la sphère est uniforme et la force y est la résultante $(1 - \varepsilon) f$ de la force f due au champ primitif et de la force $-\varepsilon f$ due à la couche apparente $\varepsilon\sigma$. On dit que le diélectrique k_2 est électrisé ou *polarisé* uniformément. Quant au champ extérieur, il peut se calculer comme s'il était dû 1° à la force f , 2° à un système de deux quantités d'électricité ($-\varepsilon\alpha q_1, \varepsilon\alpha q_1$) placées respectivement en Q_2 et en O , et dont le moment : $\varepsilon\alpha q_1 d' = \varepsilon \frac{R^3 f}{k_1}$ importe seul.

Si le champ f est dû à une charge q placée à une distance r très grande par rapport au rayon R de la sphère, il n'est plus qu'à peu près uniforme. Mais on aura une valeur approchée de l'attraction de cette charge q sur la sphère en remplaçant celle-ci par le système ($-\varepsilon\alpha q_1, \varepsilon\alpha q_1$) dont le moment est $\frac{\varepsilon R^3 f}{k_1}$. La force attractive F sera égale à :

$$F = \frac{\varepsilon R^3 f}{k_1} \left(- \frac{df}{dr} \right) = \frac{2\varepsilon R^3 f^2}{k_1 r} = 2 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{k_1 q_1^2 R^3}{r^2 r^3} \quad (17)$$

en tenant compte de la relation : $f = k_1 \frac{q_1}{r^2}$

L'attraction d'une sphère conductrice de même rayon s'obtien-

draît en faisant $\epsilon = 1$ dans la formule précédente. On voit que le rapport des attractions de la sphère diélectrique et de la sphère conductrice est égale à $\epsilon = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$. On a ainsi un moyen de mesurer le pouvoir inducteur spécifique μ du diélectrique k_2 en supposant que le diélectrique k_1 soit de l'air (§ 20, 2^o).

5^o *Cas d'un conducteur cylindrique.* — Le cas d'un cylindre circulaire conducteur placé dans le champ d'une ligne parallèle à son axe et électrisée uniformément donnerait encore lieu à une application du principe des images (voir § 40).

33. Attractions et répulsions des corps diélectriques par les corps électrisés. — Un corps diélectrique D différent du milieu diélectrique ambiant D_1 (fig. 8) subit comme un conducteur l'action des corps électrisés. On vient d'en voir un exemple au § 32 dans le cas où ce corps a la forme sphérique.

Soit W l'énergie électrique du champ. Si F désigne la poussée électrique que subit le corps D dans une certaine direction, Fdx représente le travail de cette force lorsque D décrit un chemin dx dans cette direction. Ce travail étant produit aux dépens de l'énergie W , l'accroissement dW est égal et de signe contraire à Fdx , d'où :

$$F = - \frac{dW}{dx} \quad (18)$$

Considérons un corps D très petit, de volume u et proposons-nous de calculer la valeur W_0 que prend l'énergie lorsque D est retiré du champ et remplacé par la substance du diélectrique D_1 . Nous emploierons à cet effet la formule du § 29 :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du \quad (11)$$

D'abord on ne changera pas la force $\left(\frac{dV}{dn} \right)$ en un point quelconque du champ en remplaçant la substance (k_2) du corps D par celle (k_1) du corps D_1 , à la condition de répartir à la surface de D une certaine couche électrique définie par l'équation (9) du § 28 :

$$q' = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) q$$

Par conséquent l'intégrale (41) n'est modifiée que quant à sa partie relative au volume infiniment petit u , de telle sorte que l'accroissement $\delta_1 W$ dans cette modification est, en désignant par f la force $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$ sensiblement uniforme à l'intérieur de D :

$$\delta_1 W = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) f^2 u$$

Si maintenant on superpose à la couche q' une couche égale et de signe contraire $-q'$, la couche totale sera nulle, et la nouvelle valeur de l'énergie sera celle précisément égale à W_0 . Soit $\delta_2 W$ l'accroissement de l'énergie dans cette nouvelle modification, de telle sorte que :

$$W_0 = W + \delta_1 W + \delta_2 W$$

Pour calculer $\delta_2 W$, remarquons que c'est le travail w nécessaire pour amener la couche $-q'$ dans le champ électrique précédent (où la force $-\frac{dV}{dn}$ n'était pas modifiée, et malgré la présence de la couche q'), augmenté de l'énergie w' de cette couche $-q'$ considérée isolément.

Considérons les couches $-q'$ et $+q'$ situées sur la surface de D aux extrémités d'un même tube, de longueur infiniment petite l et de section s . Si V et V' désignent les potentiels en ces deux positions où l'on suppose les quantités $-q'$ et q' amenées de l'infini, le travail correspondant est :

$$-q'V + q'V' = -q'(V - V') = -q'fl$$

Mais le flux primitif d'induction étant $q = \frac{fs}{4\pi k_2}$, on a :

$$q' = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{fs}{4\pi k_2}$$

et :

$$-q'fl = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{f^2 sl}{4\pi k_2}$$

Mais le produit sl est le volume du tube infiniment petit considéré. La somme des travaux semblables est donc :

$$w = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{f^2 u}{4\pi k_2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_1}\right) f^2 u$$

Quant à l'énergie w' de la couche — q' , elle est positive, proportionnelle à f^2 puisque q' est proportionnel à f , et proportionnelle au volume u (par raison de similitude ou d'homogénéité) :

$$w = \varepsilon f^2 u$$

le coefficient ε dépend de k_1 , de k_2 , de la forme et de l'orientation du volume D par rapport à la force f ; il est essentiellement positif.

Ajoutant à W les quantités $\delta_1 W$ et $\delta_2 W = w + w'$, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} W_0 &= W + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) f^2 u + \varepsilon f^2 u \\ &= W + A f^2 u \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Si k_2 est inférieur à k_1 , le coefficient A est essentiellement positif. W_0 étant indépendante du chemin dx dans la formule (18), on en conclut que la force :

$$F = - \frac{dW}{dx} = Au \frac{df^2}{dx}$$

est positive dans toute direction où f^2 va en croissant.

Au lieu de prendre comme point de départ le champ f déjà modifié par la présence du corps D , on peut considérer d'abord le champ f_0 existant avant l'introduction de ce corps et dont l'énergie est W_0 . On ne change rien aux forces du champ en remplaçant dans le volume D la substance k_1 par la substance k_2 , tout en répartissant à la surface de D une couche convenable d'électricité définie par la formule :

$$q'_0 = (\mu - 1) q_0 = (\mu - 1) \frac{f_0 \delta}{4\pi k_1}$$

Dans cette transformation, l'énergie W_0 s'accroît de :

$$\delta_1 W_0 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) f_0^2 u$$

Dans une deuxième transformation on superposera à la couche q' , une couche — q'_0 , telle que la couche résultante soit nulle. En raisonnant comme ci-dessus on trouve un accroissement égal à :

$$\delta_2 W_0 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) f_0^2 u + \varepsilon_0 f_0^2 u$$

et l'énergie finale ainsi obtenue, c'est-à-dire W , est :

$$\begin{aligned} W &= W_0 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) f_0^2 u + \varepsilon_0 f_0^2 u \\ &= W_0 - A_0 f_0^2 u \end{aligned} \quad (19)$$

En comparant cette formule à celle trouvée plus haut, on voit que A et A_0 sont de même signe. Donc quand k_2 est inférieur à k_1 , A et A_0 sont positifs. D'autre part, d'après l'expression de A_0 , dans laquelle ε_0 est essentiellement positif, A_0 et, par suite, A sont négatifs quand k_2 est supérieur à k_1 .

La formule de F montre dès lors que le corps diélectrique D tend toujours à se déplacer dans le sens des forces croissantes (en valeur absolue) lorsque son pouvoir inducteur est supérieur à celui du milieu ambiant, dans le sens des forces décroissantes dans le cas contraire. On peut d'ailleurs considérer soit la force f du champ modifié par la présence de D , soit la force f_0 du champ primitif avant l'introduction de D .

Si $\mu > 1$, le diélectrique D ne peut-être en équilibre stable que lorsqu'il est arrivé en un point où la force f_0 est maximum par rapport à tous les points voisins (maximum absolu). Or on peut démontrer qu'un tel point ne peut exister en dehors des corps électrisés. Donc le diélectrique tend à se porter vers ces corps, c'est-à-dire est attiré par eux.

Si au contraire $\mu < 1$, le diélectrique tend à se porter en sens inverse, c'est-à-dire est repoussé par les corps électrisés et ne peut être en équilibre stable qu'en un point où la force f est nulle, c'est-à-dire en un point d'équilibre ou à l'infini.

Dans le cas d'un corps sphérique, l'application de la formule (17) donne :

$$F = \frac{\varepsilon R^3 f_0}{k_1} \left(- \frac{df_0}{dr} \right) = - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{3}{4\pi} \frac{u}{2k_1} \frac{df_0^2}{dr}$$

et le coefficient A_0 est égal à :

$$A_0 = \frac{3}{8\pi k_1} \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$$

Comme la force dans le champ modifié par la présence du diélectrique est $(1 - \varepsilon) f_0$, on aura :

$$A = \frac{(\mu - 1)(\mu + 2)}{24 \pi k_1}$$

Un corps non sphérique subit en général, de la part du champ électrique, non seulement une poussée F , mais encore un couple de rotation qui tendra à l'orienter suivant une certaine direction. Le travail des forces électriques, pendant que le corps tourne d'un angle $d\theta$ autour d'un axe, passant par son centre, étant $-dW$, le couple de rotation autour de cette axe a, comme on le sait, pour expression $-\frac{dW}{d\theta}$. Comme f_0 ne varie pas pendant cette rotation, on a d'après (19) :

$$-\frac{dW}{d\theta} = \frac{dA_0}{d\theta} f_0^3 u$$

D'une manière générale le corps tend donc à s'orienter de telle sorte que le coefficient A_0 ait sa valeur maximum. Mais il ne s'agit pas d'un maximum en valeur absolue. Le signe de A_0 étant le même que celui de $(k_1 - k_2)$ ou de $(\mu - 1)$, l'orientation correspondant à l'équilibre du corps D sera différente suivant que le pouvoir inducteur spécifique de D sera supérieur ou inférieur à celui du milieu D_1 . Ainsi si le corps D est en forme d'aiguille et libre de tourner autour de son centre, on sait que sa longueur s'oriente dans la direction de la force f_0 lorsque μ est supérieur à l'unité et perpendiculairement dans le cas contraire.

Les coefficients A et A_0 peuvent se calculer approximativement lorsque μ diffère très peu de l'unité. Dans la formule (19), le terme en ε , contenant $(\mu - 1)^2$ en facteur (puisque q' contient le facteur $\mu - 1$), est négligeable devant le terme en $\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)$ qui est du premier ordre par rapport à $(\mu - 1)$. On a donc sensiblement :

$$A = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) = \frac{\mu - 1}{8\pi k_1} = \frac{x}{2}$$

x étant défini par la formule (10). Comme f diffère alors très peu de f_0 , le champ électrique étant très peu altéré par la présence du corps D , il en résulte sensiblement : $A = A_0$.

Dans ce cas, en étendant à un volume quelconque le raisonnement fait plus haut et négligeant l'énergie w' , qui contient $(\mu - 1)^2$ en facteur, on trouve :

$$W = W_0 - \frac{\kappa}{2} \int f^2 du$$

L'intégrale se rapporte au volume du corps D.



CHAPITRE III

CONDENSATEURS

34. Capacité d'une sphère. — Ce chapitre sera consacré au calcul de la capacité électrostatique des condensateurs les plus usuels et à des exercices sur divers modes de groupement de condensateurs. Nous commencerons par le calcul de la capacité d'une sphère conductrice placée dans un diélectrique homogène.

La formule :

$$V = k \Sigma \frac{q}{r}$$

appliquée au calcul du potentiel au centre d'une sphère, de rayon R , chargée d'une quantité d'électricité Q donne :

$$V = k \frac{Q}{R}$$

Ce potentiel étant celui de toute la masse du conducteur, la capacité de celui-ci est :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{R}{k}$$

La capacité d'une sphère dans l'air est donc égale à son rayon en unités électrostatiques ($k = 1$), et au quotient de son rayon par le carré de la vitesse de la lumière en unités électromagnétiques ($k = a^2$).

Exemple numérique. — Le rayon R de la terre est tel que le

quadrant $\frac{\pi}{2}$ R est sensiblement égal à 10,000 kilomètres. On a donc :

$$\begin{aligned} R &= \frac{2}{\pi} 10^9 \text{ centimètres} \\ &= \frac{2}{\pi} \text{ unités pratiques} \end{aligned}$$

Comme la vitesse α de la lumière est 30 en unités pratiques, il en résulte pour la capacité électrostatique de la sphère terrestre les valeurs :

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{\pi} \times 10^9 = 6,37 \times 10^8 \text{ unités électrostatiques C. G. S.} \\ &= \frac{2\Phi}{\pi \times 900} = 707 \times 10^{-6} \Phi = 707\varphi \end{aligned}$$

Φ désignant des farads et φ des microfarads.

35. Condensateur sphérique. — On ne peut réaliser le cas d'une sphère conductrice isolée dans l'espace. Le calcul précédent n'a donc qu'un intérêt théorique. Mais on peut construire un condensateur, fermé et de capacité indépendante du voisinage d'autres conducteurs, en prenant pour armatures deux sphères concentriques. C'est même là le seul condensateur dont on puisse *pratiquement* calculer la capacité d'une manière rigoureuse, et qui puisse servir comme étalon pour calculer la valeur absolue d'une autre capacité ; on l'appelle quelquefois condensateur *absolu*.

Soient : R_1 le rayon de la sphère intérieure, R_2 le rayon intérieur de la sphère extérieure, Q la charge commune, au signe près, aux deux surfaces sphériques en présence. Si le potentiel V' de la sphère extérieure est nul, celui de la sphère intérieure, qui est égal au potentiel au centre, est

$$V = k \left(\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} \right) = k Q \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

d'où la capacité du condensateur :

$$\frac{Q}{V} = \frac{1}{k} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

La capacité $\frac{R_1}{k}$ de la sphère intérieure supposée isolée est donc aug-

mentée dans le rapport $\frac{R_2}{R_2 - R_1}$ par suite de la présence de la sphère enveloppante.

Pour un grand rapprochement des deux surfaces, R_2 est sensiblement égal à R_1 et la capacité est sensiblement en raison inverse de l'épaisseur ($R_2 - R_1$). On conçoit donc la possibilité d'obtenir des étalons de capacité notable en réduisant indéfiniment l'épaisseur de la couche diélectrique. Mais pratiquement on est arrêté par la difficulté de construire des surfaces rigoureusement sphériques ; or de légères irrégularités auraient une influence sensible sur la capacité si les sphères étaient très rapprochées. L'emploi du condensateur sphérique comme étalon n'est donc pas pratique. La capacité d'un tel condensateur à lame d'air, pour $R_1 = 1$ mètre et $R_2 - R_1 = 1$ centimètre, ne serait que $\frac{1}{90^e}$ de microfarad.

36. Condensateur plan. — Deux surfaces planes parallèles ne constituent évidemment pas un condensateur fermé ; mais, elles se rapprochent d'autant plus de cette condition que leur étendue est plus grande par rapport à leur écartement. Un tel condensateur étant chargé, les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles à ses faces intérieures et les lignes de force leur sont normales, sauf dans le voisinage des bords où les surfaces équipotentielles divergent dans tous les sens et où quelques tubes, de forces vont de l'une à l'autre des faces extérieures du condensateur, comme le montre la figure 11. On trouvera dans le *Traité de Maxwell*, § 202, les procédés à employer pour le calcul rigoureux de la capacité dans le cas général. Nous considérerons seulement la partie centrale du condensateur, où le champ est sensiblement uniforme.

Dans cette partie, la charge par unité de surface étant σ , la force électrique $-\frac{dV}{dn}$ est uniforme et égale, comme on sait, à :

$$-\frac{dV}{dn} = 4\pi k\sigma$$

d'où, en intégrant par rapport à n , et appelant e l'épaisseur du diélectrique et $(V - V')$ la différence de potentiel des deux armatures :

$$V - V' = 4\pi k\sigma e$$

La capacité du condensateur plan est donc *par unité de surface* :

$$\frac{\sigma}{V - V'} = \frac{1}{4\pi k\epsilon}$$

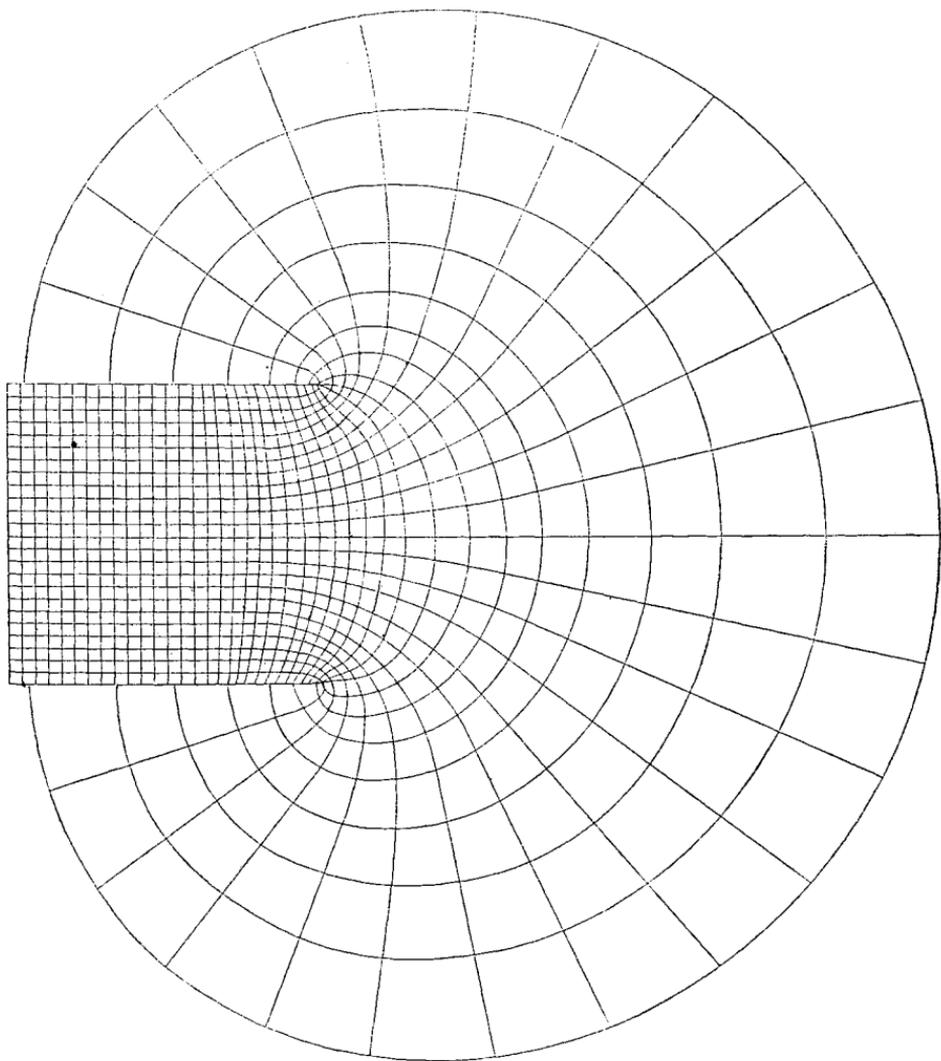


Fig. 11.

et pour une étendue S de surface, le diélectrique étant quelconque :

$$C = \frac{1}{k} \frac{S}{4\pi\epsilon} = \begin{cases} \mu \frac{S}{4\pi\epsilon} & \text{unités électrostatiques} \\ \frac{\mu}{a^2} \frac{S}{4\pi\epsilon} & \text{— électromagnétiques} \end{cases} \quad (1)$$

La tension électrique sur chaque armature, par unité de surface, est, d'après la formule (4) du § 24 :

$$p = 2\pi k\sigma^2$$

ou :

$$p = \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{V - V'}{e} \right)^2 \quad (2)$$

L'énergie potentielle accumulée sur la surface S du condensateur est, d'après la formule (5) du § 19 :

$$W = \frac{1}{2} C (V - V')^2$$

soit :

$$W = \frac{S}{8\pi k e} (V - V')^2 \quad (3)$$

Pour réaliser un condensateur plan, de surface déterminée S, tel que le champ électrique reste uniforme sur son contour, on trace sur une armature d'un condensateur de surface plus grande le contour d'une aire égale à S, par exemple d'un cercle de rayon égal à $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Puis on fait autour de cette aire une découpe très mince, de manière à isoler S du reste de l'armature qui forme ainsi autour de S un anneau, dit *anneau de garde*. L'armature se trouve ainsi divisée en deux parties qui sont, l'une et l'autre d'ailleurs, reliées à la même source. Sir W. Thomson a appliqué ce dispositif à son électromètre absolu.

Exemples numériques. — 1° Un condensateur à anneau de garde, ayant une surface S de 1 mètre carré et une épaisseur d'air égale à 1 millimètre, a une capacité dont la valeur est :

$$C = \frac{100^2}{4\pi \times 0,1} = 7.917 \text{ unités électrostatiques C. G. S.}$$

ou

$$= \frac{10^{-72} \Phi}{900 \times 4\pi \times 10^{-10}} = 0^{\text{v}},0088$$

2° On verra dans l'étude du phénomène de la polarisation voltaïque que, si l'on envoie dans une pile secondaire non chargée un courant *très court*, la pile absorbe *comme un condensateur* la

quantité d'électricité ainsi fournie par la source. Si, en effet, on supprime la source et qu'on relie directement les électrodes de la pile, celle-ci donne un courant de décharge et est susceptible de restituer ainsi la charge totale absorbée si l'opération est conduite assez rapidement.

Une électrode métallique en présence d'un électrolyte constitue donc un condensateur, dont la capacité est proportionnelle à l'étendue de la surface de séparation et indépendante de la valeur de charge, pourvu que celle-ci soit assez faible. M. Blondlot a trouvé pour la valeur de cette capacité par mètre carré, dans le cas d'une électrode de platine plongée dans l'eau acidulée au sixième d'acide sulfurique, des nombres variant, suivant les circonstances, de 77,000 à 302,000 microfarads. Un condensateur plan à air, également de 1 mètre carré de surface, pour présenter la même capacité de 302,000 φ , devrait avoir une épaisseur égale à 0^{mm}000,000,029, c'est-à-dire à moins d'un dix-millième de la longueur d'onde de rayons ultra-violets, et la tension électrique (2) qui s'exercerait sur les faces d'un tel condensateur, chargé à une différence de potentiel de 1 volt seulement, atteindrait 50,000 atmosphères.

Les capacités de polarisation voltaïque sont donc considérables, et pour ce motif il semblerait qu'il y eût intérêt à employer de tels condensateurs, qui fourniraient quelques microfarads sous un volume extrêmement restreint. Mais leur isolement est extrêmement faible, et leur charge se dissipe très rapidement. Aussi ne peut-on les utiliser comme condensateurs presque dans aucun cas.

3° On se rendra compte approximativement, comme il suit, de l'énergie de la décharge que peut donner un nuage électrisé au potentiel de 1,000,000 volts, ayant une étendue de 1 kilomètre carré, situé à une hauteur uniforme de 100 mètres au-dessus du sol ; d'après (3) :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi \times 900} \frac{10^{-8} \times \overline{1.000.000^2}}{10^{-5}} = 44.000 \text{ unités pratiques} \\ &= \frac{44.000}{9,81} \text{ ou } 4.490 \text{ kilogrammètres} \\ &= \frac{4.490}{425} \text{ ou } 10,6 \text{ grandes calories.} \end{aligned}$$

Cette énergie, convertie en chaleur, élèverait donc à peine de 1° C. la température de 11 kilogrammes d'eau.

37. Condensateurs employés en pratique. — Les condensateurs étalonnés dont on se sert ordinairement dans les applications

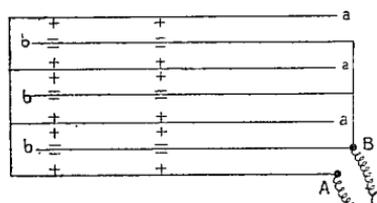


Fig. 12.

électriques sont constitués, à quelques variantes près, par une série de feuilles métalliques, d'étain par exemple, telles que $aa\dots bb\dots$ (fig. 12) séparées par des feuilles de papier paraffiné, de mica ou d'un autre isolant. Toutes les feuilles

métalliques impaires $aa\dots$, sont reliées à une borne A extérieure à la boîte contenant cet appareil, les feuilles paires $bb\dots$ sont reliées à une deuxième borne B. Ce condensateur se charge, par un jeu facile à comprendre, lorsque les bornes A et B sont mises en communication avec les pôles d'une pile, d'une machine ou de toute autre source électrique.

Cet appareil, après sa construction, est soumis à une forte pression, qui produit, entre autres, les deux effets suivants : rapprochement des feuilles et, par suite, accroissement de la capacité ; rigidité du système et par conséquent, invariabilité de la capacité malgré les chocs imprimés à la boîte. Cette dernière condition est évidemment indispensable dans un appareil de mesure. Il est également nécessaire que l'isolant employé ait un *pouvoir absorbant* aussi faible que possible (comme le mica, par exemple), c'est-à-dire ne donne pas lieu aux phénomènes de charge résiduelle, et en outre que son isolement soit très considérable (10,000 megohms, par exemple, pour une capacité de 1 microfarad, ce qui correspond à une perte de $\frac{1}{10,000}$ de la charge pendant une seconde).

On réunit souvent dans une même boîte plusieurs condensateurs de capacités telles que leurs combinaisons par voie d'addition donnent les multiples successifs de la plus petite d'entre elles. La figure schématique 13 représente ainsi un condensateur de 2 microfarads gradué par dixièmes. Si l'on veut avoir, par exemple, 1,7 entre les bornes A et B, on n'a qu'à enfoncer des fiches en f_3 , f_4 et f_5 ; chacun des condensateurs correspondants 0,2 — 0,5 et

4φ se chargera alors à la différence de potentiel qui existe entre A et B, et leur charge totale sera la même que celle d'un condensateur unique de $4\varphi 7$. En enfonçant une fiche dans le trou F, on

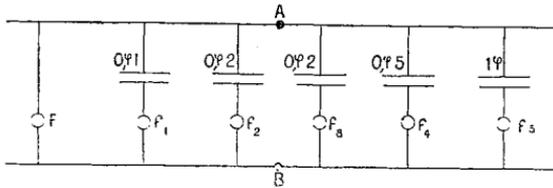


Fig. 13.

relie métalliquement A et B sans condensateur intercalé. Enfin si aucune des six fiches n'est enfoncée, les bornes A et B sont isolées l'une de l'autre sans condensateur intercalé.

La capacité de ces condensateurs ne peut se calculer à l'avance en fonction de la surface et de l'écartement des feuilles métalliques, cet écartement étant inconnu. Aussi obtient-on la capacité voulue : 1, 2, 3, ... dixièmes par tâtonnement, en ajoutant, supprimant ou rognant les feuilles jusqu'à ce que la capacité de chaque condensateur, mesurée par comparaison avec un étalon ait la valeur cherchée, à $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1.000}$... près.

Théoriquement, on peut obtenir une capacité aussi grande qu'on le veut sous un faible volume en réduisant suffisamment les épaisseurs des feuilles. Mais l'isolement peut alors devenir trop faible ; aussi est-on pratiquement limité par cette considération. On construit de bons condensateurs d'un tiers de microfarad sous un volume de 50 centimètres cubes, soit plus de $6\varphi 5$ par décimètre cube.

38. Condensateur à cylindres concentriques: — Deux cylindres concentriques constituent un condensateur à peu près fermé si l'épaisseur ou différence des rayons est très faible par rapport à la longueur des cylindres. Les surfaces équipotentielles sont sensiblement des cylindres concentriques et les lignes de force sont des rayons, sauf vers les extrémités, où quelques tubes de force sont recourbés comme sur les bords d'un condensateur plan (voir fig. 44). Nous ne considérerons que les parties du condensateur cylindrique non voisines des extrémités.

La charge q du cylindre intérieur par unité de longueur est égale au flux d'induction $\left(-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} S\right)$ à travers l'unité de longueur d'une surface équipotentielle, c'est-à-dire d'un cylindre concentrique de rayon R quelconque ($S = 2\pi R$) :

$$-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dR} 2\pi R = q$$

On tire de là par intégration :

$$V = -2kqL R + \text{const.}$$

L étant le symbole des logarithmes népériens. En écrivant que V est égal à V_1 pour $R = R_1$ (cylindre intérieur) et à V_2 pour $R = R_2$ (cylindre extérieur), on aura :

$$V_1 - V_2 = 2kqL \frac{R_2}{R_1}$$

La capacité de ce condensateur cylindrique par unité de longueur est donc :

$$\frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2kL} \frac{R_2}{R_1}$$

Pour une longueur l quelconque, la capacité sera :

$$C = \frac{l}{2kl} \frac{R_2}{R_1} = \frac{0,2172 l}{k \log. \frac{R_2}{R_1}}$$

\log étant le symbole des logarithmes décimaux. — On peut encore remplacer le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ des rayons par celui des diamètres $\frac{D_2}{D_1}$

$$C = \frac{0,2172 l}{k \log. \frac{D_2}{D_1}} \quad (4)$$

39. Application aux câbles électriques. — Un câble électrique, tel que ceux qui constituent les lignes télégraphiques souterraines ou sous-marines, se compose essentiellement : 1° d'un conducteur intérieur, ordinairement en cuivre, formé de six brins enroulés en toron autour d'un septième, et que nous supposons

coefficient μ dépasse une valeur donnée. Si l'on veut, par exemple, que μ soit inférieur à 4, il faut fixer la condition : $C < 0,736$.

La même formule sert à vérifier la valeur du pouvoir inducteur de la gutta lorsqu'on mesure la capacité C du câble fabriqué. Ainsi pour le câble d'Antibes à Saint-Florent (Corse), qui répond au type ci-dessus, la capacité mesurée était égale à $0,7281^1$, d'où : $\mu = 3,13$. — Pour le câble de Ténériffe au Sénégal, du même type, la capacité est de $0,7256$ par mille marin² ; on en déduit : $\mu = 2,83$.

Ajoutons que ces chiffres sont sans doute un peu trop faibles, au moins le dernier. On verra, en effet, dans la partie relative aux mesures électriques, que la capacité d'un câble se mesure par la première impulsion qu'une charge, envoyée dans le câble et traversant un galvanomètre, imprime à l'aiguille ou au miroir de cet instrument. Si la charge met un temps appréciable à s'établir, ce qui arrive sur les très longues lignes, son effet est moindre que si elle était instantanée ; l'impulsion et, par suite, la capacité calculée pèchent par défaut. Le câble du Sénégal, par exemple, a 863 milles de longueur ; sa capacité apparente par mille marin après la pose n'est plus que $0,7256$, tandis que, mesurée à l'usine sur des tronçons de 5 à 200 milles seulement de longueur, elle était supérieure à $0,7300$. L'abaissement de température et l'accroissement considérable de pression que le câble subit au fond de la mer auraient, d'ailleurs, pour effet, d'augmenter sa capacité et non de la réduire.

Une autre cause de l'abaissement apparent de la capacité d'un câble immergé peut tenir à ce que les qualités isolantes de l'enveloppe de chanvre sont plus développées à la température relativement basse du fond de la mer qu'à celle de l'usine.

40. Condensateurs à cylindres excentriques. — Avant de calculer la capacité du système formé par deux cylindres excentriques, nous allons chercher la distribution des potentiels dans l'espace sous l'action de deux *lignes* droites parallèles et indéfinies, chargées

¹ V. Raynaud, *Annales télégraphiques*, mars-avril 1879

² V. Thomas, *Annales télégraphiques*, janvier-février 1886.

respectivement de quantités d'électricité $+q$ et $-q$ par unité de longueur.

Soit $MP = r_1$ la distance d'un point M à la droite PP' sur laquelle la densité électrique linéaire est $+q$ (fig. 14). Un élément $P'P'' = dx$ de cette droite contient une charge qdx , dont le potentiel au point M est égal à $kqdx$ divisé par la distance $MP' = \sqrt{r_1^2 + x^2}$. Par suite, le potentiel dû à une longueur quelconque de la droite est égal à $kq \int \frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + x^2}}$.

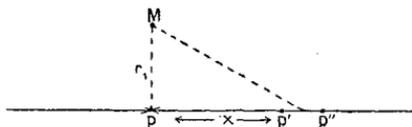


Fig. 14.

De même l'autre droite électrisée donnerait le potentiel $-kq \int \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + x^2}}$, si r_2 est sa distance au point M . Le potentiel résultant en M sous l'action des deux droites indéfinies est donc :

$$V = kq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dx}{\sqrt{r_1^2 + x^2}} - \frac{dx}{\sqrt{r_2^2 + x^2}} \right)$$

$$= kq \left[L(x + \sqrt{r_1^2 + x^2}) - L(x + \sqrt{r_2^2 + x^2}) \right]_{x = -\infty}^{x = +\infty}$$

ou :

$$V = 2kqL \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (5)$$

Pour tous les points M appartenant à une même droite parallèle aux deux droites électrisées, les distances r_1 et r_2 conservant la même valeur, il en est de même de V . Par conséquent les surfaces équipotentiellles sont des cylindres à génératrices parallèles à ces droites. Cherchons quelle est la forme de leur section par un plan perpendiculaire aux génératrices (fig. 15).

Soient Q_1 et Q_2 les traces des deux droites. Les courbes équipotentiellles dans ce plan sont données, d'après la formule (5), par la condition : $\frac{r_2}{r_1} = \text{constante}$. Or le lieu des points tels que le rapport de leurs distances r_1 et r_2 à deux points fixes Q_1 et Q_2 ait une valeur constante est un cercle ayant son centre sur la droite Q_1Q_2 . Les courbes équipotentiellles sont donc des cercles $C_1, C'_1, C''_1, \dots, C_2, C'_2, \dots$

On sait d'autre part que les trajectoires orthogonales de ces cercles, c'est-à-dire les lignes de force, sont des arcs de cercle partant de Q_1 pour aboutir à Q_2 ; mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat. La figure 15 montre un tube de force (partie hachée).

Le flux total d'induction $\int -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} dS$ à travers l'unité de longueur du cylindre projeté suivant le cercle C''_1 est égal, comme on sait, à la charge intérieure q . Supposons cette charge q supprimée sur l'axe Q_1 et répartie sur le cylindre de telle sorte que la densité superficielle en chaque point soit : $-\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn}$. Supposons de même la charge ($-q$) de la ligne Q_2 répartie sur le cylindre C'_2 . Rien ne

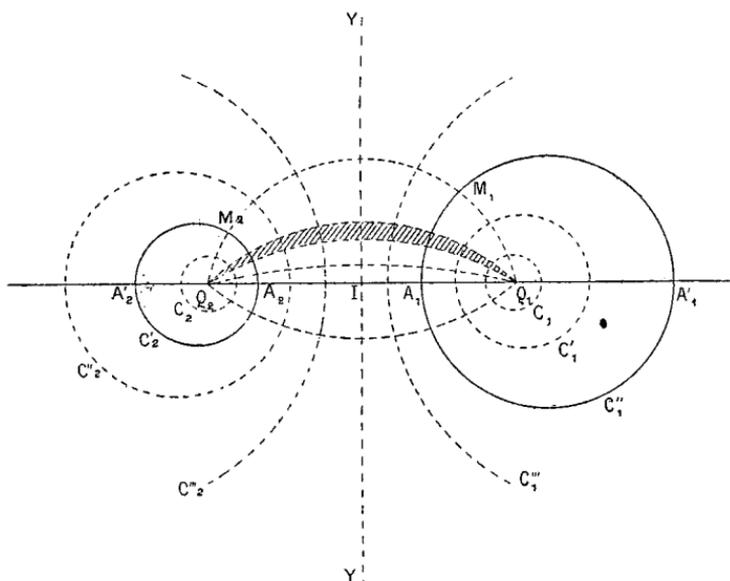


Fig. 15.

sera changé à l'état électrique du milieu entre les deux cylindres, qui restera un état d'équilibre. Seulement les tubes de force ne pénétreront pas à l'intérieur des cylindres, ils partiront de la surface du premier C_1'' pour aboutir à celle du second C_2' . L'équilibre continuera à subsister si l'on suppose ces cylindres conducteurs, puisque leurs surfaces sont équipotentielles. Si l'on se reporte au principe des images électriques (§ 32, 5°), on voit que l'axe projeté en Q_1 est l'image de l'axe Q_2 par rapport au cylindre C''_1 , ou par rapport à l'un quelconque des autres cylindres C_1, C'_1, \dots

La capacité électrostatique du système des deux cylindres excentriques C''_1 et C'_2 est donc, par unité de longueur, égale à $\frac{q}{V_1 - V_2}$, V_1 et V_2 étant les potentiels de ces cylindres et pouvant se calculer au moyen de la formule (5) :

$$V_1 = 2kqL \left(\frac{A_1 Q_2}{A_1 Q_1} \right)$$

$$V_2 = 2kqL \left(\frac{A_2 Q_2}{A_2 Q_1} \right)$$

d'où :

$$V_1 - V_2 = 2kqL \frac{A_1 Q_2}{A_1 Q_1} \frac{A_2 Q_1}{A_2 Q_2} \quad (6)$$

Les rayons R_1 et R_2 des deux cylindres, ainsi que la distance a de leurs centres, étant donnés, il reste à calculer les positions des points Q_1 et Q_2 , traces des droites électrisées fictives qui produiraient la même distribution des potentiels que les deux cylindres. Désignons par x et y respectivement les distances inconnues de Q_1 au centre du cercle C''_1 , et de Q_2 au centre de C'_2 . Les points A_1 et A'_1 , qui appartiennent au cercle C''_1 , ayant des potentiels égaux, on doit avoir d'après la relation (5) :

$$\frac{A_1 Q_2}{A_1 Q_1} = \frac{A'_1 Q_2}{A'_1 Q_1}$$

ou :

$$\frac{a - R_1 - y}{R_1 - x} = \frac{a + R_1 - y}{R_1 + x} \quad (7)$$

Chacun de ces deux rapports est égal à $\frac{R_1}{x}$, comme on peut le vérifier. Donc : $\frac{A_1 Q_2}{A_1 Q_1} = \frac{R_1}{x}$. De même l'égalité des potentiels de A_2 et A'_2 se traduit par la condition :

$$\frac{a - R_2 - x}{R_2 - y} = \frac{a + R_2 - x}{R_2 + y} \quad (7')$$

et l'on trouve l'égalité

$$\frac{A_2 Q_1}{A_2 Q_2} = \frac{R_2}{y}$$

Il en résulte :

$$\frac{A_1 Q_3}{A_1 Q_1} \frac{A_2 Q_1}{A_2 Q_2} = \frac{R_1 R_2}{xy}$$

et, en calculant xy au moyen de (7) et (7'), on a :

$$\frac{R_1 R_2}{xy} = \frac{a^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1 R_2} + \sqrt{\left[\frac{a^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1 R_2} \right]^2 - 1}$$

En remplaçant $\frac{A_1 Q_3}{A_1 Q_1} \frac{A_2 Q_1}{A_2 Q_2}$ par cette expression dans (6), il vient pour la valeur de la capacité par unité de longueur :

$$\frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2kL \left\{ \frac{a^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1 R_2} + \sqrt{\left[\frac{a^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1 R_2} \right]^2 - 1} \right\}}$$

En posant :

$$\alpha = \frac{a^2 - (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1 R_2} \quad (8)$$

on trouve finalement pour la capacité C correspondante à une longueur l :

$$\begin{aligned} C &= \frac{l}{2kL (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \\ &= \frac{0,2172 l}{k \log. (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \end{aligned} \quad (9)$$

Les formules (8) et (9) résolvent complètement la question posée, même dans le cas où l'une des circonférences, C'_1 par exemple, devient une droite YY (cas d'un fil cylindrique C'_2 en présence d'un plan indéfini) ou bien enveloppe l'autre circonférence; dans ce dernier cas son rayon doit être considéré comme négatif dans les applications numériques.

41. Application aux fils télégraphiques aériens. — Dans le cas de deux fils télégraphiques aériens, leurs diamètres ne dépassant pas 5 millimètres, R_1 et R_2 sont au plus égaux à 2^{mm}5. D'un autre côté le minimum de leur distance étant 0^m20 ou 200 milli-

mètres, le rapport $\frac{R_1^2 + R_2^2}{a^2}$ ne dépasse pas $\frac{1}{3200}$ et peut être négligé en pratique, de telle sorte que la formule (8) se réduit à :

$$\alpha = \frac{a^2}{2 R_1 R_2}$$

En outre $\frac{1}{\alpha}$ étant au maximum égal à la même fraction $\frac{1}{3200}$, l'unité peut être négligée devant α^2 dans la formule (9), qui s'écrira :

$$C = \frac{0,2172 l}{k \log. \left(\frac{a^2}{R_1 R_2} \right)} \quad (10)$$

Exemple : Deux fils de 4 millimètres de diamètres placés à 0^m20 l'un de l'autre. Pour un kilomètre ou 10⁻⁴ unités pratiques de longueur, la capacité est égale à :

$$C = \frac{0,2172 \times 10^{-4}}{900 \log. (10000)} \Phi = 0^{\circ},006$$

Il est à remarquer que ce chiffre en général est beaucoup trop grand et ne répond pas à la valeur de la capacité réelle. Pour calculer C, en effet, nous avons supposé que les charges des deux fils sont égales et de signes contraires, ou que toutes les lignes de force issues du fil C₁' (fig. 15) soumis à l'électrisation vont aboutir au fil voisin C₂'. Or ceci n'est pas vrai, à beaucoup près, soit que le fil induit C₂' soit maintenu isolé, soit qu'il soit mis à terre, et en réalité la capacité C est bien plus faible que ne l'indique le calcul. Si toutefois on suppose deux fils mis en communication, à une même extrémité, respectivement avec les deux pôles d'une même pile, ils prendraient des charges égales et contraires, et le calcul précédent deviendrait applicable.

L'objection précédente n'a plus de raison d'être lorsqu'on calcule la capacité d'un fil en présence du sol. On peut en effet alors considérer tous les tubes de force partant du fil comme aboutissant au sol. La hauteur à laquelle est posé le fil étant h , son rayon R_1 , on fera a et R_2 infinis dans la formule (8), tout en maintenant la différence $(a-R_2)$ finie et égale à h . On a alors : $\alpha = \frac{h}{R_1}$; et, en

remarquant qu'en pratique $\left(\frac{R_1}{h}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$ est négligeable, la formule (9) devient alors :

$$C = \frac{0,2172 l}{k \log. \left(\frac{2h}{R_1}\right)} \quad (11)$$

Exemples numériques. — Prenons deux cas extrêmes : 1° celui d'un gros fil, de 5 millimètres de diamètre, posé à 2 mètres seulement du sol, et offrant, par conséquent, le maximum pratique de capacité ; alors $\frac{2h}{R} = 1600$ et $\log \frac{2h}{R_1} = 3,204$; d'où la capacité kilométrique :

$$C = \frac{0,2172 \times 10^{-1}}{900 \times 3,204} \Phi = 0^{\varphi},0075$$

2° celui d'un petit fil de 3 millimètres posé à 12 mètres du sol et offrant, par suite, le minimum pratique de capacité kilométrique. On trouve alors :

$$C = \frac{0,2172 \times 10^{-1}}{900 \times 4,204} \Phi = 0^{\varphi},0057$$

On peut donc dire que la capacité kilométrique d'un fil télégraphique en présence du sol est comprise entre 57 et 75 dix-millièmes de microfarad. En prenant la moyenne $0^{\varphi}0066$ pour un fil quelconque, l'erreur relative commise est au plus $\frac{0.0009}{0.0066}$, soit moins de $\frac{1}{7}$.

Remarque. — La capacité d'un fil télégraphique est sensiblement indépendante, en général, du voisinage d'autres fils en nombre quelconque ; et il suffit pratiquement, pour la calculer, de tenir compte de la présence du sol, c'est-à-dire d'employer la formule (11). En effet, le voisinage d'autres fils produirait le maximum d'effet, au point de vue de l'accroissement de capacité du fil considéré, si on les supposait rangés autour de celui-ci à la distance minimum de 0^m20 de manière à former un cylindre qui l'envelopperait complètement ; il faudrait d'ailleurs, pour former cette enveloppe, 251 fils jointifs de 5 millimètres. Or, dans ce cas

extrême, la capacité du fil enveloppé, en le supposant de 5 millimètres, serait donnée par la formule (4) relative à deux cylindres concentriques, et où l'on ferait : $D_2 = 400$ millimètres $D_1 = 5$ millimètres.

$$C = \frac{0,2172 l}{k \log. 80} = \frac{0,2172 l}{k \times 4,903}$$

tandis que l'application de la formule (11), en supposant la hauteur $h = 5$ mètres donnerait :

$$C = \frac{0,2172 l}{k \log. 4000} = \frac{0,2172 l}{k \times 3,602}$$

Le rapport de la valeur précédente à celle-ci n'est donc que $\frac{3,602}{1,903}$, c'est-à-dire 1,9. On voit donc bien par là qu'en pratique la présence de quelques fils voisins a peu d'influence sur la capacité C .

42. Groupes de condensateurs. — Lorsqu'on dispose de plusieurs condensateurs de capacités C_1, C_2, \dots, C_n , on peut les grouper soit *en série* (fig. 16), soit *en dérivation* (fig. 17), soit de diverses autres façons, de manière à obtenir des capacités variées en nombre supérieur à n . L'appareil de la figure 13 est un exemple de groupement de cinq condensateurs en dérivation permettant d'obtenir des capacités variant de $0,71$ à 2φ par dixièmes de microfarad. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que les deux armatures de chaque condensateur prennent toujours des charges égales et de signes contraires, ce qui serait rigoureux (§ 22, corollaire II) s'il s'agissait de condensateurs fermés; il en est sensiblement ainsi pour les condensateurs employés en pratique.

1° Si l'on a des condensateurs C_1, C_2, \dots, C_n disposés en série ou

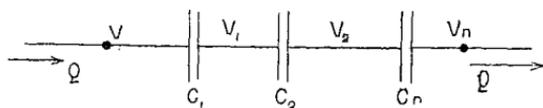


Fig. 16.

en *cascade* (fig. 16) et non électrisés préalablement, et qu'on relie les extrémités de ce groupe aux pôles d'une pile ou à deux points quelconques aux potentiels V et V_n , ces divers condensateurs pren-

dront tous une même charge Q . En effet, une charge $+ Q$ arrivant de V sur la première armature de C_1 , la deuxième armature de ce condensateur prendra la charge $- Q$, et une quantité égale et de signe contraire à $- Q$, c'est-à-dire $+ Q$, sera refoulée sur la première armature de C_2 ; et ainsi de suite.

Si l'on pose : $\frac{Q}{V - V_n} = C$, l'ensemble des condensateurs se comporte, au point de vue de la charge Q qu'il absorbe, comme un condensateur unique de capacité C . On appelle C la *capacité* du groupe de condensateurs. Si V_1, V_2, \dots sont les potentiels des conducteurs intermédiaires entre les divers condensateurs, on aura :

$$\begin{aligned} V - V_1 &= \frac{1}{C_1} Q \\ V_1 - V_2 &= \frac{1}{C_2} Q \\ &\vdots \\ V_{n-1} - V_n &= \frac{1}{C_n} Q \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant membre à membre ces équations :

$$V - V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right) Q$$

et par suite :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (12)$$

On appelle quelquefois résistance inductive l'inverse de la capacité. On peut donc exprimer le résultat ci-dessus en disant que la résistance inductive $\frac{1}{C}$ est égale à la somme des résistances inductives $\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2} \dots$ placées bout à bout ou en série. — Ce théorème est analogue à celui qui concerne la résistance totale de plusieurs conducteurs en série (§ 57) et c'est cette analogie qui a fait donner, pour la commodité des énoncés, le nom de résistance inductive à l'inverse de la capacité.

2° Si les condensateurs C_1, C_2, \dots, C_n sont disposés en dérivation ou en surface (fig. 47), la quantité Q d'électricité qui arrive au

groupe par le point V ou s'en va par V' se répartit sur les divers condensateurs, de telle sorte que l'on a :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

Le rapport $\frac{Q}{V - V'} = C$ s'appelle encore la capacité du système. Or on a :

$$Q_1 = C_1 (V - V')$$

$$Q_2 = C_2 (V - V')$$

$$\vdots$$

d'où, en ajoutant membre à membre :

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q = (C_1 + C_2 + \dots) (V - V')$$

Il en résulte :

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (13)$$

La capacité d'un groupe de condensateurs en dérivation est donc égale à la somme des capacités de chacun d'eux. On verra

de même (§ 57) que la conductibilité d'un groupe de conducteurs en dérivation est égale à la somme des conductibilités de chacun d'eux.

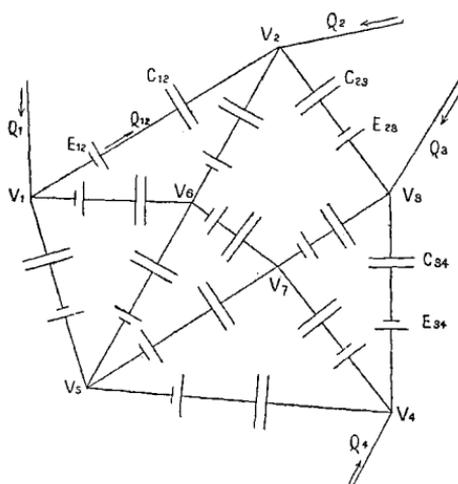


Fig. 18.

électromotrices E_{12} , E_{23} ,... Soient Q_{12} , Q_{23} ,... les charges prises par les divers condensateurs. La différence des potentiels des armatures d'un condensateur quelconque C_{2n} est égale à la différence

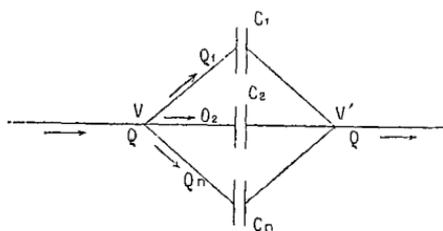


Fig. 17.

$(V_g - V_h)$ augmentée de la force électromotrice E_{gh} . La charge de ce condensateur est donc :

$$Q_{gh} = C_{gh} (V_g - V_h + E_{gh}) \quad (14)$$

D'autre part, le système n'étant pas primitivement électrisé avant la fermeture des diverses branches du réseau, si une quantité Q_g d'électricité est arrivée en V_g de l'extérieur du réseau, la somme des charges $Q_{g1}, Q_{g2}, \dots, Q_{gn}$ prises par les armatures des condensateurs $C_{g1}, C_{g2}, \dots, C_{gn}$ qui sont reliées à V_g est égale à Q_g :

$$Q_{g1} + Q_{g2} + \dots + Q_{gn} = Q_g \quad (15)$$

Si le réseau ne reçoit pas d'électricité de l'extérieur, Q_g est nul :

$$Q_{g1} + Q_{g2} + \dots + Q_{gn} = 0 \quad (15')$$

Comparons maintenant les circuits *inductifs* et *conductifs* représentés respectivement par les figures 18 et 24, ainsi que les équations (14), (15) et (15') ci-dessus et les équations (13), (10) et (10') des § 68 et 66. Les équations (14) et (15), relatives aux diverses branches et aux sommets du réseau, sont en nombre suffisant pour déterminer la charge de chacun des condensateurs et, à une constante près, le potentiel de chaque sommet. Nous ne résoudrons point ce problème, qui offre peu d'intérêt en pratique. Il suffira de signaler l'analogie complète qui existe, au point de vue des calculs entre le réseau de condensateurs de la figure 18 et le réseau de conducteurs de la figure 24. Les équations des deux problèmes ont la même forme. Elles ne diffèrent qu'en ce que les charges Q_{gh} des condensateurs sont remplacées par les intensités i_{gh} du courant dans les conducteurs, et les capacités C_{gh} par les conductibilités K_{gh} . Les solutions dans les deux cas sont donc identiquement les mêmes, à part cette substitution de lettres.

Il en résulte notamment que les formules relatives aux conductibilités des diverses branches subsistent dans le cas où il s'agit des capacités ; ou encore (si cette forme est plus commode) que les formules relatives aux résistances des conducteurs sont les mêmes pour les résistances inductives des condensateurs. Les formules (12) et (13) ci-dessus en sont des exemples.

CHAPITRE IV

ROLE DES DIÉLECTRIQUES

44. **Transmission des actions électriques par le milieu diélectrique.** — Nous avons étudié jusqu'à présent les actions électriques comme si elles s'exerçaient à distance, conformément à la loi de Coulomb, entre des quantités d'électricité existant à la surface ou dans la masse des corps en jeu.

Tout se passe en effet, au point de vue du calcul de ces actions en électrostatique, comme si la loi de Coulomb était exacte dans les milieux isotropes les plus divers, à la condition de supposer des couches électriques convenablement réparties sur les surfaces de séparation des différents corps (§ 28). Lorsque l'on considère cette hypothèse comme l'expression de la réalité, on doit attribuer au coefficient k de la formule de Coulomb une valeur constante pour tous les milieux. Cela revient à supprimer en apparence l'influence de la nature du milieu dans la loi fondamentale de l'électrostatique ; mais on est obligé de la rétablir d'une manière détournée en supposant qu'un corps diélectrique prend par induction à sa surface une couche électrique, comme le fait un conducteur.

L'hypothèse des actions à distance complétée par celle de la couche électrique induite à la surface des diélectriques, conduit à une expression incorrecte de l'énergie d'un champ électrique (§ 28). De plus, elle est insuffisante pour rendre compte des actions exercées par le champ électrique sur le milieu, notamment de la dilatation électrique (§ 48). Enfin, elle est en défaut lorsque le milieu est anisotrope, l'action d'un corps électrisé à distance

n'étant plus alors la même dans toutes les directions, et le pouvoir inducteur spécifique variant suivant l'orientation.

Si l'on étudie les actions réciproques des corps en mouvement, les difficultés que présente la théorie des actions à distance deviennent plus grandes encore. La force exercée par un corps électrisé à une distance quelconque ne dépendrait que de sa position actuelle; c'est-à-dire que le champ électrique, d'étendue infinie, développé par ce corps, se déplacerait tout d'une pièce avec lui dans l'espace. Cette conséquence paraît inadmissible.

Divers savants ont été conduits à opposer à la théorie des actions à distance une autre théorie d'après laquelle ces actions seraient transmises de proche en proche par le milieu interposé entre les corps électrisés. Ainsi Faraday n'admettait point qu'un corps pût agir directement à distance, c'est-à-dire là où il n'est pas. Dans cette nouvelle manière d'envisager les choses, le milieu diélectrique servirait d'organe de transmission entre les corps électrisés et ne pourrait transmettre leurs actions réciproques qu'en les subissant lui-même. De même dans un vase, un liquide, soumis à la pression d'un piston, transmet celle-ci à tous les points de la paroi. De même encore, si un milieu élastique solide est interposé entre deux corps auxquels il est lié, aucune poussée ou traction ne pourra s'exercer entre ceux-ci, si ce n'est par l'intermédiaire du milieu. Ce milieu sera en chacun de ses points soumis à des forces qui tendent à le comprimer ou à le dilater et qui sont déterminées par les lois de l'élasticité lorsque l'on connaît les efforts exercés à sa surface.

La théorie de l'élasticité montre que, si un effort vient à être exercé en un point d'un corps quelconque, l'ébranlement qui en résulte se propage avec une vitesse finie dans ce corps et dans ceux auxquels il est lié; l'état d'équilibre statique n'est atteint qu'au bout d'un temps plus ou moins long. De même l'ébranlement produit par l'électrisation d'un corps se propagerait avec une vitesse finie dans le milieu environnant, et l'équilibre électrostatique ne s'établirait pas instantanément. La propagation des ébranlements électriques entraînant la production de phénomènes magnétiques, son étude sera renvoyée à la fin de l'électromagnétisme. Mais on voit, par l'aperçu qui précède, combien l'idée de la

transmission des actions électriques de proche en proche par le milieu diélectrique est plus rationnelle et doit être plus féconde que celle des actions à distance.

Le développement de cette idée ne laisse pas toutefois d'offrir des lacunes importantes dans l'état actuel de la science électrique. On peut bien faire abstraction des actions à distance et calculer l'état d'un champ électrique en chaque point à l'aide des équations aux dérivées partielles (6) et (7) des § 25 et 26 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k} \frac{dV}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{k} \frac{dV}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{k} \frac{dV}{dz} \right) + 4\pi\rho = 0 \\ \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right) + \frac{1}{4\pi k'} \left(\frac{dV}{dn} \right)' + \sigma = 0 \end{array} \right.$$

auxquelles on ajoutera les conditions relatives aux surfaces des conducteurs électrisés. Mais ces formules, qui peuvent servir de base au calcul des actions de proche en proche, ont été déduites de la loi de Coulomb, qui exprime des actions à distance. Il y aurait intérêt à les établir directement sans les fonder sur cette loi qui n'est pas générale, et sans recourir aux hypothèses (§ 26) qui ont permis de la compléter.

Dans la nouvelle théorie, la force électrique f ou le flux d'induction $\frac{f}{4\pi k}$ joueraient un rôle essentiel. Ce que l'on appelle quantité d'électricité ou quelquefois masses agissantes ne serait que la variation du flux le long d'un tube d'induction (§ 23), et la charge d'un conducteur ne serait que l'indice de la naissance ou de l'absorption d'un tube à la surface de ce conducteur. Mais il serait difficile de préciser le sens physique de ces expressions dans l'ignorance où nous sommes au sujet de la nature de l'électricité. Ainsi non seulement on ne sait pas en quoi consiste le potentiel d'un corps, mais rien ne permet d'établir le sens de l'échelle des potentiels croissants, comme cela existe pour les températures, et de distinguer si une différence de potentiel ($V_1 - V_2$), admise comme positive, est positive ou négative d'une manière absolue.

Si, au lieu du potentiel ou de la force électrique, on considère les forces mécaniques et l'énergie résultant des actions électriques, leur nature physique nous est connue. Aussi leur étude est-elle

plus accessible, et l'on peut se proposer de rechercher comment elles sont distribuées aux divers points d'un diélectrique.

45. Tensions et pressions dans le milieu diélectrique. — Un conducteur électrisé subit, en chaque point de sa surface, une tension électrique dirigée suivant la normale et dont la valeur est (§ 24) :

$$p = 2\pi k\sigma^2 = \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 \quad (1)$$

La résultante de toutes les tensions semblables est la force qui tend à produire le déplacement du conducteur.

Si l'on admet, avec Faraday, que les actions électriques, au lieu de se produire à distance par une force mystérieuse, sont transmises de proche en proche par l'intermédiaire du milieu interposé, la tension p sur un élément de surface d'un conducteur doit être considérée comme exercée par le milieu directement en contact avec cet élément. Par suite, l'élément en question exerce sur le milieu une tension égale et opposée. Le milieu interposé entre les conducteurs électrisés subit donc, de la part de ceux-ci et en chaque point de sa surface de contact avec eux, une tension p définie par la formule (1). Il en résulte qu'en tout point à l'intérieur du milieu, celui-ci est soumis à des tensions ou pressions variables dans les diverses directions, mais calculables par les lois de l'élasticité.

Le calcul de ces tensions et pressions est facilitée considérablement par l'étude que nous avons faite de la distribution du potentiel dans le champ électrique. Prenons, par exemple, un tube de force infiniment petit $ab\ a'b'$ limité à deux sections équipotentielles $ab = s$ et $a'b' = s'$, et cherchons les conditions d'équilibre de ce tube (fig. 19).

La force p à laquelle est soumise par unité de surface la base s , dépendant seulement de l'état électrique en cet endroit et non de ce qui se passe à distance, doit être la même que si la surface équipotentielle à laquelle appartient cette base s était celle d'un conducteur avec lequel le tube considéré serait en contact; p est donc une tension normale à s et définie par la formule (1). La

base s' est soumise à une tension p' de sens contraire, égale à :

$$p' = \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2$$

Le tube ne pouvant être en équilibre sous l'action des forces ps et $p's'$ seules, il doit exister des actions sur la surface latérale. Or la résultante de ps et de $p's'$ a pour projection : 1° sur la direction et dans le sens $O'O$ une force $R = ps - p's'$; 2° sur le plan perpendiculaire et dans le sens Od une force $S = ps\theta$, θ étant l'angle de ps et de $p's'$.

Si le tube ne contient pas d'électricité, on a, en écrivant que son flux d'induction reste constant :

$$\left(\frac{dV}{dn} \right) s = \left(\frac{dV}{dn} \right)' s'$$

d'où :

$$\left(\frac{dV}{dn} \right)^2 s^2 = \left(\frac{dV}{dn} \right)'^2 s'^2$$

c'est-à-dire :

$$ps^2 = p's'^2$$

On déduit de là :

$$R = ps^2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} \right) = p \frac{s}{s'} (s' - s)$$

ou sensiblement :

$$R = p_0 (s' - s)$$

p_0 étant la valeur de p au centre du tube ; $\frac{p}{p_0}$ et $\frac{s}{s'}$ sont en effet égaux à 1 à un infiniment petit près.

De même on peut écrire : $S = p_0 s\theta$.

Imaginons des sections $a_1 b_1$ et $a'_1 b'_1$ faites dans le tube par des plans passant respectivement par les points O et O' , et symétriques de la section ab par rapport à cd et de la section $a' b'$ par rapport à $c' d'$. R et S seraient précisément les projections, suivant les directions $O'O$ et Od , de la résultante de pressions uniformes p_0 s'exerçant sur les sections $a_1 b_1$ et $a'_1 b'_1$. Or une pres-

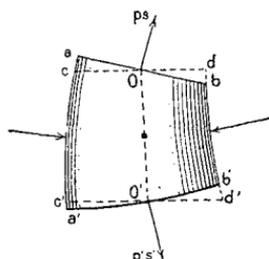


Fig. 19.

sion uniforme p_0 exercée sur la surface latérale du tube $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ ferait équilibre à la même pression p_0 s'exerçant sur les bases $a_1 b_1$ et $a'_1 b'_1$ ou, ce qui revient au même, aux forces R et S. Il résulte de là un moyen simple de calculer les forces à appliquer sur la surface latérale du tube $ab a'b'$ pour le maintenir en équilibre.

Divisons la surface latérale du tube $ab a'b'$ en rectangles par des lignes de force infiniment rapprochées. Soit σ la base de l'un de ces rectangles, l sa hauteur (longueur de la ligne de force entre les sections équipotentielles s et s'). Si l_0 désigne la longueur $O'O$, on peut poser :

$$l = l_0 + \lambda$$

La hauteur du rectangle de même base σ sur la surface du tube $a_1 b_1 a'_1 b'_1$ est :

$$l' = l_0 - \lambda$$

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on fera équilibre aux forces R et S en appliquant sur les divers rectangles des pressions égales à $p_0 \sigma l'$. Appliquons ces mêmes pressions sur les rectangles du tube $ab a'b'$; la pression spécifique en chaque point devra être :

$$\frac{p_0 \sigma l'}{\sigma l} = \frac{p_0 l'}{l^2} = \frac{p_0 (l_0^2 - \lambda^2)}{l^2}$$

ou encore $\frac{p_0 l_0^2}{l^2}$, en négligeant λ^2 , qui est infiniment petit du second ordre.

Mais la pression $p = \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2$, étant inversement proportionnelle au carré de la longueur $dn = l$ comprise entre les sections équipotentielles s et s' , on a :

$$p l^2 = p_0 l_0^2$$

d'où :

$$p_0 \frac{l_0^2}{l^2} = p$$

c'est-à-dire que les actions à exercer sur la surface latérale du tube $ab a'b'$ pour maintenir l'équilibre se réduisent à une pression normale p représentée en chaque point par la formule (1).

Le problème d'élasticité que nous nous étions posé et qui com-

porte une solution unique est ainsi résolu. On connaît les forces qui s'exercent en chaque point du milieu sur un élément de surface perpendiculaire ou parallèle aux lignes de force. Sur un autre élément d'orientation quelconque, la force est oblique à l'élément et se calcule de la manière suivante :

Soit $BCB'C'$ un élément rectangulaire, dont le côté BB' est sur la surface équipotentielle passant par le point B , et dont le plan

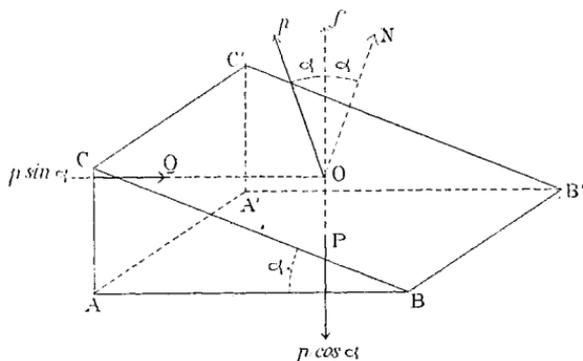


Fig. 20.

fait l'angle α avec cette surface ; et soient $CA, C'A'$ les perpendiculaires abaissées des points C et C' sur la surface équipotentielle (ou (sur son plan tangent). Nous calculerons ainsi l'effort, qui s'exerce sur l'élément $BCB'C'$. Le prisme triangulaire $ABC A'B'C'$ est soumis sur ses faces ABC et $A'B'C'$ à des forces égales et opposées, qui se détruisent (à un infiniment petit près d'ordre supérieur). Donc la force qui s'exerce sur la face hypothénuse $BCB'C'$ doit faire équilibre à celles qui s'exercent sur les faces $ABA'B'$ et $ACA'C'$. Si l'aire de $BCB'C'$ est égale à l'unité, la face $ABA'B'$, perpendiculaire aux lignes de force, a pour aire $\cos \alpha$ et est soumise à une tension $p \cos \alpha$; la face $ACA'C'$, parallèle aux lignes de force, a pour aire $\sin \alpha$ et est soumise à une pression $p \sin \alpha$. La force Op qui s'exerce sur $BCB'C'$ est donc égale à la résultante p de ces forces $p \cos \alpha$ et $p \sin \alpha$, et elle fait avec la ligne de force Of un angle α égal à celui que fait avec cette même ligne la normale extérieure ON au prisme triangulaire. Les trois directions ON, Of et Op sont d'ailleurs dans le même plan. La force Op est une tension oblique lorsque α est compris entre 0° et 45° , une pression oblique lorsque

α est compris entre 45° et 90° . Enfin elle est dans le plan de l'élément $BCB'C'$ quand celui-ci est incliné de 45° sur les lignes de force.

Les tensions et pressions sur les diverses faces d'un tube de force élémentaire sont encore définies par la formule (4) lorsque le milieu est hétérogène ou lorsque le tube contient de l'électricité. Le tube alors n'est plus en équilibre. Si, par exemple, il contient une quantité q d'électricité, il doit être soumis à une poussée $-q \frac{dV}{dn}$ dans le sens OO' de la force électrique $-\frac{dV}{dn}$ (fig. 49) ou à $q \frac{dV}{dn}$ en sens inverse. Comme on a la relation :

$$\frac{dV}{dn} s = \left(\frac{dV}{dn}\right)' s' + 4\pi kq$$

ou en déduit en élevant au carré :

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 s^2 = \left(\frac{dV}{dn}\right)'^2 s'^2 + 8\pi kq \left(\frac{dV}{dn}\right)' s + 16\pi^2 k^2 q^2$$

Si la densité électrique de volume est finie, q est un infiniment petit de l'ordre du volume, et l'on peut négliger le terme en q^2 . Il vient alors :

$$ps^2 = p's'^2 + q \left(\frac{dV}{dn}\right)' s'$$

La résultante longitudinale des forces ps et $p's'$, soit $ps - p's'$ se compose : 1° du terme $p \frac{s}{s'} (s' - s)$ comme précédemment ; 2° du nouveau terme $\frac{ps^2 - p's'^2}{s'} = q \left(\frac{dV}{dn}\right)'$, qui détruit l'équilibre.

La démonstration s'étendrait facilement au cas où la densité de volume est infinie.

L'existence de tensions suivant les lignes de force et de pressions latérales égales avait été devinée par Faraday, qui exprimait ce fait en disant que les lignes de force tendent à se raccourcir et en même temps se repoussent les unes les autres. Maxwell en a donné le premier une démonstration analytique⁴.

⁴ *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, § 103-111.

46. **Energie dans le milieu diélectrique.** — Lorsqu'un corps élastique est soumis à des forces appliquées sur sa surface, le travail que ces forces produisent par la compression ou la dilatation du corps se trouve emmagasiné à l'état potentiel dans sa masse sous forme d'énergie élastique. Cette énergie peut être restituée intégralement, pendant la détente, sous forme de travail extérieur, si le corps est parfaitement élastique; dans le cas contraire, une partie de cette énergie est perdue, sous forme de chaleur ou de travail moléculaire. La théorie de l'élasticité fait connaître par une formule simple l'énergie emmagasinée dans l'unité de volume du corps, en fonction des tensions et pressions élastiques. Nous allons de même, en considérant l'énergie d'un champ électrique comme existant dans le milieu, chercher à calculer l'énergie par unité de volume.

Prenons à cet effet l'expression de l'énergie W donnée par la formule (41) du § 29 :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du = \int p du \quad (2)$$

La force $\left(-\frac{dV}{dn} \right)$ étant donnée en chaque point, si le milieu est homogène, l'énergie est proportionnelle au coefficient $\frac{1}{k}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$W = \frac{P}{k}$$

P étant indépendant de k et, par suite, de la nature du milieu. Il est donc naturel de supposer que l'énergie par unité de volume en un point doit être aussi proportionnelle au coefficient $\frac{1}{k}$.

Supposons maintenant le milieu divisé en deux parties homogènes A et B dont les coefficients sont k_1 et k_2 . L'énergie W se composera de deux parties $\frac{P_1}{k_1}$ et $\frac{P_2}{k_2}$, P_1 et P_2 étant indépendants des coefficients k . D'autre part, l'intégrale (2) se divise en deux parties correspondantes, et l'on peut écrire :

$$\frac{P_1}{k_1} + \frac{P_2}{k_2} = \frac{1}{k_1} \int_A \frac{1}{8\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du + \frac{1}{k_2} \int_B \frac{1}{8\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du$$

Cette équation, devant subsister quelles que soient les valeurs de k_1 et de k_2 , se dédouble comme il suit :

$$\frac{P_1}{k_1} = \frac{1}{k_1} \int_A \frac{1}{8\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du = \int_A p du$$

et :

$$\frac{P_2}{k_2} = \frac{1}{k_2} \int_B \frac{1}{8\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du = \int_B p du$$

c'est-à-dire que l'intégrale (2) restreinte à un volume quelconque A est l'expression de l'énergie contenue dans ce volume.

Si en particulier A se réduit au volume du , l'énergie correspondante est $p du$. Il en résulte que p représente l'énergie électrique qui existe à l'état potentiel dans l'unité de volume du diélectrique.

47. Nature du milieu qui transmet les actions électriques. —

Quelle est la nature du milieu diélectrique que nous avons considéré entre les corps électrisés et qui transmet, en les subissant, les actions électriques ? Sans introduire de nouvelle hypothèse en Physique, on a le choix entre : 1° l'éther seul ; 2° la matière pondérable seule ; 3° un milieu mixte composé de l'éther et de la matière pondérable.

Les actions électriques paraissant se transmettre même à travers le vide, c'est-à-dire à travers l'éther, on doit admettre que celui-ci intervient toujours dans la transmission de ces actions, même à travers des diélectriques quelconques. D'autre part, on verra ci-après que la matière d'un diélectrique, dans un champ électrique, subit des déformations mécaniques, devient biréfringente, etc. ; elle doit donc être considérée aussi comme faisant partie du milieu par lequel se transmettent les actions électriques. On est amené ainsi à envisager la troisième des hypothèses énumérées ci-dessus.

Le milieu étant ainsi composé, quels sont les rôles respectifs de l'éther et de la matière pondérable ? Au lieu de constater simple-

ment que leur ensemble est soumis à des tensions et pressions p , on peut se demander si la matière pondérable ne subit pas une fraction déterminée de ces efforts.

S'il en était ainsi, un tube de force exerçant une traction sur ses bases équipotentiellles et tendant, par suite, à se raccourcir de lui-même suivant les lignes de force, la matière pondérable devrait subir un raccourcissement suivant la même direction. Dans toute direction transversale, le tube de force exerçant au contraire une compression sur le milieu contigu et tendant, par suite, à se dilater de lui-même, la matière devrait subir également une dilatation.

Les dilatations et contractions relatives devraient évidemment être proportionnelles, comme les efforts, aux valeurs de p en chaque point du milieu.

Inversement on serait conduit, par analogie avec d'autres phénomènes physiques, à penser que des efforts mécaniques exercés sur un diélectrique seraient susceptibles de modifier ou même de développer un champ électrique dans certains cas. Sans nous arrêter plus longuement à émettre des hypothèses à ce sujet, nous allons passer en revue les principaux phénomènes expérimentaux capables de jeter quelque lumière sur cette question.

48. Dilatation électrique. — Lorsqu'on charge un condensateur à diélectrique solide, les armatures, en vertu de leur attraction réciproque, tendent à se rapprocher l'une de l'autre en comprimant le diélectrique, à moins qu'elles ne soient maintenues fixes. Si l'on ne considère que ces actions à *distance* entre les armatures, il semble donc que le volume du diélectrique doit se contracter lors de la charge du condensateur. Or, l'expérience a donné un résultat opposé.

Le phénomène de la dilatation électrique est connu depuis longtemps. En 1879, M. Duter, opérant sur une bouteille de Leyde dont les armatures intérieure et extérieure étaient des liquides et permettaient au verre de se dilater librement, trouva que la dilatation de ce diélectrique était proportionnelle au carré de la différence $(V-V')$ de potentiel des armatures et à l'inverse de

l'épaisseur e du verre¹. Cette dilatation serait donc proportionnelle à l'énergie électrique $W = \frac{S}{8\pi k e} (V-V')^2$ de la bouteille chargée.

Si l'épaisseur e de la bouteille de Leyde est très faible et uniforme, on peut admettre que le champ électrique et la dilatation sont également uniformes, et que la dilatation de l'unité de volume est, par suite, proportionnelle au quotient de l'énergie W par le volume Se . Or, ce quotient n'est autre chose que la valeur de la tension électrique p .

En admettant pour la compressibilité du verre la valeur 23×10^{-7} et pour son pouvoir inducteur spécifique un chiffre voisin de 4 (§21), on trouve que la dilatation totale du diélectrique dans une expérience de M. Duter est la même que si le verre était comprimé dans le sens des lignes de force et tendu transversalement par des tensions et pressions mécaniques peu inférieures à la valeur de la tension électrique p .

Quoi qu'il en soit, si les actions mécaniques en jeu dans la bouteille de Leyde se réduisaient à l'attraction réciproque des armatures, la lame isolante serait comprimée, et non dilatée comme on le constate expérimentalement. L'existence des forces transversales qui produisent la dilatation se trouve ainsi révélée d'une manière incontestable.

Du reste la dilatation transversale du diélectrique d'un condensateur a été constatée directement par M. Righi, qui l'a trouvée proportionnelle au carré de la différence de potentiel $(V-V')$ et à l'inverse du carré de l'épaisseur e , c'est-à-dire proportionnelle au carré de la force électrique $\frac{V-V'}{e}$ ou à p . Ce résultat a été confirmé par d'autres expérimentateurs². Il tend bien à démontrer l'existence de pressions transversales de la forme :

$$\alpha' p = \frac{\alpha'}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2$$

α' étant un coefficient de proportionnalité dépendant de la nature du milieu.

Nous signalerons toutefois des essais de théorie qui ont conduit

¹ *Journal de physique*, 1879.

² Voir P. CURIE, *Lumière électrique*, 1888, t. XXX, p. 423.

MM. Moutier ¹ et Duhem ² à représenter la dilatation électrique du diélectrique d'un condensateur par la formule $\frac{W}{3\varepsilon}$, dans laquelle W désigne, comme précédemment, l'énergie électrique potentielle et ε le coefficient de compressibilité. D'après M. Duhem, la dilatation aurait lieu même dans le sens des lignes de force.

49. *Biréfringence électrique.* — M. Kerr a découvert en 1880 ³, que certaines substances, telles que le verre, le sulfure de carbone, la térébenthine, etc., interposées comme diélectriques entre deux corps électrisés, se comportent comme des corps biréfringents à un axe, cet axe ayant en chaque point la direction des lignes de force électrique. En plaçant l'une de ces substances entre deux nicol croisés à angle droit, dont le second, par conséquent, éteint un rayon lumineux ayant traversé le premier, on voit la lumière réapparaître à la sortie aussitôt que l'électrisation est produite. Le diélectrique produit les mêmes effets de polarisation chromatique qu'un cristal biréfringent ou un verre comprimé, et dans les mêmes conditions d'orientation de l'axe par rapport au plan de polarisation du rayon lumineux. On peut d'ailleurs neutraliser l'effet du diélectrique au moyen d'un compensateur de Jamin ou de tout autre, ce qui permet de mesurer l'intensité de l'effet électro-optique, c'est-à-dire la différence de marche introduite entre le rayon ordinaire et l'extraordinaire.

M. Kerr a trouvé que l'effet électro-optique est proportionnel au carré de la différence de potentiel des électrodes entre lesquelles est placé le diélectrique. Dans le cas où celui-ci est solide, le même effet s'obtiendrait par une tension mécanique suivant l'axe de biréfringence que l'on veut obtenir et une pression transversale, ces forces étant proportionnelles à l'effet en question. Ce fait vient donc, avec la dilatation électrique, à l'appui de l'existence des tensions et pressions proportionnelles à $\left(\frac{dV}{dn}\right)^2$ ou à p . Mais ce qui confirme de la manière la plus frappante leur existence, c'est que la biréfringence électrique et, par suite, l'anisotropie se produisent dans les fluides : sulfure de carbone, etc., que par aucun

¹ *Bulletin de la Société philomatique*, 1878 et 1882.

² *Potentiel thermodynamique*, 1886.

³ *Philosophical Magazine*.

moyen mécanique on ne peut réussir à rendre anisotropes à l'état de repos. Et l'on ne peut pas objecter que, dans le cas des fluides, l'effet électro-optique est produit par l'éther et non par la matière pondérable, car cet effet ne peut être obtenu dans le vide.

Les diélectriques gazeux doivent être soumis à des actions analogues; mais celles-ci, en raison de leur faiblesse, sont beaucoup plus difficiles à constater. On n'a point signalé jusqu'ici des cas de biréfringence. Par contre, M. Quincke aurait observé une contraction produite par l'électrisation¹.

Nous reviendrons là-dessus au § 53.

50. Piézo-électricité. — MM. J. et P. Curie ont découvert² que si l'on comprime longitudinalement un prisme de tourmaline terminé par deux bases perpendiculaires à l'axe, l'une de ces bases s'électrise positivement et l'autre négativement. Cette électrisation peut être recueillie et mesurée à l'électromètre si les bases sont recouvertes de feuilles d'étain. Lorsqu'on maintient constante la différence de potentiel entre les bases, celles-ci dégagent des quantités q d'électricité égales au signe près et proportionnelles à l'effort exercé φ , soit :

$$q = a\varphi \quad (3)$$

a désignant une constante, dont la valeur ne dépend que des unités choisies. L'effort doit être considéré comme positif ou négatif, suivant qu'il s'agit d'une pression ou d'une traction, exercée sur les bases du cristal; c'est-à-dire qu'une même base dégagera des quantités égales et de signes contraires d'électricité si l'on exerce successivement une traction et une pression égales.

Le quartz et, en général, les cristaux doués de l'hémiédrie dissymétrique jouissent de propriétés semblables. Supposons un cristal de quartz taillé sous la forme d'un parallépipède rectangle, dont un côté l' est parallèle à la direction de l'axe optique et un autre e à une direction transversale dite de l'axe électrique. Une pression ou une traction exercée sur les bases perpendiculaires à

¹ *Journal de physique*.

² *Lumière électrique*, t. XXX, p. 465.

l'axe optique ne font apparaître aucune trace d'électrisation. Au contraire un effort φ exercé sur les bases perpendiculaires à l'axe électrique développe sur ces bases une électrisation représentée par la formule 3. Enfin sous l'action d'un effort ψ exercé sur les faces perpendiculaires aux axes optique et électrique, les mêmes bases normales à l'axe électrique dégagent des quantités d'électricité représentées par la formule :

$$q = -a \frac{l}{\sigma} \psi = -a \frac{S}{\sigma} \psi \quad (4)$$

en désignant par l le côté du parallépipède perpendiculaire aux deux axes, par S et σ les bases perpendiculaires aux arêtes e et l .

Les formules 3 et 4 montrent que, si l'on exerce successivement des efforts $\frac{\varphi}{S}$ et $\frac{\psi}{\sigma}$ égaux par unité de surface des bases S et σ , la densité électrique $\frac{q}{S}$ recueillie dans les deux cas sur l'une des bases S est la même au signe près.

MM. Curie ont trouvé qu'un effort de 1 kilogramme, soit 981,000 dynes, développe une quantité q d'électricité égale, dans le cas correspondant à la formule 3, à 0,053 unités électrostatiques C.G.S. pour la tourmaline et à 0,063 pour le quartz. Il en résulte :

$$a = \frac{0,053}{981,000} = 5.4 \times 10^{-8} \text{ électrost. C.G.S. (tourmaline)}$$

$$a = \dots = 6.4 \times 10^{-8} \quad \text{id} \quad (\text{quartz})$$

Nous ajouterons que les dimensions de la constante a sont $Q F^{-1}$ soit :

$$Q_s F^{-1} = L^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} T \text{ dans le système électrostatique.}$$

$$Q_m F^{-1} = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^2 \text{ dans le système électromagnétique}$$

En partant des expériences précédentes, M. Lippmann a montré qu'inversement si l'on électrise les bases S du cristal à l'aide d'une source extérieure, il doit en résulter des variations dans les dimensions e et l comme cela aurait lieu sous l'action d'efforts mécaniques exercés sur les bases S ou σ . La démonstration en sera donnée au § 53. Cette prévision de la théorie a été vérifiée expérimentalement par MM. Curie, qui ont fondé sur les propriétés

piézo-électriques du quartz le principe d'un nouvel électromètre.

On verra au § 53 comment ces phénomènes se rattachent au sujet traité dans les paragraphes précédents, notamment à la dilatation électrique, quoique les cristaux étudiés, tourmaline, quartz, etc., soient anisotropes et que, par conséquent, la loi de Coulomb et les propriétés qui en découlent ne leur soient point applicables.

51. Pyro-électricité.— Si l'on chauffe une baguette de tourmaline terminée par des bases perpendiculaires à l'axe, ces bases s'électrisent, et l'on obtient un courant en les recouvrant de feuilles d'étain et les réunissant par un fil conducteur. Gaugain a déterminé les lois de ces phénomènes dits *pyroélectriques*¹.

Les quantités d'électricité q dégagées par les deux bases, lorsque la température du cristal est portée de θ_1 à θ_2 , sont égales et de signes contraires, proportionnelles à la section S faite dans la baguette par un plan perpendiculaire à l'axe, sensiblement proportionnelles à $(\theta_2 - \theta_1)$ et indépendantes de la rapidité de variation de la température. Pour plus de rigueur, on écrira :

$$q = \alpha S [f(\theta_2) - f(\theta_1)] \quad (5)$$

Les phénomènes pyroélectriques se présentent également dans un certain nombre d'autres cristaux et paraissent liés à l'hémiédrie. La boracite, notamment, dont les cristaux sont formés, à la température ordinaire, de douze pyramides hémiedres orthorhombiques, et deviennent cubiques à partir de 265° , n'est pyroélectrique qu'au-dessous de 265° et donne d'ailleurs un dégagement abondant d'électricité lorsqu'on approche de cette température limite.

Un cristal de tourmaline chauffé et maintenu longtemps à sa nouvelle température perd peu à peu son électrisation. Ce phénomène est dû sans doute à la conductibilité du milieu ambiant, qui produit la décharge du cristal. On peut encore supposer, avec sir W. Thomson², que la variation de température détermine dans le

¹ *Annales de Chimie et de Physique*, 1859, t. LVII.

² *Philosophical Magazine*, 1878, t. V.

cristal une polarisation électrique semblable à celle qui est créée dans un diélectrique quelconque par un champ électrostatique. Cet état de polarisation se maintiendrait indéfiniment ; mais l'effet de la couche électrique ainsi développée à la surface du cristal serait annulé à l'extérieur par une couche égale et de signe contraire qui se formerait, à la longue, à la surface de contact du milieu ambiant en raison de la conductibilité de celui-ci. Cette considération sera développée au § 53.

52. Phénomènes électrocapillaires. — Considérons un condensateur dont le diélectrique a une épaisseur ϵ uniforme et extrêmement faible par rapport aux rayons de courbure de la surface S des

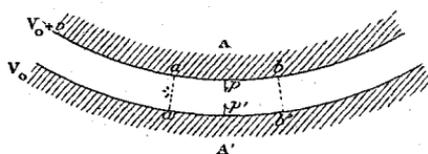


Fig. 21.

armatures. Si v désigne la différence de potentiel de ces armatures, la force électrique est sensiblement constante, égale à $\frac{v}{\epsilon}$ et dirigée suivant la normale à la surface S . Le milieu diélectrique subit par conséquent en chaque point une tension suivant la normale et des pressions tangentielles, ces tensions et pressions ayant pour valeur commune (45) :

$$p = \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 = \frac{v^2}{8\pi k \epsilon^2}$$

Deux parties contiguës du condensateur, dont la ligne de séparation est une courbe C (ab ou $a'b'$ sur la figure...) tracée sur la surface S , exercent ainsi l'une sur l'autre une pression tangentielle qui, par unité de longueur du contour C , est égale au produit $p\epsilon$ de la pression spécifique p par la surface de contact $1 \times \epsilon$. On a d'ailleurs :

$$p \epsilon = \frac{v^2}{8\pi k \epsilon} = A,$$

A , désignant l'énergie du condensateur par unité de surface

(§ 36). Ce coefficient A_v peut donc être appelé la *pression superficielle* développée par le champ sur la couche électrique.

Si une couche très mince du conducteur de chaque armature A et A' est adhérente à la couche diélectrique que limite le contour C , la couche complexe D ainsi composée est soumise à une pression superficielle A_v normale à C en tous les points de ce contour ; mais elle n'est soumise à aucune tension ou pression sur ses deux bases, puisque celles-ci sont comprises dans la masse du conducteur. La poussée totale qui s'exerce sur la couche complexe D sera donc la résultante des pressions superficielles A . Dans le cas où le contour C est infiniment petit, on démontre géométriquement que cette résultante est normale à la surface S et égale au produit de A_v , de la courbure de la surface S au point considéré et de l'aire embrassée par la courbe C . En désignant par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de S , la résultante en question sera donc, par unité de surface :

$$P = A_v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

On peut encore calculer la poussée P d'une autre manière, en remarquant que, dans la couche complexe D : 1° la couche diélectrique seule est en équilibre sous l'action des tensions et pressions qui s'exercent sur sa surface ; 2° chacune des couches minces conductrices subit sur sa face tournée vers le diélectrique une tension égale à p . Les valeurs ps et $p's'$ des tensions sur deux éléments s et s' pris en regard sur les deux faces du condensateur diffèrent d'ailleurs de $p\varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = P$, comme il est facile de s'en assurer en écrivant que le flux de force fs et, par suite, le produit ps^2 restent constants le long d'un tube de force :

$$\begin{aligned} ps - p's' &= ps^2 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} \right) \\ &= p\varepsilon s^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

P représente bien ainsi la poussée résultante par unité de surface sur la couche D . Elle est toujours dirigée dans le sens de la convexité de la surface (ou bien dans le sens opposé à celui du

plus petit des deux rayons de courbure R_1 et R_2 , au cas où la surface est à double courbure).

On imagine facilement comment on pourrait réaliser une couche diélectrique très mince entre deux conducteurs. Supposons, par exemple, que l'on ait superposé dans un tube vertical de petit diamètre du mercure et de l'eau séparés par une couche d'un liquide isolant, d'épaisseur uniforme aussi réduite que possible. Si l'on maintient entre l'eau et le mercure une différence de potentiel v , la couche diélectrique subira sur toute son étendue une pression superficielle $A_v = \frac{v^2}{8\pi k\varepsilon}$, ou, ce qui revient au même, une poussée normale égale à $A_v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ par unité de surface. Cette poussée tendra à accentuer la courbure que la couche prend toujours sous l'action des forces capillaires. La forme d'équilibre de cette couche résultera des actions en jeu, lesquelles sont la pesanteur, les forces capillaires et la pression superficielle A_v , qui peut être remplacée par la poussée normale $A_v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$.

La théorie montre et l'expérience confirme que les forces, dites capillaires, qui s'exercent, à la surface de séparation de deux corps différents, tels que l'eau et le mercure, l'eau et l'huile, etc., se réduisent soit à une *tension superficielle* A_0 tendant à contracter cette surface, soit à une poussée normale $A_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ tendant à diminuer sa courbure¹. Le coefficient A_0 est une constante dépendant de l'état physique des corps au contact. Les forces capillaires sont donc de même nature, *au signe près*, que celles que développe l'électrisation d'une couche mince dans l'exemple précédent. La composition de ces deux sortes de forces se fera simplement en supposant que la différence de potentiel v , maintenue entre l'eau et le mercure à travers la couche diélectrique, a pour effet de modifier la constante A_0 des actions capillaires dans cette couche complexe et de donner une tension superficielle résultante égale à :

$$A_0 - A_v = A_0 - \frac{v^2}{8\pi k\varepsilon}$$

Les actions développées par le champ électrique peuvent donc être appelées *électrocapillaires*.

¹ Voir Violle, *Cours de Physique*, t. I; Resal, *Physique mathématique*; Mathieu, *Théorie de la capillarité*.

Lorsque l'eau et le mercure sont directement au contact, au lieu d'être séparés par une substance diélectrique, on constate encore que l'on peut maintenir entre eux une différence de potentiel v variable à volonté entre certaines limites, et que cette différence de potentiel a pour effet de modifier les actions capillaires. Les lois des actions électrocapillaires ainsi produites ont été déterminées par M. Lippmann¹ ; elles sont semblables à celles que nous venons d'étudier. La tension superficielle A_0 est diminuée d'une valeur A , qui est sensiblement proportionnelle au carré de v dans des limites étendues, et qui dans tous les cas représente l'énergie électrique potentielle développée par unité d'aire sur la surface de séparation.

L'explication de ce phénomène paraît se rattacher tout naturellement à ce qui a été dit plus haut, si l'on attribue à la surface de séparation entre l'eau et le mercure une épaisseur, quelque minime qu'elle soit, de telle sorte que les deux corps sont en réalité séparés par une couche vide.

L'eau et le mercure forment alors un condensateur de capacité C , et la surface de séparation doit être le siège d'une pression superficielle A , égale à l'énergie électrique $\frac{1}{2} CV^2$ par unité d'aire. L'expression :

$$A = \frac{1}{2} CV^2 \quad (6)$$

est indépendante de l'épaisseur hypothétique de la couche vide. Il n'est pas nécessaire de supposer cette épaisseur uniforme ; il y a même tout lieu de croire qu'en raison de la discontinuité des molécules, la surface de chacun des deux corps est très accidentée.

L'hypothèse toute naturelle de la couche vide à la surface de contact de deux corps explique d'autres phénomènes. On voit, aux § 36 et 90, qu'à d'autres points de vue cette surface joue le rôle d'un condensateur, dont on peut mesurer la capacité C . La valeur de C pouvant se déduire d'autre part de l'observation des phénomènes électrocapillaires, il en résulte une vérification frappante.

¹ Lippmann, thèse pour le doctorat, *Annales de Chimie et de Physique*, 1875.

Nous reviendrons là-dessus à propos de l'électromètre capillaire de M. Lippmann (§ 91).

La surface de séparation de deux corps quelconques, diélectriques ou conducteurs, solides, liquides ou gazeux, est en général le siège d'une variation brusque de potentiel. Il doit donc s'y produire des actions électrocapillaires. Mais les effets de la variation brusque de potentiel peuvent être sensibles dans tout le champ lorsque les corps sont diélectriques. Toute surface à travers laquelle le potentiel subit une telle variation s'appelle un *feuillelet électrique*. La théorie des feuillelets sera développée aux §§ 122-123.

53. Application du principe de la conservation de l'énergie. — Le principe de la conservation de l'énergie permet, comme l'a montré M. Lippmann¹, d'établir des relations entre les diverses propriétés électriques d'un corps et de prévoir certaines de ces propriétés lorsque les autres ont été déjà étudiées expérimentalement. Nous en ferons une application aux questions traitées dans les paragraphes précédents.

1° *Contraction électrique des gaz.* — Considérons un condensateur ayant pour diélectrique un gaz, qui communique par un orifice avec l'atmosphère extérieure. Soient : u le volume du gaz, p la pression extérieure, q la charge du condensateur, V la différence de potentiel des armatures. Si, au moyen d'une source électrique quelconque on accroît de dq la charge du condensateur, l'énergie W de celui-ci s'accroît de Vdq . D'autre part, une dilatation du de la masse gazeuse donnera lieu à un travail extérieur (ou perte d'énergie interne) égal à pdu . En supposant que pendant ces transformations il n'y ait pas de variation de force vive, ni d'échange de chaleur entre le diélectrique et l'extérieur, la variation de l'énergie W se réduira à :

$$dW = Vdq - pdu$$

Deux des quantités q , u , V et p étant considérées comme variables indépendantes, les deux autres, ainsi que l'énergie W ,

¹ Voir : Lippmann, *Journal de Physique*, 1881.

seront des fonctions de celles-là; dW doit donc être une différentielle totale exacte. Si, par exemple, on prend q et u comme variables indépendantes, V et $-p$ représenteront les dérivées partielles de W . Il en résulte la condition :

$$\frac{\partial V}{\partial u} = - \frac{\partial p}{\partial q}$$

Cette relation s'interprète aisément, si l'on remarque : 1° que $\frac{\partial V}{\partial u}$ représente l'accroissement de la différence de potentiels V lorsque le volume u s'accroît d'une unité, la charge q restant constante; 2° que $\frac{\partial p}{\partial q}$ est l'accroissement de pression résultant d'un surcroît de charge q' égal à l'unité, le volume u restant constant. Or, $\frac{\partial V}{\partial u}$ est positif, puisque le pouvoir inducteur spécifique μ diminue quand on raréfie le gaz. Donc $\frac{\partial p}{\partial q}$ est négatif; c'est-à-dire que la pression du gaz à volume constant diminue lorsqu'on charge le condensateur.

On peut exprimer la même relation d'une autre manière. Écrivons :

$$dW = d(Vq - pu) - qdV + udp$$

$(-q dV + u dp)$ doit évidemment être une différentielle totale exacte. On en déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial V} = - \frac{\partial q}{\partial p}$$

en prenant V et p pour variables indépendantes. Comme on sait qu'à différence de potentiel V constante la charge q s'accroît avec la pression p , il en résulte que $\frac{\partial u}{\partial V}$ est négatif, c'est-à-dire qu'à pression constante le volume u du gaz se contracte lorsqu'on accroît la charge du condensateur. On peut même calculer la contraction $(-du)$ du gaz pour une charge déterminée. D'après les expériences de Boltzmann (§ 20), on a, γ désignant une constante pour chaque gaz, et C_0 la capacité du condensateur dans le vide :

$$q = \mu C_0 V = C_0 (1 + \gamma p) V$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial V} = - \frac{\partial q}{\partial p} = - \gamma C_0 V$$

et, en intégrant :

$$\delta u = - \frac{1}{2} \gamma C_0 V^2 = - \frac{\mu - 1}{p} \frac{C_0 V^2}{2}$$

ou :

$$\delta u = - \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) W \quad (7)$$

W désignant l'énergie électrique du condensateur chargé.

Il s'agit ici de la contraction électrique ($- du$) sans échange de chaleur entre le gaz et l'extérieur. Le calcul de la contraction à température constante se ferait aisément. Mais il y a lieu de remarquer que, à cause de l'instantanéité de la charge électrique du condensateur, la variation immédiate de volume qui doit se produire est donnée par la formule (7). Toutefois le raisonnement que nous venons de faire comporte une restriction ; car la rapidité des variations de pression dues à la charge du condensateur donne lieu à un développement de force vive des gaz intérieur et extérieur, dont nous n'avons pas tenu compte dans le calcul de dW .

2° *Condensateur à lame solide.* — Considérons un condensateur plan de surface rectangulaire. Soient : e l'épaisseur, l l'un des côtés du rectangle, φ et ψ des tractions mécaniques exercées respectivement sur les bases normales à l'épaisseur e et sur les faces latérales normales au côté l . Nous supposons que les armatures ne sont point adhérentes et ne s'opposent point aux variations de dimensions du diélectrique. Dans ces conditions, si les dimensions e et l subissent des variations de et dl , les forces φ et ψ produisent un travail ($\varphi de + \psi dl$), qui accroît l'énergie du condensateur. D'autre part, si la charge q s'accroît de dq sous une différence de potentiel V , W s'accroît encore de $V dq$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} dW &= Vdq + \varphi de + \psi dl \\ &= d(Vq + \varphi e + \psi l) - (qdV + ed\varphi + ld\psi) \end{aligned}$$

Suivant que l'on prend comme variables indépendantes q, e, l , ou V, φ, ψ ... on trouvera, en exprimant que dW est une différentielle totale exacte, les relations :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{de} = \frac{d\varphi}{dq} \quad \text{ou} \quad \frac{de}{dV} = \frac{dq}{d\varphi} \\ \frac{dV}{dl} = \frac{d\psi}{dq} \quad \text{ou} \quad \frac{dl}{dV} = \frac{dq}{d\psi} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Le fait de la dilatation transversale ($\frac{dl}{dV} > 0$) et de la contraction longitudinale ($\frac{de}{dV} < 0$) du diélectrique sous l'action de la charge q étant considéré comme démontré par l'expérience, il en résulte que, à différence de potentiel V constante, la charge q s'accroît avec la tension transversale ($\frac{dq}{d\psi} > 0$) et décroît quand la tension longitudinale augmente ou que la pression longitudinale diminue ($\frac{dq}{d\varphi} < 0$).

Posons :

$$q = \mu C_0 V$$

μ désignant le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique, C_0 la capacité électrostatique du condensateur en supposant le diélectrique remplacé par le vide ($\mu = 1$). C_0 dépend seulement des dimensions du diélectrique interposé entre les armatures et varie, comme ces dimensions, avec les tensions φ et ψ ; les dérivées $\frac{dC_0}{d\varphi}$ et $\frac{dC_0}{d\psi}$ peuvent se calculer facilement si l'on connaît les coefficients d'élasticité et de contraction latérale de la substance. Le pouvoir inducteur μ varie aussi avec φ et ψ ; il n'y a pas de raison d'ailleurs pour que $\frac{d\mu}{d\varphi}$ et $\frac{d\mu}{d\psi}$ soient égaux, c'est-à-dire pour que des tensions égales exercées soit dans le sens des lignes de force, soit transversalement, produisent des variations égales de μ . On peut écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq}{d\varphi} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\varphi} + \frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{d\varphi} \right) q = -\alpha \mu C_0 V \\ \frac{dq}{d\psi} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\psi} + \frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{d\psi} \right) q = \beta \mu C_0 V \end{aligned} \right. \quad (9)$$

α et β étant des coefficients sensiblement constants dans des limites

plus ou moins étendus. Les formules (8) donnent donc pour les contraction et dilatation électriques :

$$\left. \begin{aligned} \delta e &= \int \frac{\partial e}{\partial V} dV = -\frac{1}{2} \alpha \mu C_0 V^2 = -\alpha W \\ \delta l &= \beta W \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

On retrouve ainsi théoriquement ce fait expérimental (§ 48), que la variation des dimensions est proportionnelle à l'énergie ($W = \int p \, du$) du condensateur et, par conséquent, aux tensions et pressions p développées par le champ électrique.

Les formules (9) montrent que, lorsqu'un champ électrique a été développé préalablement par la charge du condensateur, c'est-à-dire quand le diélectrique est déjà dans un état de *polarisation électrique*, un effort mécanique φ ou ψ suffit pour déterminer, à différence de potentiel constante, une variation de la charge des armatures proportionnelle à cet effort, comme dans le cas des phénomènes piézo-électriques (§ 50).

Nous avons supposé, dans ce qui précède, qu'il n'y a pas échange de chaleur entre le diélectrique et l'extérieur. Dans ces conditions, l'électrisation du condensateur et les efforts mécaniques φ et ψ peuvent faire varier la température du diélectrique. Si l'on veut, au contraire, maintenir constante la température, les résultats sont modifiés comme il suit. Si les variables V , φ , ψ et la température θ varient de dV , $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, la variation de W considérée plus haut, soit :

$$Vdq + \varphi de + \psi dl$$

s'accroît de la quantité de chaleur (évaluée en unités mécaniques) cédée par les corps voisins et dont l'expression est de la forme générale :

$$dQ = cd\theta + hdV + jd\varphi + kd\psi$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} dW &= (V dq + \varphi de + \psi dl) + dQ \\ &= d(Vq + \varphi e + \psi l) + cd\theta + (h - q) dV + (j - e) d\varphi + (k - l) d\psi \end{aligned}$$

dW devant être encore une différentielle totale exacte, on en déduit six relations distinctes, dont trois seulement sont intéressantes au point de vue des propriétés électriques :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc}{dV} &= \frac{dh}{d\theta} - \frac{dq}{d\theta} \\ \frac{dj}{dV} - \frac{de}{dV} &= \frac{dh}{d\varphi} - \frac{dq}{d\varphi} \\ \frac{dk}{dV} - \frac{dl}{dV} &= \frac{dh}{d\psi} - \frac{dq}{d\psi} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ces relations paraissent peu susceptibles de vérifications expérimentales, à cause de la faiblesse des effets à mesurer. Du reste, la rapidité de la charge du condensateur peut déterminer des vibrations, qui absorbent une certaine force vive et dont nous n'avons pas tenu compte. En outre, les phénomènes de charge résiduelle (§ 21) et de conductibilité du diélectrique viendraient sans doute fausser les résultats. Nous reviendrons là-dessus au § 54.

3° *Phénomènes piézo-électriques.* — Considérons une lame de quartz en forme de parallépipède rectangle, dont les côtés l' , e , l , sont respectivement parallèle à l'axe optique, parallèle à l'axe électrique et perpendiculaire aux deux directions précédentes. Supposons des tractions ψ' , φ et ψ appliquées sur les bases normales aux arêtes l' , e et l , les bases normales à l'axe électrique e étant recouvertes de feuilles métalliques et reliées aux armatures d'un condensateur extérieur. Si ce condensateur absorbe une charge dq sous la différence de potentiel V , en même temps que les dimensions l' , e et l subissent des allongements dl' , de et dl , il en résulte pour la lame de quartz un accroissement d'énergie égal à :

$$\begin{aligned} dW &= -Vdq + \varphi de + \psi dl + \psi' dl' \\ &= -d(qV) + qdV + \varphi de + \psi dl + \psi' dl' \end{aligned}$$

en supposant qu'il n'y ait pas de force vive créée et qu'aucun échange de chaleur ne se produise entre le cristal et les corps

environnants. On en déduit diverses relations, dont six seulement sont distinctes. En voici quelques-unes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de}{dV} = -\frac{dq}{d\varphi} \\ \frac{dl}{dV} = -\frac{dq}{d\psi} \\ \frac{dl'}{dV} \parallel -\frac{dq}{d\psi'} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{dq} = -\frac{dV}{de} \\ \frac{d\psi}{dq} = -\frac{dV}{dl} \\ \frac{d\psi'}{dq} = -\frac{dV}{dl'} \end{array} \right. \quad (12)$$

Si l'on exerce une tension φ sur les bases normales à l'axe électrique e , l'une de ces bases cède une charge positive q à l'armature correspondante du condensateur. Pour cette base, $\frac{dq}{d\varphi}$ est positif et, par suite, $\frac{de}{dV}$ est négatif; donc, si l'on vient à accroître son potentiel, à traction constante φ , en la chargeant positivement au moyen d'une source électrique extérieure, l'axe e se contractera. L'expérience montrant que $\frac{dq}{d\psi}$ est de signe contraire, en même temps que le cristal se raccourcit dans la direction du côté e , il doit s'allonger suivant la direction du côté l . Enfin comme $\frac{dq}{d\psi'}$ est nul, il en est de même de $\frac{dl'}{dV}$, c'est-à-dire que l'électrisation du cristal ne fait pas varier ses dimensions parallèlement à l'axe optique.

On sait d'ailleurs que les décharges q sous l'action des tractions φ et ψ sont respectivement $a\varphi$ et $-a\frac{l}{e}\psi$ (formules 3 et 4), a désignant une constante. Il en résulte que les variations des longueurs e et l lorsque V s'accroît de dV , à tractions φ et ψ constantes, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta e = -a\delta V \\ \delta l = +a\frac{l}{e}\delta V \end{array} \right. \quad (13)$$

Pour un accroissement donné δV , la contraction du cristal suivant l'épaisseur e est, comme on le voit, indépendante de ses dimensions; elle est pratiquement trop faible pour être mise en évidence. Quant à l'allongement δl , on peut l'amplifier beaucoup en prenant l'épaisseur e très faible et la longueur l assez grande. Il est à remarquer que la somme $(l\delta e + e\delta l)$ est nulle, c'est-à-dire que l'électrisation du cristal ne fait point varier son volume lle .

D'après la valeur trouvée par MM. Curie pour le coefficient α du quartz (§ 50), on a :

$$\begin{aligned} \delta e &= -2,1 \times 10^{-10} \delta V \text{ centimètres} \\ \delta l &= +2,1 \times 10^{-10} \frac{l}{c} \delta V \quad - \quad \left. \begin{array}{l} \text{V étant évalué} \\ \text{en volts} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi pour $\delta V = 20,000$ volts et $\frac{l}{c} = 100$, la variation d'épaisseur n'est que $\frac{2c, 1}{1,000,000}$; celle de la longueur l est $0^{\text{mm}},0021$.

4° *Phénomènes pyro-électriques.* — Si dans l'étude précédente on veut tenir compte des échanges de chaleur entre le cristal et les corps environnants, on doit, à l'expression ($-V dq + \varphi de + \psi dl + \psi' dl'$) trouvée pour la variation dW d'énergie, ajouter la quantité de chaleur :

$$dQ = cd\theta + hdV + jd\varphi + kd\psi + k'd\psi'$$

absorbée par le cristal. On aura alors :

$$\begin{aligned} dW &= d(-Vq + \varphi e + \psi l + \psi' l') \\ &+ cd\theta + (h + q) dV + (j - e) d\varphi + (k - l) d\psi + (k' - l') d\psi' \end{aligned}$$

En exprimant que dW est une différentielle totale exacte, on trouvera des relations nouvelles dans lesquelles entrera la température θ . La seule qui nous intéresse au point de vue électrique est la suivante :

$$\frac{dc}{dV} = \frac{dh}{d\theta} + \frac{dq}{d\theta}$$

Si le cristal dégage de l'électricité quand on le chauffe, $\frac{dq}{d\theta}$ n'étant pas nul, on doit admettre que la chaleur spécifique c dépend du potentiel V , c'est-à-dire de l'état électrique de la substance ; ou bien que le coefficient h n'est pas nul, c'est-à-dire que l'électrisation du cristal ferait varier sa température s'il n'échangeait pas de chaleur avec le milieu ambiant.

L'étude expérimentale des coefficients $\frac{dc}{dV}$ et $\frac{dh}{d\theta}$ n'ayant pas été faite jusqu'ici, la relation précédente présente actuellement peu d'intérêt.

5° *Phénomènes électrocapillaires.* — Nous signalerons encore une application du principe de la conservation de l'énergie aux phénomènes électrocapillaires, faite par M. Lippmann. Les résultats indiqués par la théorie ne sont autres que ceux qui ont été trouvés au § 52.

54. Application du principe de Carnot. — On démontre en Thermodynamique que lorsqu'un corps décrit un cycle fermé réversible, l'intégrale $\int \frac{dQ}{\theta}$ relative à ce cycle est nulle, dQ désignant la quantité de chaleur fournie au corps pendant une fraction infiniment petite de la durée du cycle et θ la température absolue du corps à l'époque où lui est fournie cette quantité dQ :

$$\int \frac{dQ}{\theta} = 0 \quad (14)$$

Telle est la forme donnée par Clausius au principe de Carnot. L'application de ce principe va nous permettre d'ajouter de nouvelles relations à celles qui ont été trouvées ci-dessus entre les diverses propriétés d'un diélectrique.

Pour fixer les idées, prenons comme exemple le condensateur à lame solide (§ 53, 2°), et supposons qu'il subisse la série suivante de transformations. Il sera soumis à des efforts mécaniques graduellement croissants ou décroissants sur ses bases. En même temps, à l'aide d'une source électrique extérieure, on fera croître ou décroître sa charge, et le milieu ambiant lui cédera ou lui empruntera de la chaleur. Lorsque le condensateur repassera par son état primitif, il aura décrit un cycle fermé. On dira que ce cycle est réversible si les mêmes transformations peuvent être répétées rigoureusement en sens inverse. Plusieurs causes, que nous allons énumérer, s'opposeront en général à la réversibilité du cycle.

Si la charge du condensateur est rapide, ou si la compression du diélectrique est brusque, il en résultera un choc ou ébranlement et une variation brusque de la température du corps. L'ébranlement communiquera au corps et au milieu ambiant une certaine force vive aux dépens de l'énergie élastique ou électrique dépensée; en décrivant le cycle inverse, il n'y aura pas une force vive empruntée au corps ou au milieu et transformée en énergie élastique ou

électrique; au contraire l'ébranlement inverse accroîtra en général la force vive au lieu de la réduire. De même, une variation finie $(\theta_2 - \theta_1)$, positive par exemple, de la température du corps venant à se produire, celui-ci cédera de la chaleur au milieu ambiant, soit dans le cycle direct, soit dans le cycle inverse, en vertu de cette différence finie $(\theta_2 - \theta_1)$ de température. On voit ainsi qu'une des conditions de la réversibilité est que les variations d'efforts mécaniques et de charge du condensateur soient infiniment lentes; pratiquement il suffira que ces variations soient assez lentes pour que les effets que nous venons de signaler soient négligeables.

Une autre condition nécessaire de la réversibilité du cycle est que le diélectrique soit parfaitement isolant. S'il ne l'est pas, en effet, les déperditions de charge, soit dans le cycle direct, soit dans le cycle inverse, dégagent toujours de la chaleur, au lieu d'en absorber dans un cas et d'en dégager dans l'autre.

Il est clair également que le diélectrique ne doit point présenter le phénomène de la charge résiduelle, qui est irréversible. D'ailleurs, lorsque ce phénomène existe, la charge du condensateur n'est plus fonction seulement de la différence de potentiel, de la température et des efforts mécaniques; elle dépend alors du temps suivant une loi inconnue.

En résumé, avant d'appliquer en pratique le raisonnement et les résultats ci-après à un cas déterminé, on fera bien de s'assurer que les conditions de réversibilité sont suffisamment remplies.

Ces réserves faites, nous remarquerons qu'il résulte de l'équation (14) que $\frac{dQ}{\theta}$ doit être une différentielle totale exacte. Comme on a, dans le cas du condensateur à lames solides :

$$\frac{dQ}{\theta} = \frac{c}{\theta} d\theta + \frac{h}{\theta} dV + \frac{j}{\theta} d\varphi + \frac{k}{\theta} d\psi$$

on en déduit diverses relations, dont nous n'écrivons que les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dV} \left(\frac{c}{\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{\theta} \right) \\ \frac{d}{dV} \left(\frac{j}{\theta} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{h}{\theta} \right) \\ \frac{d}{dV} \left(\frac{k}{\theta} \right) = \frac{d}{d\psi} \left(\frac{h}{\theta} \right) \end{array} \right.$$

Ces équations, développées et combinées avec le groupe (11), conduisent aux relations plus simples :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \theta \frac{dq}{d\theta} \\ \frac{dc}{dV} = \theta \frac{d^2q}{d\theta^2} \\ \frac{de}{dV} = \frac{dq}{d\varphi} \\ \frac{dl}{dV} = \frac{dq}{d\psi} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \quad (15)$$

On retrouve ainsi en particulier les formules (8), qui sont vraies aussi bien pour les transformations à température constante que pour celles à chaleur constante.

Lorsque la température est maintenue constante pendant la charge, le diélectrique emprunte au milieu ambiant une quantité de chaleur $Q = \int h dV$. Or, de la relation :

$$q = \mu C_0 V$$

où μ désigne le pouvoir inducteur spécifique et C_0 la capacité qu'aurait le condensateur si μ était égal à 1, on tire :

$$\frac{dq}{d\theta} = \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} + \frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{d\theta} \right) q$$

En remplaçant q par $\mu C_0 V$, et remarquant que la parenthèse a une valeur sensiblement indépendante de V en pratique, on aura :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^V \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} + \frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{d\theta} \right) \mu C_0 V dV \\ &= \theta \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} + \frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{d\theta} \right) \frac{\mu C_0 V^2}{2} \end{aligned}$$

ou :

$$Q = \theta \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{d\theta} + \frac{1}{C_0} \frac{dC_0}{d\theta} \right) W \quad (16)$$

Le diélectrique emprunte donc au milieu ambiant une quantité de chaleur proportionnelle à son énergie électrique W .

C_0 étant proportionnel aux dimensions linéaires, $\frac{1}{C_0}, \frac{dC_0}{d\theta}$ n'est autre chose que le coefficient de dilatation linéaire de la substance diélectrique. D'autre part la variation $\frac{d\mu}{d\theta}$ du pouvoir inducteur spécifique avec la température étant connue pour certaines substances, et la quantité Q de chaleur étant susceptible d'être mesurée au calorimètre, il résulte de là une vérification expérimentale possible de la formule (16). Nous nous bornerons à cette indication, n'ayant aucun chiffre à citer à l'appui.

DEUXIÈME PARTIE

ÉLECTROKINÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

LOIS DU COURANT ÉLECTRIQUE — CONDUCTEURS LINÉAIRES

55. **Définition du courant.** — Si deux corps électrisés aux potentiels V_1 et V_2 viennent à être reliés par un fil conducteur, celui qui a le potentiel le plus élevé V_1 cède une partie de sa charge, qui se retrouve intégralement sur le corps V_2 et sur le fil de communication. Ce phénomène a en général une durée très courte, au bout de laquelle l'équilibre électrostatique s'établit. On dit qu'il s'est produit un courant électrique allant du corps V_1 au corps V_2 , comme s'il y avait eu un transport d'électricité, semblable à un transport de matière, entre V_1 et V_2 .

En choisissant convenablement le fil conducteur, on peut rendre le phénomène très lent, de manière à suivre, au moyen d'un électromètre, les variations de potentiels, soit sur les corps en question, soit aux divers points du conducteur intermédiaire. Autant que l'expérience permet de le constater, la quantité totale d'électricité répandue sur l'ensemble des deux corps et du fil à un instant quelconque reste constante. Si, par conséquent, on considère une section S du fil divisant cet ensemble en deux parties A et B , la quantité q qui a disparu du côté A pendant le temps t se retrouve du côté B au bout du même temps. Tout se passe comme

si cette quantité q , pour passer de A sur B, devait traverser la section S.

Le passage de la quantité q d'électricité à travers la section S peut être accusé autrement que par les effets électrostatiques. Supposons, par exemple, que l'on ait intercalé en S sur le fil conducteur un voltamètre à sulfate de cuivre. On constate expérimentalement qu'à chaque quantité q ayant passé du côté A au côté B, correspond un poids ϖ de cuivre qui a disparu dans le même temps de l'électrode par où le courant arrive dans le voltamètre et a été déposé sur l'électrode par où sort le courant (§ 86). Le rapport $\frac{\varpi}{q}$ est constant; il ne dépend ni des charges des conducteurs, ni de leur forme, etc.

On donne au rapport $\frac{q}{t}$ le nom d'intensité moyenne du courant à travers la section S pendant le temps t ; et l'on appelle intensité du courant, à un instant quelconque, la quantité $\frac{dq}{dt} = i$ qui traverse cette section dans l'unité de temps. Le phénomène précédent justifie cette définition. D'ailleurs le passage du courant se manifeste encore de plusieurs autres manières, notamment par son action sur une aiguille aimantée, à laquelle il imprime dans l'unité de temps une impulsion proportionnelle à $\frac{dq}{dt}$, comme on le constate au moyen d'un galvanomètre.

56. Conductibilité. Résistance. — Lorsque les deux corps électrisés aux potentiels V_1 et V_2 ont une capacité suffisamment grande, ou que le fil de jonction est convenablement choisi, l'équilibre électrique ne s'établit qu'avec une lenteur extrême. Le potentiel reste sensiblement constant, pendant un temps fini, soit sur chacun des corps, soit en un point quelconque du fil, et le courant affecte un caractère *permanent*.

Si la capacité électrostatique du fil est négligeable, sa charge ne s'accroît pas sensiblement, et il en résulte que l'intensité i est la même à travers toute section du fil.

Dès lors, si l'on admet que l'intensité i ne dépend que de la différence des potentiels V_1 et V_2 , soit : $i = f(V_1 - V_2)$, comme d'autre part, en multipliant par n les charges et les densités électriques on multiplierait par le même facteur n les potentiels

V_1 , V_2 , la quantité q et, par suite, la différence $(V_1 - V_2)$ et l'intensité $\frac{dq}{dt}$, il en résulte que la fonction $f(V_1 - V_2)$ se réduirait à :

$$i = K (V_1 - V_2)$$

K désignant une constante qui ne dépend que de la nature du fil conducteur, de sa forme et de ses dimensions. Il paraît du moins naturel, d'après nos seules connaissances d'électrostatique, qu'il en soit ainsi.

La loi précédente paraîtrait plus rigoureuse dans le cas où les potentiels V_1 et V_2 seraient maintenus absolument constants aux extrémités du fil conducteur considéré, par exemple, au moyen d'une pile hydro ou thermoélectrique. Toutefois elle est en défaut dans un grand nombre de cas ; et nous verrons par la suite que le rapport $\frac{i}{V_1 - V_2} = K$ n'est indépendant de i et de $(V_1 - V_2)$ que dans un cas particulier : celui où le courant est permanent, où le fil est homogène et à température constante et ne se trouve pas dans un champ magnétique variable. Dans ce cas l'expérience montre que le rapport K est constant, au moins dans les limites de précision des mesures, c'est-à-dire à $\frac{1}{400,000}$ près.

Le coefficient C s'appelle la *conductibilité électrique* du fil en question ; son inverse R s'appelle sa *résistance électrique*. On peut poser indifféremment :

$$i = K (V_1 - V_2) \quad (1)$$

ou :

$$V_1 - V_2 = R i \quad (2)$$

Le potentiel varie, le long du fil traversé par le courant, entre les valeurs extrêmes V_1 et V_2 . Les potentiels en deux points quelconques a et b du fil étant V_a et V_b , le rapport $\frac{V_a - V_b}{i} = R_{ab}$ sera constant dans les mêmes conditions que le rapport $\frac{V_1 - V_2}{i} = R$. R_{ab} est la résistance de la partie ab du fil, et l'inverse $\frac{1}{R_{ab}} = K_{ab}$ est sa conductibilité.

57. Conducteurs en série, en dérivation. — Si un fil ah (fig. 22) traversé par un courant d'intensité i se compose de plusieurs

fil ab , bc ,... gh , ajoutés bout à bout et dont les résistances respectives sont r_{ab} , r_{bc} ,... r_{gh} , on a par définition :

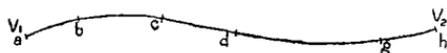


Fig. 22.

$$\begin{aligned} V_a - V_b &= r_{ab} i \\ V_b - V_c &= r_{bc} i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ V_g - V_h &= r_{gh} i \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant membre à membre ces égalités :

$$V_a - V_h = (r_{ab} + r_{bc} + \dots + r_{gh}) i$$

Comme la résistance R du fil est définie par la condition : $V_a - V_h = Ri$, il en résulte que R est la somme des résistances r_{ab} , r_{bc} ,... r_{gh} disposées en série :

$$R = \Sigma r \quad (3)$$

Dans le cas où l'on a, au contraire, des fils de résistances r' , r'' ,... disposés en dérivation ou en arcs parallèles entre deux points aux potentiels V_1 et V_2 (fig. 23), les intensités des courants qui parcourent ces divers fils sont :

$$i' = \frac{1}{r'} (V_1 - V_2)$$

$$i'' = \frac{1}{r''} (V_1 - V_2)$$

⋮

d'où, en ajoutant membre à membre ces égalités :

$$i' + i'' + \dots = \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \dots \right) (V_1 - V_2)$$

Mais la quantité totale d'électricité qui passe de V_1 en V_2 dans l'unité de temps, c'est-à-dire l'intensité totale i du courant entre ces deux points, est égale à la somme $(i' + i'' + \dots)$ des quantités qui passent de V_1 en V_2 par les divers conducteurs r' , r'' ,... :

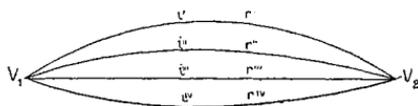


Fig. 23.

$$i = i' + i'' + \dots = \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \dots \right) (V_1 - V_2)$$

D'autre part, par définition, le rapport $\frac{V_1 - V_2}{i} = R$ est la résistance de l'ensemble de ces conducteurs. On trouve donc pour l'expression de R :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \dots = \Sigma \frac{1}{r}. \quad (4)$$

On peut exprimer ce résultat en disant que la conductibilité totale de conducteurs en dérivation est égale à la somme des conductibilités de chacun d'eux.

Si deux des fils tels que r' et r'' viennent à se toucher en des points qui étaient à des potentiels différents, le contact rétablit forcément l'égalité des potentiels en ces points. Le régime du courant sera donc troublé, et les formules précédentes ne seront plus applicables. Mais rien ne serait changé par le contact entre des points primitivement au même potentiel.

58. Résistance, conductibilité spécifiques. — Un fil cylindrique ou prismatique, en matière homogène, de longueur l et de section S peut être considéré comme composé de S fils prismatiques de section égale à l'unité, juxtaposés en arcs parallèles, chacun d'eux se composant de l fils de longueur 1 ajoutés bout à bout. La résistance R du fil donné est donc proportionnelle à l en vertu de l'équation (3), et inversement proportionnelle à S en vertu de l'équation (4), et l'on peut écrire :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (5)$$

Le coefficient ρ , représentant la résistance d'un prisme de longueur 1 et de section 1 ($l=1, S=1$), est dit *la résistance spécifique* de la matière, du fil *par unité de volume*. — Le coefficient inverse $\frac{1}{\rho} = \kappa$ est la *conductibilité spécifique* par unité de volume.

Soit P la masse du fil, δ sa densité. On a : $P = sl \delta$, d'où :

$$R = \rho \delta \frac{l^2}{P} = \varpi \frac{l^2}{P} \quad (6)$$

Le coefficient $\varpi = \rho \delta$ est la résistance d'un prisme de même

matière, de longueur 1 et de masse 1 ($l = 1$, $P = 1$). On l'appelle la *résistance spécifique par unité de masse*.

59. Dimensions des quantités précédentes. — Les dimensions de la quantité Q d'électricité et du potentiel V ont été données déjà en Electrostatique. Celles de l'intensité i se déduiront de la définition $i = \frac{q}{t}$ ou, plus généralement, $i = \frac{dq}{dt}$. Celles de la résistance R , de la conductibilité K , de la résistance spécifique ρ seront données respectivement par les relations (2), (1), et (5). Enfin on calculera celles de α et de ω par les relations : $\alpha = \frac{1}{\rho}$ et $\omega = \rho \delta$. On forme ainsi le tableau suivant, dans les systèmes électrostatique et électromagnétique :

$Q_s = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$Q_m = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
$V_s = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$V_m = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
$I_s = Q_s T^{-1} = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$I_m = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
$R_s = V_s I_s^{-1} = L^{-1} T$	$R_m = L T^{-1}$
$K_s = R_s^{-1} = L T^{-1}$	$K_m = L^{-1} T$
$\rho_s = R_s S L^{-1} = T$	$\rho_m = L^2 T^{-1}$
$\alpha_s = \rho_s^{-1} = T^{-1}$	$\alpha_m = L^{-2} T$
$\omega_s = \rho_s (M L^{-3}) = L^{-3} M T$	$\omega_m = L^{-1} M T^{-1}$

(Ne pas confondre la conductibilité K avec le coefficient désigné par la même lettre en Electrostatique et qui est l'inverse du pouvoir inducteur spécifique.)

60. Résistance spécifique de divers corps. — La résistance électrique spécifique des métaux est assez bien déterminée en général lorsqu'ils sont purs ou alliés dans des proportions parfaitement définies. Mais les moindres traces d'impuretés font varier très notablement cette résistance, surtout pour les meilleurs conducteurs, tels que l'argent et le cuivre. Aussi les chiffres trouvés anciennement sur des métaux mal purifiés s'écartent-ils beaucoup de ceux qu'ont fournis des méthodes récentes plus parfaites. Même lorsqu'un métal est pur, sa résistance varie avec la température (§ 61), avec le travail qu'il a subi (écrouissage), etc.

Pour un fil d'un métal déterminé, de cuivre par exemple, la connaissance de la résistance spécifique ρ par unité de volume n'en-

traîne pas forcément celle de la résistance $\varpi = \rho \delta$ par unité de masse, car la densité δ n'est point absolument fixe et est même sujette à des variations importantes, suivant le mode de préparation¹.

Ainsi, quand on reçoit dans une usine un fil télégraphique en cuivre, ce qu'on mesure, c'est le poids Pg d'une longueur l (100 mètres par exemple) et sa résistance R . Des valeurs de l et P on déduit celle du diamètre d dont la détermination directe serait plus sujette à erreur. La résistance spécifique que l'on peut en déduire sûrement est celle ϖ par unité de masse. Mais comme on préfère déterminer la résistance spécifique ρ par unité de volume, il faudrait employer la formule $\rho = \frac{\varpi}{\delta}$ en donnant à δ une valeur constante $\delta_0 = 8,9$ de telle sorte que si en réalité δ est supérieur à δ_0 , la résistance calculée ρ pèche par excès.

En pratique, au lieu de calculer la conductibilité absolue κ , on demande ordinairement la conductibilité rapportée à celle de l'argent (le meilleur conducteur), ou du cuivre (plus employé usuellement), ou du mercure (servant, à cause de sa fixité, à construire des étalons) ou même du métal pur. Il suffit de connaître celles-ci pour avoir la conductibilité relative désirée.

Quand on compare la conductibilité d'un métal impur à celle du même métal pur, on se sert à cet effet d'un étalon de ce métal supposé parfait. Les étalons en réalité sont plus ou moins impurs, surtout ceux de construction ancienne. Aussi arrive-t-on quelquefois à trouver pour des fils électriques de fabrication perfectionnée des conductibilités de plus de 100 pour 100 par rapport à l'étalon.

Les résistances des corps non métalliques sont incomparablement plus grandes que celles des métaux. En outre, elles sont beaucoup plus mal déterminées, et les chiffres donnés par divers expérimentateurs pour des échantillons obtenus dans des conditions semblables diffèrent sensiblement en général. Ainsi MM. Foussereau et Kohlrusch ont donné pour la résistance spécifique de l'eau les chiffres 0,3 et 7 megohms; cette résistance varie, du reste, considérablement avec les traces, même imperceptibles à l'analyse, de matières étrangères que contient l'eau.

¹ V. Mialaret, *Bulletin de la Société internationale des Électriciens*, 1887.

Les résistances électriques spécifiques sont évaluées généralement dans le système pratique, quelquefois dans le système électromagnétique C. G. S. Nous donnons ci-après un tableau de leurs valeurs pour diverses substances. Ces valeurs ne sont qu'approchées, bien entendu, et données à titre d'indication pour les substances non métalliques, principalement pour les électrolytes (voir chapitre III) et pour les corps dits isolants. Ces dernières catégories de substances présentent des phénomènes particuliers lorsqu'elles sont traversées par des courants, et l'on ne saurait leur appliquer purement et simplement les formules établies ci-dessus (1) et (2).

MÉTAUX ET ALLIAGES A LA TEMPÉRATURE DE 0°

NATURE DES CONDUCTEURS	VALEURS en UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES C. G. S.		RÉSISTANCE EN OHMS D'UN FIL DE	
	Résistance spécifique	Conducti- bilité spécifique	1 mètre pesant 1 gr.	100 mètres et 1 ^{mm} de diamètre
Argent recuit.....	1,492.40 ³	67,03.10 ⁵	0,1517	1,899
» écroui.....	1,620	61,73	0,1650	2,062
Cuivre recuit.....	15,84	63,13	0,1445	2,017
» écroui.....	1,621	61,69	0,1443	2,063
Or recuit.....	2,041	49,00	0,4007	2,598
» écroui.....	2,077	48,14	0,4076	2,644
Aluminium recuit...	2,889	34,61	0,0743	3,678
Zinc comprimé.....	5,580	17,92	0,3995	7,105
Platine recuit.....	8,981	11,14	1,925	11,435
Fer recuit.....	9,636	10,38	0,7518	12,27
Nickel recuit.....	12,356	8,093	1,052	15,73
Étain comprimé.....	13,103	7,632	0,9564	16,68
Plomb comprimé.....	19,465	5,137	2,217	24,78
Antimoine comprimé.	35,21	2,84	2,370	44,83
Bismuth comprimé....	130,10	0,769	12,80	165,60
Mercure liquide.....	94,34	1,06	12,826	120,11
Alliage 2 Pt + 1 Ag...	24,187	4,135	2,907	30,79
» 2 Au + 1 Ag....	10,776	9,280	1,638	13,72
» 9 Pt + 1 Ir....	21,633	4,627	4,651	27,54
Maillechort.....	20,76	4,817	1,817	26,43

Liquides (résistances en ohms par centimètre cube) :

Acide sulfurique	SO ⁴ H	à 15°: 9ω, 15
—	SO ⁴ H + 13HO	à 22°: 1ω, 26
Sulfate de zinc	SO ⁴ Zn + 24HO	à 23°: 18ω

Sulfate de cuivre	SO ⁴ Cu + 4 ³ HO	à 22° : 19 ω , 1
Acide chlorhydrique	HCl + 7,5HO	à 23° : 1 ω , 28
Chlorhydrate d'ammoniaque	(dissolution au $\frac{1}{10^e}$)	5 ω , 68
Potasse		
Eau (aussi pure que possible)	plus de	1 Ω

Diélectriques (résistances en megohms par centimètres cubes) :

Glace : plus de 100,000 fois plus résistante que l'eau		
Verre ordinaire	à zéro	10 ⁹ Ω
Cristal	à zéro	1,5 \times 10 ¹³ Ω
Porcelaine	à zéro	5 \times 10 ¹¹ Ω
Mica	vers 20°	8 \times 10 ⁷ Ω
Gutta-percha	vers 24°	5 \times 10 ⁸ Ω
Ebonite	vers 46°	3 \times 10 ¹⁰ Ω
Paraffine	vers 46°	3 \times 10 ¹⁰ Ω

61. Influence de la température sur la résistance spécifique. —

La résistance spécifique varie avec la température. Cette variation est très rapide pour les substances isolantes. Pour les métaux, quoique beaucoup plus faible, elle n'offre pas moins d'importance à cause de la précision que l'on cherche à atteindre dans les mesures.

1° *Métaux.* — Si R₀ désigne la résistance d'un conducteur métallique à 0°, R_t sa résistance à t°, on peut adopter, dans certaines limites de variation de température, la formule empirique :

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t + \beta t^2) \tag{7}$$

Pour les métaux purs le coefficient α varie peu et est voisin de 0,0038, par suite voisin du coefficient de dilatation des gaz parfaits, qui est 0,00367 ; de telle sorte que R_t est à peu près proportionnel à la température absolue $T = t + \frac{1}{0,00367}$. Pour le mercure liquide placé dans un tube de verre, on a :

$$R_t = R_0 (1 + 0,0008649 t + 0,0000012 t^2)$$

Le coefficient α est donc ici inférieur au quart de 0,0038. Mais au moment de sa solidification, le mercure devient subitement 4,08

fois plus résistant et son coefficient α redevient proche de 0,0038¹.

Les alliages et les métaux impurs ont des coefficients de variation très différents et notablement inférieurs à 0,0038 en général. Pour le maillechort α varie de 0,00027 à 0,00044. Le plus faible coefficient trouvé jusqu'ici est 0,00022 et appartient à un alliage platine-argent.

Matthiessen a proposé pour les métaux la formule exponentielle :

$$R_t = R_0 (1 + \alpha)^t$$

dont le développement en série serait

$$R_t = R_0 \left[1 + \frac{\alpha t}{1} + \frac{\alpha^2 t}{1.2} \dots \dots \right]$$

α désignant $L (1 + \alpha)$. Il faudrait, pour qu'elle fût admissible, que le coefficient β de la formule parabolique (7) fût le demi-carré de α . Cela n'a lieu qu'approximativement et pour les métaux purs seulement. Dans certains cas, ce coefficient β peut même devenir négatif.

Sir W. Siemens a proposé, pour les températures élevées jusqu'à 1000° C, l'emploi de la formule

$$R_t = R_0 (-1 + \alpha T + \beta \sqrt{T})$$

où R_0 est une constante et T la température absolue. C'est ainsi qu'on aurait pour le platine, le cuivre et le fer les formules suivantes :

$$\text{Platine } R = R_0 [0,46345 \sqrt{T} + 0,008968 T - 1]$$

$$\text{Cuivre } R = R_0 [0,41682 \sqrt{T} + 0,043821 T - 1]$$

$$\text{Fer } R = R_0 [0,05852 \sqrt{T} + 0,003076 T - 1]$$

D'après Lorenz, le rapport de la conductibilité calorifique K à la conductibilité électrique α d'un métal serait proportionnel à la température absolue T .

$$\frac{K}{\alpha} = aT$$

a étant une constante. Comme pour les divers métaux, K varie peu

¹ Cailletet et Bouty : *Comptes rendus*, 1885, t. C, p. 1188.

avec la température, il en résulterait que la résistance électrique $\frac{1}{\alpha}$ serait à peu près proportionnelle à T, ce qui concorde avec une remarque faite plus haut.

La variation de résistance des métaux avec la température est si régulière que la mesure de la résistance d'un conducteur fait connaître sa température, pourvu qu'on connaisse la résistance initiale à une température déterminée et sa loi de variation.

Ainsi, pour déterminer la température moyenne t' d'un câble télégraphique immergé dont la résistance est R' , sa résistance mesurée à l'usine à t ayant été trouvée égale à R , on posera (en ne conservant que les deux premiers termes du second membre de la formule 7) :

$$\frac{R}{1 + \alpha t} = \frac{R'}{1 + \alpha t'} = \frac{R' - R}{\alpha (t' - t)}$$

d'où :

$$t' = t + \frac{R' - R}{R} \left(\frac{1}{\alpha} + t \right)$$

A la température ordinaire $\left(\frac{1}{\alpha} + t \right)$ est voisin de 300. On voit donc que si R et R' sont mesurés à $\frac{1}{10000}$ près, l'erreur possible sur la détermination de la température t' ou de l'excès $(t' - t)$ ne dépassera pas $0^{\circ},6$.

2° *Électrolytes*. — Leur résistance varie plus rapidement que celle des métaux et va en diminuant quand la température s'accroît.

M. Bouty a trouvé pour des dissolutions salines étendues

$$R_t = \frac{R_0}{1 + 0,0337 t}$$

D'autre part, le coefficient de frottement intérieur de l'eau, d'après Poiseuille, est à peu près en raison inverse du même binôme $(1 + 0,337 t)$.

D'une manière générale, lorsque la température de l'eau ou d'une dissolution saline varie, la résistance paraît devoir rester proportionnelle au coefficient de frottement intérieur. Ceci s'appliquerait également aux sels fondus (Foussereau).

Ajoutons que certains conducteurs non électrolysables, tels que

le charbon de cornue, le sélénium, etc., ont une résistance également décroissante quand la température croît. Pour le sélénium, cette variation est très irrégulière ¹. Pour les charbons de cornue, elle est, au contraire, assez régulière et peu rapide :

$$R_t = R_0 (1 - 0,0003 t)$$

Quant aux filaments des lampes à incandescence, leur résistance à chaud, c'est-à-dire en fonctionnement normal, est à peu près la moitié de leur résistance à froid.

3° *Diélectriques*. — Leur résistance varie également en sens inverse de la température et d'une manière très rapide. On adopte quelquefois la formule exponentielle :

$$R_t = R_0 e^{at+bt^2}$$

Bright et Clark donnent plus simplement pour la gutta-percha :

$$R_t = R_0 \times 0,8878^t$$

Pour cette dernière substance, en raison de l'intérêt qu'elle présente, on a donné des tables de sa variation de résistance avec la

TABLE DES RÉSISTANCES COMPARATIVES D'UNE GUTTA-PERCHA ORDINAIRE ET DE LA COMPOSITION HOOPER A DIVERSES TEMPÉRATURES

TEMPÉRATURE	GUTTA-PERCHA CABLE du golfe Persique	AME HOOPER CABLE de Ceylan	TEMPÉRATURE	GUTTA-PERCHA CABLE du golfe Persique	AME HOOPER CABLE de Ceylan
0°C	100,00	100,00	20°	6,43	29,10
2°	84,14	90,10	22°	8,82	26,40
4°	64,66	80,00	24°	5,51	24,50
6°	47,65	72,90	26°	4,47	22,30
8°	37,15	65,30	28°	3,51	18,60
10°	28,97	58,80	30°	2,99	16,70
12°	23,18	52,90	32°	2,48	16,00
14°	16,89	49,40	34°	1,92	14,40
16°	14,37	44,50	36°	1,68	13,00
18°	11,05	34,60	38°	1,43	10,60

¹ Mercadier. *Comptes rendus*, 1881, t. XCII, p. 1407.

température ¹. Ces tables varient avec la provenance de la gutta, le travail auquel elle a été soumise, etc. On admet en général qu'à 24° elle est vingt fois moins résistante qu'à 0° et que vers 40° son isolement devient très défectueux. Nous donnons ci-contre une table montrant combien cette décroissance est rapide pour une gutta-percha ordinaire et le caoutchouc Hooper.

A propos des diélectriques et notamment de la gutta-percha, nous devons signaler l'influence de la pression. Les câbles immergés sont soumis souvent à des pressions considérables, dont l'influence n'est pas négligeable. Si p désigne la pression en atmosphères (10 mètres d'eau), on admet la formule :

$$R_p = R_0 (0,00327 p)$$

A 3,000 mètres de profondeur la résistance d'isolement est donc à peu près doublée de ce fait ².

62. Loi d'Ohm. — Ohm, en 1825, avait découvert les lois des courants permanents en assimilant le flux d'électricité dans un conducteur à un flux de chaleur, et appliquant à la propagation du courant électrique la théorie de Fourier relative à la propagation calorifique. Pour lui, ce que l'on appelle maintenant potentiel était une *tension*. Il trouva théoriquement que l'intensité du courant entre deux sections V_1 et V_2 , d'un fil conducteur était proportionnelle à la différence des tensions V_1 et V_2 , à la section s du fil et à l'inverse de la longueur l , c'est-à-dire que l'on avait :

$$i = \frac{1}{\rho} \frac{l}{s} (V_1 - V_2)$$

ρ étant un coefficient dépendant de la nature du conducteur. On a donné à cette loi le nom de loi d'Ohm ; elle a été vérifiée approximativement par ce savant ³. Depuis lors, on l'a vérifiée de diverses manières, notamment en mesurant, à l'aide d'un électromètre,

¹ Clark et Sabine. *Electrical tables and formulæ.* — *Traité de mesure électrique*, par Kempe. — *Manuel pratique de télégraphie*, par Culley. — *Traité de télégraphie sous-marine*, par Wunschendorff.

² Voir, à ce sujet, une note de M. Dèries sur les températures des mers, *Annales télégraphiques*, mai-juin 1889.

³ Voir la *Théorie mathématique de la pile* de G. S. Ohm, traduite par Ganga n.

la variation du potentiel le long d'un conducteur, solide ou liquide, traversé par un courant, et constatant que le rapport $\frac{V_a - V_b}{R_{ab}}$ entre deux points quelconques a et b a une valeur constante, qui n'est autre chose que i .

Pouillet, ignorant la découverte théorique d'Ohm, retrouva par l'expérience, en 1837, les résultats qui sont exprimés par les formules (3), (4) et (5). Il énonça en outre les lois du courant fourni par une pile thermo-électrique ou hydro-électrique. Il mesurait l'intensité du courant au moyen de sa boussole des sinus.

63. Loi de Joule. — Un fil conducteur reliant deux corps électrisés aux potentiels V_1 et V_2 est traversé par un courant i tel que :

$$V_1 - V_2 = Ri$$

c'est-à-dire que, pendant le temps t , une quantité $q = it$ d'électricité a disparu sur le corps au potentiel V_1 pour passer sur le corps au potentiel V_2 . Il en résulte, d'après les lois d'électrostatique, une perte d'énergie potentielle égale à $q(V_1 - V_2) = R i^2 t$.

Cette énergie doit se retrouver sous une autre forme, calorifique, mécanique ou chimique, etc. S'il ne se développe que de la chaleur, celle-ci doit être équivalente à l'énergie $R i^2 t$.

Joule, mesurant la quantité de chaleur développée dans un conducteur métallique ou liquide de résistance R , sous l'action d'un courant d'intensité i mesurée par une boussole des tangentes, a trouvé que cette quantité de chaleur était en effet proportionnelle au produit Ri^2t . La théorie n'étant pas encore établie à cette époque, on a donné à cette loi, qu'il a découverte expérimentalement, le nom de *loi de Joule*.

Une loi analogue à celle de Joule a été trouvée par Riess dans ses expériences sur les courants variables produits par la décharge de bouteilles de Leyde. Il a constaté que la chaleur dégagée est proportionnelle au produit $q(V_1 - V_2)$, ce qui doit être d'après le principe de la conservation de l'énergie ¹.

64. Force électromotrice. — La cause qui produit le courant i dans un conducteur, malgré sa résistance R , a reçu le nom de

¹ V. Mascart. *Electricité statique*.

force électromotrice. Pour plus de précision, on définit, d'une manière absolument générale, la *force électromotrice* entre deux sections d'un conducteur comme étant égale au produit Ri de l'intensité i du courant par la résistance R du conducteur entre ces deux sections. Dans le cas étudié plus haut où l'on a :

$$V_1 - V_2 = Ri$$

la force électromotrice n'est autre chose que la différence de potentiels ($V_1 - V_2$).

La résistance R , qui ne dépend que de la nature, de la forme et des dimensions du conducteur, ayant été mesurée une fois pour toutes, si l'on trouve ensuite, dans un cas quelconque, que la force électromotrice Ri n'est pas égale à la chute de potentiel ($V_1 - V_2$) entre les extrémités du conducteur, la différence :

$$Ri - (V_1 - V_2) = E \quad (8)$$

représentera une force électromotrice E s'ajoutant à ($V_1 - V_2$) pour produire le courant i . La formule (2) n'était qu'un cas particulier. La formule (8) est générale; elle ne fait d'ailleurs que définir la force électromotrice supplémentaire E .

Les diverses sortes de forces électromotrices E qui ont été étudiées jusqu'ici avec précision et dont nous nous occuperons dans ce cours sont les suivantes :

1° Une pile hydroélectrique intercalée sur un conducteur y donne naissance à une force électromotrice, qui a une valeur constante et indépendante du courant i , à la condition que l'état physique et chimique de la pile ne varie pas (effet voltaïque);

2° A la surface de séparation de deux corps différents, solides, liquides ou gazeux, il existe une variation brusque de potentiel lorsqu'on passe d'un corps à l'autre à travers la surface. Cette variation brusque constitue une force électromotrice, dont la valeur est constante si l'état des corps au contact ne varie pas (*effet Peltier*);

3° Un défaut d'homogénéité dans un conducteur ou des variations de température aux divers points introduisent des variations de potentiels ou forces électromotrices ayant le même caractère

que la précédente, sauf qu'elles sont *continues* au lieu de se produire brusquement (*effet Thomson*);

4° Lorsqu'un conducteur se déplace dans un champ magnétique, ou qu'il est au repos dans un champ magnétique variable produit soit par le courant i lui-même, soit par tout autre cause, il s'y développe des forces électromotrices *induites*, dont les lois sont connues.

Si dans certains cas on trouve une différence $[Ri - (V_1 - V_2)]$ qui ne s'explique par aucune des causes précédentes, l'excès de cette différence E sur la force électromotrice E_0 , que l'on prévoyait constituera une nouvelle force électromotrice $(E - E_0)$, dont on sera amené à étudier la nature et les lois. Tant que de nouveaux effets ne se produisent pas, la somme des forces électromotrices dues aux effets voltaïques, thermiques, etc., étant égale à E , on pourra appliquer l'équation (8).

On peut encore donner une autre définition des forces électromotrices. En multipliant par i l'équation (8), on a :

$$Ri^2 - (V_1 - V_2) i = Ei \quad (8')$$

Ri^2 représentant, d'après la loi de Joule, l'énergie calorifique développée dans le conducteur R pendant l'unité de temps doit être égal, en vertu du principe de la conservation de l'énergie, à la somme de la perte $(V_1 - V_2) i$ d'énergie potentielle électrique et du travail W dépensé par des causes mécaniques, chimiques, électriques, magnétiques, etc., autres que la chute de potentiel $(V_1 - V_2)$. On doit donc avoir :

$$Ri^2 = (V_1 - V_2) i + W$$

La comparaison de cette équation avec (8') montre que la force électromotrice E due aux causes autres que $(V_1 - V_2)$ est égale à $\frac{W}{i}$. Il en résulte que d'une manière générale, *si un travail W est dépensé dans l'unité de temps et transformé en énergie électrique dans un conducteur donné, le quotient de W par l'intensité i du courant représente une force électromotrice développée dans le conducteur*. Si le travail W est absorbé au lieu d'être dépensé par les causes en jeu, il devra être considéré comme négatif et donnera

lieu à une force électromotrice négative. — Ce principe sera constamment invoqué dans la suite.

65. Courant dans un circuit fermé. — Si un conducteur, homogène ou hétérogène, est fermé sur lui-même, en partant d'un point au potentiel V_1 et parcourant le circuit jusqu'à ce que l'on revienne au point de départ, celui-ci se confond avec le point d'arrivée supposé au potentiel V_2 ; on a alors $V_1 = V_2$, et l'application de la formule (8) donne :

$$Ri = E$$

R étant la résistance totale du circuit et E la force électromotrice qu'il contient.

Une pile hydroélectrique (pile de Volta, de Daniell, de Leclanché, etc.), intercalée dans le circuit, y apporte une force électrotrice et une résistance propre de valeurs déterminées et constantes tant que l'état de la pile ne varie pas. Il en est de même d'une pile thermoélectrique (couples $Bi - Sb$, $Cu - Fe$, etc.) C'est là un fait constaté par Pouillet et vérifié depuis lors par une pratique constante. Dans les piles hydroélectriques, la force électromotrice E est localisée entièrement aux soudures des conducteurs, ou à la surface des électrodes en contact avec le liquide ou le solide électrolytables, à moins que les conducteurs ne soient hétérogènes ou soumis à une influence magnétique variable, etc. En dehors de ces contacts, le potentiel décroît, dans le sens du courant, suivant la loi d'Ohm :

$$V_b = V_a - R_{ab}i = V_a - R_{ab} \frac{E}{R}$$

c'est-à-dire qu'il décroît, entre deux points a et b , proportionnellement à la résistance intermédiaire R_{ab} .

Considérons un circuit comprenant : 1° une pile de force électromotrice E et de résistance r ; 2° un conducteur homogène de résistance R . *En circuit ouvert*, i étant nul, la différence des potentiels aux pôles de la pile est égale à E . Mais il n'en est pas de même en circuit fermé; car il se développe un courant d'intensité :

$$i = \frac{E}{r + R}$$

et la chute de potentiel entre les extrémités du conducteur R , qui n'est autre chose que la différence ε des potentiels aux pôles de la pile, est égale à

$$\varepsilon = Ri = E \frac{R}{r + R}$$

ou

$$\varepsilon = E - ri$$

Cette différence dépend donc de la résistance R du conducteur extérieur à la pile, et peut prendre toutes les valeurs de E à zéro, lorsque R décroît de l'infini à zéro.

66. Théorèmes de Kirchhoff. — Considérons un circuit ou réseau complexe composé de branches V_1V_2, V_2V_3, \dots en nombre quel-

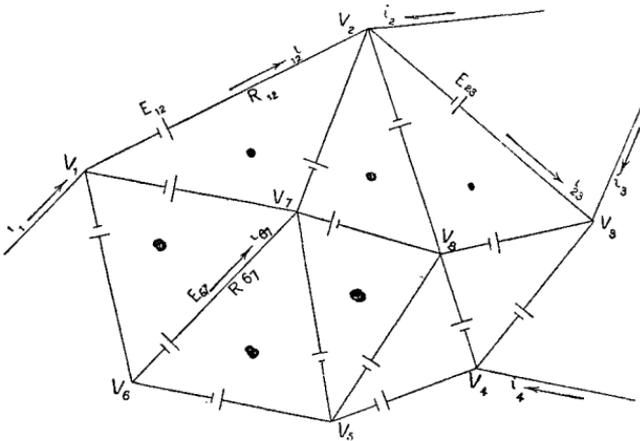


Fig. 24.

conque, réunissant deux à deux n points ou sommets aux potentiels V_1, V_2, \dots, V_n (fig. 24); et soient :

$K_{12}, K_{23}, \dots, K_{gh}, \dots$ les conductibilités de ces diverses branches,

$R_{12}, R_{23}, \dots, R_{gh}, \dots$ leurs résistances,

$E_{12}, E_{23}, \dots E_{gh}, \dots$ les forces électromotrices qu'elles contiennent,

$i_{12}, i_{23}, \dots i_{gh}, \dots$ les intensités des courants permanents qui les parcourent.

La conductibilité K_{gh}^{sp} et la résistance R_{gh} de la branche $V_g V_h$, de V_g en V_h , sont les mêmes que la conductibilité K_{gh} et la résistance R_{hg} de V_h en V_g . Mais la force électromotrice E_{gh} et l'intensité i_{gh} , comptées de V_g en V_h sont égales et de signe contraire à la force électromotrice E_{hg} et à l'intensité i_{hg} , comptées en sens inverse :

$$R_{gh} - R_{hg} = K_{gh}^{sp} - K_{hg} = E_{gh} + E_{hg} = i_{gh} + i_{hg} = 0 \quad (9)$$

Ceci posé, proposons-nous de déterminer l'intensité i_{gh} dans une branche quelconque $V_g V_h$, connaissant les résistances et les forces électromotrices des diverses branches. Voici une méthode due à Kirchoff :

1° Dans l'état permanent, si, pour plus de généralité, nous supposons qu'il arrive au réseau, par un conducteur extérieur, en un sommet V_g une quantité I_g d'électricité par unité de temps, la somme ($i_{g1} + i_{g2} + \dots + i_{gn}$) des quantités d'électricité qui, de V_g s'en vont par les diverses branches dans le même temps, doit être égale précisément à i_g :

$$i_{g1} + i_{g2} + \dots + i_{gn} = I_g \quad (10)$$

On pourra écrire une équation semblable pour chacun des sommets $V_1, V_2, \dots V_n$. Dans le cas où le réseau n'emprunte ni ne cède rien à l'extérieur, les quantités I_g sont nulles. Alors les équations telles que (10) deviennent :

$$i_{g1} + i_{g2} + \dots + i_{gn} = 0 \quad (10')$$

Cette première loi avait été formulée par Pouillet.

2° Prenons sur la figure 24 un circuit fermé quelconque, par exemple $V_1 V_2 V_7 V_6 V_1$. On a pour les branches successives $V_1 V_2, V_2 V_7, \dots$ de ce circuit, d'après (8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 - V_2 + E_{12} - R_{12} i_{12} = 0 \\ V_2 - V_7 + E_{27} - R_{27} i_{27} = 0 \\ V_7 - V_6 + E_{76} - R_{76} i_{76} = 0 \\ V_6 - V_1 + E_{61} - R_{61} i_{61} = 0 \end{array} \right.$$

Ajoutons membre à membre ces quatre équations. Il vient :

$$(E_{12} + E_{27} + E_{76} + E_{61}) - (R_{12} i_{12} + R_{27} i_{27} + R_{76} i_{76} + R_{61} i_{61}) = 0 \quad (11)$$

On pourra écrire une équation semblable pour chacun des circuits fermés que l'on pourra obtenir dans le réseau. Mais l'on aura ainsi un nombre d'équations qui pourra être réduit, ces équations n'étant pas toutes distinctes. On trouve que, le nombre des sommets étant n et celui des branches N , il n'y a que $(N-n+1)$ équations distinctes telles que (11)¹.

Si l'on écrit les n équations (10') relatives aux n sommets, en les additionnant on trouve l'identité : $0 = 0$, puisque chaque groupe de termes $(i_{g_h} + i_{h_g})$ est nul. Ces équations se réduisent donc à $(n-1)$ distinctes et forment avec les $(N-n+1)$ équations (11) un système de N équations du premier degré, permettant de calculer les N inconnues $i_{12}, i_{23}, \dots, i_{g_h}, \dots$. On peut écrire ce système sous la forme abrégée :

$$\begin{cases} \Sigma i = 0. & \dots \dots \dots \text{pour } (n-1) \text{ sommets} \\ \Sigma (E - Ri) = 0. & \dots \dots \dots \text{pour } (N-n+1) \text{ circuits fermés distincts} \end{cases} \quad (12)$$

Les équations de Kirchoff sont vraies, non seulement lorsque le courant a atteint le régime permanent, mais encore pendant la période variable, à la double condition : 1° que la force électromotrice E dans chaque branche soit définie de la manière la plus générale (§ 64) ; 2° que l'on tienne compte de la charge variable que prennent les conducteurs du réseau si leur capacité électrostatique n'est pas négligeable. Si, par exemple, la charge d'un élément de conducteur s'accroît de $\frac{dq}{dt}$ dans l'unité de temps, on en tiendra compte en supposant qu'un courant $-\frac{dq}{dt}$ arrive de l'extérieur au réseau par l'élément en question, que l'on considérera comme un sommet ; ce courant interviendra donc comme celui qui est désigné par I_g dans l'équation (10). Il n'y a pas lieu de modifier les équations (10) et (11). Mais le système (12) devra s'écrire, pour plus de généralité :

$$\begin{cases} \Sigma i = I & \text{pour chaque sommet} \\ \Sigma (E - Ri) = 0 & \text{pour chaque circuit fermé} \end{cases} \quad (12)$$

¹ V. Raynaud. Sur la distribution des courants électriques. *Journal de Physique*, 1873.

En multipliant ces équations par l'élément de temps dt , et intégrant entre deux époques déterminées on trouvera un système d'équations de même forme :

$$\begin{cases} \Sigma q = Q & \text{pour chaque sommet} \\ \Sigma (\int E dt - Rq) = 0 & \text{pour chaque circuit fermé} \end{cases} \quad (13)$$

Les quantités d'électricité $q = \int i dt$ et $Q = \int I dt$ y remplacent simplement les intensités i et I , les forces $e. m.$ E étant remplacées par les *forces e. m. totales* $\int E dt$. Nous ferons plus d'une application de ces formules.

67. Variante de la méthode de Kirchhoff. — Revenons aux deux groupes d'équations (12). On peut supprimer les $(n - 1)$ équations du premier groupe en remplaçant dans le second groupe $(n - 1)$ des intensités en fonction des $(N - n + 1)$ autres. On n'aura plus ainsi que $(N - n + 1)$ équations entre autant d'inconnues. Telle est la marche à suivre la plus simple dans le cas général.

On présente quelquefois cette méthode de la manière suivante. Numérotons 1, 2, 3, ... $(N - n + 1)$ les divers circuits fermés distincts que l'on peut former dans le réseau donné. Soient r_1, r_2, r_3, \dots les résistances totales respectives de ces circuits, ρ_{gh} la résistance d'une branche commune aux circuits fermés g et h . Considérons un courant d'intensité x_1 parcourant le premier circuit, un courant x_2 parcourant le deuxième... Une branche telle que ρ_{gh} sera parcourue par la somme algébrique des courants i_g et i_h .

Ceci posé, dans le circuit g , la chute de potentiel le long des diverses résistances doit se composer : 1° de la chute $r_g x_g$ due au courant x_g ; 2° des chutes $\rho_{g1} x_1, \rho_{g2} x_2, \dots$ dues aux courants x_1, x_2, \dots dans les branches communes aux circuits 1, 2, ... La chute totale devant être égale à la somme des forces $e. m.$ du circuit g , d'après ce qui a été démontré plus haut, on aura :

$$r_g x_g + \rho_{g1} x_1 + \rho_{g2} x_2 + \dots = \Sigma E_g \quad (14)$$

Pour donner une apparence plus symétrique à cette équation, on y peut remplacer r_g par ρ_{gg} . On devra avoir soin d'affecter de son signe chacun des termes qui entrent dans l'équation (14).

On aura $(N - n + 1)$ équations semblables à (14), d'où l'on

tirera $x_1, x_2, \dots, x_{N-n+1}$ et par suite le courant total dans chacune des branches.

68. Méthode de Maxwell. — On peut employer, pour le calcul des intensités dans les diverses branches, une méthode plus simple, due à Maxwell et se ramenant à la résolution de n équations symétriques, au lieu des N équations (12) ou des $(N - n + 1)$ équations (14), qui sont dissymétriques. L'intensité i_{gh} dans la branche $V_g V_h$ est égale à :

$$i_{gh} = K_{gh} (V_g - V_h + E_{gh}) \quad (15)$$

Remplaçons, dans l'équation (10'), $i_{g1}, i_{g2}, \dots, i_{gn}$ par des expressions semblables. On trouve :

$$K_{g1} (V_g - V_1 + E_{g1}) + K_{g2} (V_g - V_2 + E_{g2}) + \dots + K_{gn} (V_g - V_n + E_{gn}) = I_g$$

ou bien :

$$K_{g1} V_1 + K_{g2} V_2 + \dots + K_{gg} V_g + \dots + K_{gn} V_n = K_{g1} E_{g1} + \dots + K_{gn} E_{gn} - I_g$$

en posant, pour abrégier :

$$K_{g1} + K_{g2} + \dots + K_{g(g-1)} + K_{g(g+1)} + \dots + K_{gn} = -K_{gg} \quad (16)$$

c'est-à-dire en désignant par $-K_{gg}$ la somme des conductibilités des branches $V_g V_1, \dots, V_g V_n$ aboutissant au sommet V_g . Chacun des n sommets donnant lieu à une équation semblable, on aura le système :

$$\left(\begin{array}{l} K_{11} V_1 + K_{12} V_2 + \dots + K_{1n} V_n = K_{12} E_{12} + K_{13} E_{13} + \dots + K_{1n} E_{1n} - I_1 \\ K_{21} V_1 + K_{22} V_2 + \dots + K_{2n} V_n = K_{21} E_{21} + K_{23} E_{23} + \dots + K_{2n} E_{2n} - I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_{n1} V_1 + K_{n2} V_2 + \dots + K_{nn} V_n = K_{n1} E_{n1} + K_{n2} E_{n2} + \dots + K_{n(n-1)} E_{n(n-1)} - I_n \end{array} \right. \quad (17)$$

En réalité, ces n équations se réduisent à $(n - 1)$; car, si on les ajoute membre à membre, le coefficient de V_g dans le premier membre sera :

$$K_{1g} + K_{2g} + \dots + K_{gg} + \dots + K_{ng}$$

et sera nul d'après (16); tandis que le second membre, étant la somme de groupes tels que $K_{g^h}E_{g^h} + K_{h_g}E_{h_g}$ et des I_g sera nul également, et l'on obtiendra ainsi une identité. Il en résulte que sur les n potentiels V_1, V_2, \dots, V_n , l'un d'eux peut être choisi arbitrairement. Cela était évident *a priori*, puisque les différences de potentiels seules sont déterminées et non les potentiels absolus. Le calcul de ces différences suffira d'ailleurs pour déterminer les intensités d'après la formule (15).

Remarque. — En raison du caractère linéaire des équations (15) et (17), on voit que l'intensité développée dans une branche par diverses forces *e. m.* placées dans des branches quelconques est égale à la somme des intensités qui seraient dues à chacune de ces forces *e. m.* existant isolément.

69. Propriétés des réseaux complexes. — 1° On peut ajouter, sur chacune des branches partant d'un même sommet V_g , des forces électromotrices $e_{g^1}, e_{g^2}, \dots, e_{g^n}$ égales entre elles, sans changer les intensités du courant dans les diverses branches du réseau. Le seul changement produit consiste dans une diminution du potentiel V_g , égale à $e_{g^1} = e_{g^2} = \dots$

En effet, si l'on augmente de e les forces électromotrices E_{g^1}, E_{g^2}, \dots dans les branches aboutissant à V_g , le potentiel V_g diminuant de e , les équations (15) et, par suite, le système (17) subsisteront sans autre modification.

2° Si une force électromotrice E_{a^b} placée dans une branche $V_a V_b$ produit un courant i_{g^h} dans la branche $V_g V_h$, réciproquement une force électromotrice E_{g^h} égale à la précédente placée en $V_g V_h$ produira dans la branche $V_a V_b$ un courant i_{a^b} égal au précédent.

Pour le démontrer, faisons arbitrairement $V_n = 0$; V_1, V_2, \dots, V_{n-1} se calculeront à l'aide des $(n-1)$ premières équations (17). Désignons par D le déterminant

$$\left\{ \begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1, n-1} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2, n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ K_{n-1, 1} & K_{n-1, 2} & \dots & K_{n-1, n-1} \end{array} \right\}$$

et par $(-1)^{\alpha+\beta} D_{\alpha\beta}$ le déterminant mineur obtenu en supprimant la α^{me} rangée et la β^{me} colonne de D . A cause de la symétrie du déterminant D , qui résulte de l'égalité $K_{pq} = K_{qp}$, on a évidemment :

$$D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$$

Or, si la force *e. m.* E_{ab} existe seule, l'expression de V_g sera donnée par l'équation :

$$D V_g = (D_{ag} - D_{hg}) K_{ab} E_{ab}$$

De même :

$$D V_h = (D_{ah} - D_{bh}) K_{ab} E_{ab}$$

On déduit de là, en tenant compte de (15)

$$D i_{gh} = (D_{ag} + D_{bh} - D_{hg} - D_{ah}) K_{ab} K_{gh} E_{ab}$$

Dans le cas où, au contraire, la force *e. m.* E_{gh} existe seule :

$$D i_{ab} = (D_{ga} + D_{hb} - D_{ha} - D_{gb}) K_{gh} K_{ab} E_{gh}$$

Si $E_{ab} = E_{gh}$ dans ces deux formules, on voit que i_{ab} et i_{gh} sont égaux, ce qui démontre la proposition énoncée.

3°.—Supposons que sur un conducteur A parcouru par un courant I se trouve intercalé, entre deux points aux potentiels V et V' , un réseau complexe B contenant des forces électromotrices. On peut, en appliquant les équations (17) au réseau B , calculer $(V - V')$ en fonction de ces forces *e. m.* et de I . En raison du caractère linéaire de ces équations, on voit que $(V - V')$ est une fonction linéaire de I , soit :

$$V - V' = r I - E \tag{18}$$

le coefficient r ne dépendant que des résistances des branches du réseau B , et E dépendant de ces résistances ainsi que des forces *e. m.* intercalées dans B .

On peut interpréter la relation (18) en disant que *le réseau B intercalé sur le circuit A y produit le même effet qu'une branche unique, de résistance r , contenant une force e. m. E.*

Ceci est indépendant de la nature du circuit A . Si celui-ci se

réduit à une résistance R , on aura : $V - V' = -RI$ et par suite :

$$I = \frac{E}{r + R}$$

La force *e. m.* E n'est autre chose que la différence de potentiel $(V - V')$ lorsque le circuit A est ouvert ($I = 0$). De là résulte le théorème suivant dû à M. Thévenin¹ :

Si deux points d'un réseau, primitivement aux potentiels V et V' , viennent à être réunis par un conducteur extérieur de résistance R , celui-ci sera parcouru par un courant d'intensité :

$$I = \frac{V' - V}{r + R}$$

r désignant la résistance de l'ensemble du réseau entre les points V et V' .

La résistance R et la force *e. m.* apparente E entre les points V et V' se calculent facilement dans le cas où le réseau intercalé

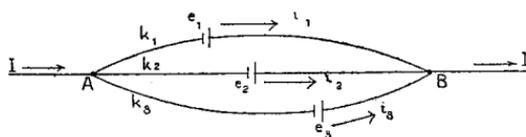


Fig. 25.

sur le courant I se compose de plusieurs branches placées en dérivation entre les points A et B (fig. 25). Les intensités dans les diverses branches sont données par les formules :

$$\begin{aligned} i_1 &= k_1 (V - V' + e_1) \\ i_2 &= k_2 (V - V' + e_2) \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

En les ajoutant membre à membre, il vient :

$$i_1 + i_2 + \dots = I = (k_1 + k_2 + \dots) \left[V - V' + \frac{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots}{k_1 + k_2 + \dots} \right]$$

¹ *Comptes rendus*, 1883, t. 97, p. 159; *Annales télégraphiques*, 1883.

Les conducteurs placés entre A et B équivalent donc à un conducteur unique, dont la conductibilité serait égale à la somme des conductibilités partielles ($k_1 + k_2 + \dots$), et qui renfermerait une force électromotrice $\frac{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots}{k_1 + k_2 + \dots}$.

70. Problèmes sur les piles¹. — 1° *Groupement des piles*. — D'après

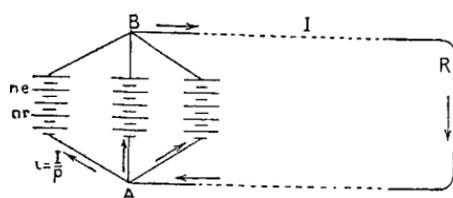


Fig. 26.

le théorème précédent, si une pile est composée de p groupes de n éléments chacun, les p groupes étant reliés en A et B par leurs pôles extrêmes (fig. 23), en désignant par e et r la force électromotrice et la résistance de chaque élément, cette pile équivaudra à un seul groupe de résistance $\frac{nr}{p}$ et de force électromotrice ne .

Supposons que cette pile soit fermée par un circuit extérieur de résistance R (fil télégraphique, par exemple). L'intensité I du courant dans ce circuit sera égale à :

$$I = \frac{ne}{R + \frac{nr}{p}} = \frac{npe}{Rp + nr}$$

La même pile, dont le nombre d'éléments $np = N$ est donné, peut être groupée autrement, par exemple en p' groupes de n' éléments tels que $n'p' = np = N$; l'intensité I ne sera plus la même. Si l'on se propose d'obtenir le maximum d'intensité I , comme le numérateur npe de la formule ci-dessus est constant, il faut adopter un groupement tel que le dénominateur $(pR + nr)$ soit maximum. Or ce dénominateur est la somme de deux termes pR et nr dont le produit : $npRr = NRr$ est constant ; il sera donc minimum lorsque les deux termes seront égaux : $pR = nr$, ce qui peut s'écrire :

$$\frac{nr}{p} = R$$

Le maximum d'intensité correspond donc au cas où la résis-

tance intérieure $\frac{nr}{p}$ de la pile est égale à la résistance R du circuit extérieur. Cette condition, combinée avec : $np = N$, donne :

$$n = \sqrt{N \frac{R}{r}}$$

$$p = \sqrt{N \frac{r}{R}}$$

On cherche à se rapprocher de ces conditions, dans la pratique télégraphique, pour les appareils à transmission relativement lente. Pour les appareils à émissions rapides, le courant n'ayant qu'une très faible durée et étant loin, souvent, d'atteindre le régime *permanent*, on ne peut appliquer les règles précédentes.

2° *Pile commune à plusieurs fils télégraphiques.* — On emploie quelquefois, dans un poste télégraphique, une même pile pour desservir plusieurs fils R_1, R_2, \dots, R_k . Ces fils sont d'une part reliés à la pile en des points A_1, A_2, \dots qui varient d'un fil à l'autre ; d'autre part, mis à la terre, c'est-à-dire au potentiel zéro, à leurs extrémités T_1, T_2, \dots, T_k , (fig. 27) par l'intermédiaire des récepteurs télégraphiques correspondants.

Le récepteur du fil R_1 exige, pour son fonctionnement normal, un courant d'une certaine intensité i_1 ($i_1 = 0,^{amp}012$ à $0,^{amp}013$ pour les appareils Morse, Hughes, etc.).

Pour que cette intensité i_1 soit atteinte, il faut que le potentiel au point A_1 de la prise de pile ait une certaine valeur V_1 . De même les fils R_2, R_3, \dots absorberont des courants i_2, i_3, \dots et les potentiels en $A_2, A_3 \dots$ devront à cet effet être égaux à V_2, V_3, \dots Plusieurs fils peuvent d'ailleurs exiger le même potentiel V et avoir une prise commune de pile ; tels sont R_3 et R_4 sur la figure.

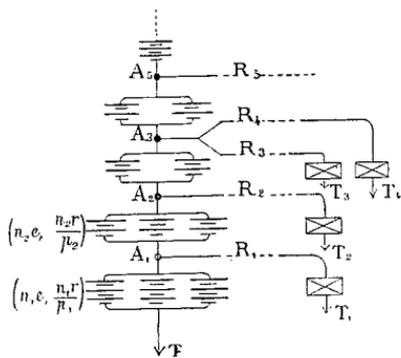


Fig. 27.

Les intensités i_1, i_2, \dots, i_k et les potentiels V_1, V_2, \dots, V_k sont des données du problème. En supposant que tous les récepteurs fonc-

tionnent simultanément, les intensités qui doivent traverser les diverses sections $TA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ de la pile seront :

$$\left(\begin{array}{l} I_1 = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k \\ I_2 = i_2 + i_3 + \dots + i_k \\ I_3 = i_3 + i_4 + \dots + i_k \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Le problème consiste maintenant à calculer le nombre d'éléments de pile d'un type déterminé (p groupes parallèles de n éléments en série) que doit contenir chacune de ces sections pour satisfaire aux conditions précédentes.

En appliquant aux sections TA_1, A_1A_2, \dots l'équation (8), dans laquelle R doit être remplacé par la résistance $\frac{nr}{p}$ et E par la force électromotrice ne , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1 r}{p^1} I_1 + V_1 = n_1 e \\ \frac{n_2 r}{p_2} I_2 + V_2 - V_1 = n_2 e \\ \frac{n_3 r}{p_3} I_3 + V_3 - V_2 = n_3 e \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (19)$$

Dans chacune de ces équations on peut prendre arbitrairement la valeur de p et en déduire n . Il vaut mieux profiter de l'indétermination qui se présente, de manière à satisfaire à des conditions rationnelles. Supposons, par exemple, que l'on veuille réduire le nombre np des éléments de pile d'une section, A_1A_2 par exemple, au minimum. La deuxième équation du système précédent peut s'écrire :

$$\frac{rI_2}{p_2} + \frac{V_2 - V_1}{n_2} = e$$

Pour que le nombre $n_2 p_2$ soit minimum, ou (ce qui revient au même, $V_2 - V_1$ étant positif) pour que le produit des deux facteurs $\frac{rI_2}{p_2}$, $\frac{V_2 - V_1}{n_2}$, dont la somme est constante, soit maximum, il faut que ces facteurs soient égaux :

$$\frac{rI_2}{p_2} = \frac{V_2 - V_1}{n_2} = \frac{e}{2}$$

On tirerait de là n_2 et p_2 par une règle analogue à celle à laquelle a conduit le problème précédent sur le groupement des piles.

Mais cette règle, quoique avantageuse en apparence au point de vue économique, serait défectueuse au point de vue de la régularité de fonctionnement des récepteurs télégraphiques. Le courant qui traverse l'un de ceux-ci n'a pas la même intensité suivant que les autres lignes fonctionnent en même temps ou sont isolées de la pile. Il résulte de là des écarts que l'on doit tendre à réduire, chaque récepteur ne fonctionnant régulièrement qu'entre des limites restreintes i et i' d'intensité du courant. Nous laisserons donc de côté la condition d'économie maximum, et nous écrirons que les intensités du courant sur les lignes R_1, R_2, R_3, \dots , lorsqu'elles sont isolément reliées à la pile, ne dépassent pas certaines valeurs limites i'_1, i'_2, \dots ou sont égales à ces limites.

En écrivant cette condition pour la ligne R_1 , on trouve :

$$\left(\frac{n_1 r}{p_1} + R_1\right) i'_1 = n_1 e$$

Cette équation, combinée avec la première des équations (19), fera connaître n_1 et p_1 . On calculera ensuite n_2 et p_2, n_3 et p_3, \dots en écrivant des conditions semblables pour chacune des lignes successives R_2, R_3, \dots ¹.

74. Effet des dérivations ou pertes sur une ligne télégraphique.

— Considérons une ligne télégraphique comprise entre deux

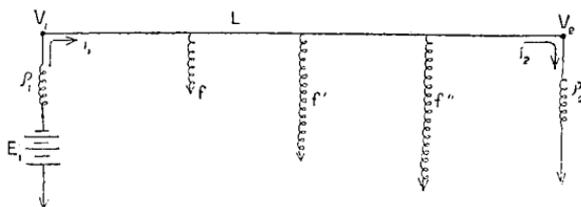


Fig. 28.

points extrêmes V_1 et V_2 (fig. 28) et le long de laquelle existent,

¹ Voir pour le développement de cette méthode, avec exemples numériques à l'appui, une note de M. Barbarat sur le montage des piles en échelle d'Amsterdam, dans les *Annales télégraphiques*, 1888, p. 123.

par suite de l'humidité des supports ou pour d'autres causes, des dérivations en nombre quelconque présentant des résistances f, f', f'', \dots . Les postes télégraphiques reliés aux extrémités de la ligne sont représentés par les branches ρ_1 et ρ_2 . Nous désignerons par L le système comprenant le fil conducteur $V_1 V_2$ et les dérivations, et nous supposerons ces dérivations, ainsi que les deux postes, reliés au sol, c'est-à-dire au potentiel zéro.

L est un réseau complexe, auquel on peut appliquer les théorèmes de Kirchoff (§ 66). Si des courants d'intensités i_1 et $(-i_2)$ entrent dans ce réseau par les sommets V_1 et V_2 , les potentiels en ces sommets seront, à cause du caractère linéaire des équations de Kirchoff, des fonctions linéaires de i_1 et de i_2 . Inversement i_1 et i_2 sont des fonctions linéaires des potentiels V_1 et V_2 . On peut donc poser :

$$\begin{cases} \alpha i_1 = \beta_1 V_1 - A_1 V_2 \\ \alpha i_2 = A_2 V_1 - \beta_2 V_2 \end{cases}$$

les coefficients α, β et A ne dépendant que du système L , c'est-à-dire de la ligne et de ses dérivations.

On arriverait au même résultat en considérant l'ensemble du système L et des branches ρ_1 et ρ_2 ; l'effet de ces branches sur le système L est le même que si elles contenaient des forces *e. m.* V_1 et $-V_2$, leurs résistances étant supprimées. Or, l'intensité du courant développé dans la branche ρ_1 par la force *e. m.* fictive $-V_2$ seule, c'est à dire $-\frac{A_1}{\alpha} V_2$, doit être égale à l'intensité $\frac{A_2}{\alpha} V_1$ développée dans la branche ρ_2 par la force *e. m.* fictive V_1 seule, à la condition que V_1 et $-V_2$ aient même valeur (§ 69, 2°); il en résulte : $A_1 = A_2$. On écrira donc :

$$\begin{cases} \alpha i_1 = \beta_1 V_1 - A V_2 \\ \alpha i_2 = A V_1 - \beta_2 V_2 \end{cases} \quad (20)$$

Lorsque l'extrémité V_2 est reliée directement au sol ($V_2 = 0$), le rapport $\frac{V_1}{i_1}$ représente la *résistance* apparente R_1 de la ligne, telle qu'elle peut être mesurée au poste 1. Donc, d'après la première des équations (20) :

$$R_1 = \frac{\alpha}{\beta_1}$$

De même la résistance apparente de la ligne, mesurée au poste 2, est :

$$R_2 = \frac{\alpha}{\beta_2}$$

La valeur apparente de la résistance de la ligne mesurée à l'une de ses extrémités lorsque l'autre extrémité est isolée, s'appelle son *isolement*. L'isolement I_1 de la ligne, tel qu'il peut être mesuré au poste 1, s'obtiendra en prenant le rapport $\frac{V_1}{i_1}$ lorsque l'extrémité V_2 est isolée ($i_2 = 0$) :

$$I_1 = \frac{\alpha}{\beta_1 - A \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\alpha}{\beta_1 - \frac{A^2}{\beta_2}} = \beta_2 \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2 - A^2}$$

De même l'isolement mesuré au poste 2 est :

$$I_2 = \beta_1 \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2 - A^2}$$

En comparant les quatre expressions que l'on vient de calculer on en déduit la relation :

$$\frac{R_1}{I_1} = \frac{R_2}{I_2} \quad (21)$$

qui exprime que le rapport de la résistance R de la ligne à son isolement I a la même valeur, soit à l'un, soit à l'autre des postes extrêmes.

Dans les équations (20) les coefficients A , β_1 , β_2 et α n'interviennent que par leurs rapports, et l'un d'eux est arbitraire. On profitera de cette indétermination pour poser :

$$\alpha = \beta_1 \beta_2 - A^2$$

de manière à simplifier les expressions de I_1 et de I_2 . Il en résulte pour les coefficients des significations simples mises en évidence par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = I_2 \\ \beta_2 = I_1 \\ \alpha = R_1 I_2 = R_2 I_1 \\ A^2 = I_1 (I_2 - R_2) = I_2 (I_1 - R_1) \end{array} \right. \quad (22)$$

R_1 et I_1 ne sont que les valeurs extrêmes de la résistance apparente de la ligne mesurée au poste 1 lorsque la résistance ρ_2 du

poste 2 est nulle ou infinie. Dans le cas général où ρ_2 est quelconque, pour calculer la valeur $r_1 = \frac{V_1}{i_1}$ de la résistance apparente, on n'a qu'à poser dans les équations (20) : $V_2 = \rho_2 i_2$ (absence de pile E_2), et à éliminer i_2 ; on trouve :

$$r_1 = I_1 \frac{R_2 + \rho_2}{I_2 + \rho_2} \quad (23)$$

et :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{A}{I_2 + \rho_2} \quad (24)$$

Cette dernière formule exprime le rapport des intensités du courant à l'arrivée (poste 2) et au départ (poste 1) sous l'action d'une pile quelconque placée dans ce dernier poste. Si l'intensité i_2 du courant nécessaire pour faire fonctionner à l'arrivée le récepteur du poste 2 est donnée, on calculera : 1° par la formule (24) l'intensité i_1 nécessaire au départ; 2° par la formule (23) le potentiel $V_1 = r_1 i_1$ au départ à la prise de pile. Ces quantités doivent être connues si l'on a à résoudre le problème du paragraphe précédent (§ 70, 2°).

Lorsque le poste 2 est isolé ($i_2 = 0$), le potentiel doit évidemment décroître (en valeur absolue) de V_1 à V_2 : $V_2 < V_1$. Il en résulte, d'après la deuxième des équations (20) que A est inférieur à β_2 ; pour la même raison, il est inférieur à β_1 . Ces deux conditions peuvent s'écrire, en tenant compte des relations (22) :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 - I_2 \ll R_1 \\ I_2 - I_1 \ll R_2 \end{array} \right. \quad (25)$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{I_2} \gg 1 \\ \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{I_1} \gg 1 \end{array} \right. \quad (25')$$

Ces diverses formules seront utilisées dans la suite.

72. Cas d'une perte uniforme. — Nous n'avons fait aucune sup-

position, dans le paragraphe précédent, sur la nature des dérivations ou pertes de courant le long de la ligne. En général l'état de la ligne n'est point symétrique par rapport aux deux postes extrêmes; R_1 diffère de R_2 , et I_1 de I_2 .

Si les pertes sont réparties d'une manière uniforme et continue, la symétrie existe; alors $R_1 = R_2 = R$ et $I_1 = I_2 = I$. Quoique ce cas soit purement théorique, il offre un certain intérêt. Nous nous proposons de calculer: 1° les relations qui existent alors, d'une part entre la résistance totale R et l'isolement total I , d'autre part entre la résistance ρ et l'isolement ρ' , supposés uniformes, par unité de longueur de la ligne; 2° la répartition du potentiel V et de l'intensité i du courant aux divers points de la ligne.

S'il n'existait aucune perte ($\rho' = \infty$), le potentiel V serait représenté par la loi d'Ohm:

$$V = V_1 - \rho xi$$

x désignant la distance du point de la ligne où le potentiel est V à l'origine, où le potentiel est V_1 .

Mais il existe des dérivations. Le courant i n'est donc plus constant, et la chute d'intensité par unité de longueur est $-\frac{\partial i}{\partial x}$. Cette perte de courant représente précisément le courant dérivé, sur la même longueur, entre la surface du fil, qui est au potentiel V , et le sol au potentiel zéro. La résistance des dérivations latérales par unité de longueur étant ρ' , ce courant a pour intensité $\frac{V}{\rho'}$. Il en résulte:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{V}{\rho'}$$

D'autre part le courant i étant sensiblement constant sur une longueur infiniment petite, la loi d'Ohm est applicable; la chute de potentiel par unité de longueur, soit $-\frac{\partial V}{\partial x}$, a donc pour expression ρi :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = \rho i \quad (26)$$

En éliminant i entre cette équation et la précédente, il vient:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\rho'} V = m^2 V \quad (27)$$

L'intégration de (27) donne pour V une expression de la forme :

$$V = Ae^{-mx} + Be^{mx} \quad (28)$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Par suite, d'après (26), i sera de la forme :

$$i = \frac{m}{\rho} (Ae^{-mx} - Be^{mx}) \quad (29)$$

1^{er} cas. *Ligne isolée au poste d'arrivée.* Si l désigne la longueur de la ligne, on écrira les deux conditions :

$$\begin{cases} V = V_1 & \text{pour } x = 0 \\ i = 0 \dots & \text{pour } x = l \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans (28) et (29), on déterminera les valeurs des constantes A et B qui correspondent au cas étudié, et par suite les expressions de V et de i :

$$V = \frac{V_1}{e^{ml} + e^{-ml}} \left[e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)} \right] \quad (28')$$

$$i = \frac{m}{\rho} \frac{V_1}{e^{ml} + e^{-ml}} \left[e^{m(l-x)} - e^{-m(l-x)} \right] \quad (29')$$

L'isolement apparent I de la ligne est égal au rapport $\frac{V}{i}$ pour $x = 0$:

$$I = \frac{\rho}{m} \frac{e^{ml} + e^{-ml}}{e^{ml} - e^{-ml}} \quad (30)$$

Si l'on porte les valeurs de ρx en abscisses et V en ordonnées,

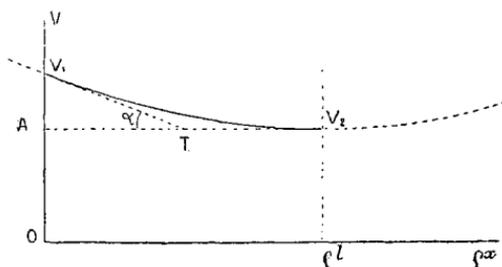


Fig. 29.

l'équation (28') représente une chaînette (fig. 29) dont l'ordonnée initiale $0V_1$ est égale à V_1 et dont le point le plus bas V_2 corres-

pond à $x = l$. L'intensité $i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x}$ est représentée par le coefficient angulaire, changé de signe, des tangentes à la chaînette. Ainsi $i_1 = tg\alpha$; en V_2 ($i_2 = 0$) la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2^e cas. *Ligne reliée au sol au poste d'arrivée.* — On écrira les conditions :

$$\begin{cases} V = V_1 & \text{pour } x = 0 \\ V = 0 & \text{pour } x = l \end{cases}$$

Les équations (28) et (29) deviennent alors :

$$V = \frac{V_1}{e^{ml} - e^{-ml}} \left[e^{m(l-x)} - e^{-m(l-x)} \right] \quad (28'')$$

$$i = \frac{m}{\rho} \frac{V_1}{e^{ml} - e^{-ml}} \left[e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)} \right] \quad (29'')$$

La courbe des intensités est une chaînette semblable à celle de la figure (29). Le potentiel V est représenté par l'aire de cette courbe.

La résistance apparente R de la ligne est égale au rapport $\frac{V}{i}$ pour $x = 0$:

$$R = \frac{\rho}{m} \frac{e^{ml} - e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}} \quad (34)$$

Il est à remarquer que l'on a :

$$R \times I = \rho l \times \frac{\rho'}{l} = \rho \rho'$$

c'est-à-dire que le produit de la résistance vraie ρl par l'isolement vrai $\frac{\rho'}{l}$ est égal au produit de la résistance apparente R par l'isolement apparent I .

On peut, ayant mesuré R et I , en déduire ρl et $\frac{\rho'}{l}$ au moyen des relations (30) et (31), qui donnent ¹ :

$$\rho l = \frac{\sqrt{RI}}{2} L \frac{\sqrt{I} + \sqrt{R}}{\sqrt{I} - \sqrt{R}}$$

$$\frac{l}{\rho'} = \frac{1}{2\sqrt{RI}} L \frac{\sqrt{I} + \sqrt{R}}{\sqrt{I} - \sqrt{R}}$$

L étant le symbole des logarithmes népériens.

¹ Voir *Annales télégraphiques*, 1888, p. 385, note de M. Barbarat sur le rapport du courant d'arrivée au courant de départ, calculs de tables numériques.

Si le rapport $\frac{R}{I}$ est très faible, il en est de même de ml , et l'on a approximativement :

$$\begin{cases} \rho l = R \left(1 + \frac{R}{3I} \right) \\ \frac{\rho'}{l} = I \left(1 - \frac{R}{3I} \right) \end{cases}$$

Exemples numériques. — Soit une ligne souterraine de 400 kilomètres, ayant une résistance ρ de $7\omega 5$ et un isolement ρ' de 1000Ω par kilomètre. L'écart relatif $\frac{R}{3I} = 0,0004$ entre les valeurs vraies et les valeurs apparentes de la résistance et de l'isolement est négligeable dans les limites de précision où l'on se place ordinairement.

Prenons encore une ligne aérienne de 500 kilomètres, ayant une résistance ρ de $6\omega 5$ et un isolement ρ' de 2Ω par kilomètre. On a alors :

$$\frac{\rho}{\rho'} l^2 = m^2 l^2 = 0,8125$$

L'écart relatif entre les résistances ρl et R est $0,2$, ρl étant égale à 3250ω et R à $0,8\rho l = 2600\omega$ seulement. En supposant nulle la résistance du récepteur télégraphique, le courant d'arrivée ne serait que les $0,69$ du courant de départ (formule 24).

CHAPITRE II

CONDUCTEURS A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

73. **Conducteur filiforme.** — Nous avons jusqu'ici considéré implicitement des conducteurs sous forme de fils à dimensions transversales très faibles par rapport à leur longueur, et nous avons supposé que le potentiel était uniforme en tous les points d'une même section droite. Or la section droite d'un fil ff n'est pas équipotentielle : 1° vers les extrémités de ce fil, lorsque celui-ci est relié à des conducteurs de forme différente, par exemple à

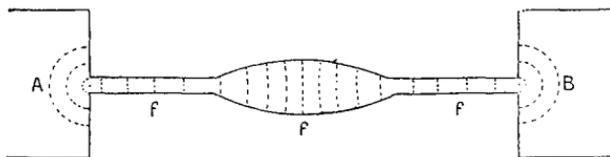


Fig. 30.

des électrodes massives A, B (fig. 30); 2° en tout endroit où la section n'est pas uniforme. La figure montre en pointillé les surfaces équipotentielles.

La résistance d'un fil de section uniforme se calcule par la formule (5) du chapitre précédent :

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

Si la section varie, on applique ordinairement la formule :

$$R = \rho \int \frac{dl}{s}$$

dans laquelle l'intégrale \int est étendue à toute la longueur du fil. La valeur de R ainsi calculée peut être suffisamment approchée.

Mais, pour obtenir une grande précision, on devrait déterminer la forme des surfaces équipotentiellles dans le fil, problème très difficile en général. On trouvera dans le *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell (§§ 306-309) une méthode pour calculer la résistance en pareil cas avec une très grande approximation.

74. Conducteur de forme quelconque. — La détermination des surfaces équipotentiellles et la distribution du courant dans un milieu conducteur quelconque offrent une analogie complète avec la détermination des surfaces équipotentiellles et la distribution du flux d'induction dans un diélectrique. La conductibilité du premier milieu est donnée par la même formule que la capacité du second.

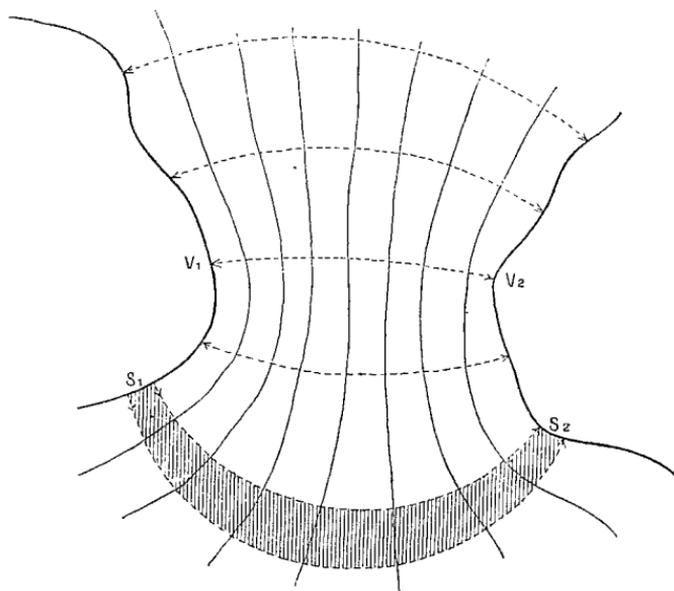


Fig. 31.

Imaginons en effet, dans un milieu conducteur homogène de résistance spécifique ρ , l'espace entre deux surfaces équipotentiellles V_1 et V_2 divisé par les surfaces équipotentiellles intermédiaires (en trait plein, sur la figure 31) et par des canaux orthogonaux à ces surfaces (l'un d'eux est ombré sur la figure). Ces canaux sont analogues aux tubes de force en électrostatique.

En un point quelconque du milieu, nous admettrons que la com-

posante de l'intensité i du courant dans une direction équipotentielle est nulle, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir un courant ou flux entre deux points au même potentiel, chose à peu près évidente. Il en résulte que le courant en chaque point est dirigé suivant la normale aux surfaces équipotentielles et que le flux i d'électricité, qui traverse dans l'unité de temps la base S_1 d'un canal orthogonal, se conservera tout le long de ce canal sans déperdition latérale jusqu'à la base S_2 . En d'autres termes, le canal est un *tube de flux* et le courant i est le même à travers toute section du tube. La résistance d'un tube élémentaire de section S (infinitement petite) et de longueur dn , étant $\rho \frac{dn}{S}$, on peut exprimer cette propriété, en vertu de la loi d'Ohm, par la formule :

$$i = \frac{s}{\rho \frac{dn}{S}} (-dV) = \text{const.}$$

ou

$$i = - \frac{1}{\rho} \frac{dV}{dn} s = \text{const.} \quad (1)$$

Si la figure 31 représentait, non pas un milieu conducteur, mais un milieu diélectrique avec ses surfaces équipotentielles et ses tubes de force, on sait que le flux d'induction q serait constant également à travers toute section d'un tube :

$$q = - \frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} s = \text{const.} \quad (2)$$

Posons :

$$\frac{\rho}{4\pi k} = 0 \quad (3)$$

On voit qu'en chaque point du milieu les valeurs de q et de i sont proportionnelles :

$$q = \theta i \quad (4)$$

La propriété fondamentale (1) des tubes de courant étant identique à celle (2) des tubes d'induction électrostatique, la solution du problème relatif à la distribution du courant sera identique à celle du problème relatif à l'équilibre électrostatique; on n'aura qu'à substituer $i\theta$ à q ou $\frac{q}{\theta}$ à i pour passer d'une solution à l'autre.

Pour déterminer la distribution des potentiels et des intensités dans le milieu conducteur, on aura donc :

1° Pour tout point du milieu, l'équation de Laplace (§ 25) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

2° En tout point des surfaces équipotentielles V_1 et V_2 , en supposant celles-ci données *a priori*, la relation :

$$\frac{i}{s} = - \frac{1}{\rho} \frac{dV}{dn} \quad (6)$$

$\frac{i}{s}$ est l'intensité spécifique ou densité du courant par unité de surface ; c'est l'analogie de la densité électrique superficielle $\frac{q}{S}$.

A ces deux conditions nous devons en ajouter une troisième. En pratique un conducteur, au lieu de remplir tout l'espace compris entre deux surfaces équipotentielles, est limité latéralement à une surface S qui le sépare du milieu diélectrique ambiant. Si l'on suppose nulle la déperdition du courant par cette surface, c'est-à-dire si le diélectrique est parfaitement isolant, le courant i en tous points de S doit lui être tangent ; ou, ce qui revient au même, la normale N en un point quelconque de S doit être une direction équipotentielle, ce qui s'exprime par la formule :

$$\frac{\partial V}{\partial N} = 0 \quad (7)$$

La résistance spécifique ρ du milieu ambiant étant infinie, le cas analogue dans le problème électrostatique consisterait à avoir un certain corps diélectrique séparé, par la surface S , d'un milieu environnant dont le coefficient k est infini ou dont le pouvoir inducteur μ est nul ; ce cas est purement idéal.

Dans le cas où le milieu conducteur se compose de deux parties A et B de conductibilités différentes, on devra en outre écrire une condition à la surface de séparation, exprimant que l'intensité i du courant reste constante le long d'un tube de courant qui traverse cette surface, ou bien que la densité $-\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dn}$ du courant à travers un élément de la surface a même valeur, soit du côté A , soit du côté B .

Si le milieu conducteur est d'une hétérogénéité continue, k et ρ variant d'un point à un autre, on sait que l'équation (5) de Laplace doit être remplacée en Électrostatique par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

En Électrocinétique l'équation analogue sera :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

exprimant que, dans le régime permanent du courant, la quantité totale d'électricité qui pénètre dans un volume quelconque du conducteur par unité de temps est nulle.

75. Vérification expérimentale de la théorie. — Les équations (5), (6), (7) permettent en pratique de calculer *a priori*, dans des cas donnés très simples, la répartition du potentiel à l'intérieur ou à la surface d'un conducteur. Il en résulte la possibilité de vérifier *a posteriori* l'exactitude de la théorie précédente, par une mesure électrométrique des potentiels, à la surface s'il s'agit d'un conducteur solide, dans l'intérieur même si l'on opère sur un liquide. On trouvera dans le *Traité* de Gordon (traduction Raynaud t. II, p. 78-95) la description des expériences variées de M. W.-G. Adams sur des conducteurs liquides et sur des solides pris sous forme de plaques ou feuilles métalliques minces. Pour obtenir les surfaces équipotentiellles dans un liquide, il y introduisait deux électrodes reliées par des fils isolés aux bornes d'un galvanomètre. L'une de ces électrodes restant fixe, l'autre était promenée en divers points tels qu'aucun courant ne passât dans le galvanomètre. Ces points, repérés par trois coordonnées rectangulaires, appartenaient évidemment à des surfaces équipotentiellles.

Kirchhoff, dès 1846, avait fait des expériences semblables sur des plaques circulaires reliées par deux points CC de leur contour aux pôles d'une pile (fig. 32). En touchant une telle plaque au moyen de deux électrodes reliées à un galvanomètre, et dont l'une restait fixe tandis que l'autre se déplaçait, il obtenait : 1° une

courbe équipotentielle en joignant les points où l'application de l'électrode mobile ne donnait pas de courant dans le galvanomètre ; 2° d'autres courbes correspondant à des différences de potentiels V_1, V_2, V_3, \dots en intercalant, entre une des électrodes et le galvanomètre, des piles thermoélectriques de forces électro-

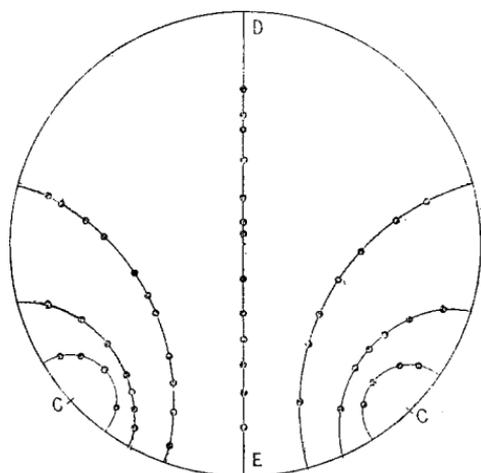


Fig. 32.

motrices V_1, V_2, \dots , et promenant l'électrode mobile aux divers points pour lesquels le courant dans le galvanomètre était nul, la force électromotrice de la pile faisant alors équilibre à la différence de potentiel des électrodes. Kirchhoff mesurait enfin l'intensité du courant en un point de la plaque, en grandeur et en direction, au moyen d'une petite aiguille aimantée placée très près et au-dessus ¹.

Les expériences de Kirchhoff ont vérifié la théorie d'une manière très satisfaisante. Si l'on se reporte à la distribution des potentiels sous l'action de droites parallèles chargées de quantités q et $-q$ d'électricité par unité de longueur (§ 40), on sait que l'on a en un point quelconque situé aux distances r_1 et r_2 des deux droites :

$$V = 2kqL \frac{r_1}{r_2} + \text{const.}$$

Dans le cas de deux droites parallèles qui seraient des *sources de*

¹ Voir Verdet • Conférences de Physiques t. I p. 172, 189

courant et qui débiteraient une intensité i par unité de longueur, la distribution des potentiels, d'après la théorie électrocinétique, sera la même encore, q étant seulement remplacé par $\theta i = \frac{\rho}{4\pi k} i$.
 Donc :

$$V = \frac{\rho i}{2\pi} L \frac{r_1}{r_2} + \text{const.}$$

Les lignes de flux étant des cercles rencontrant les droites électrisées et situés dans des plans perpendiculaires à ces droites, si l'on considère une plaque mince, telle que celle de la figure 32, limitée par deux plans normaux aux droites projetées en CC et par un cylindre circulaire de flux CDCE, la surface de cette plaque est entièrement une surface de flux. Il en résulte que la plaque peut être détachée du milieu sans que les lignes de flux et, par suite, les surfaces équipotentielle soient altérées. Mais alors on se trouve dans le cas des expériences de Kirchhoff, les droites électrisées étant réduites à de courtes électrodes C, C. Ce savant a vérifié la loi de distribution des potentiels représentée par la formule précédente; les courbes équipotentielles sont des arcs de cercles (représentés sur la figure); les lignes de flux sont des arcs de cercles reliant les électrodes (non représentés).

M. Quinke, en 1856, a vérifié la théorie dans le cas des plaques rectangulaires.

76. Conducteurs anisotropes. — Nous avons considéré implicitement jusqu'ici le cas de conducteurs isotropes, c'est-à-dire dont la conductibilité en un point quelconque a une valeur déterminée indépendante de la direction du courant. Un élément s de surface équipotentielle est alors traversé normalement par le courant, et la densité $\frac{i}{s}$ est proportionnelle à la force électrique $-\frac{dV}{dn} = F$ au point en question :

$$F = \rho \frac{i}{s}$$

Suivant une direction Ox , la composante $X = -\frac{\partial V}{\partial x}$ de la force électrique est égale à $F \cos \alpha$, α désignant l'angle des directions X et F . D'autre part, un élément $s' = \frac{s}{\cos \alpha}$ de surface perpendi-

culaire à Ox , ayant pour projection s sur la surface équipotentielle, sera traversé par la même intensité i de courant; la densité u du courant oblique à travers s' est donc :

$$u = \frac{i}{s'} = \frac{i}{s} \cos \alpha$$

Il en résulte :

$$\left. \begin{array}{l} X = \rho u \\ \text{De même : } Y = \rho v \\ Z = \rho w \end{array} \right\} \quad (8)$$

Y et Z désignant les composantes de la force électrique, v et w les densités du courant parallèlement à deux directions Oy et Oz .

Les formules (8) ne sont plus exactes en général dans le cas de conducteurs cristallisés. Par analogie avec la théorie de la conductibilité calorifique, on a proposé de les remplacer par les formules linéaires plus générales :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \rho_1 u + \alpha_3 v + \beta_2 w \\ Y = \beta_3 u + \rho_2 v + \alpha_1 w \\ Z = \alpha_2 u + \beta_1 v + \rho_3 w \end{array} \right. \quad (9)$$

Si l'on suppose, par raison de symétrie comme en chaleur : $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$, on démontre facilement que par un changement convenable des axes de coordonnées, on peut annuler les coefficients α et β et ramener les équations (9) à la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \rho_1 u \\ Y = \rho_2 v \\ Z = \rho_3 w \end{array} \right. \quad (9')$$

Il existe alors trois directions rectangulaires suivant lesquelles la densité du courant est proportionnelle à la composante de la force électrique.

Mais les formules (9') paraissant encore insuffisantes pour rendre compte de tous les phénomènes de conductibilité électrique, on a été conduit à étudier les propriétés du système plus général (9). Ces propriétés permettraient notamment, d'après certains auteurs, d'expliquer le phénomène de Hall (§ 189). Nous ne nous étendrons pas davantage sur la théorie des conducteurs anisotropes, qui est très peu avancée au point de vue des vérifications expérimentales¹.

¹ Voir : Maxwell, § 297-305; *Lumière électrique*, 1887, t. 23, p. 51 et 201, notes de M. Elie.

77. **Conduction et induction simultanées.** — Revenons au cas d'un milieu isotrope. Le diélectrique interposé entre les armatures d'un condensateur n'est, en pratique, qu'un *médiocre conducteur*. Il s'y produit à la fois les phénomènes d'*induction* électrostatique et de *conduction*. Lorsque la conductibilité du milieu devient trop grande, le premier phénomène est masqué par le second au point qu'il devient impossible à mesurer, par exemple, la capacité du condensateur. Mais rien n'autorise à supposer que le phénomène d'induction ne se produit plus. On sait, par exemple, que la résistance spécifique ρ du diélectrique (gutta-percha, etc.) peut être notablement réduite, sous l'influence de la chaleur ou de toute autre cause, sans que le pouvoir inducteur μ ou son inverse k varient sensiblement.

Quoi qu'il en soit, si les deux ordres de phénomènes se produisent simultanément dans le milieu interposé entre deux surfaces équipotentielles V_1 et V_2 (fig. 34), d'après ce que l'on a vu plus haut, le flux d'induction q et l'intensité i , dans un tube quelconque de flux, sont proportionnels, et l'on a :

$$q = \theta i = \frac{\rho i}{4\pi k}$$

Si V_1 et V_2 sont les armatures d'un condensateur, elles sont chargées de quantités Q et $-Q$ d'électricité, et en outre elles sont traversées par un courant total I qui va de V_1 à V_2 . Q et I étant les sommes des valeurs de q et de i dans les divers tubes de flux, on a :

$$Q = \theta I \tag{10}$$

D'autre part, C , R et K désignant la capacité, la résistance et la conductibilité du milieu en question, on a, par définition :

$$\begin{aligned} Q &= C (V_1 - V_2) \\ I &= K (V_1 - V_2) = \frac{1}{R} (V_1 - V_2) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{C}{K} = CR = \theta = \frac{\rho}{4\pi k} \tag{11}$$

Ainsi le rapport de la capacité à la conductibilité, ou le produit

de la capacité par la résistance, est égal à un coefficient θ indépendant de la forme et des dimensions du milieu, et ne dépendant que de la nature de celui-ci. Ce coefficient θ , étant le rapport d'une quantité Q d'électricité à une intensité I , a les dimensions d'un temps. Il a d'ailleurs une signification très simple. La formule (10) montre en effet que θ est le temps pendant lequel la quantité $I \theta$ d'électricité transportée par le courant de V_1 en V_2 est égale à la charge Q des armatures ou électrodes. Ou encore θ est le temps nécessaire pour que la charge Q des armatures, perdue par voie de conduction, soit renouvelée intégralement par la source électrique.

78. Electricité à l'intérieur d'un conducteur hétérogène. — Supposons que le milieu soumis aux actions électrostatique et électrocinétique simultanées se compose de portions A_1, A_2, A_3, \dots respectivement homogènes et dont les coefficients θ sont égaux à $\theta_1,$

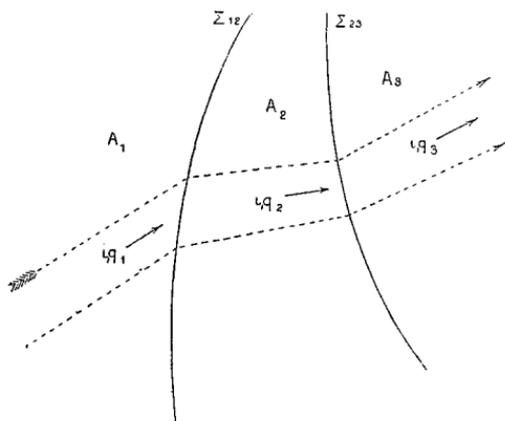


Fig. 33.

$\theta_2, \theta_3, \dots$ (fig. 33). Un tube de flux quelconque se réfracte aux surfaces de séparation $\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \dots$. L'intensité i est constante tout le long de ce tube en régime permanent, l'électricité ne devant pas s'accumuler indéfiniment en certains points. Il en résulte que les flux d'induction :

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta_1 i \\ q_2 &= \theta_2 i \\ q_3 &= \theta_3 i \\ &\vdots \end{aligned}$$

ont des valeurs différentes d'un milieu au suivant, et, par suite, que les éléments S_{12} , S_{23} ,... découpés par le tube sur les surfaces Σ_{12} , Σ_{23} ,... doivent être chargés de quantités d'électricité respectivement égales aux accroissements $(q_2 - q_1)$, $(q_3 - q_2)$,...

Donc, en régime permanent, les surfaces de séparation de milieux homogènes sont électrisées, la densité électrique superficielle en chaque point étant :

$$\frac{q_2 - q_1}{s_{12}} = (\theta_2 - \theta_1) \frac{i}{s_{12}}$$

$$\frac{q_3 - q_2}{s_{23}} = (\theta_3 - \theta_2) \frac{i}{s_{23}}$$

$$\vdots$$

et $\frac{i}{s}$ représentant l'intensité spécifique du courant en un point à travers une surface de séparation Σ .

Si le coefficient θ d'un milieu traversé par un courant permanent varie d'une manière continue, il y aura de l'électricité dans toute la masse du conducteur. Si l'on considère dans un tube de flux deux sections normales s à une distance infiniment petite dn l'une de l'autre, le flux d'induction : $q = i \theta s$ s'accroît de $id\theta$ lorsqu'on passe de la première section à la seconde; $id\theta$ représente donc la quantité d'électricité existante dans le tube élémentaire compris entre les deux sections s . La densité électrique par unité de volume est donc :

$$\frac{id\theta}{s \cdot dn} = \frac{i}{s} \frac{d\theta}{dn}$$

$\frac{i}{s}$ est l'intensité spécifique du courant dans le tube au point considéré.

Ainsi, dans un câble sous-marin, une variation non uniforme de la température du diélectrique (caoutchouc ou gutta-percha) rend celui-ci hétérogène et peut produire en partie les phénomènes d'absorption électrique et de charge résiduelle (§ 24). On admet qu'une élévation de température de 5° environ double la conductibilité de la gutta sans changer son pouvoir inducteur, et par conséquent diminue de moitié la valeur de $\theta = \frac{\rho}{4\pi k}$.

En général, le diélectrique d'un condensateur n'étant pas parfait

tement isolant et homogène, il se produit dans sa masse un courant i , en même temps qu'il s'imprègne d'une quantité d'électricité qui y pénètre plus ou moins lentement suivant le degré d'isolement de la substance et dont la densité en chaque point tend vers la valeur limite $\frac{i}{s} \frac{d\theta}{dn} = \frac{q}{s} \frac{d\theta}{\theta \cdot dn}$. Telle est en partie la cause du phénomène de la charge résiduelle exposé au § 21.

Dans un milieu homogène, ou même dans un milieu hétérogène en tous les points duquel le rapport $\frac{\varphi}{4\pi h} = \theta$ est constant, les différences $(\theta_2 - \theta_1)$, $(\theta_3 - \theta_2)$,... étant nulles, ainsi que $\frac{d\theta}{dn}$, aucune charge électrique ne peut exister tant que le régime du courant est permanent. On exprime ce résultat en disant qu'il n'existe pas d'électricité *libre* à l'intérieur d'un conducteur homogène traversé par un courant permanent. On a cherché à l'expliquer, dans l'hypothèse de la matérialité de l'électricité, par des considérations qui paraissent peu satisfaisantes¹.

79. Sur la nature du courant électrique. — Nous avons supposé jusqu'à présent, pour la commodité du langage, que le courant est constitué par un transport d'électricité d'une partie à une autre du conducteur. Aussi peut-il paraître étonnant qu'il n'y ait pas d'*électricité libre* à l'intérieur, c'est-à-dire qu'une quantité q d'électricité, qui passe d'une extrémité à l'autre du conducteur, n'existe pas à un instant donné en un point intermédiaire, comme cela a lieu pour une quantité de liquide qui passe d'un bout à l'autre d'un tuyau. Cette difficulté disparaît si l'on se place au point de vue qui a déjà été développé aux §§ 44 et 46.

L'électricité ne serait point une quantité localisée à la surface des conducteurs ou en certains points d'un milieu isolant. Ce milieu serait dans un état de polarisation caractérisé par la grandeur et la direction de la force électrique en chaque point, et les traces d'électrisation qui se manifestent sur une section d'un tube d'induction, par exemple, seraient simplement l'indice d'une variation du flux d'induction en passant d'un côté à l'autre de cette section. Si l'on imagine que la force électrique et, par suite, le flux d'induction

¹ Mascart et Joubert, § 203.

varient dans le même rapport aux divers points d'un tube, le flux ne cessera d'être constant dans toute l'étendue de celui-ci, il n'y aura donc pas apparition d'électricité le long du tube, quoiqu'il y ait variation de la quantité d'électricité apparente sur chacune de ses bases.

Pour mieux faire comprendre ceci, considérons le cas d'un condensateur chargé dont le diélectrique est homogène et imparfaitement isolant. Un courant I va de l'une à l'autre armature, produisant une diminution $I dt$ de la charge Q dans le temps dt , de telle sorte que l'on a :

$$dQ = - I dt$$

Comme d'après (10) Q est égal à θI , on peut écrire :

$$\frac{dQ}{Q} = - \frac{dt}{\theta}$$

d'où, en intégrant et écrivant que la charge initiale ($t = 0$) du condensateur est Q_0 :

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\theta}}$$

Si donc la charge n'est pas renouvelée sans cesse par une force électromotrice extérieure, elle décroît indéfiniment suivant une loi exponentielle. Il en est de même du flux à travers un tube d'induction quelconque : c'est-à-dire que l'état de polarisation tend à se dissiper avec une vitesse proportionnelle, à chaque instant, à la charge actuelle Q et inversement proportionnelle au coefficient θ . Le courant I n'est autre chose que la dissipation $\left(-\frac{dQ}{dt}\right)$ du flux d'induction dans l'unité du temps.

L'énergie électrique W du champ diminue en même temps que a charge Q . La force électrique $f = -\frac{dV}{dn}$ en un point quelconque restant proportionnelle à Q , on aura :

$$\frac{df}{f dt} = \frac{dQ}{Q dt} = - \frac{1}{\theta}$$

d'où :

$$\frac{d(f^2)}{f^2 dt} = - \frac{2}{\theta}$$

Si donc on admet (§ 46) que l'énergie électrique du champ par unité de volume a pour expression

$$p = \frac{f^2}{8\pi k}$$

la diminution d'énergie, par unité de temps, dans un tube de section dS et de longueur dn , sera :

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{f^2}{8\pi k} \right) dS \, dn = \frac{f^2}{4\pi k_0} dS \, dn = \frac{2}{0} p dS \, dn$$

ou encore :

$$\frac{1}{\rho} f^2 \, dS \, dn \quad (12)$$

Dans ce même tube, l'énergie calorifique dégagée par le courant, en vertu de la loi de Joule, est égale au produit de la résistance $\rho \frac{dn}{dS}$ par le carré de l'intensité $i = -\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dn} dS = \frac{fdS}{\rho}$, soit :

$$\rho \frac{dn}{dS} \left(\frac{fdS}{\rho} \right)^2 = \frac{1}{\rho} f^2 \, dS \, dn \quad (12')$$

Les expressions (12) et (12') étant identiques, on exprimera ce résultat en disant que l'énergie électrostatique existant dans le volume $dS \, dn$ est consommée et transformée intégralement en chaleur *sur place*.

Dans l'exemple précédent, il est à remarquer que le courant I part normalement de l'une des armatures du condensateur pour aboutir normalement à l'autre sans se fermer à l'extérieur; en d'autres termes, le circuit électrique est *ouvert*. Ce cas, quoique plus compliqué en apparence que celui du courant permanent, est en réalité plus simple. Le courant est un phénomène purement local constitué par la dissipation sur place de la polarisation du diélectrique et de l'énergie du champ. Ce caractère local est confirmé par l'absence d'action du courant sur une aiguille aimantée. (V. *Electro-magnétisme*.)

Dans le cas d'un circuit conducteur parcouru par un courant permanent, on doit encore avoir dans chaque élément de volume du , par unité de temps, la transformation en chaleur d'une fraction $\frac{2}{\theta} p \, du$ de l'énergie électrique du champ. Mais à ce phénomène local s'en superpose un autre consistant dans le renouvellement

incessant, par une force électromotrice extérieure, de l'état de polarisation et de l'énergie du champ, qui tendent à se dissiper par l'effet de la conductibilité de la substance. Par quelle voie l'énergie fournie par la source électromotrice (pile, etc.) est-elle transmise aux divers points du conducteur? Suit-elle uniquement la masse du conducteur, ou bien est-elle transmise également par le diélectrique ambiant? D'après les idées exposées au § 44, cette dernière hypothèse paraît la plus vraisemblable. Mais la question posée ne pourra être abordée utilement que lorsque nous aurons constaté que les ondes électriques qui transmettent l'énergie à travers un milieu quelconque, isolant ou non, accusent leur passage par des effets électromagnétiques.

Désignons par Q le flux d'induction à travers un tube quelconque, par I_1 la dissipation de ce flux qui tend à se produire dans l'unité de temps par suite de la conductibilité du milieu, par I_2 le renouvellement du flux dans le même temps sous l'action d'une force électromotrice extérieure. On a évidemment :

$$\frac{dQ}{dt} = -I_1 + I_2$$

Dans le régime permanent Q est constant, et $I_2 = I_1$. Mais en général I_1 et I_2 sont différents. La distinction entre ces deux quantités est très importante; car l'on est conduit à considérer les effets magnétiques produits par le courant comme dus à I_2 seul et non à I_1 (§ 79). La définition de I_2 découle précisément de la relation :

$$I_2 = I_1 + \frac{dQ}{dt} \quad (13)$$

80. Mesure du coefficient θ pour les diélectriques. — Les considérations précédentes font ressortir l'importance du coefficient θ , dont la notion est d'ailleurs plus simple que celle de la résistance spécifique ρ . La valeur de θ est extrêmement faible pour les métaux et autres bons conducteurs, et sa mesure n'a pu être effectuée jusqu'ici; de telle sorte que l'existence des phénomènes d'induction dans les métaux, toute probable qu'elle est, reste à l'état d'hypothèse jusqu'à ce qu'elle soit mise en évidence par une

méthode expérimentale assez sensible. Nous ne nous occuperons donc que des valeurs de θ pour les diélectriques.

Supposons qu'un condensateur chargé soit isolé de la source électrique, de telle sorte que sa charge Q se perd graduellement. On a vu ci-dessus (§ 79) que la loi de variation de Q est donnée par la formule :

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\theta}}$$

ou :

$$\frac{t}{\theta} = L \frac{Q_0}{Q}$$

Le temps t se mesure facilement. Le rapport des charges Q_0 et Q , étant le même que celui des différences de potentiels V_0 et V des armatures au commencement et à la fin du temps t , se mesurera au moyen d'un électromètre. La formule précédente fera donc connaître la valeur de θ pour le diélectrique employé dans le condensateur. Celui-ci peut être un câble télégraphique par exemple (*Méthode de Siemens*).

Si l'on note le temps $t_{\frac{1}{2}}$ au bout duquel la charge a diminué de moitié ($Q_0 = 2 Q$), on aura :

$$\theta = \frac{t_{\frac{1}{2}}}{L2} = 1,44 t_{\frac{1}{2}}$$

81. Calcul de la résistance d'un milieu conducteur. — La formule (11) :

$$\frac{C}{K} = CR = \theta = \frac{\rho}{4\pi k}$$

permet de trouver immédiatement la valeur de la résistance R d'un milieu compris entre deux *surfaces équipotentiell*es, dont on connaît déjà la capacité C et le coefficient θ .

1° *Deux sphères concentriques équipotentiell*es. — Si r_1 et r_2 sont leurs rayons, la capacité du milieu compris entre ces deux sphères est (§ 35) :

$$C = \frac{1}{k} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

donc la résistance du milieu compris entre les sphères est :

$$R = \frac{\theta}{C} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (14)$$

Si r_2 est infini, cas d'une sphère seule, on a : $R = \frac{\rho}{4\pi r_1}$.

2° *Deux sphères excentriques.* — Si leurs rayons r_1 et r_2 sont très faibles relativement à leur distance, leurs potentiels V_1 et V_2 seront sensiblement : $\frac{kQ_1}{r_1}$ et $\frac{kQ_2}{r_2}$, comme si pour chacune d'elles le potentiel V était dû seulement à sa charge propre Q . En supposant que tous les tubes de force partant de l'une aboutissent à l'autre, on a : $Q_2 = -Q_1$; et, par suite, la capacité du système est :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

La résistance du même milieu sera :

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (15)$$

Elle est indépendante de la distance des deux sphères.

Un plan passant par les centres de ces sphères, et séparant le milieu en deux parties **A** et **B** symétriques, est une surface de flux. Donc si l'on supprime une moitié **B**, rien ne sera changé dans les flux et les surfaces équipotentielles de **A**. On réaliserait ce cas en enfonçant à moitié en terre deux électrodes sphériques de rayons r_1 et r_2 qui seraient maintenues aux potentiels V_1 et V_2 . La conductibilité de la terre entre ces deux électrodes (en supposant la résistance spécifique uniforme, ou en prenant une valeur moyenne ρ) est celle de la moitié **A** du milieu indéfini, c'est-à-dire la moitié de la conductibilité totale, ou $\frac{1}{2R}$. Donc la résistance de la terre sera le double de R soit :

$$2R = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Les tentatives faites par divers physiciens, notamment par Matteucci, pour vérifier ce résultat, ne paraissent pas très concluantes ¹.

V. Verdet: *Conférences de Physique*, t, I, § 187-189.

3° *Deux cylindres concentriques.* — Soient r_1 et r_2 leurs rayons. La capacité de ce système, sur une longueur l prise assez loin des extrémités, est (§ 38) :

$$C = \frac{l}{2kL \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

La résistance du même système sera :

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} L \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = 0,366 \frac{\rho}{l} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (16)$$

4° *Deux cylindres excentriques.* — En supposant que tous les tubes de forcé partant de l'un des cylindres aboutissent à l'autre, nous avons trouvé (§ 40) :

$$C = \frac{l}{2kL (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})}$$

On aura donc :

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} L (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \quad (17)$$

en posant :

$$\alpha = \frac{a^2 - (r_1^2 + r_2^2)}{2r_1 r_2} \quad (17')$$

r_1 et r_2 désignant les rayons des deux cylindres, a la distance de leurs axes.

Dans le cas d'un fil télégraphique de rayon r_1 , à une hauteur h au-dessus du sol, on trouverait de même :

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} L \left(\frac{2h}{r_1} \right) = 0,366 \frac{\rho}{l} \log \left(\frac{2h}{r_1} \right) \quad (18)$$

Les formules (16) et (18) applicables respectivement au calcul de la résistance du diélectrique (gutta-percha ou air), ou *résistance d'isolement*, dans le cas d'un câble télégraphique sous-marin ou souterrain et dans celui d'un fil aérien, feront connaître la résistance spécifique ρ de ces diélectriques lorsqu'on connaîtra l , r_1 , r_2 et h et que l'on aura mesuré R . Il est à remarquer que l'isolement R d'une ligne est en raison inverse de la longueur l , ce que l'on pouvait prévoir *a priori*, puisque le courant total qui va

du fil au sol environnant est proportionnel, toutes choses égales d'ailleurs, au développement total de la ligne.

82. Applications numériques. — 1° Cas d'un câble sous-marin d'un type courant :

$$\frac{r_2}{r_1} = 3,15$$

et :

$$\log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = 0,498$$

ce qui correspond à des poids de cuivre et de gutta égaux à 48^{gr} et à 63^{gr} par mille marin. Supposons que l'isolement kilométrique soit de 10000 megohms : $R = 10^{10}$ ohms pour :

$$l = 1 \text{ kilom.} = 10^{-1} \text{ (unités pratiques)}$$

On trouve :

$$\rho = \frac{10^{10} \times 10^{-1}}{0,366 \times 0,498} = 5,48 \times 10^6$$

c'est-à-dire que la résistance d'un cube du diélectrique de 10⁹ centimètres de côté serait égale à $5,48 \times 10^6$ ohms. La résistance d'un *centimètre cube* serait : $10^9 \rho = 5,48 \times 10^{15}$ ohms, à la température à laquelle on a fait la mesure de R.

2° Supposons que la valeur de θ mesurée, pour un câble à 15°, d'après la méthode indiquée plus haut, ait été trouvée égale à 20 minutes, valeur assez commune; et que d'autre part la capacité kilométrique de ce câble soit de 0,16, On a alors :

$$\begin{aligned} \theta &= 20 \times 60 = 1200 \text{ secondes} \\ C &= 0,16 \times 10^{-6} \text{ } \Phi \end{aligned}$$

Il en résulte pour l'isolement kilométrique du câble :

$$R = \frac{\theta}{C} = \frac{1200}{0,16 \times 10^{-6}} \omega = 7500 \Omega$$

3° La capacité et l'isolement kilométriques d'une ligne aérienne sont respectivement égaux à 0,006 et 50 Ω . Quelle est la valeur de θ ?

On a :

$$C = 0,006 \times 10^{-6} \Phi$$

$$R = 50 \times 10^6 \omega$$

d'où :

$$\theta = CR = 0^s,3$$

On voit que la valeur de θ est en général considérablement moindre pour les lignes aériennes que pour les lignes sous-marines, ce qui constitue en faveur des premières un grand avantage au point de vue de la rapidité des transmissions télégraphiques.

CHAPITRE III

ÉLECTROLYSE

83. **Phénomène de l'électrolyse.** — Si dans un circuit traversé par un courant se trouve un liquide qui ne soit pas un corps simple, on constate que ce liquide subit une décomposition. Si, par exemple, deux fils de platine plongent dans un voltamètre à eau acidulée et mettent celui-ci en communication avec le circuit, une couche d'oxygène vient se former sur le fil par où le courant entre dans le voltamètre, tandis que le fil de sortie se recouvre d'hydrogène. Au bout de peu de temps, ces gaz commencent à se dégager, et l'on peut les recueillir sous des cloches renversées. Les poids de ces gaz dégagés sont constamment dans la proportion de 8 à 1 nécessaire pour reconstituer l'eau qui a été décomposée. Aucune trace de décomposition n'apparaît dans la masse même du liquide ; le phénomène paraît localisé à la surface des fils de platine.

Faraday a donné à ce phénomène le nom d'*électrolyse*. Il appelle *électrolyte* le liquide décomposé, *électrodes* les fils d'entrée et de sortie du courant, le fil d'entrée étant l'électrode positive ou *anode* et le fil de sortie étant l'électrode négative ou *cathode*.

Les produits ou éléments de la décomposition s'appellent les *ions*. L'élément qui se porte à l'électrode positive (oxygène dans le voltamètre à eau acidulée) est dit électronégatif ; celui qui se porte à l'électrode négative (hydrogène) est dit électropositif. On appelle respectivement *anion* et *cation* les éléments électronégatif et électropositif ; mais ces noms sont peu usités.

En soumettant à l'électrolyse divers composés : oxydes, chlo-

rures, sulfures, sulfates,... on a reconnu que l'oxygène, le chlore, le soufre, le radical SO^4 ,... se déposent à l'anode; les métaux se déposent à la cathode. Dans ces composés, le métalloïde (ou le radical acide) est donc l'élément électronégatif; le métal ou l'hydrogène est électropositif. Toutefois cette règle n'est pas absolue. Ainsi, dans un composé oxygéné du chlore, l'oxygène est électronégatif et le chlore électropositif. Un élément, tel que Cl , peut donc être positif ou négatif suivant le composé dans lequel il entre. On a dressé une liste des corps simples dans laquelle chaque corps est positif par rapport à ceux qui le précèdent et négatif par rapport à ceux qui le suivent.

Les liquides à la température ordinaire ne sont pas les seuls corps électrolysables. Les sels à l'état de fusion ignée peuvent être également décomposés par le courant.

84. Réactions secondaires. — Dans le cas où l'on fait usage d'électrodes en platine, le phénomène est simple en général et se passe comme on vient de l'indiquer. Toutefois au début de la décomposition, le platine est susceptible d'absorber une certaine quantité d'oxygène (anode) ou d'hydrogène (cathode). C'est là ce que l'on appelle une réaction secondaire, qui vient se superposer au phénomène électrolytique et en compliquer l'étude. Mais cette réaction cesse rapidement lorsque chaque électrode est saturée.

Dans le cas où l'électrolyte est de la potasse, l'oxygène de ce composé doit se porter à l'anode et le métal à la cathode. Or, si la cathode est du mercure, on ne constate aucun dépôt de potassium; par contre, il se forme un amalgame provenant de la combinaison du potassium avec l'électrode négative, sur laquelle il se porte. Ici la réaction secondaire est continue, et non momentanée comme dans l'exemple précédent.

D'une manière générale, lorsqu'une électrode est attaquant par l'élément qui vient s'y déposer, il en résulte une réaction dite secondaire. Ainsi, l'anode ou électrode positive étant un métal oxydable, cuivre, zinc,... si l'un des éléments O , SO^4 ,... vient s'y dégager, le métal sera dissous et il se formera un oxyde, un sulfate.... Supposons que l'anode soit une lame de cuivre, l'électrolyte étant du sulfate du même métal. En même temps que le cuivre

de l'électrolyte se dépose à la cathode par suite de l'électrolyse, un poids équivalent de cuivre de l'anode se combine avec le radical SO^4 rendu libre pour former du sulfate de cuivre. Tout se passe donc comme si le courant ne décomposait pas le liquide et transportait simplement une couche régulièrement croissante de cuivre de l'anode à la cathode. C'est là le principe de la galvanoplastie.

Il peut se produire encore d'autres genres de réactions secondaires, même lorsque les électrodes ne sont pas attaquables par les ions. Soit, par exemple, un voltamètre à sulfate de potasse et à électrodes de platine. Au lieu des dégagements attendus de SO^4 à l'anode et de K à la cathode, on constate des dégagements d'oxygène et d'hydrogène. Ce phénomène s'explique ainsi : le radical SO^4 , se portant à l'anode, y décompose l'eau de l'électrolyte et s'empare de son hydrogène ; il se forme de l'acide sulfurique SO^4H , qui doit rendre l'électrolyte acide vers l'anode, et il se dégage de l'oxygène. A la cathode, le métal K décompose l'eau, ce qui produit un dégagement d'hydrogène, en même temps qu'il se forme de la potasse, qui doit rendre le liquide basique vers la cathode. On vérifie, au moyen du papier de tournesol, que le liquide est en effet devenu acide à l'anode, basique à la cathode.

85. Lois de l'électrolyse. — Si l'on fait abstraction des phénomènes secondaires qui viennent d'être décrits, l'électrolyse obéit à des lois simples qui peuvent se résumer ainsi :

Lorsqu'un électrolyte est traversé par un courant, le poids de l'élément électro-négatif dégagé à l'anode en un temps quelconque est dans un rapport constant avec la quantité d'électricité qui a passé. Ce rapport, qui ne dépend que de la nature de l'élément dégagé, s'appelle son équivalent électro-chimique ; il est proportionnel à l'équivalent chimique.

La découverte de ces lois est due presque entièrement à Faraday, qui les a énoncées dans l'ordre suivant :

Première loi. — Si plusieurs voltamètres semblables, à eau acidulée par exemple, sont disposés en divers points d'un circuit, le poids d'hydrogène dégagé est le même dans tous ces appareils, au bout d'un temps quelconque ; c'est-à-dire que l'intensité de

l'électrolyse ou *intensité chimique* est la même en tous les points du circuit.

Deuxième loi. — Si divers électrolytes : chlorure de cuivre, d'étain, de plomb,.... sont intercalés dans un même circuit et, par conséquent, traversés par un même courant, les poids de cuivre, d'étain, de plomb,.... déposés aux cathodes dans le même temps sont proportionnels aux équivalents chimiques de ces métaux. A un dépôt de 32 grammes de cuivre correspondent des dépôts de 59 grammes d'étain et de 103 gr. 5 de plomb.

Cette loi, ainsi formulée par Faraday, n'est pas générale. Il résulte des recherches de MM. Becquerel et Matteucci que si deux sels différents d'un même métal, par exemple $Cu Cl^2$, et $Cu^2 Cl^2$, sont décomposés par un même courant, les poids de métal déposés dans les deux voltamètres ne sont pas égaux. Les poids de chlore dégagés sont égaux, et par suite les poids de cuivre sont dans le rapport de 1 à 2. D'une manière générale, on a reconnu que la loi énoncée par Faraday est vraie, non pour les métaux ou éléments électropositifs, mais pour les éléments électronégatifs : métalloïdes et radicaux acides.

Lorsqu'un électrolyte comprend plusieurs sels mélangés, le courant décompose suivant les cas un seul de ces sels ou plusieurs simultanément. Les lois qui régissent les décompositions simultanées sont fort complexes et imparfaitement connues. Mais le nombre total des équivalents de chaque sel décomposés est le même pour divers voltamètres traversés par le même courant.

Si le courant est fourni par une pile hydroélectrique, pile Daniell par exemple, l'électrolyse se produit dans celle-ci absolument comme dans un voltamètre. A chaque équivalent d'hydrogène dégagé dans un voltamètre, en un point quelconque du circuit, correspond un équivalent de cuivre déposé à la cathode de la pile et un équivalent de zinc dissous à l'anode par SO^4 . Si, par un procédé quelconque, on change le sens du courant, l'anode et la cathode sont interverties ; le cuivre se dissout et le zinc est mis en liberté.

Troisième loi. — Si un courant, après avoir traversé une branche principale A, se divise entre deux branches B et C, on constate au

moyen de voltamètres semblables placés respectivement dans les trois branches A, B, C, que l'intensité chimique en A est égale à la somme des intensités chimiques en B et C.

Faraday avait été conduit à considérer l'intensité chimique comme représentant l'intensité électrique, et le poids d'électrolyte décomposé en un temps donné comme représentant la quantité d'électricité qui a passé dans le même temps. C'est là une définition nouvelle de la quantité d'électricité. La troisième loi exprime qu'elle satisfait au principe de la conservation de l'électricité.

D'autre part, Pouillet a montré, au moyen de la boussole des sinus, que l'intensité *chimique* est proportionnelle à l'intensité *électromagnétique*, c'est-à-dire à l'action du courant sur un aimant. Warren de la Rue a constaté, à l'aide de mesures électrostatiques, que les poids d'électrolytes décomposés par le passage des décharges de bouteilles de Leyde sont proportionnels aux quantités d'électricité qui passent dans la décharge. — Les travaux de ces divers savants conduisent donc à la loi énoncée au commencement de ce paragraphe.

Les lois précédentes ne paraissent point se vérifier en général d'une manière absolument rigoureuse, à cause des phénomènes secondaires qui viennent souvent masquer l'effet principal et fausser en apparence les résultats. Si l'on veut, par exemple, décomposer un sel métallique et recueillir le métal à la cathode, à moins de précautions spéciales, il pourra se déposer de l'hydrogène, ce qui diminuera d'autant le nombre des équivalents de métal déposé¹. Dans un voltamètre à eau, indépendamment de l'oxygène qui se dégage à l'anode, il peut se former de l'ozone, et le volume du gaz paraît moindre alors que celui qui correspondrait à la quantité d'électricité qui a traversé le voltamètre ; la densité et la régularité du courant ont une grande influence à cet égard. Les gaz recueillis peuvent encore se diffuser dans le liquide, etc.

Il semble que des courants alternatifs ne doivent pas produire une décomposition sensible des électrolytes, la quantité totale d'électricité traversant le voltamètre pendant une période étant

¹ V. Potier, *Comptes rendus*, mars 1889.

nulle. Toutefois, si les alternances sont peu rapides, la quantité d'oxygène déposée sur une électrode (cas d'un voltamètre à eau), pendant une demi-période a le temps de se dégager et ne peut dès lors se combiner avec l'hydrogène déposé pendant la demi-période suivante pour reconstituer le liquide. On peut donc obtenir, à chaque électrode, un dégagement simultané assez abondant des deux produits de l'électrolyse. Les causes qui influent le plus sur ce dégagement sont la période, la densité du courant (§ 74) et la nature des électrodes, qui peuvent condenser plus ou moins les produits de la décomposition électrolytique. Ces phénomènes sont assez complexes, et nous nous bornerons à les signaler¹.

86. Mesure chimique des courants. — D'après ce qui a été dit plus haut, le poids d'une substance décomposé par l'unité d'électricité est proportionnel à l'équivalent chimique de cette substance et s'appelle son équivalent électrochimique. Il est à remarquer que les équivalents chimiques ne sont que des rapports, tandis que les équivalents électrochimiques sont des quantités concrètes. La valeur de ceux-ci dépend de la grandeur de l'unité d'électricité, et, par suite, du système d'unités électriques adopté.

D'après la moyenne des déterminations récentes faites par MM. Mascart, Kohlrausch, lord Rayleigh, l'équivalent de l'argent est 1 milligr., 4173 dans le système pratique, c'est-à-dire que, dans un voltamètre à nitrate d'argent par exemple, abstraction faite des phénomènes secondaires, le passage d'un coulomb dépose 1 milligr., 4173 d'argent à la cathode². Les équivalents chimiques de l'hydrogène, du cuivre et de l'argent, étant respectivement 1,32, 108, on en déduit que le dépôt de 1 gramme d'hydrogène, de 32 grammes de cuivre ou de 108 grammes d'argent correspond au passage de 96,600 coulombs.

Il est plus commode, au point de vue des usages industriels, de présenter ces résultats sous une autre forme. On a donné le nom d'*ampère-heure* à la quantité d'électricité fournie par un courant

¹ V. Manœuvrier et Chappuis, *Comptes rendus*, 18 juin et 2 juillet 1889 ; Ayrton et Perry, *Lumière électrique*, juillet 1889.

² Les nombres donnés par ces savants s'écartent de la moyenne de $\frac{1}{850}$ au maximum. Voir : Mascart et Joubert, t. II, § 918 et 1290.

d'un ampère pendant une heure ou $60 \times 60 = 3600$ secondes, c'est-à-dire 3600 coulombs. On trouve que :

1 ampère-heure dépose	4 gr. 022	d'argent
—	—	1 gr. 184 de cuivre
—	—	0 gr. 03726 d'hydrogène
—	—	0 gr. 3354 d'eau.

Ces chiffres étant déterminés une fois pour toutes, on conçoit que l'emploi du voltamètre permet, à l'aide de simples pesées des éléments déposés, de mesurer en valeur absolue la quantité d'électricité qui traverse un circuit dans un temps donné t . De plus, si l'intensité i du courant est constante, le quotient de cette quantité it d'électricité par le temps t fera connaître l'intensité elle-même. Les galvanomètres ordinaires à indications magnétiques ne donnent, au contraire, en général que des rapports d'intensités, à moins que l'on ne détermine la constante de chaque instrument et l'intensité du magnétisme terrestre, opérations souvent impraticables. Aussi préfère-t-on graduer les galvanomètres industriels à l'avance, par comparaison avec les voltamètres, lorsqu'ils doivent fournir des indications absolues. Quant à l'emploi direct du voltamètre pour la mesure des courants, il n'est avantageux que dans le cas de courants prolongés longtemps (coulombmètres pour distributions électriques) ou de courants intenses, c'est-à-dire pour la mesure de quantités d'électricité égales à un grand nombre de coulombs. Les chiffres ci-dessus montrent en effet le faible poids de cuivre et même d'argent déposé par 1 ampère-heure = 3600 coulombs.

Le voltamètre donnant pratiquement les meilleurs résultats au point de vue des mesures électriques paraît être celui à lames d'argent et à nitrate ou chlorate d'argent. Pour les mesures précises on doit éviter toute réaction secondaire, se servir de lames d'argent très pur et de dimensions d'autant plus grandes que le courant à mesurer est plus intense ; car si la *densité ou intensité spécifique* du courant dépasse certaines limites, le dépôt devient moins régulier. On pèse les lames avant et après le passage du courant, et de l'augmentation de poids de la cathode on déduit la quantité d'électricité écoulée.

Les voltamètres à eau acidulée peuvent également être employés

avec avantage dans certains cas. On peut calculer la quantité it d'électricité écoulee, soit d'après le poids d'hydrogène dégagé à la cathode, soit d'après le volume u occupé par ce gaz, sa pression H et sa température θ étant connues. On a en effet :

$$it = a \frac{uH}{1 + \alpha\theta}$$

α étant le coefficient de dilatation de l'hydrogène et a une constante. La quantité it étant exprimée en coulombs, le volume u en centimètres cubes, la pression H en millimètres de mercure, on a :

$$a = 96600 \frac{\rho_0}{H_0}$$

H_0 étant la pression de 760 millimètres de mercure et ρ_0 la densité, par rapport à l'eau, de l'hydrogène pris à 0° et 760 millimètres ; c'est-à-dire que l'on a :

$$a = 96600 \frac{896 \times 10^{-7}}{760} = 0,01139$$

d'où :

$$it = 0,01139 \times \frac{uH}{1 + \alpha\theta}$$

Pour éviter jusqu'à un certain point la diffusion partielle du gaz dans l'eau et la production d'ozone, d'acide persulfurique, etc., qui tendent en général à se former, on chauffe le liquide à la température de 50° environ.

87. Théories de l'électrolyse. — La quantité d'électricité écoulee étant dans un rapport constant avec le poids des *ions* déposés aux électrodes, on a été amené à considérer chaque équivalent d'un *ion* quelconque comme chargé d'une quantité invariable d'électricité et apportant cette charge à l'électrode, d'où elle s'écoule dans le circuit extérieur. C'est la théorie de Grotthus. Ce savant suppose que dans une pile, zinc-acide sulfurique-cuivre par exemple, le zinc est électrisé positivement, le cuivre négativement, et que chaque molécule d'acide SO^4H se compose d'une molécule de SO^4 chargée négativement et d'une molécule de H chargée po-

sitivement (fig. 34). L'électricité négative de la lame de cuivre attire l'électricité positive de la molécule voisine H; l'électricité positive de la lame de zinc attire l'électricité négative de la molécule voisine SO^+ . Ces actions produisent la décomposition des molécules d'acide voisines des électrodes, H se déposant sur Cu et SO^+ se combinant à Zn. Les molécules mises en liberté, SO^+ près du cuivre, H près du zinc, se recombinaient à travers l'électrolyte. Les charges négative du cuivre et positive du zinc sont neutralisées par les charges contraires que leur apportent H et SO^+ , et la décomposition s'arrête, à moins que le circuit extérieur ne soit fermé, auquel cas les charges apportées par H et SO^+ aux électrodes se recombinaient au fur et à mesure à travers ce

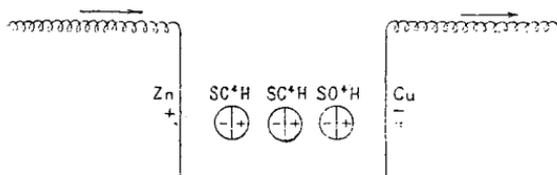


Fig. 34.

circuit. Lorsque le circuit est fermé, la décomposition et, par suite, le courant doivent donc être continus.

Clausius a complété l'hypothèse de Grotthus en supposant que dans un électrolyte liquide, SO^+H par exemple, les molécules sont dans un état d'agitation constant et se meuvent librement. Les chocs qu'elles éprouvent entre elles peuvent provoquer la décomposition des molécules SO^+H en leurs éléments SO^+ et H, qui se recombinaient immédiatement entre eux ou avec ceux des molécules voisines. Le passage du courant aurait pour effet d'orienter ces mouvements dans une direction déterminée en raison de l'intensité du courant. Ces molécules décomposées se reconstitueraient encore dans la masse de l'électrolyte, sauf aux électrodes, où apparaissent les éléments séparés SO^+ et H.

La théorie de Clausius conduit à admettre que l'électrolyse n'est possible que grâce à la mobilité des molécules de l'électrolyte. Si celui-ci est solide, l'électrolyse doit être impossible ou ne se produire que très lentement; il en résulte que le courant produit doit être extrêmement faible, puisque son intensité est dans un rapport constant avec l'intensité chimique. Cette prévision paraît concorder avec l'expérience. Ainsi l'eau à 0° devient brusquement 100,000 fois plus résistante par la congélation (§ 60).

Maxwell a émis l'avis que les charges électriques égales et de signes contraires que possèdent, d'après les idées de Grotthus, les éléments d'un électrolyte, sont dues à la différence de potentiel que ces éléments doivent présenter, comme cela a lieu en général pour deux corps au contact.

Quoi qu'il en soit, les électrolytes présentent un mode de conduction spécial, auquel on a donné le nom de *conduction électrolytique*, et qui est mis en évidence par les faits décrits ci-dessus.

88. Polarisation voltaïque. — On sait, d'après les expériences de Ritter, que si, après avoir fait traverser pendant quelque temps un voltamètre par un courant, on réunit ses électrodes par un circuit extérieur sans force électromotrice, un galvanomètre par exemple, ce voltamètre fournit un courant, dit secondaire, de courte durée en général et dirigé en sens inverse du courant primaire.

E. Becquerel, considérant que le passage du courant primaire est lié au dépôt des ions sur les électrodes, a attribué la production du courant secondaire à la présence et à la recombinaison des ions ainsi déposés. On a vérifié cette hypothèse en déposant directement, par des procédés purement chimiques, sur les électrodes les éléments qui résulteraient de la décomposition de l'électrolyte par le courant, et en constatant que ce dépôt chimique produit un courant exactement semblable au courant secondaire découvert par Ritter. Exemple : pile à gaz de Grove.

Les lois de l'électrolyse s'appliquent au courant secondaire. Comme celui-ci est de sens contraire au courant primaire, les dépôts formés diminuent et finissent par disparaître en même temps que le courant auquel ils donnent naissance. On constate d'ailleurs que si, avant la disparition complète de ces dépôts (hydrogène et oxygène dans le voltamètre à eau), on arrête le courant par la rupture du circuit extérieur, la recombinaison des ions (H et O) s'arrête également. Toutefois dans cette expérience les ions finissent par disparaître par voie de dissolution dans l'électrolyte, mais beaucoup plus lentement que par l'action du courant secondaire.

On a donné au phénomène en question le nom de polarisation,

et l'on dit que la présence des ions électropositif et électronégatif sur les électrodes polarise celles-ci, c'est-à-dire établit entre elles une dissymétrie. Lorsque cette polarisation ou dissymétrie n'existe pas, le courant secondaire ne doit pas se produire. Ainsi dans un voltamètre à sulfate de cuivre et à lames de cuivre, l'effet du courant se réduit, comme on l'a vu, à un transport de cuivre d'une électrode à l'autre. Dans ce cas il n'y a pas polarisation, et l'on constate en effet que le courant secondaire ne se produit pas. Les idées de Becquerel se trouvent donc pleinement confirmées.

La production d'un courant secondaire par un corps liquide ou solide peut être considérée comme une preuve que ce corps est un électrolyte, dans le cas où la décomposition électrolytique serait trop faible pour être constatée directement. Prenons comme exemple le verre, qui n'est pas conducteur à la température ordinaire, mais qui le devient vers 100°. Son mode de conduction est électrolytique, car s'il est placé entre deux électrodes métalliques et qu'on réunisse celles-ci à un galvanomètre après le passage du courant primaire, on observe un courant de sens inverse comme dans le voltamètre. On peut varier l'expérience en faisant passer le courant primaire dans le verre à 100°, puis refroidissant celui-ci avant la cessation du courant. Si au bout de quelque temps, on relie les électrodes à un galvanomètre, on n'observe aucune déviation; mais en chauffant de nouveau vers 100°, on constate la production du courant secondaire dû au dépôt des ions, qui n'ont pu se recombinaer à température inférieure à cause de la résistance du verre. Ce fait et d'autres semblables portent à croire que tout diélectrique se comporte comme un électrolyte lorsque par une élévation suffisante de température il devient conducteur.

Dans les voltamètres ordinaires, les dépôts étant toujours assez faibles, le courant secondaire est de faible durée. Planté a montré que l'or peut accumuler des dépôts considérables par l'emploi d'électrodes en plomb et obtenir ainsi des couples secondaires capables de débiter un courant régulier de longue durée. On est arrivé à emmagasiner, en quelque sorte, dans ces accumulateurs des charges de plus de 600,000 coulombs = 167 ampères-heures correspondant à l'oxydation de 600 grammes de plomb ou 200 gr.

de cuivre. Ils ont une force électromotrice de 2 volts environ et une résistance de quelques centièmes d'ohm. Nous renvoyons au cours de chimie appliquée à l'électricité pour la description et la théorie de ces couples, ainsi que pour les procédés employés en vue d'atténuer la polarisation qui se produit dans les piles primaires et diminue leur force électromotrice.

89. Force électromotrice de polarisation. — La production du courant secondaire montre que le courant primaire a développé dans le voltamètre une force électromotrice tendant à donner un courant de sens inverse, c'est-à-dire une force contre-électromotrice. On observe d'ailleurs que l'intercalation du voltamètre dans un circuit y réduit l'intensité du courant. Cette réduction est due en partie à la résistance propre de l'appareil intercalé, résistance qui peut devenir très grande s'il se forme sur les électrodes des couches gazeuses adhérentes. Mais elle est due aussi à l'existence d'une force contre-électromotrice, que l'on met nettement en évidence en renversant brusquement le sens du courant; car on constate alors un accroissement notable d'intensité provenant de ce que la direction de la force en question est alors celle du courant, au moins jusqu'à ce que les dépôts aux électrodes aient disparu pour faire place à des dépôts inverses.

On peut mesurer la force contre-électromotrice d'un voltamètre en éliminant sa résistance inconnue, soit par le renversement brusque du courant, soit par tout autre procédé. En étudiant le développement de cette force e à partir du moment où le courant commence à passer, on a constaté qu'elle s'établit progressivement et non instantanément, étant nulle d'abord, puis croissant proportionnellement à la quantité d'électricité écoulée ou à l'épaisseur du dépôt électrolytique jusqu'à un certain point, ensuite croissant moins rapidement et tendant vers une limite maximum E , qui est dite la force électromotrice de polarisation du voltamètre employé. La polarisation e est localisée aux deux électrodes, celles-ci y contribuant en général pour des parts inégales. Dans le voltamètre à eau acidulée et à électrodes de platine identiques, la polarisation de l'anode (polarisation par l'oxygène) est plus faible que celle de la cathode (par l'hydrogène).

Dans les premiers instants du passage du courant, la polarisation étant encore très faible, il suffit d'une force électromotrice extérieure minime pour la surmonter. Mais si cette force extérieure \mathcal{E} est inférieure au maximum E , le courant cessera dès que la polarisation e aura atteint la valeur \mathcal{E} . En réalité, la polarisation des électrodes se dissipant assez rapidement à l'état de repos par la diffusion des ions dans la masse de l'électrolyte, il se produit un courant continu très faible, juste suffisant pour maintenir la polarisation des électrodes. Abstraction faite de cette dépolariation spontanée, on voit qu'il faut, pour produire pratiquement la décomposition continue d'un électrolyte, une force électromotrice au moins égale à E . La force électromotrice nécessaire pour décomposer l'eau est d'environ 2 volts.

90. Capacité de polarisation voltaïque. — Si un voltamètre à eau est traversé en un temps très court par une quantité q très faible d'électricité, et mis aussitôt après en communication avec un galvanomètre, celui-ci accuse une décharge de sens inverse à la charge et précisément égale ou peu inférieure à q . Une mesure électrométrique de la polarisation e due à la charge q montre, ainsi que nous l'avons dit plus haut, que lorsqu'on donne à q des valeurs croissantes, le rapport $\frac{q}{e} = C$ est constant jusqu'à un certain point. La valeur de C croît ensuite et devient infinie lorsque q est infinie, e ne pouvant dépasser le maximum E .

Le voltamètre se comporte donc, pour de faibles valeurs de q , comme un condensateur de capacité C . On constate d'ailleurs que la valeur de C est proportionnelle à la surface des électrodes, comme pour les condensateurs à lames parallèles. On a donné à C le nom de capacité de polarisation voltaïque. Dans cet ordre d'idées, les deux électrodes doivent agir comme des condensateurs de capacités C' et C'' placés en série. Si e' et e'' désignent leurs parts respectives de polarisation, on doit avoir, tant que le rapport $\frac{q}{e}$ est constant :

$$\begin{aligned} e' + e'' &= e \\ q &= C'e' = C''e'' = Ce \end{aligned}$$

Si la surface d'une électrode est très grande par rapport à l'autre,

sa capacité C' est très grande par rapport à C'' , par suite $\frac{e'}{e''}$ est très faible, et e'' est sensiblement égale à e . C'est ce que vérifie l'expérience.

Varley, Kohlrausch, ... ont fait des mesures de capacité de polarisation voltaïque. M. Blondlot a trouvé, pour un voltamètre à eau acidulée (à un sixième d'acide sulfurique) et à lames de platine, des nombres variant de 77,000 à 300,000 microfarads par mètre carré d'électrode¹. Ce dernier chiffre représente la capacité d'un condensateur à air ou à vide de même surface et dont l'épaisseur serait $\frac{1\text{mm}}{34,000,000}$ (§ 36). La force d'attraction des deux lames de ce condensateur serait de 520 atmosphères pour une différence de potentiels de 0^r.01 soit 5,200,000 atmosphères pour 1 volt. — Il est à remarquer que Sir W. Thomson, par une méthode toute différente, a trouvé, comme valeur maximum des distances moléculaires entre le zinc et le cuivre soudés, le chiffre de $\frac{1\text{mm}}{30,000,000}$, du même ordre que le précédent².

En étudiant les variations des forces électromotrices de polarisation

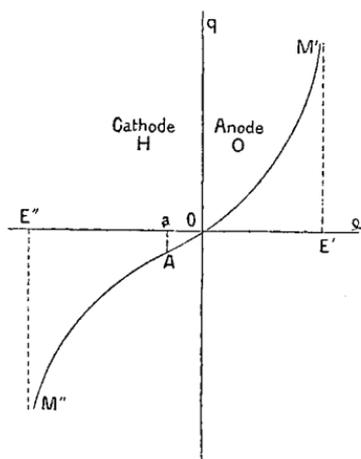


Fig. 35.

aux deux électrodes de platine d'un voltamètre à eau lorsqu'il faisait varier la quantité d'électricité q , et en portant q en ordonnées, e' et e'' (de signes contraires) en abscisses, M. Blondlot a trouvé une courbe semblable à celle de la figure 35. Lorsque la quantité q devient très grande, les polarisations e' et e'' des deux électrodes tendent vers des limites E' et E'' . La polarisation limite E' de l'anode ou électrode positive (polarisation par l'oxygène) est plus faible que la limite

E'' sur la cathode (polarisation par l'hydrogène), comme nous l'avons dit plus haut. La polarisation limite E du voltamètre est la somme $E' + E''$.

Le fil de platine qui sert d'anode deviendra la cathode si l'on

¹ Blondlot : Thèse pour le doctorat, et *Journal de Physique*, 1881.

² Mascart et Joubert, t. I, § 191.

fait passer en sens inverse la quantité q dans le voltamètre ; e changera de signe en même temps que q et la courbe relative à l'anode se prolongera, à gauche de l'axe Oq , par celle de la cathode. L'ensemble des deux courbes a un point d'inflexion en A , qui paraît être le centre géométrique de la courbe $M'OAM''$. La capacité de polarisation C , représentée indifféremment par $\frac{q}{e}$ et par $\frac{q}{e''}$ à l'origine, doit être représentée en général par $\frac{dq}{de}$ pour une électrode possédant déjà une polarisation e ; c'est-à-dire que C est égal au coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point d'abscisse e . Les valeurs de C ne sont donc pas égales pour des valeurs égales et de signes contraires de q ; mais elles sont les mêmes en deux points symétriques par rapport à A .

M. Blondlot, pour expliquer ce fait, a émis l'idée que le platine possède, à l'état neutre ou de polarisation nulle, un potentiel supérieur de la valeur $Oa = \varepsilon$ à celui de l'électrolyte ; de telle sorte que pour une polarisation e , la différence vraie de potentiel entre le platine et l'électrolyte est, non pas e , mais $e_1 = e + \varepsilon$. Les capacités C seraient égales, dans cet ordre d'idées, pour des valeurs égales et de signes contraires (e_1 et $-e_1$) de la différence vraie de potentiel au contact de l'électrode. On verra dans le chapitre suivant que l'on a constaté par divers procédés le fait général d'une différence de potentiel existant au contact de deux corps différents. Du reste, **M. Blondlot** a vérifié expérimentalement l'exactitude de son hypothèse (voir sa thèse). Il a de plus constaté, en prenant divers électrolytes liquides, avec des électrodes de platine, que pour une différence vraie de potentiel $\pm e_1$, la capacité C est indépendante de la nature de ces électrolytes.

On est ainsi amené à supposer que la surface d'une électrode est un condensateur dont la charge est nulle lorsque la différence vraie de potentiel e_1 est nulle elle-même (en A), et qu'à l'état considéré comme neutre il existe à cette surface une charge ou couche double électrique égale numériquement à l'ordonnée Aa (par unité de surface). L'existence de pressions de plusieurs centaines de milliers d'atmosphères tendant à rapprocher les faces du condensateur expliqueraient en partie l'accroissement de la capacité C lorsque e_1 augmente. On verra ci-après, à propos de l'exposé des phénomènes capillaires, le développement de ces considérations.

91. Electromètre capillaire. — Aux phénomènes de polarisation voltaïque se rattachent les phénomènes électrocapillaires qui ont été étudiés principalement par M. Lippmann¹ et que nous allons exposer.

Si un tube vertical, ouvert à ses deux extrémités et terminé à l'extrémité inférieure par une pointe très effilée ou capillaire, contient un liquide tel que du mercure, celui-ci descend sous l'action de son poids, mais seulement jusqu'à une certaine distance de la pointe et reste en équilibre. En augmentant la pression au-dessus du liquide, on fait descendre celui-ci plus avant dans la partie capillaire et l'on arrive, au moyen d'une pression suffisante, à produire l'écoulement continu.

Lorsque le mercure est en équilibre dans le tube, il est terminé

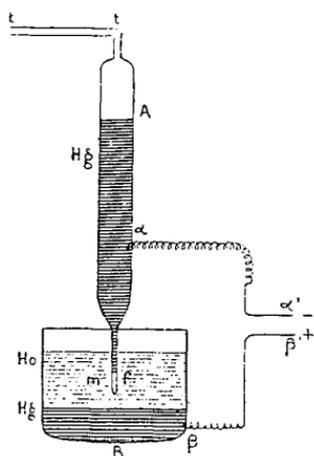


Fig. 36.

dans la pointe par une surface convexe (ménisque), dont la position varie quelquefois sans cause apparente. M. Lippmann a montré que l'on peut rendre cette position invariable dans des conditions déterminées. Soit, par exemple, A le tube vertical contenant le mercure (fig. 36). A la partie supérieure il communique par un tube *tt* avec une chambre où l'on peut faire varier la pression de l'air. A la partie inférieure il est terminé par une pointe *f* plongeant dans de l'eau acidulée (un sixième d'acide sulfurique).

Une couche de mercure occupe le fond du vase B qui contient cette eau acidulée. Le mercure du tube A et celui du vase B peuvent être mis en communication, par des fils $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ traversant les enveloppes de verre, avec une source électrique quelconque, une pile par exemple, qui établit entre eux une différence de potentiel déterminée e . Lorsque les fils $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont isolés, le ménisque *m* peut changer de position accidentellement et lentement. Mais s'ils sont reliés soit directement, auquel cas leur différence de potentiel est nulle, soit par l'intermédiaire d'une source

¹ *Annales de Chimie et de Physique*, 1875, t. V.

établissant entre eux une différence fixe de potentiel égale à e , la position du ménisque est absolument déterminée en fonction de e . Si e varie brusquement, le ménisque prend pour ainsi dire instantanément la nouvelle position correspondante à la nouvelle valeur de e .

On fait communiquer le fil $\beta\beta'$ avec le pôle positif de la source, $\alpha\alpha$ avec le pôle négatif, et l'on peut pousser la différence de potentiel e jusqu'à 2 volts, sans que celle-ci produise un courant continu à travers l'instrument. Au delà de 2 volts la décomposition

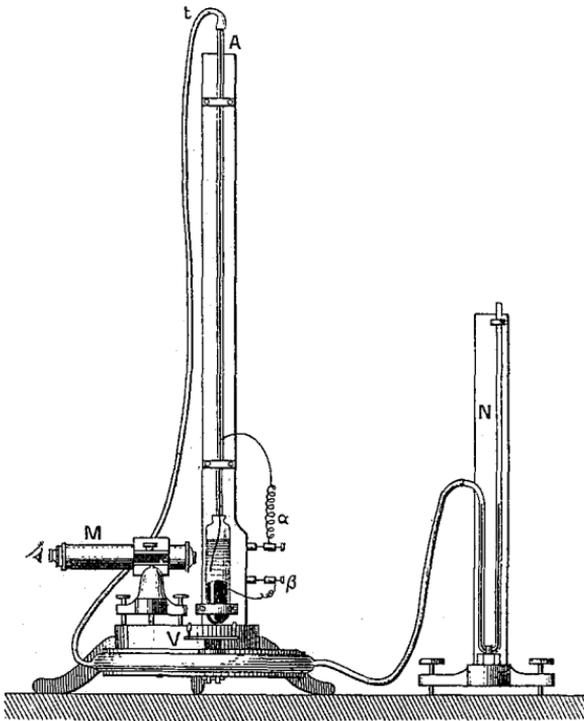


Fig. 37.

de l'eau commence ; des bulles d'hydrogène se dégagent sur le ménisque m et le phénomène précédent n'est plus observable. Entre zéro et 2 volts, à chaque valeur de e correspond une position du ménisque ; et l'observation de cette position servira à mesurer la valeur d'une différence de potentiel inconnue e , si l'instrument a été gradué préalablement. L'électromètre capillaire de M. Lippmann (fig. 37) est fondé sur ce principe.

En pratique, la pointe capillaire du tube A est recourbée et appliquée contre la paroi du vase B. On observe le ménisque au moyen d'un microscope fixe M (fig. 37) grossissant 250 fois et muni d'un micromètre oculaire permettant d'apprécier exactement les déplacements du ménisque. Lorsqu'on établit entre les fils α et β une force électromotrice e (β positif), le ménisque remonte et sort du champ du microscope en général. On le ramène à sa position primitive en exerçant sur le mercure du tube A une pression δp au moyen d'une presse, manœuvrée à l'aide d'une manivelle V, et agissant sur un sac de caoutchouc plein d'air, qui communique d'une part avec le tube A par un tube flexible (tube tt de la figure 36), d'autre part avec un manomètre à air libre N. La pression compensatrice δp (mesurée au manomètre) qu'il a fallu exercer pour ramener le ménisque exactement à sa position primitive, est une fonction de e , et la lecture de δp donne la valeur de e au moyen d'une table ou d'un graphique. Ainsi, pour un tube contenant une colonne de mercure de 750 millimètres de hauteur, M. Lippman a donné la table suivante, où e est exprimé en daniells ($d = 1^v, 07$) et δp en millimètres de mercure :

$e = 0^a 016$	$\delta p = 13^{\text{mm}}$	$e = 0,364$	$\delta p = 235^{\text{mm}}$	$e = 1,261$	$\delta p = 304^{\text{mm}}$
0,024	21,5	0,450	270,5	1,333	279
0,040	40	0,500	288	1,444	239
0,109	89	0,588	314	1,713	128
0,140	111	0,833	356,5	1,833	110
0,17.	131	0,900	358,5	1,888	104
0,197	148	0,909	358,5	2,000	94
0,269	188,5	1,000	353		

Au lieu de cette table, on peut se servir de la courbe de la figure 38, dont les abscisses et les ordonnées représentent e et δp . On voit que la pression compensatrice δp ne croît pas constamment avec e , mais passe par un maximum égal à $358^{\text{mm}}5$ pour $e = 0^a 904$ environ.

Pour un autre tube capillaire de diamètre quelconque, la table et le graphique précédents sont applicables, pourvu que la hauteur de la colonne de mercure soit la même (750^{mm}) ainsi que le degré de concentration de l'eau acidulée ($\frac{1}{6}^e$ d'acide). Les électromètres capillaires sont donc comparables entre eux. Si la colonne de mer-

cure a une hauteur différente h , les valeurs de δp dans le tableau précédent et les ordonnées de la courbe seront simplement multipliées par $\frac{h}{750}$.

Soit, par exemple, à mesurer la force électromotrice e de l'ensemble d'un élément Leclanché et d'un Daniell accouplés par leurs

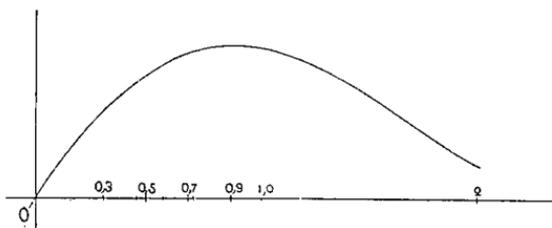


Fig. 38.

pôles de même nom, c'est-à-dire la différence entre les forces $e. m$ de ces deux éléments. La hauteur de la colonne de mercure étant d'un mètre, on trouve : $\delta p = 360^{\text{mm}}7$. En multipliant les δp de la table ci-dessus par $\frac{h}{750} = \frac{1000}{750} = \frac{4}{3}$, on trouve que la pression compensatrice de $360^{\text{mm}}7$ correspond à $e = 0^{\text{d}}450 = 0^{\text{v}}481$.

L'électromètre capillaire sert principalement pour les mesures de forces électromotrices par la méthode de réduction à zéro, auxquelles il convient parfaitement. A cet effet on oppose à la force $e. m.$ inconnue e une différence de potentiel variable à volonté et de valeur connue, par exemple celle qui s'établit entre deux points variables d'un circuit traversé par un courant connu i . La différence de potentiel accusée par l'électromètre est $(e - ri)$, r désignant la résistance intercalée entre les deux points pris sur le circuit. On fait varier r jusqu'à ce que le ménisque revienne à sa position normale, on a alors : $e = ri$. C'est la méthode d'opposition de Poggendorff (voir vi^e partie, Mesure de forces électromotrices). On peut apprécier $\frac{1}{10.000^{\text{e}}}$ de volt. Ce chiffre indique la sensibilité que permet d'atteindre l'instrument.

92. Explication des phénomènes électrocapillaires. — Un liquide quelconque, du mercure par exemple, restant en équilibre dans un tube capillaire au lieu de s'écouler sous l'action de son propre poids et de la pression que l'on peut en outre exercer au-dessus

de lui, on doit admettre l'existence de forces, dites *capillaires* exerçant sur le ménisque inférieur une pression p dirigée de bas en haut, et mesurée par le poids de la colonne augmenté de la pression complémentaire. On démontre (§ 52) que la courbure de la surface, c'est-à-dire la somme des courbures $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ des deux sections normales principales, est la même en tous les points du ménisque, et que la pression capillaire p est proportionnelle à cette courbure :

$$p = A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1)$$

A est appelé la *constante capillaire*; sa valeur dépend de la nature de la colonne liquide et du corps gazeux ou liquide qui se trouve en contact avec elle dans le tube capillaire (dans l'électromètre capillaire la colonne liquide est du mercure, qui est en contact avec de l'eau acidulée).

Pour une position déterminée du ménisque, la forme de sa surface est déterminée : 1° par la condition que la courbure $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ est constante, ce qui revient à une équation aux différences partielles du second ordre; 2° par le diamètre et la forme du tube en ce point, et la valeur de l'angle de raccordement du ménisque avec la paroi du tube (angle nul dans l'électromètre capillaire). Pour faire pénétrer le liquide dans une partie plus effilée, où la courbure $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ sera plus forte, il faut donc exercer une pression p plus forte sur lui. S'il existe une partie cylindrique dans le tube capillaire, $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)y$ étant évidemment constant, p y a une valeur constante, c'est-à-dire que l'équilibre du ménisque y est instable. Il en résulte que l'équilibre sera très peu stable (condition de sensibilité de l'électromètre) si le ménisque est engagé dans une partie très légèrement conique du tube.

On a vu plus haut que, pour une même pression p , la position du ménisque varie avec la différence de potentiel e des deux liquides (mercure-eau acidulée) au contact. Pour ramener le ménisque à une position invariable, il faut exercer une pression compensatrice $\hat{c} p$ fonction de e . M. Lippmann suppose que le ménisque est toujours une surface à courbure constante

$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{Const.}\right)$ et que la constante capillaire A a seule changé d'une quantité δA telle que :

$$p + \delta p = (A + \delta A) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Comme pour $e = 0$ on a :

$$p = A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Il en résulte :

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{\delta A}{A}$$

La constante $(A + \delta A)$ ne dépendant que de la nature des liquides (mercure et eau acidulée) et de la différence de potentiel e , la valeur de $\frac{\delta A}{A}$ et par suite, celle de $\frac{\delta p}{p}$ ne dépendent que de e , lorsqu'on passe d'un électromètre capillaire à un autre; c'est-à-dire que pour une même valeur de e , δp est proportionnel à p . C'est ce que nous avons indiqué plus haut en disant que la table numérique donnée par M. Lippmann pour $p = 750^{\text{mm}}$ de mercure peut servir pour tout autre électromètre semblable, à la condition de multiplier les δp par $\frac{h}{750}$.

Nous avons été conduit, au § 52, à considérer la surface de séparation de deux corps (mercure et eau par exemple) comme présentant une certaine capacité et pouvant recevoir une charge électrostatique. La notion de cette capacité découle expérimentalement des propriétés de l'électromètre capillaire.

En effet cet électromètre comprenant un électrolyte (eau acidulée) entre deux électrodes de mercure se comporte comme un voltamètre. Si on l'accouple avec une force e . *m.* inférieure à celle qui est nécessaire pour décomposer l'eau, les électrodes prennent en un temps très court une charge q qui dépend de la force électromotrice e ; puis le courant cesse. Pour un accroissement de de la force e . *m.* on a un accroissement dq de la charge des électrodes. Le rapport $\frac{dq}{de}$ est la capacité de polarisation voltaïque, variable un peu avec e ainsi qu'on l'a vu (§ 90). Dans l'électromètre, les électrodes ayant pour diamètres environ : 3^{cm} pour le mercure du

vase B et 0^{mm}005 pour le ménisque, la surface de la première est extrêmement grande par rapport à celle de la seconde. Les capacités des électrodes étant dans le même rapport que les surfaces, on voit que la charge dq ne polarisera pas sensiblement l'électrode inférieure; la polarisation de portera entièrement sur la surface du ménisque. On négligera donc l'influence de l'électrode inférieure.

En supposant que chaque unité de surface du ménisque est traversée par la même quantité d'électricité, M. Lippmann a démontré que la capacité C de polarisation voltaïque par unité de surface d'électrode est liée à la constante capillaire A par la relation :

$$C = - \frac{\partial^2 A}{\partial e^2} \quad (2)$$

Le ménisque *étant ramené toujours à la même position* lorsqu'on fait varier e , $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ reste constant, et une double différentiation de (4) donne :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial e^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (3)$$

$\frac{\partial^2 A}{\partial e^2}$ est donc proportionnel à $\frac{\partial^2 p}{\partial e^2}$, que l'on peut déterminer au moyen de la courbe de la figure 38 ou de la table qui a servi à la construire. Cette courbe étant sensiblement parabolique jusqu'un peu au delà de l'ordonnée maximum, p est une fonction du second degré en e , et sa dérivée seconde est constante. Il en résulte que $\frac{\partial^2 A}{\partial e^2}$ et, par suite, la capacité C sont des constantes.

On peut d'ailleurs calculer la valeur de C¹. En divisant (4) et (3) membre à membre, il vient :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e^2} : A = \frac{\partial^2 p}{\partial e^2} : p$$

Le second membre ne contenant la pression p que par le rapport $\frac{\partial^2 p}{\partial e^2} : p$, il n'y a aucun inconvénient à exprimer cette pression en unités arbitraires. En millimètres de mercure, on a, d'après la table :

$$p = 750, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial e^2} = - 882$$

¹ *Journal de Physique*, 1883, p. 113-116.

D'autre part A, mesuré directement, a été trouvé égal à :

$$A = 295 \text{ C.G.S.}$$

On en déduit $A = 295 \times 10^{11}$ unités pratiques, puisque les dimensions de A sont MT^{-2} . On a donc :

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial e^2} = C = -A \frac{\partial^2 p}{\partial e^2} : p = 347 \times 10^{11}$$

La capacité C est égale à 347×10^{11} farads par unité pratique de surface (10^{18} cmq), soit 347,000 microfarads par mètre carré, en prenant la force *e. m.* du Daniell égale à 1. En réalité le Daniell vaut 1^v 07 et comme $\frac{d^2 A}{de^2}$ contient le carré de la force *e. m. de* au dénominateur, on doit diviser le résultat ci-dessus par $\overline{1,07^2} = 1,14$. On obtient alors :

$$C = 304,000 \text{ microfarads par mètre carré.}$$

chiffre presque identique à celui indiqué par M. Blondlot par une méthode entièrement différente (§ 90). Cette concordance tend à prouver : 1^o que la capacité de polarisation voltaïque ne dépend pas de la nature des liquides en contact, ainsi que l'avait avancé M. Blondlot; 2^o que la théorie des phénomènes électrocapillaires doit s'étendre au cas où l'un des corps au contact est solide, puisque la capacité C dans ce cas a encore la même valeur.

La capacité C étant sensiblement constante entre certaines limites, on aura approximativement, en intégrant, (2) :

$$A = A_m - \frac{1}{2} C (e - e_m)^2 \quad (4)$$

A_m et e_m étant deux constantes introduites par l'intégration et dont la signification est très simple. A_m est la valeur maximum de A; elle correspond au maximum de la pression ($\delta p = 358^{\text{mmS}}$); e_m est la valeur de la force *e. m.* correspondant à ce maximum ($e = 0^d, 904$). Par raison de symétrie, on est amené ici, comme dans l'étude de la polarisation voltaïque (§ 90), à considérer $(e - e_m)$ comme représentant la différence vraie de potentiel au contact mercure-eau acidulée; c'est-à-dire qu'à l'état normal le mercure aurait un potentiel plus élevé de $e_m = 0^v 904$ que celui de l'eau acidulée en

contact avec lui. La constante A serait maximum pour une différence vraie de potentiel ($e - e_m$) égale à zéro. Si l'on ne fait pas varier la pression p , le ménisque se déplace; il atteindrait le niveau le plus élevé lorsque la courbure $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{p}{A}$ serait minimum, c'est-à-dire lorsque A serait maximum, pour : $e - e_m = 0$. Si la courbe des δp (fig. 38) n'est plus symétrique pour des valeurs de e se rapprochant de 2 volts, cela tient sans doute à un effet perturbateur dû à ce que la décomposition de l'eau est sur le point de se produire.

En admettant que la différence vraie e_m de potentiel au contact de deux liquides à l'état normal est égale à la force em , qui, appliquée dans le sens convenable, rend maximum leur constante capillaire A , M. Garbe en a déduit une méthode de mesure des différences vraies de potentiel au contact de deux liquides ¹.

Les résultats précédents concordent avec ceux que nous avons trouvés, au § 52, dans un autre exposé des phénomènes électrocapillaires. A_m est ce que nous avons désigné par A_0 ; ($e - e_m$) n'est autre que V , et la formule (4) ci-dessus n'est autre que l'équation (6) du § 52 sous une forme différente.

¹ *Comptes rendus*, 1884, t. XCIX.

CHAPITRE IV

FORCES ÉLECTROMOTRICES DE CONTACT. — PILES

93. **Existence des forces électromotrices de contact.** — Nous avons déjà été conduits plusieurs fois, notamment aux §§ 90 et 92, à supposer qu'il existe à la surface de séparation de deux corps une variation brusque de potentiel. Ce phénomène va être l'objet de l'étude du présent chapitre.

Volta, pour expliquer les propriétés de sa pile hydroélectrique, a émis l'idée qu'il existe au contact des métaux, zinc-cuivre, employés comme électrodes, une différence de potentiel déterminée et indépendante du passage du courant. Le liquide interposé, d'après lui, tendrait à égaliser les potentiels des deux métaux en contact; de telle sorte que, en circuit fermé, l'équilibre ne saurait exister, et il se produit un courant électrique permanent.

On a constaté en effet et même mesuré, depuis lors, des différences de potentiel au contact de divers métaux; mais on a reconnu que des différences de ce genre existent, contrairement aux idées de Volta, au contact des liquides et même des gaz. Le phénomène est même plus général encore et se produit aux divers points d'une substance lorsque celle-ci n'est pas absolument homogène et à une température uniforme (effet Thomson).

Les deux expériences suivantes, dues à sir W. Thomson, mettent bien en évidence la différence de potentiel au contact.

1° Imaginons un électromètre à quadrants, dans lequel les deux paires de quadrants sont l'une en zinc, l'autre en cuivre. Si l'on électrise l'aiguille, elle ne dévie pas tant que les deux paires de quadrants sont isolées l'une de l'autre et à l'état neutre. Mais que l'on vienne à relier directement celles-ci, l'aiguille déviara :

vers le cuivre si elle est chargée positivement, vers le zinc si elle est chargée négativement. Le contact du cuivre et du zinc a donc chargé négativement le premier de ces métaux et positivement le second, et a dû établir entre eux une différence de potentiels.

2° Soit $Zn - Zn$ un cylindre creux en zinc représenté en coupe sur la figure 39; $Cu - Cu$ un entonnoir en cuivre reposant sur le

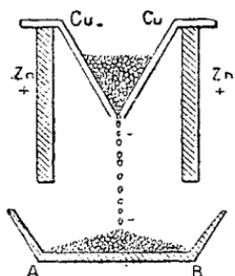


Fig. 39.

cylindre et rempli de limaille de cuivre, qui s'écoule par l'orifice inférieur et tombe dans un vase AB. Si ce vase est isolé, on constate qu'il s'électrise négativement, tandis que le cylindre de zinc, isolé également, se recouvre d'électricité positive. En reliant le vase au cylindre, on obtient un courant continu allant de Zn à AB, tant que l'écoulement continue.

On en conclut que le contact $Zn - Cu$ rend le zinc positif et le cuivre négatif; la limaille qui tombe emporte avec elle une charge négative qui se répand sur AB.

La différence de potentiel au contact est encore mise en évidence par le phénomène de Peltier. Si Π représente cette différence au contact de deux métaux soudés faisant partie d'un circuit électrique, le passage d'une quantité q d'électricité à travers la soudure produit une dépense d'énergie électrique égale au produit Πq . L'expérience montrant qu'aucune modification n'a lieu dans l'état de la soudure si ce n'est une variation de température, il doit se produire, suivant le sens du courant, un échauffement ou un refroidissement correspondant à une quantité de chaleur dégagée ou absorbée égale à $\frac{\Pi q}{J}$, J représentant l'équivalent mécanique de la chaleur. Le fait de l'échauffement ou du refroidissement de la soudure a été constaté par Peltier. Jusqu'ici les données manquent pour démontrer expérimentalement l'accord entre les déterminations de la différence Π : d'une part, par le phénomène de Peltier; d'autre part, par des mesures électrométriques.

Ce raisonnement ne s'applique pas au contact de deux électrolytes ou d'un électrolyte et d'un métal, car le passage d'une quantité q d'électricité à travers la surface de séparation des deux substances modifie l'état de cette surface et produit un travail chimique correspondant à la décomposition ou à la recombinaison

de l'électrolyte. Ce travail doit entrer en ligne de compte, et l'énergie électrique ne se retrouve plus intégralement sous forme de chaleur dégagée. Dans les électrolytes, c'est-à-dire dans presque tous les liquides et sans doute dans les gaz et dans tous les diélectriques, la différence de potentiel ou force électromotrice au contact n'a aucune relation a priori avec l'effet Peltier. Cette force électromotrice n'en doit pas moins exister. Elle a été constatée notamment dans l'arc voltaïque, entre deux charbons dans l'air.

La détermination du siège des forces électromotrices de contact dans un circuit hétérogène a donné lieu à de nombreuses discussions, et les physiciens ne sont même pas d'accord sur la valeur que l'on doit attribuer à la différence du potentiel au contact de deux corps¹. Le désaccord paraît provenir en partie de ce que l'on ne s'entend pas sur la définition même de cette différence de potentiel. Aussi croyons-nous devoir insister sur ce point.

Lorsqu'une quantité d'électricité q passe d'un point M à un point infiniment voisin M' à travers la surface Σ qui sépare deux milieux différents, le champ électrostatique dans ces milieux est infiniment peu modifié, et, par suite, il en est de même de l'énergie potentielle de ce champ. Le dégagement correspondant d'énergie $e q$ qui se produit à la surface Σ sous forme calorifique, chimique ou autre, constitue donc un phénomène local. De même qu'un dégagement de chaleur égal à vq dans un conducteur, par suite du passage de la quantité q d'électricité, correspond à une chute de potentiel v le long de ce conducteur; de même, par analogie, *on conviendra* d'appeler chute du potentiel à travers la surface Σ le coefficient e . *On serait libre* de considérer au contraire le potentiel comme ne variant point brusquement à travers la surface Σ , ou d'adopter toute autre définition. La définition précédente, indépendamment de sa simplicité, offre cet avantage que la variation totale du potentiel lorsqu'on décrit un chemin fermé le long d'un circuit quelconque, est nulle, c'est-à-dire que le potentiel en chaque point a une valeur déterminée et unique.

¹ Voir par exemple la thèse de doctorat de M. Pellat; une note de M. Duhem dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 1887, t. XII, p. 433, etc. Voir également une note importante de M. Potier dans les *Comptes rendus*, 1889, t. CVIII, p. 730, sur le siège des forces *e. m.* de contact.

Au lieu de considérer la quantité hypothétique q allant du point M au point M' , on pourrait adopter un autre langage, tout en donnant une définition équivalente à la précédente. Suivant les idées exposées au § 79, dans un conducteur le flux d'induction Q d'un tube d'induction tend à se dissiper, mais est renouvelé incessamment par une source d'énergie extérieure. En même temps que le flux Q diminue d'une fraction q en vertu de la conductibilité de la substance, le tube reçoit de l'extérieur un apport égal q . L'énergie qui lui est fournie ainsi, sur une longueur correspondant à une chute de potentiel v , est qv et sert à maintenir constante l'énergie potentielle du tube, qui tend à se dissiper sous forme de chaleur. Dans un circuit fermé le tube d'induction occupe toute la longueur du conducteur et traverse les surfaces de séparation des différentes substances. Au renouvellement q du flux d'induction correspond une énergie eq fournie à l'une de ces surfaces Σ ; cette énergie est dissipée, sous forme calorifique, chimique ou autre, au fur et à mesure de son arrivée, ce qui constitue le phénomène observé. On appellera chute du potentiel à la surface Σ le coefficient e .

94. Mesure des forces électromotrices de contact. — On a proposé de définir le potentiel d'un conducteur comme étant égal au potentiel de l'air dans une cavité située à l'intérieur du conducteur. En

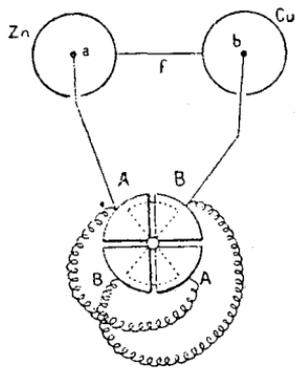


Fig. 40.

admettant cette définition, on mesurerait la différence des potentiels de deux sphères creuses de cuivre et de zinc (fig. 40), en introduisant à l'intérieur de ces sphères des boules de cuivre a et b reliées aux deux paires de quadrants AA et BB d'un électromètre; la différence de potentiel en question, mesurée par la déviation de l'aiguille de l'électromètre ne serait autre que celle des points A et B . Mais cette méthode suppose im-

plicitement qu'il n'existe pas de force électromotrice au contact d'un métal et de l'air, ou bien que la force électromotrice de contact entre un métal et l'air est la même pour tous les métaux; c'est là une hypothèse nullement justifiée.

Voyons quel est le sens des indications de l'électromètre dans l'expérience précédente. Désignons par $M | N$ la force électromotrice de contact entre deux corps M et N ou, d'une manière plus précise, l'accroissement de potentiel quand on passe du corps M au corps N . Le zinc, le cuivre et l'air seront désignés symboliquement par Zn , Cu et A . On a à considérer les forces électromotrices : 1° $Cu | A$ au contact de la boule b et de l'air intérieur à la sphère Cu ; 2° $A | Cu$ au contact de l'air intérieur et de la sphère de cuivre ; 3° $Cu | Zn$ au contact des sphères de cuivre et de zinc par l'intermédiaire du fil f ; 4° $Zn | A$ au contact de la sphère de zinc et de l'air intérieur ; 5° $A | Cu$ au contact de l'air et de la boule a . En outre, les boules a et b sont électrisées et développent un champ électrostatique à l'intérieur des sphères Zn et Cu ; on a considéré de ce fait un accroissement E de potentiel lorsqu'on décrit le circuit précédent. L'accroissement de potentiel lorsqu'on passe de la paire de quadrants BB à la paire AA , c'est-à-dire $(V_A - V_B)$ est la somme de ces accroissements consécutifs :

$$V_A - V_B = Cu | A + A | Cu + Cu | Zn + Zn | A + A | Cu + E$$

c'est cette quantité complexe que l'on mesure en réalité, et non point simplement $Cu | Zn$. La méthode précédente est impuissante à en faire connaître les divers éléments.

Tout paraît indiquer que la différence de potentiel au contact de deux métaux, $Cu | Zn$ par exemple, est indépendante de la quantité d'électricité qui a traversé la surface de contact. Au contact d'un métal et de l'air ou d'un autre diélectrique, la différence de potentiel, $Cu - A$ par exemple semble au contraire dépendre de la quantité d'électricité qui recouvre la surface, comme cela a lieu au contact d'un métal et d'un électrolyte. On a vu d'ailleurs, aux § 87 et 88, des diélectriques se comporter à d'autres points de vue comme des électrolytes. Pour un même état physique du cuivre et de l'air, $Cu | A$ ne serait donc point une quantité déterminée. En particulier, les diverses valeurs de $A | Cu$ dans la formule précédente peuvent n'être point égales.

Divers savants, notamment M. Pellat (1), ont fait des déter-

¹ Pellat : Thèse pour le doctorat, 1881. — *Journal de Physique*, passim.

minations de forces électromotrices de contact par l'observation de la charge d'un condensateur sous l'action de ces forces électromotrices. Soient Cu et Zn (fig. 41), deux fils de cuivre et de zinc

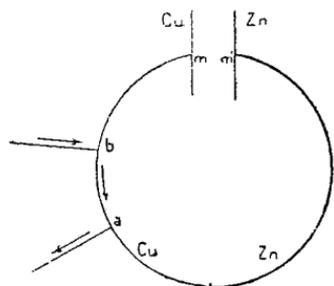


Fig. 41.

terminés respectivement à des plateaux parallèles du même métal que les fils. Ces plateaux forment un condensateur de capacité C et prennent une charge Q . Le rapport $\frac{Q}{C}$ représente la différence V des potentiels des couches d'air en contact respectivement avec chaque plateau. La charge Q peut être mesurée par un procédé quelconque; si en outre on détermine C par les dimensions

géométriques du condensateur, on en déduira la valeur de V . Que représente cette quantité V ?

Remarquons, à cet effet, que les forces électromotrices de contact qui interviennent sont : 1° $A | Cu$, accroissement de potentiel lorsqu'on passe d'un point m , pris dans l'air et infiniment voisin du plateau Cu , à ce plateau ; 2° $Cu | Zn$ au contact cuivre-zinc ; 3° $Zn | A$, lorsqu'on passe du plateau de zinc à un point m' de la couche d'air infiniment voisine. Donc l'excès V du potentiel de la couche m' d'air sur celui de la couche m est égal à :

$$V = A | Cu + Cu | Zn + Zn | A$$

et ne pourrait se réduire à $Cu | Zn$ que si $A | Cu + Zn | A = 0$ ou $A | Cu = A | Zn$, c'est-à-dire si la différence de potentiel au contact de l'air était la même pour le cuivre que pour le zinc.

M. Pellat a perfectionné la méthode du condensateur en intercalant sur le fil de cuivre, par exemple, un conducteur ab , dont la résistance r est variable à volonté, et qui est traversé par un courant i connu, de manière à introduire sur le fil en question une chute de potentiel ri capable de ramener à zéro la différence de potentiel V . On reconnaît que V est nul lorsque la charge prise par le condensateur est nulle. On a alors :

$$V = A | Cu + Cu | Zn + Zn | A - ri = 0$$

La quantité complexe $(A | Cu + Cu | Zn + Zn | A)$ est ainsi déter-

minée simplement par une méthode de réduction à zéro ; sa valeur est r_i . Elle correspond au cas où la charge du condensateur est nulle ; il est possible qu'en opérant autrement, on trouve des valeurs différentes, $A | Cu$ et $Zn | A$ ne restant point forcément constantes.

95. Forces électromotrices de contact apparente et vraie. — Dans presque toutes les méthodes employées on a mesuré, en réalité, non point la force électromotrice vraie $M | N$ au contact de deux corps M et N , mais une quantité telle que $(A | M + M | N + N | A)$, que l'on peut appeler la force électromotrice apparente. La difficulté que l'on rencontre dans la détermination de la quantité de $M | N$ tient à ce que, dans toutes les mesures, on opère sur des circuits fermés, soit métalliquement, soit par des liquides ou des gaz, et qu'il y a au moins trois contacts qui entrent en jeu au lieu d'un.

Pour mesurer la force électromotrice vraie $M | N$ dans le cas de deux *métaux*, on peut mesurer l'effet Peltier à leur soudure. La quantité de chaleur absorbée par la soudure $M | N$ pendant le passage de l'unité d'électricité de M en N (ou plutôt son équivalent mécanique) représente la force électromotrice $M | N$, l'énergie calorifique étant seule en jeu dans ce cas. Cette méthode, nous l'avons dit plus haut, ne s'appliquerait pas aux liquides et aux électrolytes en général.

Une autre méthode, applicable aux liquides et fondée sur les lois de la tension superficielle dans un électromètre capillaire, a été proposée par M. Garbe (§ 92).

Les valeurs de la force électromotrice vraie $M | N$, mesurées par l'effet Peltier, diffèrent considérablement des valeurs de la force électromotrice apparente $(A | M + M | N + N | A)$, que nous représenterons par $A | M | N | A$. Ainsi tandis que cette dernière, pour le contact zinc-cuivre, varierait, suivant les auteurs, de $0^{\text{vol}}50$ à $0^{\text{vol}}85$, la première serait, d'après M. Leroux, égale à $0^{\text{vol}}00045$. D'une manière générale, la force électromotrice vraie, pour les métaux, paraît être une faible fraction de la valeur apparente. Il en résulte que $M | N$ est très faible par rapport aux termes $A | M$ et $A | N$.

Entre un métal et un liquide ou entre deux liquides les différences de potentiel sont bien plus grandes qu'entre deux métaux.

Ainsi l'effet Peltier entre le cuivre et le sulfate de cuivre à 12° est égal à 0^{me}212 (il est vrai que l'effet Peltier n'est plus égal dans ce cas à la différence de potentiel au contact, puisqu'il y a un électrolyte en jeu). Entre le mercure et l'eau acidulée à un sixième d'acide sulfurique, à l'état normal la différence vraie de potentiel, mesurée par les effets capillaires (§ 92), serait égale à 0^{me}904.

On peut se demander ce que deviendrait la force électromotrice apparente A | M | N | A, si l'on faisait le vide absolu dans l'intervalle compris entre les plateaux du condensateur (fig. 41). M. Pellat, abaissant la pression de l'air de 760^{mm} à 10^{mm} de mercure, a trouvé que la valeur mesurée de A | M | N | A varie peu ; il en est de même dans l'oxygène et dans d'autres gaz.

Si les plateaux du condensateur sont rapprochés jusqu'au contact, c'est-à-dire jusqu'à une distance extrêmement petite, la différence de potentiel existant toujours, la charge des plateaux doit croître considérablement. On est ainsi conduit à admettre au contact de deux corps l'existence de deux couches électriques. L'étude des phénomènes de polarisation voltaïque (§ 90) et de capillarité (§ 52 et 92) conduit aux mêmes conclusions.

96. Loi des contacts successifs. — Soit un circuit entièrement métallique composé des métaux M, N, P, à une température uniforme. L'expérience montre que lorsqu'on ferme ce circuit il ne se produit pas de courant. L'absence de courant indique que la force électromotrice totale, égale à la somme des forces électromotrices de contact M | N + N | P + P | M, est nulle.

$$M | N + N | P + P | M = 0 \quad (1)$$

Cette formule exprime la loi de Volta ou loi des contacts successifs de divers métaux à une température uniforme. Si l'on y remplace P | M par — M | P, on peut l'écrire encore

$$M | N + N | P = M | P \quad (1')$$

ce qui montre que l'excès de potentiel du métal P sur le métal M, lorsque ces deux métaux sont réunis par l'intermédiaire de N, est le même que lorsque P et M sont directement au contact.

Il est à remarquer que cette loi, qui s'applique aux différences

vraies de potentiel au contact, est également applicable aux différences *apparentes*. En effet, soient les différences apparentes :

$$\begin{aligned} A | M | N | A &= A | M + M | N + N | A \\ A | N | P | A &= A | N + N | P + P | A \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre ces relations, en remarquant que l'on a : $N | A + A | N = 0$. Il vient :

$$A | M | N | A + A | N | P | A = A | M + M | N + N | P + P | A$$

ou en tenant compte de la formule (1') :

$$A | M | N | A + A | N | P | A = A | M + M | P + P | A$$

ou encore :

$$A | M | N | A + A | N | P | A = A | M | P | A \quad (1'')$$

La loi des contacts successifs s'applique donc bien aux forces électromotrices apparentes de contact. Elle permet de calculer à priori la force électromotrice apparente au contact de deux métaux M et P, lorsqu'on connaît celles qui correspondent aux contacts M | N et N | P. Elle est donc susceptible d'une vérification expérimentale¹, à la condition, bien entendu, que chaque force *e. m.* telle que A | N ait une valeur bien déterminée et que l'on puisse poser : $A | N + N | A = 0$ (remarque du § 94, p. 212).

La loi des contacts successifs doit être vraie pour un circuit quelconque comprenant des corps non électrolysables ou, plus généralement, des corps dont les surfaces de contact ne soient pas modifiées par le passage du courant. En effet lorsqu'il y a production de courant, et, par suite, dégagement de chaleur en vertu de la loi de Joule, il doit exister dans le circuit une source d'énergie due soit à des causes extérieures (induction électromagnétique), soit à des actions chimiques (électrolyse), soit à des inégalités de température, etc. Autrement l'échauffement de certaines parties du circuit serait produit aux dépens d'autres parties qui se refroidiraient. De la chaleur serait ainsi transportée de corps froids à des corps plus chauds, et cela spontanément, ce qui est contraire au principe de Carnot. L'absence de toute source extérieure d'énergie entraîne donc la loi de Volta.

¹ Voir : Gordon, Traduction française, t. II, p. 473. — Tableau, à double entrée, des forces *e. m.* de contact de certains métaux.

Dans le cas où l'un ou plusieurs des conducteurs M, N, P sont des électrolytes, la somme :

$$M | N + N | P + P | M = E \quad (2)$$

est différente de zéro en général. Elle représente la force électromotrice due aux contacts successifs. En remplaçant, comme plus haut, les forces électromotrices apparentes $A | M | N | A$, $A | N | P | A$, $A | P | M | A$ par leurs valeurs développées ($A | M + M | N + N | A$),... et effectuant les réductions, on trouverait que la force électromotrice E est aussi donnée par :

$$A | M | N | A + A | N | P | A + A | P | M | A = E \quad (2')$$

Par conséquent, il suffit de connaître les différences de potentiel apparentes au contact des conducteurs successifs du circuit pour calculer à priori la force électromotrice totale E .

Ajoutons que dans le cas des électrolytes, liquides ou gazeux, les valeurs de forces électromotrices $M | N$... ne sont pas des quantités invariables en général. Le passage du courant dans le circuit pouvant modifier l'état chimique des surfaces de contact, il en résulte des variations dans $M | N$,... (forces électromotrices de polarisation).

THERMOÉLECTRICITÉ

97. Lois expérimentales de la thermoélectricité. — Nous avons réservé, dans ce qui précède, le cas d'un circuit composé de plusieurs métaux et qui ne serait pas à une température uniforme. Dans ce cas, en effet, on sait qu'il y a production de courants en raison des inégalités de température. La découverte de ce phénomène est due à Seebeck.

Si l'on chauffe dans un tel circuit plusieurs soudures respectivement aux températures $\theta_1, \theta_2, \dots$ la force électromotrice qui produit le courant thermoélectrique, soit $E(\theta_1, \theta_2, \dots)$, est égale à la somme des forces électromotrices que l'on obtiendrait en chauffant isolément la première soudure à la température θ_1 , la deuxième à la température θ_2, \dots , soit $E(\theta_1) + E(\theta_2) + \dots$ (loi expérimentale de Becquerel).

Dans un circuit unimétallique les inégalités de température n'engendrent pas de courants (loi de Magnus ¹).

L'expérience montre encore que si le couple MN, dont les soudures sont aux températures θ_1 et θ_2 , possède une force thermoélectrique $(E_{MN})_{\theta_1}^{\theta_2}$ tendant à produire un courant de M vers N à travers la soudure θ_2 ; et que si, d'autre part, la force thermoélectrique du couple NP entre les mêmes températures est $(E_{NP})_{\theta_1}^{\theta_2}$, la force thermoélectrique $(E_{MP})_{\theta_1}^{\theta_2}$ du couple MP est égale à la somme des deux précédentes :

$$(E_{MN})_{\theta_1}^{\theta_2} + (E_{NP})_{\theta_1}^{\theta_2} = (E_{MP})_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (3)$$

98. Effets Peltier, Thomson. — On doit conclure de là : 1° que la différence de potentiel au contact de deux corps dépend de la température de la surface de contact ; 2° que le potentiel varie sans doute, même dans l'état d'équilibre électrique, aux divers points d'un conducteur homogène dont la température n'est pas uniforme. Ce deuxième point est confirmé par l'étude de l'effet Thomson. (Voir ci-après.)

Considérons dans un circuit unimétallique deux points aux températures θ_1 et θ_2 , divisant le circuit en deux parties A et B. Aucun courant n'existant dans un tel circuit, l'accroissement de potentiel $(V_{\theta_2} - V_{\theta_1})$, lorsqu'on passe du point θ_1 au point θ_2 , est le même soit par le chemin A, soit par le chemin B. Or, les deux parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre ; leurs sections et leurs longueurs sont arbitraires, et la température y varie de θ_1 à θ_2 d'une manière quelconque. Donc l'accroissement de potentiel le long du conducteur entre deux points quelconques, lorsqu'il n'y a aucun courant, ne dépend que des températures θ_1 et θ_2 en ces deux points ; désignons-le par $f(\theta_1, \theta_2)$. Si l'on passe successivement d'un point θ_0 au point θ_1 , puis de θ_1 à θ_2 ,

¹ On produit toutefois des courants thermoélectriques dans un circuit unimétallique si le fil présente quelque hétérogénéité, si deux sections à températures différentes sont mises au contact, etc. V. Daguin, *Traité élémentaire de Physique*, t. III, § 1893-1896 (4^e édition).

la variation $[f(\theta_0, \theta_1) + f(\theta_1, \theta_2)]$ de potentiel est la même que si l'on va directement de θ_0 à θ_2 .

$$f(\theta_0, \theta_1) + f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_0, \theta_2)$$

On déduit de là :

$$f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_0, \theta_2) - f(\theta_0, \theta_1)$$

Si θ_0 est un point de repère invariable lorsque θ_1 et θ_2 varient, il est inutile de le mettre en évidence dans la formule précédente, que l'on peut écrire :

$$f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_2) - f(\theta_1)$$

La variation de potentiel $f(\theta_1, \theta_2)$ peut donc se mettre sous forme d'accroissement d'une certaine fonction $f(\theta)$ entre les deux températures extrêmes.

La variation de la fonction $f(\theta)$, lorsque θ , s'accroît d'une unité (1° centigrade), ou plutôt la dérivée $\frac{df}{d\theta} = f'(\theta) = H(\theta)$, a reçu le nom d'effet Thomson. La variation $f(\theta_2) - f(\theta_1)$ s'écrira :

$$f(\theta_2) - f(\theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} H d\theta \quad (4)$$

La force électromotrice de contact entre deux métaux M et N, soit M | N, a reçu le nom d'effet Peltier. Nous poserons :

$$\Pi = M | N = - N | M \quad (5)$$

Π est une fonction de la température de la surface de contact ou soudure.

La force thermoélectrique $(E_{MN})_{\theta_1}^{\theta_2}$, tendant à produire un courant allant du corps M au corps N à travers la soudure θ_2 , est la somme des effets Thomson et Peltier le long du circuit :

$$\begin{aligned} (E_{MN})_{\theta_1}^{\theta_2} &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} H_M d\theta + \Pi_{\theta_2} + \int_{\theta_2}^{\theta_1} H_N d\theta - \Pi_{\theta_1} \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} (H_M - H_N) d\theta + \left(\Pi_{\theta_2} - \Pi_{\theta_1} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Si l'on forme ainsi les trois expressions de $(E_{MN})_{\theta_1}^{\theta_2}$, $(E_{NP})_{\theta_1}^{\theta_2}$ et $(E_{MP})_{\theta_1}^{\theta_2}$, on retrouve théoriquement la loi expérimentale représentée par la formule (3).

99. Pouvoirs thermoélectriques. — Si dans la formule (6) on suppose θ_1 constant, la force thermoélectrique E variera avec θ_2 . La variation de la force thermoélectrique correspondante à une variation de 1° dans la température θ_2 , ou, plus exactement, la dérivée $\frac{dE}{d\theta}$ a reçu le nom de pouvoir thermoélectrique du couple MN à la température θ et est représentée par :

$$\frac{dE}{d\theta} = H_M - H_N + \frac{d\Pi}{d\theta} \quad (7)$$

L'équation (3), différenciée par rapport à θ_2 , donne :

$$\left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{MN} + \left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{NP} = \left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{MP} \quad (8)$$

Le pouvoir thermoélectrique $\frac{dE}{d\theta}$ jouit donc de la même propriété que la force thermoélectrique $E_{\theta_1}^{\theta_2}$, c'est-à-dire que le pouvoir thermoélectrique du couple MN est égal à la différence des pouvoirs des couples MP et NP, P étant un troisième métal quelconque.

Ainsi, en désignant respectivement par M, N et P le cuivre, le fer et le plomb, par θ la température en degrés centigrades, on a trouvé expérimentalement :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{MP} &= - (1,36 + 0,0095 \theta) \text{ microvolts.} \\ \left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{NP} &= - (17,34 - 0,0487 \theta) \text{ microvolts.} \end{aligned}$$

On en déduit théoriquement :

$$\left(\frac{dE}{d\theta}\right)_{MN} = (15,98 - 0,0582 \theta) \text{ microvolts.}$$

D'une manière générale, on voit qu'il suffit de déterminer les pouvoirs de divers métaux par rapport à l'un d'eux, le plomb par exemple, pour en déduire le pouvoir d'un couple de deux métaux quelconques ¹.

¹ V. Gordon, traduction Raynaud, t. II, p. 446-447; Mascart et Joubert, § 1293.

100. **Etude expérimentale des couples.** — La marche d'un grand nombre de couples thermoélectriques a été étudiée par divers savants, notamment par Gauguin. On sait que lorsque la température θ_2 de la soudure chaude est élevée progressivement, la force électromotrice $E_{\theta_1}^{\theta_2}$, va en croissant jusqu'à un certain maximum, qu'elle atteint à une température θ_n variable suivant les couples. La température θ_2 croissant au delà de θ_n , la force électromotrice E décroît, devient nulle à une température θ'_1 , puis change de signe. C'est là le phénomène de l'*inversion* thermoélectrique, signalé par Cumming en 1823. Il en résulte que le pouvoir thermoélectrique $\frac{dE}{d\theta}$ change de signe, en passant par zéro, à la tempéra-

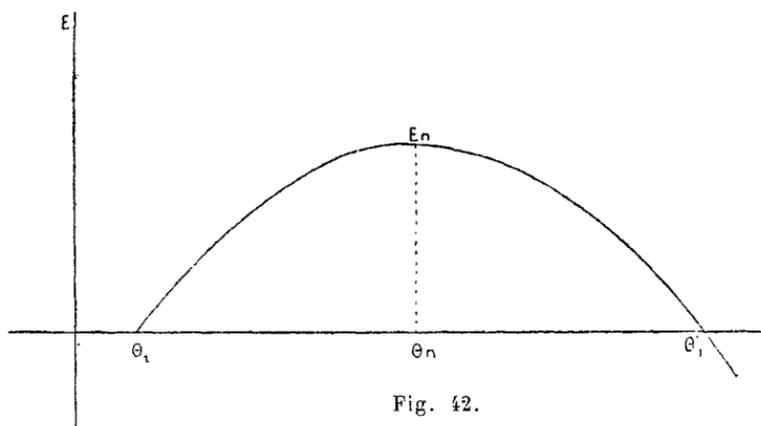


Fig. 42.

ture θ_n , dite *température neutre*. Gauguin, évaluant numériquement E en fonction de la température θ , a trouvé que la force thermoélectrique des couples étudiés par lui dans des limites étendues de température, peut être représentée par une parabole (fig. 42) à axe vertical. E est nul pour $\theta_2 = \theta_1$, maximum pour $\theta_2 = \theta_n$, nul de nouveau à la température d'inversion $\theta'_1 = 2\theta_n - \theta_1$, puis change de signe au delà.

Si la loi de Gauguin était rigoureuse, E serait une fonction du second degré en θ , soit

$$E = \frac{a}{2} (\theta_2 - \theta_1) (\theta'_1 - \theta_2) = a (\theta_2 - \theta_1) \left(\theta_n - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \quad (9)$$

d'où :

$$\frac{dE}{d\theta} = a (\theta_n - \theta) \quad (10)$$

La formule (9) a été retrouvée expérimentalement par M. Tait (1871). Elle n'est admissible qu'entre certaines limites de température, en dehors desquelles elle peut s'écarter considérablement de la vérité. Certains couples présentent même des anomalies particulières à des températures déterminées ¹.

Les données numériques relatives à un couple thermoélectrique varient suivant les expérimentateurs. Cela tient sans doute à la différence des échantillons soumis aux essais. Mais pour un couple obtenu dans des conditions invariables, la force thermoélectrique est une fonction déterminée de la température. On peut donc employer un tel couple pour mesurer la température d'un corps, d'une enceinte, etc., là où l'emploi d'un thermomètre ordinaire présenterait des inconvénients. Le couple serait relié à un circuit extérieur comprenant un galvanomètre ; et la lecture des déviations de l'instrument ferait connaître, par une graduation préalable, les températures.

La détermination de la force thermoélectrique E d'un couple n'exige que la mesure de la résistance R d'un circuit et celle d'un courant thermoélectrique i ; on a : $E = Ri$. La mesure de l'effet Peltier Π est beaucoup plus délicate, à cause de la chaleur qui se dégage dans le conducteur en vertu de la loi de Joule (Ri^2) et qui peut masquer l'effet à mesurer (Πi). Les valeurs de Π pour les couples métalliques sont en effet très faibles, comme il résulte des chiffres suivants :

Cuivre-Antimoine	: $\Pi = 0^{\circ}.0038$
— Fer	+ $0^{\circ}.0028$
— Cadmium	+ $0^{\circ}.00035$
— Zinc	+ $0^{\circ}.00045$
— Maillechort	— $0^{\circ}.0027$
— Bismuth	— $0^{\circ}.0218$

Supposons que l'on se propose d'opérer sur un barreau cuivre-zinc, d'un centimètre de diamètre, de telle sorte que la chaleur (Ri^2), dégagée sur 2 centimètres de longueur de chaque côté de la soudure, ne dépasse pas le dixième de la chaleur (Πi) à la soudure :

$$\frac{Ri^2}{\Pi i} = \frac{Ri}{\Pi} \ll \frac{1}{10}$$

¹ V. Le Chatelier. *Comptes rendus*.

Les résistances respectives des barreaux de cuivre et de zinc sur 2 centimètres de longueur sont 4×10^{-6} ohms et 14×10^{-6} ; d'où : $R = 18 \times 10^{-6}$ ohms. D'autre part, on a, à 25° pour le contact cuivre-zinc : $\Pi = 0^{\text{m}},00045$. La condition imposée devient donc : $i \leq 2^{\text{m}},5$. — D'autre part, si le courant employé ne dépasse pas $2^{\text{m}},5$, l'énergie calorifique dégagée à la soudure dans l'unité de temps ne dépassera pas $\Pi i = 0,00045 \times 2,5$ unités pratiques, chiffre qui correspond, en petites calories, à : $\frac{0,00045 \times 2,5}{4,17} = 0\text{c.}00027$. L'élévation de température de la soudure doit donc être assez faible, comme on le voit.

Quant à l'effet Thomson, sa détermination est encore plus délicate.

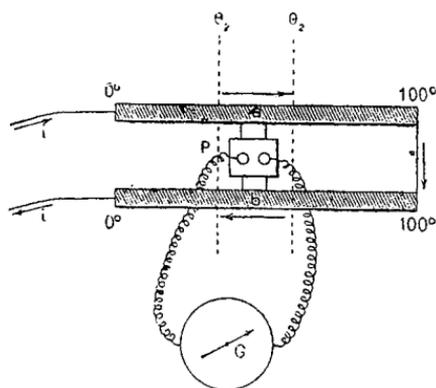


Fig. 43.

Voici la méthode de mesure employée par M. Leroux. Deux barreaux semblables d'un même métal M placés parallèlement (fig. 43) étaient à une extrémité maintenus à 0° , et à l'autre extrémité portés à 100° . Les températures se répartissaient suivant un état d'équilibre tel qu'une pile thermo-électrique P, intercalée entre deux points en regard a et b sur ces barreaux, et reliée à un

galvanomètre G, n'accusait pas de différence de température entre ces points. On faisait alors traverser les barreaux en sens inverse par un même courant i (indiqué par des flèches), qui y produisait :

1° des échauffements égaux (Ri^2) en vertu de la loi de Joule ;

2° des absorptions de chaleur $\int_{\theta^1}^{\theta^2} H_m i d\theta$ et $\int_{\theta^2}^{\theta^1} H_m i d\theta$ égales et de signes contraires, en vertu de l'effet Thomson. Il en résultait une inégalité de température entre a et b, qui était accusée par la déviation du galvanomètre ; on déduisait de là la valeur de H_m , ou plutôt une quantité proportionnelle à H_m . M. Leroux a trouvé que l'effet Thomson H est nul pour le plomb. Il a classé ainsi divers métaux par ordre de grandeurs décroissantes de H : 1° $H > 0$, antimoine,

cadmium, zinc, argent, cuivre; 2° $H = 0$, plomb; 3° $H < 0$, étain, platine, maillechort, fer, bismuth.

Dans l'expérience précédente tout se passe comme si la chaleur

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} H i d\theta$ enlevée à l'un des barreaux était transportée sur l'autre

par le courant. C'est pourquoi Sir W. Thomson avait donné à ce phénomène, découvert par lui, le nom de *transport électrique de la chaleur*. La quantité de chaleur absorbée entre deux points dont les températures diffèrent de l'unité ($\theta_2 - \theta_1 = 1$), sous l'action de l'unité de courant ($i = 1$), c'est-à-dire la quantité H , avait été appelée par lui *chaleur spécifique d'électricité*.

101. Théorie des phénomènes thermoélectriques. — Considérons un circuit bimétallique MN formant un couple thermoélectrique attelé avec une machine magnétoélectrique. On peut supposer la force électromotrice e de cette machine assez peu différente de la force thermoélectrique E du couple pour que le rapport $\frac{E - e}{E} = \frac{Ri}{E} = \frac{Ri^2}{Ei}$ soit aussi petit que l'on voudra, c'est-à-dire pour que l'énergie calorifique Ri^2 dégagée en vertu de la loi de Joule soit négligeable par rapport à l'énergie totale Ei fournie par le couple. Suivant que $(E - e)$ sera légèrement supérieur ou inférieur à zéro, le courant i circulera dans un sens ou en sens inverse, et le couple fournira à la machine ou lui prendra une quantité d'énergie égale à e pour chaque unité d'électricité circulant dans le circuit. Dans les deux cas, les énergies calorifiques $\Pi_2 - \Pi_1$ et

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} (H_M - H_N) d\theta$ mises en jeu en vertu des effets Peltier et Thom-

son seront les mêmes, mais de signe contraire, puisque le courant passe en sens inverse. En un mot, le phénomène sera *réversible*, puisque la chaleur Ri^2 , qui est la seule quantité ne changeant pas de signe avec le courant i , est considérée comme négligeable. En outre, après le passage du courant, si l'on a le soin de maintenir constante la température en chaque point du circuit au moyen de sources de chaleur ou de froid, l'état du circuit n'aura pas changé.

On peut donc appliquer le second principe de la thermodynamique (Carnot), mis par Clausius sous la forme :

$$\int \frac{dQ}{\theta} = 0$$

dQ désignant la quantité de chaleur fournie, pendant le passage de l'unité d'électricité, à une portion du circuit pour maintenir constante sa température, dont θ représente la valeur *absolue* (§ 54). Ici l'énergie calorifique absorbée pendant l'unité de temps par le circuit se compose : 1° de $\Pi_2 i$ à la température θ_2 ; 2° de $-\Pi_1 i$ à la température θ_1 ; 3° des valeurs de $Hid\theta$ aux diverses températures θ le long des conducteurs M et N. L'équation précédente peut donc s'écrire :

$$\int \frac{(H_M - H_N) d\theta}{\theta} + \frac{\Pi_2}{\theta_2} - \frac{\Pi_1}{\theta_1} = 0$$

Cette relation a lieu quelles que soient les valeurs de θ_1 et θ_2 . En la différentiant par rapport à θ , on obtient :

$$\frac{H_M - H_N}{\theta} + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\Pi}{\theta} \right) = 0$$

d'où, en développant et tenant compte de (7) :

$$\Pi = \theta \frac{dE}{d\theta} \tag{11}$$

et

$$H_M - H_N = -\theta \frac{d^2E}{d\theta^2} \tag{12}$$

Dans le raisonnement précédent, les quantités de chaleur dégagées en vertu de la loi de Joule et des effets Peltier et Thomson ne sont pas les seules en jeu dans le circuit. En raison des variations de température qui existent le long du conducteur, la conductibilité calorifique de celui-ci détermine un flux de chaleur allant des parties à plus haute température aux parties à plus basse température. Le calcul ci-dessus pourrait donc paraître incomplet. Mais il est à remarquer que le flux de chaleur en question existe lorsque le circuit est ouvert; et, lorsqu'on ferme celui-ci, si la température est maintenue fixe en chaque point par les échanges

de chaleur avec le milieu ambiant, les seules quantités de chaleur mises en jeu par le courant dans le système préexistant sont bien celles dont nous avons tenu compte.

Les relations (11) et (12) permettent de calculer *a priori* l'effet Peltier et la différence des effets Thomson pour deux métaux M et N, à une température donnée θ , lorsque l'étude du couple a fait connaître E en fonction de θ . Remarquons que, d'après (12), pour que l'effet Thomson ($H_M - H_N$) fût nul, il faudrait que $\frac{d^2E}{d\theta^2}$ fût nul, c'est-à-dire que E fût une fonction linéaire de θ , autrement dit que le couple MN eût une *marche uniforme*, ce qui n'a pas lieu en général.

La formule (11) a été vérifiée approximativement par M. Bellati dans le cas du couple fer-zinc à la température de 13°8 ; la valeur calculée de Π a été trouvée égale à 0°00235, la valeur mesurée étant 0°00253. — Pour le couple *cuivre-sulfate de cuivre*, dans lequel l'effet chimique total est nul, M. Bouty a trouvé pour l'effet Peltier à 12° : valeur calculée = 0°218, valeur mesurée = 0°212. D'une manière générale, la formule (11) montre que l'effet Peltier est de même signe que le pouvoir thermoélectrique et change de signe, en même temps que lui, à la température neutre.

D'après M. Leroux, l'effet Thomson est nul pour le plomb. Si le métal N du couple précédent est le plomb, on a donc : $H_N = 0$, d'où :

$$H_M = -\theta \frac{d^2E}{d\theta^2} \quad (12')$$

Remarquons encore que, d'après (11), l'effet Peltier s'annule et change de signe avec le pouvoir thermoélectrique $\frac{dE}{d\theta}$ à la température neutre θ_n , fait vérifié expérimentalement par M. Leroux dans le cas du couple cuivre-fer. Si l'on pose :

$$\frac{dE}{d\theta} = (\theta_n - \theta) \varphi(\theta) \quad (13)$$

il vient :

$$\Pi = \theta (\theta_n - \theta) \varphi(\theta) \quad (14)$$

D'après les expériences de Gaugain et de Tait, E serait une fonction du second degré en θ (formules 9 et 10), et la fonction φ

se réduirait à une constante a , au moins pour les couples étudiés et entre les limites de température indiquées par eux. Si l'on admet cette loi, on aura, d'après (13), (14) et (12') :

$$\begin{cases} \frac{dE}{d\theta} = a (\theta_n - \theta) \\ \Pi = a \theta (\theta_n - \theta) \\ H_M = a \theta \end{cases} \quad (15)$$

L'effet Thomson serait ainsi proportionnel à la température absolue θ . Le coefficient a qu'il renferme serait le même que celui de l'expression du pouvoir thermoélectrique. L'expérience montre que ces deux coefficients sont effectivement de même signe et sont rangés dans le même ordre de grandeur pour les divers métaux.

Le coefficient a dans ces formules se rapporte au corps M et peut s'écrire a_M . Pour un autre corps N, on aurait : $H_N = a_N \theta$. Dans le cas d'un couple MN quelconque, les équations (15) deviennent donc :

$$\begin{cases} H_M - H_N = (a_M - a_N) \theta \\ \frac{dE}{d\theta} = (a_M - a_N) (\theta_n - \theta) \\ \Pi_{MN} = (a_M - a_N) \theta (\theta_n - \theta) \end{cases} \quad (16)$$

D'après la formule (7) le pouvoir thermoélectrique $\frac{dE}{d\theta}$ se compose de deux parties : l'une due à l'effet Peltier $\left(\frac{d\Pi}{d\theta}\right)$, l'autre due à l'effet Thomson ($H_M - H_N$). Le rapport de $(H_M - H_N)$ à $\frac{dE}{d\theta}$ fait connaître l'importance relative de l'effet Thomson. Or, des équations (16) on tire :

$$(H_M - H_N) : \frac{dE}{d\theta} = \frac{\theta}{\theta_n - \theta}$$

Exemple numérique : Pour le couple cuivre-plomb, on a d'après M. Tait entre -18° et $+416^\circ$: $\frac{dE}{d\theta} = 0,0094 (130 - \theta) \times 10^{-9}$ volt par degré centigrade. Par conséquent, H étant nul pour le plomb, on aurait pour le cuivre :

$$H = 94 \times 10^{-10} \theta$$

L'effet Peltier, pour ce couple, aurait pour valeur :

$$\Pi = 94 \times 10^{-10} \theta (130 - \theta)$$

La température neutre serait : $130 - 273 = -143^\circ$ centigrades.

En remplaçant dans (8) les $\frac{dE}{d\theta}$ par leurs expressions (16) dans lesquelles on écrira θ_{MN} au lieu de θ_n , on trouve :

$$(a_M - a_N) \theta_{MN} + (a_N - a_P) \theta_{NP} + (a_P - a_M) \theta_{PM} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\theta_{MN} + \theta_{MP}}{a_N - a_P} = \frac{\theta_{NP} + \theta_{NM}}{a_P - a_M}$$

Cette relation entre les températures neutres des trois couples MN, NP et PM est susceptible de vérifications numériques¹.

PILES HYDROÉLECTRIQUES

102. Loi de Thomson. — Dans un circuit à température uniforme contenant une pile hydroélectrique, le passage du courant détermine : d'une part, dans la pile même, des réactions chimiques (par exemple dissolution du zinc dans l'acide, mise en liberté du cuivre); d'autre part un dégagement de chaleur aux divers points du circuit. Il est rationnel de supposer que la chaleur totale recueillie dans le circuit est égale à la *chaleur chimique*, c'est-à-dire à l'énergie calorifique que doivent développer, comme l'on sait, les réactions chimiques. Cette proposition, énoncée par E. Becquerel, a été pleinement confirmée par les expériences de Favre (1853). Il résulte en outre de ces expériences que si le courant passe, par exemple, dans une machine électromagnétique et produit un certain travail, la chaleur dégagée dans le circuit est inférieure à la chaleur chimique d'une quantité égale à l'équivalent calorifique du travail produit. Tous ces faits découlent du principe de la conservation de l'énergie.

La quantité de chaleur dégagée en vertu de la loi de Joule est représentée par Ri^2t si on l'évalue en unités mécaniques. Celle qui correspond au passage de l'unité d'électricité ($it = 1$) est $Ri = E$, c'est-à-dire la force électromotrice de la pile. Pendant le passage de l'unité d'électricité, les réactions chimiques portent sur un

¹ Voir *Données pratiques sur les couples thermoélectriques dans Gordon*, tome II ; Mascart et Joubert, § 1293, etc.

équivalent électrochimique de l'électrolyte. Ces considérations avaient conduit sir W. Thomson à poser la loi suivante (1851) :

La force électromotrice E d'un système électrochimique est, en mesure absolue, égale à l'équivalent mécanique A de l'action chimique effectuée sur un équivalent électrochimique de la substance.

Ainsi dans la pile Daniell, pendant le passage d'un coulomb, un équivalent électrochimique de zinc (0 gr. 000338) se dissout au pôle négatif dans un équivalent de SO^4 (0 gr. 000497) pour former un équivalent de sulfate de zinc (0 gr. 000835) ; tandis qu'au pôle positif un équivalent de sulfate de cuivre (0 g. 000826) est décomposé et un équivalent de cuivre (0 gr. 000329) est déposé. La dissolution d'un équivalent électrochimique de zinc dégageant 0,568 petites calories, et la décomposition du sulfate de cuivre en absorbant 0,304, la chaleur chimique correspondant au passage d'un coulomb est égale à l'excès 0 264, ou en unités mécaniques dans le système pratique : $A = 4,17 \times 0,264 = 1^{\circ} 10$. La valeur de la force électromotrice E de la pile, mesurée directement est $1^{\circ} 07$. La loi de Thomson se vérifie donc d'une manière approximative.

On calcule ainsi la force électromotrice d'un grand nombre de piles ou la force contre-électromotrice des voltamètres lorsqu'on connaît la chaleur dégagée dans les piles ou absorbée dans les voltamètres par les réactions chimiques portant sur un équivalent électrochimique des électrolytes.

Toutefois la loi de Thomson est loin de se vérifier pour toutes les piles. Ainsi, en remplaçant le cuivre par l'argent dans la pile Daniell, on trouve que la force électromotrice E est inférieure à la chaleur chimique A , évaluée en unités mécaniques, de $0^{\circ} 36$. L'écart $A - E$ est même bien plus considérable dans certains couples ; il est le plus souvent positif, mais quelquefois négatif. On peut dire seulement que les couples où se produisent les actions chimiques A les plus intenses sont en général ceux qui possèdent les forces *e. m.* E les plus élevées.

103. Analyse des phénomènes dans la pile. — La loi de Thomson est donc en défaut ; mais le principe de la conservation de l'é-

nergie n'est nullement infirmé pour cela. L'énergie chimique ne doit pas se transformer intégralement en chaleur dégagée en vertu de la loi de Joule, c'est-à-dire que l'on ne doit pas poser : $\Lambda = Ri = E$. En effet :

1° Les soudures, au nombre de trois au moins, absorbent ou dégagent de la chaleur sous l'action du courant; elles donnent lieu aux effets Peltier $\Sigma\Pi$, qui doivent entrer en ligne de compte dans le calcul de la force *e. m.* et s'ajouter à Λ . Dans un circuit métallique à température uniforme $\Sigma\Pi$ serait nul; mais il n'en est pas de même en général, comme on le verra ci-après, lorsque le circuit renferme des électrolytes. $\Sigma\Pi$ peut être soit positif, soit négatif.

2° La pile peut donner lieu à des réactions secondaires : attaque locale des électrodes, occlusion des gaz par celles-ci (absorption d'oxygène ou d'hydrogène par le platine par exemple), foisonnement des produits de l'électrolyse, dégagement de gaz, formation de précipités, etc. Ces diverses causes absorbent une partie de l'énergie chimique et réduisent d'autant l'énergie voltaïque $Ri = E$ disponible dans le circuit. Enfin le circuit peut s'échauffer inégalement sous l'action du courant; de là production de forces thermo-électriques, qui doivent s'ajouter à E .

Parmi ces divers phénomènes qui sont l'origine de la différence $(\Lambda - E)$, les uns sont réversibles; c'est-à-dire que, s'ils dégagent une quantité C/h de chaleur pendant le passage de l'unité d'électricité dans un sens, ils absorbent la même quantité C/h pendant le passage de l'unité d'électricité en sens inverse dans le circuit. Tels sont : l'effet Peltier, le dégagement des gaz sous les cloches renversées dans un voltamètre à eau (le courant inverse recomposant ces gaz), le foisonnement des produits de l'électrolyse lorsqu'ils reviennent au volume primitif par le passage du courant inverse. Les autres au contraire sont irréversibles, dégageant de la chaleur quel que soit le sens du courant; tels sont : l'attaque locale des électrodes, la formation des précipités, etc. Ces phénomènes échappent actuellement à l'analyse. Mais ceux qui sont réversibles peuvent être calculés; c'est ce que nous nous proposons de faire.

Avant d'aborder le cas général, considérons le cas d'une pile à gaz, dans laquelle le passage du courant correspond à une dimi-

nution proportionnelle de la masse des gaz renfermés sous des cloches. Soit, pour fixer les idées, un voltamètre à eau. Si ρ et ρ' désignent les densités des gaz à la température θ et à la pression p , ρ_0 et ρ'_0 leurs densités à 0° et à la pression p_0 de 760^{mm} de mercure, on a, d'après la loi de Mariotte :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} (1 + \alpha\theta)$$

$$\frac{p}{\rho'} = \frac{p_0}{\rho'_0} (1 + \alpha\theta)$$

D'autre part, soient u et u' leurs diminutions de volume par le passage de l'unité d'électricité; $\varpi = \rho u$ et $\varpi' = \rho' u'$ les masses correspondantes des gaz recombines : le travail de la pression sur les masses ϖ et ϖ' dont les volumes sont réduits de u et u' à des valeurs négligeables (volume liquide occupé par $\varpi + \varpi'$) est égal à $p(u + u')$. Ce travail devenant disponible dans le circuit, la force *e. m.* est augmentée d'autant. Or on a :

$$\begin{aligned} p(u + u') &= p \left(\frac{\varpi}{\rho} + \frac{\varpi'}{\rho'} \right) \\ &= p_0 \left(\frac{\varpi}{\rho_0} + \frac{\varpi'}{\rho'_0} \right) (1 + \alpha\theta) \end{aligned}$$

Dans le système C G S, la pression de 760^{mm} de mercure a pour valeur $p_0 = 1,033 \times 981,000$ dynes par *cmq.* Les densités de l'hydrogène et de l'oxygène sont : $\rho_0 = 0,00008958$ et $\rho'_0 = 16 \rho_0$. Les équivalents électrochimiques ϖ et ϖ' correspondant au passage de l'unité électromagnétique C. G. S. d'électricité (10 coulombs) sont : $\varpi = \frac{1 \text{ gr.}}{9660}$ et $\varpi' = 8 \varpi$. Donc :

$$\begin{aligned} p(u + u') &= \frac{3}{2} \times 1,033 \times 981000 \frac{1 + \alpha\theta}{9660 \times 0,00008958} \\ &= \frac{3}{2} \times 1171.000 (1 + \alpha\theta) \quad \text{C. G. S.} \end{aligned}$$

C'est là l'expression du renforcement de la force *e. m.*, en unités C. G. S, dû au travail de la pression p . Dans le système pratique, ce résultat doit être multiplié par 10^{-8} . L'accroissement de force *e. m.* du couple à oxygène et hydrogène est donc : 0,0176 $(1 + \alpha\theta)$

volt, valeur croissante avec la température, mais indépendante de la pression p .

Le produit $p(u + u')$ représentera encore la modification apportée à la force électromotrice dans une pile à éléments liquides ou solides dont les variations de volume sont u et u' . Mais cette valeur est alors sensiblement proportionnelle à la pression p , à cause de la faible compressibilité de ces éléments.

« De même tout autre travail, quel qu'il soit, qui s'effectue pendant l'électrolyse aura son effet sur la valeur de la force électromotrice. Par exemple si un courant vertical passe entre deux électrodes de zinc dans une solution de sulfate de zinc, il faudra une force électromotrice plus grande si, dans la solution, le courant va de bas en haut que s'il va de haut en bas; car dans le premier cas le zinc est transporté de l'électrode inférieure à l'électrode supérieure, et dans le second de l'électrode supérieure à l'électrode inférieure. La force électromotrice nécessaire de ce chef est inférieure à un millionième de celle de l'élément Daniell, par pied de distance entre les électrodes. » (Maxwell, § 263.)

104. Théorie des piles réversibles. — Considérons maintenant une pile quelconque réversible, de résistance r , que l'on fait traverser par un courant i excessivement faible, de telle sorte que la chaleur ri^2t dégagée en vertu de la loi de Joule est excessivement minime ou que le rapport $\frac{ri^2t}{E}$ est négligeable. Λ' désignant la somme des effets Peltier, on maintiendra constante la température θ des soudures pendant le passage de la quantité dq d'électricité, en leur fournissant la quantité de chaleur $\Lambda' d q$ au moyen d'une source de chaleur à la température θ . Si l'on veut en même temps élever de $d\theta$ la température du couple, il faut lui fournir une quantité de chaleur $c d\theta$, c désignant sa chaleur spécifique; de telle sorte que la quantité totale de chaleur fournie au couple, en évaluant tout en unités mécaniques, est représentée par

$$dQ = cd\theta + \Lambda'dq \quad (17)$$

En même temps l'énergie potentielle U du couple s'accroît: 1° de $c d\theta$ en raison de son élévation de température; 2° de $-\Lambda dq$, valeur, changée de signe, de l'énergie potentielle chimique dis-

parue dans la pile pendant le passage de la quantité d'électricité dq . Donc :

$$dU = cd\theta - \Lambda dq \quad (18)$$

La force électromotrice E se compose du terme Λ dû aux actions chimiques et de la somme Λ' des effets Peltier :

$$E = \Lambda + \Lambda' \quad (19)$$

Plus rigoureusement on doit comprendre dans l'accroissement d'énergie dU le travail produit par la pression atmosphérique sur le couple (voir ci-dessus) pendant le passage de la quantité dq , ainsi que d'autres termes semblables s'il y a lieu. Ces termes contenant dq en facteur, cela revient à modifier la valeur du coefficient Λ , qui différera un peu de la chaleur chimique. De même Λ' devra être corrigé s'il existe d'autres phénomènes réversibles produisant le même emprunt de chaleur à la source θ que l'effet Peltier. D'une manière générale, Λ' et Λ désignent deux coefficients définis par les équations (17) et (18), dans lesquelles on tient compte de tous les phénomènes réversibles qui se produisent dans la pile. Leur somme fera connaître dans tous les cas la force électromotrice E (19).

Puisqu'il ne s'agit que de phénomènes réversibles, on sait (§§ 53 et 54), d'après les principes de la thermodynamique, que la variation dU d'énergie potentielle du couple est une différentielle totale exacte, ainsi que le quotient de dQ par la température absolue θ , c'est-à-dire :

$$\frac{dQ}{\theta} = \frac{c}{\theta} d\theta + \frac{\Lambda'}{\theta} dq \quad (17')$$

Les variables indépendantes étant θ et q , ces deux conditions s'écrivent :

$$1^{\circ} \text{ pour } dU : \quad \frac{\partial c}{\partial q} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \quad (20)$$

$$2^{\circ} \text{ pour } \frac{dQ}{\theta} : \quad \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{c}{\theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Lambda'}{\theta} \right) \quad (21)$$

Cette dernière condition peut s'écrire :

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial c}{\partial q} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} - \frac{\Lambda'}{\theta^2}$$

ou, en tenant compte de (20) et de (19) :

$$\Lambda' = \theta \frac{dE}{d\theta} \quad (22)$$

Il en résulte :

$$\Lambda = E - \theta \frac{dE}{d\theta} \quad (23)$$

et :

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = \theta \frac{d^2 E}{d\theta^2} \quad (24)$$

Si l'on se reporte aux formules de thermoélectricité, on voit que Λ' dans la pile hydroélectrique est représenté par la même expression $\theta \frac{dE}{d\theta}$ que l'effet Peltier Π dans la pile thermoélectrique.

Λ est par conséquent représenté par la même expression $\left(E - \theta \frac{dE}{d\theta} \right)$ que la part de force thermoélectrique due aux effets Thomson, soit $\int (H_M - H_N) d\theta$; $\frac{d\Lambda}{d\theta}$ et $(H_M - H_N)$ sont représentés par $-\theta \frac{d^2 E}{d\theta^2}$.

Application numérique. — On a, pour le couple zinc-sulfates-argent, les données expérimentales suivantes ¹ à la température de 18° centigrades ($\theta = 273 + 18 = 291$) :

$$E = 1,51 \text{ et } \frac{dE}{d\theta} = - 0,0012$$

D'après la relation (23) on doit donc avoir :

$$\Lambda = 1,51 + 291 \times 0,0012 = 1,86$$

Cette valeur calculée de Λ concorde bien avec la valeur 1,9 mesurée par M. Berthelot.

Pour que la loi de Thomson : $\Lambda = E$ soit applicable à un couple, il faut, d'après (23), que la variation $\frac{dE}{d\theta}$ de la force électromotrice avec la température soit nulle. Il en résulte d'après (24) :

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = 0, \text{ et } \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = 0$$

La deuxième condition exprime que la chaleur de combinaison

¹ *Bulletin de la Société française de Physique*, 1885, p. 180, note de M. Potier.

(ou plus généralement, le coefficient Λ) des éléments de l'électrolyse doit être indépendante de la température. D'après la première, la chaleur spécifique c du couple doit rester la même après le passage du courant qu'avant, c'est-à-dire la même lorsque les éléments de l'électrolyse sont libres que lorsqu'ils sont combinés (loi de Wæstyne).

La réciproque n'est pas exacte. De ce que l'on a dans un couple : $\frac{dc}{dq} = -\frac{d\Lambda}{d\theta} = 0$, on déduit, d'après (24) : $\frac{dE}{d\theta} = C^{\text{e}} = -a$; et par suite la différence : $\Lambda - E = a\theta$ est proportionnelle à la température absolue, mais n'est pas forcément nulle. Λ est alors une constante puisque $\frac{d\Lambda}{d\theta}$ est nul, et la force $e. m. E$ est une fonction linéaire de la température.

L'état du couple *réversible* considéré jusqu'ici est défini par les variables θ et q . Si le couple est enfermé dans un compartiment dont on peut faire varier le volume u à volonté au moyen d'un piston, l'espace au-dessus du liquide contiendra les vapeurs qu'il émet. L'évaporation est limitée par la saturation de cet espace, et elle devient un phénomène réversible dont on peut tenir compte dans la théorie, tandis qu'elle échappait à l'analyse dans le cas étudié plus haut. En outre, la concentration des électrolytes salins, qui dépend de l'évaporation, intervient alors. D'autre part, les variables θ , q et u étant au nombre de 3, les conditions pour que dU et $\frac{dQ}{\theta}$ soient des différentielles exactes seront au nombre de 6 au lieu de 2. Il en résulte de nouvelles relations, qui permettront de perfectionner la théorie de la pile ¹. Dans tous les cas, la relation principale (23) subsiste, à la condition que les phénomènes irréversibles aient une influence nulle ou négligeable.

C'est M. Helmholtz qui a fait connaître cette importante relation. Ce n'est là qu'une première correction à apporter à la loi de Thomson ; mais elle paraît à peu près suffisante dans un grand nombre de cas, ainsi que tendent à le démontrer les récentes recherches de MM. Chroustchoff et Sitnikoff ².

¹ Lippmann, *Cours de thermodynamique*.

² *Comptes rendus*, 1889, t. CIX, p. 937.

TROISIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS ET LOIS DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

105. — **Loi de Coulomb.** On sait comment Coulomb a été conduit à considérer les phénomènes magnétiques comme dus à des masses, dites *magnétiques*, réparties dans les aimants et les corps aimantés par influence. Il a démontré expérimentalement que la force f , attractive ou répulsive, qui s'exerce entre deux de ces masses q_1 et q_2 est inversement proportionnelle au carré de leur distance r ; c'est-à-dire que l'on a :

$$f = k' \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1)$$

k' étant un coefficient qui dépend de la nature du milieu, comme le coefficient k de la formule analogue en Électrostatique (§ 11). Les quantités q_1 et q_2 doivent être affectées du signe + ou du signe —, suivant qu'elles représentent des masses de fluide nord ou sud. La force f sera par conséquent affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est répulsive ou attractive.

La formule fondamentale (1) du Magnétisme étant semblable à celle de l'Électrostatique, on peut prévoir que la théorie du magnétisme présentera une analogie très étroite avec celle de l'Électro-

statique. Avant d'en poursuivre le développement, il convient de faire ressortir une différence essentielle qui existe entre les deux théories.

Rappelons, à cet effet, les expériences de l'aiguille brisée et de l'aiguille flottante. Si l'on brise une aiguille aimantée en un nombre quelconque de fragments, chacun de ceux-ci se comporte lui-même comme un aimant complet. D'autre part, si l'aiguille ou l'un des fragments flotte librement à la surface d'un liquide, ces aimants, sous l'action du champ magnétique terrestre, s'orientent dans une direction déterminée, mais ne sont soumis à aucun effort de translation. Coulomb en a conclu que la somme des masses magnétiques positives et négatives d'un aimant quelconque est nulle. Il résulte de là, ainsi que de tous les autres faits connus, qu'il est impossible de séparer le fluide positif d'un aimant de son fluide négatif.

On a vu, au § 28, que l'on peut expliquer les phénomènes auxquels donne lieu la présence d'un corps diélectrique dans un champ électrique, en supposant ce corps électrisé, mais de telle sorte que chacune de ses particules contienne autant d'électricité positive que d'électricité négative, ces électricités de signes contraires ne pouvant être recueillies séparément. Les corps magnétiques, sous ce rapport, sont donc semblables aux diélectriques *parfaitement isolants*. Mais, en électricité, l'emploi de corps conducteurs permet de séparer des charges de signes contraires obtenues par induction, et d'isoler sur un corps une quantité d'électricité d'un certain signe. Rien d'analogue n'existant en magnétisme, on en conclut qu'aucun corps n'est doué d'une *conductibilité magnétique* analogue à la conductibilité électrique. C'est là une différence essentielle entre l'électricité et le magnétisme.

Les masses magnétiques q_1 et q_2 de la formule (1), ne pouvant être isolées, ont une existence hypothétique. On peut établir la théorie du magnétisme sans les faire intervenir, comme on le verra dans le chapitre suivant. Toutefois leur considération est souvent commode; et comme elle conduit à des résultats exacts au point de vue mathématique, nous y aurons recours d'une manière courante, en remplaçant le mot *masse* par celui de *quantité* de magnétisme.

Nous devons encore faire observer que la formule (1), de même que la formule fondamentale d'Électrostatique, est d'une application restreinte. On ne peut l'appliquer en toute rigueur qu'aux gaz et aux autres corps faiblement magnétiques. Les corps auxquels elle ne peut être appliquée, c'est-à-dire ceux qui présentent les phénomènes de force coercitive, de magnétisme résiduel, etc., sont en très petit nombre ; mais ce sont les plus importants au point de vue des applications du magnétisme, ceux qui sont susceptibles d'être transformés en aimants puissants. Aussi la théorie du magnétisme que nous allons développer a-t-elle une portée moins étendue que celle de l'Électrostatique.

La plupart des auteurs, notamment Maxwell, commencent la théorie du magnétisme par l'étude des aimants permanents, en supposant la loi de Coulomb applicable au volume occupé par leur masse ; c'est là une hypothèse évidemment inadmissible. Les calculs auxquels donne lieu cette étude constituent un simple exercice mathématique, dont le résultat ne comporte d'ailleurs aucune application ni même aucune vérification en ce qui concerne l'intérieur des corps en question. C'est pourquoi nous ne suivons point ici la marche généralement adoptée.

106. Dimensions électromagnétiques. — La nature du coefficient k' de la formule (1) et, par suite, ses dimensions K' nous sont actuellement inconnues. Les dimensions de la quantité Q de magnétisme ne peuvent donc se déduire de la formule de Coulomb, à moins de faire une hypothèse. Si l'on suppose, par exemple, que k' est un coefficient purement numérique (que l'on prend égal à 1), on tire de cette formule, en remplaçant les quantités f , q_1 , q_2 et r par leurs dimensions :

$$F = Q_m^2 L^{-2}$$

d'où :

$$Q_m = F^{\frac{1}{2}} L = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

On a alors les dimensions de la quantité de magnétisme ou du pôle magnétique dans le système dit électromagnétique. Ces dimensions sont les mêmes que celles de la quantité d'électricité dans le système électrostatique.

107. Densité magnétique. Intensité d'aimantation. — Si l'on suppose une certaine quantité de magnétisme répartie sur une surface, le rapport de cette quantité à la surface s'appelle *densité magnétique* ou le plus souvent *intensité d'aimantation* (on verra plus loin la raison de cette dénomination). Les dimensions de cette grandeur dans le système électromagnétique sont :

$$I_m = Q_m L^{-2} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Elles sont les mêmes que celles de la densité électrique dans le système électrostatique.

108. Potentiel magnétique. — Le potentiel magnétique en un point est défini exactement de la même manière que le potentiel électrique. C'est le travail nécessaire pour amener de l'infini (ou d'un point au potentiel zéro) au point considéré une quantité de magnétisme égale à l'unité. Si le champ magnétique est dû à la présence de quantités q_1, q_2, q_3, \dots le potentiel V est égal à :

$$V = k \sum \frac{q}{r}$$

Le potentiel magnétique, de même que le potentiel électrique ne peut être connu qu'à une constante près. D'ailleurs les différences de potentiels interviennent seules dans les calculs et la détermination de la constante n'a pratiquement aucune importance.

Dans le système électromagnétique, k' étant un coefficient numérique égal à 1, on écrit :

$$V = \sum \frac{q}{r}$$

et les dimensions du potentiel sont :

$$V_m = Q_m L^{-1} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

109. Surfaces équipotentiellles. Lignes et tubes de force. — Il y a lieu de considérer ici, comme en Électrostatique, les surfaces équipotentiellles et les lignes de force qui sont leurs trajectoires

orthogonales. La force magnétique en un point est normale à la surface équipotentielle en ce point et égale à $-\frac{dV}{dn}$, $-dV$ représentant la chute de potentiel sur une longueur dn de la normale. La composante de la force suivant une direction quelconque Ox est égale à $-\frac{\partial V}{\partial x}$.

Les dimensions électromagnétiques de la force $-\frac{dV}{dn}$ sont :

$$V_m L^{-1} = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

c'est-à-dire les mêmes que celle de la densité magnétique I .

Le champ magnétique peut être divisé, comme un champ électrique, en tubes de force normaux aux surfaces équipotentielles. Le flux d'induction magnétique q à travers une section s d'un tube sera défini, comme le flux d'induction électrostatique, par la formule :

$$q = -\frac{1}{4\pi k} \frac{dV}{dn} s$$

ce flux est le même à travers toute section du tube, pourvu que celui-ci ne contienne pas de *magnétisme libre*. (Revoir les propriétés des tubes de force en électrostatique, § 23.) C'est le principe de la conservation du flux d'induction le long d'un tube quelconque. A l'aide d'une hypothèse (§ 26) on étend ce principe au cas où le tube traverse successivement plusieurs milieux : air, bismuth, eau, etc.

110. Énergie du champ magnétique. — Si le champ magnétique est dû à des quantités de magnétisme q_1, q_2, q_3, \dots en désignant par V le potentiel au point où se trouve une quantité q , on démontrerait comme au § 18 que l'énergie magnétique W de ce système est donnée par la formule :

$$W = \frac{1}{2} \sum q V$$

On peut encore mettre l'expression sous la forme donnée au § 29, formule 11 :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du$$

du désignant un élément de volume pris en un point où la force magnétique est $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$, et le coefficient k' pouvant varier d'un point à un autre. L'intégrale doit être étendue au volume entier du champ magnétique.

Cette dernière expression de W offre sur la première cet avantage, entre autres, d'être indépendant des quantités hypothétiques q de magnétisme. En outre, elle convient mieux lorsque l'on considère les actions magnétiques comme se transmettant de proche en proche dans le milieu, et l'énergie W comme répandue dans le volume entier du champ; car on est alors conduit à représenter par la formule

$$p = \frac{1}{8\pi k'} \left(\frac{dV}{dn}\right)^2$$

l'énergie potentielle existant dans l'unité de volume en point quelconque (§ 46).

111. Equations du champ magnétique. — Ces équations sont les mêmes que pour un champ électrique. La quantité totale de magnétisme contenue dans un volume quelconque étant nulle, ainsi qu'on l'a vu plus haut, il en est de même de la densité magnétique de volume ρ , et l'on démontrerait qu'en chaque point d'un milieu homogène et isotrope, le potentiel satisfait à l'équation de Laplace (6'' du § 25) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Si le milieu est hétérogène, le coefficient k' variant d'un point à un autre, on devra remplacer cette équation par la suivante, qui est plus générale (équation 6 du § 25, où l'on ferait : $\rho = 0$) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k'} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k'} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k'} \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0$$

A cette équation on devra ajouter des conditions relatives aux surfaces de séparation de milieux différents. Ces conditions ne sont autre chose que l'expression de la conservation du flux d'induction $-\frac{1}{4\pi k'} \frac{dV}{dn}$ tout le long d'un tube de force à travers des milieux différents (équation 7 du § 26, où l'on ferait : $\sigma = 0$).

Si l'on donne un milieu, composé d'une ou plusieurs parties homogènes, et limité à une surface en chaque point de laquelle on connaisse la valeur soit du potentiel, soit du flux d'induction, l'intégration de l'équation de Laplace (2) et des équations aux surfaces permettra de déterminer en chaque point de ce milieu le potentiel et la force magnétique.

112. Réfraction des tubes de force. — Un tube de force ou d'induction magnétique, passant d'un milieu A_1 (de l'air par exemple) dans un milieu A (fig. 7), se réfracte, comme un tube d'induction électrique (§ 27), à la surface de séparation Σ des deux corps. La direction d'incidence et celle de réfraction sont dans un même plan normal à la surface Σ , et les angles d'incidence α_1 et de réfraction α satisfont à la relation :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k'_1}{k'} = \mu' \quad (3)$$

μ' désignant une grandeur analogue au pouvoir inducteur spécifique μ des diélectriques. Nous appellerons μ' le *pouvoir inducteur magnétique* ou, avec sir W. Thomson, la *perméabilité magnétique* de la substance A par rapport à l'air (substance A_1).

113. Ecrans magnétiques. — Si le pouvoir inducteur magnétique de la substance A est extrêmement grand, le rapport $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_1}$ est très grand lui-même. Dans le cas limite où μ' serait infini l'angle α_1 serait nul, c'est-à-dire que les tubes d'induction venant du milieu A_1 arriveraient normalement sur la surface Σ . En outre, le coefficient $k' = \frac{k'_1}{\mu'}$ étant nul, et le flux d'induction $q = -\frac{1}{4\pi k'} \left(\frac{dV}{dn} \right) s$ à travers un tube quelconque ne pouvant être infini, la force $-\frac{dV}{dn}$ devrait être nulle elle-même en tous les points du corps A , c'est-à-dire que le potentiel magnétique V resterait constant dans la masse A . Si un tel corps renfermait une cavité, le potentiel y serait également constant. Il en résulte qu'un corps de pouvoir inducteur magnétique infini se comporterait comme un écran magnétique absolu entre deux régions de l'espace séparées par lui, de même qu'un diélectrique de pouvoir inducteur infini ou un

conducteur se comporteraient comme des écrans électriques absolus.

En général les angles d'incidence α_1 et de réfraction α sont du même ordre de grandeur. Toutefois pour certaines substances le pouvoir inducteur μ' a une valeur très grande, jusqu'à 2000 et au delà pour le fer doux par exemple (§ 125). Alors l'angle α étant très voisin de $\frac{\pi}{2}$, α_1 est encore très faible; si $\mu' = 500$, pour $\alpha = 89^\circ$ on trouve $\alpha_1 = 1^\circ 20'$. Les lignes de force ou d'induction venant du milieu A_1 arrivent donc presque normalement sur A ; en même temps la force magnétique à l'intérieur de A est très faible.

Ainsi un corps creux de perméabilité magnétique μ' très grande est un écran suffisamment parfait, à moins que le rapport des dimensions de la cavité à l'épaisseur de l'enveloppe n'atteigne l'ordre de grandeur de μ' . Sir W. Thomson a utilisé cette propriété en enfermant ses galvanomètres marins dans une cage de fer doux, percée d'un trou pour le passage des rayons lumineux. L'effet du champ magnétique extérieur, qui serait variable sur le galvanomètre d'un instant à l'autre à cause des mouvements du navire,

est annulé par la cage enveloppante.

Le galvanomètre se trouve dans un champ magnétique artificiel, créé à l'intérieur de cette cage et fixe par rapport à l'instrument.

On peut rattacher aux faits qui précèdent l'expérience suivante. Considérons une masse de fer doux, par exemple un cylindre $A B C D$ percé d'une cavité cylindrique concentrique de faible diamètre $A' B' C' D'$ (la figure 44 en donne une coupe suivant l'axe) et supposons-le traversé par des lignes de force qui sont parallèles à l'axe sauf vers les bases $A B$ et $C D$, où ces lignes vont en s'épanouissant. A partir d'une petite distance de ces bases, les surfaces équipotentiennes sont sensiblement planes et parallèles, de telle sorte que, si ε est la distance de deux des surfaces V et $V + dV$, la force magnétique $f = \frac{dV}{\varepsilon}$ a la même valeur

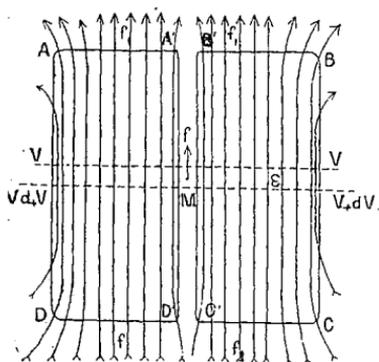


Fig. 44.

$C' D'$ (la figure 44 en donne une coupe suivant l'axe) et supposons-le traversé par des lignes de force qui sont parallèles à l'axe sauf vers les bases $A B$ et $C D$, où ces lignes vont en s'épanouissant. A partir d'une petite distance de ces bases, les surfaces équipotentiennes sont sensiblement planes et parallèles, de telle sorte que, si ε est la distance de deux des surfaces V et $V + dV$, la force magnétique $f = \frac{dV}{\varepsilon}$ a la même valeur

dans la masse de fer doux et en un point M de la cavité. Sur les bases au contraire, si l'on prend un élément de surface s qui ne soit pas trop voisin des bords, la force magnétique, égale à $f = -\frac{dV}{dn}$ dans le fer et à $f_1 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1$ dans l'air, est normale à la surface ; et la valeur commune q du flux d'induction le long du tube de force découpant l'élément s sur cette surface est :

$$q = \frac{1}{4\pi k'} f s = \frac{1}{4\pi k'_1} f_1 s$$

d'où :

$$f_1 = \frac{k'_1}{k'} f = \mu' f \tag{4}$$

La force ou intensité du champ magnétique f_1 près des bases est donc μ' fois plus grande que la force magnétique en M dans la cavité cylindrique. Si μ' est égal à 400 ou 500, le champ magnétique paraîtra pratiquement nul dans la cavité comparativement au champ extérieur. En réalité la force y est la même que dans la masse de fer doux.

On réalise l'expérience précédente en enroulant sur le cylindre $A B C D$ des spires de fil conducteur que l'on fait traverser par un courant. Ce courant développe un champ magnétique que renforce le fer doux. (Voir *Electromagnétisme*.) En introduisant à moitié une aiguille d'acier dans la cavité cylindrique, on constate que le passage du courant produit l'aimantation de l'aiguille, mais seulement dans la moitié extérieure au cylindre.

D'après la formule (4), si les lignes de force dans une masse de fer doux (ou d'un autre corps) traversent sa surface *normalement*, la force f_1 dans le voisinage de cette surface est égale à μ' fois la force f dans le corps. Si l'on imagine en un point du corps une cavité en forme de disque plan infiniment mince perpendiculaire aux lignes de force, la force f_1 dans cette cavité sera donc égale à $\mu' f$, f désignant la force magnétique dans le corps au point considéré. Maxwell appelle cette quantité f_1 *l'induction magnétique à l'intérieur du corps* et sir W. Thomson l'appelle la *définition électromagnétique de la force magnétique* ; tandis que f serait, d'après Maxwell, la *force magnétique à l'intérieur du corps*, et, d'après

Thomson, la *définition polaire de la force magnétique*. Nous n'emploierons pas ces dénominations¹.

114. Aimantation par influence. — Lorsqu'un corps D est plongé dans un milieu D_1 , de l'air par exemple (voir fig. 8) où existe un champ magnétique, la présence de D produit dans le voisinage les mêmes effets que celle d'un aimant. On dit que le corps D est aimanté par influence. Le phénomène est le même que lorsqu'un corps diélectrique, tel qu'une balle de soufre, est plongé dans un champ électrique (§ 28).

On montrerait, comme au § 28, que, dans le calcul des actions magnétiques, on peut supposer le corps de coefficient k' remplacé par un volume égal de la substance de coefficient k'_1 qui remplit le milieu ambiant, à la condition de supposer que chaque tube d'induction q induit sur la surface du volume en question : une charge égale à $-q\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ à l'entrée, et une charge égale à $+q\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ à la sortie. Plus généralement les actions magnétiques à travers un milieu hétérogène quelconque sont les mêmes que si elles s'exerçaient à travers tous les corps suivant la loi de Coulomb :

$$f = k' \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dans laquelle k' aurait toujours la même valeur, à la condition de supposer des couches magnétiques convenables réparties aux surfaces de séparation de milieux différents. Cette manière de considérer les choses a l'avantage de justifier l'extension générale que l'on donne ordinairement à la loi de Coulomb; en outre, elle est commode au point de vue du calcul des attractions ou répulsions de divers corps situés dans un champ magnétique. Mais elle ne saurait être admise à tous les points de vue, notamment pour le calcul de l'énergie du champ magnétique (même observation qu'au § 28).

On considère ordinairement comme réelles les couches magnétiques fictives $-q\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ et $+q\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ induites à la surface d'un

¹ Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme*, III^e partie, ch. II.

corps de pouvoir inducteur magnétique μ' par un tube d'induction q . On suppose même que l'induction magnétique se produit tout le long du tube de force, et que chaque portion, même infiniment courte, de ce tube se comporte comme un aimant, dont les masses magnétiques seraient égales à $-q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ et $+q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ et réparties sur les bases du tube élémentaire : $-q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ sur la base par laquelle la force entre dans le tube, $+q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ sur la base par laquelle elle sort. Chaque tube élémentaire est dit polarisé dans le sens des lignes de force.

Quelle que soit la valeur de cette hypothèse, que nous adopterons pour la commodité du langage, elle donne un résultat mathématiquement exact au point de vue du calcul des actions magnétiques, puisque sur la base commune à deux tubes élémentaires consécutifs les couches magnétiques

$$-q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right) \text{ et } +q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$$

s'annulent, l'aimantation apparente de la surface \cong produisant seule des effets extérieurs.

Dans cette hypothèse, la densité ou *intensité d'aimantation induite* sur la base σ d'un tube a pour expression :

$$\frac{q}{\sigma} \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right) = -\frac{1}{4\pi k'} \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right) \frac{dV}{dn} \frac{s}{\sigma}$$

elle est proportionnelle à $\frac{s}{\sigma} = \cos \alpha$, en supposant que la base σ du tube fasse un angle α avec la section équipotentielle s . Si l'on prend pour σ une section équipotentielle, $\alpha = 0$; et l'intensité I d'aimantation induite devient, en remarquant que $\mu' = \frac{k'}{k}$, et en désignant par f la force magnétique $-\frac{dV}{dn}$:

$$I = \frac{\mu' - 1}{4\pi k'} f$$

L'intensité I est donc proportionnelle à la force f . Le rapport κ de l'aimantation induite I à la force magnétisante f a reçu le nom de *coefficient d'aimantation réduite*; sir W. Thomson l'appelle *susceptibilité magnétique*.

On a :

$$\frac{I}{f} = \alpha = \frac{\mu' - 1}{4\pi k'_1} \quad (5)$$

d'où :

$$\mu' = 1 + 4\pi\alpha k'_1 \quad (6)$$

Comme dans le système électromagnétique on fait $k'_1 = 1$ pour l'air, la formule précédente devient :

$$\mu' = 1 + 4\pi\alpha \quad (6')$$

et α est alors un coefficient purement numérique. Plus généralement, les dimensions de α sont inverses de celles de k'_1 .

En pratique on détermine directement la valeur du coefficient d'aimantation induite α d'une substance, et l'on en déduit par la relation (6') celle du pouvoir inducteur μ' . Les valeurs de α sont assez faibles pour la plupart des corps, sauf pour les corps dits spécialement *magnétiques* : fer, nickel, cobalt. Pour ceux-ci α varie beaucoup avec les échantillons. Les plus grandes valeurs de ce coefficient ont été obtenues sur des échantillons de fer très doux et atteignent le chiffre 200, correspondant à une valeur de μ' dépassant 2,500. Ces chiffres se rapportent au cas où l'aimantation a une très faible valeur ; car pour des intensités d'aimantation un peu grandes, la valeur de α et celle de μ varient considérablement, ainsi qu'on le verra plus loin. Du reste nous ne les donnons qu'à titre d'indication, car la loi de Coulomb et, par suite, la théorie développée dans ce chapitre, ne sont pas applicables aux métaux fortement magnétiques (§ 105), si ce n'est peut-être dans le cas de champs magnétiques très faibles.

Pour les substances autres que le fer, le nickel et le cobalt, α étant très faible, μ' est voisin de l'unité. Mais, tandis que le pouvoir inducteur μ de tous les diélectriques étudiés jusqu'ici a été trouvé supérieur à l'unité (c'est-à-dire au pouvoir inducteur du vide) ; le pouvoir inducteur magnétique μ' de certaines substances, dites diamagnétiques (bismuth, eau,.....), est inférieur à celui du vide. Le coefficient α des substances diamagnétiques est donc négatif. Les substances dont le coefficient α est positif sont dites paramagnétiques. Voici les valeurs approximatives de α et celles de μ calculées par la formule (6'), pour

quelques corps. Les pouvoirs inducteurs sont rapportés à celui du vide pris comme unité¹.

Bismuth (diamagnétique)...	$\alpha = -15 \times 10^{-6}$	$\mu = 0.999812$
Or. id.	- 2,60 »	0,999967
Argent..... id.	- 1,74 »	0,999978
Cuivre..... id.	- 1,27 »	0,999984
Plomb..... id.	- 1,03 »	0,999987
Eau..... id.	- 0,72 »	0,999991
Zinc..... id.	- 0,56 »	0,999993
Verre..... id.	- 0,13 »	0,999998
Acide carbonique... id.	- 0,005 »	0,999999.94
Hydrogène..... id.	- 0,0007 »	0,999999.991
Vide.....	0	1
Azote (paramagnétique).	$+ 0,002 \times 10^{-6}$	1,000.000.025
Air..... id.	+ 0,038 »	1,000.000.5
Oxygène..... id.	+ 0,18 »	1,000.002.25
Sulfate de cuivre ... id.	+ 0,54 »	1,000.006.75
» nickel ... id.	+ 1,46 »	1.000.018
» fer..... id.	+ 14,2 »	1,000.178
Protochlorure de fer id.	+ 6 à + 44 »	1,000.550

115. Actions des aimants sur les corps. — On sait qu'un corps diélectrique, une balle de soufre par exemple, est attiré par les corps électrisés. Boltzmann a fondé sur ce principe une méthode de mesure des pouvoirs inducteurs spécifiques (§ 20, 2°, et § 32, 4°). De même une substance magnétique (fer, nickel, sulfate de cuivre, etc.) est attirée par un aimant, et l'on peut fonder là-dessus une méthode de mesure des pouvoirs inducteurs magnétiques qui diffèrent peu de l'unité. La force attractive peut se calculer si l'on connaît en chaque point de la surface du corps magnétique l'intensité I de l'aimantation induite et la force magnétique f du champ dû à l'aimant, puisque sur chaque élément σ de la surface s'exerce une force égale à $f I \sigma$ et dirigée suivant f . Le problème général est très compliqué ; il se simplifie dans certains cas, notamment lorsque le pouvoir inducteur μ' du corps diffère très peu du pouvoir inducteur μ' , du milieu ambiant pris comme unité.

Dans ce cas, en effet, le coefficient α est très petit ; les surfaces équipotentielles et les lignes de force du champ sont très peu modifiées par la présence du corps A de coefficient k' . Nous

¹ Mascart et Joubert, § 1225 et 1295.

supposons d'ailleurs que l'état magnétique de l'aimant n'est pas modifié par cette présence. Si l'on désigne par W_0 et W les valeurs de l'énergie du champ magnétique avant et après l'introduction du corps, par du un élément de volume de A , par f la force magnétique (avant ou après l'introduction, peu importe) au point où se trouve l'élément du , on a la relation approchée suivante, qui a été calculée au § 33 pour le cas d'un champ électrique :

$$W = W_0 - \frac{\kappa}{2} \int f^2 du$$

l'intégrale f étant étendue au volume entier de A . D'autre part la poussée exercée par le champ sur le corps A dans une direction dx est représentée (§ 33) par :

$$F = - \frac{\partial W}{\partial x}$$

On aura donc :

$$F = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int f^2 du$$

Dans le cas général où le pouvoir inducteur μ' du corps A est quelconque, nous supposons le volume de A très petit et nous

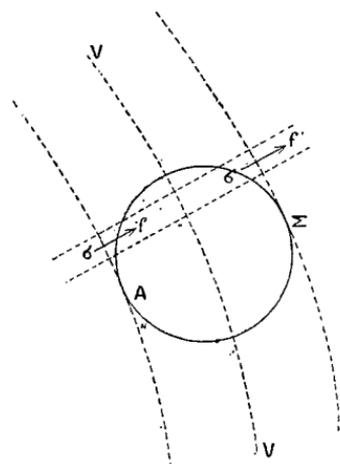


Fig. 45.

rappellerons les résultats obtenus au § 33, en remplaçant les quantités électriques par les quantités magnétiques correspondantes.

Si le pouvoir inducteur magnétique de A est supérieur à celui du milieu ambiant, ce corps tend à se déplacer dans le sens où la force magnétique va en croissant en valeur absolue. On peut d'ailleurs considérer soit la force f du champ modifié par la présence de A , soit la force f_0 du champ primitif avant l'introduction de A . La poussée qui s'exerce sur A n'aura donc pas lieu dans le sens de la force magnétique f ; elle peut même avoir lieu en sens inverse, comme dans le cas de la figure 45, où f est dirigée dans le sens de

la convexité des surfaces équipotentielles, tandis que la poussée s'exerce dans le sens de la concavité. Le corps A ne peut d'ailleurs être en équilibre stable que lorsqu'il est arrivé en un point où la force est maximum par rapport à tous les points voisins. Un tel point ne pouvant exister en dehors des aimants (ou corps aimantés par influence), A tend à se porter vers ces corps, c'est-à-dire est attiré par eux.

Si au contraire A a un pouvoir inducteur magnétique inférieur à celui du milieu ambiant, il tend à se déplacer dans le sens des forces magnétiques décroissantes. Il est donc repoussé par les aimants et ne peut être en équilibre stable qu'en un point où la force f est nulle, c'est-à-dire en un point d'équilibre ou en dehors du champ.

Enfin un corps de forme non sphérique tendra à s'orienter dans le champ suivant une certaine direction, qui variera avec son pouvoir inducteur magnétique.

En résumé, le même corps A sera attiré ou repoussé par les aimants suivant que le milieu ambiant aura un pouvoir inducteur plus faible ou plus fort que le sien ; ainsi un sel de fer, qui dans l'air est attiré par les aimants, sera repoussé par eux s'il est placé dans un autre sel de fer de perméabilité plus grande (expérience réalisée). Les attractions et répulsions sont donc relatives. De même un corps pesant tend à tomber ou à s'élever, suivant qu'il plonge dans un milieu moins dense ou plus dense que lui.

Les corps qui, dans le vide, sont attirés par les aimants, c'est-à-dire ceux dont le pouvoir inducteur est supérieur à l'unité, sont dits *paramagnétiques* ou simplement magnétiques. Ceux qui, dans le vide, sont repoussés par les aimants sont dits *diamagnétiques* ; pour ceux-ci le pouvoir inducteur μ' est inférieur à l'unité, le coefficient κ est négatif, et leur aimantation induite est de sens contraire à celle des corps magnétiques.

Si un barreau $a b$, formé d'une substance magnétique, est suspendu par un fil vertical projeté en o (fig. 46) entre deux pôles d'aimants N et S, il sera en équilibre instable dans la position perpendiculaire aux lignes de force. Dans une position oblique $a' b'$ la moitié $o a'$ tendra à se porter vers le pôle le plus voisin S, l'autre moitié vers le pôle N, et le barreau ne sera en équilibre stable

que dans la position *parallèle* aux lignes de force. Si le barreau était au contraire formé d'une substance diamagnétique, il serait

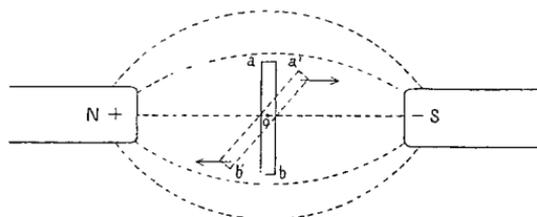


Fig. 46.

en équilibre stable dans la position *a b perpendiculaire* aux lignes de force ; de là les noms : *paramagnétiques* et *diamagnétiques* créés par Faraday.

116. Corps anisotropes. — En étudiant les propriétés magnétiques des cristaux, on a reconnu que certains d'entre eux présentent, à ce point de vue, un caractère très net d'anisotropie, la perméabilité μ' ou le coefficient α d'aimantation induite variant dans les diverses orientations. Pour quelques-uns on trouve même que μ' est supérieur à l'unité dans certaines directions et inférieur à l'unité dans d'autres directions. Ces corps sont donc paramagnétiques ou diamagnétiques à volonté suivant l'orientation qu'on leur donne dans le champ magnétique.

Les données expérimentales sont jusqu'ici insuffisantes pour établir ou vérifier la théorie du magnétisme dans les milieux anisotropes. Celle-ci a été établie par analogie avec la théorie de l'élasticité des corps anisotropes. Les applications en sont d'ailleurs encore peu importantes ; nous ne la développerons point ici¹.

117. Analogies électrostatique et électrocinétique. — La définition du potentiel, les équations du champ, la réfraction des tubes de force présentent l'analogie la plus complète en électrostatique et en magnétisme. En outre, en se reportant aux §§ 28 et 33, on reconnaîtra qu'un corps diélectrique, plongé dans un milieu de pouvoir inducteur différent y présente les phénomènes d'électrisation ou polarisation par influence et d'attraction ou répulsion

¹ V. Maxwell, § 435-437.

par les corps électrisés, absolument semblables à ceux de l'aimantation par influence et de l'attraction ou répulsion par les aimants. Enfin le raisonnement du § 45 au sujet des tensions et pressions existant dans un milieu diélectrique soumis à l'influence de corps électrisés peut être reproduit exactement dans le cas d'un milieu soumis à l'action d'un champ magnétique. L'analogie entre les champs électrostatique et magnétique est donc complète, si l'on écarte les propriétés des corps conducteurs et les phénomènes d'électricité ou de magnétisme résiduels.

On peut encore assimiler, au point de vue mathématique, un tube de force magnétique à un tube de flux ou courant électrique, et appliquer les lois de l'électrocinétique au calcul du potentiel et des lignes de force magnétiques, si cette manière de procéder paraît avantageuse. Les équations magnétiques deviennent en effet des équations électrocinétiques si les pouvoirs inducteurs magnétiques sont remplacés par des conductibilités électriques. Ainsi, que l'on ait une masse de fer doux de pouvoir inducteur égal à 500 plongée dans l'air, ou bien un conducteur occupant le même volume que cette masse dans un milieu de conductibilité 500 fois moindre que la sienne, la distribution des lignes de force et des potentiels magnétiques dans le premier cas sera exactement la même que celle des courants et des potentiels électriques dans le second cas, si les conditions initiales du problème sont les mêmes.

Si q désigne le flux d'induction constant à travers un tube de force limité à deux sections équipotentielles V et V' , le rapport :

$$\frac{q}{V - V'} = C$$

s'appelle en électrostatique la capacité du tube considéré ; il est proportionnel au pouvoir inducteur μ . La quantité analogue en magnétisme pourrait s'appeler *capacité magnétique* ; elle est proportionnelle à la perméabilité μ' . En électrocinétique, q désignant le flux ou intensité du courant dans le tube, C représente la conductibilité de celui-ci et $\frac{1}{C}$ sa résistance. Par assimilation avec l'électrocinétique, on a introduit récemment en Magnétisme

l'expression de *résistance magnétique* pour désigner la quantité $\frac{1}{C}$, qui peut se calculer, au moins approximativement, par la formule $\frac{1}{\mu} \int \frac{dl}{S}$ (analogue à la formule $R = \rho \int \frac{dl}{S}$ du § 73), en appelant l la longueur du tube et S sa section, variable ou constante. Il n'y a aucun inconvénient à employer dans ce sens l'expression de résistance magnétique. Toutefois si l'on venait à découvrir l'existence de courants magnétiques analogues aux courants électriques, on devrait changer le sens de cette expression et l'appliquer à la quantité magnétique analogue de la résistance électrique.

Exercices. — Les questions suivantes peuvent être traitées soit directement, soit par analogie avec l'électrostatique ou l'électrocinétique. Nous n'indiquons que les résultats.

1° Une sphère magnétique ou diamagnétique placée dans un champ uniforme (champ magnétique terrestre par exemple), y prend une aimantation uniforme, c'est-à-dire que les tubes de force y sont rectilignes et parallèles à la force du champ. En appliquant la formule (16) du § 32, on trouve que l'intensité d'aimantation induite est égale à la force du champ multipliée par le facteur $\frac{\kappa}{1 + \frac{4}{3} \pi \kappa}$. Les tubes de force aux environs de la sphère ne

sont point parallèles; la sphère les concentre en partie sur elle.

2° Un cylindre, de longueur extrêmement grande par rapport au diamètre, placé dans un champ uniforme parallèlement à la force, s'aimante uniformément, sauf vers les extrémités. L'intensité d'aimantation induite est égale à la force du champ multipliée par le facteur κ . Son aimantation est donc $\left(1 + \frac{4}{3} \pi \kappa\right)$ fois plus grande que celle de la sphère; si $\kappa = 40$, $1 + \frac{4}{3} \pi \kappa = 168$ environ (cas du fer doux).

3° Un disque très mince dont les bases sont perpendiculaires à la force du champ, prend une aimantation extrêmement faible. D'une manière générale, un cylindre dont l'axe est parallèle à la force prend une aimantation d'autant plus grande que sa longueur est plus grande par rapport à son diamètre.

CHAPITRE II

NOUVEL EXPOSÉ DU MAGNÉTISME

118. **Moments magnétiques.** — Les expériences de l'aiguille brisée et de l'aiguille flottante (§ 103) montrent que l'existence de quantités de magnétisme isolées, soit positives, soit négatives, est purement hypothétique; et que dans tout élément de volume d'un corps, une quantité $+q$ se trouve toujours associée avec une quantité $-q$ égale et de signe contraire. En un mot chaque élément de volume d'un aimant se comporte lui-même comme un aimant.

Il est vrai que l'intérieur d'un aimant ne nous est point accessible et que l'on n'a pas le droit d'appliquer la loi de Coulomb à la masse d'un tel corps, à cause des phénomènes dits de force coercitive, de magnétisme résiduel, etc. Aussi n'étudierons-nous que son action dans le champ extérieur. Seulement, au lieu d'attribuer cette action à des masses ou quantités de magnétisme isolées q_1, q_2, q_3, \dots comme dans le chapitre précédent, nous la supposons due à une collection d'aimants infiniment courts remplissant le volume de l'aimant considéré.

Considérons un des aimants élémentaires en lesquels on peut décomposer un aimant quelconque, et supposons-le d'abord composé de deux quantités $-q$ et $+q$ de magnétisme (fig. 47) située aux extrémités de l'axe, de longueur infiniment petite l , de cet aimant placé en o . En un point M ,

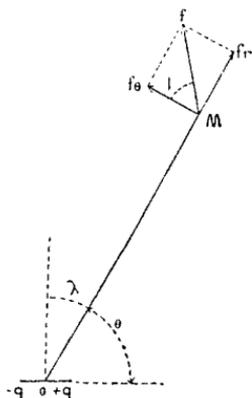


Fig. 47.

situé aux distances r et r' des points $+q$ et $-q$, le potentiel magnétique dû à cet aimant est :

$$V = k' \left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'} \right) = \frac{k'q (r' - r)}{rr'}$$

θ désignant l'angle MOq , on a : $r' - r = l \cos \theta$. D'autre part on peut remplacer rr' par r^2 , r et r' étant égaux à un infiniment petit près. Donc :

$$V = \frac{k'ql \cos \theta}{r^2} = k' \frac{\mathcal{M}}{r^2} \cos \theta \quad (1)$$

Le produit $ql = \mathcal{M}$ s'appelle le moment magnétique de l'aimant élémentaire.

La formule (1) offre l'avantage de contenir seulement le produit ou moment \mathcal{M} , dont la détermination est possible par l'expérience, et non séparément les quantités hypothétiques q et l . Le potentiel V ne dépend que de \mathcal{M} , il en sera de même de la force magnétique et des autres grandeurs qui interviennent dans l'étude du champ magnétique.

La force magnétique $f = -\frac{dV}{dn}$ est évidemment dans le plan MOq , puisqu'elle est la résultante des deux forces dues à $+q$ et à $-q$, lesquelles sont situées dans ce plan. La composante de f suivant une direction dx est donnée, comme on sait, par la formule : $f = -\frac{dV}{dx}$. Donc les composantes suivant le rayon vecteur r ($dx = dr$) et suivant la perpendiculaire ($dx = r d\theta$) sont respectivement :

$$f_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2k' \frac{\mathcal{M}}{r^3} \cos \theta \quad (2)$$

$$f_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = k' \frac{\mathcal{M}}{r^3} \sin \theta \quad (3)$$

La grandeur de f étant la résultante de f_r et de f_θ , on a :

$$f = k' \frac{\mathcal{M}}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \quad (4)$$

Enfin l'inclinaison I de la force f sur la perpendiculaire au rayon vecteur est donnée par :

$$\operatorname{tg} I = \frac{f_z}{f_0} = 2 \cot \theta = 2 \operatorname{tg} \lambda \quad (5)$$

en désignant par λ le complément de θ .

119. Moment résultant d'un aimant. — Si l'on a, autour du point O et dans un volume de dimensions infiniment petites par rapport à la distance r , un nombre quelconque d'aimants \mathcal{M} , \mathcal{M}' , \mathcal{M}'' ... orientés de diverses manières, leur potentiel en M sera :

$$V = k' \left(\frac{\mathcal{M} \cos \theta}{r^2} + \frac{\mathcal{M}' \cos \theta'}{r'^2} + \dots \right)$$

Supposons ces aimants transportés parallèlement à eux-mêmes en un point unique pris dans le volume à une distance ρ du point M . Les différences entre ρ , r , r' ,... étant infiniment petites, et les valeurs des angles θ , θ' ,... étant infiniment peu altérées, on pourra remplacer l'expression du potentiel V par :

$$V = \frac{k'}{\rho^2} \left(\mathcal{M} \cos \theta + \mathcal{M}' \cos \theta' + \dots \right)$$

et les valeurs qu'on en déduira pour les forces mécaniques exercées différeront infiniment peu des valeurs exactes.

Or, si l'on porte bout à bout les moments \mathcal{M} , \mathcal{M}' ,... en grandeur et direction, la somme géométrique ou résultante \mathcal{M}_1 , que l'on obtient ainsi fait avec la direction ρ un angle θ_1 tel que la projection $\mathcal{M}_1 \cos \theta_1$ de \mathcal{M}_1 sur ρ est égale à la somme des projections $\mathcal{M} \cos \theta$, $\mathcal{M}' \cos \theta'$,... des moments composants; d'où :

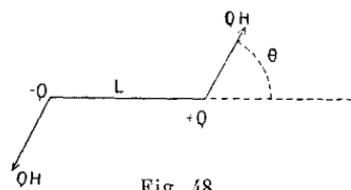
$$V = \frac{k'}{\rho^2} \mathcal{M}_1 \cos \theta_1$$

Il en résulte que l'action de plusieurs aimants en un point *très éloigné* est *sensiblement* la même que celle de l'aimant *résultant* obtenu en faisant la somme géométrique \mathcal{M}_1 des moments composant \mathcal{M} , \mathcal{M}' ... Réciproquement l'action du point M très éloigné, où l'on suppose une quantité Q de magnétisme, sur le système d'aimants en question, équivaut à l'action sur l'aimant résultant.

Ceci devient rigoureux lorsque le point M est à une distance infiniment grande et par suite produit un champ uniforme dans l'espace restreint où se trouve le système d'aimants.

Cette propriété s'applique évidemment au cas où le système d'aimants \mathcal{M} , \mathcal{M}' , ... est situé dans un champ uniforme, quelle qu'en soit l'origine, dans le champ terrestre par exemple. L'action d'un tel champ sur un barreau aimanté d'une manière quelconque ne dépend donc que de la grandeur et de la direction d'une certaine quantité \mathcal{M}_1 , que l'on appelle le moment du barreau aimanté.

Remplaçons le barreau en question par deux quantités $-Q$ et



+ Q de magnétisme situées aux extrémités d'un axe L parallèle à \mathcal{M}_1 , et telles que le moment QL soit égal à \mathcal{M}_1 (fig. 48). L'action d'un champ uniforme d'intensité H sur le barreau, étant la même que sur l'aimant fictif

$(-Q, +Q)$, se réduit au système de deux forces QH égales, parallèles et de sens contraire, c'est-à-dire à un couple dont le moment est égal à :

$$QHL \sin \theta = \mathcal{M}_1 H \sin \theta \quad (6)$$

Ce couple tend à placer l'aimant de telle sorte que son moment \mathcal{M}_1 soit parallèle à la force H du champ et de même sens qu'elle.

120. Intensité d'aimantation. — Supposons un aimant décomposé en aimants élémentaires de forme prismatique. Soit l la longueur de l'un d'eux, S la surface commune de ses bases, $u = lS$ son volume, q et $-q$ les quantités ou couches magnétiques réparties sur ses bases. La densité ou intensité d'aimantation est $\frac{q}{S} = I$. Le moment magnétique est :

$$\mathcal{M} = ql = ISl = Iu$$

d'où :

$$I = \frac{\mathcal{M}}{u} \quad (7)$$

L'intensité d'aimantation du volume u n'est donc autre chose que le moment magnétique par unité de volume.

On a vu (§ 107) que les dimensions de l'intensité I d'aimantation sont dans le système électromagnétique : $I_m = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$, c'est-à-dire les mêmes que celles de la force magnétique. Les dimensions de \mathcal{M} s'en déduisent par la formule :

$$\mathcal{M}_m = I_m U = (L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}) L^3 = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

On peut encore calculer les dimensions de $\mathcal{M} = q l$ par la formule :

$$\mathcal{M}_m = Q_m L = (L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}) L = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Application numérique. — Soit un barreau de fer, de 20^{cm} de longueur et 1^{cmq} de section (volume = 20^{cmc}, masse = 160^{gr}) aimanté longitudinalement à saturation : $I = 1500$ unités électromagnétiques C.G.S. Le moment \mathcal{M} de ce barreau est égal à :

$$\mathcal{M} = 1500 \times 20 = 30000$$

En un point situé sur le prolongement de l'axe à une distance r très grande par rapport à la longueur de 20^{cm}, la force f est parallèle à l'axe, et sa valeur s'obtient sensiblement en faisant $\theta = 0$ et $k' = 1$ dans la formule 2 (ou 4) du § 118 :

$$f = \frac{2 \mathcal{M}}{r^3} = \frac{60000}{r^3}$$

Si la longueur du barreau n'était que d'un centimètre, on aurait : $M = I = 1500$ et :

$$f = \frac{3000}{r^3}$$

A une distance de 20^{cm}, on trouverait :

$$f = \frac{3000}{8000} = 0.375$$

soit près du double de l'intensité horizontale 0,19 du champ magnétique terrestre.

En un point situé dans le plan perpendiculaire au milieu de la longueur du barreau, on trouverait, en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la formule 3 (ou 4) :

$$f = \frac{\mathcal{M}}{r^3} \left(\text{au lieu de } \frac{2 \mathcal{M}}{r^3} \right)$$

Si le barreau est suspendu par un fil vertical et fait avec le

méridien magnétique un angle θ , la force terrestre H tend à la ramener dans le méridien et donne lieu à un couple de rotation (formule 6) égal à :

$$\mathcal{M} H \sin \theta = 5790 \sin \theta \quad \text{C.G.S.}$$

en supposant :

$$\mathcal{M} = 30000 \quad \text{et} \quad H = 0,493$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, le couple $\mathcal{M} H = 5790$ C.G.S est équivalent à un couple formé par deux forces mécaniques de 1000 dynes ou 1019 milligrammes-poids, avec un bras de levier égal à 5^{cm},79.

NOTA. — Les points $-Q$ et $+Q$ (fig. 48) sont les pôles d'un aimant, de longueur L , équivalent au barreau donné. Mais il n'y a pas lieu de les considérer comme des pôles réels; leur position est indéterminée et assujettie à la seule condition que l'axe L ait une direction déterminée et que le produit QL ait une valeur également donnée \mathcal{M} .

121. Aimantation par influence. — Tout ce que nous avons dit dans le chapitre précédent (§ 109 à 113) au sujet des surfaces équipotentielles, des lignes et tubes de force, ainsi que des équations du champ magnétique, subsiste dans le nouvel exposé du magnétisme. L'expression :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k'} \left(\frac{dV}{dn} \right)^2 du = \int \frac{1}{8\pi k'} f^2 du$$

de l'énergie du champ magnétique, étant indépendante des masses magnétiques hypothétiques, subsiste également. En ce qui concerne l'aimantation par influence, l'hypothèse de la polarisation ou aimantation moléculaire peut être présentée de la manière suivante, peine différente de celle du § 114.

Un corps A étant placé dans un champ magnétique, chaque partie, même infiniment courte, d'un tube de force dans la masse de ce corps devient un aimant, dont l'intensité d'aimantation est donnée par la formule (5) du § 114 : $I = \alpha f$, et dont l'axe est dirigé dans le sens de la force magnétique f . D'après la formule

(7) du § 120, le moment magnétique de cet aimant est égal au produit de I par son volume ; en d'autres termes, I représente en grandeur, direction et sens le moment magnétique de l'unité de volume du corps A soumis à l'influence du champ.

On sait que, grâce à cette hypothèse, on peut calculer les attractions et répulsions magnétiques en attribuant au coefficient k' de la formule fondamentale de Coulomb la même valeur k'_1 dans tous les corps. Mais le calcul de l'énergie W du champ conduirait à la valeur :

$$W_1 = \int \frac{1}{8\pi k'_1} f^2 du$$

qui est incorrecte (même observation qu'au § 28). La vraie valeur de W peut s'écrire :

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{1}{8\pi k'} f^2 du \\ &= \int \frac{1}{8\pi k'_1} f^2 du + \int \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{k'} - \frac{1}{k'_1} \right) f^2 du \\ &= W_1 + \int \frac{1}{2} \kappa f^2 du \end{aligned}$$

Le terme W_1 représente l'énergie que posséderait le champ si tout le milieu était rempli de la substance de coefficient k'_1 , de l'air par exemple, sans que la distribution du potentiel V et de la force f fût changée. Le terme complémentaire :

$$\int \frac{1}{2} \kappa f^2 du = \int \frac{1}{2} I f du = \int \frac{1}{2} f. d\mathcal{M}$$

est considéré quelquefois comme l'énergie propre du corps A aimanté par influence, et l'on dit que l'aimantation, par la force f , d'une molécule de A absorbe une somme d'énergie égale au demi-produit de f par le moment magnétique $d\mathcal{M}$ développé dans la molécule. C'est là, comme on le voit, une manière tout arbitraire de considérer les choses.

122. Feuilletts magnétiques. — On appelle feuillet magnétique un système de deux surfaces infiniment rapprochées, recouvertes de couches magnétiques égales et de signes contraires, telles que le produit $I \varepsilon$ de la densité ou intensité d'aimantation I par

l'épaisseur ε du feuillet (ou distance des deux surfaces) a une valeur constante Φ en chaque point. Φ est la puissance magnétique du feuillet. La surface recouverte de la couche positive est la face positive du feuillet.

Décomposons le feuillet en éléments infiniment petits de surface dS . Le potentiel V en un point M sous l'action du feuillet est la somme des potentiels dus à chacun des éléments. Soient $I dS$ et $(-I dS)$ les couches magnétiques d'un élément (fig. 49); elles constituent un aimant dont le moment $d\mathcal{M}$ est normal à dS et est égal à :

$$d\mathcal{M} = I dS \times \varepsilon = \Phi dS$$

Le potentiel dV de cet aimant $d\mathcal{M}$ au point M est, d'après la formule (1) du § 118 :

$$dV = k' \frac{d\mathcal{M}}{r^2} \cos \theta = k' \Phi \frac{dS}{r^2} \cos \theta \quad (8)$$

D'autre part la projection de la surface dS sur le plan normal au rayon vecteur r est $dS \cos \theta$, et l'angle solide $d\omega$ sous lequel on voit du point M l'élément dS ou sa projection $dS \cos \theta$ est, comme on sait :

$$d\omega = \frac{dS}{r^2} \cos \theta$$

Par suite

$$dV = k' \Phi d\omega \quad (8')$$

Le potentiel dV dû à l'élément de feuillet dS est donc égal à $k' \Phi$ multiplié par l'angle sous lequel, du point M , on voit dS ; il est positif ou négatif suivant que de M on voit la face positive ou la face négative de l'élément dS . Le potentiel V dû au feuillet entier sera par conséquent égal à $k' \Phi$ multiplié par l'angle ω sous lequel on voit, de M , la face positive du feuillet entier :

$$V = k' \Phi \omega \quad (9)$$

Si le cône d'ouverture $d\omega$ coupe deux fois le feuillet, les deux

éléments dS et dS' présentant au point M l'un sa face positive, l'autre sa face négative, donnent des potentiels égaux et de signes contraires $k' \Phi d\omega$ et $-k' \Phi d\omega$, qui se détruisent. On peut donc dire d'une manière générale que la formule (2) représente le potentiel V , ω étant l'angle sous lequel, du point M , on voit le contour du feuillet. Dans le cas d'une surface fermée, ω est nul pour tout point M extérieur au feuillet et égal à $\pm 4\pi$ pour tout point intérieur, suivant que la face intérieure est positive ou négative.

Si l'on part d'un point M situé sur la face positive du feuillet pour aboutir à un point M' *infinitement voisin* de M sur la face négative sans traverser le feuillet, l'angle ω sous lequel on voit le contour décroît dans ce trajet de la valeur 4π ; il revient en effet en M' à la même valeur qu'en M , à la constante 4π près. Le potentiel dans le trajet décroît donc de la valeur $4\pi k' \Phi$. En d'autres termes la face positive d'un élément quelconque dS du feuillet est à un potentiel V supérieur de $4\pi k' \Phi = E$ au potentiel V' de la face négative en regard.

$$V - V' = 4\pi k' I \varepsilon = 4\pi k' \Phi = E \quad (10)$$

On peut encore démontrer cette formule en considérant un point allant de la face positive à la face négative du feuillet par le chemin le plus court, c'est-à-dire par l'épaisseur infinitement petite ε . Le long de ce chemin on peut supposer que le champ magnétique est uniforme et dû à deux couches planes, parallèles et indéfinies, de densités $+I$ et $-I$; la force magnétique $-\frac{dV}{dn}$ est normale à ces couches et égale à $4\pi k'I$. La chute de potentiel le long de l'épaisseur ε est donc bien le produit de $4\pi k'I$ par ε , c'est-à-dire $4\pi k' \Phi$. Le raisonnement subsiste d'ailleurs lorsque la puissance Φ varie aux divers points du feuillet.

On déduit de la formule (10) une nouvelle définition du feuillet magnétique. C'est une surface où existe un accroissement brusque de potentiel E lorsqu'on passe d'une face (négative) à l'autre (positive). Le quotient $\frac{E}{4\pi k'} = \Phi$ est la puissance de ce feuillet. Cette seconde définition se présente d'une manière plus naturelle et est plus utile, comme nous le verrons en Electromagnétisme. Si le milieu est hétérogène, le coefficient k' variant d'un point à

un autre, nous aurons à considérer des feuillet magnétiques (équivalents aux courants) présentant une variation de potentiel $V - V' = E$ constante aux divers points de leur surface, tandis que la puissance Φ sera variable d'un point à un autre.

Nous avons étudié en partie au § 52 les phénomènes électriques qui se produisent à la surface de séparation de deux corps et qui sont dus à l'existence d'une différence de potentiel au contact de ces corps. Une telle surface est un feuillet électrique, et la théorie que nous développons ici est applicable au phénomène électrique dans le cas où les corps en contact sont des diélectriques parfaits.

Si au lieu d'un milieu magnétique on avait un milieu conducteur, et qu'au lieu du feuillet magnétique on eût une surface présentant une variation brusque de potentiel électrique ($V - V'$) et occupant exactement la même position que le feuillet, il s'établirait des courants allant de la face positive à la face négative, et la distribution des surfaces équipotentielles et des lignes de courant serait exactement la même (d'après ce que nous avons vu au § 117) que la distribution des surfaces équipotentielles et des lignes de force magnétiques dans le cas du feuillet. Si les différences de potentiel ($V - V'$) sont numériquement égales dans les deux cas, ainsi que la conductibilité électrique et le pouvoir inducteur magnétique, l'intensité du courant électrique sera en chaque point égale en grandeur et en direction à l'intensité du champ magnétique multipliée par le pouvoir inducteur.

On réaliserait le phénomène électrique en supposant, par exemple, que la surface du feuillet soit une partie de la surface de séparation de deux milieux d'égale conductibilité et qu'on la chauffe à une température uniforme de manière à y produire une force électromotrice constante (effet Peltier et effet Thomson dans le voisinage). Cette force électromotrice E produirait un courant dans le milieu ambiant indéfini, comme elle le ferait dans un conducteur filiforme. Si le milieu ambiant était isolant, il n'y aurait pas de courant, mais il y aurait encore production d'un champ électrique, les lignes de force partant de la face positive de la surface chauffée pour aboutir à la face négative.

L'analogie entre le phénomène électrostatique produit dans ce dernier cas et le phénomène magnétique est complète ; elle se main-

tient, comme on l'a vu au § 117, lorsque le milieu n'est pas homogène, pourvu que le pouvoir inducteur électrique et le pouvoir inducteur magnétique soient en chaque point dans un rapport constant. La quantité $V - V' = E$, qui est appelée force électromotrice dans le cas du feuillet électrique, pourrait s'appeler *force magnéto-motrice* dans le cas du feuillet magnétique.

123. Énergie potentielle des feuillets. — Considérons un feuillet de puissance Φ limité au contour C. Son potentiel V en un point M a pour expression $k' \Phi \omega$. Si en ce point existe une quantité q de magnétisme, l'énergie potentielle correspondante est $Vq = k' \Phi q \omega$. Or si l'on calcule le flux de force total \mathcal{E} , dû à la quantité q , à travers la surface du feuillet, ce flux, en vertu du théorème de Green, a pour expression $\pm k' q \omega$, de même que le flux de force électrique aurait pour expression $\pm k q \omega$ (§22). On doit prendre le signe — si l'on compte positivement la force $k \frac{q}{r^2}$ allant de la face négative à la face positive par l'intérieur du feuillet. En d'autres termes, si les tubes de force issus de la quantité q pénètrent dans le feuillet par la face négative, on aura : $\mathcal{E} = -k' q \omega$, d'où : $Vq = -\Phi \mathcal{E}$.

Dans un champ magnétique quelconque dû à un système Q de quantités q, q', \dots l'énergie relative du feuillet est égale à : $\Sigma Vq = -\Sigma \Phi \mathcal{E} = -\Phi \Sigma \mathcal{E}$ ou, en remplaçant la somme ($\Sigma \mathcal{E}$) des flux de force partiels par la lettre \mathcal{E} :

$$w = -\Phi \mathcal{E} \quad (11)$$

C'est là l'énergie relative du feuillet et du système Q, ou bien le travail que produiraient les forces magnétiques si le feuillet était éloigné sans déformation jusqu'à l'infini. Cette énergie est égale au produit, changé de signe, de la puissance Φ par le flux de force \mathcal{E} entrant par la face négative.

L'énergie potentielle de l'ensemble du système Q et du feuillet se compose de l'énergie intrinsèque W_1 du feuillet, de l'énergie intrinsèque W_2 du système Q et de l'énergie relative $-\Phi \mathcal{E}$. Si le système Q reste fixe pendant que l'on déplace le feuillet avec ou sans déformation, la partie W_2 de l'énergie totale reste constante, tandis que $(W_1 - \Phi \mathcal{E}) = W$ varie. C'est cette dernière

partie que nous allons calculer ; on peut l'appeler l'énergie du feuillet dans le champ magnétique créé par le système Q.

Si l'on calcule l'énergie totale du champ par la formule $\frac{1}{2} \Sigma q V$, la partie de cette expression relative au système Q est $\left(W_2 - \frac{1}{2} \Phi \mathcal{C} \right)$ tandis que la partie relative au feuillet est $\left(W_1 - \frac{1}{2} \Phi \mathcal{C} \right)$, c'est-à-dire que l'énergie relative $-\Phi \mathcal{C}$ se trouve partagée entre les deux systèmes en présence. D'autre part, le calcul de $\frac{1}{2} \Sigma q V$ pour le feuillet donne évidemment pour résultat, par unité de surface :

$$\frac{1}{2} I (V - V') = \frac{1}{2} I E = \frac{1}{2\varepsilon} \Phi E$$

On a donc :

$$W_1 - \frac{1}{2} \Phi \mathcal{C} = \frac{1}{2\varepsilon} \Phi E$$

d'où :

$$W = W_1 - \Phi \mathcal{C} = \frac{1}{2\varepsilon} \Phi (E - \mathcal{C} \varepsilon) \quad (12)$$

\mathcal{C} désigne ici le flux de force à travers l'unité de surface sous l'action des aimants extérieurs. Soit \mathcal{C}_1 le flux de force dû à l'action du feuillet sur lui-même. Le flux total arrivant de l'extérieur sur l'unité de surface, par la face négative, est $(\mathcal{C} + \mathcal{C}_1)$. A l'intérieur le flux, de sens contraire, allant de la face positive à la face négative, est, par unité de surface, égal à la comp^o ante normale de la force, soit $\frac{V - V'}{\varepsilon} = \frac{E}{\varepsilon}$. La différence des flux $\frac{E}{\varepsilon}$ et $-(\mathcal{C} + \mathcal{C}_1)$, comptés dans le même sens, est égale au produit de la couche I par $4\pi k'$:

$$E + (\mathcal{C} + \mathcal{C}_1) \varepsilon = 4\pi k' I \varepsilon = 4\pi k' \Phi \quad (13)$$

Cette relation permet d'exprimer E en fonction de Φ , ou Φ en fonction de E dans (12), ce qui donne

$$W = \frac{\Phi}{2\varepsilon} \left[4\pi k' \Phi - (2\mathcal{C} + \mathcal{C}_1) \varepsilon \right] \quad (12')$$

$$= \frac{1}{8\pi k'} \left[\frac{E^2}{\varepsilon} + E \mathcal{C}_1 - \mathcal{C} (\mathcal{C} + \mathcal{C}_1) \varepsilon \right] \quad (12'')$$

Lorsque le feuillet se déplace sans déformation dans le champ,

si sa puissance Φ et, par suite, \mathcal{E} , restent constants, on voit, d'après (12'), que la variation δW d'énergie est égale à :

$$\delta W = -\Phi \delta \mathcal{E}$$

Le travail $\Phi \delta \mathcal{E}$ des forces magnétiques est donc égal dans ce cas à la perte $-\delta W$ d'énergie potentielle, ce qui devait être.

Mais pendant le déplacement, Φ restant constant, la différence de potentiel E varie avec \mathcal{E} , comme le montre la formule (13). Pour que E restât constant, il faudrait faire varier Φ en conséquence et, pour cela, fournir de l'énergie au feuillet (de même qu'il faut fournir de l'énergie à un corps électrisé, qui se déplace dans un champ électrique, pour que son potentiel ne varie pas). Si E reste constant pendant que \mathcal{E} varie, la variation de Φ (formule 13) contiendra ϵ en facteur et sera infiniment petite ; il en sera de même de la variation de \mathcal{E} , puisque le flux \mathcal{E} est fonction de Φ . Il en résulte, d'après (12'), que la variation δW d'énergie potentielle est de l'ordre de ϵ , c'est-à-dire est infiniment petite ou négligeable.

On peut exprimer ce résultat en disant que si la différence E de potentiel des faces du feuillet est maintenue constante, son énergie $W = W_1 - \Phi \mathcal{E}$ est indépendante du champ dû aux aimants extérieurs. Le travail $\Phi \delta \mathcal{E}$ des forces magnétiques est donc emprunté *directement* à la source d'énergie qui maintient constante E . — On verra en électromagnétisme qu'un courant électrique se comporte comme un feuillet de force magnétomotrice E constante.

CHAPITRE III

ÉTUDE DES MÉTAUX FORTEMENT MAGNÉTIQUES

124. **Application de la loi de Coulomb.** — Nous avons déjà fait observer que la loi fondamentale de Coulomb (§ 105) :

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

n'est pas applicable au cas où le champ magnétique est développé dans un corps, tel que le fer, le nickel ou le cobalt. Le coefficient k' de ces métaux est très faible; l'inverse, c'est-à-dire le pouvoir inducteur magnétique μ' , et, par suite, le coefficient α d'aimantation induite sont considérables. Mais ces coefficients n'ont pas des valeurs invariables et indépendantes de l'intensité du champ magnétique.

On applique souvent, quoique cela ne soit nullement rigoureux, la loi de Coulomb et la théorie qui en découle, aux phénomènes présentés par les métaux en question. A cet effet, on suppose, en chaque point, les coefficients k' , μ' et α , fonctions de la force magnétique f existant en ce point. Il s'agit dès lors de trouver une distribution magnétique telle que l'effet de l'aimantation induite $I = \alpha f$, ajouté à celui des aimants qui produisent le champ, consiste à produire en chaque point la force f qui y existe. Ce problème est très compliqué, et la solution ne peut même être considérée comme rigoureuse, car pour une même force f les valeurs de α peuvent varier dans de grandes limites. Nous allons exposer succinctement l'étude expérimentale des propriétés complexes des métaux fortement magnétiques.

125. Saturation magnétique.— Nous supposons provisoirement, dans ce paragraphe, que le coefficient α d'aimantation induite soit une fonction de l'intensité f du champ magnétique, et qu'il s'agisse de déterminer cette fonction.

Si par un procédé quelconque on mesure : d'une part l'intensité d'aimantation induite I d'une masse de fer doux, de nickel ou de cobalt, placée dans un champ magnétique ; d'autre part, l'intensité f de ce champ, supposé uniforme dans la masse du métal ; on constate que I est proportionnel à f , tant que f est assez faible. Si, par exemple, le champ magnétique est produit par un courant i variable à volonté, l'aimantation I reste proportionnelle à i jusqu'à un certain point. En augmentant peu à peu l'intensité f du champ, on remarque que le rapport $\frac{I}{f} = \alpha$, au lieu de rester constant, finit par prendre une valeur croissante, c'est-à-dire que I croît plus rapidement que f . Mais à partir d'une certaine limite, f continuant à croître, $\frac{I}{f}$ se met au contraire à décroître indéfiniment. Pour les valeurs les plus grandes que l'on ait pu atteindre pour l'intensité f d'un champ magnétique, la valeur du coefficient $\frac{I}{f} = \alpha$ paraît tendre vers zéro.

En portant f en abscisses, I en ordonnées, on peut représenter

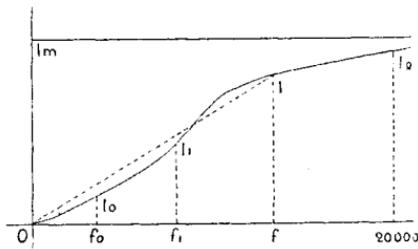


Fig. 50.

la marche de ce phénomène au moyen de la figure 50. Le rayon vecteur allant de l'origine O à un point I de la courbe ayant pour coefficient angulaire $\frac{I}{f} = \alpha$, la première portion OI_0 correspondant à une valeur constante de α est rectiligne. Puis, α croissant, la courbe s'infléchit vers le haut, de I_0 jusqu'en un point I_1 . Enfin à partir de I_1 la concavité de la courbe est tournée vers le bas ; α , que l'on peut continuer à appeler le coefficient d'aimantation induite du métal magnétique, décroît indéfiniment et paraît tendre

vers zéro, tandis que l'aimantation I paraît tendre vers un maximum I_m . Toutefois, comme on n'a guère pu dépasser, pour les champs magnétiques réalisés jusqu'ici, des intensités f égales à 30,000 unités électromagnétiques C. G. S., on ne peut rien affirmer au sujet de la forme de la courbe au delà du point I correspondant à $f = 30,000$. Il se pourrait même, à la rigueur, que l'ordonnée I diminuât à partir d'un maximum et tombât à zéro ou au-dessous de zéro, auquel cas le métal aurait subi une modification considérable dans sa constitution sous l'action du champ magnétique et serait devenu diamagnétique.

La perméabilité $\mu' = 1 + 4 \pi \kappa$ varie donc avec le degré d'aimantation acquis; et, comme en général la disposition des expériences n'est pas telle que l'aimantation soit uniforme dans toute la masse du métal, la perméabilité varie d'un point à un autre de cette masse. D'un autre côté, lorsqu'on augmente l'intensité du champ, par exemple au moyen d'un courant dont on accroît l'intensité, non seulement la force magnétique en chaque point varie, mais encore la position des lignes de force change, puisque l'angle de réfraction des tubes de force (§ 112) dépend du rapport du pouvoir inducteur du métal à celui du milieu ambiant. Le phénomène étudié est donc complexe et donne en général des indications difficiles à interpréter au sujet de la relation qui existe entre l'intensité du champ magnétique et le pouvoir inducteur μ' correspondant. Pour éviter cet inconvénient, divers savants ont employé des anneaux de métal bien homogènes formant le noyau d'électro-aimants fermés sur eux-mêmes, de telle sorte que, pour une intensité quelconque du courant passant dans cet électro-aimant, l'aimantation soit aussi uniforme que possible dans la masse du noyau, les lignes de force ne sortant pas de l'anneau et se fermant sur elles-mêmes. (Voir *Electromagnétisme*.) Le courant i se mesure très exactement au moyen d'un galvanomètre. Quant à l'intensité I d'aimantation, elle se déduit de la valeur Q du flux total d'induction magnétique à travers la section de l'anneau, valeur que l'on détermine exactement par une méthode d'induction électromagnétique au moyen d'une bobine auxiliaire enroulée sur l'anneau.

En étudiant des échantillons de fer et de nickel sous forme

d'anneaux à section circulaire S, M. Rowland a obtenu des résultats représentés par les courbes de la figure 51, l'ordonnée étant la valeur du pouvoir inducteur μ' multipliée par 4π , soit $y = 4\pi\mu'$, et l'abscisse étant le flux d'induction par unité de surface multiplié également par 4π , soit $x = 4\pi\frac{Q}{S}$. Ces courbes affectent des formes à peu près paraboliques. Sur la courbe relative au fer on voit que

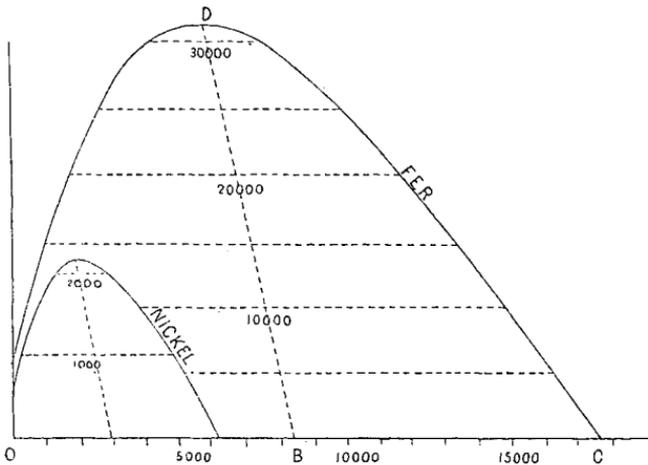


Fig. 51.

pour $x = 0$, y est égal à 6250 environ, c'est-à-dire que pour un degré d'aimantation nul ou très faible, le pouvoir inducteur μ' est égal à 500. L'aimantation croissant, la perméabilité μ' croît depuis 500 jusqu'à 2456, valeur maximum qu'elle atteint pour une valeur de x égale à 5968. Ensuite μ' décroît et devient égal à l'unité pour $x = 17500$ (ordonnée très petite).

On sait que, f désignant la force magnétique, le flux d'induction Q est égal à :

$$Q = \frac{1}{4\pi k'} fS$$

Comme dans le système électromagnétique le coefficient k'_1 relatif à l'air est égal à 1, k' est égal à $\frac{k'}{k'_1} = \frac{1}{\mu'}$ d'où :

$$f = \frac{1}{\mu'} 4\pi \frac{Q}{S} = \frac{x}{\mu'}$$

D'autre part, l'intensité d'aimantation induite est égale à :

$I = \alpha f = \frac{\mu' - 1}{4\pi} f$. On peut donc résumer les chiffres donnés ci-dessus dans le tableau suivant :

{	$f = 0.$	$I = 0$	$\alpha = 40$	$\mu' = 500$	(maximum).
	2,43	474	195	2456	
	17,500	0	0	1	

Il ne faut pas oublier que ce que l'on appelle intensité d'aimantation induite, c'est-à-dire I , n'est qu'une fraction $\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right) \frac{Q}{S}$ du flux d'induction $\frac{Q}{S}$ par unité de surface. Pour une intensité f du champ magnétique égale à 17500 C. G. S, on trouve $I = 0$, mais $\frac{Q}{S} = 1400$. Les actions que l'on peut produire à l'intérieur de l'anneau (dans une cavité en forme de disque par exemple) sont les mêmes que si, le courant n'existant pas, le métal possédait une intensité d'aimantation égale à 1400 C. G. S. C'est ce qui se passe en réalité lorsqu'on supprime le courant, en supposant l'aimantation de l'anneau entièrement permanente.

Sur un échantillon de fer de Norvège, M. Rowland a trouvé pour le maximum de la perméabilité et du coefficient d'aimantation induite :

$$f = 1,17 \quad I = 428 \quad \alpha = 366 \quad \mu' = 4602$$

Un échantillon recuit après la trempe a atteint un maximum $\mu' = 6260$.

Les résultats fournis par d'autres expérimentateurs ne concordent pas en général avec les précédents. Toutefois les chiffres relatifs au maximum du flux $\frac{Q}{S}$ appelé ordinairement intensité d'aimantation, varient généralement aux environs du chiffre 1400 donné par M. Rowland, entre 1300 et 1800.

On a pu communiquer au cobalt une intensité d'aimantation maximum égale à 800. Pour le nickel, le maximum atteint par M. Rowland est 500. Les courbes de ces deux métaux sont semblables à celles du fer.

Parmi les autres méthodes qui ont été employées pour déterminer le maximum d'aimantation qu'est susceptible de prendre un barreau de fer doux, nous citerons la méthode d'arrachement. Supposons deux blocs de fer doux au contact ou séparés par une

couche d'air infiniment mince et horizontale. Si ces blocs sont aimantés normalement à leur surface de séparation s , la densité ou intensité commune d'aimantation étant I , la force attractive qu'ils exercent l'un sur l'autre, ou force portante par unité de surface, est égale à $2\pi k' I^2$ (de même que l'attraction de deux surfaces électrisées est $2\pi k \sigma^2$ par unité de surface, σ étant la densité électrique commune, au signe près, des deux surfaces voisines). Ici $k' = 1$ (système électromagnétique) pour la couche d'air (ou de vide) interposée entre les deux blocs. Donc si l'on charge le bloc inférieur de poids, de telle sorte que la pesanteur exerce une action de P grammes par centimètre carré de la surface s , il y aura tendance à l'arrachement lorsqu'on aura fait croître P jusqu'à une valeur telle que :

$$Pg = 2\pi I^2$$

($g = 981$). Le maximum de force portante Pg que l'on peut donner au fer fera donc connaître le maximum d'aimantation I_m . — Joule a trouvé, entre autres chiffres :

$$P = 19337 \text{ grammes par centimètre carré.}$$

$$\text{d'où : } I_m = 1740 \text{ C.G.S.}$$

$$\text{et } f = 21860.$$

f désignant l'intensité correspondante $4\pi I$ du champ. En réalité cette valeur de I n'est autre chose que $\frac{Q}{s}$ au lieu de $\left(1 - \frac{1}{\mu'}\right) \frac{Q}{s}$. Ajoutons que, pour de faibles champs magnétiques, Joule a trouvé que la force portante était proportionnelle au carré de l'intensité f et, par suite, que I était proportionnel à f . Ces résultats concordent avec ceux trouvés par d'autres savants.

Les phénomènes qui viennent d'être décrits sont extrêmement complexes; leur cause est encore inconnue et leur explication incertaine. Lorsque l'aimantation d'un métal tend vers un maximum (partie $I_1 I_2$ de la courbe 50), on dit que ce métal se sature ou qu'il tend vers l'état de la saturation magnétique. — Pour plus d'exactitude, la partie $I_0 I_1 I$ de la courbe devrait se relever beaucoup plus brusquement, puisque le coefficient angulaire $\frac{I}{f} = \kappa$ atteint un maximum (366 dans les expériences de Rowland) beaucoup plus grand que sa valeur initiale (40).

126. Force coercitive, magnétisme rémanent. — Au phénomène de la saturation magnétique vient s'en ajouter un autre de nature non moins obscure. Lorsqu'un barreau ou un anneau de fer a été porté à un très faible degré d'aimantation, la force aimantante cessant, le fer revient à l'état neutre. Si l'aimantation a été considérable, le fer conserve, après la disparition du champ magnétique inducteur, une certaine partie de l'aimantation induite, et devient un véritable aimant. Le magnétisme conservé par le fer s'appelle magnétisme résiduel ou rémanent. Il varie d'une qualité de fer à une autre, étant minimum et presque nul pour les fers recuits les plus doux, maximum pour les fers trempés les plus durs et surtout pour l'acier. Le fer doux au point de vue magnétique est doux au point de vue mécanique. La même cause, qui empêche l'aimantation de tomber à zéro lorsque la force inductrice disparaît, diminue le degré d'aimantation que peut prendre le métal sous l'action d'une force déterminée ou, qui revient au même sa perméabilité magnétique μ' . On lui a donné le nom de force coercitive.

On a proposé de considérer l'aimantation actuelle d'un barreau comme se composant de deux parties : aimantation permanente, qui subsiste après la disparition de la force inductrice, et aimantation temporaire, qui disparaît entièrement. Mais ces deux grandeurs ne sont même pas des quantités déterminées pour une valeur donnée de la force inductrice ; elles dépendent des actions déjà subies antérieurement par le métal, et elles varient en outre avec le temps, puisque l'aimantation induite n'est pas instantanée et croît encore un peu après la production de la force aimantante (retard à l'aimantation).

Le magnétisme rémanent d'un barreau diminue également à la longue, surtout en circuit magnétique non fermé, c'est-à-dire pour les aimants non fermés sur eux-mêmes. L'accroissement d'aimantation sous l'action d'un champ magnétique et, inversement, la perte d'aimantation d'un aimant dit permanent sont accélérés par une série de chocs imprimés au métal comme si ces chocs facilitaient des mouvements moléculaires auxquels serait due la variation d'aimantation. On a été ainsi conduit à comparer la force coercitive à un frottement moléculaire ou à

une imperfection d'élasticité. Les phénomènes auxquels donnent lieu les métaux fortement magnétiques, de même que ceux qui prennent naissance dans les diélectriques (§ 21), présentent du reste une grande analogie avec les phénomènes d'allongement ou de torsion résiduels que présente une barre imparfaitement élastique.

Si l'on soumet un barreau de fer à l'action d'un champ magnétique d'intensité graduellement croissante jusqu'à un maximum $f = OP$ (fig. 52), et qu'ensuite on réduise peu à peu l'intensité f jusqu'à zéro, l'intensité d'aimantation sera représentée dans ces deux phases successives par les deux courbes distinctes OA (1) et AB (2). Pour réduire à zéro l'intensité d'aimantation, il faut créer un champ magnétique de sens inverse et d'intensité OC inférieure au maximum OP atteint précédemment.

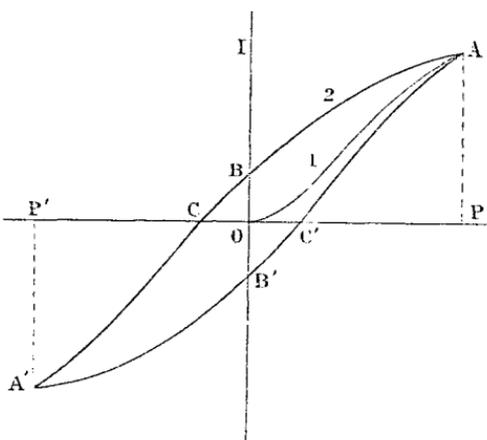


Fig. 52.

Dans les machines dont les noyaux de fer doux subissent des aimantations alternativement de sens contraires, l'intensité d'aimantation est représentée par une courbe fermée de la forme $ABA'B'A$. On exprime quelquefois ce résultat en disant que l'aimantation des noyaux est toujours en retard sur l'intensité du champ ou force aimantante. Ce phénomène, auquel on a donné le nom d'*hystérésis*, est accompagné d'un échauffement des noyaux.

Il résulte de divers travaux, notamment de ceux de lord Rayleigh, que lorsque le champ magnétique varie dans de faibles limites, l'aimantation I du fer est une fonction de la force f , c'est-à-dire reprend la même valeur lorsque f revient à sa valeur primitive. Cette fonction serait de forme parabolique :

$$\delta I = a \delta f + b \delta f^2$$

Mais dès que la variation δf dépasse une certaine valeur, cette formule n'est plus exacte ¹.

En résumé l'intensité d'aimantation I d'un métal magnétique : fer, acier, ... à l'état neutre ou aimanté, est loin d'avoir une valeur invariable pour une grandeur déterminée de la force aimantante f . Le coefficient d'aimantation $\alpha = \frac{I}{f}$ et, par suite, le pouvoir inducteur $\mu' = 1 + 4\pi\alpha$ n'ont pas une signification bien nette en général. Toutefois on peut sans doute admettre, au moins comme première approximation, largement suffisante dans certains cas, que si, au cours d'une expérience, un barreau de fer ou d'acier ne subit point de chocs et si la force f varie entre des limites étroites, les variations δI de l'aimantation du barreau seront dans un rapport constant avec les variations δf de la force ; c'est-à-dire que l'on pourra considérer comme constant le coefficient d'aimantation α défini, non plus par le rapport $\frac{I}{f}$, mais par $\frac{\delta I}{\delta f}$. Cette dernière définition est mieux appropriée au cas considéré.

La remarque précédente est d'une grande importance en pratique. Ainsi elle permet de considérer comme constant le coefficient α ou le pouvoir inducteur μ' pour les noyaux d'électroaimants, *polarisés* ou non, intercalés dans un circuit parcouru par des courants téléphoniques ou même par des courants télégraphiques très faibles ; ce qui simplifie considérablement la théorie de ces appareils.

Ceci est presque évident dans le cas des appareils téléphoniques ; car, à cause de l'extrême faiblesse des variations de courant, δf est lui-même très faible, et en outre la valeur moyenne $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \delta f dt$ de δf pendant une période T très courte est nulle.

127. Influence de la température. — La température influe notablement sur l'aimantation des corps magnétiques. La perméabilité μ' du fer reste sensiblement la même entre 0° et 330°. Elle dimi-

¹ Voir lord Rayleigh, *Phil. Mag.* Mars 1887 ; *Annales télég.* 1887, p. 428.

Hopkinson, *Proc. Roy. Soc.*, ou *Bulletin de la Soc. inter. des Electr.* 1887, p. 227 et 273.

Ewing et Low, *Proc. Roy. Soc.*, ou *Bulletin de la Soc. intern. des Electr.* 1887, p. 442.

nue ensuite pour devenir sensiblement égale à 1 à la température du rouge cerise, à laquelle on dit que le métal perd ses propriétés magnétiques. Mais lorsque le fer, après avoir été porté à une température élevée, revient plus ou moins lentement à sa température primitive, son état physique est modifié; ses qualités mécaniques peuvent être notablement altérées, et il en est de même de sa perméabilité magnétique μ' . Le coefficient μ' et, par suite, κ ne sont donc pas des fonctions déterminées de la température.

L'aimantation du nickel et du cobalt disparaît également à partir d'une certaine température, qui est de 340° pour le nickel et la température de fusion du cuivre pour le cobalt.

L'étude complète des effets de la température est aussi complexe que celle de la force coercitive. Nous nous contenterons de renvoyer aux mémoires de MM. Berson, Rowland, Barus et Strouhal, Ledebøer, etc.

128. Formules représentatives de l'aimantation. — Lenz et Jacobi, en 1839, avaient été conduits par l'expérience à poser la formule :

$$I = \kappa f$$

exprimant une proportionnalité constante entre l'aimantation induite et la force aimantante. Depuis que l'on a reconnu la véritable marche du phénomène, la loi de Jacobi a été abandonnée. En faisant abstraction du phénomène de l'hystérésis, plusieurs savants ont proposé des formules satisfaisant aux lois suivantes : 1° proportionnalité de I à f pour de faibles valeurs de la force f ; 2° existence d'un maximum I_m d'aimantation. Voici les principales :

$$\text{Formule de Lamont : } I = I_m \left(1 - e^{-\frac{\kappa f}{I_m}} \right)$$

$$\text{— de Fröhlich : } I = I_m \frac{\kappa f}{I_m + \kappa f}$$

$$\text{— de Müller : } I = A d^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(a \frac{f}{d^{\frac{3}{2}}} \right)$$

La formule de Müller se rapporte au cas d'un barreau de fer doux de diamètre d ; A et a sont des constantes. C'est la seule des trois

formules précédentes qui représente une courbe symétrique par rapport à l'origine.

On peut encore citer la formule :

$$I = \frac{zf}{1 + af^2}$$

qui se rapporte au cas où I tendrait vers zéro quand f croît indéfiniment.

Ces diverses formules empiriques donnent pour le rapport $\frac{I}{f}$ des valeurs constamment décroissantes, tandis que l'on sait qu'il croît au contraire jusqu'à 9 fois sa valeur initiale (expériences de Rowland). Si on les représente par des courbes, aucune d'elles ne présente la partie $I_0 I_1$ (fig. 50) dont la concavité est tournée vers le haut. Elles prêtent d'ailleurs à bien d'autres critiques, et nous ne nous y arrêterons pas davantage.

129. Théorie de Weber et de Maxwell. — Weber et, après lui, Maxwell ont essayé de trouver la véritable relation existant entre I et f , en partant d'une conception hypothétique sur la constitution moléculaire des métaux magnétiques soumis à l'aimantation. Quoique leurs hypothèses soient inapplicables au cas des corps diamagnétiques et paraissent devoir être rejetées, nous allons exposer succinctement leurs importantes recherches sur ce sujet.

La théorie de Weber, dit Maxwell¹, suppose que les molécules de fer sont toujours des aimants, avant même l'application de la force magnétisante ; mais dans le fer ordinaire les axes magnétiques des molécules sont orientés indifféremment dans tous les sens, de sorte que le fer, pris dans son ensemble, ne manifeste point de propriétés magnétiques. Quand une force magnétique agit sur le fer, elle tend à orienter dans la même direction les axes de toutes les molécules et à faire ainsi un aimant du fer pris dans son ensemble. Si les axes de toutes les molécules étaient rendus parallèles, le fer présenterait la plus grande intensité d'aimantation dont il est susceptible. »

Weber suppose en outre que lorsqu'une molécule magnétique

¹ Maxwell, §§ 442-446.

a été déviée de sa position primitive par une force magnétisante, elle tend à y revenir sous l'action d'une sorte de force antagoniste D , qui produirait sur elle le même effet que le champ magnétique terrestre H sur un aimant dévié du méridien. En partant de cette hypothèse, et désignant par I_m l'aimantation maximum que peut prendre le fer, par f la force magnétisante et par I l'intensité d'aimantation sous l'action de la force f , on trouve que I est représenté :

1° par la formule $I = I_m \frac{2f}{3D}$ pour toute valeur de f inférieure ou égale à D ;

2° par la formule : $I = I_m \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{f^2} \right)$ pour toute valeur de f supérieure à D .

En portant f en abscisse et I en ordonnée, on a une courbe de la forme ci-contre (fig. 53). La partie $0 I_0$ est rectiligne ; l'or-

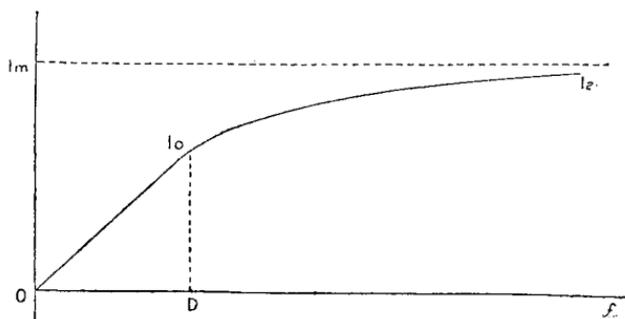


Fig. 53.

donnée I_0 D correspond à l'abscisse $f = D$ et est égale aux $\frac{2}{3}$ de I_m . Cette courbe diffère beaucoup de celle de la figure 50, qui présente une portion $I_0 I$, concave vers le haut. Du reste, la théorie précédente ne rend pas compte des phénomènes de magnétisme rémanent.

Maxwell a complété cette théorie par l'addition de l'hypothèse suivante : Tant que la déviation angulaire β d'une molécule magnétique ne dépasse pas une certaine limite β_0 , la molécule revient à sa position primitive aussitôt que cesse la force magnétisante ; mais si β a dépassé β_0 , la molécule ne revient plus en arrière que de l'angle β_0 et conserve par conséquent une déviation

permanente $(\beta - \beta_0)$. De là l'origine du magnétisme rémanent. On trouve ainsi pour représenter l'aimantation induite I :

1° La formule $I = I_m \frac{2f}{3D}$ pour toute valeur de f inférieure ou égale à $D \sin \beta_0 = L$;

$$2^\circ \quad I = I_m \left[\frac{2f}{3D} + \left(1 - \frac{L^2}{f^2} \right) \left(\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{f^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}} \right) \right]$$

pour toute valeur de f comprise entre L et D .

$$3^\circ \quad I = I_m \left[\frac{f}{3D} + \frac{1}{2} - \frac{D}{6f} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6f^2 D} - \frac{\sqrt{f^2 - L^2}}{6f^2 D} (2f^2 - 3fD + L^2) \right]$$

pour toute valeur de f supérieure à D .

Maxwell a construit la courbe représentative (fig. 54) de I en fonction de f , en supposant :

$$I_m = 1000 \quad L = 3 \quad D = 5$$

Au lieu de la partie curviligne concave vers le haut trouvée expérimentalement (fig. 50), la courbe de Maxwell présente seule-

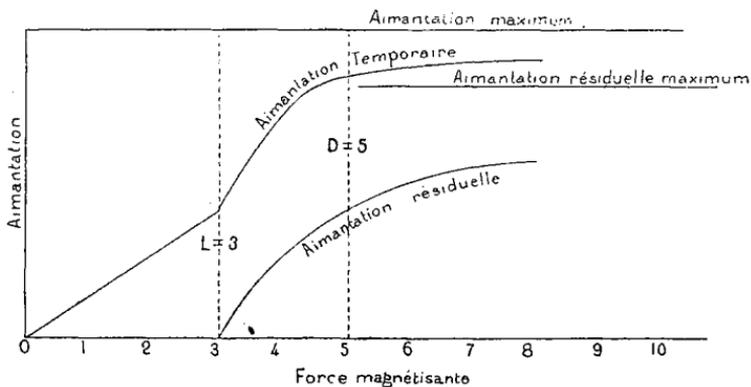


Fig. 54.

ment un coude au raccordement des parties rectiligne et curviligne. En outre le coefficient $\alpha = \frac{I}{f}$ atteint un maximum qui est moindre que les $\frac{3}{2}$ de sa valeur initiale α_0 , tandis qu'en réalité α peut devenir 9 fois plus grand que α_0 .

Ces réserves faites, l'allure générale de la courbe est plus satisfaisante que celle des courbes données par les autres formules

proposées jusqu'ici, et les phénomènes d'aimantation résiduelle se trouvent expliqués. Malgré ces avantages, les formules de Maxwell, peu admissibles au point de vue théorique, ne peuvent servir en pratique à cause de leur excessive complication.

Nous citerons encore, sans les exposer, les travaux entrepris par Biot, Green, Jamin, etc., pour déterminer la loi de répartition du magnétisme libre dans les barreaux aimantés¹. Leurs formules, qui ont obtenu une certaine vogue, reposent sur des hypothèses absolument gratuites.

130. Effets mécaniques de l'aimantation ; effets inverses. — Joule et, après lui, d'autres observateurs ont constaté qu'un barreau de fer soumis à l'aimantation s'allonge suivant les lignes de force et se contracte latéralement, son volume restant sensiblement constant. Il en est de même encore lorsque le barreau est soumis à une pression ou à une tension longitudinale préalables. Toutefois, s'il est soumis à une tension considérable, il se raccourcit au contraire par l'aimantation (cas d'un fil de fer de 32^{mm}q soumis à une tension supérieure à 224^{kg}, soit 7^{kg} par millimètre carré). L'allongement, positif ou négatif, est proportionnel au carré de l'aimantation induite ou de la force magnétisante.

Cette règle ne s'applique point au cas où interviennent les phénomènes de magnétisme rémanent. Un fil d'acier dur se raccourcit par l'aimantation, quel que soit l'effort auquel il est soumis. Le raccourcissement est proportionnel à l'aimantation du métal et à la force magnétisante ; il disparaît avec cette dernière, c'est-à-dire que l'aimantation permanente de l'acier n'est accompagnée d'aucune variation de longueur.

Le cobalt se comporte comme le fer et s'allonge par l'aimantation à l'état ordinaire. Le nickel au contraire se raccourcit dans les mêmes conditions.

Si l'aimantation produit des effets mécaniques, réciproquement les actions mécaniques influent sur elle. Sir W. Thomson a montré que l'aimantation d'un barreau de fer est augmentée en général par une traction exercée sur ce barreau, au moins tant que l'aimantation ne dépasse une certaine limite. Dès que cette limite

¹ V. Mascart et Joubert, § 419-424.

est dépassée, c'est l'inverse qui se produit. Le nickel paraît donner lieu à des effets inverses.

131. Application du principe de la conservation de l'énergie. — Les phénomènes précédents présentent une grande analogie avec ceux qui ont été décrits aux §§ 48 et 50. Nous allons chercher à leur appliquer, comme au § 53, le principe de la conservation de l'énergie.

Considérons, pour fixer les idées, le cas d'un barreau de fer introduit à l'intérieur d'un solénoïde et aimanté par le passage du courant (§ 145). Soient : l la longueur du barreau, f une force extensive qui lui est appliquée, I l'aimantation du barreau ; cette aimantation sera mesurée, par exemple, par l'action du barreau sur une aiguille aimantée placée dans une position invariable par rapport à lui. I étant une fonction du courant magnétisant, l'état du champ magnétique sera déterminé en fonction de deux quelconques des variables I , f et l , soit I et l par exemple. Un allongement dl du barreau correspond à un travail $f dl$ de la tension f , qui accroît l'énergie potentielle W du système. Un accroissement dI de l'aimantation donnera lieu également à un accroissement d'énergie, que l'on peut représenter par $M dI$; de telle sorte que l'on a :

$$dW = M dI + f dl \quad (1)$$

$$= d(MI) - IdM + f dl \quad (1')$$

dW étant une différentielle totale exacte, ainsi que $d(MI)$, il en résulte les deux relations :

$$\frac{\partial I}{\partial f} = \frac{\partial l}{\partial M} \quad (2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial f} = - \frac{\partial l}{\partial I} \quad (2')$$

M est un coefficient défini par l'équation (1) même. Si les phénomènes de saturation magnétique et de magnétisme rémanent n'existaient pas, M serait proportionnel à l'aimantation I . Nous supposons seulement que M varie dans le même sens que I . Il en résulte que, si le barreau s'allonge par l'aimantation $\left(\frac{\partial l}{\partial M} > 0\right)$, réciproquement celle-ci doit augmenter par l'effet d'une traction

$\left(\frac{\partial I}{\partial f} > 0, \text{ équation 2}\right)$; en outre, d'après l'équation (2') le coefficient M est diminué $\left(\frac{\partial M}{\partial f} < 0\right)$. Si le barreau se raccourcit au contraire par l'aimantation, celle-ci sera diminuée par l'effet d'une traction, tandis que le coefficient M augmentera.

Nous nous bornerons à cette application, qui comporte du reste les réserves suivantes. En premier lieu nous avons supposé implicitement que le phénomène étudié n'est pas accompagné d'échanges de chaleur entre les divers corps en jeu. Le raisonnement, à ce point de vue, devrait être complété comme aux § 53-54.

D'autre part, pour que dW soit réellement une différentielle totale exacte, il faut que l'énergie W soit une fonction déterminée de la force magnétisante. Or, en général, lorsque celle-ci revient à sa valeur primitive après avoir subi des variations quelconques, l'état du champ magnétique ne redevient point ce qu'il était, à cause du magnétisme rémanent; W ne reprend donc point sa valeur primitive. Le raisonnement précédent n'est donc applicable rigoureusement que dans le cas où les variations d'aimantation sont assez faibles pour que celles-ci soient purement temporaires et non permanentes en partie. Avec cette restriction, le raisonnement peut d'ailleurs s'appliquer aussi bien au fer dur et à l'acier qu'au fer doux. Lorsqu'il y a création d'aimantation permanente, les quantités $\frac{\partial I}{\partial f}$ et $\frac{\partial l}{\partial M}$ (formule 2) peuvent encore être de même signe, quoique inégales, et les conclusions énoncées plus haut subsistent encore; mais leur application générale est très incertaine.

CHAPITRE IV

MESURES MAGNÉTIQUES. — MAGNÉTISME TERRESTRE

132. Méthode de mesure. — Les principales grandeurs magnétiques que l'on ait à mesurer sont : 1° le moment d'un aimant, en grandeur et en direction ; 2° l'intensité d'un champ magnétique en un point, en grandeur et en direction. On emploie à cet effet des méthodes soit purement magnétiques, soit électromagnétiques. On verra en électromagnétisme l'usage de ces dernières pour mesurer le flux de force magnétique à travers un circuit conducteur et en déduire la valeur de la force, connaissant la surface embrassée par le contour du circuit ¹.

Nous ne nous occuperons point ici de la détermination de la force magnétique et du moment d'un aimant en direction. On peut prendre comme type de ces opérations celles qui se font dans les observatoires pour la détermination des éléments du magnétisme terrestre. On trouvera dans les Traités spéciaux la description des boussoles de déclinaison et d'inclinaison et des autres instruments de mesure, ainsi que des méthodes d'observation de haute précision ².

Soit M le moment d'un barreau aimanté, H l'intensité d'un

¹ Une autre méthode récente pour la détermination de l'intensité d'un champ magnétique est fondée sur la variation qu'éprouve la résistance électrique de certains corps, notamment du bismuth, sous l'influence d'un tel champ. La loi de cette variation ayant été déterminée préalablement en valeur absolue pour un certain échantillon de bismuth, on conçoit que celui-ci pourra ultérieurement servir, par la mesure de sa résistance, à évaluer l'intensité d'un champ magnétique dans lequel on l'orientera convenablement. Voir à ce sujet : Leduc, *Thèse de doctorat*; Van Aubel, *Electricien*, octobre 1889; etc.

² Verdet, *Conférences de Physique*, Leçons sur le magnétisme terrestre; Gordon, *Traité expérimental d'Électricité et de Magnétisme*, traduction Raynaud.

Voir également dans le *Traité* de MM. Mascart et Joubert, de nombreuses indications sur les mesures magnétiques en général.

champ magnétique supposé sensiblement uniforme dans l'espace occupé par ce barreau (champ magnétique terrestre par exemple). Nous supposons donc connues les directions de la force magnétique et de l'axe de l'aimant, et nous nous proposons de décrire la méthode employée ordinairement pour la mesure de \mathcal{M} et de H en valeurs absolues. Cette méthode, indiquée par Poisson, perfectionnée par Gauss, consiste à mesurer successivement le produit $\mathcal{M} H$ et le quotient $\frac{\mathcal{M}}{H}$; de ces données on déduit \mathcal{M} et H par un calcul simple.

133. Suspensions unifilaire et bifilaire. — Dans les expériences de précision, les aimants dont on veut observer les mouvements angulaires, au lieu de reposer sur des pivots, dont le frottement est une cause d'erreur, sont suspendus par un fil ou un système de deux fils fins. Lorsqu'un barreau ainsi suspendu tourne d'un certain angle autour de la verticale, le fil ou le système des deux fils subissent une torsion et exercent sur le barreau une réaction qui tend à le ramener dans son orientation primitive. Il est nécessaire de connaître la valeur du couple, dit *de torsion*, exercé par la suspension et dont l'action directrice vient se superposer à celle du champ magnétique.

1° Suspension unifilaire. — Soit un fil cylindrique, d'argent par exemple, dont le diamètre est d et la longueur l . Ce fil étant tendu par un poids, si, l'extrémité supérieure restant fixe, on tord la section inférieure d'un angle θ , le couple de torsion est proportionnel au carré de la section et au rapport $\frac{\theta}{l}$, soit : $Kd^4 \frac{\theta}{l} = C\theta$. Cette loi résulte de la théorie de l'élasticité; elle avait du reste été découverte expérimentalement par Coulomb, qui en avait fait l'application à sa balance de torsion. Si l'on connaît le coefficient K , qui dépend de la nature du fil, on pourra donc calculer en valeur absolue le couple de torsion. Mais ce coefficient pouvant varier, pour un même métal, d'un échantillon à un autre, et le fil fin ne pouvant être considéré comme rigoureusement homogène et de diamètre constant, on préfère mesurer en bloc pour chaque suspension le facteur $K \frac{d^4}{l} = C$, comme on le verra ci-après (§ 135).

Le coefficient C varie lui-même avec la température. Il varie

aussi un peu à la suite d'oscillations prolongées du barreau suspendu, ou même à la longue sans cause apparente. Aussi est-il nécessaire de déterminer sa valeur dans chaque série d'expériences, si toutefois la correction résultant de ses variations n'est pas négligeable.

2° *Suspension bifilaire*. — La figure 55 montre un type de suspension de ce genre. Les deux fils ff sont fixés à une poulie P , qui est mobile autour de son axe, de telle sorte que l'un des fils puisse s'élever et l'autre s'abaisser automatiquement jusqu'à ce que leurs tensions soient égales. Leur écartement à la partie supérieure est maintenu invariable, pendant la rotation du barreau BB , par les poulies pp . M est

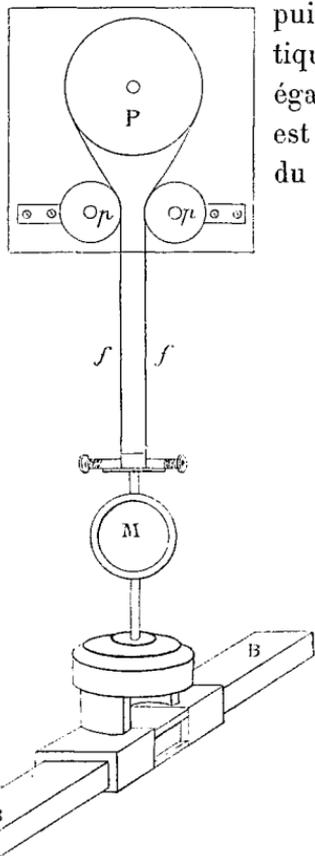


Fig. 55.

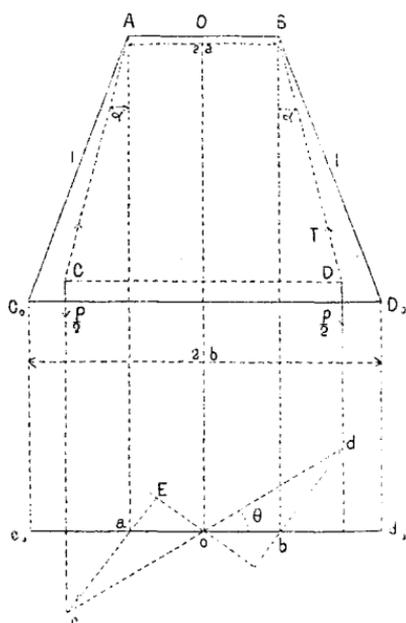


Fig. 56 et 57.

un miroir invariablement lié au barreau et qui tourne du même angle que lui.

Pour calculer le couple de torsion exercé par la suspension bifilaire, nous considérons le cas, réalisé très approximativement en pratique, d'un barreau CD , cd (fig. 56 en projection verticale,

et fig. 57 en projection horizontale), suspendu à l'aide de deux fils A C, ac et B D, bd , de longueur l , fixés à deux points A et B distance d'une longueur $2a$.

Si l'on fait tourner le barreau à partir de sa position d'équilibre C_0D_0 , c_0d_0 , il s'élève en même temps. Les forces qui agissent sur lui en C et D sont : le poids P du barreau, que l'on peut supposer également réparti aux deux extrémités, la tension T de chaque fil, le couple dû à la torsion de chaque fil et le couple R des forces extérieures dues aux actions magnétiques ou à toute autre cause.

Ecrivons qu'au point C, par exemple, il y a équilibre entre les composantes verticales de ces forces. En désignant par α l'angle du fil avec la verticale, on aura :

$$T \cos \alpha = \frac{P}{2}$$

D'autre part, le couple dû aux composantes horizontales $T \sin \alpha$ des tensions des fils est :

$$T \sin \alpha \times 2 OE = OE \times P \operatorname{tg} \alpha$$

Mais les projections verticale et horizontale de chaque fil sont respectivement :

$$l \cos \alpha = h$$

et :

$$l \sin \alpha = \overline{ac}$$

Le couple en question a donc pour valeur :

$$\begin{aligned} OE \times P \operatorname{tg} \alpha &= OE \times \overline{ac} \times \frac{P}{h} \\ &= \frac{P}{h} \times a \cdot b \sin \theta \} \\ &= D \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

en remarquant que $OE \times ac$ et $a \cdot b \sin \theta$ représentent le double de l'aire du triangle Oac .

La section inférieure de chaque fil tournant, par rapport à la section supérieure, du même angle θ que le barreau, le couple auquel donne lieu cette torsion est, d'après ce que l'on a vu plus haut, proportionnel à θ . Désignons par $C\theta$ la somme des couples

de torsion des deux fils. Le couple résultant exercé par la suspension sur le barreau sera la somme :

$$D \sin \theta + C\theta$$

et, si le barreau est en équilibre :

$$R = D \sin \theta + C\theta \quad (2)$$

Le coefficient D dépend de h (formule 1) et, par conséquent, n'est pas indépendant de θ . La formule (2) est donc en apparence assez compliquée ; mais en pratique, en raison de la grande longueur des fils et de leur faible écartement, D est sensiblement constant. Si en outre on n'observe que des angles θ très faibles, $\sin \theta$ peut se remplacer sensiblement par θ ; le couple du bifilaire est alors simplement proportionnel à la déviation.

Dans un grand nombre d'applications on adopte la formule : $R = D \sin \theta$, le couple $C\theta$ étant négligeable par rapport à $D \sin \theta$.

134. Emploi du miroir. — Pour accroître la précision dans la

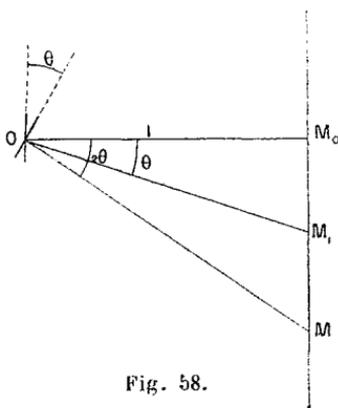


Fig. 58.

lecture des déviations angulaires du barreau, on fixe sur celui-ci ou sur l'équipage mobile un miroir plan vertical (miroir M sur la figure 55), qui tourne du même angle que lui. En regard de ce miroir (O en projection horizontale sur la figure 58) et parallèlement à sa position de repos, est disposée une échelle graduée en millimètres $M_0 M_1 M$, dont la graduation est tournée vers le miroir ; la distance

OM_0 est de quelques mètres. Derrière l'échelle est placée une lunette dont l'axe optique coïncide avec le prolongement de la normale OM_0 .

La lunette étant ainsi dirigée sur le miroir et convenablement réglée, suivant que celui-ci est au repos ou dévié d'un angle θ , la division de l'échelle qui viendra après réflexion sur O former son image au foyer sera la division centrale M_0 ou une autre M telle que l'angle $M, O M_0 (= \theta)$ de réflexion soit égal à l'angle $M O M_1$ d'incidence. Un réticule placé au foyer permet d'apprécier très

exactement la division M et par suite de mesurer la distance ou *déviatiou linéaire* M_0M . Connaissant la distance OM_0 et M_0M , on en déduira la déviation angulaire θ par la formule :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{M_0M}{OM_0}$$

Cette méthode de lecture, due à Poggenдорff, est appliquée à beaucoup d'autres mesures. (Voir *Galvanomètres*.) On adopte souvent la variante suivante. En M_0 , derrière l'échelle, est une source lumineuse, dont les rayons viennent tomber sur le miroir et, suivant l'orientation de celui-ci, se réfléchissent suivant diverses directions OM_0 , OM . Ou bien, en M_0 est un fil vertical placé devant la source lumineuse; l'image de ce fil vient sur l'échelle se détacher en noir sur fond éclairé.

Le miroir est alors concave, et la distance OM_0 est réglée de telle sorte que les rayons réfléchis viennent former leur foyer sur l'échelle. On lit directement la division éclairée M , soit

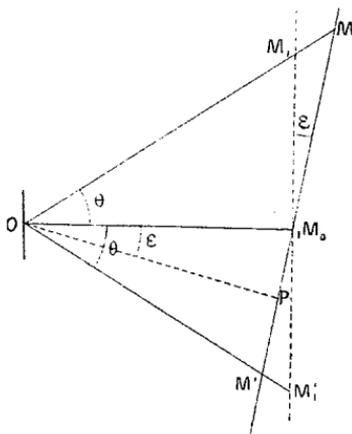


Fig. 59.

par réflexion si l'échelle est opaque, soit par derrière si elle est transparente (celluloïd, papier huilé, etc.).

En raison de l'emploi très fréquent de cette méthode de lecture, il est utile de signaler les causes d'erreur les plus grossières auxquelles elle peut donner lieu.

D'abord l'échelle M_0M et le miroir O dans sa position de repos peuvent, au lieu d'être parallèles, faire entre eux un certain angle ε (fig. 59). Alors l'angle M_0OM du rayon réfléchi avec l'incident étant égal à 2θ , la déviation linéaire M_0M n'est plus proportionnelle à $\operatorname{tg} 2\theta$, comme on le suppose; mais on a :

$$\frac{M_0M}{OP} = \operatorname{tg} (2\theta + \varepsilon) - \operatorname{tg} \varepsilon$$

et l'erreur relative commise est :

$$\frac{[\operatorname{tg} (2\theta + \varepsilon) - \operatorname{tg} \varepsilon] - \operatorname{tg} 2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} = \operatorname{tg} (2\theta + \varepsilon) \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{PM \cdot PM_0}{OP^2}$$

' On doit lire sur la figure 20, au lieu de θ , pour les angles M_0OM et M_0OM' .

soit sensiblement $\varepsilon \operatorname{tg} 2 \theta$, en supposant que ε ne dépasse pas 0,4 (5° à 6°). — Exemple : $\varepsilon = \frac{1}{25}$ (2° environ), distance $OP = 1^m$ et $M_o M = 0^m 40$; erreur relative = 0,0176 environ.

Lorsqu'on peut successivement donner à l'aimant et, par suite, au miroir des déviations égales et de sens contraires, la moyenne des deux lectures $M_o M$ et $M_o M'$ ainsi obtenues est sensiblement exempte de la cause d'erreur précédente, pourvu que θ ne soit pas trop grand.

Quelquefois la position de repos du miroir varie dans l'intervalle d'une expérience, soit parce que le barreau, après une déviation trop grande, ne revient pas exactement à son orientation primitive (torsion résiduelle du fil de suspension), soit parce qu'une variation lente et inconnue du champ magnétique a dévié insensiblement l'aimant. L'échelle et le miroir dans sa position de repos ne sont alors plus parallèles, et la cause d'erreur précédente intervient.

Il est inutile d'insister sur les erreurs provenant soit d'une graduation défectueuse de la règle par le constructeur, soit du manque de netteté de l'image observée en divers points de l'échelle, ces points ne pouvant tous être au foyer, etc.

Dans les mesures qui ne comportent pas une haute précision, si l'on n'observe que des déviations angulaires faibles, on remplace $\operatorname{tg} 2 \theta$ par 2θ , c'est-à-dire que l'on admet la proportionnalité des déviations linéaires sur l'échelle aux déviations angulaires. L'erreur relative commise est :

$$\frac{\operatorname{tg} 2\theta - 2\theta}{2\theta} = \frac{4}{3} \theta^2 + (\alpha\theta^4 + \beta\theta^6 + \dots)$$

Exemple : $OM_o = 1^m$ (fig. 58). Pour $M_o M$ inférieur à $0^m, 20$, l'erreur relative commise de ce fait est inférieure à 0,013. Si $M_o M = 0^m, 40$, elle atteint 0,05 environ et n'est plus admissible.

Au lieu d'échelles planes, on a employé quelquefois des échelles cylindriques ayant pour axe l'axe de rotation du miroir. Ces échelles donnent des déviations linéaires proportionnelles aux déviations angulaires, mais elles sont d'un réglage plus difficile et d'un usage peu pratique.

135. Mesure du produit $\mathcal{M} H$. — Revenons maintenant à la mesure du moment magnétique \mathcal{M} d'un aimant et de l'intensité H

du champ dans lequel il est placé. On commence par mesurer $\mathcal{M} H$ suivant la méthode de Gauss (§ 132).

1° *Par la balance de torsion.* — Si l'on suspend au fil d'une balance de torsion, au moyen d'un étrier, un barreau de cuivre semblable au barreau aimanté, l'appareil prend une orientation indépendante du champ magnétique et telle que la torsion du fil de suspension est nulle. Un miroir fixé à l'étrier et tournant du même angle que lui autour du fil vertical fait connaître son orientation (emploi de l'échelle graduée et de la lunette). Si l'on remplace ensuite le barreau de cuivre par l'aimant, celui-ci n'étant pas orienté exactement dans la direction de la force magnétique, le système tournera d'un certain angle accusé par le miroir et le fil de suspension sera tordu. En tournant dans le même sens un cercle horizontal gradué auquel est suspendu le fil, lorsque la rotation imprimée au cercle sera égale à celle du miroir, on sera sûr que l'axe de l'aimant est orienté dans le plan du méridien magnétique et que la torsion du fil est nulle (réglage répété).

En tournant alors le cercle gradué d'un angle α , on observe pour la rotation du miroir un angle moindre θ . Le couple de torsion du fil est proportionnel à la différence $(\alpha - \theta)$; soit C $(\alpha - \theta)$ sa valeur. Il fait équilibre au couple magnétique qui est $\mathcal{M} H \sin \theta$ (§ 149) :

$$C (\alpha - \theta) = \mathcal{M} H \sin \theta \quad (3)$$

On déduit de là la valeur de $\mathcal{M} H$, connaissant les angles α et θ et la constante C ; on prendra pour $\mathcal{M} H$ la moyenne de plusieurs mesures.

Pour calculer C en valeur absolue, on suspend au fil une masse non magnétique de forme géométrique simple, un cylindre par exemple, de telle sorte que l'on puisse calculer, d'après les dimensions et la densité, la valeur A du moment d'inertie du système formé par cette masse et le fil. Puis on lui imprime une rotation de faible amplitude. Le système abandonné à lui-même décrit des oscillations isochrones dont on observe la durée T . C est donné par la formule :

$$C = \frac{4\pi^2 A}{T^2} \quad (4)$$

En effet, le couple d'inertie $A \frac{d^2\theta}{dt^2}$ faisant, à un instant quelconque, équilibre au couple de torsion $C\theta$, l'équation du mouvement oscillatoire est :

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0$$

d'où, en intégrant :

$$\theta = \theta_0 \sin \sqrt{\frac{C}{A}} (t - t_0)$$

Cette formule montre que les oscillations sont bien isochrones. La période est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{C}}$$

et vérifie bien la relation (4).

2° *Suspension bifilaire.* — Si dans la méthode précédente on remplace le fil unique de suspension, qui donne lieu à un couple de torsion proportionnel à la torsion ($\alpha - \theta$), par deux fils fins d'égale longueur constituant une *suspension bifilaire*, le couple de torsion est dans ce cas représenté par la formule (2) du § 433 :

$$D \sin (\alpha - \theta) + C (\alpha - \theta)$$

On opère comme dans le cas de la balance de torsion. Seulement la formule (3) est remplacée par :

$$D \sin (\alpha - \theta) + C (\alpha - \theta) = \mathcal{M} H \sin \theta$$

qui fait connaître $\mathcal{M} H$ en valeur absolue quand on connaît un groupe de valeurs de α et de θ , ainsi que les constantes C et D . D peut se calculer par la formule (1) du § 433 :

$$D = \frac{ab}{h} mg$$

$2a$ étant la longueur de la ligne horizontale qui joint les extrémités supérieures des deux fils de suspension, $2b$ la longueur de la ligne qui joint leurs extrémités inférieures, h la distance verticale de ces deux lignes, m la masse du système suspendu par les fils, g l'accélération terrestre.

Si on laisse osciller librement un barreau de cuivre, la déviation angulaire θ restant très faible, le couple de torsion sera sensiblement égal à $(C + D)\theta$, et l'on pourra calculer le coefficient $(C + D)$ par un procédé analogue à celui qui a été indiqué ci-dessus (formule 4) pour la détermination de C .

3° Les deux méthodes précédentes sont des méthodes statiques; pour mesurer MH , on observe la position d'équilibre de l'aimant. On peut, au contraire, observer les oscillations du barreau lorsque celui-ci a été dévié légèrement du méridien magnétique (méthode dynamique). Dans le cas de la balance de torsion, en supposant que la torsion du fil soit nulle dans la position d'équilibre du barreau, il doit y avoir équilibre, à un instant quelconque, entre le couple d'inertie $A' \frac{d^2\theta}{dt^2}$, le couple de torsion $C\theta$ et le couple magnétique $MH \sin \theta$:

$$A' \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta + \mathcal{M} H \sin \theta = 0$$

Si θ est assez petit pour être substitué à $\sin \theta$ sans erreur appréciable (θ inférieur à un demi-degré par exemple), on peut écrire :

$$A' \frac{d^2\theta}{dt^2} + (C + \mathcal{M} H) \theta = 0 \quad (5)$$

d'où, en intégrant :

$$\theta = \theta_0 \sin \sqrt{\frac{C + \mathcal{M} H}{A'}} (t - t_0)$$

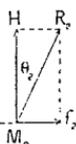
Si T' désigne la période du mouvement oscillatoire de l'aimant, on a :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{A'}{C + \mathcal{M} H}} \quad (6)$$

A' et T' étant fournis en valeur absolue par l'expérience, et C ayant été calculé une fois pour toutes par la formule (4), on déduira de là MH .

La balance de torsion, inventée par Coulomb, offre, entre autres inconvénients, le défaut de fixité du zéro de la graduation à cause de la torsion résiduelle qui existe ordinairement dans le fil et qui ne disparaît que lentement. On fait en général usage du magnétomètre bilifaire, dû à Gauss.

136. Mesure de $\frac{M}{H}$. — Supposons l'aimant AB de moment M (fig. 60) dirigé perpendiculairement au méridien magnétique, c'est-à-dire à l'intensité H du champ. En un point M_1 situé à une distance r de l'aimant et dans le plan perpendiculaire au milieu de AB, la force f_1 due à cet aimant, en supposant le rapport $\frac{AB}{r}$ infiniment petit, est parallèle et de sens contraire à AB et égale à : $f_1 = \frac{M}{r^3}$ (§ 120). L'intensité résultante R_1 du champ en M_1 fait avec H un angle θ_1 tel que :



$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{f_1}{H} = \frac{\mathcal{M}}{Hr^3}$$

Fig. 60.

En un point M_2 situé sur le prolongement de AB et à la même distance r du centre O de l'aimant, la force due à celui-ci est $f_2 = \frac{2M}{r^3}$, et l'intensité résultante R_2 du champ fait avec H un angle θ_2 tel que :

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{f_2}{H} = 2 \cdot \frac{\mathcal{M}}{Hr^3}$$

Si donc un barreau aimanté est suspendu en M_1 par un fil sans torsion, en l'absence de l'aimant M, son axe est dirigé suivant H ; et, lorsqu'on apporte l'aimant M dans une position AB, le barreau suspendu prend une nouvelle position d'équilibre dans la direction R_1 . On observe donc une déviation angulaire θ_1 , et si l'on a mesuré r , on en déduira la valeur de $\frac{M}{H}$:

$$\frac{\mathcal{M}}{H} = r^3 \operatorname{tg} \theta_1 \quad (7)$$

On préfère suspendre le barreau auxiliaire dans la position M_2 , parce que la déviation angulaire θ_2 que l'on obtient lorsqu'on apporte l'aimant \mathcal{M} en AB est plus grande que θ_1 . On a alors :

$$\frac{\mathcal{M}}{H} = \frac{1}{2} r^3 \operatorname{tg} \theta_2 \quad (8)$$

Cette méthode de détermination de $\frac{\mathcal{M}}{H}$ est due à Gauss. Les

positions M_1 et M_2 s'appellent respectivement la première et la deuxième positions de Gauss. De ce que le rapport $\frac{f_2}{f_1}$ tend vers 2 lorsque r augmente indéfiniment, ce savant a déduit une nouvelle preuve de la loi de l'inverse du carré des distances, qui avait été démontrée par les expériences de Coulomb d'une manière moins rigoureuse.

En pratique, le rapport $\frac{AB}{r}$ ne peut être considéré comme infiniment petit, et la valeur de $\frac{\mathcal{M}}{H}$, donnée par la formule (8) par exemple, doit être corrigée par l'addition de termes de l'ordre de $\frac{AB}{r}$, $\left(\frac{AB}{r}\right)^2$, ... D'autre part le centre O de l'aimant ne saurait être déterminé avec une précision absolue; et le champ dû à \mathcal{M} n'est pas rigoureusement uniforme dans toute l'étendue du barreau suspendu; de là nécessité d'introduire de nouveaux termes de corrections en $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, ... La formule exacte serait donc de la forme :

$$\frac{\mathcal{M}}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \theta_2 \left(1 + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} + \frac{a_4}{r^4} + \dots \right)$$

Ce n'est d'ailleurs là qu'un développement en série de Maclaurin. Si l'on se borne aux cinq premiers termes de la parenthèse, une série de cinq expériences faites à des distances r différentes permettra d'éliminer ou de calculer les coefficients a_1 , a_2 , a_3 et a_4 , et de calculer la valeur cherchée de $\frac{\mathcal{M}}{H}$. En réalité, on fait un plus grand nombre d'expériences, en retournant l'aimant \mathcal{M} , puis le plaçant dans une position symétrique de AB pour rapport à M_2 .

Une autre correction relativement importante doit être introduite pour tenir compte du magnétisme induit par le champ magnétique dans les barreaux soumis à l'expérience, cette induction étant variable avec leur orientation.

Exemple. — Gauss, dans une série d'expériences exécutées sur deux barreaux à des distances r variables, successivement dans les positions M_1 et M_2 , a trouvé :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= 0,043435 r^{-3} + 0,002449 r^{-5} \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= 0,086870 r^{-3} - 0,002185 r^{-5} \end{aligned}$$

Le coefficient 0,086870, qui représente $2 \frac{\mathcal{M}}{H}$, est bien le double du coefficient 0,043435 qui représente $\frac{\mathcal{M}}{H}$. On voit que, pour des distances r supérieures à 1 mètre = 100 C.G.S. l'erreur relative commise en négligeant les termes en r^{-5} est inférieure à 0,00001.

137. Magnétisme terrestre. — Biot a donné (1804) une représentation grossière des effets magnétiques du champ terrestre en supposant celui-ci dû à un aimant \mathcal{M} de longueur AB infiniment

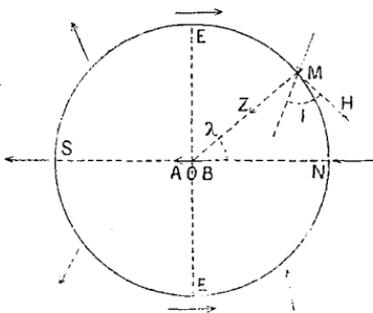


Fig. 61.

petite placée au centre de la terre (fig. 61). Dans cette hypothèse, la direction AB ou SN est la ligne des pôles magnétiques; le plan EE' perpendiculaire à AB est l'équateur magnétique. Les grands cercles passant par les pôles sont des méridiens et les cercles parallèles à l'équateur sont des parallèles magnétiques. L'aiguille aimantée devrait en chaque point, tel que M ,

se diriger dans le plan du méridien en faisant avec l'horizontale MH un angle I , appelé inclinaison, dont la valeur est donnée par la formule (5) du § 118 :

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \lambda$$

λ désigne ici la latitude magnétique du point M . On voit que l'inclinaison est la même tout le long d'un parallèle; en d'autres termes un parallèle est une courbe *isoclinique*. Les flèches de la figure 61 représentent la direction du champ magnétique aux divers points de la sphère terrestre.

En réalité les phénomènes du magnétisme terrestre sont beaucoup plus complexes que ne l'indique l'hypothèse de Biot. Les pôles étant, par définition, les points de la surface de la terre où la force magnétique $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$ est verticale, les variations du potentiel V dans le plan horizontal sont nulles en ces points, c'est-à-dire que le potentiel magnétique V y est maximum ou minimum. Il n'y a pas de raison à priori pour qu'en un pôle nord, par exemple,

le potentiel soit minimum plutôt que maximum. Il résulte des données de l'expérience recueillies en divers points du globe et utilisées par Gauss qu'il existe deux pôles magnétiques : un pôle nord où le potentiel V est minimum, et un pôle sud, où V est maximum. Ces pôles ne sont pas aux extrémités d'un même diamètre terrestre. D'après les calculs de Gauss, leurs positions, pour l'année 1838, étaient définies par les coordonnées.

Pôle nord : $70^{\circ} 35$ latitude N. — $262^{\circ} 01'$ longit. E

Pôle sud : $78^{\circ} 35$ latitude S. — $150^{\circ} 10'$ longit. E

L'équateur magnétique, c'est-à-dire le lieu des points où l'inclinaison est nulle (Verdet, Maxwell) n'est pas un cercle ; il en est de même des courbes isocliniques en général. On appelle : parallèles les courbes de niveau, c'est-à-dire les lignes d'intersection des surfaces équipotentielles magnétiques avec la surface terrestre ; plan méridien, en un point, le plan vertical parallèle à la force magnétique en ce point ou perpendiculaire à la surface équipotentielle. Par ces définitions, le méridien et le parallèle ont des directions rectangulaires entre elles.

L'équateur magnétique tel qu'il est défini ci-dessus n'est pas un parallèle, c'est-à-dire une courbe équipotentielle. On définit quelquefois, au contraire, l'équateur comme étant le parallèle de potentiel nul (Mascart et Joubert, § 435). Ce parallèle ne paraît point susceptible d'être déterminé.

La détermination des éléments du magnétisme terrestre se fait dans un grand nombre d'observatoires répartis en divers points du globe. En chaque lieu ces éléments subissent des variations périodiques, diurnes et annuelles. On constate en outre d'autres variations, dites séculaires, dont la période n'est pas encore bien connue ; ce sont les plus importantes. Les variations diurnes sont très faibles, mais nullement négligeables pour des mesures de précision. Ces diverses variations sont enregistrées automatiquement et d'une manière continue dans certains observatoires ¹.

Citons, à titre d'exemple, les données suivantes :

¹ V. Gordon, traduction Raynaud.

Éléments du magnétisme terrestre à Paris (Parc St-Maur, 1^{er} janvier 1889) :

		Variation en 1888.
Déclinaison	15°47',4	— 4',7
Inclinaison	65°13',7	— 1',0
Intensité horizontale	0,19308	+ 0,00028
— verticale	0,42275	+ 0,00030
— totale	0,46559	+ 0,00039

Intensité horizontale en divers points (1^{er} janvier 1879) :

Paris	0,1932	C.G.S.
Brest	0,1920	—
Toulon	0,2226	—
Alger	0,2488	—

138. Origine du magnétisme terrestre. — Soit V le potentiel magnétique en un point M situé à une distance r du centre O de la terre. V est la somme des potentiels dus à chacun des aimants infiniment petits en lesquels on peut décomposer la masse magnétique agissant au point M , ou bien à chacune des quantités q de magnétisme existant dans le champ terrestre. Si l'une de ces quantités q est située à la distance ρ du point M , son potentiel en ce point est $\frac{q}{\rho}$. Le potentiel total en M sera donc :

$$V = \sum \frac{q}{\rho}$$

Désignons par r_1 la distance Oq et par (r, r_1) l'angle qOM , de telle sorte que :

$$\rho^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos (r, r_1)$$

Il en résulte :

$$V = \sum \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos (r, r_1) + r_1^2}}$$

$$= \sum \frac{q}{r} \left[1 - 2 \frac{r_1}{r} \cos (r, r_1) + \frac{r_1^2}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$= \sum \frac{q}{r_1} \left[1 - 2 \frac{r}{r_1} \cos (r, r_1) + \frac{r^2}{r_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9')$$

Pour toute quantité q située à l'intérieur de la sphère de centré O et de rayon OM , c'est-à-dire pour toute valeur de r_1 inférieure à r ,

l'expression (9) peut être développée en série convergente, suivant les puissances croissantes de $\frac{r_1}{r}$. La fraction V' du potentiel V correspondante aux termes dans lesquels r_1 est inférieur à r , aura ainsi pour expression :

$$V' = \frac{1}{r} \Sigma q + \frac{1}{r^2} \Sigma q r_1 \cos(r, r_1) + \frac{1}{r^3} \Sigma q r_1^2 \frac{3 \cos^2(r, r_1) - 1}{2} + \dots$$

Soient : θ la colatitude et φ la longitude du point M , θ_1 la colatitude et φ_1 la longitude du point q . On a la relation connue :

$$\cos(r, r_1) = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$

Remplaçons $\cos(r, r_1)$ par cette expression dans le développement de V' . Le coefficient de $\frac{1}{r^2}$ deviendra :

$$\cos \theta \Sigma q r_1 \cos \theta_1 + \sin \theta \cos \varphi \Sigma q r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + \sin \theta \sin \varphi \Sigma q r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \cos \varphi + \gamma \sin \theta \sin \varphi$$

α, β, γ étant des coefficients indépendants de la position du point M . De même le coefficient de $\frac{1}{r^3}$ deviendra :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' + \beta' \cos^2 \theta + \gamma' \cos \theta \sin \theta \cos \varphi + \delta' \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \\ + \epsilon' \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \tau' \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + \zeta' \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \end{array} \right.$$

et ainsi de suite. On remarque, d'autre part, que le coefficient de $\frac{1}{r}$, soit Σq , représentant la quantité totale de magnétisme des aimants intérieures à la sphère de rayon OM , est nulle. Par suite, on peut écrire V' sous la forme :

$$V' = \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \dots + \frac{A_n}{r^n} + \dots$$

les numérateurs A_n étant des fonctions de *forme connue* de $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, mais à coefficients α, β, \dots indéterminés. On pourrait d'ailleurs réduire le nombre de ces coefficients en remplaçant les produits de sinus et de cosinus en fonction des sinus et cosinus des arcs multiples.

Pour les quantités q situées à l'extérieur de la sphère de rayon OM ($r_1 > r$), l'expression (9') pouvant être développée en série convergente suivant les puissances croissantes de $\frac{r}{r_1}$, on obtiendrait

de même pour la partie correspondante V'' du potentiel au point M :

$$V'' = B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \dots + B_n r^n + \dots$$

La constante $B_0 = \Sigma \frac{q}{r_1}$ représente le potentiel au centre O , dont la valeur importe peu; B_1, B_2, \dots sont des fonctions de $\sin \theta, \cos \theta, \sin \varphi$ et $\cos \varphi$, de forme connue, mais à coefficients indéterminés.

Le potentiel V étant égal à la somme ($V' + V''$), on a finalement :

$$V = \left[\frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \dots + \frac{A_n}{r^n} + \dots \right] + \left[B_0 + B_1 r + \dots + B_n r^n + \dots \right] \quad (10)$$

De cette expression du potentiel V on déduit celle de la force magnétique $\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ dans une direction quelconque Ox . En particulier, la composante $-\frac{\partial V}{\partial r}$ dirigée suivant le rayon OM , ou composante *verticale*, sera égale à :

$$Z = \left[\frac{2}{r^3} A_2 + \dots + \frac{n}{r^{n+1}} A_n + \dots \right] - \left[B_1 + 2 B_2 r + \dots \right] \quad (11)$$

Les composantes horizontales X et Y de la force magnétique, suivant le méridien et suivant le parallèle du point M , se calculeraient en différentiant V par rapport à θ et à φ .

En faisant r égal au rayon terrestre R dans les formules précédentes, on aura les composantes de la force magnétique terrestre en un point quelconque du globe, exprimées sous forme de fonctions rationnelles de $\sin \theta, \cos \theta, \sin \varphi$ et $\cos \varphi$, à coefficients indéterminés α, β, \dots Si on limite chaque série à ses trois ou quatre premiers termes (en $\frac{1}{r^3}$ et en r^4 par exemple), on aura un nombre restreint de coefficients que l'on déterminera en utilisant les valeurs de X, Y, Z , observées en un nombre suffisant de points de longitudes et de latitudes connues.

Nous ne développerons point les calculs relatifs à cette détermination; nous nous bornerons à indiquer que, d'après les calculs de Gauss, la série développée suivant les puissances de $\frac{1}{r}$ suffirait seule à rendre compte des effets du magnétisme terrestre et que les coefficients B_1, B_2, \dots seraient très faibles¹.

¹ Maxwell, § 470; Mascart et Joubert, § 440; Verdet, *Leçons sur le magnétisme terrestre*.

S'il en est ainsi, on en doit conclure que la source du magnétisme terrestre est intérieure à la surface de la terre ; les causes extérieures, qui donnent lieu aux termes en B_1 , B_2, \dots , seraient très faibles.

Toutefois, de ce que la cause prépondérante du magnétisme est intérieure au globe terrestre, il ne résulte pas que les variations diurnes ou annuelles de ce magnétisme, lesquelles sont très faibles, soient dues à des causes intérieures. Blavier a été conduit, au contraire, par l'étude comparée des courants telluriques et des variations magnétiques, à la conclusion que ces variations et ces courants seraient dus à des phénomènes ayant leur siège au-dessus de la surface terrestre¹.

¹ Blavier. *Etude des courants telluriques*.

QUATRIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

ACTIONS RÉCIPROQUES DES COURANTS ET DES AIMANTS

139. Action d'un courant sur un aimant. — (Erstedt (1820) a montré qu'un courant agit sur une aiguille aimantée. Ampère a formulé la règle suivante : pour un observateur, placé le long du courant (celui-ci lui entrant par les pieds) et regardant l'aiguille aimantée, le pôle nord ou positif se dirige vers la gauche et le pôle sud ou négatif vers la droite. On a, depuis lors, reconnu que le courant crée dans le milieu environnant un véritable champ magnétique jouissant des mêmes propriétés que le champ d'un aimant.

Biot et Savart ont étudié l'action d'un courant rectiligne indéfini AB sur un aimant ab de longueur très faible par rapport à sa distance r au courant (fig. 62). A cet effet, l'aiguille ab étant orientée dans le méridien magnétique, le fil AB était disposé de telle sorte que le plan ABM était perpendiculaire à l'aimant en son milieu et, par suite, perpendiculaire au méridien magnétique.

Lorsque le courant passait, la force magnétique f (agissant sur l'unité de magnétisme) qu'il produisait en M était parallèle à la

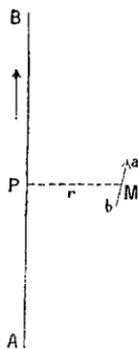


Fig. 62.

composante horizontale H du magnétisme terrestre. L'intensité résultante du champ était donc $(H + f)$, et le couple agissant sur l'aiguille, lorsque celle-ci faisait un angle θ avec sa position d'équilibre, était égal à $(H + f) M \sin \theta$ (§ 119). Biot et Savart faisaient osciller l'aiguille sous l'action : 1° du couple terrestre $M H \sin \theta$ seul, le courant i ne passant pas dans le fil ; 2° du couple résultant $M(H + f) \sin \theta$, lorsque le courant passait. Ils notaient les durées respectives T et T' des oscillations dans les deux cas. Comme on a, d'après la formule (6) du § 135, en désignant par A le moment d'inertie de l'aimant, et ne tenant par compte du coefficient de torsion C du fil, qui était négligeable :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{M H}}$$

On en déduit :

$$M H = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$$

De même :

$$M (H + f) = \frac{4\pi^2 A}{T'^2}$$

Par suite :

$$\frac{f}{H} = \frac{T^2 - T'^2}{T'^2}$$

En opérant à des distances r différentes, Biot et Savart ont reconnu que le rapport $\frac{T^2 - T'^2}{T'^2}$ et, par suite, f variaient en raison inverse de r . D'autre part, on a démontré que la force magnétique f développée par un courant est proportionnelle à son intensité i mesurée chimiquement ou électrostatiquement (§ 85). Ces deux lois sont contenues dans la formule :

$$f = a \frac{i}{r} \quad (1)$$

où a est une constante.

D'après la formule (1), le produit $f \times r$, c'est-à-dire le moment de la force f par rapport à l'axe $A'B$, est indépendant de r . Les moments des forces agissant sur les deux pôles q et $-q$ d'un aimant sont donc égaux et de signes contraires ; le couple total

qui tend à faire tourner l'aimant autour du courant est nul (expérience réalisée). Réciproquement de cette expérience on peut déduire la loi (1) de Biot et Savart.

Les mêmes savants ont étudié l'action d'un courant angulaire indéfini APB sur un aimant placé aux divers points de la bissectrice PM de l'angle APB (fig. 63). La force f en un point M quelconque satisfait à la formule :

$$f = a \frac{i}{r} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (2)$$

Laplace a remarqué que l'on retrouve théoriquement les résultats donnés par Biot et Savart et exprimés par les formules (1) et (2), en adoptant la formule élémentaire :

$$f = k'' \frac{ds \sin \alpha}{r^2} \quad (3)$$

où ds désigne la longueur d'un élément infiniment petit du courant, r sa distance au point M (différente de la distance $PM = r$ considérée dans les formules 1 et 2) α l'angle que fait l'élément ds avec le rayon r , k'' une constante pouvant varier d'un milieu à un autre, f la force magnétique en M sous l'action de l'élément ds . La vérification de cette proposition est facile à faire ; il ne s'agit que d'une intégration du second membre de (3) le long du courant APB. Toutefois les cas particuliers étudiés par Biot et Savart ne peuvent servir à démontrer la généralité de la formule de Laplace. Celle-ci a été adoptée, quoique non démontrée rigoureusement, parce que les conséquences qu'on en a déduites dans tous les cas pratiques ont été vérifiées par l'expérience.

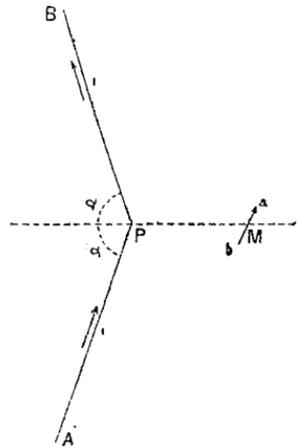


Fig. 63.

On donne quelquefois de la loi élémentaire (3) de Laplace des démonstrations qui ne présentent aucune rigueur. Il ne semble pas d'ailleurs qu'il y ait lieu de chercher une véritable loi élémentaire relative à l'action d'un courant sur un aimant, c'est-à-dire une loi représentant une véritable action de chaque élément isolé

ds sur l'aimant. On ne peut en effet, sauf le cas particulier étudié au § 79, avoir un courant qui ne soit pas fermé, ni faire abstraction du reste d'un circuit pour étudier l'action d'un élément. De même, un corps élastique étant en équilibre sous l'action de forces diverses appliquées à sa surface, et chaque élément de son volume subissant une compression θ , il n'y aurait pas lieu de chercher quelle est la part de cette compression qui revient à chacune des forces élémentaires appliquées à la surface. Le problème ainsi posé serait susceptible d'une infinité de solutions différentes au point de vue de l'effet élémentaire, mais équivalentes au point de vue de l'effet résultant. Ces considérations s'appliquent également, en électrodynamique, à la loi d'Ampère, comme on le verra plus loin.

La loi de Laplace, qui a conduit à des conséquences toujours vérifiées, peut donc être adoptée d'une manière générale, quoiqu'elle ne puisse être considérée comme exprimant la loi véritable de l'action d'un élément de courant sur un aimant. On peut d'ailleurs étudier la question au point de vue inverse et chercher l'action d'un aimant sur un élément de courant, car on peut isoler cet élément du reste du circuit pour étudier l'action du champ magnétique sur lui. Or, cette étude conduit rigoureusement, malgré les difficultés d'expérience, à la même loi de Laplace, qui est ainsi une véritable loi élémentaire.

140. Action d'un aimant sur un courant. — Ampère et d'autres savants ont démontré expérimentalement que :

1° L'action d'un pôle d'aimant sur un élément de courant est une force appliquée à l'élément (*Liouville*) et qui lui est normale;

2° Cette force change de sens avec le sens du courant et le signe du pôle ;

3° L'action sur un élément ds est la résultante des actions sur les composantes dx , dy , dz de l'élément ds (principe des courants sinueux).

Enfin cette action est proportionnelle à l'intensité i de courant, à la longueur ds de l'élément, à la quantité de magnétisme q concentrée au pôle, et elle doit évidemment être symétrique par rapport au plan de l'élément ds et du pôle (plan directeur d'Am-

père). On déduit de ces principes que la force exercée sur l'élément est normale au plan directeur et de la forme $qi ds \sin \alpha F(r)$.

En effet, en vertu du principe des courants sinueux, l'action d'un pôle q sur un élément $ab = ds$ (fig. 64) est la résultante des actions de q sur les projections $a'b'$ et $a''b''$ de l'élément ds suivant le rayon r et dans le plan perpendiculaire à r . Examinons ces deux actions :

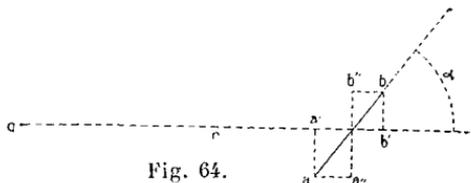


Fig. 64.

1° Sur $a'b'$ l'action du pôle q étant une force appliquée normalement à cet élément et ayant, par raison de symétrie, une direction indifférente dans le plan normal à $a'b'$, sa valeur est par là même nulle.

2° Sur $a''b''$, la force étant normale à cet élément peut se décomposer en ses projections φq et $f q$ suivant le rayon r et suivant la perpendiculaire au plan $q a'' b''$. La composante φq est nulle, puisque d'une part lorsque $a''b''$ tourne autour du rayon, $q \varphi$ doit tourner aussi, ce qui ne change en rien sa position; et que, d'autre part, lorsque $a''b''$ a tourné de 180, le courant i ayant ainsi changé de sens, la force devrait avoir changé de sens également.

En résumé, l'action ds se réduit à une force $f q$ normale au plan directeur $q ab$, et proportionnelle à q , à i , et à $a''b'' = ds \sin \alpha$. Elle est donc bien de la forme :

$$f q = qi ds \sin \alpha F(r)$$

la fonction F ne dépendant plus que de r .

Pour déterminer cette fonction, calculons l'action magnétique exercée sur un courant i , circulant dans un contour circulaire de rayon r , par un pôle q placé en son centre. Pour chaque élément ds , on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et la force $qi ds F(r)$ a une direction constante qui est celle de l'axe du cercle. Les forces exercées sur les divers éléments ds ont donc une résultante unique passant par le centre et d'intensité égale à $qi 2 \pi r F(r)$, puisque la somme $\int ds$ des longueurs ds est égale à $2 \pi r$. Cette résultante est égale et de sens contraire à la réaction du courant sur le pôle. Comme elle est

proportionnelle à $r F(r)$ et que l'on sait, par l'expérience, qu'elle est en raison inverse du rayon r (boussole des tangentes), il en résulte que $F(r)$ est en raison inverse du carré de la distance r . La loi élémentaire (3) de Laplace est ainsi démontrée.

On arriverait au même résultat, sans admettre le principe des courants sinueux, en appliquant la loi de Biot et Savart à l'action d'un pôle magnétique sur un courant angulaire APB (fig. 63) et en s'appuyant simplement sur ce fait d'expérience que l'action exercée sur le courant est normale à celui-ci.

141. Action d'un champ magnétique quelconque sur un courant.

— Désignons par φ la force mécanique à laquelle est soumise un élément $MM' = ds$ de courant i sous l'action d'un pôle q (fig. 65). On a, d'après la loi de Laplace :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= k'' q \frac{i ds \sin \alpha}{r^2} \\ &= \frac{k''}{k'} i F ds \sin \alpha \\ &= \frac{k''}{k'} i \times \text{aire (MM'FF')} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

F désignant la force magnétique exercée au point M par le pôle q , et $(MM'FF')$ le parallélogramme construit sur ds et F comme côtés. L'aire de ce parallélogramme peut encore être remplacée par le moment \overline{MF} de F par rapport au point M' . La force φ est proportionnelle au moment \overline{MF} et dirigée, comme lui, perpendiculairement au plan du parallélogramme.

Si le champ magnétique est dû à un nombre quelconque de pôles q_1, q_2, \dots la force mécanique φ sur l'élément MM' sera la résultante des forces $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ exercées par chacun de ces pôles ; elle sera donc égale, en grandeur et en direction, au produit du coefficient $\frac{k''}{k'} i$ par la résultante des moments correspondants $\overline{MF_1}, \overline{MF_2}, \dots$ ou, ce qui revient au même, par le moment \overline{MF} de la résultante F des forces magnétiques F_1, F_2, \dots . La formule (4) est par suite applicable dans le cas d'un champ magnétique quelconque, F désignant l'intensité de ce champ au point M .

142. Potentiel magnétique d'un courant. — Si un circuit CC, traversé par un courant i en présence d'un pôle q (fig. 65) s'éloigne de sa position actuelle à l'infini, ou si le pôle q lui-même s'éloigne à l'infini, les forces magnétiques qui s'exercent pendant ce déplacement produisent un travail que l'on peut représenter par $q V$, et qui est indépendant du chemin suivi (sauf restriction à voir plus loin). V est dit le potentiel magnétique au point q sous l'action du courant dans sa position CC

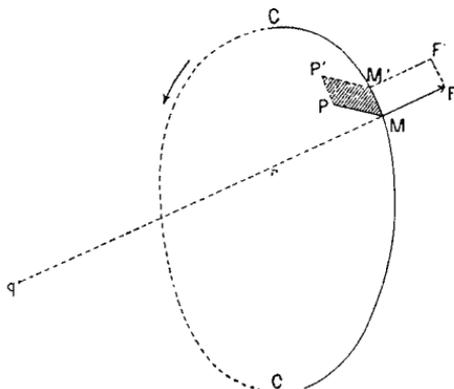


Fig. 65.

Lorsqu'un élément $MM' = ds$ subit un déplacement $MP = \delta$ infiniment petit et se transporte en PP' , le travail effectué est égal au produit de la force mécanique :

$$\varphi = \frac{k''}{k'} i \times \text{aire (MM'FF')}$$

qui s'exerce sur l'élément ds , par la projection de $MP = \delta$ sur cette force φ , c'est-à-dire sur la perpendiculaire au plan directeur $M'MF$.

Ce produit est égal au volume du parallélépipède construit sur le parallélogramme $MM'FF'$ comme base et sur le côté MP , multiplié par le facteur $\frac{k''}{k'} i$. On peut encore l'exprimer comme le produit de $\frac{k''}{k'} i$ par le volume du même parallélépipède construit sur le parallélogramme $MM'PP'$ comme base et sur le côté MF . Sous cette dernière forme le volume en question, étant égal à l'aire $MM'PP'$ décrite par l'élément ds , multipliée par la projection de la force magnétique F sur la normale à cette aire, représente le flux de force magnétique du champ à travers l'aire $MM'PP'$ ou, par abréviation, le flux de force coupé par l'élément mobile ds . Le travail produit par le déplacement est donc égal à ce flux de force multiplié par le facteur $\frac{k''}{k'} i$

Le travail produit par le déplacement du circuit CC entier est

égal au flux de force total coupé par lui pendant son déplacement, au facteur $\frac{k''}{k'} i$ près. Ce flux coupé constitue la variation du flux total de force à travers le contour CC lorsque celui-ci se déplace. Sur la figure 65, le champ magnétique est dû à un pôle q ; celui-ci étant dans le plan de la figure, et la partie pointillée de CC étant en arrière du plan, on voit, en appliquant la règle d'Ampère, que le travail magnétique est positif lorsque le flux \mathcal{F} entrant par la face gauche ou positive du courant va en décroissant, ou lorsque le flux \mathcal{F} considéré comme entrant par la face droite ou négative va en croissant. La valeur du travail magnétique correspondant à un accroissement $d\mathcal{F}$ est, par conséquent, égale à $\frac{k''}{k'} i d\mathcal{F}$. Le travail total $\int \frac{k''}{k'} i d\mathcal{F}$ lorsque le circuit s'éloigne à l'infini et que la valeur du flux passe de \mathcal{F} à zéro, a pour expression :

$$W = - \frac{k''}{k'} i \mathcal{F} \quad (5)$$

Dans le cas d'un pôle q , en vertu du théorème de Green (§ 22), on a, pour l'expression du flux de force \mathcal{F} à travers un feuillet quelconque limité au contour CC :

$$\mathcal{F} = - k' q \omega$$

ω étant l'angle solide sous lequel on voit du point q la face positive du feuillet (§ 122), que nous supposons coïncider avec la face positive du courant. On peut donc écrire :

$$W = k'' i q \omega = qV$$

d'où :

$$V = \frac{k''}{k'} i \omega \quad (6)$$

V représentant le potentiel magnétique en q sous l'action du courant. D'après (6), toute surface équipotentielle du champ magnétique créé par le courant dans un milieu homogène et isotrope est le lieu des points d'où l'on voit le contour du courant sous un angle constant ω . Il en résulte que ce contour est une ligne d'intersection commune aux surfaces équipotentielles et, par conséquent que les tubes de force, allant dans le sens des potentiels

décroissants, doivent tourner indéfiniment autour de cette ligne. Lorsque le circuit est plan, les tubes de force, par raison de symétrie, sont fermés sur eux-mêmes; mais en général ils ne sont point fermés.

Si l'on compare la formule (6) ci-dessus avec celle du potentiel dû à un feuillet magnétique (§ 122), on voit que ces formules deviennent identiques si l'on pose :

$$\Phi = \frac{k''}{k'} i \quad (7)$$

c'est-à-dire que le courant produit un champ magnétique identique à celui que développerait un feuillet de puissance $\Phi = \frac{k''}{k'} i$ limité au même contour CC; ou plutôt que le courant équivaut à une surface limitée au contour CC et sur laquelle existerait une variation brusque de potentiel (force magnétomotrice) égale à :

$$E (= 4\pi k' \Phi) = 4\pi k'' i \quad (7)$$

Cette dernière propriété du courant, qui dépend du coefficient k'' seul, est plus générale que celle exprimée par la formule (7), comme on le verra ci-après.

Ajoutons d'ailleurs que l'assimilation du courant à un feuillet magnétique comporte une restriction, le feuillet constituant un obstacle matériel que ne peuvent traverser les aimants, tandis que rien n'empêche un aimant ou tout autre corps de traverser la surface fictive du courant et de décrire un chemin fermé enlaçant le contour CC. Le travail magnétique développé, pendant qu'un pôle q décrit un tel chemin embrassant le courant, est égal à $Eg = 4\pi k'' i q$; et si le pôle décrit le même chemin n fois dans le même sens, le travail développé est : $4\pi k'' n q i = n E q$. Il est vrai qu'un pôle magnétique ne saurait exister isolément et que, pour réaliser l'expérience précédente, on doit considérer un aimant flexible, dont un pôle $-q$ resterait fixe, tandis que l'autre pôle $+q$ tournerait n fois autour du courant, l'aimant s'enroulant autant de fois autour du même circuit. Quoi qu'il en soit, on voit que le potentiel (ou travail magnétique) V en un point peut prendre l'une quelconque des valeurs $V, V + 4\pi k'' i, \dots, V + n \cdot 4\pi k'' i, \dots$

suivant le chemin suivi pour arriver en ce point. Si l'on suit indéfiniment un tube de force, ce tube tournant autour du courant, on coupera un nombre indéfini de fois une même surface équipotentielle V en y passant successivement par les potentiels $V, V + 4 \pi k'' i, V + 8 \pi k'' i, \dots$

La quantité totale de magnétisme d'un aimant quelconque étant nulle, le travail développé pendant qu'un aimant rigide décrit n fois un chemin fermé embrassant le courant est égal à : $n E \Sigma q = 0$. Toutefois si, à chaque demi-révolution de l'aimant autour du courant, on renverse le sens de celui-ci, ou si on coupe le circuit de manière à livrer passage à l'aimant, on peut arriver à produire un travail indéfiniment croissant par le mouvement continu de l'aimant en présence du courant ou du courant en présence de l'aimant. C'est ce que l'on réalise dans les machines magnétoélectriques.

143. **Aimantation par les courants.** — Si le champ magnétique d'un courant est entièrement semblable à celui d'un aimant, il doit produire l'aimantation du fer doux et des autres corps magnétiques et donner lieu à des phénomènes d'attraction et de répulsion semblables à ceux qui ont été étudiés au § 115.

On sait depuis longtemps en effet (découverte d'Arago) que le fer doux s'aimante sous l'action d'un courant; il en est de même du nickel, du cobalt, de l'acier et de tous les corps susceptibles de s'aimanter sous l'action des aimants. Le pouvoir inducteur magnétique d'un corps paraît être le même dans les deux modes d'aimantation, c'est-à-dire que ce corps s'aimante de la même manière dans un champ magnétique d'intensité déterminée, que ce champ soit créé par un courant ou par l'aimant (feuille) équivalent.

D'autre part, dans le champ magnétique d'un courant, le fer doux et les corps paramagnétiques tendent à se déplacer dans le sens où la force magnétique va en croissant. Les corps diamagnétiques subissent au contraire une poussée dans le sens des forces décroissantes. Dans le cas d'un courant rectiligne (expérience de Biot et Savart, par exemple), la force magnétique, qui est en raison inverse de la distance au conducteur, va en croissant lorsqu'on s'approche de celui-ci. Il en résulte que les corps légers magnéti-

ques sont attirés par le courant, tandis que les corps diamagnétiques sont repoussés; la force attractive ou répulsive doit être en raison inverse du cube de la distance au conducteur. Si l'air contient des poussières, celles-ci viendront s'appliquer sur le conducteur ou au contraire s'en éloigneront suivant leur nature; mais elles ne pourront se maintenir dans l'espace avoisinant. C'est ainsi que l'on expliquerait un fait curieux constaté dans certaines installations industrielles et consistant en une accumulation de poussières et un noircissement rapide des conducteurs électriques et des parois voisines sous l'action évidente du courant ¹.

L'identité de propriétés entre le champ magnétique d'un courant et celui d'un aimant étant admise, pour calculer l'aimantation induite par un courant dans un corps quelconque, on n'a qu'à se reporter à ce qui a été dit au § 114.

La *couche magnétique* induite sur un élément σ de la surface d'un corps A plongé dans le milieu A_1 est égale à $-q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$, q étant le flux d'induction à travers le tube de force qui pénètre de A_1 dans A par l'élément σ , et μ' désignant le pouvoir inducteur magnétique du corps A rapporté à celui du milieu A_1 .

144. Nature du coefficient k' . — On sait que la distribution du potentiel et des lignes de force est exactement la même soit dans le milieu A_1 , soit à l'intérieur de A : 1° lorsque le volume A contient la substance de pouvoir inducteur μ' , aucune aimantation n'existant à sa surface; 2° lorsqu'on suppose le volume A rempli de la même substance (de l'air, par exemple) que le milieu A_1 , sa surface étant recouverte d'une couche magnétique $-q \left(1 - \frac{1}{\mu'}\right)$ sur chaque élément σ . La force magnétique en chaque point étant la même dans les deux cas, le travail produit par le déplacement d'un pôle q le long d'un chemin déterminé sera aussi le même.

Appliquons ceci au cas d'un champ produit par un courant i , et dans lequel se trouvent des corps de natures diverses : air, eau, fer, etc. Si un pôle q est supposé décrire un chemin fermé

¹ *Annales télégraphiques*, 1888, p. 474.

quelconque, le travail magnétique correspondant W sera le même que si tout le champ était rempli d'air, à la condition que les surfaces de séparation des divers corps soient recouvertes de couches convenables de magnétisme. W sera donc égal à la somme des travaux dus au déplacement de q dans l'air en présence du courant i et de ces couches magnétiques fictives. Le pôle q décrivant un chemin fermé, le travail dû aux couches fictives est nul. W est donc simplement égal au travail qui serait produit par le déplacement du pôle q en présence du courant seul, le milieu ne contenant que de l'air ; c'est-à-dire que W est égal à zéro si le chemin fermé n'embrasse pas le courant, et à $4 \pi k'' q i$ si le chemin fermé embrasse une fois le courant.

Le coefficient k'' ne dépend pas, comme on le voit, de la nature des corps qui existent dans le champ ; il est toujours le même que dans le cas de l'air. D'autre part, il est indépendant de la nature du conducteur parcouru par le courant i , car les effets du courant i sont exactement les mêmes en tout point du milieu, que le conducteur soit en fer, en cuivre ou en toute autre substance. Ce coefficient peut donc être considéré comme une constante purement numérique, que nous prendrons désormais égale à l'unité.

D'après ce qui précède, *quelles que soient la nature et l'hétérogénéité du milieu*, le champ magnétique d'un courant i est identique à celui d'un feuillet magnétique limité au même contour et sur lequel existerait une force magnétomotrice ou variation brusque de potentiel égale à $4 \pi i = E$. Si le milieu est homogène, le feuillet équivalent peut être défini par sa puissance $\frac{i}{k'}$, qui est constante en tous les points de sa surface. Mais lorsque, le milieu étant hétérogène, k' varie d'un point à un autre, il en est de même de la puissance, qui ne peut plus dès lors servir à définir le feuillet.

Le courant i peut encore être remplacé par l'ensemble de plusieurs feuillets limités au même contour et sur lesquels existeraient respectivement des forces magnétomotrices E_1, E_2, \dots dont la somme serait égale à $E = 4 \pi i$. La distribution du potentiel aux divers points du champ serait modifiée ; mais la force magnétique en un point quelconque ne serait pas altérée. De même dans un

circuit électrique la force électromotrice totale E peut être répartie sur diverses sections du conducteur sans que l'intensité du courant aux divers points soit altérée.

L'analogie entre les problèmes de magnétisme et ceux d'électrocinétique, déjà signalée aux § 117 et 122, est utilisée quelquefois, à cause de sa commodité, pour le calcul du flux d'induction magnétique à travers le contour d'un courant i ou du feuillet équivalent de force magnétomotrice E . Pour un feuillet électrique, de force électromotrice E , coïncidant avec le feuillet magnétique, l'intensité totale du courant serait $\frac{E}{R}$, R désignant la résistance électrique du milieu ambiant. Pour le feuillet magnétique, le flux total d'induction sera $\frac{E}{4\pi R} = \frac{i}{R}$, R désignant la quantité que l'on appelle quelquefois résistance magnétique du milieu et qui se calcule exactement comme la résistance électrique en remplaçant la conductibilité spécifique par le pouvoir inducteur magnétique. Dans le cas où le courant i parcourt une bobine contenant un noyau de fer doux fermé sur lui-même, on se contente le plus souvent de calculer la résistance magnétique de ce noyau, celle de l'air environnant étant beaucoup plus grande et n'affectant pas notablement les calculs (application aux machines dynamos et aux transformateurs employés pour l'éclairage électrique).

145. Solénoïdes. — Il est un cas qui mérite une étude spéciale ; c'est celui où le circuit parcouru par le courant affecte la forme d'un solénoïde, c'est-à-dire d'une hélice à spires serrées dont l'axe est droit ou courbe.

Considérons d'abord le cas d'un milieu homogène, de l'air par exemple. Un courant plan i , embrassant une surface S , équivaut à un feuillet plan de même étendue S et de puissance $\Phi = \frac{i}{k}$, mais d'épaisseur arbitraire. Si l'on prend cette épaisseur égale à ϵ , la densité magnétique sur chaque face du feuillet sera $\frac{\Phi}{\epsilon}$, et la charge magnétique $Q = \frac{\Phi}{\epsilon} S = \frac{Si}{k\epsilon}$.

Supposons maintenant que l'on ait une bobine ou solénoïde comprenant une couche unique de circuits plans semblables très rapprochés, et soit N le nombre de ces circuits par unité de

longueur. La distance de deux consécutifs d'entre eux étant $\frac{1}{N} = \epsilon$, remplaçons chacun d'eux par un feuillet d'épaisseur ϵ . La face positive de chaque feuillet coïncidant avec la face négative du suivant, et les faces superposées ayant évidemment un effet extérieur nul, l'effet total du solénoïde se réduit à celui de deux couches magnétiques $+Q$ et $-Q$ réparties respectivement sur ses deux bases d'une manière uniforme. La valeur de ces couches est :

$$Q = \frac{Si}{k\epsilon} = \frac{NSi}{k}$$

Le solénoïde en question équivaut donc à un aimant de même forme, dont le magnétisme consisterait en deux couches Q et $-Q$ réparties uniformément sur ses bases.

En pratique, le système des circuits plans parallèles est remplacé par une hélice à spires continues, dont l'effet est sensiblement le même. On rend les effets pour ainsi dire identiques en enroulant sur un solénoïde à hélice dextrorsum une autre hélice sinistrorsum. Plus généralement d'ailleurs on enroule sur une même bobine plusieurs couches de spires. La surface S n'est plus alors la même pour chaque spire. Le solénoïde est encore équivalent à un aimant de même forme, dont les bases seraient recouvertes de charges magnétiques provenant de la superposition des quantités $Q = \frac{NSi}{k}$ correspondant à chacune des couches.

Cette équivalence est facile à vérifier expérimentalement. La vérification a été faite notamment en remplaçant dans l'expérience de Gauss (§ 436) l'un des deux aimants, l'aimant mobile par exemple, par un solénoïde. On constate que la déviation angulaire de ce solénoïde est deux fois plus grande dans la deuxième position que dans la première, sauf les corrections habituelles.

Dans le cas où le solénoïde affecte la forme d'un anneau circulaire fermé sur lui-même, la force magnétique f due au courant est nulle en tout point extérieur. A l'intérieur, le long d'une circonférence de cercle de rayon r ayant même axe que l'anneau, la force f est, par raison de symétrie, tangentielle et égale en tous les points. Le travail produit par le déplacement d'un pôle q le long de cette circonférence est donc $q f \times 2\pi r$; d'autre part, il

doit être égal à $4 \pi q i$ multiplié par le nombre total n des spires de la bobine annulaire :

$$qf \ 2\pi r = 4\pi q i . n$$

d'où :

$$f = \frac{2ni}{r}$$

Le flux total d'induction à travers la section de la bobine est :

$$Q = \int \frac{f}{4\pi k'} dS = \int \frac{ni}{2\pi k' r} dS$$

dS désignant un élément de cette section situé à une distance r de l'axe, et l'intégrale étant étendue à toute la section.

Exemple : section circulaire de rayon R , dont le centre est à une distance a de l'axe :

$$Q = \frac{ni}{k'} \left(a - \sqrt{a^2 - R^2} \right)$$

La formule :

$$f = \frac{2ni}{r}$$

relative au cas de la bobine annulaire peut s'écrire :

$$f = 4\pi Ni$$

$N = \frac{n}{2\pi r}$ désignant le nombre des sections de spires rencontrées par le pôle q décrivant l'unité de longueur sur la circonférence de rayon r . Cette formule s'applique au cas limite où la bobine annulaire se transforme en bobine rectiligne indéfinie. Elle s'applique encore approximativement au cas d'une bobine rectiligne de longueur très grande par rapport aux dimensions transversales.

Lorsqu'une bobine contient un noyau de fer doux, les calculs précédents ne sont plus applicables, et la solution est beaucoup plus complexe. Toutefois, dans le cas particulier où le noyau serait fermé sur lui-même et affecterait exactement la forme d'une tube de force, le calcul de la force f ne serait nullement modifié ; le flux d'induction à travers la section du noyau serait simplement divisé par le coefficient k' relatif au fer doux, ou bien multiplié, dans le système électromagnétique, par le pouvoir inducteur magnétique μ' de ce métal.

146. Énergie du champ magnétique d'un courant. — Nous avons été conduits à considérer l'énergie d'un système magnétique comme répartie dans le volume entier du champ, et à la représenter par la formule (§ 110) :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k} f^2 du$$

f désignant la force magnétique en un point et du un élément de volume pris en ce point.

En poursuivant l'assimilation du champ d'un courant à celui d'un aimant, on sera donc amené à considérer la formule précédente comme représentant l'énergie potentielle du champ magnétique dû au courant ou, plus simplement, l'énergie potentielle du courant (en faisant abstraction de l'énergie, généralement négligeable, du champ électrostatique dû à la variation de potentiel le long du conducteur).

147. L'énergie relative d'un courant et d'un aimant est nulle. — Lorsque deux aimants se déplacent l'un par rapport à l'autre, les forces magnétiques en jeu développent un certain travail, qui correspond à une diminution équivalente de l'énergie potentielle du système. Mais lorsqu'un courant se déplace dans un champ magnétique, on ne saurait dire que le travail des forces électromagnétiques est emprunté intégralement à l'énergie potentielle, car il intervient dans ce cas une autre source d'énergie, celle qui donne naissance au courant, pile hydro ou thermo-électrique, etc. La relation entre le travail et l'énergie potentielle du champ est donc inconnue a priori.

Remarquons d'abord que si un pôle magnétique q décrit une courbe fermée autour d'un courant i , la variation d'énergie potentielle devrait être nulle puisque le pôle est revenu à son point de départ ; et cependant il y a un travail produit $4\pi iq$. Le travail des forces électromagnétiques n'entraîne donc point une variation de l'énergie potentielle. Toutefois, comme un pôle magnétique est une pure fiction et ne saurait être isolé, nous ne poursuivrons point ce raisonnement.

Nous prendrons, comme au paragraphe précédent, pour expres-

sion de l'énergie potentielle du champ magnétique la formule :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k'} f^2 du$$

Si un aimant A se trouve en présence du courant i , la force f en un point quelconque est la résultante de la force f_1 due au courant et de la force f_2 due à l'aimant. L'angle de f_1 et de f_2 étant α , on a :

$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 + 2f_1 f_2 \cos \alpha$$

d'où :

$$W = \int \frac{f_1^2}{8\pi k'} du + \int \frac{f_2^2}{8\pi k'} du + \int \frac{2f_1 f_2 \cos \alpha}{8\pi k'} du \quad (8)$$

Les deux premières intégrales du second membre représentent respectivement l'énergie potentielle due au courant seul et celle qui est due à l'aimant A seul. La troisième partie, savoir :

$$\int \frac{2f_1 f_2 \cos \alpha}{8\pi k'} du = W_r \quad (9)$$

représente l'énergie relative due à l'action réciproque du courant et de l'aimant; nous allons montrer qu'elle est nulle.

Considérons en effet, dans le champ magnétique développé par le courant seul, un tube de force embrassant une fois le courant et dont les sections initiale et terminale sont situées sur une même surface équipotentielle S. Soit ds sa section, supposée infiniment petite, et variable d'un point à un autre; dn la longueur d'une portion infiniment petite de ce tube, dont le volume du sera, par conséquent, égal à $ds dn$. La part dW_r de l'énergie relative W_r contenue dans le tube en question s'obtiendra en intégrant l'élément $\frac{2f_1 f_2 \cos \alpha}{8\pi k'} ds dn$ tout le long de ce tube. Or, le flux d'induction $\frac{f_1 ds}{4\pi k'} = dQ$ ayant même valeur à travers les différentes sections ds , cette intégrale peut s'écrire :

$$dW_r = \frac{f_1 ds}{4\pi k'} \int f_2 \cos \alpha dn = dQ \int f_2 \cos \alpha dn = (V_2 - V'_2) dQ \quad (10)$$

$f_2 \cos \alpha dn$ représentant la chute, le long de l'élément dn , du potentiel dû à l'aimant A; V_2 et V'_2 désignant les potentiels dus à cet aimant aux extrémités du tube (sur la surface S). On aura

donc pour l'ensemble des tubes de force semblables, c'est-à-dire pour le volume entier du champ :

$$W_r = \int_S (v_2 - v'_2) dQ = \int_S v_2 dQ - \int_S v'_2 dQ$$

l'intégrale étant étendue à la surface S, qui est limitée au contour du courant, et dont chaque élément sert de base initiale ou finale à l'un des tubes de force considérés. L'intégrale $\int_S v'_2 dQ$ étant identique à $\int_S v_2 dQ$, il en résulte :

$$W_r = 0$$

Il résulte de là que le travail des forces électromagnétiques n'est nullement emprunté à l'énergie potentielle du champ électromagnétique. Ce travail doit par conséquent être produit aux dépens des sources d'énergie chimique, thermoélectrique, etc., que contient le circuit. C'est là le point de départ de la théorie de l'induction électromagnétique, qui sera exposée plus loin et dont les nombreuses vérifications expérimentales apporteront une nouvelle preuve en faveur des idées développées ci-dessus, notamment de l'assimilation du champ magnétique d'un courant à celui d'un aimant.

148. Hypothèse d'Ampère sur le magnétisme. — L'identité des propriétés d'un courant et d'un aimant a suggéré à Ampère une hypothèse tendant à expliquer l'action d'un aimant ou d'un corps aimanté par l'existence de courants électriques circulant à l'intérieur de ce corps. L'aimantation apparente de chaque molécule serait due à un courant électrique la parcourant suivant un certain contour. A l'état ordinaire, les molécules étant orientées également dans tous les sens, le corps ne paraîtrait point aimanté. Mais lorsqu'on l'introduit dans un champ magnétique, la force magnétique tendrait à orienter dans sa direction les axes des diverses molécules, ce qui produirait l'aimantation apparente (comparer avec la théorie de Weber, § 129).

Comme, en vertu de la loi de Joule, un courant dégage une quantité de chaleur proportionnelle à la résistance du circuit qu'il produit, et que d'autre part l'aimantation permanente d'un corps ne donne point lieu à un dégagement de chaleur, on a dû

supposer que les courants électriques moléculaires d'Ampère parcourent des canaux sans résistance.

D'autres hypothèses ont dû être faites pour mettre la théorie du magnétisme d'Ampère d'accord avec les faits, notamment pour expliquer les propriétés des corps diamagnétiques. Nous ne les développerons point ici⁴.

149. Dimensions des grandeurs électriques et magnétiques. — Nous avons vu au § 144 que le coefficient k'' , que nous avons considéré comme pouvant dépendre de la nature du milieu, est en réalité une constante numérique, que l'on peut choisir arbitrairement égale à l'unité. La formule fondamentale d'électromagnétisme, relative à l'action d'un pôle magnétique q sur un élément ds de courant, s'écrira ainsi :

$$f = \frac{qi ds \sin \alpha}{r^2} \quad (11)$$

Cette formule permettra de calculer la force magnétique due au courant i en un point quelconque du champ, quelles que soient la nature et l'hétérogénéité du milieu, à la condition que l'on tienne compte des couches magnétiques fictives induites aux surfaces de séparation des divers corps (§ 143).

Rien n'indiquait, en électrostatique et en magnétisme, qu'un lien existât entre les quantités électriques et les quantités magnétiques; et l'on pouvait simultanément exprimer leurs dimensions, dans le système électrostatique pour les premières et dans le système électromagnétique pour les secondes. Mais, d'après la relation (11), le produit d'une quantité q de magnétisme par une intensité i de courant ayant les dimensions FL d'un travail, la fixation des dimensions des grandeurs électriques entraîne celle des grandeurs magnétiques, et réciproquement.

La formule (11) entraîne par là même une relation entre les dimensions des coefficients k et k' des formules fondamentales d'électrostatique et de magnétisme. Le produit $kk' = a^2$ de ces coefficients a , comme on l'a vu au § 5, les dimensions du carré d'une vitesse. En faisant arbitrairement de k un coefficient numérique (égal à

⁴ V. Maxwell, § 832-843.

l'unité dans le cas de l'air, ou plutôt du vide), k' devient le carré d'une vitesse; les dimensions qu'on en déduit pour les grandeurs électriques et magnétiques, d'après leurs définitions respectives, sont exprimées alors dans le système *électrostatique*. En faisant au contraire de k' un coefficient numérique et de k le carré d'une vitesse, on obtiendra les dimensions dans le système *électromagnétique*.

Le tableau suivant fait connaître les dimensions des principales grandeurs de ces deux systèmes arbitraires :

SYSTÈMES		
	électrostatique : $K = 1; K' = L^2 T^{-2}$	électromagnétique : $K = L^2 T^{-2}; K' = 1$
Quantité d'électricité	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
Potentiel électrique	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$
Capacité électrostatique	L	$L^{-1} T^2$
Intensité de courant	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Résistance électrique	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$
Résistance spécifique	T	$L^2 T^{-1}$
Quantité de magnétisme	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Potentiel magnétique	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Puissance d'un feuillet		$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Intensité d'aimantation	$L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$	$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Intensité d'un champ magnétique		$L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Moment magnétique	$L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
(Résistance) magnétique	$L T^{-2}$	L^{-1}

CHAPITRE II

ÉLECTRODYNAMIQUE

150. Action réciproque de deux courants. — Nous avons vu dans le chapitre précédent : d'une part qu'un courant i donne naissance, autour de lui, à un champ magnétique semblable à celui d'un aimant, et développe en un point quelconque une force magnétique $f = Gi$ proportionnelle à l'intensité i (G est une quantité purement géométrique ayant pour dimensions L^{-1} l'inverse d'une longueur); — d'autre part qu'un champ magnétique exerce une action mécanique sur un circuit traversé par un courant i' , la force mécanique qui s'exerce sur un élément ds' (faisant l'angle α avec la force magnétique f) étant normale au plan directeur (f, ds') et égale à $\frac{f}{k} i' ds' \sin \alpha = dF$. On en conclut que le courant i doit exercer sur le courant i' une action mécanique, et que la grandeur de la force dF exercée sur un élément ds' du circuit i' a pour expression :

$$dF = \frac{f}{k} i' ds' \sin \alpha = \frac{i i' ds'}{k} G \sin \alpha \quad (1)$$

Cette formule est encore applicable quand l'élément ds' appartient au courant i lui-même; c'est-à-dire qu'un courant agit sur ses propres éléments. On dit encore que deux parties d'un même circuit exercent une action l'une sur l'autre. Le produit $i i'$ doit être alors remplacé par i^2 .

Nous ne rappellerons pas ici les expériences variées au moyen desquelles on vérifie ces déductions de la théorie, prévues et complètement étudiées par Ampère. Nous allons seulement passer en revue deux cas accessibles à l'expérience : 1° action réciproque de deux courants parallèles, 2° action de deux solénoïdes.

151. Courants parallèles. — Si le circuit AB traversé par le courant i est rectiligne et pratiquement indéfini (fig. 66), la force magnétique qu'il développe en un point A' situé à une distance $AA' = r$ est égale, d'après la loi de Biot et Savart, à $f = \frac{2i}{r}$; elle est normale au plan $A'AB$. Si un élément de circuit $A'B'$ de longueur l , parallèle à AB et traversé par un courant i' de même sens que i , est placé en A' , il subira de la part de f une action mécanique dirigée dans le sens $A'A$, et égale, d'après (1), à :

$$F = \frac{i'}{k} \int G \, ds' \sin \alpha$$

Comme on a : $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $G = \frac{2}{r}$ et $\int ds = l$, il vient :

$$F = \frac{2i'l}{kr} \quad (2)$$

Ainsi le courant i' subit une attraction F de la part du courant i parallèle et de même sens. Si les courants étaient de sens contraires, l'attraction se changerait en répulsion (lois d'Ampère). Si l'élément l du circuit i' est mobile autour du point B' par où lui arrive le courant, il tournera autour de ce point, de droite à gauche, par le jeu des actions électrodynamiques. L'élément l , dans sa rotation, prenant successivement diverses orientations $b'a'$, $b'a''$, $b'a'''$, ..., on voit que dans chacune de celles-ci l'action électrodynamique agit sur l'élément dans le même sens, c'est-à-dire le fait tourner de droite à gauche. En effet, pour un observateur placé le long du courant, les pieds en b' , et regardant dans la direction de f , la poussée exercée sur l'élément l a lieu vers sa gauche

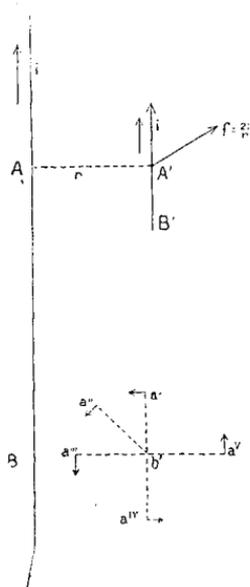


Fig. 66.

et, par conséquent, toujours dans le même sens. La rotation sera donc continue si la disposition expérimentale s'y prête. Pour réaliser l'expérience, il suffit de recourber les extrémités du conducteur l à angle droit, l'une de ces extrémités b' prolongeant dans une coupelle de mercure par où arrive le courant, l'autre

extrémité plongeant dans une rigole circulaire de mercure par où le courant s'en va.

Dans le système électromagnétique, on a $k'=1$, et la formule (2) devient :

$$F = \frac{2ii'l}{r} \quad (2)$$

Pour un élément de longueur l égale à la distance r , F est égale à $2ii'$. En supposant $i=i'=1$ C. G. S., on trouve que la force F a pour valeur numérique 2 C. G. S., c'est-à-dire 2 dynes ou sensiblement 2 milligrammes. Si les intensités i et i' ne sont que d'un ampère = 0,1 C. G. S., l'attraction F n'est que 0,02 dyne.

152. Action réciproque de deux solénoïdes. — On a vu (§ 145) que dans un milieu homogène un solénoïde parcouru par un courant i et comprenant N spires semblables, de section S , par unité de longueur équivaut, soit au point de vue du champ magnétique auquel il donne naissance, soit au point de vue des actions électromagnétiques qu'il subit, à un aimant de même forme, dont les bases seraient recouvertes de charges magnétiques $+Q$ et $-Q$, telles que :

$$Q = \frac{NSi}{k'}$$

Il en résulte que deux solénoïdes (N, S, i) et (N', S', i') doivent agir l'un sur l'autre comme deux aimants dont le magnétisme serait localisé sur leurs bases. On vérifie d'une manière simple ces déductions théoriques en donnant aux solénoïdes la disposition des aimants de Gauss. On constate que la déviation angulaire du solénoïde mobile, sous l'action de l'autre, est deux fois plus grande (sauf corrections) dans la deuxième position de Gauss que dans la première ; ce qui confirme de nouveau l'équivalence des courants et des aimants. Dans le cas où les solénoïdes contiennent des noyaux de fer, les calculs sont beaucoup plus complexes ; mais l'expérience paraît toujours confirmer les prévisions de la théorie.

153. Action d'un courant fermé sur un élément de courant. — La détermination du coefficient G dans la formule (1), nécessaire pour

le calcul de l'action d'un courant fermé i sur un élément ds' d'un courant i' , présente en général de grandes difficultés analytiques. Nous allons indiquer la solution sous forme d'intégrale.

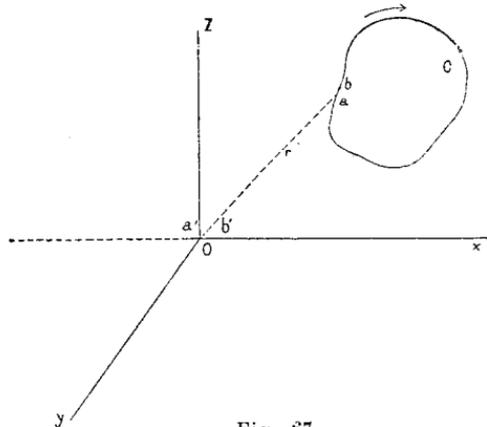


Fig. 67.

Supposons l'élément $a'b' = ds'$ du courant i' placé à l'origine des coordonnées dans le sens Ox , et soit $ab = ds$ un élément du circuit C parcouru par le courant i dans le sens de la flèche

(fig. 67). On sait que la force magnétique $f = Gi$ développée en O par le courant i est la même que si chaque élément tel que ab produisait une force df donnée par la formule de Laplace :

$$df = ids \frac{\sin \alpha}{r^2}$$

Sil'on désigne par A l'aire du triangle ayant pour sommets O , a , et b , on a : $2 A = rds \sin \alpha$, d'où :

$$df = \frac{2 Ai}{r^3}$$

La force df étant normale au plan du triangle Oab et proportionnelle à son aire A , les projections df_x , df_y , df_z de la force sur les trois axes sont proportionnelles aux projections A_x , A_y , A_z de l'aire A sur les trois plans des yz , des zx , et des xy :

$$\frac{df_x}{A_x} = \frac{df_y}{A_y} = \frac{df_z}{A_z} = \frac{df}{A} = \frac{2i}{r^3}$$

Or la projection du triangle Oab sur le plan des yz , par exemple, est un triangle dont les sommets sont l'origine et les points (y, z) et $(y + dy, z + dz)$; le double de son aire, c'est-à-dire $2 A_x$, est égal, au signe près, à $(zdy - ydz)$. On a des expressions analogues pour A_y et A_z . Il en résulte pour les valeurs de df_x , df_y et df_z , en tenant compte du sens de la force df , qui fait connaître le signe à attribuer à ses projections :

$$\frac{df_x}{zdy - ydz} = \frac{df_y}{xdz - zdx} = \frac{df_z}{ydx - xdy} = \frac{i}{r^3}$$

La valeur de la force élémentaire df et celle de ses projections sur les axes sont purement hypothétiques (remarque du § 139). Mais la force réelle f due au circuit fermé C est égale à la résultante des valeurs de df pour les divers éléments ds . On aura donc pour les projections de cette force résultante :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = i \int_c \frac{zdy - ydz}{r^3} \\ f_y = i \int_c \frac{x dz - z dx}{r^3} = i \int_c \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right) \\ f_z = i \int_c \frac{y dx - x dy}{r^3} = -i \int_c \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right. \quad (3)$$

Cette force *magnétique* f produit sur l'élément ds' du courant i' placé à l'origine, une force dF *mécanique* perpendiculaire au plan (f, ds') et égale au produit de $\frac{i' i}{k}$ par l'aire du parallélogramme construit sur f et ds' comme côtés. On voit donc que les projections de dF sur les trois axes seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_x = 0 \\ dF_y = \frac{i'}{k} f_z ds' = -\frac{i' i}{k} \int_c \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right) \\ dF_z = -\frac{i'}{k} f_y ds' = -\frac{i' i}{k} \int_c \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right) \end{array} \right. \quad (4)$$

Telles sont les expressions analytiques des projections, sur trois axes rectangulaires, de la force mécanique dF exercée par un courant fermé i sur un élément de courant $i' ds'$, dans le cas où celui-ci est placé à l'origine O et dirigé suivant Ox. En suivant la même marche, on pourrait étendre ces formules au cas où l'élément ds' occupe une position quelconque. Le calcul serait facile, mais il offrirait ici peu d'intérêt.

154. Action mutuelle de deux éléments du courant. — La remarque

faite au § 139 au sujet de l'action d'un élément de courant sur un pôle aimant s'applique à la recherche de l'action d'un élément de courant ids sur un autre élément $i'ds'$. Cette action est hypothétique; elle n'a pas de sens au point de vue physique. Au point de vue mathématique, elle est indéterminée et est assujettie seulement à la condition que la résultante des actions élémentaires dues aux divers éléments du circuit fermé C satisfasse aux relations (4). Si on désigne par d^2F_x, d^2F_y, d^2F_z ses trois composantes et que l'on pose :

$$\left\{ \begin{aligned} d^2F_x &= \frac{i' ds'}{k'} dX \\ d^2F_y &= \frac{i' ds'}{k'} \left[dY - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right) \right] \\ d^2F_z &= \frac{i' ds'}{k'} \left[dZ - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right) \right] \end{aligned} \right. \quad (5)$$

dX, dY et dZ peuvent être choisis arbitrairement pourvu que l'intégration de d^2F_x, d^2F_y et d^2F_z le long du circuit fermé C reproduise identiquement les expressions dF_x, dF_y, dF_z données par les formules (4). Il faut donc et il suffit que dX, dY et dZ soient des différentielles totales exactes, de telle sorte que $\int dX, \int dY, \int dZ$ le long du contour fermé C soient nulles. On satisferait à cette condition en supposant : $X=Y=Z=0$ (hypothèse émise par Gauss). Les relations (5) donneraient alors une expression de l'action élémentaire d^2F ; et l'on verrait que l'action d^2F de l'élément ab sur l'élément $a'b'$ est normale à celui-ci et située dans le plan Oab (r, ds), tandis que l'action d^2F , de $a'b'$ sur ab serait normale à ab et située dans le plan (r, ds'). Mais on peut faire une infinité d'autres hypothèses, dont les principales sont celle de M. Grassmann ¹ et surtout celle d'Ampère.

Ampère s'appuie sur le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, qu'il interprète ainsi : L'action d^2F exercée par un élément ids de courant sur un autre élément $i'ds'$ est égale et directement opposée à l'action d^2F' qu'exerce celui-ci sur le premier; il en résulte que d^2F et d^2F' sont forcément dirigées suivant le rayon vecteur r qui joint les deux éléments. Le rayon r ayant

¹ Maxwell, § 526.

pour projection sur les trois axes les coordonnées x, y, z de l'élément ds , on doit donc avoir

$$\frac{d^2F_x}{x} = \frac{d^2F_y}{y} = \frac{d^2F_z}{z} = \frac{d^2F}{r}$$

Ces conditions, appliquées aux équations (5), donnent :

$$dY = \frac{y}{x} dX + \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$dZ = \frac{z}{x} dX + \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right)$$

Pour que dX , dY et dZ soient des différentielles exactes, dans ce cas, il faut et il suffit que l'on ait :

$$dX = d\left(\frac{x^2}{r^3}\right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} d^2F &= \frac{r}{x} d^2F_x = \frac{i' ds' r}{k' x} d\left(\frac{x^2}{r^3}\right) \\ &= \frac{i' ds'}{k' r^2} \left(2 dx - 3 \frac{x}{r} dr\right) \end{aligned}$$

Mais si l'on désigne par θ et θ' les angles que font les éléments ds et ds' avec le rayon vecteur r , par ε l'angle de ces mêmes éléments entre eux, on a (fig. 67) :

$$dx = ds \cos \varepsilon$$

$$\frac{x}{r} = \cos \theta'$$

$$dr = ds \cos \theta$$

d'où finalement :

$$d^2F = \frac{i' ds ds'}{k' r^2} (2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta \cos \theta') \quad (6)$$

Telle est la formule, symétrique par rapport aux éléments ds et ds' (comme cela devait être), à laquelle conduit l'hypothèse d'Ampère. Dans le système électromagnétique, on fait $k' = 1$.

155. Système d'unités électrodynamique. — La marche précédente n'est point celle qui a été suivie par Ampère ; elle est plus rapide et se rattache directement aux lois déjà connues de l'électroma-

gnétisme. La méthode indiquée par l'illustre physicien nous paraît n'avoir plus guère qu'un intérêt historique ; c'est pourquoi nous n'avons pas cru devoir l'exposer, malgré l'importance capitale qu'elle a eue autrefois ¹. La formule, déduite des lois de l'électromagnétisme, contient le coefficient k' de la formule fondamentale du magnétisme. En abordant directement l'étude des actions électrodynamiques, comme l'a fait Ampère, on arriverait à la formule :

$$d^2F = k'' \frac{i' ds ds'}{r^2} \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) \quad (7)$$

k'' étant un coefficient dépendant du milieu. On voit, par comparaison de (6) et de (7), que k'' est égal à $\frac{2}{k'}$:

$$k'' = \frac{2}{k'}$$

En faisant $k'' = 1$ dans la formule d'Ampère (ou $k' = 2$ en magnétisme) on obtient un système d'unités dit électrodynamique, qui diffère du système électromagnétique par les valeurs numériques, mais non par les dimensions des quantités. Ainsi, en désignant par i et i' les valeurs des intensités de deux courants dans le système électromagnétique, par j et j' leurs valeurs dans le système électrodynamique, on trouve par comparaison des formules (6) et (7), où l'on fait respectivement $k' = 1$ et $k'' = 1$:

$$jj' = 2 ii'$$

Si $i = i'$, $j = j'$, il vient :

$$j^2 = 2i^2$$

Les unités électromagnétique I et électrodynamique J d'intensité sont dans le rapport inverse de celui des valeurs numériques i et j . On a donc

$$I^2 = 2 J^2$$

ou :

$$I = J \sqrt{2}$$

Le système électrodynamique n'est plus usité.

¹ La méthode d'Ampère se trouve exposée dans les traités de Maxwell (§ 502 — 527), de Mascart et Joubert (§ 462 — 474), etc.

156. **Travail des forces électrodynamiques.** — Lorsqu'un pôle magnétique, ou plus généralement un aimant quelconque, se déplace en présence d'un courant i dans un milieu homogène, les forces électromagnétiques produisent un travail δT égal, au facteur $\frac{1}{k}$ près, au produit du courant i par l'accroissement $\delta \mathcal{C}$ du flux de force magnétique embrassé par le courant (§ 142) :

$$\delta T = \frac{i}{k} \delta \mathcal{C} \quad (8)$$

$$= 4\pi i \delta Q \quad (8')$$

Q représente le flux d'induction magnétique à travers le circuit. La formule (8') est plus générale que (8) et s'applique au cas où k' est variable, c'est-à-dire au cas d'un milieu hétérogène. Le travail des forces électromagnétiques a même expression lorsque c'est le courant qui se déplace en présence de l'aimant. Lorsque le circuit se déplace en se déformant, au travail $\frac{id \mathcal{C}}{k'}$ des forces exercées par l'aimant vient s'ajouter celui des forces que le courant lui-même exerce sur ses divers éléments; nous donnerons ci-après l'expression de ce dernier terme.

Si le courant i se déplace en présence d'un autre courant i' , le travail δT est le même que si le courant i' était remplacé par le feuillet magnétique équivalent. Les formules (8) et (8') subsistent donc. La force électromagnétique développée par le courant i' et, par conséquent, les flux de force et d'induction correspondants à travers le circuit i sont proportionnels à i' ; soit :

$$\frac{\mathcal{C}}{k'} = 4\pi Q = Mi'$$

(8) et (8') deviennent :

$$\delta T = ii' \delta M \quad (9)$$

Cette formule représente le travail des forces exercées par les deux courants l'un sur l'autre lorsque les circuits se déplacent et se déforment d'une manière quelconque.

Si \mathcal{C}' et Q' représentent les flux de force et d'induction à travers le circuit i' sous l'action du courant i , on doit également trouver, d'après les formules (8) et (8') :

$$\delta T = \frac{i'}{k'} \delta \mathcal{C}' = 4\pi i' \delta Q' \quad (10)$$

d'où, en comparant à l'expression (9) :

$$\frac{\mathcal{C}'}{k'} = 4\pi Q' = Mi$$

On voit que M est la valeur de $\frac{\mathcal{C}}{k}$ pour $i = 1$, ou bien celle de $\frac{\mathcal{C}'}{k'}$ pour $i = 1$; c'est-à-dire qu'il représente, au facteur $\frac{1}{k}$ près, le flux de force à travers l'un des circuits sous l'action d'un courant égal à l'unité traversant l'autre circuit. On a donné à M le nom de coefficient d'*induction mutuelle* des deux circuits.

Les formules (8) et (10) peuvent se remplacer par la suivante, qui est plus symétrique :

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2k'} (i\delta \mathcal{C} + i'\delta \mathcal{C}') = \frac{1}{2k'} \Sigma i\delta \mathcal{C} \\ &= 2\pi \Sigma i\delta Q \end{aligned}$$

Le signe Σ s'étendant aux deux circuits. Si au lieu de deux circuits on en a plusieurs en présence, le travail produit par des déplacements quelconques sous l'action des forces réciproques qu'ils exercent entre eux aura encore évidemment pour expression :

$$\delta T = \frac{1}{2k'} \Sigma i\delta \mathcal{C} = 2\pi \Sigma i\delta Q \quad (11)$$

\mathcal{C} et Q représentant les flux de force et d'induction à travers l'un des circuits i sous l'action des autres courants, et le signe Σ s'étendant à tous les circuits en jeu.

Nous avons considéré, dans ce qui précède, l'action réciproque de divers courants. Pour calculer l'action d'un courant i sur lui-même, on considère le circuit comme la juxtaposition de n circuits parcourus par des courants égaux à $\frac{i}{n}$; et l'on calcule la somme des actions réciproques exercées par ces courants $\frac{i}{n}$ les uns les autres lorsque n devient infiniment grand. Le travail δT , par exemple, produit par la déformation du circuit résultant, est exprimé par une formule semblable à (11) :

$$\delta T = \frac{1}{2k'} \Sigma \left(\frac{i}{n} \right) \delta \mathcal{C} = 2\pi \Sigma \frac{i}{n} \delta Q$$

Σ s'étendant à chacun des circuits $\left(\frac{i}{n}\right)$. Les flux $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ à travers ces divers circuits étant, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnels à i , sont de la forme $k'L_1i, k'L_2i, \dots, k'L_ni$. Soit :

$$k'Li = \frac{k'}{n} (L_1i + L_2i + \dots + L_ni)$$

le flux de force moyen à travers ces circuits. On pourra écrire :

$$\delta T = \frac{1}{2k'} \frac{i}{n} (\delta \mathcal{C}_1 + \delta \mathcal{C}_2 + \dots + \delta \mathcal{C}_n)$$

ou :

$$\delta T = \frac{1}{2} i^2 \delta L \quad (12)$$

Les formules (8), (9) et (12) donnent l'expression du travail des forces électromagnétiques, lorsqu'un courant i se déplace et se déforme sous l'action : 1° d'un aimant (ou d'un système magnétique extérieur quelconque), 2° d'un autre courant i' , 3° sous l'action propre du courant i . Dans les deux derniers cas, δT est proportionnel à la variation des coefficients M et L . Ce dernier L s'appelle le coefficient d'induction propre ou de self-induction du circuit i . En supposant $k'=1$ et $i=1$, le coefficient de self-induction n'est autre chose que le flux de force moyen que le courant émet à travers son propre circuit.

Si les trois actions précédentes interviennent simultanément, on aura :

$$\delta T = i \left(\frac{\delta \mathcal{C}}{k'} + i' \delta M + \frac{1}{2} i \delta L \right) \quad (13)$$

157. Dimensions des coefficients M et L . — Ces coefficients ont les dimensions d'une longueur divisée par le coefficient k' du milieu. Pour le démontrer, on a qu'à se reporter à la formule :

$$Mk' = \frac{\mathcal{C}}{i'}$$

et à remarquer que l'intensité de courant i' a les dimensions d'un potentiel magnétique (en vertu de l'équivalence d'un courant et d'un feuillet), tandis que le flux de force \mathcal{C} , égal au produit d'une

force magnétique par une surface, a les dimensions du produit d'un potentiel par une longueur.

La présence du facteur k' montre que les coefficients d'induction M et L dépendent de la nature du milieu et croissent avec le pouvoir inducteur magnétique de celui-ci. A part l'influence du milieu, ils ne dépendent que de la position relative des circuits i et i' (pour M) ou de la forme du circuit i (pour L).

Dans le système de dimensions électromagnétiques ($k' = 1$), les coefficients d'induction, ayant les dimensions d'une longueur, s'exprimeront en fonction de l'unité de longueur choisie. Ainsi, dans le système d'unités pratiques, l'unité de M et de L est 10^9 centimètres ou approximativement un quadrant terrestre.

Le nom de *quadrant*, pour désigner l'unité pratique de coefficient d'induction, a été adopté par le Congrès international des électriciens réuni à Paris en 1889. La valeur légale de cette unité diffère de la valeur définie théoriquement comme l'ohm légal diffère de l'ohm théorique.

158. Énergie relative de deux courants. — Nous avons démontré au § 147 que l'énergie relative W_r d'un courant i_1 et d'un aimant A est nulle. Reprenons le même raisonnement en supposant l'aimant A remplacé par un deuxième courant i_2 . L'énergie relative W_r des courants i_1 et i_2 sera encore exprimée par la formule (9) dudit paragraphe, et la part de cette énergie contenue dans un des tubes de force engendrés par le courant i_1 aura pour expression (10), de telle sorte que l'on aura :

$$W_r = \int_{S_1} (V_2 - V'_2) dQ = \int_{S_1} V_2 dQ - \int_{S_1} V'_2 dQ$$

S_1 désignant une surface équipotentielle du courant i_1 ; dQ le flux d'induction à travers un tube de force élémentaire du courant i_1 ayant ses bases initiale et finale sur S_1 ; V_2 le potentiel magnétique dû au courant i_2 sur la base initiale du tube en question, et V'_2 le potentiel sur la base finale.

Or le potentiel V_2 a une valeur unique et bien déterminée en tout point de S_1 , à la condition de s'assujettir à passer d'un point à un autre de cette surface sans traverser une surface S_2 limitée au con-

tour du courant i_2 et tracée arbitrairement. Quant au potentiel V'_2 en un point A quelconque de S_1 , sa valeur égale à celle de V_2 au même point si le tube de force aboutissant en A n'a point traversé la surface S_2 , ou à $(V_2 - 4\pi i_2)$ dans le cas contraire. Il résulte de là que l'excès de $\int_{S_1} V_2 dQ$ sur $\int_{S_1} V'_2 dQ$ se réduira à $4\pi i_2 \int dQ$, l'intégrale $\int dQ = Q_2$ s'étendant seulement aux tubes de force qui traversent S_2 et, par suite, représentant en grandeur et en signe le flux d'induction émis par le courant i_1 à travers le contour i_2 . On écrira donc :

$$W_r = 4\pi i_2 Q_2 = M i_1 i_2 \quad (14)$$

M désignant le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits i_1 et i_2 (§ 156).

Lorsque les deux circuits se déplacent l'un par rapport à l'autre, les formules (9) et (14) montrent que le travail δT des forces électrodynamiques et l'accroissement δW_r d'énergie relative, au lieu d'être égaux et de signes contraires, sont égaux et de même signe. Pendant ce déplacement, les sources d'énergie qui produisent le courant doivent donc subvenir à la dépense $2i_1 i_2 \delta M$, dont une moitié est employée à accroître l'énergie potentielle de δW_r et l'autre à produire le travail extérieur δT .

On peut démontrer ce résultat autrement. Nous avons vu que si un courant i_1 se déplace en présence d'un aimant A, ou réciproquement, l'énergie relative W_r de i_1 et de A étant nulle, la source d'énergie (pile, etc.) du circuit i_1 doit subvenir à une dépense $\frac{i_1}{k'} \delta \mathcal{E}_1$ égale au travail des forces électromagnétiques. Si l'on admet que les phénomènes qui se passent dans le circuit i_1 ne dépendent que de l'état du milieu *directement en contact* avec lui (conséquence de la conception des actions de proche en proche), cette dépense doit se produire encore lorsque l'aimant A est remplacé par un courant i_2 équivalent et émettant le même flux de force \mathcal{E}_1 à travers le circuit i_1 . Mais dans ce cas la même dépense, exprimée indifféremment par l'une ou l'autre des formules :

$$\frac{i_1}{k'} \delta \mathcal{E}_1 = \frac{i_2}{k'} \delta \mathcal{E}_2 = i_1 i_2 \delta M$$

doit incomber au courant i_2 , de telle sorte que la dépense totale dans les deux circuits est le double du travail extérieur. Il en

résulte bien que l'énergie relative W_r doit augmenter de l'excédent $i_1 i_2 \delta M$ de cette dépense sur le travail extérieur.

159. *Energie intrinsèque d'un courant.* — La formule (14) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} W_r &= \frac{i_1}{k'} \mathcal{C}_1, \quad i_2 = \frac{i_2}{k'} \mathcal{C}_2 = \frac{1}{2k'} \Sigma i \mathcal{C} \\ &= 2\pi \Sigma i Q \end{aligned} \quad (13)$$

le signe Σ s'étendant aux deux circuits. Si, au lieu de deux circuits en présence, on en a un nombre quelconque, on voit facilement que la formule (13) représente encore l'énergie relative totale de ces circuits, \mathcal{C} et Q désignant les flux de force et d'induction émis à travers le circuit i par les autres courants. De même que la formule (11) on a déduit l'expression (12) du travail δT produit par la déformation d'un courant i , de même de la formule (13) on déduira l'expression :

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (16)$$

de l'énergie potentielle d'un courant I . On pourrait arriver encore à cette formule (16) en remarquant que, dans le déplacement relatif de plusieurs courants ou de plusieurs parties d'un même courant, le travail électrodynamique δT est toujours accompagné d'une variation d'énergie potentielle relative δW_r égale à δT (158) et que par conséquent le travail $\delta T = \frac{1}{2} i^2 \delta L$ (formule 12) produit par la déformation d'un courant i doit être accompagné d'une variation d'énergie potentielle $\delta W = \frac{1}{2} i^2 \delta L$.

Il y a intérêt à calculer encore l'énergie potentielle d'un courant I par l'intégrale

$$W = \int \frac{1}{8\pi k'} f^2 du$$

étendue au volume du champ magnétique de ce courant. En procédant comme au § 158, on écrira :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \frac{f dS}{4\pi k'} \int f dn \\ &= \frac{1}{2} \int_s dQ (V - V') \end{aligned}$$

S désignant une surface limitée à un contour qui sera, par

exemple l'axe du courant; dQ le flux d'induction à travers un tube de force infiniment étroit, ayant ses bases initiale et finale sur S ; V et V' le potentiel magnétique sur ces bases. On aura donc finalement :

$$W = 2\pi \int idQ \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2k} \int id \mathcal{E} \quad (17')$$

i désignant l'intensité du courant à travers la section du circuit embrassée par le tube; i est égale à l'intensité totale I pour tout tube de force embrassant la section entière du conducteur, mais est inférieure à I pour les tubes qui coupent cette section et n'en embrassent qu'une partie. L'intégrale doit être étendue à tous les tubes de force du champ. La forme (17') ne convient que si le milieu est homogène, c'est-à-dire si k' est constant.

La comparaison des formules (16), (17) et (17') donne :

$$L = 4\pi \int \frac{i}{I} \frac{dQ}{I} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{k'} \int \frac{i}{I} \frac{d \mathcal{E}}{I} \quad (18')$$

Ces nouvelles formules permettent de calculer le coefficient de self-induction d'un circuit lorsqu'on connaît la distribution de la force dans le champ magnétique. Elles seront utilisées dans le chapitre suivant pour le calcul de L dans des cas simples. Il est à remarquer qu'elles sont indépendantes de I , car dQ et $d \mathcal{E}$, ainsi que i , sont proportionnels à I , toutes choses égales d'ailleurs.

Dans le cas de deux courants I_1 et I_2 en présence, l'énergie potentielle est la somme des énergies intrinsèques de chacun d'eux augmentée de leur énergie relative, soit, d'après les formules (14) et (16) :

$$W = \frac{1}{2} \left[L_1 I_1^2 + 2MI_1 I_2 + L_2 I_2^2 \right] \quad (19)$$

Dans le cas général où l'on a un nombre quelconque de circuits et d'aimants, l'énergie potentielle totale est la somme de celles du système d'aimants seul et du système de courants seul, l'énergie relative des courants et des aimants étant nulle. L'énergie

totale des courants a l'expression générale $2\pi\Sigma I Q$. Sa valeur ne dépend d'ailleurs que de l'état actuel du système; elle est la même, soit que les divers courants aient été amenés de l'infini en présence les uns des autres, soit que les intensités aient été amenées de zéro à leurs valeurs actuelles i_1, i_2, \dots sans déplacement des circuits.

L'énergie des courants, de même que les coefficients L et M , est, toutes choses égales d'ailleurs, inversement proportionnelle à k' ou proportionnelle au pouvoir inducteur magnétique. Si l'on fait $k' = 1$, cela correspond au cas où le milieu est le vide (ou, pratiquement, de l'air); l'énergie est plus grande si le milieu est paramagnétique, plus faible s'il est diamagnétique.

CHAPITRE III

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

160. Lois expérimentales. — Les phénomènes d'induction électromagnétique ont été découverts par Faraday (1832), qui fit connaître l'effet produit dans un circuit fermé conducteur par le déplacement d'un aimant ou d'un courant ou par des variations de courant dans un circuit voisin.

Le mouvement d'un aimant en présence d'un conducteur fermé fait naître dans celui-ci un courant i dit *induit*, qui cesse sensiblement en même temps que le mouvement. Si l'on amène l'aimant d'une position A à une position B, la quantité totale d'électricité $\int idt$ qui parcourt le circuit fermé dépend de ces deux positions, mais nullement de la vitesse imprimée à l'aimant ni du chemin suivi de A à B; elle est en raison inverse de la résistance électrique du circuit. Quand on ramène l'aimant de B à A, la quantité d'électricité induite est égale et de signe contraire à la précédente. On obtient exactement les mêmes résultats en déplaçant le circuit en présence de l'aimant, la quantité $\int idt$ ne dépendant que du déplacement relatif de ces deux objets.

On produit les mêmes effets en remplaçant un aimant par un courant. Les déplacements ou les variations de celui-ci induisent un courant dans un circuit voisin. Un accroissement du courant *inducteur* donne naissance à un courant induit de même sens que le ferait un rapprochement; inversement une diminution du courant inducteur équivaut à un éloignement. Si, par exemple, les circuits inducteur et induit sont rectilignes et parallèles, le courant induit sera de sens contraire au sens du courant inducteur, soit que l'on approche celui-ci, soit que l'on accroisse son intensité;

le courant induit sera de même sens que le courant inducteur, soit que l'on éloigne celui-ci, soit que son intensité diminue.

Lenz a donné la loi suivante, qui est d'un usage très commode : le déplacement d'un aimant ou d'un courant inducteur en présence d'un circuit fermé développe dans celui-ci un courant induit de sens tel qu'il tend à s'opposer au mouvement, comme une résistance mécanique. Ainsi l'approche d'un pôle positif produit un courant induit équivalent à un feuillet magnétique qui opposerait au pôle en question sa face positive (courant circulant en sens inverse des aiguilles d'une montre pour un observateur placé au pôle).

Le courant induit, agissant comme une résistance mécanique, absorbe une partie du travail dépensé par le déplacement de l'inducteur. On est ainsi conduit à considérer l'induction comme liée au travail des forces électromagnétiques. Neumann, partant d'idées semblables complétées par des hypothèses, a calculé l'intensité du courant induit sous l'action d'un déplacement donné de l'aimant ou du courant inducteurs. Sa formule n'est autre chose que celle que l'on déduit d'une théorie plus rigoureuse, à un coefficient de proportionnalité près, qui reste indéterminé. — Felici, par des expériences variées d'induction électrodynamique, a trouvé que le courant induit est proportionnel à une expression qui représente la variation $\delta \mathcal{F}$ du flux de force magnétique à travers le circuit induit, ce qui vient à l'appui des idées de Neumann.

Les lois de l'induction dans les divers cas peuvent se résumer dans un seul énoncé : la quantité totale *fidt* d'électricité induite dans un circuit, pendant un temps donné, est proportionnelle à la diminution du flux de force \mathcal{F} à travers ce circuit et à sa conductibilité $\frac{1}{R}$:

$$\int idt = - \frac{\delta \mathcal{F}}{kR} \quad (1)$$

Si l'on fixe le sens dans lequel le courant qui parcourt le circuit induit est considéré comme positif, le signe de \mathcal{F} sera défini par là même.

La théorie des phénomènes d'induction, fondée sur le principe de la conservation de l'énergie, et qui est développée ci-après sui-

vant les idées de Von Helmholtz et de sir W. Thomson, montre que l'inverse k' du coefficient de proportionnalité de la formule (1) n'est autre que le coefficient k' de la formule fondamentale de Coulomb en magnétisme. Cette formule ne s'applique évidemment qu'au cas d'un milieu homogène. Si le milieu est hétérogène (air et fer par exemple), k' étant variable, on doit remplacer le flux de force par le flux d'induction.

161. Théorie de l'induction. — Lorsqu'un aimant A et un circuit parcouru par un courant i subissent un déplacement l'un par rapport à l'autre, les forces électromagnétiques en jeu produisent un travail égal à $\frac{id \mathcal{F}}{k'}$, $\delta \mathcal{F}$ représentant l'accroissement du flux de force dû à l'aimant A à travers le circuit (§ 142). L'énergie potentielle du champ ne variant point, ce travail est directement emprunté à la source d'énergie (pile, etc.) qui produit le courant (§ 147). Il correspond donc, d'après une observation faite au § 64, au développement, dans le circuit, d'une force électromotrice, que l'on calculera en prenant le quotient, changé de signe, du travail $\frac{i}{k'} \frac{d \mathcal{F}}{dt}$ effectué dans l'unité de temps par l'intensité i , soit :

$$E = - \frac{1}{k'} \frac{d \mathcal{F}}{dt} \quad (2)$$

$$= - 4\pi \frac{dQ}{dt} \quad (2')$$

C'est là l'expression de la force *e.m.* induite dans le circuit. D'après la formule (2), cette force *e.m.* est, au coefficient $\frac{1}{k'}$ près, égale à la diminution du flux de force \mathcal{F} à travers le contour du circuit induit dans l'unité de temps. Cette formule ne s'applique d'ailleurs qu'au cas d'un milieu homogène; elle doit être remplacée par (2) dans le cas général, Q désignant le flux d'induction à travers le contour du circuit.

La force *e.m.* induite étant indépendante de l'intensité i du courant qui parcourt le circuit, on admet que le raisonnement précédent est encore valable lorsque i tend vers zéro, c'est-à-dire que, même dans un circuit de résistance infinie, le déplacement considéré induit la même force *e.m.* malgré l'absence de courant. Cette

hypothèse paraît toute naturelle ; elle est, du reste, justifiée par l'expérience. Toutefois, quand le courant i est nul, le raisonnement précédent étant en défaut, on ne voit pas clairement en vertu de quel mécanisme la force $e.m.$ E est induite. L'application du principe de la conservation de l'énergie est alors insuffisante.

Supposons maintenant que le champ magnétique dans lequel se trouve le circuit i soit dû à des aimants et à des courants. Ce cas se ramène au précédent, l'équivalence des courants inducteurs et des feuillets magnétiques correspondants étant admise. Le déplacement d'un courant inducteur produira le même effet que celui du feuillet équivalent ; la variation d'intensité de ce courant produira le même effet qu'une variation d'épaisseur du feuillet, la puissance de celui-ci restant constante. La formule (2) ou (2') représentera donc encore la force $e.m.$ induite dans ce cas. Le flux de force \mathcal{F} dû à un courant i_1 étant égal à $k' M_1 i_1$, la force $e.m.$ induite par ce courant est donnée par la formule :

$$\left. \begin{aligned} E &= - \frac{d(M_1 i_1)}{dt} \\ &= - \left(i_1 \frac{dM_1}{dt} + M_1 \frac{di_1}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La dénomination de coefficient d'*induction* mutuelle des circuits i et i_1 donnée au coefficient M est justifiée par la manière dont il intervient dans la formule (3). Il est à remarquer que les termes $- i_1 \frac{dM_1}{dt}$ et $- M_1 \frac{di_1}{dt}$ représentent respectivement les forces $e.m.$ induites par le déplacement relatif des deux circuits et par la variation du courant inducteur i_1 .

Mais si le courant i varie lui-même ou si son circuit se déforme, il en résulte également le développement d'une force $e.m.$ induite, que nous allons calculer. L'énergie propre du courant est $\frac{1}{2} L i^2$ (§ 159), et sa variation sera représentée par $\delta \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$. D'autre part, l'expression du travail produit par les forces électromagnétiques pendant la déformation du circuit est $\frac{1}{2} i^2 \delta L$ (§ 156). La somme :

$$\delta \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + \frac{1}{2} i^2 \delta L = i \delta(Li)$$

représente un travail emprunté à la source d'énergie qui produit le courant. La force *e.m.* induite est donc :

$$\left. \begin{aligned} E &= - \frac{d(Li)}{dt} \\ &= - \left(i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

La dénomination de coefficient d'induction propre du circuit *i* donnée au coefficient *L* est ainsi justifiée. Les termes en $\frac{dL}{dt}$ et en $\frac{di}{dt}$ correspondent respectivement à une déformation du circuit et à une variation d'intensité.

Le flux de force moyen dû au courant *i* à travers son propre circuit étant égale à $k' Li$ (§ 136), la formule (4) n'est qu'un cas particulier de (2), en désignant d'une manière générale par \mathcal{E} le flux de force total à travers le circuit *i* sous l'action d'aimants ou courants extérieurs et sous sa propre action. La formule (2) ou (2') résume ainsi les divers cas d'induction que nous venons d'étudier.

Le courant développé par la force *e.m.* (2) dans un circuit de résistance *R* a une intensité égale à $\frac{E}{R}$, et la quantité totale d'électricité induite pendant la durée du phénomène d'induction est :

$$Q = \int \frac{E}{R} dt = - \frac{\delta \mathcal{E}}{k'R}$$

Ce n'est autre chose que la formule (1), qui comprend toutes les lois de l'induction électromagnétique. On peut écrire :

$$Q = - \frac{1}{R} \left[\frac{\delta \mathcal{E}_1}{k'} + \Sigma \delta(M_1 i_1) + \delta(Li) \right]$$

pour mettre en évidence la part due aux aimants $\left(\frac{\delta \mathcal{E}_1}{k'} \right)$, aux courants inducteurs $[\Sigma \delta(M_1 i_1)]$ et au courant *i* lui-même $[\delta(Li)]$. Si à la fin du phénomène considéré, l'un des courants *i* ou *i*₁, par exemple, revient au même état qu'au commencement, le terme correspondant $\delta(Li)$ ou $\delta(M_1 i_1)$ est nul, et *Q* n'en dépend point.

Nous devons faire une réserve au sujet de la validité des raisonnements précédents. Les coefficients L et M sont bien définis lorsque les courants sont constants, et que leur champ magnétique est en équilibre, puisque alors l'énergie potentielle de ces courants est parfaitement déterminée. Mais les formules des § 158 et § 159 n'ont point été établies dans le cas où les courants sont variables. Dans ce cas, en effet, les actions électromagnétiques ne devant point sans doute se propager avec une vitesse infinie, la force magnétique aux divers points du champ ne correspond pas à un état stable du champ et nous ne sommes point encore en mesure de la calculer. Les coefficients M et L n'ont dès lors plus de signification, et les formules (3) et (4) peuvent n'être plus applicables ; la formule (2) ou (2') l'est toujours, comme on le verra dans la suite. Toutefois, dans la plupart des cas pratiques, les variations des courants et de leur champ magnétique sont assez lentes (relativement à la vitesse de propagation des actions électromagnétiques) pour que l'emploi des formules (3) et (4) ne présente aucun inconvénient.

162. Deux cas paradoxaux. — Les lois de l'induction déduites de la théorie n'ont point été jusqu'ici mises en défaut. Toutefois, pour familiariser l'esprit avec certaines difficultés apparentes que présente leur application, nous allons citer deux cas qui ont été quelquefois l'objet de fausses interprétations.

1° D'après nos idées, l'induction produite dans un circuit doit être due, non à des actions à distance, mais à une réaction du milieu directement en contact avec lui. Cette induction ne peut donc exister si ce milieu n'est point soumis à un champ magnétique. Or, ceci paraît en contradiction avec le fait suivant :

Considérons un solénoïde fermé sur lui-même ; il ne développe à l'extérieur aucun champ magnétique. Il semble donc que, si l'on fait varier l'intensité du courant qui le parcourt de i_1 à i_2 , aucune induction ne doit se produire dans un circuit fermé extérieur. Or, dans un circuit extérieur embrassant le solénoïde, une telle variation produit une quantité d'électricité induite. C'est là un fait d'expérience, qui résulte d'ailleurs de l'emploi de la formule (2), le flux de force \mathcal{E} à travers le circuit en question n'étant autre que

le flux à travers la section du solénoïde qu'il embrasse et la variation $\delta \mathcal{F}$ étant proportionnelle à $(i_2 - i_1)$.

La contradiction ici n'est qu'apparente ; car le champ magnétique extérieur au solénoïde, quoique nul pendant que les courants sont constants, existe pendant la variation de ceux-ci, cette variation donnant lieu à un ébranlement électromagnétique qui se propage à partir du solénoïde dans tout l'espace. (Voir la *Théorie de la propagation des ébranlements électromagnétiques*, chapitre IV.)

2° Considérons un aimant A, qui soit de révolution au point de vue géométrique et au point de vue magnétique, de telle sorte que, quelle que soit l'orientation qu'on lui donne autour de son axe, son champ magnétique reste invariable ; et mettons les extrémités d'un fil métallique en contact avec deux points M et M' de sa surface.

Si l'on fait tourner le système de l'aimant et du fil autour de l'axe de révolution, on ne constate point le passage d'un courant dans le fil. Ceci s'explique très bien, l'aimant et le fil conservant la même position relative l'un par rapport à l'autre.

Mais si l'on fait tourner l'aimant seul, de manière que les points de contact restent fixes dans l'espace, on constate dans le fil f le passage d'un courant induit¹. Cependant la position relative de l'aimant et du fil reste encore invariable, et le champ magnétique dans lequel se trouve le fil est invariable lui-même. Pour expliquer ce fait, il suffit de remarquer que, la masse de l'aimant se déplaçant dans son champ magnétique, il s'y développe des forces *e.m.* induites. Il y a donc entre les points M et M' de l'aimant une différence de potentiel qui donne naissance au courant constaté dans le fil, sans que celui-ci soit soumis à aucune force *e.m.* induite.

Si l'on supprime le fil f , pendant la rotation aucun courant ne circule dans l'aimant ; mais les divers points de sa surface étant à des potentiels différents, il en résulte la production d'un champ électrostatique dans le milieu diélectrique ambiant.

163. Force électromotrice induite élémentaire. — Nous avons

¹ V. Edlund : *Annales de Chimie et de Physique*, 1887. Tome 11. p. 145

établi la théorie de l'induction au § 161, en considérant des circuits fermés. La force *e.m.* induite dans un circuit est donnée par la formule :

$$E = - \frac{1}{k} \frac{d \mathcal{C}}{dt}$$

Si l'induction est due à un déplacement du circuit, $\frac{d \mathcal{C}}{dt}$ représente le flux de force *coupé* par son contour dans l'unité de temps.

Supposons qu'au lieu du circuit entier, dont l'étendue peut être considérable, il n'y ait qu'un élément de longueur l qui se déplace, la force *e.m.* induite sera localisée dans cet élément seul. Sa valeur E sera encore donnée par la formule précédente, $\frac{d \mathcal{C}}{dt}$ représentant le flux de force *coupé* par l'élément mobile l dans l'unité de temps. Cette formule est donc applicable à la force *e.m.* induite qui prend naissance dans un élément de longueur quelconque, même infiniment petite, mais seulement lorsque l'induction est produite par le déplacement de cette partie du circuit. Lorsque l'induction est due à une variation du champ magnétique, la quantité $\frac{d \mathcal{C}}{dt}$ relative à une fraction du circuit n'a pas de sens, et la formule ci-dessus est en défaut. C'est que la connaissance de la force magnétique en tout point du champ est alors insuffisante, et l'on doit introduire la notion d'un nouvel élément appelé le potentiel vecteur électromagnétique.

164. Potentiel vecteur électromagnétique. — Si un élément ds d'un circuit C décrit, dans l'unité de temps, le chemin δ (fig. 68) en présence d'un pôle magnétique q placé en O , la force *e. m.* induite dans cet élément est égale, au facteur $\frac{1}{k}$ près, au flux de force coupé, c'est-à-dire au produit de l'aire du parallélogramme construit sur les côtés ds et δ par la projection de la force f sur la normale à ce parallélogramme. Ce produit, représentant le volume du parallélépipède construit sur les côtés ds , δ et f , est encore égal au produit de l'aire du parallélogramme construit sur f et δ comme côtés par la projection de ds sur la normale à ce parallélogramme (f , δ). Nous poserons :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{k} \text{aire}(f, \delta) = \frac{1}{k} f \delta \sin \alpha \quad (5)$$

et nous porterons cette valeur \mathcal{E} suivant la normale au plan (f, δ) . La force *e. m.* induite aura alors pour valeur le produit du vecteur \mathcal{E} par la projection de ds sur lui, ou encore le produit de ds par la projection \mathcal{E}_s de \mathcal{E} sur ds . Le sens dans lequel \mathcal{E} doit être porté sur la normale au plan (f, δ) est tel que, pour un observateur placé les pieds en M et la tête en \mathcal{E} , la droite $M\delta$, en décrivant l'angle α (inférieur à 180°) de manière à venir s'appliquer sur Mf paraîsse tourner de droite à gauche. Suivant que la projection \mathcal{E}_s tombe sur l'élément ds ou en sens inverse, la force *e. m.* induite sera de même sens que le courant i ou de sens contraire. D'une manière générale, en prenant ds égal à l'unité, la projection \mathcal{E}_s représente en grandeur et sens la force *e. m.* induite en M sur l'unité de longueur du circuit C ; cette règle est indépendante du courant i .

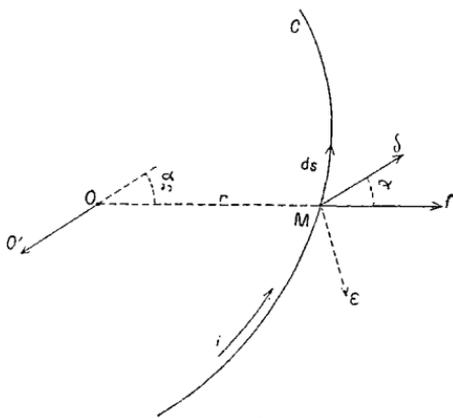


Fig. 68.

On sait que la force *e. m.* induite $\mathcal{E}_s ds$ serait la même si, l'élément ds restant fixe, le pôle q décrivait le chemin $OO' = \delta$ égal et de sens inverse à $M\delta$. Le résultat de ce déplacement est d'ailleurs le même que si, le pôle q restant en O , on avait créé un nouvel aimant de moment $q\delta = \mathcal{M}$ ayant en O un pôle $-q$ qui annule le précédent, et en O' un pôle $+q$. Or on a :

$$f = k' \frac{q}{r^2}$$

d'où

$$\mathcal{E} = \frac{1}{k} f \delta \sin \alpha = \frac{q}{r^2} \delta \sin \alpha = \frac{\mathcal{M} \sin \alpha}{r^2}$$

La quantité dirigée \mathcal{E} , portée suivant la normale $M \mathcal{E}$ au plan (f, δ) ou $M OO'$, et égale à $\frac{\mathcal{M} \sin \alpha}{r^2}$, s'appelle le *potentiel vecteur électromagnétique* de l'aimant OO' au point M .

Si, au lieu d'un seule pôle q , on en a un nombre quelconque se déplaçant d'une manière arbitraire en présence du circuit C, la quantité \mathcal{E} , dont la projection \mathcal{E}_s , sur l'élément ds multipliée par la longueur ds donne la force *e. m.* induite dans cet élément, sera la résultante ou somme géométrique¹ des potentiels vecteurs en M dus aux aimants (fictifs ou réels), tels que \mathcal{M} , créés par le déplacement des pôles en question dans le champ pendant l'unité de temps. En d'autres termes, \mathcal{E} n'est autre chose que le potentiel vecteur de ces aimants créés dans l'unité de temps ou, ce qui revient au même, l'accroissement *géométrique*, dans l'unité de temps, du potentiel vecteur \mathcal{A} au point M sous l'action des aimants ou des courants (équivalents à des aimants) qui existent dans le champ. Nous représenterons par \mathcal{A} la valeur numérique actuelle de ce potentiel vecteur et, suivant une notation classique, par $\overline{\mathcal{A}}$ sa valeur considérée en grandeur et en direction. De même $\overline{\mathcal{E}}$ désignera la valeur de \mathcal{E} en grandeur et en direction. On aura ainsi entre les vecteurs $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{A}}$ la relation différentielle :

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt} \quad (6)$$

Le vecteur $\overline{\mathcal{E}}$ est la *dérivée géométrique* du potentiel vecteur électromagnétique \mathcal{A} du champ au point M.

Ainsi, lorsque le champ vient à varier, la force *e. m.* induite en M sur l'unité de longueur du circuit s'obtient en projetant sur celui-ci la dérivée géométrique du potentiel vecteur par rapport au temps.

Si, au lieu d'une variation du champ, il s'agit d'un déplacement du circuit, la formule (6) est encore applicable, $\overline{\mathcal{A}}$ désignant alors

¹ La somme géométrique de plusieurs droites ou vecteurs \overline{a} , \overline{b} , \overline{c} ,... considérées en grandeur et en direction, s'écrit : $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \dots)$. Elle est, par définition, égale à la résultante de ces vecteurs. Ainsi un mobile qui participe aux vitesses simultanées \overline{v}^I , \overline{v}^{II} , \overline{v}^{III} ,... a une vitesse résultante égale à la somme géométrique $(\overline{v}^I + \overline{v}^{II} + \dots)$. Le dernier côté d'un polygone fermé est la somme géométrique des autres côtés.

Une intégrale géométrique n'est autre chose que la somme géométrique de vecteurs infiniment petits (différentielles géométriques) en nombre infiniment grand. La différentielle géométrique d'un vecteur variable est son accroissement géométrique infiniment petit.

Ces notions suffisent pour comprendre l'emploi qui est fait de la notation géométrique dans ce Traité.

le potentiel vecteur au point mobile M . En effet, lorsque l'élément ds décrit un chemin δ (fig. 68), le potentiel vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ au point qu'il occupe varie de la même quantité $d\vec{\mathcal{A}}$ que si, cet élément restant fixe, le champ tout entier décrivait un chemin égal et de sens inverse ; et la force électromotrice induite est la même aussi dans les deux cas.

Les démonstrations précédentes supposent implicitement que le milieu est homogène. Mais dans le cas d'un milieu hétérogène, on sait que la force magnétique f du champ peut se calculer en considérant le milieu comme homogène (k' constant), à la condition de supposer des couches magnétiques convenables réparties à la surface de séparation des milieux homogènes différents ou dans la masse des milieux hétérogènes. Le raisonnement précédent se trouve ainsi généralisé, et l'on peut énoncer la règle générale suivante :

Lorsqu'un circuit C se déplace dans un champ magnétique en même temps que ce champ varie, la force *e. m.* induite en un point M par unité de longueur du circuit s'obtient en projetant sur celui-ci la dérivée géométrique du potentiel vecteur au point variable M .

165. Induction électromagnétique dans un milieu quelconque. — Si le conducteur C a des dimensions transversales appréciables, la force *e. m.* induite ne sera pas en général uniforme en tous les points d'une même section. On devra dans ce cas diviser le conducteur en filets de dimensions transversales infiniment petites, et la règle précédente sera applicable à chacun de ces filets. Dans ces conditions, le conducteur pourra même avoir des dimensions quelconques dans tous les sens, c'est-à-dire que la règle s'étendra à un milieu conducteur quelconque.

Dans le cas d'un corps conducteur quelconque, la force *e. m.* induite en un point M sur l'unité de longueur d'un filet parallèle à la direction Ox s'obtiendra en projetant sur cette direction le vecteur $\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt} = \vec{\mathcal{E}}$. Ce résultat peut s'exprimer en disant que la force électrique induite au point M est égale à $\vec{\mathcal{E}}$ en grandeur et direction. Cette force électrique joue le même rôle, en effet, que

dans l'étude des courants permanents la force électrique $\left(-\frac{dV}{dn}\right)$, dont la projection $\left(-\frac{dV}{dx}\right)$ suivant une direction Ox représente la chute de potentiel ou force *e. m.* par unité de longueur, suivant cette direction.

La loi générale de l'induction électromagnétique dans un corps quelconque, mobile ou non, se résume donc en ceci : *La force électrique $\vec{\mathcal{E}}$ induite en un point quelconque est représentée, en grandeur et direction, par la dérivée géométrique $\frac{d\vec{\mathcal{A}}}{dt}$ du potentiel vecteur électromagnétique $\vec{\mathcal{A}}$ par rapport au temps au point considéré, ce point étant entraîné avec la substance du corps.*

Nous avons considéré jusqu'ici un corps conducteur parce que l'étude des lois de l'induction électromagnétique n'a pu être faite que par l'observation des courants induits dans les circuits conducteurs. Mais, suivant les idées émises dans le cours de cet ouvrage, notamment au § 79, un milieu conducteur ne diffère d'un milieu diélectrique qu'en ce que l'état de polarisation électrique, qui se maintient indéfiniment dans ce dernier, se dissipe au contraire graduellement dans le premier, en même temps que l'énergie potentielle du champ se dissipe elle-même sous forme de chaleur.

A vrai dire, on ne connaît pas de diélectrique absolument isolant, et les divers corps ne diffèrent probablement entre eux que par le plus ou moins de conductibilité, les phénomènes d'induction électrostatique étant visibles dans les plus mauvais conducteurs et masqués dans les meilleurs. S'il en est ainsi, le développement de la force électrique induite dans un champ magnétique doit se produire dans tous les corps bons ou médiocres conducteurs, et théoriquement dans les diélectriques parfaits. Ceci est d'autant plus probable que cette force électrique induite est indépendante de la substance des conducteurs expérimentés et qu'elle existe même en circuit ouvert alors qu'elle n'engendre aucun courant. Nous généraliserons donc les résultats obtenus ci-dessus en les appliquant aux milieux diélectriques. Nous en déduirons d'ailleurs des conséquences importantes susceptibles de vérification expérimentale, notamment en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques dans l'espace.

On voit, par le rôle qu'il joue dans la théorie de l'induction, que le potentiel vecteur \mathcal{A} est un nouvel élément aussi important que la force magnétique f . Il n'est pas inutile d'en préciser le sens. L'intégrale géométrique de l'équation (6) est :

$$\overline{\mathcal{A}} = \int f \overline{\mathcal{E}} dt \quad (7)$$

Or, $\overline{\mathcal{E}}$ désignant la force électrique induite en un point M, la force mécanique qui s'exercerait sur la quantité q d'électricité placée en M serait le produit $\overline{\mathcal{E}}q$; l'intégrale $\int \overline{\mathcal{E}} q dt$ de cette force pendant un certain temps représente donc l'*impulsion totale* subie par la quantité q pendant ce temps. Par suite $\int \overline{\mathcal{E}} dt$ est l'impulsion totale sur l'unité d'électricité ou, plus simplement, l'*impulsion électrique totale* au point M. Ainsi on peut se représenter le potentiel vecteur électromagnétique comme l'impulsion totale qui aurait été communiquée, depuis le commencement de la création du champ, à l'unité d'électricité placée en M. Cette impulsion est susceptible d'être mesurée directement; de là une vérification expérimentale possible et une représentation plus nette du potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$.

166. Calcul d'un coefficient d'induction mutuelle. — La force électromotrice induite dans l'élément ds du circuit C étant égale à $\mathcal{E}_s ds$ (§ 164), la force *e. m.* induite totale dans le circuit fermé a pour expression $\int_C \mathcal{E}_s ds$, l'intégrale \int_C étant étendue au contour entier C. D'autre part, on sait que cette force *e. m.* est également représentée par $-\frac{1}{k} \frac{d\mathcal{C}}{dt}$, \mathcal{C} désignant le flux de force magnétique à travers une surface limitée au contour C. Il en résulte :

$$-\frac{1}{k} \frac{d\mathcal{C}}{dt} = \int_C \mathcal{E}_s ds$$

Supposons que le circuit C soit fixe, le champ magnétique étant variable. La projection \mathcal{E}_s de la dérivée $\frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt}$ du potentiel vecteur sur l'élément ds est égale, d'après un théorème de géométrie connu, à la dérivée $\frac{d\mathcal{A}_s}{dt}$ de la projection \mathcal{A}_s de $\overline{\mathcal{A}}$. On aura donc :

$$-\frac{1}{k} \frac{d\mathcal{C}}{dt} = \int_C \frac{d\mathcal{A}_s}{dt} ds$$

d'où, en intégrant par rapport au temps et remarquant qu'avant la production du champ magnétique on a simultanément $\overline{\mathcal{A}} = 0$ et $\mathcal{E} = 0$:

$$-\frac{1}{k} \mathcal{E} = \int_c \mathcal{A}_s \cdot ds \quad (8)$$

Si le flux de force magnétique \mathcal{E} est dû à un circuit C' parcouru par un courant i' , on a (§ 156) :

$$\frac{\mathcal{E}}{k} = M i'$$

et, par suite :

$$M = -\frac{1}{i'} \int_c \mathcal{A}_s \cdot ds$$

Nous allons calculer l'expression de \mathcal{A} dans le cas d'un milieu homogène; il en résultera celle de M .

Considérons à cet effet un feuillet équivalent au courant i' ; sa puissance Φ est égale à $\frac{i'}{k}$ (§ 142). Divisons sa surface en rectangles

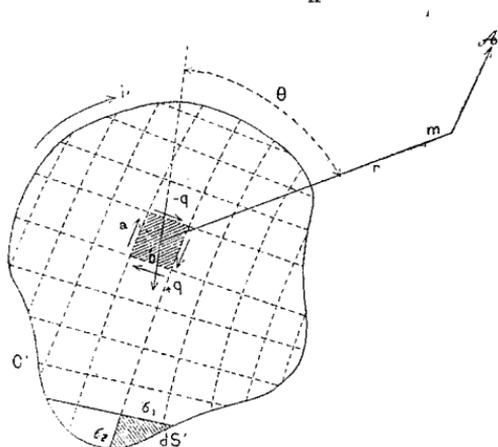


Fig. 69.

infinitiment petits par deux séries de courbes orthogonales, dont les unes seront les intersections de la surface avec des sphères ayant pour centre un point m du circuit C (fig. 69). Soient a et b les côtés de l'un des rectangles, a étant l'arc de courbe sphérique. Le feuillet élémentaire ab , couvert de hachures, équivaut à un aimant

($-q, +q$) normal au rectangle et dont le moment \mathcal{M} est égal au produit de la surface ab par la puissance $\frac{i'}{k}$. Si l'axe de cet aimant fait l'angle θ avec le rayon vecteur r , son potentiel vecteur en m est (§ 164) :

$$\frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^2} = ab \frac{i' \sin \theta}{k r^2}$$

Ce potentiel vecteur \mathcal{A} est perpendiculaire au rayon r et à l'axe \mathcal{M} du feuillet, c'est-à-dire parallèle aux côtés a ; il est de même sens que le côté a le plus éloigné de m (sens indiqué par la flèche).

Or si l'on fait la somme géométrique $\Sigma \frac{\bar{\sigma}}{r}$ des quotients de chaque côté σ du rectangle ab par sa distance au point m , chaque quotient étant porté parallèlement au côté correspondant $\bar{\sigma}$ et dans le même sens, on voit que : 1° les deux côtés b étant égaux, de sens contraires, et situés à la même distance r du point m , la somme géométrique des deux termes $\frac{\sigma}{r}$ correspondants est nulle ; 2° que les côtés a étant respectivement aux distances $(r + \frac{b}{2} \sin \theta)$ et $(r - \frac{b}{2} \sin \theta)$ du point m , puisque b est infiniment petit, la somme des termes correspondants, comptée dans le sens de \mathcal{A} , est :

$$\Sigma \frac{\bar{\sigma}}{r} = \frac{a}{r + \frac{b}{2} \sin \theta} - \frac{a}{r - \frac{b}{2} \sin \theta} = - \frac{ab \sin \theta}{r^2}$$

Donc le potentiel vecteur en m dû au feuillet élémentaire ab est égal à :

$$\overline{\mathcal{A}} = - \frac{i'}{k'} \Sigma \frac{\bar{\sigma}}{r}$$

Faisons la somme géométrique des potentiels vecteurs dus à tous les feuillets rectangulaires, en négligeant les feuillets triangulaires infiniment petits sur le contour C . Chaque côté σ appartenant à deux feuillets contigus donnera dans la somme deux termes $\frac{\bar{\sigma}}{r}$ égaux et de signe contraire, et il ne restera que la somme $\Sigma \frac{\bar{\sigma}}{r}$ des termes relatifs au contour sinueux $(\sigma_1 \sigma_2 \dots)$. Comme pour deux éléments tels que σ_1 et σ_2 , dont la somme géométrique est l'élément $\overline{ds'}$ du contour C' , on a évidemment :

$$\frac{\bar{\sigma}_1}{r_1} + \frac{\bar{\sigma}_2}{r_2} = \frac{\overline{ds'}}{r}$$

puisque r, r_1, r_2 sont égaux à des infiniment petits près, on aura finalement pour le potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$ dû au courant i' :

$$\overline{\mathcal{A}} = - \frac{i'}{k'} \int_C \frac{\overline{ds'}}{r} \quad (9)$$

Considérons maintenant en m un élément ds du circuit C. La projection \mathcal{A}_s de $\overline{\mathcal{A}}$ sur ds s'obtiendra en projetant, dans l'intégrale ci-dessus, chaque élément ds' du contour C' sur ds . On a donc :

$$\mathcal{A}_s = -\frac{i'}{k'} \int_{c'} \frac{ds' \cos \varepsilon}{r}$$

ε désignant l'angle des éléments ds et ds' ; d'où :

$$M = \frac{1}{k'} \int_c \int_{c'} \frac{ds ds'}{r} \cos \varepsilon \quad (10)$$

l'intégration devant être étendue successivement aux deux contours C et C'. Dans le cas où $k' = 1$ (air) c'est la formule de Neumann. Le coefficient d'induction mutuelle M est inversement proportionnel à k' , c'est-à-dire proportionnel au pouvoir inducteur magnétique du milieu.

On peut trouver d'autres expressions de M. Dans le feuillet élémentaire ab , soit α' l'angle d'un côté σ quelconque avec le rayon r qui joint son milieu au point m . Portons la quantité $\frac{\sigma \cos \alpha'}{r}$ suivant le rayon vecteur r correspondant, et faisons la somme géométrique $\Sigma \frac{\sigma \cos \alpha'}{r}$ des quatre termes semblables : 1° pour les côtés a , $\cos \alpha'$ est nul ; 2° pour les côtés b , $\cos \alpha'$ est égal à $\sin \theta$ et l'on a deux termes égaux à $\frac{b \sin \theta}{r}$. Mais ces deux quantités $\frac{b \sin \theta}{r}$ sont portées respectivement sur les rayons vecteurs r des milieux des côtés b , et font entre elles un angle égal à π diminué de l'angle infiniment petit $\frac{a}{r}$ sous lequel on voit du point m le côté a . Leur résultante est parallèle à $\overline{\mathcal{A}}$; comptée dans le sens de $\overline{\mathcal{A}}$, elle est égale à : $-\frac{b \sin \theta}{r} - \frac{a}{r}$. Le potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$ dû au feuillet ab , qui est égal à : $+\frac{i'}{k'} \frac{ab \sin \theta}{r^2}$, comme on l'a vu plus haut, aura donc pour expression : $-\frac{i'}{k'} \Sigma \frac{\sigma \cos \alpha'}{r}$. En faisant la somme de toutes les valeurs semblables pour les divers feuillets élémentaires, on trouverait donc, pour le potentiel vecteur électromagnétique en m sous l'action du courant i' , la nouvelle expression :

$$\overline{\mathcal{A}} = -\frac{i'}{k'} \int_{c'} \frac{ds' \cos \alpha'}{r} \quad (11)$$

Chaque élément d'intégrale est dirigé suivant le rayon vecteur r de l'élément ds' , et l'intégration doit être étendue au circuit C' . Il en résulte pour la projection \mathcal{A}_s de $\overline{\mathcal{A}}$ sur ds .

$$\mathcal{A}_s = -\frac{i'}{k'} \int \frac{ds' \cos \alpha'}{r} \cos \alpha$$

α étant l'angle du rayon vecteur r avec ds . Par suite :

$$M = -\frac{1}{k'} \int_c \mathcal{A}_s ds = \frac{1}{k'} \int_c \int_{c'} \frac{ds ds'}{r} \cos \alpha \cos \alpha' \quad (12)$$

167. Cas de deux fils droits parallèles. — Supposons que l'on ait à calculer le coefficient d'induction mutuelle de deux conducteurs dont les diamètres sont négligeables par rapport à leur distance. On peut alors les considérer, sans erreur sensible, comme réduits à des lignes géométriques sans dimensions transversales, et appliquer la formule de NEUMAN (en supposant $k' = 1$) :

$$M = \int \int \frac{ds ds'}{r} \cos \epsilon \quad (10')$$

Soient, par exemple, deux fils droits parallèles AB , $A'B'$ dont les milieux sont en C et C' (fig. 70). Si l'on prend sur ces droites deux éléments ds (en M) et ds' (en M'), situés respectivement aux distances s et s' des points C et C' , leur distance est égale à :

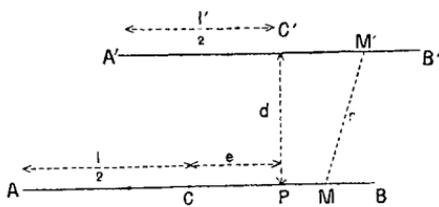


Fig. 70.

$$r = \sqrt{(s - s' - e)^2 + d^2}$$

et l'application de la formule (10') aux longueurs AB et $A'B'$ donne, en faisant $\epsilon = 0$:

$$M = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} ds' \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{ds}{\sqrt{(s - s' - e)^2 + d^2}}$$

Le calcul de M se ramènera ainsi à deux intégrations successives de la forme :

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + d^2}} = L(u + \sqrt{u^2 + d^2}) + \text{const}$$

$$\int L(u + \sqrt{u^2 + d^2}) du = uL(u + \sqrt{u^2 + d^2}) - \sqrt{u^2 + d^2} + \text{const}$$

Appliquons ceci au calcul du coefficient d'induction mutuelle de deux circuits carrés ABCD, A'B'C'D' ayant pour côtés la longueur l , et qui seraient les bases d'un prisme rectangle de hauteur d (fig. 71). Dans la formule (10') on devra étendre l'intégration par rapport à s au périmètre du carré ABCD ou, ce qui revient au même, l'étendre au côté AB seul et multiplier le résultat par 4 :

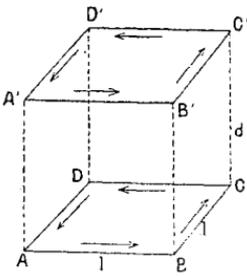


Fig. 71.

$$\frac{1}{4} M = \int_{A'B'C'D'} ds' \int_{AB} \frac{ds}{r} \cos \varepsilon$$

Dans cette intégrale les côtés B'C' et D'A' ne donneront rien, puisqu'ils sont à angle droit sur AB ($\cos \varepsilon = 0$). Le côté A'B' donnera un terme égal à :

$$+ l L \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2}} \right) - 2 \sqrt{l^2 + d^2} + 2d$$

Le côté C'D', pour lequel on doit faire $\cos \varepsilon = -1$ et remplacer d par $\sqrt{l^2 + d^2}$, donnera :

$$- l L \left(\frac{l + \sqrt{2l^2 + d^2}}{-l + \sqrt{2l^2 + d^2}} \right) + 2 \sqrt{2l^2 + d^2} - 2 \sqrt{l^2 + d^2}$$

On aura donc finalement :

$$\frac{1}{4} M = l L \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2}} - \frac{-l + \sqrt{2l^2 + d^2}}{l + \sqrt{2l^2 + d^2}} \right) - 4 \sqrt{l^2 + d^2} + 2 \sqrt{2l^2 + d^2} + 2d$$

168. Cas de deux circonférences coaxiales. — Soient deux circonférences de rayons a et a' dont les plans sont perpendiculaires

à la ligne des centres $oo' = d$ (fig. 72). L'angle ε de deux éléments ds et ds' pris en M et M' est égal à l'angle φ des rayons correspondants oM et $o'M'$, soit $\varphi = MoM_1$, oM_1 étant mené parallèlement à $o'M'$. On a :

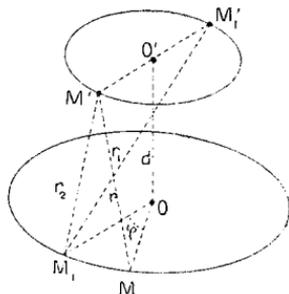


Fig. 72.

$$ds = ad\varphi$$

$$r^2 = (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi) + d^2 = (a + a')^2 + d^2 - 4aa' \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

et par suite :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi a'} ds' \int_0^{2\pi} \frac{ad\varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{(a + a')^2 + d^2 - 4aa' \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \\ &= 2\pi a' \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(a + a')^2 + d^2 - 4aa' \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \\ &= 4\pi \sqrt{aa'} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{4 \sqrt{\frac{1}{k^2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = 4\pi \sqrt{aa'} f(k^2) \end{aligned} \tag{13}$$

en posant :

$$k^2 = \frac{4aa'}{(a + a')^2 + d^2}$$

L'intégrale $f(k^2)$ ne dépend que de la valeur de k . Elle se ramène aux fonctions elliptiques ; mais il est plus commode d'avoir une table ¹ qui fasse connaître, pour chaque valeur de k , celle de $f(k^2)$. Seulement, au lieu de k , on prend pour variable un angle γ lié à k par la relation :

$$k = \sin \gamma$$

d'où :

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - k^2} = \frac{\sqrt{(a - a')^2 + d^2}}{\sqrt{(a + a')^2 + d^2}} = \frac{r_2}{r_1} \tag{14}$$

¹ Voir cette table dans le *Traité* de Maxwell, appendice I, au chapitre xiv de l'*Electromagnétisme*, et dans Mascart et Joubert, § 763.

en désignant par r_2 et r_1 la plus courte et la plus grande distance ($M_1 M'$ et $M_1 M'_1$) des deux circonférences.

La table donne directement le logarithme de $\frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}} = f(\sin^2 \gamma)$ pour toutes les valeurs de γ , de $6'$ en $6'$, depuis 60° jusqu'à 90° , c'est-à-dire pour les rapports $\frac{r_2}{r_1}$ compris entre $\frac{1}{2}$ et 0 . On n'aura donc, connaissant a , a' et d , qu'à calculer γ par la formule (14), à chercher (si $60^\circ < \gamma < 90^\circ$) la valeur correspondante de $\log \left(\frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}} \right)$ dans la table. M sera donné par :

$$\log M = \log 4\pi + \frac{1}{2} (\log a + \log a') + \log \left(\frac{M}{4\pi\sqrt{aa'}} \right)$$

Un cas qui offre un intérêt particulier est celui où la distance r_2 des deux circonférences est très faible et où l'on peut remplacer approximativement $\sqrt{aa'}$ par a et r_1 par $2a$. En posant : $x = \cos \frac{\gamma}{2}$ la formule (13) devient :

$$M = 4\pi a \int_{-1}^{+1} \frac{(2x^2 - 1) dx}{2 \sqrt{(1-x^2) \left(\frac{1}{k^2} - x^2 \right)}} = 4\pi a \int_0^1 \frac{(2x^2 - 1) dx}{\sqrt{(1-x^2) \left(\frac{1}{k^2} - x^2 \right)}}$$

Comme k est très voisin de l'unité, on peut remplacer $\left(\frac{1}{k} + x \right)$ par $(1+x)$, par suite $\left(\frac{1}{k^2} - x^2 \right)$ par $(1+x) \left(\frac{1}{k} - x \right)$ et :

$\sqrt{(1-x^2) \left(\frac{1}{k^2} - x^2 \right)}$ par $(1+x) \sqrt{(1-x) \left(\frac{1}{k} - x \right)}$. L'intégrale précédente se calcule sous forme finie : et la valeur de $1 - k^2 = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$ étant très faible, on a approximativement :

$$\frac{M}{4\pi a} = -2 + L \frac{4r_1}{r_2}$$

ou, en remplaçant r_1 par $2a$ et désignant la plus courte distance r_2 des deux circonférences par la lettre r

$$M = 4\pi a \left(L \frac{8a}{r} - 2 \right) \quad (15)$$

Ces formules s'appliquent au cas où le courant peut être

supposé concentré sur l'axe du conducteur au lieu d'être réparti sur toute sa section. Cela n'est plus admissible lorsque les dimensions transversales des conducteurs sont notables par rapport aux distances des circuits dont on calcule l'induction mutuelle.

169. Cas de deux bobines cylindriques. — Considérons deux bobines cylindriques ayant même axe OO' (fig. 73). Soient : n et n' les nombres respectifs de spires enroulés sur les deux bobines ; a et a' leurs rayons moyens ; $(2b, 2c)$ et $(2b', 2c')$ les dimensions de leurs gorges ; d la distance de leurs centres.

Lord Rayleigh a donné la règle suivante pour calculer leur coefficient d'induction mutuelle M :

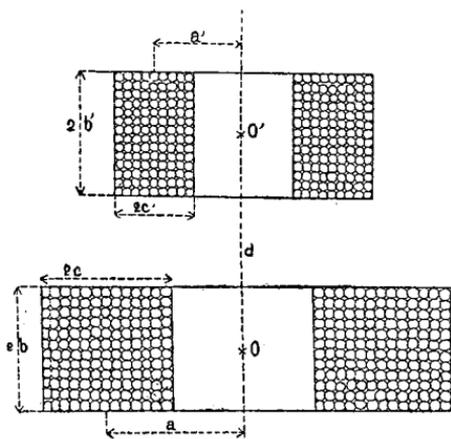


Fig. 73.

Le coefficient d'induction de deux conférences telles que celles de la figure 72 étant représenté par la formule $f(a, a', d)$, celui des deux bobines en question sera donné par :

$$\frac{6M}{nn'} = \left\{ \begin{array}{l} f(a+c, a', d) + f(a-c, a', d) \\ + f(a, a'+c', d) + f(a, a'-c', d) \\ + f(a, a', d+b) + f(a, a', d-b) \\ + f(a, a', d+b') + f(a, a', d-b') \end{array} \right\} - 2f(a, a', d)$$

On calculera chacune des neuf fonctions f qui figurent dans le second membre de cette formule, comme il a été dit plus haut (§ 168), en déterminant l'angle γ correspondant et se servant de la table de la fonction $f(\sin^2 \gamma)$.

Nous nous bornons à indiquer sans démonstration la formule précédente, qui n'est d'ailleurs qu'approchée.

170. Self-induction d'un circuit. — La formule (10) ou (10') de Neumann, relative à l'induction mutuelle de deux circuits C et C' , peut servir pour calculer le coefficient de self-induction d'un circuit

C en supposant que C' soit confondu avec C. Mais il y a lieu de prendre une précaution, car autrement, pour deux éléments ds et ds' du circuit C occupant la même position la distance r étant nulle, on trouverait une intégrale de valeur infinie. On devra, tout au moins pour les groupes d'éléments ds et ds' très voisins, diviser le circuit C en filets de section infiniment petite et calculer l'induction mutuelle moyenne de ces filets deux à deux. Cette précaution du reste est nécessaire, comme nous l'avons dit au § 168, même pour le calcul de l'induction mutuelle de deux conducteurs dont les dimensions transversales ne sont pas négligeables par rapport à leur distance.

On calcule quelquefois par la formule de Neumann la self-induction d'une partie de circuit non fermée. On doit toujours se rappeler que la self-induction d'un circuit non fermé n'a pas de sens physique et serait susceptible d'être représentée, au point de vue mathématique, par des formules très différentes (10 et 12 par exemple). Cela tient à ce que l'action magnétique d'un courant non fermé n'a point elle-même de sens physique et est susceptible d'être représentée arbitrairement par toute formule qui, appliquée à un circuit fermé, donne un résultat exact (§ 139 et 154).

Souvent, au lieu d'employer la formule de Neumann pour le calcul de la self-induction, il est plus commode de calculer celle-ci par la formule (18') du § 159 :

$$L = \frac{1}{\mathbb{E}} \int i \frac{d\mathcal{F}}{k} \quad (10)$$

$d\mathcal{F}$ désignant le flux de force à travers l'un des tubes de force de section infiniment petite en lesquels on peut décomposer le champ magnétique, et i l'intensité du courant embrassé par ce tube, intensité égale ou inférieure au courant total I, suivant que le tube considéré embrasse la section entière du conducteur ou une partie seulement de cette section.

Le coefficient L d'un circuit est encore le flux de force moyen à travers ce circuit, quand l'intensité I est égale à l'unité.

171. Cas d'une bobine annulaire. — Soit une bobine ayant un noyau en forme de tore. Nous désignerons :

par R le rayon de la section circulaire de ce noyau ;
 par a la distance de son centre à l'axe ;
 par e l'épaisseur de la bobine enroulée sur le noyau ;
 par N le nombre des spires d'une couche ;
 par ne le nombre des couches de fil.

Si l'intensité du courant qui parcourt la bobine est l'unité, l'énergie totale ($W = \frac{1}{2} LI^2$) du champ électromagnétique est égale à $\frac{1}{2} L$, et l'on aura le coefficient L en prenant le double de W . On calculera d'ailleurs W par la formule :

$$W = \int \frac{1}{8\pi k'} f^2 du$$

$$= \int \frac{\mu}{8\pi} f^2 du \text{ (unités électromagnétiques)}$$

f désignant la force magnétique en un point du champ, du un élément de volume en ce point. A cet effet, on divisera le champ en deux parties : noyau (énergie w) et spires (énergie w_1) ; on aura ainsi :

$$L = 2(w + w_1)$$

Dans une section droite de la bobine, nous définirons la position d'un point par sa distance r au centre du cercle, et par l'angle φ que fait le rayon r avec le rayon perpendiculaire à l'axe du tore, de telle sorte que sa distance à l'axe est $(a + r \cos \varphi)$. L'élément de section $r d\varphi \times dr$ compris entre deux circonférences concentriques (r et $r + dr$) et deux rayons (φ et $\varphi + d\varphi$) décrit, en tournant autour de l'axe du tore, une circonférence $2\pi(a + r \cos \varphi)$, et engendre un volume $du = 2\pi(a + r \cos \varphi) r d\varphi dr$. D'autre part le travail de la force f le long de cette dernière circonférence a les deux expressions :

$$2\pi(a + r \cos \varphi) \cdot f = 4\pi i$$

i désignant le courant total embrassé par cette circonférence, c'est-à-dire (puisque $I = 1$) le nombre des spires embrassées par elle.

Si la circonférence $2\pi(a + r \cos \varphi)$ est à l'intérieur du noyau,

elle embrasse toutes les spires; i est donc égal au nombre total Nne des spires de la bobine, et :

$$f = \frac{2Nne}{a + r \cos \varphi}$$

Si la circonférence est au contraire décrite dans la masse même des spires, les spires embrassées sont celles dont le rayon est compris entre r et $(R + e)$; leur nombre i est égal à $Nn(R + e - r)$, d'où :

$$f_1 = \frac{2Nn(R + e - r)}{a + r \cos \varphi}$$

Ceci n'est, il est vrai, qu'une approximation supposant que le fil inducteur remplit toute l'épaisseur de la bobine sans y laisser d'intervalle vide, c'est-à-dire que la *densité* du courant est constante dans toute la section.

En désignant par μ la perméabilité magnétique du noyau, celle des spires étant 1 (fil de cuivre), on aura donc :

$$w = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{8\pi} \left(\frac{2Nne}{a + r \cos \varphi} \right)^2 2\pi (a + r \cos \varphi) r d\varphi dr$$

$$w_1 = \int_R^{R+e} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi} \left[\frac{2Nn(R + e - r)}{a + r \cos \varphi} \right]^2 2\pi (a + r \cos \varphi) r d\varphi dr$$

Les valeurs de ces intégrales sont données par les formules ¹ :

$$w = 2\pi\mu (Nne)^2 (a - \sqrt{a^2 - R^2})$$

¹ Le calcul de ces intégrales se ramène à celui des suivantes :

$$\int \frac{d\varphi}{a + r \cos \varphi} = - \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2} \sin \varphi}{r - a \cos \varphi} \right)$$

$$\int \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = - \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\int \frac{(R + e - r)^2 r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = - \sqrt{a^2 - r^2} \left[(R + e)(R + e - r) + \frac{1}{3}(r^2 + 2a^2) \right]$$

$$- a^2 (R + e) \operatorname{arc} \sin \frac{r}{a}$$

$$\frac{w_1}{2\pi N^2 r^2} = -\sqrt{a^2 - (R+e)^2} \frac{(R+e)^2 + 2a^2}{3} - a^2 (R+e) \arcsin \frac{R+e}{a} \\ + \sqrt{a^2 - R^2} \frac{3e(R+e) + R^2 + 2a^2}{3} + a^2 (R+e) \arcsin \frac{R}{a}$$

On déduira de là L . La valeur de w_1 sera beaucoup plus faible que celle de w avec un noyau en fer. En la négligeant, on aura la formule simple :

$$L = 2w = 4\pi\mu (Nne)^2 (a - \sqrt{a^2 - R^2})$$

On calculerait d'une manière analogue le coefficient d'induction mutuelle de deux circuits enroulés sur le même noyau en forme de tore.

172. Cas d'un circuit à conducteurs cylindriques parallèles. — Soient deux fils rectilignes parallèles de rayons $A_1 C_1 = a_1$ et $A_2 C_2 = a_2$, dont les axes $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ sont à la distance d , ces fils

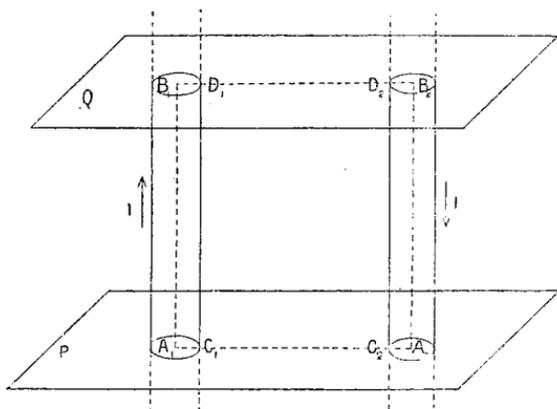


Fig. 74.

étant pratiquement indéfinis et reliés à leurs extrémités de manière à former un circuit fermé (fig. 74). Les lignes de force sont dans des plans perpendiculaires à la direction commune des fils. P et Q étant deux de ces plans situés à l'unité de distance, le flux de force moyen à travers le circuit entre ces deux plans, si $I = 1$, représentera le coefficient de self-induction L par unité de longueur, au coefficient k' près.

Nous calculerons d'abord le flux de force dû au courant de

gauche (ascendant) à travers le circuit. Remarquons d'abord que la force magnétique due à ce courant en un point extérieur au fil et situé à la distance r de l'axe $A_1 B_1$ est donnée par la formule de Biot et Savart :

$$f = \frac{2I}{r} = \frac{2}{r} \quad (17)$$

car le travail de cette force le long d'une circonférence ayant pour axe $A_1 B_1$, c'est-à-dire $f \times 2 \pi r$, est égal, comme on le sait, à $4 \pi I = 4 \pi$. Mais si le point considéré est dans la section même du conducteur, la circonférence, au lieu d'entourer le courant I tout entier n'en embrasse qu'une fraction égale au rapport de l'aire πr^2 à la section totale πa_1^2 , et la force magnétique f_1 est telle que l'on a :

$$f_1 \times 2\pi r = 4\pi I \times \frac{\pi r^2}{\pi a_1^2} = \frac{4\pi r^2}{a_1^2}$$

d'où :

$$f_1 = \frac{2r}{a_1^2} \quad (17')$$

Ceci posé, le flux de force à calculer peut être divisé en deux parties, l'une qui correspond aux tubes de force circulaires existant dans la section même du conducteur de gauche, l'autre qui correspond aux tubes extérieurs.

1° Le flux de force *moyen* à travers la section πa_1^2 du conducteur s'obtiendra : en prenant un tube annulaire de rayon r , d'épaisseur dr (et de hauteur 1), dans lequel le flux a pour valeur le produit de la force f_1 par la section $dr \times 1$; en multipliant ce flux $f_1 dr$ par la fraction $\frac{\pi r^2}{\pi a_1^2}$ du courant qu'embrasse le tube, et en faisant la somme de tous les produits semblables pour tous les tubes existant dans la section du conducteur. Le résultat est :

$$\int_0^{a_1} f_1 dr \times \frac{\pi r^2}{\pi a_1^2} = \frac{1}{2}$$

et doit être multiplié par le coefficient $\frac{1}{k_1}$, qui n'est autre que le pouvoir inducteur magnétique μ_1 du conducteur dans le système

électromagnétique. On obtient ainsi $\frac{1}{2} \mu_1$ comme premier terme entrant dans la valeur de L .

2° Le flux de force moyen correspondant aux tubes extérieurs au conducteur a_1 peut se calculer en supposant le conducteur a_2 réduit à son axe $A_2 B_2$, et est par suite égal au flux à travers le rectangle $C_1 D_1 B_2 A_2$, soit :

$$\int_{a_1}^d f dr = \int_{a_1}^d \frac{2 dr}{r} = 2 L \frac{d}{a_1}$$

L désignant le symbole des logarithmes népériens. En effet, le champ magnétique créé par un conducteur cylindrique rectiligne autour de lui étant le même que si le courant qui le parcourt était concentré sur son axe (formule 17), il en résulte que le conducteur a_2 peut être supposé réduit à son axe $A_2 B_2$ lorsqu'il s'agit de calculer soit le flux de force moyen qu'il émet à travers un autre conducteur, soit celui que cet autre conducteur émet à travers lui. Le flux $2 L \frac{d}{a_1}$ doit être multiplié par le coefficient $\frac{1}{k'}$ ou μ relatif au milieu ambiant, ce qui donne pour le deuxième terme de L :

$$2\mu L \frac{d}{a_1}$$

Le flux de force moyen émis par le courant de droite (descendant) à travers le circuit donnera de même les termes $\frac{1}{2} \mu_2$ et $2 \mu L \frac{d}{a_2}$; de telle sorte que l'on a finalement :

$$L = 2\mu L \frac{d^2}{a_1 a_2} + \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) \quad (18)$$

Le raisonnement précédent est correct lorsque les pouvoirs inducteurs magnétiques μ_1 , μ_2 et μ sont égaux. Dans le cas contraire, si par exemple le milieu ambiant est de l'air et si les conducteurs sont en fer, le champ magnétique créé par le fil a_1 n'est plus de révolution autour de l'axe $A_1 B_1$ comme on l'a supposé, à cause de la perturbation apportée par le fil a_2 . Toutefois cette perturbation est assez faible et la formule (18) est suffisamment

approchée si la distance d des conducteurs est grande par rapport à leurs rayons a_1 et a_2 ¹.

Exemples numériques : 1° Ligne télégraphique aérienne à double fil de cuivre de diamètres, $2a_1 = 2a_2 = 3^{\text{mm}}$, l'écartement des fils étant $d = 1^{\text{m}},50$. Dans le système électromagnétique $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$, et le coefficient de self-induction est égal à 28,6 par unité de longueur (quelle que soit cette unité) soit 0,00286 (unité pratique) par kilomètre (10^{-4} quadrant)

2° Ligne télégraphique aérienne à double fil de fer, de diamètres $2a_1 = 2a_2 = 4^{\text{mm}}$, l'écartement des fils étant de 2 mètres. Le coefficient L est égal à $(27,6 + \mu_1)$ par unité de longueur. Si la perméabilité μ_1 du fer atteint le chiffre 500 (§ 115), le coefficient L est alors égal à :

527,6 par unité de longueur ;

soit :

0,05276 (unité pr.) par kilomètre ;

et l'on voit que le terme $2L \frac{d^2}{a_1 a_2}$ et, par suite, les variations de diamètre et d'écartement des fils ont une très faible influence sur cette valeur. En pratique, les fils ne sont pas en fer doux, et la valeur de μ varie beaucoup d'un échantillon à l'autre. Pour simplifier, nous ne tenons pas compte ici des phénomènes de saturation magnétique et de rémanence qui se manifestent dans le fer.

173. Fils compounds. — On emploie quelquefois en télégraphie des fils dits composés ou compounds. Ce sont des fils dont l'âme est en acier et la gaine en cuivre, ou inversement. Le calcul de leur self-induction L ne diffère du précédent que par la valeur du flux de force moyen correspondant aux tubes de force compris dans l'intérieur du conducteur. Soient : a , le rayon de l'âme et a' , celui du fil entier ; σ et σ' les densités du courant dans l'âme et dans la gaine extérieure ; μ, μ' , les pouvoirs inducteurs magnétiques des deux métaux en jeu. En un point à la distance r de l'axe, on sait que la force magnétique f_1 est égale à $\frac{2i}{r}$, i désignant la frac-

¹ V. Maxwell, traduction française, t II, p. 372, note de M. Potier.

tion du courant I circulant à travers la section du cercle de rayon r , Le flux $d\mathcal{C}$ à travers un tube de force annulaire de hauteur 1 et d'épaisseur dr est $f_1 dr$. On a donc à calculer :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{I^2} \int_0^{a'_1} \mu f_1 dr \\ = & \mu_1 \int_0^{a_1} 2 \left(\frac{\sigma_1 \pi r^2}{I} \right)^2 \frac{dr}{r} + \mu'_1 \int_{a_1}^{a'_1} 2\pi^2 \left[\frac{\sigma_1 a_1^2 + \sigma'_1 (r^2 - a_1^2)}{I} \right]^2 \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

Remarquons, d'autre part, que l'on a :

$$I = \sigma_1 \pi a_1^2 + \sigma'_1 \pi (a_1'^2 - a_1^2)$$

Le premier terme de L , qui était $\frac{1}{2} \mu_1$ au paragraphe précédent, sera donc ici :

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_1 \sigma_1^2 a_1^4 + \mu'_1 \sigma'_1 (a_1'^2 - a_1^2) [4\sigma_1 a_1^2 + \sigma'_1 (a_1'^2 - 3a_1^2)] + 4\mu'_1 (\sigma_1 - \sigma'_1)^2 a_1^4 L \frac{a_1'}{a_1}}{[\sigma_1 a_1^2 + \sigma'_1 (a_1'^2 - a_1^2)]^2}$$

Les densités respectives σ_1 et σ'_1 du courant dans les deux métaux sont proportionnelles aux conductibilités. On verrait que la self-induction du fil compound est notablement plus grande lorsque la gaine est en acier et l'âme en cuivre que dans le cas inverse, les poids de chaque métal étant les mêmes dans les deux cas.

174. Cas d'un câble à conducteurs concentriques. — Considérons un fil cylindrique, de rayon a , et de perméabilité μ_1 , entouré d'un manchon cylindrique de rayons intérieur a_2 et extérieur a'_2 et de perméabilité μ_2 , ce manchon servant au retour du courant (fig. 75). Nous calculerons L par la formule (16) pour montrer l'usage de celle-ci. On aura encore pour expression du flux $d\mathcal{C}$ à travers un tube de force annulaire de hauteur 1 et d'épaisseur dr .

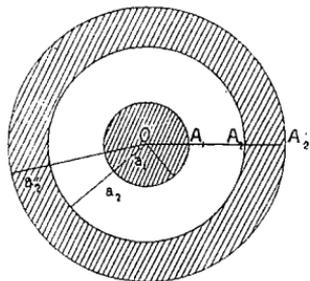


Fig. 75.

$$d\mathcal{C} = f dr = 2i \frac{dr}{r}$$

On peut donc écrire, en considérant successivement les tubes de force à l'intérieur du fil cylindrique, du diélectrique (de perméabilité μ) et du manchon ;

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\int_0^{a_1} 2\mu_1 \frac{i^2}{r} dr + \int_{a_1}^{a_2} 2\mu \frac{i^2}{r} dr + \int_{a_2}^{a'_2} 2\mu_2 \frac{i^2}{r} dr \right]$$

A l'intérieur du fil, σ_1 désignant la densité du courant, on a :

$$i = \sigma_1 \pi r^2$$

Dans le diélectrique :

$$i = \sigma_1 \pi a_1^2 = I$$

Dans le manchon :

$$i = \sigma_1 \pi a_1^2 - \sigma_2 \pi (r^2 - a_2^2)$$

Le terme $\sigma_2 \pi (r^2 - a_2^2)$ est affecté du signe moins parce qu'il représente le courant de retour qui est de sens inverse au courant d'aller. En dehors du manchon, i est nul. On a d'ailleurs :

$$\sigma_1 \pi a_1^2 = \sigma_2 \pi (a'_2{}^2 - a_2^2) = I$$

En tenant compte de cette relation, on trouve, tous calculs faits :

$$L = 2\mu L \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_2 \left[\left(\frac{2a'_2{}^2}{a'_2{}^2 - a_2^2} \right)^2 L \frac{a'_2}{a_2} - \frac{3a'_2{}^2 - a_2^2}{a'_2{}^2 - a_2^2} \right] \quad (19)$$

Le facteur de $\frac{1}{2} \mu_2$ qui se trouve entre crochets est fonction de $\frac{a'_2}{a_2}$ seulement. On pourrait donc dresser une table des valeurs de ce coefficient A pour diverses valeurs du rapport $\frac{a'_2}{a_2}$ lorsque a'_2 croît de a_2 jusqu'à l'infini. Posons, par exemple :

$$\frac{a_2^2}{a'_2{}^2} = 1 - x$$

d'où

$$-A = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} L (1 - x)$$

et l'on dressera la table suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \dots \quad \frac{15}{16} \quad \dots \quad 1 \\ \frac{d'_2}{a_2} = 1 \quad 1,23 \quad 1,41 \quad 1,73 \quad 2 \quad \dots \quad 4 \quad \dots \quad \infty \\ A = 0 \quad 0,298 \quad 0,545 \quad 0,944 \quad 1,262 \dots \quad 3,18 \dots \quad \infty \end{array} \right.$$

Le calcul de L se fera donc facilement.

La perméabilité du diélectrique est égale à 1, ainsi que celles des métaux lorsque ceux-ci ne sont pas magnétiques (cuivre, plomb, etc.) : $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$.

Pour calculer la self-induction d'un câble télégraphique, on aura une approximation plus ou moins grossière en appliquant les formules précédentes, le manchon n'étant autre chose que l'armatur en fer ou en plomb du câble. L'approximation sera d'autant plus satisfaisante que le milieu (sol) environnant le câble sera moins bon conducteur et, par conséquent, participera moins aux phénomènes d'induction qui ont lieu dans le câble. Si ce milieu était suffisamment isolant, l'assimilation établie entre le câble et le fil avec manchon formant retour serait satisfaisante.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé constante la densité du courant aux divers points de la section du conducteur. Si cette densité n'est pas la même à diverses distances de l'axe, nos calculs ne sont qu'approchés. Ils le seront suffisamment toutefois si la variation du courant n'est pas trop rapide, car alors la densité est à peu près uniforme comme dans l'état permanent.

175. Etat variable du courant dans un circuit. — Le coefficient L de self-induction d'un circuit a été défini au § 156 et calculé dans les exemples ci-dessus en supposant uniforme la densité du courant dans la section d'un conducteur cylindrique homogène. Cette densité est uniforme lorsque le courant est constant ; mais, dans l'état variable, il n'en est pas de même, car la force *e.m.* induite n'est pas uniforme dans la section du conducteur. La force *e.m.* induite dans le circuit ne peut donc pas être représentée par la formule — $L \frac{dI}{dt}$, si ce n'est approximativement dans le cas où les variations du courant ne sont pas trop rapides, ainsi que la remarque en a été faite au § 161. Mais elle sera toujours représentée, au coefficient $\frac{1}{k'} = \mu$ près, par la variation du flux de force

moyen \mathcal{E}_m dans l'unité de temps. Nous allons indiquer comment on peut la calculer dans un cas particulier.

Considérons un circuit comprenant un fil cylindrique, de rayon a , de longueur très grande par rapport à ce rayon et en outre assez éloignée des autres parties du circuit pour que l'induction due à celles-ci soit sensiblement uniforme dans toute sa section. La densité u du courant est uniforme en tous les points situés à une même distance r de l'axe du cylindrique, mais varie avec r . Développons u en série suivant les puissances croissantes de r , en supposant ce développement légitime, sauf vérification ultérieure. Comme u est évidemment une fonction paire en r , on devra poser :

$$u = u_0 + u_1 r^2 + \dots + u_n r^{2n} + \dots$$

Le courant total i à l'intérieur du cercle de rayon r est :

$$i = \int_0^r u \cdot 2\pi r \, dr = \pi r^2 \left(u_0 + \frac{u_1}{2} r^2 + \dots + \frac{u_n}{n+1} r^{2n} + \dots \right) \quad (20)$$

La force magnétique f en un point à la distance r de l'axe ne dépend que de ce courant i , comme on l'a démontré déjà plusieurs fois (§ 172) :

$$f = \frac{2i}{r} = 2\pi r \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{n+1} r^{2n} + \dots \right)$$

Le flux de force, par unité de longueur du conducteur, à travers les tubes de force circulaires, compris dans la partie annulaire de la section πa^2 extérieure au cercle πr^2 , est égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \int_r^a f \, dr = \left[\pi r^2 \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{(n+1)^2} r^{2n} + \dots \right) \right]_r^a \\ &= \pi a^2 \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{(n+1)^2} a^{2n} + \dots \right) \\ &\quad - \pi r^2 \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{(n+1)^2} r^{2n} + \dots \right) \end{aligned}$$

Si l'on considère un filet longitudinal du conducteur, de section infiniment petite, situé à la distance r de l'axe, le flux de force des

tubes qui l'embrassent, par unité de longueur, se compose de ce flux \mathcal{E}_r et du flux \mathcal{E}_s à travers les tubes qui embrassent la section entière πa^2 du conducteur. La force *e.m.* induite dans ce fillet, par unité de longueur, sera donc :

$$-\frac{d(\mu_1 \mathcal{E}_r + \mu_2 \mathcal{E}_s)}{dt}$$

μ_1 désignant la perméabilité magnétique du conducteur et μ_2 un facteur analogue pour les tubes extérieurs à la section du conducteur. Le terme $\mu_2 \mathcal{E}_s$ est indépendant de r et est proportionnel à l'intensité totale I , soit $\mu_2 \mathcal{E}_s = \lambda I$.

D'autre part, la chute de potentiel, sur l'unité de longueur du fillet, abstraction faite de la force *e.m.* induite, serait égale à ρu , ρ désignant la résistance spécifique du conducteur. Donc la chute de potentiel résultante est :

$$\begin{aligned} E &= \rho u + \frac{d(\mu_1 \mathcal{E}_r + \mu_2 \mathcal{E}_s)}{dt} \\ &= \rho (u_0 + \dots + u_n r^{2n} + \dots) + \mu_1 \pi a^2 \frac{d}{dt} \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{(n+1)^2} a^{2n} + \dots \right) \\ &\quad - \mu_1 \pi r^2 \frac{d}{dt} \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{(n+1)^2} r^{2n} + \dots \right) + \lambda \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

La valeur de E , devant être indépendante de la position du fillet considéré, c'est-à-dire de r , on en déduit, en annulant les coefficients des diverses puissances de r :

$$\begin{aligned} \rho u_1 - \mu_1 \pi \frac{du_0}{dt} &= 0 \\ \vdots & \\ \rho u_n - \frac{\mu_1 \pi}{n^2} \frac{du_{n-1}}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$u_n = \frac{1}{(1.2 \dots n)^2} \left(\frac{\mu_1 \pi}{\rho} \right)^n \frac{d^n u_0}{dt^n} \quad (21)$$

et, par suite :

$$\begin{aligned} E &= \rho u_0 + \mu_1 \pi a^2 \frac{d}{dt} \left(u_0 + \dots + \frac{u_n}{(n+1)^2} a^{2n} + \dots \right) + \lambda \frac{dI}{dt} \\ &= \lambda \frac{dI}{dt} + \rho \left[u_0 + \alpha \frac{du_0}{dt} + \dots + \frac{\alpha^n}{(1.2 \dots n)^2} \frac{d^n u_0}{dt^n} + \dots \right] \end{aligned} \quad (22)$$

en posant :

$$\frac{\mu_1 \pi a^2}{\rho} = \alpha \quad (23)$$

Ecrivons que la valeur (20) de i , pour $r = a$, est égale à I . On aura, en tenant compte de (21) :

$$\begin{aligned} I &= \pi a^2 \left(u_0 + \frac{u_1}{2} a^2 + \dots + \frac{u_n}{n+1} a^{2n} + \dots \right) \\ &= \pi a^2 \left(u_0 + \frac{\alpha}{2} \frac{du_0}{dt} + \dots + \frac{\alpha^n}{(1.2 \dots n)^2 (n+1)} \frac{d^n u_0}{dt^n} + \dots \right) \end{aligned}$$

De cette équation, qui donne l'expression de I en série suivant les dérivées successives du u_0 , on peut inversement déduire l'expression de u_0 en série suivant les dérivées de I ¹. En portant ensuite cette expression de u_0 dans (22), et posant :

$$\begin{aligned} \lambda + \frac{\mu_1}{2} &= L \\ \frac{\rho}{\pi a^2} &= R \end{aligned} \quad (24)$$

il vient finalement :

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} - R \left[\frac{\alpha^2}{12} \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{\alpha^3}{48} \frac{d^3 I}{dt^3} + \frac{\alpha^4}{180} \frac{d^4 I}{dt^4} - \frac{13\alpha^5}{8640} \frac{d^5 I}{dt^5} + \dots \right] \quad (25)$$

Cette formule montre que la force *e.m.* induite par le courant I sur l'unité de longueur de son propre circuit se compose : 1^o du

¹ Etant donnée la série différentielle :

$$I = a_0 u + a_1 \frac{du}{dt} + a_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots$$

considérons la série algébrique correspondante :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

et prenons l'inverse :

$$\frac{1}{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

Le coefficient b_0 est égal à $\frac{1}{a_0}$; $b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}$; $b_2 = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}$

Les coefficients b étant ainsi déterminés, il est facile de vérifier que l'on a :

$$u = b_0 I + b_1 \frac{dI}{dt} + b_2 \frac{d^2 I}{dt^2} + \dots$$

terme $-L \frac{dI}{dt}$, que nous avons seul considéré précédemment;
2° d'un terme complémentaire

$$-R \left(\frac{\alpha^2}{12} \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{\alpha^3}{48} \frac{d^3 I}{dt^3} + \dots \right)$$

dépendant des dérivées d'ordre supérieur de I . Mais, si l'on intègre (25) entre deux époques t_1 et t_2 où le courant a des valeurs constantes I_1 et I_2 , c'est-à-dire où les dérivées $\frac{d^2 I}{dt^2}$, $\frac{d^3 I}{dt^3}$, ... sont nulles, on aura simplement :

$$\int_{t_1}^{t_2} E dt = R \int_{t_1}^{t_2} I dt + L (I_2 - I_1)$$

Dans ces conditions tout se passe donc comme si la force *e.m.* induite se réduisait au terme $-L \frac{dI}{dt}$.

Le terme complémentaire de la formule (25) a d'autant plus d'importance que les valeurs des dérivées $\frac{d^2 I}{dt^2}$, $\frac{d^3 I}{dt^3}$, ... sont plus grandes. Pour nous rendre compte de son importance, supposons que le courant I suit la loi périodique :

$$I = I_0 \sin mt$$

On aura :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -I_0 m^2 \sin mt = -m^2 I$$

d'où :

$$E = R \left(1 + \frac{\alpha^2 m^2}{12} - \frac{\alpha^4 m^4}{180} - \dots \right) I + L \left(1 - \frac{R}{L} \frac{\alpha^2 m^2}{48} - \dots \right) \frac{dI}{dt}$$

Tout se passe dans ce cas particulier comme si le circuit avait, par unité de longueur, une résistance :

$$R' = R \left(1 + \frac{\alpha^2 m^2}{12} - \frac{\alpha^4 m^4}{180} - \dots \right)$$

et une self-induction :

$$L' = L \left(1 - \frac{R}{L} \frac{\alpha^2 m^2}{48} - \dots \right)$$

et que la force *e.m.* induite fût simplement de la forme $-L' \frac{dI}{dt}$.

Pour que R' et L' ne diffèrent pas sensiblement de R et de L , ce que l'on admet ordinairement en pratique pour simplifier les calculs, il faut que les valeurs de $\frac{\alpha^2 m^2}{12} = \frac{1}{12} \left(\frac{\mu_1 m}{R} \right)^2$ et de :

$$\frac{R}{L} \frac{\alpha^3 m^2}{48} = \frac{\mu_1}{48 L} \left(\frac{\mu_1 m}{R} \right)^2$$

soient négligeables.

Exemples : 1° Fil de cuivre ($\mu_1 = 1$) de 1 ohm par kilomètre ($R = 10^4$). Pour que la valeur de $\frac{\alpha^2 m^2}{12}$ ne dépasse pas $\frac{1}{100}$, par exemple, il faut que :

$$\frac{1}{12} \left(10^{-4} m \right)^2 \ll \frac{1}{100}$$

ou :

$$m \ll 3464$$

La période $\tau = \frac{2\pi}{m}$ du courant devra donc être au moins égale à $\frac{2\pi}{3464}$; ou encore le nombre de périodes par seconde ne devra pas dépasser $\frac{3464}{2\pi} = 551$. Cette limite du nombre de périodes serait plus élevée encore si la résistance du conducteur était plus grande. D'autre part, le facteur $\frac{\mu_1}{48L} = \frac{1}{48L}$ est une faible fraction de l'unité (voir comme exemple la valeur de L dans le cas du § 172). Il résulte de là que, dans le cas des lignes téléphoniques ordinaires en cuivre, l'approximation donnée par la formule :

$$E = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (26)$$

sera assez satisfaisante.

2° Conducteur en cuivre de 45^{mm} de diamètre pour éclairage électrique par courants alternatifs de 50 périodes par seconde ($R = 10^2$, $m = 314$, $\mu_1 = 1$). On a :

$$\frac{\alpha^2 m^2}{12} = 0,83$$

La valeur de $\frac{\mu_1}{48L}$ est encore très faible, et L' peut être remplacé

par L ; mais R' ne peut être remplacé par R , et la formule (26) n'est plus admissible. On doit alors faire le calcul exact de R' .

3° Fil de fer de 4^{mm} de diamètre ($R = 10^5$) ; nous prendrons $\mu = 500$. Pour que la valeur de $\frac{\alpha^2 m^2}{12}$ ne dépasse pas $\frac{1}{10}$, il faut que le nombre de périodes par seconde ne dépasse pas 33. On ne saurait donc employer en toute rigueur la formule (26) en téléphonie dans le cas des fils de fer.

On pourrait encore étudier la variation de la densité u du courant aux divers points de la section du conducteur dans le cas d'un courant périodique. On verrait ainsi que la densité décroît en allant de la périphérie vers le centre. Cette décroissance est d'autant plus accentuée que le diamètre du conducteur, sa perméabilité μ et le nombre des périodes par seconde sont plus considérables. La partie centrale du conducteur est donc moins utile que la partie extérieure, et l'on peut avoir intérêt à la supprimer en employant des conducteurs tubulaires, comme l'a indiqué Sir W. Thomson ¹, pour réduire le poids de matière. L'inégalité de densité du courant a toujours pour effet d'accroître la résistance apparente R' du conducteur et par suite la chaleur dégagée, en vertu de la loi de Joule, par un même courant I .

176. Emploi de noyaux de fer dans les bobines. — Les réserves auxquelles est sujette la théorie du magnétisme dans le cas d'un milieu fortement magnétique (fer, acier, nickel, cobalt) doivent évidemment être répétées en électromagnétisme. Les électroaimants à noyau de fer ou d'acier donnent lieu aux mêmes phénomènes connus sous les noms de saturation magnétique, de force coercitive, d'hystérésis, etc. Dès lors les coefficients de self-induction ou d'induction mutuelle de telles bobines n'ont point une valeur déterminée. Pour une même qualité de fer, ils varient avec l'intensité du courant et avec la forme du noyau.

Toutefois, dans certaines applications, notamment en téléphonie, lorsque le courant varie très peu de part et d'autre d'une certaine intensité moyenne, on peut admettre que ces coefficients ont une valeur sensiblement constante. Ceci est d'autant plus exact que les

¹ *Bulletin de la Société française de physique*. 1888.

variations du courant sont plus rapides ; il est vrai qu'alors la correction signalée au paragraphe précédent, en raison des inégalités de densité du courant, peut devenir très importante, et qu'en outre il peut se développer par induction dans le noyau des courants, dits de *Foucault*, qui réagissent sensiblement sur le courant principal. Ces effets sont encore compliqués par un phénomène d'induction électrostatique entre les spires voisines d'un électroaimant (§ 194).

Quoi qu'il en soit, dans le cas où la force *e.m.* *E* agissant sur un circuit est de la forme périodique :

$$E = E_0 \sin mt$$

le courant *I*, après une période de début plus ou moins courte, deviendra également périodique et de la forme :

$$I = I_0 \sin m(t - t_0)$$

pourvu que la saturation magnétique ou des effets analogues n'interviennent pas. Il y a proportionnalité entre I_0 et E_0 , et l'on peut poser :

$$E = RI + L' \frac{dI}{dt}$$

R' et L' étant des coefficients dépendant seulement de la période $\frac{2\pi}{m}$ et de la constitution du circuit. Ainsi tout se passe comme si le circuit avait une résistance R' et une self-induction L' , la force *e.m.* induite se réduisant à $-L' \frac{dI}{dt}$. L'énergie fournie par la force *e.m.* *E*, soit $\int EI dt$, comprend une partie $\int R'I^2 dt$ dissipée sous forme d'échauffement du circuit, du noyau, etc., et une partie $\int L'I dI$ emmagasinée à l'état potentiel et susceptible d'être restituée intégralement.

Le coefficient de self-induction d'un circuit à noyau magnétique n'ayant pas un sens précis, au lieu de représenter la force *e.m.* induite par $-\frac{d(LI)}{dt}$, nous la définirons par la variation du flux de force \mathcal{E} à travers le circuit. En faisant $k' = 1$, l'énergie dépensée par le courant pour accroître celle du champ magnétique, lorsque \mathcal{E} varie de $d\mathcal{E}$, sera toujours représentée par $Id\mathcal{E}$. Si en outre

une force étant appliquée au noyau, celui-ci s'allonge d'une quantité dl , l'accroissement d'énergie sera :

$$dW = I d \mathcal{E} + \varphi dl$$

On tire de là, comme au § 131 :

$$\frac{\partial l}{\partial I} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi}$$

Cette relation montre que si une traction φ a pour effet d'accroître le flux de force $\left(\frac{d \mathcal{E}}{d \varphi} > 0\right)$ à travers le circuit (ou la self-induction de celui-ci), le courant I aura pour effet d'allonger le noyau $\left(\frac{dl}{dI} > 0\right)$. — Pour que le raisonnement soit rigoureux et que ce résultat soit applicable, il faut que dW soit réellement une différentielle exacte, ce qui ne peut avoir lieu que si l'énergie $I d \mathcal{E}$ reste à l'état potentiel et n'est pas sensiblement dissipée sous forme de chaleur d'aimantation.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

177. Action d'un champ électrostatique sur un aimant ou un courant variables ¹. — Considérons en un point O (fig. 76) un aimant infiniment court dont le moment $\overline{\mathcal{M}}$ s'accroît géométriquement de la grandeur $\frac{d\overline{\mathcal{M}}}{dt} = \overline{\mathcal{M}'}$ dans l'unité de temps. D'après ce qui a été dit au § 164, cet accroissement $\overline{\mathcal{M}'}$ développe, par induction, en un point quelconque q une force électrique $\overline{\mathcal{E}}$ égale au potentiel vecteur de $\overline{\mathcal{M}'}$, soit :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{M}' \sin \alpha}{r^2}$$

Cette force électrique $\overline{\mathcal{E}}$ est perpendiculaire au plan passant par le point q et la droite O $\overline{\mathcal{M}'}$. Si, au lieu du moment magnétique $\overline{\mathcal{M}'}$

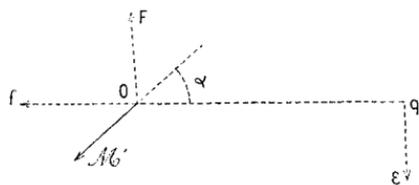


Fig. 76.

on imagine un élément de courant i , de longueur ds , dirigé dans le sens O \mathcal{M}' , et tel que le produit ids soit numériquement égal à \mathcal{M}' , la force magnétique induite au point q par cet élément en vertu de la loi

hypothétique de Laplace serait, comme on le sait, égale à :

$$\frac{i ds \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mathcal{M}' \sin \alpha}{r^2} = \mathcal{E} \quad (1)$$

et aurait même direction que \mathcal{E} , au sens près.

¹ *Comptes rendus*, 6 juin 1887, t. CV.

La variation de l'aimant $\overline{\mathcal{M}}$ produit donc autour de lui un champ électrique exactement semblable au champ magnétique dû à un élément de courant dont le moment ids serait égal en grandeur et en direction, mais de sens contraire à la variation \mathcal{M}' du moment \mathcal{M} dans l'unité de temps.

Si l'on suppose une quantité q d'électricité concentrée au point q , elle subira de la part de l'aimant variable $\overline{\mathcal{M}}$ une force mécanique égale à $q \mathcal{E}$. Si l'application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction est légitime ici, l'aimant \mathcal{M} devra éprouver une réaction égale et parallèle à $q \mathcal{E}$, mais de sens opposé, soit :

$$\begin{aligned} F &= \frac{q \mathcal{M}' \sin \alpha}{r^2} \\ &= \frac{1}{k} f \frac{d \mathcal{M}}{dt} \sin \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

en désignant par f la force électrique $k \frac{q}{r^2}$ développée en O sous l'action de la quantité q . Cette réaction est semblable, au signe près, à celle qu'un pôle magnétique q placé en q exercerait sur un élément de courant $ids = \overline{\mathcal{M}'}$ placé en O ; elle est perpendiculaire au plan directeur $fO \mathcal{M}'$.

On déduit de là que la force mécanique subie par l'aimant variable \mathcal{M} dans un champ électrostatique quelconque, dû à des quantités d'électricité $q, q', q'' \dots$, sera encore représentée par la formule (2), où f désigne la force électrique résultante en O. Si, au lieu d'un aimant \mathcal{M} on a en O un courant d'intensité i variable, embrassant une surface plane S par exemple, l'aimant équivalent étant normal à son plan et ayant pour moment :

$$\mathcal{M} = \frac{Si}{k'}$$

ce courant subira une poussée égale à :

$$F = \frac{1}{k} f \frac{d \mathcal{M}}{dt} \sin \alpha = \frac{1}{kk'} f S \frac{di}{dt} \sin \alpha$$

et dirigée, dans son plan, perpendiculairement à la projection de f . Lorsque l'intensité croît de o à i , l'impulsion totale subie par le circuit est égale à :

$$\int F dt = \frac{1}{kk'} f Si \sin \alpha$$

Pour un solénoïde cylindrique contenant N spires situées dans des plans parallèles à la force f ($\alpha = 90^\circ$), l'impulsion serait :

$$\int \mathbb{F} dt = \frac{1}{kk'} fNSi$$

Le produit kk' étant égal au carré de la vitesse $a = 3 \times 10^{10}$ C.G.S., dans le cas où le milieu est de l'air, les applications de cette formule sont très simples.

On vient de voir : d'une part, qu'un aimant ou un courant variables induisent autour d'eux un champ électrique; d'autre part, qu'ils subissent l'action d'un champ électrique. On en conclut que deux courants ou aimants variables doivent agir l'un sur l'autre en raison de leurs variations. Le calcul se fait comme celui de l'action réciproque de deux courants permanents (§ 150). En particulier deux solénoïdes ou aimants fermés sur eux-mêmes, qui n'ont aucune action réciproque à l'état permanent, s'influenceront dans l'état variable. Si l'on fait le calcul de cette action dans des cas simples, on trouve qu'elle est extrêmement minime et insensible.

178. Potentiel vecteur d'un champ magnétique ou électrique. — D'après la définition donnée au § 164, le potentiel vecteur en un point q (fig. 76) sous l'action d'un aimant (ou d'un courant) de moment magnétique $\overline{\mathcal{M}}$, situé au point O , est représenté par la formule $\frac{\overline{\mathcal{M}} \sin \alpha}{r^2}$. Ceci suppose implicitement que le milieu est homogène; car si dans le milieu D_1 se trouve un corps D de nature différente, l'aimant \mathcal{M} induit dans D une aimantation apparente, dont le potentiel vecteur doit s'ajouter au sien. Nous allons donner sous une nouvelle forme l'expression générale du potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$.

Considérons d'abord le cas d'un milieu homogène soumis à un champ magnétique. Divisons-le en tubes de force élémentaires; soient ds la longueur et q_m le flux d'induction de l'un de ces tubes, que nous traiterons comme un aimant de moment $q_m ds$. L'ensemble des tubes compris entre deux surfaces équipotentiellles V et $(V + dV)$, infiniment rapprochées, constitue un feuillet magnétique équivalent à un courant qui en parcourrait le contour. Ce

contour se réduit à un point si les surfaces équipotentielles sont fermées, ou s'éloigne à l'infini si ces surfaces s'étendent elles-mêmes à l'infini ; dans les deux cas, le potentiel vecteur du courant est nul, et il en est de même de celui du feuillet équivalent. Le champ tout entier pouvant se diviser ainsi en feuillets fermés ou infinis, le potentiel vecteur résultant de tous les tubes élémentaires est nul.

Appliquons ceci au cas où l'on a dans le champ un feuillet composé de deux couches magnétiques $-Q_m$ et $+Q_m$ répandues sur deux surfaces infiniment voisines. Désignons $\overline{\mathcal{A}}_i$ et $\overline{\mathcal{A}}_e$ respectivement les potentiels vecteurs résultants des tubes intérieurs et des tubes extérieurs au feuillet. D'après ce qui vient d'être démontré, la somme $(\overline{\mathcal{A}}_i + \overline{\mathcal{A}}_e)$ est nulle. Or, les tubes intérieurs allant normalement de la face positive à la face négative et leurs flux d'induction n'étant autre chose que la charge magnétique Q_m du feuillet, $\overline{\mathcal{A}}_i$ est égal et opposé au potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$ du feuillet lui-même. Il en résulte que $\overline{\mathcal{A}}$ est égal au potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}_e$ résultant de l'ensemble des tubes du champ magnétique extérieur.

Si au lieu du feuillet $(-Q_m, +Q_m)$ on a un aimant ou un courant, ce résultat subsiste. Le champ intérieur au feuillet n'existe plus dans ce cas, et nous dirons que *le potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$ de l'aimant ou du courant en un point quelconque est égal au potentiel vecteur résultant des tubes de champ.*

Passons maintenant au cas où le milieu D , renferme un corps D de nature différente. Un tube de force ayant un flux d'induction q induit sur la surface de D une couche magnétique apparente : $-q'$ à l'entrée et $+q'$ à la sortie (§ 114 et 121). L'état du champ en un point quelconque est le même que si, le milieu étant homogène, les tubes de force à l'intérieur de D étaient *polarisés* ou aimantés, chacun des tubes élémentaires en lesquels on peut les décomposer possédant une couche $-q'$ sur une base et $+q'$ sur l'autre. Nous désignerons par $\overline{\mathcal{A}}_q$ le potentiel vecteur dû à ces tubes aimantés. $\overline{\mathcal{A}}_M$ représentant le potentiel vecteur $\frac{M \sin \alpha}{r^2}$ dû à l'aimant (ou au courant) \overline{M} seul, on aura comme résultante :

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}_M + \overline{\mathcal{A}},$$

Le champ tout entier étant ainsi rendu homogène, si on le divise en couches minces par des surfaces équipotentiellles, on voit, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, que $\overline{\mathcal{A}}_M$ est égal au potentiel vecteur résultant des tubes compris soit dans le volume D_1 (\mathcal{A}_D), soit dans le volume D . Comme pour les tubes du volume D le flux d'induction a été réduit de la valeur q à $(q - q')$, cette relation s'écrira :

$$\overline{\mathcal{A}}_M = \overline{\mathcal{A}}_{D_1} + \overline{\mathcal{A}}_{q - q'}$$

Il en résulte :

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}_{D_1} + \overline{\mathcal{A}}_{q - q'} + \overline{\mathcal{A}}_{q'}$$

La somme ($\overline{\mathcal{A}}_{q - q'} + \overline{\mathcal{A}}_{q'}$), relative aux tubes intérieurs à D , est égale au potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}_q$ de ces tubes dans lesquels le flux d'induction serait la somme $(q - q') + q' = q$.

En résumé, *le potentiel vecteur magnétique $\overline{\mathcal{A}}$ en un point, sous l'action d'un aimant ou d'un courant, dans un milieu quelconque, est égal à la résultante des potentiels vecteurs des tubes de force du champ créé par cet aimant ou ce courant, le moment magnétique d'un tube élémentaire étant le produit de sa longueur par son flux d'induction.*

On définira d'une manière analogue le potentiel vecteur d'un champ électrique. Le moment $\overline{\mathcal{M}}$ d'un tube élémentaire de ce champ étant le produit de sa longueur ds par son flux d'induction q_e , son potentiel vecteur sera défini par la même formule $\frac{\overline{\mathcal{M}} \sin \alpha}{r^2}$ en grandeur, direction et sens. Le potentiel vecteur électrique $\overline{\mathcal{B}}$ du champ sera la résultante de tous ces potentiels vecteurs élémentaires.

Nous avons vu, dans la théorie de l'induction électromagnétique, de quelle importance est la notion du potentiel vecteur magnétique $\overline{\mathcal{A}}$. On peut s'attendre à ce que le potentiel vecteur électrique $\overline{\mathcal{B}}$ joue un rôle analogue.

179. Réciprocité des actions électriques et magnétiques. — Le potentiel vecteur magnétique $\overline{\mathcal{A}}$ jouit des propriétés suivantes :

1° Sa dérivée $\frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt}$ en un point représente la force électrique $\overline{\mathcal{E}}$ induite en ce point :

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt} \quad (3)$$

2° L'intégrale $\int_C \mathcal{A}_s ds$ prise le long d'un contour C est égale, au coefficient $-\frac{1}{k}$ près, au flux de force magnétique \mathcal{E}_m à travers une surface limitée à ce contour, ou bien au produit de -4π par le flux d'induction Q_m .

$$\int_C \mathcal{A}_s ds = -\frac{1}{k} \mathcal{E}_m = -4\pi Q_m \quad (4)$$

Le signe — tient à la relation établie entre le sens positif du contour C et le côté positif d'une surface fictive limitée à ce contour.

Quant aux propriétés du vecteur $\overline{\mathcal{B}}$, elles découlent des considérations ci-après.

D'après les idées exposées au § 79, tout conducteur donnerait lieu à des phénomènes d'induction électrostatique et de conduction. Ce que nous avons appelé l'intensité i du courant ne serait autre chose que le flux d'induction consommé par unité de temps dans la section du conducteur. Cette consommation *sur place*, en vertu de la conductibilité du corps, sans intervention d'énergie extérieure, ne devrait donner lieu à aucune réaction extérieure. Lorsque le flux d'induction Q_e est maintenu constant, c'est que la déperdition i est réparée par un flux d'induction égal que fournit la source d'énergie extérieure dans l'unité de temps. Tout se passe comme si, au fur et à mesure que les tubes d'induction existant dans le conducteur s'y dissipent, il en arrivait d'autres de l'extérieur pour les remplacer. C'est le flux d'induction i arrivant de l'extérieur qui donnerait lieu aux effets magnétiques du courant, laissant ainsi la trace de son passage dans l'espace environnant. Dès lors, si le flux d'induction dans le conducteur, au lieu d'être simplement maintenu constant, s'accroît de $\frac{dQ_e}{dt}$ dans l'unité de temps, les effets magnétiques seront proportionnels, non plus à i ,

mais au flux total $\left(i + \frac{dQ_e}{dt}\right)$ arrivant dans l'unité de temps. Ceci devant être vrai quelle que soit la conductibilité du corps, subsisterait dans le cas limite d'un diélectrique; et comme alors la consommation i serait nulle, l'accroissement du flux d'induction devrait donner lieu aux mêmes effets magnétiques qu'un courant d'intensité $\frac{dQ_e}{dt}$.

Une conséquence, entre autres, résulte de là. Si un condensateur est intercalé sur un circuit, il se charge par le passage du courant dans celui-ci. Quoique le circuit conducteur soit interrompu, le courant peut être considéré, au point de vue de ses effets magnétiques, comme fermé par le diélectrique, à travers lequel la variation du flux d'induction ou de la charge est précisément égale à $\int i dt$. C'est là un fait dont la vérification expérimentale est difficile et n'a point encore été faite. Quoiqu'il en soit, nous adopterons l'hypothèse développée au § 79 et rappelée ci-dessus, sauf à la vérifier par ses conséquences ultérieures.

Dans cette hypothèse, puisque la force magnétique induite en un point par un élément de courant ids est représentée, dans l'état permanent, par la formule de Laplace $\frac{ids \sin \alpha}{r^2}$, dans l'état variable elle le sera par $\left(i + \frac{dq_e}{dt}\right) \frac{ds \sin \alpha}{r^2}$, c'est-à-dire, au signe près, par le potentiel vecteur de la quantité $\left(i + \frac{dq_e}{dt}\right) ds$ considérée comme un vecteur. Nous n'appliquerons, bien entendu, cette formule qu'au cas d'un circuit fermé. D'autre part, le travail de la force magnétique \mathcal{F} le long d'un contour fermé C , étant représenté par $4\pi I$ dans l'état permanent, le sera, dans l'état variable, par :

$$\int_C \mathcal{F} ds = 4\pi \left(1 + \frac{dQ_e}{dt}\right) \quad (5)$$

I et Q désignant l'intensité du courant et le flux d'induction électrique à travers une surface limitée au contour C .

Dans le cas d'un diélectrique, la force magnétique $\overline{\mathcal{F}}$ est, au signe près, la résultante des potentiels vecteurs des quantités $\frac{dq_e}{dt} ds = \frac{d}{dt} (q_e ds)$ relatives aux divers tubes de force du champ

électrique, ou encore la dérivée du potentiel vecteur résultant $\overline{\mathcal{B}}$ des tubes $q. ds$ (§ 178) :

$$\mathcal{F} = - \frac{d \overline{\mathcal{B}}}{dt} \quad (6)$$

En outre, l'équation (5) intégrée par rapport au temps, devient, en faisant $I = 0$:

$$\int_c ds \int \mathcal{F} dt = 4\pi Q.$$

ou, en remarquant que la projection \mathcal{F}_s de la dérivée $\frac{d \overline{\mathcal{B}}}{dt}$ est égal à la dérivée $\frac{d \mathcal{B}_s}{dt}$ de la projection sur l'élément ds .

$$\int_c \mathcal{B}_s ds = 4\pi Q. = \frac{\mathcal{C}_c}{k} \quad (7)$$

\mathcal{C}_c représente le flux d'induction électrique à travers le contour C, et k le coefficient de la formule fondamentale de Coulomb en électrostatique.

Les relations (3), (4), (6), et (7) établissent une réciprocité complète entre les propriétés électriques et les propriétés magnétiques d'un champ électromagnétique dans le cas d'un milieu diélectrique, les équations (3) et (4) devenant identiques, à part le signe de $\overline{\mathcal{B}}$, aux équations (6) et (7), lorsqu'on y remplace les quantités électriques par les quantités magnétiques correspondantes et inversement. Dans le cas d'un milieu conducteur la réciprocité n'existe pas, comme le montre la formule (5), le courant électrique I n'ayant pas d'analogue en magnétisme.

Les équations (4) et (7) montrent que les flux d'induction, soit magnétique, soit électrique, à travers une surface ne dépendent que du contour C de celle-ci. On déduit de là que la propriété essentielle des tubes de force, savoir la conservation du flux d'induction, subsiste dans l'état variable du champ comme dans l'état stable, si le milieu est diélectrique.

En somme, on peut se représenter, dans l'état variable, les tubes d'induction comme se déplaçant et se déformant dans le champ tout en conservant leur propriété fondamentale. Lorsqu'un tube d'induction électrique peut pénétrer *sur toute sa longueur* à l'intérieur

d'une masse conductrice, il y est *consommé*, ce qui donne lieu à un dégagement de chaleur ; c'est le cas des tubes de force reliant deux conducteurs chargés d'électricités de signes contraires, lorsqu'on vient à les réunir par un conducteur ininterrompu. Si, pendant le déplacement des tubes, une ligne de longueur 1 est coupée par un flux d'induction magnétique (ou électrique) Q' dans l'unité de temps, il en résulte la production d'une force électrique (ou magnétique) égale à $4 \pi Q'$. Le sens de cette force induite dépend du sens du déplacement des tubes.

Dans les équations (3), (4), (5), (6) et (7), \mathcal{E} et \mathcal{F} représentent seulement les forces électrique et magnétique induites par les variations du champ. Si l'on a en outre une force électrique $\overline{\mathcal{E}'}$ due à une électrisation fixe, on peut la supposer comprise dans $\overline{\mathcal{E}}$, qui représentera alors la force électrique totale en un point. Le potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$ sera défini par l'équation (3) comme l'intégrale de cette force électrique totale $\overline{\mathcal{E}}$. Puisque l'intégrale $\int_c \mathcal{E}' ds$ le long d'un contour fermé C est nulle, la valeur de l'intégrale $\int_c \mathcal{A} ds$ ne sera pas modifiée, et l'équation (4) subsistera. De même on peut généraliser le sens des équations (5), (6) et (7) en comprenant, s'il y a lieu, dans $\overline{\mathcal{F}}$ la force magnétique $\overline{\mathcal{F}'}$ due à une aimantation fixe.

180. Equations du champ électromagnétique dans l'état variable.

— D'après leurs définitions données dans les paragraphes précédents, les potentiels vecteurs $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{B}}$ et les forces $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{F}}$ en un point dépendent de corps électrisés, d'aimants ou de courants qui peuvent être très éloignés de ce point. Lorsqu'une variation se produit dans l'état électrique ou magnétique de ces corps, les variations correspondantes de $\overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mathcal{B}}$, $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ ont-elles lieu instantanément ?

Une telle simultanéité s'accorderait bien avec la théorie des actions directes à distance ; au contraire elle n'est pas admissible si les actions se transmettent de proche en proche à travers le milieu interposé entre les corps (§ 44). Sans faire d'hypothèse à cet égard, la question posée va être tranchée par l'étude même des équations (3) à (7).

On a vu en électrostatique (§ 24) que si une surface Σ divise

l'espace en deux parties A et B, l'action exercée à l'intérieur de A par les corps électrisés situés dans le volume B peut se réduire à celle d'une certaine couche électrique répartie sur la surface Σ . La même remarque s'applique en magnétisme et en électromagnétisme. On peut donc faire abstraction des corps éloignés et considérer leur action à l'intérieur de l'espace A comme due à une certaine électrisation ou aimantation, fixe ou variable, de la surface Σ qui limite A. Cela revient à dire, au point de vue analytique, que l'état du champ électromagnétique à l'intérieur de A est déterminé entièrement lorsque l'on donne cet état sur la surface Σ ainsi que les électrisations et aimantations développées à l'intérieur de A.

Ceci admis, si le volume A est très petit, les variations dans l'état des corps électrisés, aimants ou courants, situés soit sur Σ , soit à l'intérieur de A, produiront leur effet en un point quelconque de A au bout d'un temps très court, c'est-à-dire que les variations correspondantes de \mathcal{A} , \mathcal{B} , ... les suivront avec un très faible retard. En prenant le volume A infiniment petit, on peut absolument négliger ce retard et supposer les équations (3), (4), (5), (6) et (7) comme rigoureuses, le circuit fermé C étant à l'intérieur de A. On est ainsi conduit à abandonner la définition première de \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{E} , \mathcal{F} et à considérer ces éléments en un point comme des fonctions de l'état *actuel* du milieu en ce point, lesquelles sont reliées par les équations en question. Ces équations conviennent donc très bien pour étudier l'état variable du champ électromagnétique dans un milieu fixe. Nous allons les transformer à cet effet par l'emploi des coordonnées cartésiennes.

Soient : F, G, H les composantes du potentiel vecteur magnétique $\overline{\mathcal{A}}$ au point M (fig. 77) suivant trois axes rectangulaires Ox Oy, Oz ; X_e , Y_e , Z_e les composantes de la force électrique $\overline{\mathcal{E}}$, X_m , Y_m , Z_m celles de la force magnétique \mathcal{F} .

En égalant les projections de $\overline{\mathcal{E}}$ et de $\frac{d\overline{\mathcal{A}}}{dt}$ (équation 3) suivant les trois axes, on aura :

$$X_e = \frac{\partial F}{\partial t} ; Y_e = \frac{\partial G}{\partial t} ; Z_e = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8)$$

Pour appliquer l'équation (4), prenons pour C le contour rec-

tangulaire $M_0 M_1 M_2 M_3$, dont les côtés sont dx et dy , et qui a pour centre le point M .

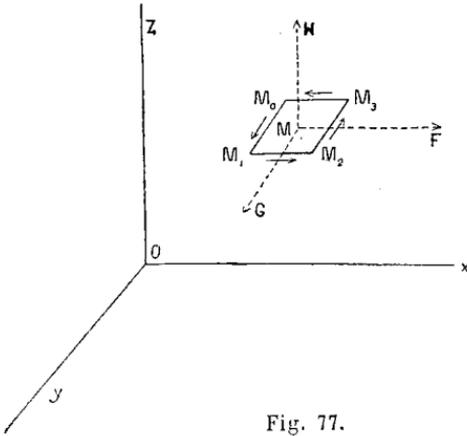


Fig. 77.

L'aire de ce rectangle est $dx dy$ et le flux de force magnétique entrant par la face négative (inférieure) est :

$$\mathcal{C}_m = Z_m dx dy$$

Quant à l'intégrale $\int \mathcal{A}_s ds$ le long du contour, elle se compose de quatre termes relatifs aux quatre côtés et qui sont, en tenant compte des signes :

$$\begin{aligned} \text{pour } M_0 M_1 : & + \left(G - \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \\ & - M_1 M_2 : + \left(F + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \\ & - M_2 M_3 : - \left(G + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \\ & - M_3 M_0 : - \left(F - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \end{aligned}$$

d'où :

$$\int \mathcal{A}_s ds = \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx dy$$

On aura donc, en vertu de la relation (4) :

$$Z_m = k' \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

En considérant successivement des rectangles parallèles aux trois plans coordonnés, on obtiendrait les trois équations suivantes, qui se déduisent les unes des autres par permutation circulaire des lettres :

$$\begin{cases} X_m = k' \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) \\ Y_m = k' \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ Z_m = k' \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Passons à l'équation (5). L'intensité I du courant dans un tube de force dont le flux d'induction électrique est Q_e , est égale à $\frac{Q_e}{\theta}$ (§ 77). D'autre part, le flux d'induction Q_e est, par définition, égal à $\frac{\mathcal{E}_e}{4\pi k}$, \mathcal{E}_e désignant le flux de force électrique. L'équation (5) peut donc s'écrire :

$$\int_c \mathcal{F}_e ds = \frac{1}{k} \left(\frac{\mathcal{E}_e}{\theta} + \frac{d \mathcal{E}_e}{dt} \right)$$

En l'appliquant, comme l'équation (4), au cas du contour rectangulaire $M_0 M_1 M_2 M_3$, on trouve :

$$\frac{Z_e}{\theta} + \frac{\partial Z_e}{\partial t} = k \left(\frac{\partial X_m}{\partial y} - \frac{\partial Y_m}{\partial x} \right) \quad (10)$$

ou :

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \left(\Delta H - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \quad (10')$$

en tenant compte des relations (8) et (9), et posant pour abrégier :

$$\left. \begin{aligned} k k' &= a^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \Delta \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= \Theta \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ceci toutefois suppose k' constant, c'est-à-dire le milieu homogène au point de vue magnétique. Dans le cas d'un milieu hétérogène, l'équation (10) serait un peu plus compliquée.

En permutant circulairement les lettres x , y et z , ainsi que F , G et H , on obtiendra trois équations de la forme (10') :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial t} &= a^2 \left(\Delta F - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial G}{\partial t} &= a^2 \left(\Delta G - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial H}{\partial t} &= a^2 \left(\Delta H - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Si l'on intègre ces équations, c'est-à-dire si l'on détermine F , G , H et par suite $\overline{\mathcal{A}}$ en fonction de x , y , z et t , on en déduira les composantes des forces électrique $\overline{\mathcal{E}}$ et magnétique $\overline{\mathcal{F}}$ au moyen des formules (8) et (9). Le potentiel vecteur électrique $\overline{\mathcal{B}} = \int \overline{\mathcal{F}} dt$ sera déterminé seulement à une fonction arbitraire $f(x, y, z)$ près; nous ne nous en occuperons pas.

Dans le cas où le milieu est diélectrique, on fera θ infini dans les équations (12).

181. Cas d'un champ électromagnétique constant. — Il n'est pas inutile, pour se familiariser avec la notion du potentiel vecteur magnétique $\overline{\mathcal{A}}$, de faire une application des équations (8), (9), (10), (11) et (12) au cas d'un champ électromagnétique constant.

La force électrique étant indépendante du temps, l'intégration des équations (8) donne :

$$\begin{cases} F = F_0 + X_0 \cdot t \\ G = G_0 + Y_0 \cdot t \\ H = H_0 + Z_0 \cdot t \end{cases}$$

F_0, G_0 et H_0 étant des fonctions de x, y, z seulement, c'est-à-dire que le potentiel vecteur $\overline{\mathcal{A}}$ est une fonction linéaire du temps.

Portons ces valeurs de F, G, H dans les équations (9). De ce que la force magnétique est indépendante du temps il résulte :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_0}{\partial y} - \frac{\partial Y_0}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial X_0}{\partial z} - \frac{\partial Z_0}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y_0}{\partial x} - \frac{\partial X_0}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Ce sont là les conditions pour que $(X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz)$ soit une différentielle totale exacte — dV . La notion du potentiel électrique V ne peut donc être établie que dans le cas d'un champ électromagnétique constant. Dans le cas d'un champ variable, le potentiel en un point n'a pas de sens; mais la force électromotrice $\int_A^B \overline{\mathcal{E}} ds$ entre deux points A et B est déterminée quand on fixe le chemin suivi de A à B .

Pour qu'il y ait un potentiel magnétique, il faut que le premier membre de l'équation (10) soit nul, ce qui aura lieu : 1° en tout point d'un diélectrique (θ infini) ; 2° en tout point d'un conducteur non soumis à un champ électrique ($X_e = Y_e = Z_e = 0$).

Des expressions de F , G et H on déduit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial X_e}{\partial x} + \frac{\partial Y_e}{\partial y} + \frac{\partial Z_e}{\partial z} = -\Delta V$$

Mais d'après l'équation de Poisson (§ 25) :

$$\Delta V + 4\pi k\rho = 0$$

ρ désignant la densité électrique. Donc $\frac{d\theta}{dt}$ représente, au facteur $4\pi k$ près, la densité électrique en tout point du champ.

Examinons encore le cas particulier où les forces électrique et magnétique sont nulles en chaque point du champ. Alors F , G , H sont indépendants du temps et satisfont aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

et sont, par conséquent, les dérivées partielles par rapport à x , y , z , d'une même fonction. C'est le cas du champ électro-magnétique extérieur à un solénoïde ou à un aimant fermé sur lui-même. L'existence de ce champ est révélée, lorsque le courant varie dans le solénoïde, par la force *e. m.* $\int_C \mathbf{E} ds$ induite dans un circuit C qui l'embrasse (§ 162, 1°).

Nous indiquerons encore, à titre d'exercice, le problème suivant : Dans le champ magnétique créé par un courant, calculer le potentiel vecteur magnétique $\vec{\mathcal{A}}$ par la formule du § 166, et porter cette valeur ou celle des composantes F , G , H dans les équations (12). On vérifiera que ces équations sont satisfaites lorsque le courant est constant, mais pas dans l'état variable. Cela montre que la formule du § 166 n'est pas applicable rigoureusement dans l'état variable et que les variations du courant ne produisent pas

instantanément les variations correspondantes du potentiel vecteur (remarque du § 180).

182. Propagation d'une onde électromagnétique plane. — Pour vérifier plus directement nos idées sur la transmission des actions électromagnétiques de proche en proche à travers le milieu, cherchons si l'on peut satisfaire au système des équations (12) par des fonctions F, G, H indépendantes de y et z , et dépendant seulement de $\left(t - \frac{x}{V}\right)$. De telles fonctions ayant la même valeur : d'une part au point (x, y, z) au temps t , d'autre part au point $(x + l, y, z)$ au temps $\left(t + \frac{l}{V}\right)$, cela correspondrait au cas d'une *onde électromagnétique* plane, dont le plan serait perpendiculaire à Ox , et qui se transporterait parallèlement à elle-même le long de cet axe avec une vitesse uniforme V . Le potentiel vecteur \mathcal{A} , dont les composantes sont F, G, H , varieraient chaque point d'un instant à l'autre ; mais à un instant donné, il serait le même, en grandeur et en direction, pour tous les points d'un même plan perpendiculaire à Ox .

Si l'on pose : $t - \frac{x}{V} = u$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{d^2 F}{du^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans le système (12) et faisant θ infini (cas d'un diélectrique), il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 F}{du^2} &= 0 \\ \frac{d^2 G}{du^2} &= \frac{a^2}{V^2} \frac{d^2 G}{du^2} \\ \frac{d^2 H}{du^2} &= \frac{a^2}{V^2} \frac{d^2 H}{du^2} \end{aligned} \right. \quad (13)$$

De ces deux dernières relations, on tire :

$$V = a$$

c'est-à-dire que la vitesse V de propagation des ondes planes n'est autre chose que le coefficient $a = \sqrt{k'k}$. Quant à la première relation (13), on en déduit par intégration : $\frac{dF}{du} = \text{const.}$ et, par suite :

$$X_e = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{du} = \text{const.}$$

Ce résultat montre que des trois composantes X_e , Y_e , Z_e de la force électrique, les deux dernières, parallèles au plan de l'onde, peuvent seules varier. En d'autres termes, les ébranlements parallèles au plan de l'onde sont seuls susceptibles de se propager ; ou encore, la propagation est *transversale*, comme pour les ébranlements lumineux.

On a d'ailleurs :

$$Y_e = \frac{dG}{du}$$

$$Z_e = \frac{dH}{du}$$

D'autre part, les équations (9) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_m = 0 \\ Y_m = \frac{k'}{V} \frac{dH}{du} = \frac{k'}{V} Z_e \\ Z_m = -\frac{k'}{V} \frac{dG}{du} = -\frac{k'}{V} Y_e \end{array} \right.$$

On voit que la force magnétique \mathcal{F} est entièrement dans le plan de l'onde, puisque la composante X_m est nulle. En outre, elle est perpendiculaire à la force électrique \mathcal{E} , à laquelle elle est proportionnelle, le coefficient de proportionnalité $\frac{k'}{V} = \sqrt{\frac{k'}{k}}$ étant invariable. L'énergie électrique $\frac{\mathcal{E}^2}{8\pi k}$ par unité de volume est donc égale à l'énergie magnétique $\frac{\mathcal{F}^2}{8\pi k'}$ par unité de volume.

La valeur du coefficient $\sqrt{k'k} = a$, qui est une vitesse quel que soit le système d'unités adopté, a été déterminée expérimentalement. (Voir *Rapport des unités électrostatiques et électromagné-*

tiques.) Dans le cas où le diélectrique est de l'air, les nombres trouvés pour a par Maxwell, Kohlrausch, sir W. Thomson, ... sont très voisins de 300.000 kilomètres par seconde, valeur de la vitesse de la lumière. Cette coïncidence tend à prouver que les ébranlements électromagnétiques se propagent dans l'éther avec la même vitesse que les ébranlements lumineux et calorifiques. On a comparé, pour divers diélectriques, les valeurs de a obtenues par des mesures électromagnétiques avec celles de la vitesse de la lumière dans ces milieux ; mais la coïncidence ne paraît pas satisfaisante en général. Il est vrai que jusqu'ici les conditions dans lesquelles ont été faites les mesures électromagnétiques et lumineuses ne sont point comparables, en raison surtout de l'extrême petitesse de la période des vibrations lumineuses. La question de savoir si le coefficient a est bien égal à la vitesse de la lumière dans tous les diélectriques ne peut donc être considérée actuellement comme élucidée.

183. Cas général : propagation transversale, vitesse uniforme. — Nous allons montrer que la vitesse uniforme V et la transversalité de la propagation, que nous venons de constater pour une onde plane dans un diélectrique, constituent un caractère commun à toutes les ondes électromagnétiques, même dans les conducteurs. Mais il convient de mettre tout d'abord en évidence certaines propriétés des équations (12).

Si l'on différentie ces équations, la première par rapport à x , la seconde par rapport à y , la troisième par rapport à z , et qu'on les ajoute, il vient :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$$

Dans le cas d'un diélectrique, θ étant infini, $\frac{d^2 \Theta}{dt^2}$ est nul, et Θ est une fonction linéaire du temps :

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 t$$

Or, on peut déterminer un champ électromagnétique constant, dans lequel Θ soit égal à cette fonction ($\Theta_0 + \Theta_1 t$). Les composantes du potentiel vecteur magnétique dans ce champ seraient

des fonctions linéaires $f_0 + f_1t$, $g_0 + g_1t$, $h_0 + h_1t$, (§ 181). Les composantes f_1 , g_1 , h_1 de la force électrique en chaque point se calculeraient, par des formules connues, en fonction de la densité électrique $\frac{\Theta_1}{4\pi k}$; et les composantes f_0 , g_0 , h_0 se calculeraient par les mêmes formules en fonction de $\frac{\Theta_0}{4\pi k}$.

Les fonctions f_0 , f_1, \dots étant ainsi déterminées, posons :

$$\left. \begin{aligned} F &= f_0 + f_1t + f \\ G &= g_0 + g_1t + g \\ H &= h_0 + h_1t + h \end{aligned} \right\}$$

ce qui revient à considérer le champ variable que nous étudions (F, G, H) comme la superposition d'un champ constant ($f_0 + f_1t, \dots$) et d'un champ variable (f, g, h). Ce dernier jouit de la propriété :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

Un raisonnement analogue pourrait être fait dans le cas d'un milieu conducteur (θ fini), sauf que Θ se réduirait alors à une fonction Θ_0 indépendante du temps.

Les équations (12) relatives au champ (f, g, h) se réduisent par conséquent à la forme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \Delta f$$

Au point de vue de l'étude de la propagation des ébranlements électromagnétiques, on peut faire abstraction du champ constant et ne considérer que le champ variable (f, g, h). En remplaçant les lettres (f, g, h) par (F, G, H), on aura alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial F}{\partial t} &= a^2 \Delta F \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial G}{\partial t} &= a^2 \Delta G \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial H}{\partial t} &= a^2 \Delta H \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

avec la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

qui, différentiée par rapport à t , devient :

$$\frac{\partial X_e}{\partial x} + \frac{\partial Y_e}{\partial y} + \frac{\partial Z_e}{\partial z} = 0 \quad (15')$$

Cette équation exprime que la densité électrique est nulle en tout point du champ, si l'on convient, comme dans le cas d'un champ constant, d'appeler densité électrique le premier membre de (15') divisé par $4\pi k$.

En outre, on déduit du système (9) :

$$\frac{\partial X_m}{\partial x} + \frac{\partial Y_m}{\partial y} + \frac{\partial Z_m}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Ceci posé, nous allons définir la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique. Supposons à cet effet l'espace divisé par une surface Σ en deux parties : l'une A (fig. 78) dans laquelle le champ existe au temps t , l'autre B dans laquelle l'ébranlement électromagnétique n'est pas encore parvenu ou a disparu. La surface Σ est le *front* de l'onde électromagnétique. Si au temps $(t + dt)$ celui-ci occupe la position Σ' , on appellera vitesse de l'onde en un point M le quotient de la distance $MM' = dn$ des surfaces Σ et Σ' par le temps écoulé dt , soit :

$$\frac{dn}{dt} = v$$

L'équation de la surface Σ pourra s'écrire :

$$t = \varphi(x, y, z)$$

La normale MM' au point M fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels respectivement aux dérivées partielles de la fonction φ , soit $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial z}$; et l'on a la relation :

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{dt}{dn}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \quad (17)$$

Nous admettrons que les forces électrique et magnétique varient

d'une manière continue. Comme elles sont nulles dans l'espace B, elles sont nulles encore au front Σ de l'onde; c'est-à-dire que les expressions de $X_e, Y_e, Z_e, X_m, Y_m, Z_m$, ou des dérivées partielles du premier ordre de F, G, H par rapport à t, x, y, z , deviennent *identiquement* nulles si l'on y remplace t par $\varphi(x, y, z)$. Il en résulte que les dérivées de ces expressions sont nulles elles-mêmes. Ainsi, en écrivant que les dérivées de $\frac{dF}{dt}$ et de $\frac{dF}{dx}$ par rapport à x sont nulles, on trouve :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

et :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

d'où, en éliminant $\frac{d^2 F}{dx dt}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

On trouverait de même :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

En ajoutant ces trois équations membre à membre, il vient :

$$\Delta F = \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

La comparaison de cette relation avec la première du système (14) où l'on fera $\frac{Fd}{dt} = 0$, et avec (17), donne : $V = \pm a$.

La vitesse V du front de l'onde est donc uniforme et égale à a en valeur absolue; et les surfaces Σ', Σ sont parallèles. On adoptera le signe + ou le signe — suivant le sens de la propagation, c'est-à-dire suivant que l'onde envahit l'espace B ou au contraire se replie sur A.

Cherchons maintenant l'orientation des forces électrique et magnétique en M. La force électrique (X_e, Y_e, Z_e), nulle en M au

temps t , y prend la valeur infiniment petite $\left(\frac{dX_e}{dt} dt, \frac{dY_e}{dt} dt, \frac{dZ_e}{dt} dt\right)$ au temps $(t + dt)$ lorsque le front de l'onde est venu en Σ' . On appelle direction de la force électrique sur le front de l'onde celle du vecteur dont les composantes sont $\frac{\partial X_e}{\partial t}, \frac{\partial Y_e}{\partial t}, \frac{\partial Z_e}{\partial t}$. De même la direction de la force magnétique est définie par les composantes

$$\frac{\partial X_m}{\partial t}, \frac{\partial Y_m}{\partial t}, \frac{\partial Z_m}{\partial t}.$$

Ecrivons que, pour $t = \varphi(x, y, z)$, les dérivées de X_e, Y_e, Z_e respectivement par rapport à x, y, z , sont nulles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_e}{\partial x} + \frac{\partial X_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y_e}{\partial y} + \frac{\partial Y_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Z_e}{\partial z} + \frac{\partial Z_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Ajoutons ces trois équations en tenant compte de (15). Il vient :

$$\frac{\partial X_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial Y_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial Z_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

Cette condition exprime que la direction de la force électrique $\left(\frac{\partial X_e}{\partial t}, \frac{\partial Y_e}{\partial t}, \frac{\partial Z_e}{\partial t}\right)$ est perpendiculaire à la normale MM' $\left(\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}\right)$, c'est-à-dire est dans le plan tangent au front de l'onde, ou, plus simplement, dans le plan de l'onde.

On verrait de même, en tenant compte de (16), que la force magnétique est dans le plan de l'onde. La direction de la propagation étant celle de la normale MM' , *le caractère de transversalité de la propagation est par là même démontré.*

Il reste à déterminer comment les forces électrique et magnétique sont orientées dans le plan de l'onde. De la première des équations (9) on tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_m}{\partial t} &= k' \left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial z} \right) \\ &= k' \left(\frac{\partial Z_e}{\partial y} - \frac{\partial Y_e}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Comme, pour $t = \varphi(x, y, z)$, Y_e et Z_e sont identiquement nuls, la dérivée de Z_e par rapport à y et celle de Y_e par rapport à z sont nulles.

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_e}{\partial y} + \frac{\partial Z_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Y_e}{\partial z} + \frac{\partial Y_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_m}{\partial t} &= k' \left[-\frac{\partial Z_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial Y_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \right] \\ \text{De même : } \frac{\partial Y_m}{\partial t} &= k' \left[-\frac{\partial X_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial Z_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial Z_m}{\partial t} &= k' \left[-\frac{\partial Y_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial X_e}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Prenons, pour simplifier, l'axe Ox parallèle à la normale MM' au point M $\left(\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \right)$ et l'axe Oz parallèle à la force électrique $\left(\frac{\partial X_e}{\partial t} = \frac{\partial Y_e}{\partial t} = 0 \right)$. Les relations ci-dessus se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_m}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial Y_m}{\partial t} = k' \frac{\partial Z_e}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial Z_m}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

La force magnétique est donc, dans le plan de l'onde, perpendiculaire à la force électrique. Le rapport de ces deux forces, c'est-à-dire le rapport de $\left(\frac{\partial Y_m}{\partial t} dt \right)$ à $\left(\frac{\partial Z_e}{\partial t} dt \right)$ est égal au coefficient constant :

$$k' \frac{\partial t}{\partial x} = k' \frac{dt}{dn} = \frac{k'}{V} = \sqrt{\frac{k'}{k}}$$

Si $\frac{\partial t}{\partial x}$ et $\frac{\partial Z_e}{\partial t}$ sont positifs, $\frac{\partial Y_m}{\partial t}$ l'est également. La relation entre les directions positives de la propagation de l'onde, de la force magnétique et de la force électrique est donc la même qu'entre les directions positives des axes Ox , Oy , Oz sur la figure 77. On peut encore dire que, *pour un observateur placé le long de la direction positive Ox de la propagation, les pieds en O et la tête en x ,*

L'axe Oz de la force électrique viendra s'appliquer sur l'axe Oy de la force magnétique par une rotation de 90° de droite à gauche.

Dans le cas particulier où le milieu est diélectrique, on peut retrouver la vitesse uniforme a de propagation des ébranlements électromagnétiques par une autre méthode due à Poisson. Cette méthode consiste à démontrer que les valeurs de F , G , H en un point O quelconque du champ au temps t ne dépendent que des valeurs que ces mêmes fonctions et leurs dérivées $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial t}$, avaient à une époque antérieure ($t - \tau$) aux divers points d'une sphère décrite de O comme centre avec $a\tau$ pour rayon ¹.

184. Comparaison avec la théorie de l'élasticité et la théorie optique des ondulations. — Dans le cas d'un milieu diélectrique (θ infini), les équations (14) qui régissent la propagation des ébranlements électro-magnétiques sont exactement de même forme que celles qui régissent la propagation des vibrations transversales dans un corps élastique ². Les composantes u , v , w du déplacement d'un point (x , y , z) du corps ont pour analogues ici les composantes F , G , H , du potentiel vecteur magnétique $\overline{\mathcal{N}}$. La vitesse $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}\right)$ du point mobile a pour analogue la force électrique $\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial G}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}\right)$. La quantité $\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \dots\right)$ a pour analogue le quotient de la force magnétique par le coefficient k' , soit $\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \dots\right)$

La dilatation cubique $\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)$ en un point d'un corps élastique vibrant a pour analogue ici la fonction $\Theta = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$. Lorsque cette dilatation est nulle, les vibrations sont transversales à la direction de propagation. Donc la condition $\Theta = 0$ doit conduire à la transversalité de propagation des ébranlements électromagnétiques. On retrouve ainsi un résultat démontré directement au § 183.

L'énergie par unité de volume d'un corps vibrant comprend deux

¹ V. Maxwell, § 784 et note I de M. Potier.

² V. *Traité d'Elasticité des corps solides*, de Lamé, de Clebsch, etc.

parties : la première due à la déformation des molécules et appelée énergie élastique ; l'autre représentant la force vive et égale au demi-produit de la densité δ par le carré de la vitesse. De même l'énergie d'un champ électromagnétique par unité de volume comprend deux parties : l'énergie électrique égale au produit de $\frac{1}{8\pi k}$ par le carré de la force électrique et l'énergie magnétique égale au produit de $\frac{1}{8\pi k'}$ par le carré de la force magnétique (§ 46 et 110). Si l'on applique ceci à un cas simple, par exemple celui de la propagation transversale d'ondes planes (§ 182), la comparaison des deux propositions précédentes montre que l'analogie de la densité δ et de l'élasticité E sont respectivement $\frac{1}{4\pi k}$ et $\frac{k'}{4\pi}$; et, comme le quotient $\frac{E}{\delta}$ représente le carré de la vitesse de propagation des vibrations, le quotient de $\frac{k'}{4\pi}$ par $\frac{1}{4\pi k}$, soit $kk' = a^2$, doit représenter le carré de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques. On retrouve encore là un résultat démontré au § 183.

Si l'on écrit la première des équations (14) sous la forme :

$$\frac{1}{4\pi k} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{k'}{4\pi} \Delta F$$

elle correspond, dans la théorie de l'élasticité, à l'équation du mouvement d'un point d'un corps élastique. Dans cette équation, le second membre représente la force élastique agissant sur l'unité de volume du corps au point considéré ; le premier terme du premier membre représente la force d'inertie de cette unité de volume et le second terme représente une force résistante proportionnelle à la vitesse $\frac{du}{dt}$ et qui serait due, par exemple, à ce que les molécules du corps baignent dans un fluide résistant. Le coefficient de résistance de ce fluide aurait pour analogue la conductibilité $\frac{1}{\rho}$ du milieu dans le problème électromagnétique.

L'analogie, comme on le voit, peut être poussée très loin. Elle est d'une grande utilité pour les personnes déjà familiarisées avec la théorie de l'élasticité, car elle fournit une représentation mécanique simple des phénomènes électromagnétiques dont la nature nous est encore cachée. En outre, elle permet de pressentir comment la théorie de ces phénomènes, établie jusqu'ici dans le

cas de milieux isotropes, pourra être étendue au cas de milieux anisotropes. Les données expérimentales dans ce dernier cas étant absolument insuffisantes, Maxwell a proposé néanmoins une théorie calquée sur celle de l'élasticité des corps anisotropes. Cette théorie étant élaborée, on n'aura plus qu'à la vérifier par ses conséquences expérimentales, suivant en cela la marche inverse de celle qui, en parlant de lois expérimentales, nous a conduits progressivement jusqu'à la connaissance des lois de l'état variable d'un champ électromagnétique isotrope¹.

La théorie de l'électromagnétisme présente aussi une très grande analogie avec celle de l'optique qui, telle qu'elle a été présentée par Lamé, n'est en somme qu'une application de la théorie de l'élasticité aux vibrations de l'éther. Fresnel, attribuant les effets lumineux aux vibrations des molécules d'éther, a démontré que ces vibrations sont transversales et il a supposé qu'elles sont perpendiculaires au plan de polarisation. Mais on a pu expliquer les phénomènes connus en supposant les vibrations parallèles à ce plan. Il plane un doute sur cette question ; et en réalité il n'est pas prouvé que ce que, dans la théorie des ondulations, on appelle vitesse d'une molécule soit bien réellement une vitesse et non une autre quantité. Le même doute existe au sujet de la densité δ et de l'élasticité E de l'éther. Du reste, on n'a pas mesuré E et δ séparément, et l'on ne connaît que leur quotient qui est le carré de la vitesse de la lumière. En électromagnétisme, on est plus avancé à cet égard, puisque les coefficients k et k' peuvent se mesurer séparément. En outre, en optique, on ne peut étudier que les vibrations *périodiques* de l'éther, ce qui est insuffisant pour établir la théorie générale, tandis que l'étude des phénomènes électromagnétiques peut être faite dans l'état *permanent* et dans un état *variable quelconque*.

Les caractères de la propagation des ondes électromagnétiques démontrés au § 183 sont les mêmes que ceux de la propagation des ondes lumineuses. Dans les deux cas, l'éther paraît jouer un rôle essentiel et la vitesse de propagation est la même, au moins dans l'air ou le vide. Maxwell a conclu de là à l'identité des ondes

¹ V. Maxwell, § 794-797 ; O. Heaviside, *Philosophical Magazine*, 1885, t. I, p. 397.

lumineuses et électromagnétiques, de même que tous les faits connus ont conduit à admettre l'identité des ondes lumineuses, calorifiques et chimiques. Ce que Fresnel considérait comme la direction des vibrations de l'éther serait la direction de la force électrique ou celle de la force magnétique, et le plan de polarisation d'une onde électromagnétique serait un plan passant par la normale à l'onde et par l'une de ces deux directions, que nous déterminerons au § 186.

Pour vérifier la justesse de cette vue de Maxwell, il y a lieu de poursuivre l'étude des ondes électromagnétiques au point de vue de la réflexion, de la réfraction, de la mesure des longueurs d'onde, etc., et d'en comparer les résultats avec ceux qui ont été obtenus en optique : c'est ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants. Toutefois les lois expérimentales sur lesquelles est fondée la théorie de l'électromagnétisme n'ayant point été démontrées dans le cas d'ondes à périodes aussi courtes que celles de la lumière, la comparaison en question ne pourra en toute rigueur confirmer ou infirmer l'idée émise par Maxwell en 1865.

185. Expériences de H. Hertz. — Les expériences les plus précises que l'on ait faites pour mettre en évidence l'analogie de caractère des ondes lumineuses et des ondes électromagnétiques sont celles effectuées par H. Hertz en 1888¹. Le premier, il a produit des ondes électromagnétiques de période extrêmement courte, dont il a déterminé la longueur d'onde et la vitesse de propagation. Quoique la formule qu'il a employée pour calculer la période comporte une sérieuse incertitude et que, par une interprétation arbitraire des phénomènes, il ait conclu à l'existence de vitesses de propagation distinctes pour les actions *électrostatiques* et pour les actions *électrodynamiques*, les résultats de ses expériences paraissent bien s'accorder avec les prévisions de la théorie.

H. Hertz produit des ondes à courte période par le procédé suivant. Deux conducteurs A et B (tiges rectilignes, sphères, etc.) sont mis respectivement en communication avec les bornes du circuit secondaire d'une bobine d'induction et rapprochés l'un de

¹ V. Wiedemann's *Annalen*, mémoires divers de H. Hertz, ou résumé de M. Joubert dans le *Journal de Physique* (mars 1889).

l'autre à une distance assez faible pour permettre aux étincelles de se produire. Lorsque A et B ont acquis des charges de signes contraires, leur décharge, au lieu de se produire brusquement, se produit par une série d'étincelles, affectant un caractère oscillatoire, et la période multiple de ces oscillations, variable avec les dimensions des corps A et B, est beaucoup plus courte que celle du courant de la bobine d'induction. On a obtenu ainsi des périodes de l'ordre de $\frac{1}{100.000.000^{\circ}}$ et même de $\frac{1}{1.000.000.000^{\circ}}$ de seconde. Nous verrons plus loin (§ 197) comment la décharge d'un condensateur à travers un circuit conducteur peut également affecter la forme oscillatoire et comment on peut calculer la période. Pour le moment, il suffira, pour expliquer le caractère oscillatoire de la décharge, de se reporter à ce qui a été dit au § 184 au sujet de l'analogie entre la propagation des ébranlements mécaniques et celle des ébranlements électromagnétiques. On assimilera les conducteurs A et B à des corps élastiques dans lesquels les molécules vibrantes éprouvent une résistance de la part d'un fluide dans lequel elles sont plongées, tandis que cette résistance ne s'exerce pas dans le diélectrique ambiant. Un ébranlement étant développé dans l'ensemble des corps A et B et du milieu ambiant, on sait qu'il affecte rapidement un caractère périodique, sa période dépendant des dimensions de A et de B ; toutefois son amplitude diminue peu à peu et s'éteint, sa force vive étant peu à peu absorbée par la résistance du fluide qui remplit A et B. De même l'ébranlement électromagnétique acquiert rapidement un caractère périodique, la période étant la même ; et son amplitude décroît peu à peu par suite de l'absorption d'énergie due à la conductibilité de A et de B.

Ainsi l'ébranlement électromagnétique doit exister, non seulement là où l'on voit l'étincelle, mais encore dans tout le diélectrique ambiant. Pour le constater, H. Hertz y promène un circuit métallique circulaire présentant une légère solution de continuité. Cette solution devient le siège d'étincelles dont l'intensité dépend de la position de ce circuit et de son orientation ; en outre, cette intensité est maximum pour un certain diamètre d du circuit circulaire. H. Hertz donne le nom de *résonateur* au circuit de diamètre d , dont il compare le rôle à celui d'un véritable résonateur acoustique. D'après ce que nous venons de dire ci-dessus

cette comparaison est très juste et les dimensions du résonnateur doivent correspondre à celles du système (A, B) de manière à donner la même période de décharge oscillatoire. Ce résonnateur peut aussi être constitué par l'ensemble de deux conducteurs A', B' rapprochés presque au contact.

H. Hertz a constaté que les ondes électromagnétiques issues du système (A, B) se réfléchissent sur une surface *métallique*. En les faisant réfléchir normalement, il a observé des interférences produites entre les ondes incidentes et les ondes réfléchies (expérience analogue à celle du mur de Savart en acoustique). Il a pu ainsi mesurer la longueur d'onde correspondant à une période déterminée et en déduire la vitesse a de propagation qu'il a trouvée voisine de 300,000 kilomètres par seconde.

En faisant réfléchir une onde électromagnétique sous une incidence oblique, il a vérifié que les lois de la réflexion ne diffèrent pas de celles de la lumière. L'expérience des miroirs paraboliques conjugués a réussi d'une manière très satisfaisante. Il a vérifié encore les lois de la réfraction, et a pu mesurer l'indice de réfraction d'un prisme d'asphalte, qu'il a trouvé égal à 1,69 (l'indice optique de cette substance variant de 1,5 à 1,6). Enfin il a répété avec des ondes électromagnétiques des expériences semblables à celles de la polarisation des ondes lumineuses, etc.

H. Hertz a constaté qu'une feuille métallique épaisse est opaque pour une onde électromagnétique, tandis qu'une porte en bois, un mur, un bloc d'asphalte sont transparents. Ce dernier résultat est remarquable, mais n'infirme en rien l'analogie établie entre les ondes électromagnétiques et lumineuses. La plus courte longueur d'onde observée par le savant allemand est de 30 centimètres et correspond à une période égale à un milliardième de seconde, tandis que la plus grande longueur d'onde du spectre infra-rouge observée par Langley est de 30 microns seulement, soit $\frac{1}{10.000^e}$ de la précédente. L'intervalle entre ces deux ordres de longueurs d'onde n'a encore été exploré par aucun procédé optique ou électromagnétique. Tout porte à croire que cette lacune ne tardera pas à être comblée et que l'on reliera le spectre électromagnétique par une transition insensible aux spectres calorifique, lumineux et chimique, comme ceux-ci le sont déjà entre eux.

Pour compléter les indications expérimentales ci-dessus, nous allons établir directement la théorie de la réflexion et de la réfraction des ondes électromagnétiques.

186. Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques. — D'après ce que l'on a vu au § 182, lorsqu'une onde plane I se propage dans un diélectrique, la propagation est transversale et la vitesse est uniforme et égale à $a = \sqrt{k'k}$. Le potentiel vecteur \mathcal{A} est parallèle au plan de l'onde et son expression mathématique est de la forme $f\left(t - \frac{n}{a}\right)$, n désignant la perpendiculaire abaissée d'un point O sur le plan de l'onde et f une fonction arbitraire.

Lorsque l'onde I rencontre une surface plane Σ séparant le milieu A (k, k') d'un second diélectrique A_1 (k_1, k'_1), il s'y produit une perturbation qui doit se traduire par la naissance de deux ondes planes; l'une I' dans le premier milieu sera dite onde réfléchie, l'autre R dans le second milieu sera dite onde réfractée. Les potentiels vecteurs correspondants \mathcal{A}' et \mathcal{A}_1 seront de la forme $\varphi\left(t - \frac{n'}{a}\right)$ et $\psi\left(t - \frac{n_1}{a_1}\right)$. Les traces des trois ondes I, I', R sur le plan Σ doivent évidemment se confondre; c'est-à-dire que les plans d'incidence, de réflexion et de réfraction se confondent eux-mêmes (raisonnement analogue à celui de la théorie des ondulations en optique).

Etant donné $\mathcal{A} = f\left(t - \frac{n}{a}\right)$, il s'agit de calculer en grandeur et en direction \mathcal{A}' et \mathcal{A}_1 . Le potentiel vecteur \mathcal{A} pouvant toujours être considéré

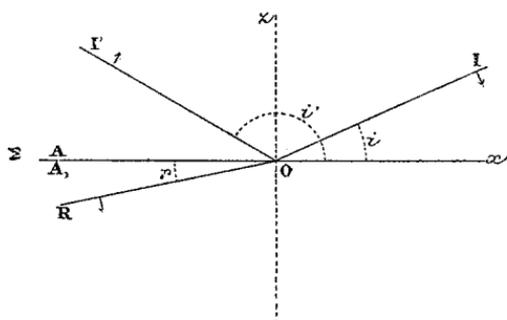


Fig. 79.

comme la résultante de deux composantes, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au plan d'incidence, il suffira de traiter les deux cas simples où \mathcal{A} est parallèle ou perpendiculaire à ce plan.

Prenons à cet effet comme plan des xy le plan Σ , l'axe des y étant dirigé suivant la trace de l'onde incidente I (direction per-

pendiculaire au plan de la figure 79). La trace commune des trois ondes I, I' et R se projette en O ; les directions de propagation de ces ondes sont indiquées par les flèches.

Les équations (12) étant vérifiées identiquement dans le milieu A par les potentiels vecteurs $f\left(t - \frac{n}{a}\right)$ et $\varphi\left(t - \frac{n'}{a}\right)$, et dans le milieu A₁ par le potentiel vecteur $\psi\left(t - \frac{n_1}{a_1}\right)$, il ne reste qu'à exprimer les conditions qui doivent être remplies par ces fonctions sur la surface Σ. Ces conditions, indépendantes de la théorie des actions à distance, sont les suivantes, dans l'état variable comme dans l'état permanent.

En un point quelconque de la surface Σ, les composantes tangentielles X_e, Y_e de la force électrique doivent avoir même valeur dans les deux milieux A et A₁. Les composantes normales Z_e doivent être proportionnelles aux coefficients respectifs k et k₁, ce qui exprime la conservation des flux d'induction le long d'un tube. De même les composantes X_m, Y_m de la force magnétique doivent avoir même valeur de part et d'autre de Σ, tandis que les composantes Z_m doivent être proportionnelles aux coefficients k' et k'₁. On aura ainsi, en désignant par F, G, H les composantes du potentiel vecteur résultant ($\overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{A}'}$ dans le premier milieu, $\overline{\mathcal{A}_1}$ dans le second) en un point quelconque :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_1 \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= \left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)_1 \\ \frac{1}{k} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{1}{k_1} \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_1 \\ k \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) &= k_1 \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)_1 \\ k' \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) &= k'_1 \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)_1 \\ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 \end{aligned} \right\} \text{pour } z = 0 \quad (18)$$

Dans les trois premières de ces équations, on peut remplacer $\frac{dF}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$ par F, G, H, ce qui revient à les intégrer.

1^{er} Cas : La force électrique \mathcal{E} (ou le potentiel vecteur \mathcal{Z}) de l'onde incidente est perpendiculaire au plan d'incidence. Il en est de même, par raison de symétrie, pour les ondes réfléchie et réfractée. On a alors dans le milieu A :

$$F = H = 0$$

$$\begin{aligned} G &= f \left(t - \frac{n}{a} \right) + \varphi \left(t - \frac{n'}{a} \right) \\ &= f \left(t - \frac{x \sin i - z \cos i}{a} \right) + \varphi \left(t - \frac{x \sin i' - z \cos i'}{a} \right) \end{aligned}$$

et dans le milieu A₁ :

$$F_1 = H_1 = 0$$

$$G_1 = \psi \left(t - \frac{n_1}{a_1} \right) = \psi \left(t - \frac{x \sin r - z \cos r}{a_1} \right)$$

i , $\pi - i'$ et r désignant les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction.

La deuxième et la quatrième des équations (18) suffisent pour déterminer les fonctions φ et ψ . Elles donnent :

$$\begin{cases} f' \left(t - \frac{x \sin i}{a} \right) + \varphi' \left(t - \frac{x \sin i'}{a} \right) = \psi' \left(t - \frac{x \sin r}{a_1} \right) \\ k' \left[-\frac{\cos i}{a} f' \left(t - \frac{x \sin i}{a} \right) - \frac{\cos i'}{a} \varphi' \left(t - \frac{x \sin i'}{a} \right) \right] = -k_1 \frac{\cos r}{a_1} \psi' \left(t - \frac{x \sin r}{a_1} \right) \end{cases}$$

f' , φ' , ψ' désignant les dérivées des fonctions f , φ et ψ respectivement par rapport aux variables $\left(t - \frac{x \sin i + z \cos i}{a} \right)$, Pour que ces deux équations soient vérifiées identiquement, il faut d'abord que l'on ait :

$$\frac{\sin i}{a} = \frac{\sin i'}{a} = \frac{\sin r}{a_1}$$

On déduit de là : 1^o l'égalité des angles d'incidence et de réflexion :

$$i = \pi - i'$$

2^o la loi de Descartes :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{a}{a_1} = \text{indice de réfraction.}$$

On calculera ensuite les dérivées φ' et ψ' en fonction de f' , ou, en remontant aux intégrales :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{a_1 k' \cos i - a k'_1 \cos r}{a_1 k' \cos i + a k'_1 \cos r} f \\ &= \frac{k' \sin r \cos i - k'_1 \sin i \cos r}{k' \sin r \cos i + k'_1 \sin i \cos r} f \\ \psi &= \frac{2k' \sin r \cos i}{k' \sin r \cos i + k'_1 \sin i \cos r} f \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Si l'on suppose égaux les coefficients k' et k'_1 , ce qui est sensiblement vérifié pour les diélectriques, k' différant très peu de l'unité, ces formules deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} f \\ \psi &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} f \end{aligned} \right\} \quad (19')$$

2° cas : La force électrique \mathcal{E} (ou le potentiel vecteur \mathcal{A}) dans l'onde incidente est parallèle au plan d'incidence. Il en est de même par raison de symétrie, pour les ondes réfléchie et réfractée. On a alors :

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{A} \cos i + \mathcal{A}' \cos i' \\ &= \cos i f \left(t - \frac{x \sin i - z \cos i}{a} \right) + \cos i' \varphi \left(t - \frac{x \sin i' - z \cos i'}{a} \right) \end{aligned}$$

$$G = 0$$

$$\begin{aligned} H &= \mathcal{A} \sin i + \mathcal{A}' \sin i' \\ &= \sin i f \left(t - \frac{x \sin i - z \cos i}{a} \right) + \sin i' \varphi \left(t - \frac{x \sin i' - z \cos i'}{a} \right) \end{aligned}$$

$$F_1 = \cos r \psi \left(t - \frac{x \sin r - z \cos r}{a_1} \right)$$

$$G_1 = 0$$

$$H_1 = \sin r \psi \left(t - \frac{x \sin r - z \cos r}{a_1} \right)$$

L'application de la première et de la troisième des équations (18) conduit aux résultats suivants : 1° lois fondamentales de la réflexion et de la réfraction, comme dans le cas précédent ; 2° les deux relations :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{k'_1 \sin i \cos i - k' \sin r \cos r}{k'_1 \sin i \cos i + k' \sin r \cos r} f \\ \psi &= \frac{2k' \sin r \cos i}{k'_1 \sin i \cos i + k' \sin r \cos r} f \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

qui, dans le cas où $k' = k'_1$, deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} f \\ \psi &= \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} f \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

Les formules (19') et (20') sont identiques à celles qui ont été données par Fresnel dans sa théorie mécanique de la réflexion et de la réfraction, et que l'expérience a confirmées, (19') convient au cas où le plan de polarisation coïncide avec le plan d'incidence ; (20') au cas où ces deux plans sont perpendiculaires entre eux. Si donc on définit le plan de polarisation d'une onde électromagnétique comme celui d'une onde lumineuse, on voit que *la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation, tandis que la force magnétique est parallèle à ce plan.*

Nous n'aborderons point ici l'étude de la dispersion des ondes de périodes différentes, ni celle du phénomène de la réflexion vitreuse¹.

187. Cas de la réflexion totale. — Dans le cas où l'indice de réfraction du milieu A_1 est inférieur à celui de A ($a < a_1$), pour toute incidence i dont le sinus est supérieur à $\frac{a}{a_1}$, la loi de Descartes donne pour $\sin r$ une valeur supérieure à l'unité, c'est-à-dire que l'angle r est imaginaire. On se trouve alors dans le cas, bien connu en optique, de la réflexion totale. La solution du paragraphe précédent tombe en défaut ; cela tient à ce que nous avons supposé à priori l'existence d'une onde *plane* réfractée, qui en réalité n'existe plus. Nous allons revenir sur ce point.

En posant :

$$\frac{\sin i}{a} = \frac{\sin i'}{a} = \frac{\sin r}{a_1} = \gamma$$

et

$$\mathcal{N} = f \left(t - \gamma x + \frac{z \cos i}{a} \right)$$

¹ V. Potier, *C. R. de l'Ac. des Sc.*, 1889, t. CVIII.

nous chercherons encore pour \mathcal{A}' une solution de la forme : $\mathcal{A}' = \varphi \left(t - \gamma x + \frac{z \cos i'}{a} \right)$, ce qui revient à supposer l'existence d'une onde plane réfléchie; mais nous essaierons pour \mathcal{A}_i une fonction de la forme :

$$\mathcal{A}_i = \psi (t - \gamma x, z)$$

Si l'on prend l'axe des y , par exemple, parallèle à \mathcal{A}_i , la deuxième des équations (12), dans laquelle on fera θ infini et Θ nul, et où l'on remplacera a par a_1 , s'écrira :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a_1^2 \Delta \psi = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

Nous nous bornerons à l'étude du cas où l'onde incidente est périodique, \mathcal{A} étant de la forme :

$$\mathcal{A} = A \sin m \left(t - \gamma x + \frac{z \cos i'}{a} \right)$$

On devra poser :

$$\mathcal{A}' = A' \sin \left[m \left(t - \gamma x + \frac{z \cos i'}{a} \right) - \alpha \right]$$

α désignant une différence de phase produite par la réflexion entre l'onde incidente et l'onde réfléchie; et, pour satisfaire à l'équation aux dérivées partielles ci-dessus, ψ doit être de la forme :

$$\mathcal{A}_i = A_1 e^{-\frac{mz}{a'}} \sin [m (t - \gamma x) - \alpha_1] + A_2 e^{\frac{mz}{a'}} \sin [m (t - \gamma x) - \alpha_2]$$

a' désignant par abréviation :

$$\sqrt{\frac{a_1^2}{\gamma^2 a_1^2 - 1}}$$

Dans le cas qui nous occupe, le terme en A_2 est nul.

On considérera successivement les cas où la force électrique est perpendiculaire ou parallèle au plan de polarisation, et l'on appliquera les conditions (18) à la surface réfringente Σ . On arrivera ainsi, par des calculs faciles qu'il est inutile de développer ici¹, aux résultats suivants :

¹ V. *Traité* de Maxwell, traduction française. Note II de M. Potier à la suite du § 805

1° L'amplitude A' est égale à A ; autrement dit, l'intensité de l'onde réfléchie est égale à l'intensité de l'onde incidente ;

2° L'onde réfléchie a sur l'onde incidente une différence de phase α , dont l'expression est identique à celle qui a été déduite par Fresnel, en optique, de considérations peu rigoureuses, et qui a été toutefois vérifiée par l'expérience ;

3° L'ébranlement communiqué au milieu A_1 a une amplitude rapidement décroissante avec la distance à la surface Σ . C'est exactement le phénomène connu en optique sous le nom d'onde évanescente.

188. Réflexion métallique. — Lorsqu'une onde électromagnétique, se propageant dans un diélectrique, arrive à la surface d'un métal ou d'un corps conducteur quelconque, le phénomène de la réflexion est plus complexe que dans le cas précédent. Nous considérerons seulement, à titre d'exemple, le cas de l'incidence normale.

Prenons comme plan des xy la surface réfringente, l'axe des x étant parallèle au potentiel vecteur \mathcal{A} , que nous supposons de la forme :

$$\mathcal{A} = F = A \sin m \left(t + \frac{z}{a} \right)$$

l'onde arrivant dans le sens des z négatifs. Pour l'onde réfléchie, \mathcal{A}' sera forcément de la forme :

$$\mathcal{A}' = F' = A' \sin \left[m \left(t + \frac{z}{a} \right) - \alpha \right]$$

A' et α désignant des constantes. Dans le corps conducteur on posera :

$$\mathcal{A}_1 = F_1 = A_1 \sin mt + B_1 \cos mt$$

A_1 et B_1 désignant des fonctions de z , dont on déterminera la forme en remarquant que F_1 doit satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial F_1}{\partial t} = a_1^2 \Delta F_1 = a_1^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}$$

On est conduit ainsi à prendre :

$$F_1 = C e^{+\varepsilon z} \sin \left[m \left(t + \frac{z}{a'} \right) - \alpha_1 \right]$$

Les constantes ε et a' se déduisent des équations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 - \frac{m^2}{a'^2} = -\frac{m^2}{a_1^2} \\ \varepsilon \frac{m}{a'} = \frac{m}{2 a_1^2 \theta} \end{array} \right.$$

Quant aux constantes C et α_1 , ainsi que A' et α , on les calculera en écrivant que la force électrique X_e et la force magnétique Y_m ont même valeur dans les deux milieux en un même point de la surface de séparation. Des calculs semblables ayant été faits précédemment, nous n'insisterons pas là-dessus.

Nous ferons remarquer toutefois que dans le cas d'un corps de conductibilité infinie ($\theta = 0$), on trouve pour ε une valeur infinie. Par suite, l'exponentielle $e^{\varepsilon z}$ est nulle pour toute valeur finie et négative de z , c'est-à-dire qu'aucune perturbation ne peut se propager dans le corps de conductibilité infinie, qui se comporte comme un écran absolu pour les ondes électromagnétiques. Il en résulte que \mathcal{N}' est égal et de signe contraire à \mathcal{N} pour $z = 0$; en d'autres termes, il y a simple réflexion avec changement de signe, mais sans changement de phase.

On aurait pu prévoir ce résultat en se reportant à ce qui a été dit au § 184. La conductibilité $\frac{1}{\rho}$ étant infinie, la propagation de l'onde dans un tel milieu se fait comme celle d'un ébranlement mécanique à travers un milieu qui opposerait au mouvement des molécules vibrantes une résistance infinie; c'est-à-dire qu'en réalité l'onde ne peut se propager. La loi de la réflexion à la surface d'un tel milieu en résulte d'une manière évidente.

On voit que les conducteurs, interposés dans un espace où se propagent des ondes électromagnétiques, se comportent comme des écrans d'autant plus parfaits que leur conductibilité est plus grande. La présence du facteur $e^{\varepsilon z}$ dans l'expression de F_1 montre que sous une épaisseur z suffisante un conducteur est réellement un écran; l'amplitude F_1 de l'onde y décroît en progression géométrique, chaque couche du corps traversé absorbant une fraction

déterminée de l'énergie de l'onde qui le traverse, comme cela a lieu pour la lumière. Il est à remarquer du reste que les métaux, qui sont les meilleurs conducteurs, sont aussi les corps les plus opaques. On ne saurait toutefois établir une relation entre l'opacité et la conductibilité en s'appuyant sur les formules précédentes, dont l'exactitude n'est nullement démontrée dans le cas d'ondes à périodes aussi courtes que celles de la lumière.

189. Polarisation rotatoire magnétique. — Faraday a montré (1845) que, lorsqu'un rayon lumineux polarisé traverse certaines substances soumises à l'action d'un champ magnétique, son plan de polarisation change d'azimut. Si la substance traversée est de l'eau, du sulfure de carbone, du flint, etc., la direction du rayon coïncidant avec celle de la force magnétique, la rotation du plan de polarisation a lieu dans le sens du courant qui développerait cette force magnétique (on se reportera à la règle d'Ampère); on dit alors que la rotation est *positive*. Presque tous les corps diamagnétiques sont dans le même cas et produisent la rotation positive. La plupart des corps paramagnétiques produisent une rotation *negative*, c'est-à-dire de sens inverse; mais cette règle est loin d'être générale. Dans tous les cas le sens absolu de la rotation du plan de polarisation dans l'espace ne change pas lorsque la marche du rayon est renversée, à l'inverse de ce qui se passe dans la rotation naturelle par l'eau sucrée, le quartz, etc.

Les gaz offrent, comme les liquides et les solides, le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique, ainsi que l'a montré M. H. Becquerel ¹.

Les lois du phénomène en question, étudiées spécialement par Verdet ², sont les suivantes :

La rotation α du plan de polarisation, dans un champ magnétique uniforme, est proportionnelle à l'épaisseur e de la substance traversée, à l'intensité f de la force magnétique et au cosinus de l'angle i que fait le rayon avec cette force.

On peut dire plus simplement que la rotation α est proportion-

¹ Voir C. R. de l'Acad. des sciences et Annales de Chimie et de Physique.

² Œuvres de Verdet : *Notes et Mémoires*.

nelle à la chute ($V - V' = fe \cos i$) du potentiel magnétique le long du chemin suivi par le rayon à travers la substance. Dans un champ variable, la loi s'appliquera à chaque élément infiniment petit du chemin suivi ; on pourra donc écrire d'une manière générale :

$$\alpha = \omega (V - V') \quad (21)$$

V et V' désignant le potentiel magnétique à l'entrée et à la sortie de la substance, ω un coefficient, positif ou négatif, appelé *pouvoir rotatoire* et dépendant de la nature de la substance et de la longueur d'onde λ du rayon en lumière homogène. Pour toutes les substances étudiées, ω varie à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde, le produit $\omega\lambda^2$ croissant un peu lorsque λ diminue. Les écarts de cette loi sont d'autant plus marqués en général que le pouvoir dispersif de la substance est plus fort.

Le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique ne résulte point sans nouvelle hypothèse, comme celui de la réflexion et de la réfraction, de la théorie de la propagation des ondes électromagnétiques développée dans ce chapitre. Plusieurs hypothèses ont été émises à ce sujet. On en trouvera un exemple dans la théorie de ce phénomène si péniblement*élaborée par Maxwell dans son *Traité* ¹. — D'un autre côté, M. Rowland a proposé d'admettre que, lorsqu'un courant i est situé dans un champ magnétique M , il se développe, non seulement une force mécanique φ proportionnelle au produit iM et perpendiculaire aux directions i et M , mais encore une force électromotrice parallèle et proportionnelle à φ . Il est conduit ainsi à apporter aux équations de la propagation des ondes une modification, qui entraîne le phénomène de la rotation du plan de polarisation ². — Enfin, pour ne citer que les principales théories, M. Potier est arrivé au même résultat en partant de l'hypothèse suivante ³ :

Les ébranlements électromagnétiques sont accompagnés d'un entraînement de la matière pondérable (réciproque de l'hypothèse

¹ § 806-831.

² V. Mascart et Joubert, § 639-643.

³ *Comptes rendus*, 1889, t. CVIII ; ou traduction française du traité de Maxwell, t. II, p. 534.

de Fresnel, vérifiée par une expérience célèbre de M. Fizeau). La vitesse d'entraînement en chaque point du milieu est proportionnelle à l'intensité du courant en ce point. — Par intensité du courant on doit d'ailleurs entendre, dans la théorie de M. Potier comme dans celle de M. Rowland, non seulement le courant de conduction, mais encore l'accroissement du flux d'induction, c'est-à-dire l'expression $\left(I + \frac{dQ_c}{dt} \right)$ de la formule 5 du § 179. Sans suivre M. Potier dans ses calculs, qui reposent sur une conception particulière de la nature des phénomènes magnétiques (conception d'Ampère, § 148), nous allons montrer comment de l'hypothèse ci-dessus découle le fait de la rotation magnétique.

Dans le cas d'un milieu transparent diélectrique, le courant de conduction I est nul. L'expression $\left(I + \frac{dQ_c}{dt} \right)$ du courant total se réduit à $\frac{dQ_c}{dt} = \frac{1}{4\pi k} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$, \mathcal{E}_c désignant le flux d'induction électrique, lequel est proportionnel à la force électrique $\overline{\mathcal{E}}$. D'après l'hypothèse de M. Potier, la vitesse d'entraînement de la matière pondérable, sous l'action d'une onde électromagnétique qui se propage, est donc en chaque point, parallèle à la direction de $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ et proportionnelle à $\frac{1}{k} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$, soit : $u = \frac{\alpha}{k} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

Ceci posé, si le milieu dans lequel l'onde se propage est soumis à un champ magnétique M , le mouvement de la matière donnera lieu à une force électrique induite très faible, perpendiculaire à la vitesse u et à la force magnétique M , et représentée par la formule $\frac{Mu}{k'} \cos(M, u)$. En supposant l'angle (M, u) des directions M et u égal à $\frac{\pi}{2}$, la force électrique induite aura pour expression :

$$\varphi = \frac{Mu}{k'} = \frac{M\alpha}{kk'} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{M\alpha}{a^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$a = \sqrt{kk'}$ désignant la vitesse de propagation des ondes.

Reprenons maintenant les équations (3), (4), (6) et (7) du § 179, qui ont conduit aux équations (12) de la propagation. Nous aurons à modifier l'équation (3), car la force électrique $\overline{\mathcal{E}}$ n'est plus égale qu'approximativement à la dérivée $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ du potentiel vecteur ;

elle comprend en outre la force électrique φ induite par le mouvement, dont la valeur peut s'écrire approximativement $\frac{M\alpha}{a^2} \frac{d^2 \mathcal{A}}{dt^2}$.

Dans le cas d'une onde parallèle au plan des xy , la force magnétique \mathbf{M} étant parallèle à l'axe des z , les composantes de la force électrique résultante \mathcal{E} seront donc, en remarquant que φ est perpendiculaire à \mathbf{M} et à $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = dt + \frac{M\alpha}{a^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \\ Y = \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{M\alpha}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \\ Z_0 = 0 \end{array} \right.$$

En portant ces expressions dans les équations (9) et (10), remarquant que θ est infini et que les fonctions F , G , ne dépendent que de t et de z , on trouve :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{M\alpha}{a^2} \frac{\partial^3 G}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{M\alpha}{a^2} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \end{array} \right\} \quad (22)$$

Ces équations admettent la solution :

$$\left. \begin{array}{l} F = \cos \varepsilon z \sin m \left(t - \frac{z}{a'} \right) \\ G = \sin \varepsilon z \sin m \left(t - \frac{z}{a'} \right) \end{array} \right\} \quad (23)$$

qui représente une onde polarisée rectilignement, dont le plan de polarisation tourne de l'angle εz autour de l'axe des z pendant qu'elle avance d'une longueur z le long de cet axe. En portant les expressions (23) de F et de G dans le système (22), on en déduit les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2}{a^2} = \varepsilon^2 + \frac{m^2}{a'^2} \\ - \frac{M\alpha m^2}{a'} = 2 \frac{\varepsilon}{a} \end{array} \right.$$

qui font connaître les valeurs de ε et de a' . Comme ε est très faible, on a approximativement :

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = a \left(1 + \frac{M^2 m^2 \alpha^2}{8a^2} \right) \\ \varepsilon = - \frac{Mm^2 \alpha}{2a^3} \end{array} \right.$$

La vitesse a' de propagation diffère très peu de a . Le coefficient $\frac{\varepsilon}{M}$, qui représente le pouvoir rotatoire ω , est en raison inverse du carré de la période $\frac{2\pi}{m}$ ou, ce qui revient au même, de la longueur d'onde, et proportionnelle à $\frac{1}{a^3}$ ou au cube de l'indice de réfraction du milieu. Mais on ne saurait attribuer une grande importance à ces propriétés incomplètes du pouvoir rotatoire, qui dépend encore d'un coefficient α entièrement inconnu. La valeur de α peut dépendre à la fois des qualités mécaniques et électromagnétiques du milieu, être positif ou négatif. Les expériences optiques n'ont fourni jusqu'ici aucune loi précise et générale à laquelle ce coefficient soit soumis ¹.

La théorie ci-dessus de la polarisation rotatoire magnétique est très simple ; mais elle vaut ce que vaut l'hypothèse qui lui sert de base. La première partie de cette hypothèse, relative au fait de l'entraînement de la matière pondérable par les ondes électromagnétiques ou, si l'on préfère, par les variations d'un champ électrique, peut être considérée comme étant d'évidence expérimentale. On sait, entre autres exemples, que la matière d'un corps subit des dilatations ou des contractions dans un champ électrique (§ 48-50) ; orsque le champ varie, la dilatation doit varier également, ce qui entraîne des mouvements moléculaires. Quant à admettre que la vitesse d'entraînement est proportionnelle à l'intensité du courant $\frac{dQ}{dt}$ ou à la variation $\frac{\mathcal{E}_p}{dt}$ de la force électrique du champ, c'est là qu'est véritablement l'hypothèse. Nous ne sommes pas en mesure d'en discuter la valeur d'une manière satisfaisante.

Les phénomènes de dilatation et de contraction étant produits également par un champ magnétique, les variations d'un champ

¹ On a proposé et soumis à l'épreuve expérimentale diverses formules représentant le pouvoir rotatoire en fonction de l'indice de réfraction et de la longueur d'onde. On consultera à cet effet : Verdet, *Notes et Mémoires* ; H. Becquerel, *Annales de chimie et de physique*, 1877, t. III et 1885 t. III ; Joubin, *id.*, 1889 ; etc.

magnétique doivent produire aussi un entraînement de la matière pondérable. En vertu de la réciprocité des actions électriques et magnétiques établie au § 179, on serait conduit à rechercher si un champ électrostatique puissant ne pourrait pas produire, comme un champ magnétique, la rotation du plan de polarisation.

Quoi qu'il en soit, la connaissance du mécanisme de la polarisation rotatoire magnétique serait d'une très grande importance. La plupart des savants ont considéré ce phénomène comme démontrant que l'existence d'un champ magnétique développe dans le milieu une propriété rotatoire autour de la direction de la force, ce qui serait entièrement conforme aux idées d'Ampère sur les courants circulant autour des molécules aimantées. D'après Sir W. Thomson, « la découverte optique de Faraday donne la démonstration de la vérité de l'explication d'Ampère sur la nature dernière du magnétisme ». « Je crois, dit Maxwell dans son *Traité* (§ 831), que nous avons de bonnes raisons de penser qu'il se produit dans le champ magnétique un phénomène de rotation ; que cette rotation est exécutée par un grand nombre de très petites particules de matière, tournant chacune autour de son axe propre.... » On a vu ci-dessus que, pour expliquer le phénomène de la polarisation rotatoire, il n'est nullement nécessaire de concevoir le magnétisme comme un phénomène rotatoire en lui-même ni d'adopter les vues d'Ampère sur les courants moléculaires.

Nous nous bornerons, pour terminer ce paragraphe, à citer le phénomène de la rotation du plan de polarisation d'un rayon lumineux par sa réflexion sur le pôle d'un aimant¹, et le phénomène de Hall consistant en une déviation angulaire des lignes de courant dans une plaque soumise à l'action d'un champ magnétique².

190. Considérations générales. — Si l'on jette un coup d'œil en arrière, on s'apercevra que nous avons développé la théorie de l'électricité et du magnétisme sans connaître aucunement la nature intime des phénomènes. Malgré l'ignorance dans laquelle nous sommes à cet égard, en partant d'un très petit nombre de lois élémentaires,

¹ Voir Kerr, *Philosophical Magazine*.....; Righi, *Lumière électrique*,...

² Voir : Hall, *Phil. Mag.* 188. ; Leduc, *Thèse de physique*.

on est parvenu à établir une théorie aussi parfaite que celle de l'optique. Nous avons dû, il est vrai, pour en arriver là, combler certaines lacunes par des hypothèses, telles que celle du § 26 sur la propriété essentielle des tubes d'induction et celle du § 479 sur l'assimilation, au point de vue des propriétés magnétiques, de la variation de flux dans un tube d'induction électrique à un véritable courant. Mais il semble que ces hypothèses sont suffisamment justifiées par les vérifications expérimentales de leurs conséquences.

Le langage que nous avons adopté pour l'exposé des faits et les calculs qui en découlent doit être considéré comme provisoire. Il pourra être transformé sans que les relations mathématiques que nous avons obtenues soient modifiées. Le seul résultat qui soit acquis est l'ensemble de ces relations entre des quantités qui ont une réalité physique, mais dont la nature nous est inconnue. C'est une originalité qui caractérise le développement de la science électrique.

Toutefois, si le mécanisme des phénomènes électromagnétiques nous échappe encore, nous pouvons au moins écarter les hypothèses sur l'électricité et le magnétisme qui ont été proposées jusqu'ici. Telle est l'hypothèse des fluides électrique et magnétique, qui présente le double caractère : 1° de localiser la source d'énergie en certains points du champ et de réduire à l'état de fiction mathématique la quantité appelée force électrique, alors que la réalité physique de cette quantité se manifeste en tout point du champ par des actions sur la matière pondérable elle-même ; 2° d'impliquer des *actions à distance* se produisant instantanément dans toute l'étendue du champ, ce qui est contraire au fait expérimental de la propagation de proche en proche des actions électromagnétiques. Du reste, la théorie des fluides ne peut expliquer les actions électrodynamiques que grâce à l'addition de nouvelles hypothèses¹.

L'analogie évidente entre la propagation des ondes électroma-

¹ Voir dans Maxwell, § 846-860, les théories des actions électrodynamiques, d'après Gauss et Weber, dans l'hypothèse des fluides ; § 861-866, exposé d'autres hypothèses. — Voir également dans l'*Electrodynamique* de M. Mathieu, le développement des idées d'Helmholtz.

gnétiques et celle des ondes lumineuses donne un nouveau cours aux recherches sur la nature des phénomènes électriques et magnétiques. On sera conduit sans doute à identifier, comme l'a indiqué Maxwell, la théorie de l'électromagnétisme avec celle de l'optique, dans le cas particulier des ondes périodiques, bien entendu. Cette dernière n'offre point encore un caractère de certitude (observation du § 184).

Si l'on adopte les idées de Fresnel, d'après ce qui a été dit au § 186, la force électrique ne serait autre chose que la vitesse des molécules vibrantes, et par conséquent le potentiel vecteur magnétique \mathcal{A} serait le déplacement de ces molécules à partir de l'origine du temps. Les dimensions des diverses quantités électriques seraient des puissances *entières* de L, M, T. En particulier celles des coefficients k et k' seraient respectivement $L^3 M^{-1}$ et $L^{-1} M T^{-2}$. Ces coefficients représenteraient, au facteur 4π près, l'inverse de la densité et l'élasticité du milieu dans lequel les ondes se propagent. Comme presque tous les milieux transparents sont très peu magnétiques, on en conclurait que l'élasticité k' diffère très peu de l'un à l'autre. Or, Fresnel avait été précisément conduit à cette conclusion par ses études sur les phénomènes optiques. Cette coïncidence est assurément des plus remarquables.

Dans le même ordre d'idées, la conductibilité d'un corps consisterait en ce que le mouvement vibratoire de l'onde serait communiqué par l'éther aux molécules pondérables qui absorberaient ainsi une fraction de son énergie. La réaction de la matière pondérable sur l'éther donnerait lieu à une résistance proportionnelle à la vitesse de celui-ci, le coefficient de résistance étant la conductibilité électrique $\frac{1}{\rho}$, suivant la remarque du § 184.

Cette explication des phénomènes électromagnétiques ne paraît soulever aucune difficulté lorsqu'il s'agit de l'état variable du champ ou encore de la production d'un courant dans un conducteur. Malheureusement nous ne voyons pas qu'elle puisse être étendue au cas d'un champ électrique constant dans le milieu diélectrique. Nous ne la discuterons donc pas davantage, d'autant plus que les idées de Fresnel, sur lesquelles elle repose, peuvent n'être point exactes.

Ajoutons que, en raison de la réciprocité des actions électriques et magnétiques (§ 179), les composantes du potentiel vecteur électrique \mathcal{B} satisfont aux mêmes équations (12) que celles du potentiel vecteur magnétique \mathcal{A} dans le cas d'un milieu diélectrique. Il n'y a donc pas de raison à priori pour considérer \mathcal{A} plutôt que \mathcal{B} , comme représentant le déplacement des molécules d'éther. La réciprocité signalée se poursuit peut-être dans le phénomène de la polarisation rotatoire (v. fin du § 189) et dans d'autres encore. Mais elle disparaît si l'on considère des milieux conducteurs. L'absence de conductibilité magnétique dans tous les corps, si elle est absolue, présente donc un grand intérêt au point de vue de la distinction entre la nature de l'électricité et celle du magnétisme.

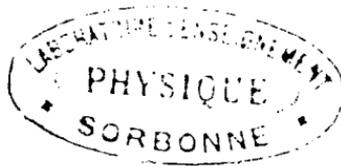


TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER

	Pages
PRÉFACE	I

PRÉLIMINAIRES

SYSTÈMES D'UNITÉS ABSOLUES

§ 1. Unités mécaniques	1
2. Homogénéité des formules.	3
3. Application du principe d'homogénéité	5
4. Unités calorifiques	6
5. Unités électriques et magnétiques	7
6. Rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques	11
7. Système d'unités C. G. S.	12
8. Système pratique d'unités.	13
9. Etalons électriques	14
10. Considérations générales	15

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROSTATIQUE

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS ET LOIS FONDAMENTALES

11. Loi de Coulomb.	17
12. Densité électrique.	21
13. Tension électrique	22

§ 14. Potentiel électrique.	22
15. Surfaces équipotentielles.	26
16. Lignes de force.	29
17. Points et lignes d'équilibre.	30
18. Energie d'un système électrisé.	31
19. Capacité électrostatique.	32
20. Pouvoir inducteur spécifique	34
21. Phénomène de la charge résiduelle.	37

CHAPITRE II

THÉORÈMES GÉNÉRAUX D'ÉLECTROSTATIQUE

22. Théorème de Green	40
23. Tubes de force ou d'induction	44
24. Rôle des conducteurs.	46
25. Problème de la distribution électrique.	49
26. Cas d'un milieu diélectrique hétérogène	50
27. Réfraction des tubes d'induction	52
28. Polarisation des diélectriques	54
29. Nouvelle expression de l'énergie électrique	57
30. Superposition de deux états d'équilibre électrique	59
31. « L'état d'équilibre d'un système électrisé est unique. »	59
32. Images électriques.	61
33. Attractions et répulsions des diélectriques par les corps électrisés.	70

CHAPITRE III

CONDENSATEURS

34. Capacité d'une sphère	76
35. Condensateur sphérique.	77
36. Condensateur plan	78
37. Condensateurs employés en pratique.	82
38. Condensateur à cylindres concentriques	83
39. Application aux câbles électriques.	84
40. Condensateur à cylindres excentriques	86
41. Application aux fils télégraphiques aériens	90
42. Groupes de condensateurs.	93
43. Réseau de condensateurs.	95

CHAPITRE IV

ROLE DES DIÉLECTRIQUES

§ 44. Transmission des actions électriques par le milieu diélectrique.	97
45. Tensions et pressions dans le milieu diélectrique	100
46. Energie dans le milieu diélectrique	105
47. Nature du milieu qui transmet les actions électriques	106
48. Dilatation électrique.	107
49. Biréfringence électrique.	109
50. Piézoélectricité.	110
51. Pyroélectricité.	112
52. Phénomènes électrocapillaires	113
53. Application du principe de la conservation de l'énergie.	117
54. Application du principe de Carnot.	125

DEUXIÈME PARTIE

ÉLECTRODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

LOIS DU COURANT ÉLECTRIQUE. CONDUCTEURS LINÉAIRES

55. Définition du courant.	129
56. Conductibilité. Résistance	130
57. Conducteurs en série, en dérivation	131
58. Résistance, conductibilité spécifiques	133
59. Dimensions des quantités précédentes.	134
60. Résistances spécifiques de divers corps.	134
61. Influence de la température sur la résistance spécifique	137
62. Loi d'Ohm.	141
63. Loi de Joule	142
64. Force électromotrice.	142
65. Courant dans un circuit fermé.	145
66. Théorèmes de Kirchhoff.	146
67. Variante de la méthode de Kirchhoff.	149
68. Méthode de Maxwell.	150
69. Propriétés des réseaux complexes.	151
70. Problèmes sur les piles	154
71. Effet des dérivations ou pertes sur une ligne télégraphique	157
72. Cas d'une perte uniforme	160

CHAPITRE II

CONDUCTEURS A DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

§ 73. Conducteurs filiformes	165
74. Conducteurs de forme quelconque.	166
75. Vérification expérimentale de la théorie.	169
76. Conducteurs anisotropes	171
77. Conduction et induction simultanées	173
78. Electricité à l'intérieur d'un conducteur hétérogène.	174
79. Sur la nature du courant électrique.	176
80. Mesure du coefficient θ pour les diélectriques.	179
81. Calcul de la résistance d'un milieu conducteur.	180
82. Applications numériques.	183

CHAPITRE III

ÉLECTROLYSE

83. Phénomène de l'électrolyse.	185
84. Réactions secondaires.	186
85. Lois de l'électrolyse	187
86. Mesure chimique des courants	190
87. Théories de l'électrolyse.	192
88. Polarisation voltaïque	194
89. Force électromotrice de polarisation	196
90. Capacité de polarisation voltaïque.	197
91. Electromètre capillaire	200
92. Explication des phénomènes électrocapillaires	203

CHAPITRE IV

FORCES ÉLECTROMOTRICES DE CONTACT. — PILES

93. Existence des forces électromotrices de contact.	209
94. Mesure des forces électromotrices de contact	212
95. Forces électromotrices de contact apparente et vraie	215
96. Loi des contacts successifs	216

THERMOÉLECTRICITÉ

§ 97. Lois expérimentales	218
98. Effets Peltier, Thomson.	219
99. Pouvoir thermoélectrique	221
100. Etude expérimentale des couples	222
101. Théorie des phénomènes thermoélectriques.	225

PILES HYDROÉLECTRIQUES

102. Loi de Thomson	229
103. Analyse des phénomènes dans la pile.	230
104. Théorie des piles réversibles.	233

TROISIÈME PARTIE

MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

DÉFINITIONS ET LOIS DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

105. Loi de Coulomb	237
106. Dimensions électromagnétiques	239
107. Densité magnétique. Intensité d'aimantation.	240
108. Potentiel magnétique.	240
109. Surfaces équipotentielles. Lignes et tubes de force.	240
110. Energie du champ magnétique	241
111. Equations du champ magnétique	242
112. Réfraction des tubes de force	243
113. Ecrans magnétiques.	243
114. Aimantation par influence	246
115. Action des aimants sur les corps	249
116. Corps anisotropes.	252
117. Analogies électrostatique et électrocinétique.	252

CHAPITRE II

NOUVEL EXPOSÉ DU MAGNÉTISME

118. Moments magnétiques	255
119. Moment résultant d'un aimant	257

§ 120. Intensité d'aimantation.	258
121. Aimantation par influence.	260
122. Feuilletés magnétiques	261
123. Énergie potentielle des feuilletés	265

CHAPITRE III

ÉTUDE DES MÉTAUX FORTEMENT MAGNÉTIQUES

124. Application de la loi de Coulomb.	268
125. Saturation magnétique	269
126. Force coercitive; magnétisme rémanent.	274
127. Influence de la température.	276
128. Formules représentatives de l'aimantation.	277
129. Théories de Weber et de Maxwell.	278
130. Effets mécaniques de l'aimantation; effets inverses.	281
131. Application du principe de la conservation de l'énergie.	282

CHAPITRE IV

MESURES MAGNÉTIQUES. — MAGNÉTISME TERRESTRE

132. Méthodes de mesure.	284
133. Suspensions unifilaire et bifilaire.	285
134. Emploi du miroir.	288
135. Mesure du produit MH.	290
136. Mesure de $\frac{M}{H}$	294
137. Magnétisme terrestre.	296
138. Origine du magnétisme terrestre.	298

QUATRIÈME PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

ACTIONS RÉCIPROQUES DES COURANTS ET DES AIMANTS

139. Action d'un courant sur un aimant.	303
140. Action d'un aimant sur un courant.	306
141. Action d'un champ magnétique quelconque sur un courant.	308
142. Potentiel magnétique d'un courant	309
143. Aimantation par les courants.	312

§ 144. Nature du coefficient k'	313
145. Solénoïdes	315
146. Énergie du champ magnétique d'un courant	318
147. L'énergie relative d'un courant et d'un aimant est nulle.	318
148. Hypothèse d'Ampère sur le magnétisme.	320
149. Dimensions des grandeurs électriques et magnétiques.	321

CHAPITRE II

ÉLECTRODYNAMIQUE

150. Action réciproque de deux courants.	323
151. Courants parallèles	324
152. Action réciproque de deux solénoïdes.	325
153. Action d'un courant fermé sur un élément de courant.	325
154. Action mutuelle de deux éléments de courant.	327
155. Système d'unités électrodynamique	329
156. Travail des forces électrodynamiques.	331
157. Dimensions des coefficients M et L	333
158. Énergie relative de deux courants.	334
159. Énergie intrinsèque d'un courant.	336

CHAPITRE III

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

160. Lois expérimentales.	339
161. Théorie de l'induction	341
162. Deux cas paradoxaux	344
163. Force électromotrice induite élémentaire.	345
164. Potentiel vecteur électromagnétique	346
165. Induction électromagnétique dans un milieu quelconque.	349
166. Calcul d'un coefficient d'induction mutuelle.	351
167. Cas de deux fils droits parallèles	355
168. Cas de deux circonférences coaxiales.	356
169. Cas de deux bobines cylindriques coaxiales.	359
170. Self-induction d'un circuit.	359
171. Cas d'une bobine annulaire	360
172. Cas d'un circuit à conducteurs cylindriques parallèles.	363
173. Fils compounds	366
174. Cas d'un câble à conducteurs concentriques.	367
175. État variable du courant dans un circuit.	369
176. Emploi de noyaux de fer dans les bobines	375

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

177. Action d'un champ électrostatique sur un aimant ou un courant variables.	378
178. Potentiel vecteur d'un champ magnétique ou électrique.	380
179. Réciprocité des actions électriques et magnétiques.	382
180. Equations du champ électromagnétique dans l'état variable.	386
181. Cas d'un champ électromagnétique constant.	390
182. Propagation d'une onde électromagnétique plane.	392
183. Cas général : Propagation transversale. Vitesse uniforme.	394
184. Comparaison avec la théorie de l'élasticité et la théorie optique des ondulations	400
185. Expériences de H. Hertz	403
186. Réflexion et réfraction des ondes électromagnétiques.	406
187. Cas de la réflexion totale	410
188. Réflexion métallique.	412
189. Polarisation rotatoire magnétique.	414
190. Considérations générales	419

