

DÉTERMINATION
DE LA
VITESSE DE LA LUMIÈRE

D'APRÈS DES EXPÉRIENCES EXÉCUTÉES EN 1874

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLHÉRY;

PAR

M. A. CORNU,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
MEMBRE DU CONSEIL DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Extrait des *Annales de l'Observatoire de Paris* (Mémoires, tome XIII).

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE

Section Physique Recherche

Tour 45 - rez-de-chaussée

4, Place Jussieu

75230 PARIS CEDEX 05

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1876

SOMMAIRE.

	Pages.
INTRODUCTION. — Choix de la méthode. — Principe théorique.....	1
I^{re} PARTIE. — DISCUSSION THÉORIQUE DE LA MÉTHODE DE LA ROUE DENTÉE.	
Possibilité d'atténuer indéfiniment les erreurs personnelles.....	6
Propriétés nécessaires de la fonction qui lie l'intensité de la lumière de retour à la vitesse angulaire de la roue dentée.....	10
Expression de la période déduite de la condition d'homogénéité.....	11
Principe fondamental du mode d'observation. — Observations doubles.....	16
Conditions théoriques les plus favorables déduites de la discussion de l'expression de l'erreur.....	18
Recherche directe de la relation qui lie l'intensité de la lumière de retour à la vitesse angulaire de la roue dentée.....	21
Image auxiliaire et représentation graphique de l'intensité.....	27
Influence du rapport du plein au vide des dents sur la délicatesse des observations.....	31
Intensité lumineuse durant une période d'ordre quelconque.....	33
<i>Examen des causes d'erreur résultant de l'impossibilité de réaliser exactement les conditions théoriques. — Moyens d'éliminer leur influence.</i>	
1 ^o Conditions mécaniques relatives à la roue dentée.....	37
Imperfections de forme. — Inégalités accidentelles de la largeur des dents.....	38
Élimination de leur influence par le mode d'observation adopté.....	40
Phases critiques. — Étude de l'intensité pendant ces phases dans le cas des inégalités fortuites.....	42
Étude analogue pour le cas des inégalités systématiques le plus à craindre.....	61
Imperfections de mouvement. — Inégalités systématiques de la vitesse de la roue dentée.....	67
Inégalités périodiques.....	72
2 ^o Conditions optiques relatives à la réalisation du point lumineux de retour.....	74
Diamètre apparent, intensité et éclat intrinsèque de ce point.....	81
Influence d'un diamètre sensible du point lumineux de retour.....	88
Influence des erreurs de réglage de l'appareil optique.....	97
3 ^o Conditions physiologiques relatives à l'observation et à l'enregistrement des phénomènes.....	101
Expression de l'erreur personnelle dans l'enregistrement des observations simples, doubles et croisées...	102
Représentation géométrique des erreurs personnelles et des conditions qui les éliminent.....	108
Qualification V, v, U, u des résultats.....	111
II^e PARTIE. — DESCRIPTION ET DISCUSSION DES EXPÉRIENCES.	
Choix des stations.....	112
Détermination de leur distance d'après les réseaux géodésiques de la méridienne de 1740 et de celle de 1790.....	117
Description des appareils. — 1 ^o Appareils optiques. — Lunette.....	124
Oculaire. — Éclaireur. — Maximum d'effet de la lame réfléchissante.....	125
Collimateur. — Miroir focal. — Réglage.....	130
2 ^o Appareils mécaniques. — Mise en rotation rapide de la roue dentée; conditions à remplir.....	130

	Pages.
Dimensions les plus favorables de la roue.....	131
Description du moteur de la roue dentée.....	133
3 ^o Appareil enregistreur. — Cylindre. — Tracelets. — Tracés graphiques.....	138
4 ^o Appareils chronographiques. — Description. — Discussion de leur établissement.....	144
Subdiviseurs du temps. — Choix de l'unité chronographique.....	151
Théorie de la liaison synchrone des appareils oscillants.....	155

Description sommaire d'une expérience.

<i>Réglage et fonctionnement simultané des appareils.....</i>	165
Observations de jour et de nuit. — Conditions météorologiques nécessaires.....	166
Relevé des signaux de l'enregistreur.....	173
Emploi d'un microscope à grossissement variable. — Théorie de l'instrument.....	176
Calcul des résultats d'après les relevés. — Formules d'interpolation.....	179
<i>Exemple numérique de la réduction d'une observation.....</i>	188
Détermination de l'ordre d'extinction et des qualifications V, v, U, u.....	191
<i>Tableau des données numériques relatives aux observations.....</i>	193

Discussion des résultats.

Étude préliminaire du chronographe.....	211
Erreur probable des tracés. — Influence du mode d'enregistrement sur l'erreur probable de la moyenne générale des résultats.....	221
<i>Discussion des déterminations de la vitesse de la lumière, par séries indépendantes suivant l'ordre d'extinction et suivant les qualifications.....</i>	225
Examen des valeurs qualifiées w et des valeurs non qualifiées.....	254
Détermination de la moyenne composée des résultats présentant l'erreur probable minimum.....	259
Calcul des moyennes composées suivant divers poids.....	265
<i>Recherche des erreurs systématiques, suivant l'ordre de l'extinction, provenant soit de l'observateur, soit du mécanisme.....</i>	271
Détermination des coefficients par la méthode des moindres carrés. — Écarts moyens entre le calcul et l'observation. — Calculs numériques.....	274
Examen de l'erreur systématique suivant les diverses roues dentées.....	280
Examen des causes pouvant apporter une erreur systématique constante.....	287
Correction de l'ensemble des erreurs systématiques.....	290
Correction de la réfraction de l'air.....	291
<i>Valeur définitive de la vitesse de la lumière. — Evaluation de son approximation.....</i>	292
Examen rétrospectif de mes premières expériences.....	298
<i>Calcul de la parallaxe du Soleil.....</i>	299

APPENDICES.

<i>Appendice I. — Vérifications de la distance des stations.....</i>	303
Distance de l'Observatoire au Panthéon.....	307
Distance de l'École Polytechnique au Mont Valérien.....	308
<i>Appendice II. — Remarques sur quelques critiques.....</i>	309
Légende explicative des planches.....	311

MÉMOIRE

SUR LA

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLHÉRY,

PAR M. A. CORNU,

Professeur à l'École Polytechnique, Membre du Conseil de l'Observatoire.

En répétant ces observations (de la vitesse de la lumière)..., on pourra un jour, sans sortir de Paris et de sa banlieue, trouver cette parallaxe du Soleil, qui, vers le milieu du siècle dernier, donna lieu à des voyages si longs, si lointains, si pénibles et à tant de dépenses.

(*Astronomie* d'ARAGO, t. IV, p. 418.)

Introduction.

Le présent Mémoire renferme la description et les résultats des observations relatives à la détermination de la vitesse de la lumière, qui ont été exécutées pendant l'année 1874 à l'Observatoire de Paris. Cette détermination a été entreprise principalement en vue des conséquences astronomiques qu'on en peut déduire, spécialement en vue du calcul de la parallaxe solaire, que les expéditions astronomiques de tous les pays ont été, le 9 décembre de la même année, demander à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil. -

C'est au Conseil de l'Observatoire que je suis redevable d'avoir pu entreprendre ces expériences. En effet, dans sa séance du 2 avril 1874, le Conseil, sur la proposition de son Président M. Le Verrier, Directeur de l'Observatoire, et de M. Fizeau, membre du Conseil, décidait l'exécution d'une détermination directe de la vitesse de la lumière, offrait à cet effet l'usage du matériel scienti-

fique disponible de l'Observatoire et votait les fonds nécessaires pour la construction des appareils destinés aux mesures ; enfin il me faisait l'honneur de me confier l'exécution de cette opération importante.

Mon premier devoir, en écrivant ces lignes, est donc de remercier le Conseil de ce témoignage de confiance ; je lui suis, en outre, particulièrement reconnaissant de m'avoir laissé la plus complète indépendance pour le choix des méthodes et la conduite de l'opération.

J'aurais peut-être hésité à accepter une aussi grande responsabilité si je n'avais été vivement encouragé par M. Fizeau, qui n'a cessé, pendant toute la durée de ce travail, de me prodiguer les conseils les plus bienveillants et les plus précieux.

Choix de la méthode.

1. La détermination à effectuer devant fournir une *valeur absolue* de la vitesse de la lumière, il faut, parmi les deux méthodes entre lesquelles on peut hésiter, celle de la *roue dentée* et celle du *miroir tournant*, choisir celle qui offre le plus de garanties possible d'exactitude, et, sous ce rapport, on ne saurait être trop rigoureux sur la perfection théorique des principes.

La méthode de la roue dentée, imaginée en 1849 par M. Fizeau (*), me paraît, dans l'état actuel de nos connaissances sur la lumière, seule irréprochable au point de vue théorique ; dans l'application, grâce à divers perfectionnements dont il sera parlé plus loin, elle n'offre aucune difficulté sérieuse et se prête à une grande variété dans le mode de mesure, variété qui permet d'éliminer les erreurs personnelles, inhérentes à toute méthode d'observation. La méthode du miroir tournant présente sans contredit une élégance et une facilité d'expérimentation des plus remarquables : L. Foucault l'a employée dans ses recherches sur la détermination de la vitesse de la lumière, exécutées à l'Observatoire en 1862 (**), sur la demande du Directeur M. Le Verrier ; mais elle soulève plusieurs difficultés théoriques et pratiques qu'il serait nécessaire de résoudre avant de lui demander des déterminations absolues.

Cette opinion sur la supériorité de la méthode de la roue dentée n'est pas pour moi seulement le résultat d'une préférence théorique, elle est fondée sur une comparaison expérimentale des deux méthodes et sur les conclusions de recherches préliminaires qui m'ont occupé pendant plusieurs années.

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Tome XXIX, page 90.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Tome LV, pages 501 et 792.

Dans une première série d'expériences exécutées en 1871, à faible distance (2500 mètres), entre l'École Polytechnique et l'ancienne tour des télégraphes (Administration centrale des lignes télégraphiques, rue de Grenelle-Saint-Germain), je m'étais rendu compte des modifications à faire subir à la méthode d'observation, telle qu'elle avait été conçue par M. Fizeau, et des perfectionnements à introduire dans les appareils pour obtenir une grande précision dans les mesures.

Parallèlement à ces essais et dans le but de comparer les deux méthodes, j'avais mis en expérience un très-beau modèle de miroir tournant, construit par Froment, et identique à l'appareil de Foucault : un système de cinq miroirs concaves permettait de multiplier le trajet parcouru par la lumière et de l'élever à une trentaine de mètres. Je ne tardai pas à apercevoir que la petitesse des déviations et le défaut de netteté des images, causés par les dimensions nécessairement très-petites du miroir, étaient une cause grave d'incertitude : si l'on joint à cette difficulté pratique l'incertitude théorique des lois de la réflexion et de la réfraction dans des milieux en mouvement rapide, on conçoit aisément que la supériorité reste incontestablement à la méthode de la roue dentée (*).

Une nouvelle série d'expériences (**) a été effectuée, en 1871 et 1872, entre l'École Polytechnique et le mont Valérien (10310 mètres); elle m'a permis de constater l'efficacité des perfectionnements que j'avais introduits dans la méthode de la roue dentée, et le résultat final a donné, pour valeur de la vitesse de la lumière, un nombre (298 500 kilomètres à la seconde) dont l'erreur probable est notablement inférieure à $\frac{1}{100}$. Comme conclusion de ces recherches, j'affirmai que la méthode de la roue dentée pouvait donner une précision dix fois supérieure en opérant sur une distance plus grande encore et avec des appareils plus parfaits.

Aussi, dans l'opération que je vais présentement exposer en détail, ai-je cherché à obtenir l'approximation de $\frac{1}{1000}$ pour la valeur de la vitesse de la lumière; ainsi qu'on le verra à la fin de ce Mémoire, j'ai lieu de penser, d'après la discussion des observations, que ce résultat a été atteint.

(*) Quoique j'eusse effectué quelques déterminations en enregistrant automatiquement le *son d'arc* du miroir, je n'ai pas cru devoir publier ces essais : les appareils avaient été cependant installés avec beaucoup de soin; ils ont fonctionné sous les yeux d'un grand nombre de personnes, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, tenu à Bordeaux en septembre 1872, et récemment en Angleterre, à l'Institution royale et devant la Société de Physique de Londres, au Musée de Kensington.

(**) *Journal de l'École Polytechnique*, XLIV^e Cahier, p. 133.

Principe théorique de la méthode.

2. Le principe théorique de la méthode de la roue dentée est très-simple. On lance un rayon de lumière entre les dents d'une roue dentée, et on le fait réfléchir à une très-grande distance, de manière à le ramener exactement au point de départ; si le mouvement de rotation de la roue est convenablement rapide, la lumière au retour rencontre une dent au lieu d'un vide et se trouve arrêtée; pour une vitesse double, la lumière rencontre le vide suivant et passe de nouveau; pour une vitesse triple, la lumière est encore arrêtée, et ainsi de suite alternativement. Si l'on mesure avec soin la vitesse angulaire de la roue dentée, correspondant, par exemple, à la disparition complète du rayon lumineux à son retour, on en peut conclure la vitesse de la lumière. En effet, soient V cette vitesse; D la distance des deux stations; τ le temps que la lumière met à parcourir le double de cette distance; on a d'abord

$$V\tau = 2D.$$

D'autre part, soient N le nombre de dents de la roue; m le nombre de tours que cette roue exécute en une seconde: le temps qui correspond à la rotation d'une demi-dent, de trois demi-dents, de $2n - 1$ demi-dents sera égal à une fois, trois fois, $2n - 1$ fois $\frac{1}{2mN}$. Or ces rotations doivent s'exécuter pendant le temps τ pour que le rayon au retour trouve le milieu d'un *plein*, au lieu du milieu d'un *vide* comme au départ; donc on a

$$\tau = \frac{2n - 1}{2mN} = \frac{2D}{V}; \quad \text{d'où} \quad V = \frac{4DNm}{2n - 1}.$$

3. Pour réaliser expérimentalement ces conditions théoriques et observer toutes les circonstances qui accompagnent le retour du rayon, M. Fizeau a imaginé le dispositif suivant. Un faisceau de lumière très-vive est concentré en un point f du pourtour denté d'une roue R après réflexion sur une glace sans tain G (*Pl. I, fig. 1*). Cette réflexion permet de diriger l'axe de ce faisceau suivant l'axe optique RO d'un objectif O , tout en permettant à l'observateur de voir suivant cette direction, à travers la glace, sans être aveuglé par la lumière de la source. Le faisceau s'épanouit, puis est réfracté par l'objectif O qui est fixé à une distance RO telle, que les rayons réfractés vont converger sur l'objectif O' placé à une très-grande distance. Les rayons le traversent, se réfléchissent sur un miroir M

placé au foyer de cet objectif, suivant une marche qui sera analysée plus loin, et font en sens inverse le chemin qu'ils viennent de parcourir. A leur retour, ils sont concentrés par l'objectif O, à leur point de départ en f , sur la denture de la roue R, et forment comme une petite étoile brillante que l'observateur examine à travers la glace sans tain avec un oculaire convenable. Lorsque la roue tourne avec une faible vitesse, l'éclat du point brillant, véritable *écho lumineux*, paraît fixe, malgré les interruptions du faisceau par les dents de la roue, grâce à la persistance des impressions sur la rétine; pour des vitesses croissantes de la roue, l'éclat du point lumineux s'affaiblit progressivement, puis disparaît pour réapparaître de nouveau, et ainsi de suite alternativement. On voit qu'avec ce dispositif il est très-aisé d'observer l'intensité moyenne du faisceau lumineux à son retour; il suffit alors de régler et de mesurer la valeur de la vitesse de la roue dentée qui en produit l'extinction pour calculer, par la formule établie plus haut, la valeur de la vitesse de la lumière.

4. Au point de vue théorique, rien ne paraît simple comme le réglage et la mesure de la vitesse de la roue dentée : c'est pourtant là peut-être que se rencontrent les plus graves difficultés expérimentales; elles ont d'ailleurs été assez grandes pour retarder et finalement empêcher, pendant plus de vingt ans, l'application de cette méthode à la détermination directe de la vitesse de la lumière, détermination qui, aux yeux d'Arago et de beaucoup d'astronomes, passait pour un des problèmes les plus importants de la Physique et de l'Astronomie.

On verra par la suite comment j'ai résolu le problème par l'emploi de l'enregistrement automatique de la vitesse de la roue dentée, ce qui a entraîné des modifications profondes dans la méthode d'observation et dans la discussion des résultats. Sans entrer ici dans aucun détail, il suffira de dire que, la réalisation d'un mouvement uniforme offrant les plus grandes difficultés, j'ai cherché à utiliser une vitesse quelconque, mais variant d'une façon régulière, de la roue dentée, en enregistrant la loi complète du mouvement à l'aide d'un système de signaux électriques convenablement disposés. La connaissance de cette loi permet à l'observateur de déterminer, par un calcul simple, la vitesse de la roue à un instant donné, en particulier aux moments précis de la disparition et de la réapparition de la lumière de retour.

Le principe de la méthode, ainsi que son mode de réalisation expérimentale, étant ainsi bien établi, nous allons examiner diverses circonstances générales que présente le phénomène lumineux produit par les *rayons de retour*. On comprend toute l'importance de cet examen, puisque c'est l'appréciation de ce phénomène qui est l'élément de mesure.

PREMIÈRE PARTIE.

DISCUSSION THÉORIQUE DE LA MÉTHODE DE LA ROUE DENTÉE.

Possibilité d'atténuer indéfiniment les erreurs personnelles.

5. Le premier point à examiner est de savoir si la méthode se prête à des déterminations précises, autrement dit, de rechercher s'il n'existe pas, dans l'application de ce principe si simple, quelque cause inévitable d'incertitude que les perfectionnements de l'Optique ou de la Mécanique ne puissent atténuer.

Il y a un motif sérieux pour se poser cette question dès le début : en effet, la description sommaire d'une opération montre que l'exécution d'une mesure exige la mise en œuvre de trois éléments de natures différentes : un dispositif purement optique qui ramène les rayons de lumière exactement au point de départ, un dispositif purement mécanique qui sert à produire et à mesurer les extinctions périodiques du rayon lumineux, enfin un organe physiologique qui apprécie et note le phénomène lumineux résultant. On comprend sans peine que les dispositifs optique et mécanique soient susceptibles d'une précision dont la limite peut être poussée extrêmement loin ; mais la sensibilité et la rectitude d'appréciation de l'œil de l'observateur atteignent rapidement une limite d'exactitude qu'elles ne peuvent plus dépasser. Il en résulte que chaque observation est entachée d'une erreur provenant de l'incertitude inévitable de l'appréciation de l'intensité lumineuse. Cette erreur agira-t-elle d'une manière proportionnelle sur la détermination de la vitesse de la lumière, auquel cas l'erreur relative du résultat ne pourra pas être inférieure à l'erreur relative de l'appréciation de l'intensité de la sensation ? Ou bien, au contraire, l'erreur résultant de l'incertitude physiologique peut-elle se réduire à n'être qu'une fraction indéfiniment décroissante de sa valeur absolue ?

Il est facile de démontrer que la méthode se prête justement à l'atténuation pour ainsi dire indéfinie des erreurs physiologiques : par suite, on sera en mesure d'affirmer dès le début que, dans des circonstances convenablement choisies, la méthode peut donner théoriquement une précision illimitée malgré l'intervention d'organes faillibles.

6. Avant d'entrer dans le détail de la démonstration, il est nécessaire de rappeler certaines propriétés physiologiques de l'organe de la vue.

1° L'œil peut être affecté par les intensités lumineuses les plus diverses; les limites d'intensité qu'il est capable de percevoir sont si étendues qu'il est pour ainsi dire impossible de fixer leur rapport.

2° La sensibilité de l'œil, pour apprécier les variations d'intensité, est très-faible lorsque l'intensité lumineuse est grande et devient très-grande lorsque l'intensité est faible.

3° L'œil ne distingue plus individuellement une série de perceptions identiques qui se reproduisent périodiquement dès que la période de succession devient inférieure à un dixième de seconde environ (*). Dans ce cas il perçoit une impression continue dont l'intensité moyenne est proportionnelle à la quantité de lumière reçue, indépendamment de la loi suivant laquelle l'intensité a varié avec le temps dans chaque période (**). Cette propriété, qui signifie que l'impression moyenne perçue par l'organe de la vue est proportionnelle à la quantité totale d'*énergie lumineuse*, a été reconnue assez exacte pour qu'on l'ait appliquée à la construction de photomètres (***)).

L'énoncé de ces propriétés de l'organe de la vue, bien connues des physiologistes et des physiciens, suffit pour démontrer que les circonstances dans lesquelles l'intensité de la lumière se présente à l'appréciation de l'observateur ne peuvent donner lieu à aucune objection théorique. La plus grave eût été, sur un examen superficiel, la discontinuité des impressions produites par les interruptions de la roue dentée; on voit, au contraire, que cette circonstance a été bien étudiée et qu'elle est soumise à une loi simple dérivant des principes de la Mécanique.

On reconnaît, en même temps, la nécessité de faire porter les appréciations de l'organe de la vue sur la phase du phénomène où l'intensité lumineuse est le plus faible, c'est-à-dire aux environs de l'extinction complète, afin que la délicatesse de l'œil à juger les variations d'intensité soit aussi grande que possible. C'est en effet ce que nous avons supposé dans la description de la méthode, et ce que nous supposerons dans ce qui va suivre.

(*) Dans certains cas, la période peut s'abaisser au-dessous d'un trentième de seconde, comme l'a montré M. Lissajous. (*Optique physiologique* de M. HELMHOLTZ, p. 454.)

(**) *Loc. cit.*, p. 447. L'énoncé de cette propriété y est donnée sous une forme un peu différente, mais équivalente. Elle a été démontrée expérimentalement par M. Plateau.

(***) Photomètres de Talbot, Babinet, Secchi, *loc. cit.*, p. 440.

7. THÉORÈME. — *Toute cause entraînant une erreur constante dans la mesure de l'intensité lumineuse du rayon de retour introduit dans la valeur de la vitesse de la lumière une erreur absolue qui décroît en raison inverse du facteur $2n - 1$, n étant l'ordre de l'extinction observée.*

La démonstration de ce théorème est fondée sur la périodicité évidente que présente l'intensité lumineuse du rayon de retour lorsque la vitesse angulaire ω de la roue dentée croît ou décroît progressivement. En effet, le phénomène redevient identiquement le même lorsque la vitesse angulaire de la roue dentée s'accroît d'une quantité Ω telle, qu'une dent de plus ait le temps de passer pendant que la lumière parcourt le double de l'intervalle des deux stations. Cette quantité Ω est précisément la période; on la calcule aisément en remarquant qu'elle est égale en particulier à la variation de vitesse qui permet de passer d'un ordre n à l'ordre $n + 1$ d'extinction. Nous avons désigné par m le nombre de tours que fait la roue dentée en une seconde; la vitesse angulaire ω , c'est-à-dire l'arc parcouru par l'extrémité du rayon égal à l'unité pendant l'unité de temps, est liée à m par la relation

$$\omega = 2\pi m.$$

Substituant ω à m dans V , la vitesse ω qui correspond à l'ordre n d'extinction satisfait à l'équation

$$V = \frac{4DNm}{2n-1} = \frac{2DN\omega}{\pi(2n-1)},$$

et la vitesse $\omega + \Omega$, qui correspond à l'ordre $n + 1$, à l'équation

$$V = \frac{2DN(\omega + \Omega)}{\pi(2n+1)};$$

d'où l'on conclut

$$\Omega = \frac{\pi V}{ND}.$$

Le même raisonnement montre que cette périodicité de l'intensité n'a pas lieu seulement pour les valeurs de la vitesse angulaire qui produisent les extinctions successives, mais bien pour une valeur quelconque, ce qu'on peut traduire sous une forme analytique en disant que *l'intensité de la lumière de retour est une fonction périodique de la vitesse angulaire de la roue dentée.*

8. Cette propriété étant bien établie, la démonstration du théorème devient très-simple. Supposons que l'expérimentateur observe l'extinction d'un certain ordre n et qu'il détermine la vitesse angulaire ω correspondante; il commet, par hypothèse, sur l'intensité I de la lumière, une erreur δI . Comme I est une fonction de ω , il en résulte une erreur $\delta\omega$ donnée par les relations

$$I = f(\omega) \quad \text{et} \quad \delta I = f'(\omega) \delta\omega.$$

Or à la valeur de I , qui est voisine de $I = 0$, c'est-à-dire de l'extinction d'ordre n , correspond une valeur de ω voisine de celle qui est donnée par la formule

$$V = \frac{2DN}{2n-1} \frac{\omega}{\pi}$$

donc une erreur $\delta\omega$ produit sur la valeur de V une erreur δV donnée par l'expression

$$\delta V = \frac{2DN}{\pi(2n-1)} \delta\omega; \quad \text{par suite} \quad \delta V = \frac{2DN}{\pi(2n-1)} \frac{\delta I}{f'(\omega)}.$$

Comme la fonction $f(\omega)$ est périodique, sa dérivée $f'(\omega)$ l'est également : il en résulte que la valeur de $f'(\omega)$ reste la même quel que soit l'ordre n de l'extinction observée, puisque, pour passer d'un ordre au suivant, la valeur de ω s'accroît de Ω . Le théorème est donc démontré : l'erreur absolue δV , causée par l'erreur constante δI , décroît, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse de $2n - 1$.

9. Cette démonstration, fondée uniquement sur la périodicité de la fonction $I = f(\omega)$, est nécessairement incomplète; par exemple, elle laisserait supposer que l'erreur δV est proportionnelle à la distance D des deux stations et au nombre de dents N , dont la grandeur est au contraire, ainsi que nous le verrons bientôt, favorable à la diminution de l'erreur. Mais cette proportionnalité n'est qu'apparente, car $f(\omega)$ est également fonction de D et de N , de sorte qu'on ne peut rien conclure sur l'influence de ces deux quantités.

Il est donc nécessaire d'approfondir la question, puisque nous cherchons les circonstances les plus favorables à la précision des mesures, ce qui correspond analytiquement à la recherche du minimum $\frac{\delta V}{\delta I}$.

Pour parvenir à ce résultat, il paraîtrait nécessaire d'analyser en détail le phénomène lumineux, afin de déterminer cette fonction $f(\omega)$ que nous avons employée sous la forme la plus générale. Néanmoins il est remarquable que, sans autre

analyse physique du phénomène que celle que nous avons faite déjà, en se fondant sur des considérations purement analytiques, on puisse prévoir le résultat d'une façon presque complète.

Propriétés de la fonction qui représente l'intensité de la lumière de retour.

10. En effet, considérons la fonction $I = f(\omega)$; nous savons que l'intensité I , à une phase quelconque du phénomène, ne dépend essentiellement que des quantités suivantes :

- 1° De l'éclat intrinsèque E de la source lumineuse;
- 2° De la vitesse de la lumière V ;
- 3° De la distance des deux stations D ;
- 4° Du nombre de dents mN ou $\frac{\omega N}{2\pi}$ qui passent dans l'unité de temps : leur largeur absolue est évidemment indifférente, car des roues *semblables* produiraient les mêmes effets;
- 5° Enfin, du rapport qui existe entre le plein et le vide d'une *dent complète* (ensemble d'un plein et d'un vide), ou, ce qui revient au même, du rapport k qui existe entre le plein et la dent complète, plus commode à employer dans le calcul : donc

$$I = f\left(E, V, D, \frac{\omega N}{2\pi}, k\right).$$

Il est nécessaire que cette formule soit *homogène*, c'est-à-dire indépendante du choix des unités irréductibles. Les unités de ce genre qui figurent ici sont :

- 1° L'unité d'intensité lumineuse [*];
- 2° L'unité de longueur;
- 3° L'unité de temps.

Pour que la formule soit homogène par rapport à la première, il suffit que I et E , qui seuls en dépendent au premier degré, n'entrent que par leur quotient; de même, pour l'unité de longueur, la formule ne doit contenir que le rapport de D à V ; enfin l'homogénéité par rapport au temps exige que l'expres-

[*] On pourrait objecter que l'unité d'intensité lumineuse n'est pas irréductible, qu'elle dépend des unités de longueur et de temps, puisque, dans l'hypothèse des ondulations, elle est représentée par la force vive moyenne d'un mouvement vibratoire; mais, dans cette manière de voir, l'intensité lumineuse dépend de l'unité de masse; elle renferme donc bien une unité irréductible : le nom seul en est changé.

sion ne renferme que le rapport de ω à V . Il en résulte nécessairement pour I la valeur

$$I = E f \left(\frac{\omega ND}{2\pi V}, k \right).$$

Le rapport k étant un coefficient numérique, l'homogénéité ne permet pas de déterminer sa relation avec les autres éléments de la question; nous le supposons donc contenu implicitement dans le symbole f , et nous écrirons simplement

$$I = E f \left(\frac{\omega ND}{2\pi V} \right).$$

Nous savons que cette fonction doit être périodique par rapport à la vitesse angulaire ω , c'est-à-dire qu'elle ne doit pas changer de valeur quand on ajoute à ω la valeur Ω de la période

$$f \left(\frac{\omega ND}{2\pi V} \right) = f \left(\frac{\omega ND}{2\pi V} + \frac{\Omega ND}{2\pi V} \right).$$

La valeur Ω de la période s'en déduit à une constante numérique près. En effet, le terme $\frac{\Omega ND}{2\pi V}$, qui s'ajoute à l'argument de la fonction f , doit être, comme $\frac{\omega ND}{2\pi V}$, indépendant des unités d'intensité lumineuse, de temps et de longueur; c'est donc une constante numérique a

$$\frac{\Omega ND}{2\pi V} = a, \quad \text{d'où} \quad \Omega = 2a \frac{\pi V}{ND}.$$

Cette constante numérique pourrait peut-être renfermer le rapport k ; mais le caractère de la périodicité que nous avons reconnu à la fonction s'y oppose. En effet, cette périodicité résulte de l'identité complète du phénomène qui se produit lorsque la vitesse angulaire de la roue dentée s'accroît d'une quantité Ω , telle qu'une dent de plus ait le temps de passer pendant l'aller et le retour de la lumière. La période Ω dépend donc, en ce qui concerne les dents de la roue, de leur nombre et non pas de leur forme; donc la constante a ne renferme pas implicitement le rapport k . Ce résultat, fondé uniquement sur la considération de l'homogénéité nécessaire de la formule, s'accorde entièrement avec la valeur trouvée plus haut

$$\Omega = \frac{\pi V}{ND},$$

en supposant $a = \frac{1}{2}$. C'est une confirmation réciproque des deux calculs.

A. 2.

Nous pouvons donc écrire

$$I = E f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right),$$

en faisant abstraction du facteur 2, qu'on peut supposer implicitement compris dans le symbole f .

11. Outre sa périodicité, la fonction f possède encore une propriété importante, que l'analyse sommaire du phénomène met aisément en évidence. En effet, l'intensité lumineuse ne dépendant que de la position relative de chaque dent au moment du retour des rayons lumineux au point de départ, et nullement du sens absolu du mouvement de cette dent, doit être indépendante du sens de la vitesse. La valeur de f ne dépend donc pas du signe de ω ; d'où l'on conclut

$$f\left(\frac{\omega ND}{\pi V}\right) = f\left(-\frac{\omega ND}{\pi V}\right) \quad \text{ou} \quad f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = f\left(-\frac{\omega}{\Omega}\right).$$

La substitution de $\frac{ND}{\pi V}$ à Ω est nécessaire, pour qu'on juge bien de l'invariabilité du signe des trois éléments N , D , V , qui composent la valeur numérique de la période.

Or la fonction f ne change pas lorsqu'on ajoute à son argument un nombre quelconque p de périodes

$$f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right) = f\left(\frac{p\Omega + \omega}{\Omega}\right).$$

Il en résulte que, si deux valeurs I' et I'' de l'intensité, correspondant respectivement aux vitesses ω' et ω'' , sont égales, on aura entre ces deux vitesses l'une ou l'autre des deux relations

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega'' + p_1 \Omega, & \text{ou mieux} & & (1) & \quad \omega' - \omega'' = p_1 \Omega, \\ \omega' &= p_2 \Omega - \omega'', & & & (2) & \quad \omega' + \omega'' = p_2 \Omega, \end{aligned}$$

p_1 et p_2 étant deux nombres entiers quelconques.

La première des relations résulte de la périodicité de la fonction f ; la seconde s'en déduit par l'adjonction de la condition que le phénomène reste identique par la réversion de la vitesse. Les propriétés fondamentales de la fonction $I = f(\omega)$ peuvent donc se résumer en un énoncé très-simple :

Lorsque deux valeurs ω' , ω'' de la vitesse angulaire de la roue dentée produisent

la même intensité I de la lumière de retour, on est assuré que la somme ou que la différence des deux vitesses est égale à un multiple positif ou négatif de la période Ω .

Si l'on représente géométriquement l'intensité I par l'ordonnée y d'une ligne dont la vitesse angulaire ω serait l'abscisse x , l'énoncé précédent prend la forme équivalente :

La courbe $y = Ef\left(\frac{x}{\Omega}\right)$ possède une infinité d'axes parallèles à l'axe des ordonnées dont les abscisses sont $x = p \frac{\Omega}{2}$, p étant un nombre entier quelconque.

On déduit du premier énoncé un corollaire auquel on aura bien souvent recours dans la suite de ce Mémoire :

La moyenne arithmétique de deux valeurs consécutives de la vitesse ω' , ω'' qui correspondent à des intensités égales de la lumière de retour est égale à un nombre entier de demi-périodes.

En effet, soient ω' et ω'' les vitesses données correspondant à la même intensité I . On les appelle *consécutives* pour exprimer qu'entre elles deux il n'y a aucune valeur de ω qui reproduise la même intensité; on aura donc nécessairement $\omega' - \omega'' < \Omega$. Or, comme la relation entre ces deux valeurs ne peut être que (1) ou (2), et que la première est en contradiction avec l'hypothèse $\omega' - \omega'' < \Omega$, c'est la seconde seule qui satisfait aux conditions demandées; donc

$$\frac{\omega' + \omega''}{2} = p \frac{\Omega}{2}.$$

Calcul de l'expression de l'erreur.

12. Nous pouvons, maintenant que la fonction qui lie I et ω est mieux définie, calculer les valeurs correspondantes de δI et de $\delta \omega$

$$\delta I = Ef' \left(\frac{\omega ND}{\pi V} \right) \delta \omega \frac{ND}{\pi V}.$$

Comparant cette relation avec la valeur de V différenciée,

$$\delta V = \frac{2 DV}{\pi(2n-1)} \delta \omega,$$

il vient

$$\delta V = \frac{\delta I}{E} \frac{2V}{2n-1} \frac{1}{f' \left(\frac{\omega ND}{\pi V} \right)}$$

ou encore

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta I}{E} \frac{2}{2n-1} \frac{1}{f' \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)}.$$

Sous cette forme, on voit que l'erreur δV ne dépend que de E , de k , de $2n-1$, qui entrent explicitement dans la formule, et de ω et Ω qui figurent sous le symbole f' . Mais on peut aller plus loin; en effet, il est facile de voir que, si la fonction f' n'est, pour la valeur ω choisie, ni nulle ni indéterminée, l'erreur dV ne dépend ni de ω ni de Ω .

En effet, nous avons supposé que l'observation a été faite dans le voisinage de l'extinction d'ordre n ; il en résulte que la valeur de ω est très-voisine de celle qui satisfait à la formule

$$V = \frac{2\omega DN}{\pi(2n-1)} \quad \text{ou} \quad \omega = (2n-1) \frac{\Omega}{2}.$$

On a donc sensiblement

$$f' \left(\frac{\omega}{\Omega} \right) = f' \left(\frac{2n-1}{2} \right),$$

laquelle conserve la même valeur, quel que soit le nombre entier n ; c'est même un facteur purement numérique dépendant seulement de k . Prenons, pour simplifier, $n = 1$,

$$f' \left(\frac{2n-1}{2} \right) = f' \left(\frac{1}{2} \right);$$

dès lors

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta I}{E} \frac{2}{(2n-1)} \frac{1}{f' \left(\frac{1}{2} \right)}.$$

On arrive donc ainsi, pour la valeur de l'erreur, à cette expression très-simple, qui complète le théorème énoncé plus haut :

L'erreur relative commise sur le résultat final, correspondant à une erreur constante sur la mesure de l'intensité lumineuse, ne dépend que de l'éclat intrinsèque E de la lumière de retour et de l'ordre n de l'extinction observée; elle varie en raison inverse de l'éclat intrinsèque et du facteur $2n-1$.

Pour être rigoureux, il faudrait ajouter : *et peut-être du coefficient k qui définit le rapport du plein au vide*; mais nous verrons plus loin qu'il entre dans la fonction f , mais non dans sa dérivée f' ; par suite il n'a pas d'influence sur l'erreur commise.

13. La démonstration précédente suppose que f' n'est ni nulle, ni indéterminée pour $\omega = (2n - 1) \frac{\Omega}{2}$. Cette restriction est beaucoup plus grave qu'elle ne le paraît au premier abord; car, rigoureusement parlant, la fonction f' ne peut pas avoir d'autre valeur que 0 ou $\frac{\Omega}{2}$.

En effet, comme la fonction f prend la même valeur pour deux valeurs ω' , ω'' consécutives, telles que $\frac{\omega' + \omega''}{2} = p \frac{\Omega}{2}$ (11), on peut poser

$$\omega' = p \frac{\Omega}{2} + \varepsilon, \quad \omega'' = p \frac{\Omega}{2} - \varepsilon,$$

et l'on a

$$f\left(\frac{p \frac{\Omega}{2} + \varepsilon}{\Omega}\right) = f\left(\frac{p \frac{\Omega}{2} - \varepsilon}{\Omega}\right),$$

quel que soit ε . Prenant la dérivée par rapport à ε ,

$$f'\left(p \frac{\Omega}{2} + \frac{\varepsilon}{\Omega}\right) = -f'\left(p \frac{\Omega}{2} - \frac{\varepsilon}{\Omega}\right) \quad \text{ou} \quad f'_{\omega'} = -f'_{\omega''};$$

les dérivées sont donc égales et de signe contraire. Si la dérivée de la fonction f est *continue*, la valeur limite $f'\left(\frac{p}{2}\right)$, pour $\varepsilon = 0$, sera la même; donc on aura

$$f'\left(\frac{p}{2}\right) = -f'\left(\frac{p}{2}\right), \quad 2f'\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Si la dérivée est *discontinue*, pour $\omega = p \frac{\Omega}{2}$, elle convergera vers deux valeurs différentes f_1 et f_2 , suivant le sens de la variation de la variable en arrivant à la limite. L'équation $f'_{\omega'} = -f'_{\omega''}$ montre que ces deux valeurs sont nécessairement égales et de signe contraire, différentes de zéro, sans quoi la dérivée serait continue, mais elle ne détermine pas leur valeur.

La première hypothèse, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, serait la plus naturelle à admettre, car il semble que l'*extinction* de la lumière de retour soit un *minimum* de lumière,

minimum égal à zéro. On verra plus loin qu'il n'en est rien; aussi est-il inutile de s'arrêter à discuter ce cas, qui du reste rentrera, au point de vue de la discussion et du mode d'observation, dans celui qui va suivre.

La deuxième hypothèse, celle qui correspond à l'indétermination et qui est le cas réel, comme on va le voir, conduit facilement à la solution utile, car l'indétermination n'est qu'apparente.

Principe fondamental du mode d'observation.

14. Si l'on réfléchit aux nécessités expérimentales, on verra qu'il est impossible d'observer l'intensité *nulle* de la lumière de retour, parce que l'obscurité régnant dans l'intérieur des appareils ne peut pas être complète. Dès lors, lorsque l'observateur croit avoir atteint l'intensité nulle, il n'éprouve qu'une impression relative. Il observe une certaine intensité très-faible, mais qui n'est pas nulle. Il y a plus, l'expérience montre qu'il est beaucoup plus commode de substituer à l'observation unique du moment de l'extinction l'observation double correspondant à l'évaluation de deux valeurs très-voisines ω' et ω'' de la vitesse qui produisent l'extinction et la réapparition *apparentes* de la lumière de retour : c'est ce que confirmeront aussi toutes les discussions qui se présenteront ultérieurement. Examinons donc ce qui se passe dans ce mode d'observation.

Soit I l'intensité de la lumière qu'on devait apprécier; dans la première phase de l'observation, on commet une erreur $\delta I'$ sur l'intensité, et, par suite, une erreur $\delta\omega'$ sur la vitesse

$$\delta I' = E f' \left(\frac{\omega'}{\Omega} \right) \frac{\delta\omega'}{\Omega}, \quad \text{de même} \quad \delta I'' = E f'' \left(\frac{\omega''}{\Omega} \right) \frac{\delta\omega''}{\Omega}$$

dans la deuxième phase de l'observation. On a donc en réalité observé

$$I + \delta I' \quad \text{et} \quad I + \delta I'',$$

correspondant à

$$\omega' + \delta\omega', \quad \omega'' + \delta\omega''.$$

Les deux intensités devraient être égales; donc la différence $I + \delta I' - (I + \delta I'')$, au lieu d'être zéro, représentera $2\delta I$, δI étant l'erreur moyenne commise sur chaque observation. La moyenne des deux vitesses $\frac{I}{2} (\omega' + \delta\omega' + \omega'' + \delta\omega'')$, au lieu

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLIHÉRY.

d'être égale à $p \frac{\Omega}{2}$, sera égale à $p \frac{\Omega}{2} + \delta\omega$, $\delta\omega$ étant l'erreur moyenne commise dans chaque observation; d'où l'on conclut

$$2\delta I = \delta I' - \delta I'', \quad 2\delta\omega = \delta\omega' + \delta\omega''.$$

Retranchant membre à membre, $\delta I' - \delta I''$,

$$\delta I' - \delta I'' = \frac{E}{\Omega} \left[f' \left(\frac{\omega'}{\Omega} \right) \delta\omega' - f'' \left(\frac{\omega''}{\Omega} \right) \delta\omega'' \right].$$

Si l'on remarque que ω' est moindre que $\frac{p\Omega}{2}$, et que ω'' est plus grand que $\frac{p\Omega}{2}$, on pourra écrire

$$\delta I' - \delta I'' = \frac{E}{\Omega} \left[f' \left(\frac{p\Omega}{2} - \frac{\varepsilon'}{\Omega} \right) \delta\omega' - f'' \left(\frac{p\Omega}{2} + \frac{\varepsilon''}{\Omega} \right) \delta\omega'' \right],$$

ε' et ε'' étant deux quantités positives très-petites.

Comme nous supposons que l'intensité I est très-faible, chacune des deux dérivées est très-voisine de sa valeur limite pour $\varepsilon = 0$. Or ces limites sont égales et de signes contraires, comme on l'a vu (13); donc on pourra écrire, en appelant $f' \left(\frac{1}{2} \right)$ la valeur numérique commune,

$$\delta I' - \delta I'' = \frac{E}{\Omega} \left[f' \left(\frac{1}{2} \right) (\delta\omega' + \delta\omega'') + \alpha \right],$$

α étant un terme de l'ordre du produit $\varepsilon \delta\omega$, et par conséquent négligeable; il reste donc, en substituant les erreurs moyennes δI et $\delta\omega$,

$$\delta I = \frac{E}{\Omega} f' \left(\frac{1}{2} \right) \delta\omega.$$

15. Il résulte de ce calcul qu'en employant ce mode d'observation particulier l'indétermination de $f' \left(\frac{1}{2} \right)$ ne cause aucune difficulté, car ses deux valeurs limites, qui sont égales et de signe contraire, entrant par leur différence, s'ajoutent en valeur absolue. On voit en outre que la relation qui lie les deux erreurs δI et $\delta\omega$ est exactement celle qui correspond au cas étudié plus haut, où f' ne serait pas indéterminé,

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta I}{E} \frac{2}{(2n-1)} \frac{1}{f' \left(\frac{1}{2} \right)}.$$

Donc la conclusion du n° 12 s'applique rigoureusement au mode d'observation double qui vient d'être décrit.

Si la fonction f était constante pour les valeurs de ω voisines de celles qui produisent l'extinction, il n'y aurait aucune difficulté nouvelle; on emploierait le même mode d'observation en choisissant les vitesses ω' et ω'' dans les régions où leur variation entraîne une variation correspondante de l'intensité.

Ainsi la méthode de la roue dentée est théoriquement susceptible d'une précision indéfinie, puisqu'en augmentant le facteur $2n - 1$, c'est-à-dire l'ordre des extinctions, on diminue autant qu'on le veut l'influence des erreurs personnelles à l'observateur. On peut donc avoir toute confiance dans l'application de cette méthode, et être assuré que, si les dispositifs optique et mécanique possèdent une perfection suffisante, ce ne seront pas les erreurs physiologiques qui limiteront la précision des résultats.

DÉTERMINATION DES CONDITIONS THÉORIQUES LES PLUS FAVORABLES
À LA PRÉCISION DES MESURES.

Discussion de l'expression de l'erreur.

16. L'étude analytique que nous venons de faire pour démontrer la validité de la méthode nous indique en même temps un certain nombre de conditions générales favorables à la précision des mesures. En effet, la plupart des erreurs possibles provenant d'une appréciation inexacte de l'intensité, on a intérêt, pour augmenter la précision du résultat final, à diminuer le plus possible la valeur de l'erreur sur le résultat final ∂V donnée par l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial I} = \frac{V}{E} \frac{2}{2n - 1} \frac{1}{f' \left(\frac{1}{2} \right)}.$$

Nous allons donc discuter cette formule et examiner successivement dans quelles conditions chacun des trois facteurs qui la composent prend sa valeur minimum.

Le premier facteur est $\frac{1}{E}$; on est ainsi conduit à rendre E maximum, c'est-à-dire à choisir une source lumineuse d'un éclat aussi grand que possible. En pratique on est assez limité sous ce rapport; la source lumineuse la plus intense est le Soleil; il sera donc utile d'employer la lumière solaire pour les expériences de jour. Pour les observations de nuit on emploie la lumière électrique ou mieux la lumière Drummond, dont l'éclat est, il est vrai, beaucoup moins vif, mais dont la fixité est complète, ce qui n'a pas lieu, au même degré, pour la lumière électrique.

Le deuxième facteur sera minimum lorsque $2n - 1$ sera aussi grand que possible : c'est la condition la plus importante, à cause de l'étendue des limites entre lesquelles ce facteur peut varier. Son expression, tirée de la formule fondamentale

$$2n - 1 = \frac{2DN\omega}{\pi V},$$

montre qu'il est indifférent d'en produire l'accroissement, en faisant porter l'augmentation sur l'un ou l'autre des trois éléments arbitraires D , N et ω . Ce résultat est remarquable, car on aurait pu croire qu'il fût plus avantageux de faire porter l'augmentation sur l'un d'eux en particulier. Il en résulte qu'on aura intérêt à prendre pour chacun d'eux la valeur maximum qu'ils comportent. Examinons donc comment peuvent grandir individuellement D , N et ω .

17. La distance D des deux stations est une quantité absolument indépendante des deux autres; la première idée serait de lui donner de très-grandes proportions. Malheureusement on est limité par les conditions météorologiques, car l'atmosphère est toujours plus ou moins brumeuse, et l'absorption des rayons lumineux croît suivant une loi très-rapide. Mais la transparence ne suffit pas, il faut encore l'homogénéité : or, même dans les saisons où la transparence de l'air est très-grande, l'atmosphère, par suite des variations de température, n'a pas toujours l'homogénéité convenable, et les chances d'hétérogénéité croissent évidemment en raison directe de la distance. On peut même affirmer que l'augmentation indéfinie de la distance n'est pas pratiquement aussi favorable qu'on pourrait le croire, car cette augmentation diminue l'intensité de la lumière de retour dans la proportion du carré de la distance, ainsi qu'on le verra plus loin; l'absorption atmosphérique l'affaiblit dans une proportion encore plus grande, ce qui oblige à compenser cet affaiblissement par l'accroissement du diamètre des objectifs : on tombe alors dans un autre inconvénient, car les chances d'hétérogénéité croissent, de ce chef, comme la section droite du faisceau lumineux. Il en résulte que les moments favorables aux observations deviennent de plus en plus rares, ce qui constitue pour l'observateur une difficulté réelle. Il est donc nécessaire de choisir une distance modérée qui dépendra du climat, de la configuration du terrain, un peu aussi de la patience et de l'assiduité de l'observateur, de manière à concilier, en vue de la précision des mesures, d'une part la chance favorable résultant d'une grande distance, de l'autre la chance défavorable de ne pouvoir la mettre à profit.

18. Les deux facteurs N et ω , c'est-à-dire le nombre de dents de la roue et sa

A. 3.

vitesse angulaire, paraissent au premier abord complètement indépendants, de sorte qu'on serait disposé à les faire croître individuellement, sans se préoccuper d'aucune relation mutuelle; mais l'expérience prouve qu'on est vite arrêté dans la réalisation de ces conceptions théoriques. En effet, les résistances passives des machines destinées à produire des mouvements rapides de rotation augmentent dans des proportions énormes quand on fait croître la vitesse, et dans des proportions plus grandes encore quand on augmente la dimension des mobiles à entraîner. On est ainsi limité dans le premier cas pour la vitesse angulaire ω , et dans le second pour la masse et les dimensions de la roue dentée. Il est vrai qu'il s'agit ici du nombre de dents et non de la masse de la roue; mais on ne peut faire croître N qu'en augmentant le diamètre de la roue, c'est-à-dire sa masse ou en réduisant la largeur des dents. Comme cette largeur ne peut pas tomber au-dessous d'une certaine limite fixée par les dimensions apparentes de l'image lumineuse de retour et la régularité du mécanisme, il ne reste à faire varier que le diamètre de la roue.

Il se présente ici une particularité mécanique curieuse, mais défavorable; en augmentant progressivement le diamètre de la roue, on accroît tellement les résistances passives que, pour une force motrice donnée, la diminution relative de la vitesse angulaire maximum qu'on peut imprimer à la roue devient bientôt plus grande que l'accroissement relatif du diamètre; alors la vitesse à la circonférence diminue de plus en plus à mesure que le diamètre augmente, et même tend rapidement vers zéro. On perd donc ainsi, et au delà, tout le bénéfice de l'accroissement du nombre de dents. Je reviendrai plus tard sur cette question, dans la discussion relative à la construction des appareils; mais cet aperçu suffit pour faire comprendre que les maxima des deux quantités ω et N , c'est-à-dire la vitesse angulaire et le nombre de dents, ne sont pas indépendants; qu'il faut subordonner leur détermination aux conditions pratiques où l'on se trouve, et qu'il s'agit moins de rendre individuellement ω et N maxima, que de rendre leur produit maximum.

19. Enfin il reste à discuter le troisième facteur $\frac{1}{f'(\frac{1}{2})}$, dont on a intérêt à

connaître le minimum; on ne peut évidemment rien savoir sur cette question tant que la forme de la fonction f sera inconnue. Nous avons ainsi épuisé tout ce que l'analyse sommaire du phénomène pouvait donner et nous voilà obligé d'analyser plus en détail le phénomène optique dont cette fonction $I = f(\omega)$ représente la loi, afin de la déterminer. C'est ce que nous allons faire présentement.

Lorsque ce résultat sera atteint, nous discuterons la valeur du facteur $\frac{1}{f'(\frac{1}{2})}$,

afin d'en déterminer le minimum, et nous aurons ainsi achevé de déterminer les conditions générales dans lesquelles la méthode de la roue dentée est susceptible de donner la plus grande précision pour la détermination de la vitesse de la lumière. Il ne restera plus alors qu'à examiner les causes d'erreurs secondaires provenant de l'impossibilité de réaliser rigoureusement les conditions théoriques, et à chercher les modes d'observation qui permettent d'annuler leur influence sur les résultats.

*Recherche directe de la relation qui lie l'intensité de la lumière de retour
à la vitesse angulaire de la roue dentée.*

20. Il peut paraître singulier d'avoir attendu jusqu'ici pour effectuer l'analyse complète du phénomène de l'extinction et de la réapparition de la lumière de retour, analyse qui aurait pu fournir dès le début la fonction inconnue $I = f(\omega)$; mais cette analyse est nécessairement un peu minutieuse. La marche que nous avons suivie est au contraire très-générale, elle met bien en évidence les traits généraux du phénomène à observer en même temps que les caractères essentiels de la méthode de mesure, lesquels risqueraient autrement de se perdre dans la complication des détails. Cette étude préliminaire est donc avantageuse à bien des points de vue; car, outre son intérêt théorique et sa simplicité, elle nous a fourni la plupart des conditions générales favorables à l'application précise de la méthode, et elle ménage, comme on le reconnaîtra bientôt, d'utiles vérifications pour les calculs ultérieurs.

21. Pour analyser avec détails le phénomène que présente la lumière de retour, nous nous placerons d'abord dans le cas idéal défini par les conditions suivantes :

1° La *lumière de retour* vient former au foyer de l'objectif de la *lunette d'émission* (celle qui envoie la lumière) un point lumineux sans diamètre sensible.

2° Le point lumineux, foyer réel produit par la concentration des rayons de retour au moyen de l'objectif de la lunette d'émission, est situé dans le plan du pourtour denté de la roue supposée infiniment mince et normale à l'axe optique.

3° La roue dentée est plane, infiniment mince, et tourne autour d'un axe normal à son plan avec une vitesse angulaire uniforme ω .

4° Elle porte N dents parfaitement égales, c'est-à-dire limitées par des droites

qui passent par son centre de rotation et y sous-tendent des angles égaux. Nous appellerons *dent complète* l'ensemble d'un plein et d'un vide consécutifs; il est facile de voir que les dimensions absolues n'interviennent pas dans le phénomène, au cas idéal où nous nous plaçons; aussi nous ne considérerons pas le rayon de la roue, mais seulement la largeur angulaire de chaque dent vue du centre de rotation. Cela revient à supposer égal à 1 le rayon de la roue et à mesurer les largeurs des dents par les arcs qu'elles interceptent sur sa circonférence. Nous désignerons par α l'arc qui mesure une *dent complète*; on aura donc $N\alpha = 2\pi$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre. Pour définir le *plein* de chaque dent, nous emploierons le rapport k de la largeur angulaire de ce plein à celle de la dent complète; l'arc qui mesure le *plein* sera donc $k\alpha$ et le vide $(1 - k)\alpha$. Ce rapport k est toujours positif et compris entre 0 et 1.

22. Considérons la marche de la lumière lorsque la roue dentée est animée d'une vitesse très-faible; les rayons envoyés à travers un intervalle vide reviendront au point de départ, c'est-à-dire au foyer situé dans le plan de la denture, former le *point lumineux de retour*.

Comme la roue est supposée tourner d'abord très-lentement, ce point sera, par rapport à la roue dentée, sensiblement le même que son point de départ; il sera donc visible durant tout le passage du vide de chaque dent; il disparaîtra à chaque plein, puisque la lumière émise sera interceptée.

Si la vitesse de la roue augmente de façon qu'une dizaine de dents passe en une seconde devant le foyer lumineux, l'œil de l'observateur ne distinguera plus ni les pleins ni les vides des dents, ni les interruptions de la lumière : il apercevra un point lumineux fixe, à cause de la persistance des impressions sur la rétine. L'intensité de cette lumière fixe et continue est facile à calculer.

En effet, dans cet ordre d'idées, on doit définir l'intensité I d'une lumière continue de la *quantité de lumière* Q reçue par unité de temps. L'intensité d'une lumière discontinue sera, suivant cette définition et d'après les propriétés énoncées précédemment (6), la quantité moyenne de lumière reçue dans l'unité de temps. On sait qu'en effet l'impression sur l'œil est indépendante de la loi suivant laquelle cette intensité varie avec le temps, pourvu toutefois que la durée de l'impression soit courte et périodiquement répétée.

On remarquera d'abord que la quantité de lumière concentrée au foyer des rayons de retour est à chaque instant proportionnelle à la quantité Q_0 envoyée, $Q = hQ_0$, h étant ce qu'on peut appeler le *coefficient d'affaiblissement* dû à l'absorption de l'atmosphère, les aberrations des objectifs, les réflexions aux surfaces réfringentes, la perte sur le miroir, etc.

On doit supposer k constant pendant la durée, d'ailleurs très-courte, d'une observation double. La quantité Q_0 est mesurée par le produit de l'éclat intrinsèque E de la source multiplié par le temps t , d'où

$$Q_0 = Et.$$

Lorsque aucun obstacle ne s'oppose à la marche de la lumière de retour, la quantité $Q = hQ_0$; elle est donc, comme Q_0 , proportionnelle au temps $Q = hEt$, et son intensité I est constante et égale à hE ,

$$I = \frac{Q}{t} = hE.$$

C'est l'intensité du point lumineux de retour que l'on observe lorsque la roue est fixe et que la lumière passe et revient librement à travers un vide.

Mais, lorsque la roue tourne, la lumière ne traverse la dent que pendant le passage d'un vide de largeur $(1 - k)\alpha$, c'est-à-dire pendant un temps $(1 - k)\frac{\alpha}{\omega}$. Comme cette durée est très-courte, et que le phénomène se répète à chaque dent, nous sommes donc dans les conditions énoncées plus haut. Or, dans l'unité de temps, la roue fait un nombre de tours $m = \frac{\omega}{2\pi}$; le nombre de dents complètes étant N , la quantité de lumière renvoyée pendant l'unité de temps sera donc

$$Q = hE(1 - k)\frac{\alpha}{\omega} mN = hE(1 - k)\frac{N\alpha}{\omega} \frac{\omega}{2\pi} = hE(1 - k).$$

C'est donc l'intensité demandée $I = hE(1 - k)$.

Nous l'avons calculée en suivant une marche un peu longue; mais c'est pour appliquer rigoureusement la définition de l'intensité et pour ne laisser aucun doute sur l'exactitude du résultat. On en conclut la règle suivante :

L'intensité moyenne d'une lumière discontinue, produite par la vision d'une lumière d'intensité fixe hE à travers une série d'ouvertures dont la largeur angulaire moyenne est $(1 - k)\alpha$, est égale au produit de cette largeur par l'intensité hE divisée par α .

Le résultat obtenu est presque évident. En effet, pendant le passage d'une dent complète, on ne reçoit que la fraction de lumière mesurée par le rapport $1 - k$ du vide à la dent complète, au lieu de recevoir 1 , si le plein était nul. Donc, au lieu d'observer l'intensité $I = hE$, on observe $I = hE(1 - k)$; mais

cette démonstration simplifiée suppose implicitement toutes les conditions que nous avons détaillées : elle n'est courte qu'aux dépens de la rigueur.

23. Tel est le cas où la roue dentée tourne avec une très-faible vitesse; mais, lorsqu'elle tourne avec une rapidité suffisante, son déplacement angulaire ε devient sensible pendant la durée τ que la lumière met à parcourir le double de la distance D des deux stations. En effet, on a

$$V\tau = 2D, \quad \varepsilon = \omega\tau, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon = \omega \frac{2D}{V},$$

expression qu'on peut mettre sous deux formes également intéressantes

$$\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{2D}{V} = \tau \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon r}{2D} = \frac{\omega r}{V},$$

r étant le rayon de la roue dentée.

La première exprime que *le rapport du déplacement angulaire ε à la vitesse angulaire ω doit être égal à celui de la distance parcourue par la lumière à sa vitesse.*

La seconde exprime que *l'arc εr , décrit par le point de la circonférence dentée où se trouve le point lumineux, est à la distance parcourue par la lumière comme la vitesse à la circonférence est à la vitesse de la lumière.*

L'une et l'autre de ces formes ont l'avantage de montrer clairement l'ordre de grandeur que doit posséder la vitesse de la roue dentée pour rendre l'expérience possible. Le phénomène optique utile commencera donc dès que l'arc ε aura une valeur sensible, et l'intensité lumineuse variera avec la valeur de cet arc, suivant une loi qu'il s'agit précisément d'exprimer.

24. Considérons donc la roue dentée (*fig. 2*) au moment où le bord G d'une dent découvre le point f , foyer lumineux, c'est-à-dire au moment où la lumière commence à être envoyée à l'autre station. Lorsque cette lumière commencera à revenir au point de départ, la roue aura tourné de l'angle ε ; dès lors, le bord D' , qui limite l'intervalle vide de l'autre côté, sera en D'_1 ; la roue continuant à tourner d'un mouvement uniforme, la lumière, à son retour en f , traversera l'intervalle vide tant qu'il existera, mais à la fin elle trouvera le bord D' en avance de l'angle ε sur la position qu'il avait à son départ. Il en résulte que le bord D' occultera la lumière qui retourne au point f comme si l'intervalle vide avait diminué de ε . Or l'intervalle vide est $(1 - k)\alpha$; il devient $(1 - k)\alpha - \varepsilon$.

L'intensité se calculerait comme précédemment, en faisant la somme de toutes les quantités reçues pendant l'unité de temps; mais le résultat obtenu dans le premier cas dispense de recommencer le raisonnement; on aura donc, en appliquant la règle énoncée (22),

$$I = hE \left(1 - k - \frac{\varepsilon}{\alpha} \right) \quad \text{ou} \quad I = hE \left(1 - k - \frac{\omega DN}{\pi V} \right) = hE \left(1 - k - \frac{\omega}{\Omega} \right).$$

25. Cette expression doit être la loi cherchée $I = Ef(\omega)$. Nous devons nous attendre à trouver une fonction périodique, et nous obtenons une formule linéaire. Il n'est pas difficile d'apercevoir à quoi tient cette circonstance; c'est que l'intensité I est une fonction de la vitesse angulaire ω dont la forme est discontinue, de sorte que l'expression qu'on vient d'obtenir n'est exacte qu'entre certaines limites. En effet, nous avons montré que la quantité de lumière reçue est celle qui passe par l'intervalle vide $(1 - k)\alpha$ diminué de l'angle ε ; mais nous avons raisonné sur un angle ε , petit relativement au vide et au plein de la dent.

Prenons, au contraire, un cas (*fig. 3*) où ε soit plus grand que le plein $k\alpha$ de la dent et soit notable par rapport au vide.

Le raisonnement précédent s'applique sans changement jusqu'au déplacement de la roue, qui correspond à l'occultation de la lumière de retour par le bord D'_1 en avance constante de l'angle ε . Au delà l'occultation se prolonge par suite de l'avance de la dent en $G'_1D'_1$; mais plus loin la lumière reparait lorsque le point J se trouve, relativement à la dent, dans une position f_1 comprise entre le bord D' et la droite G'_1 , qui représente l'avance ε du bord G' ; de sorte que la quantité de lumière se trouve augmentée d'une quantité mesurée par cet arc $D'G'_1$. Elle est alors proportionnelle à la somme des arcs

$$GD'_1 + G'_1D' = GD' - D'_1G'_1 = (1 - k)\alpha - k\alpha = (1 - 2k)\alpha.$$

L'intensité est par conséquent

$$I = hE(1 - 2k).$$

Ainsi elle devient constante et indépendante de la vitesse angulaire à partir de la valeur $\varepsilon = k\alpha$, c'est-à-dire de $\omega = k\alpha \frac{V}{2D} = k \frac{\pi V}{ND}$ ou encore de $\omega = k\Omega$, Ω étant la période de la vitesse angulaire. On conçoit aisément que cette valeur constante ne peut pas convenir indéfiniment.

On verrait, par un raisonnement analogue, que l'intensité I cessera d'être con-

stante lorsque l'avance ε sera telle que le bord D'_1 soit en coïncidence avec le bord G , c'est-à-dire pour $\varepsilon = (1 - k)\alpha$, ce qui correspond à $\omega = (1 - k)\Omega$.

Pour des vitesses plus grandes comprises entre cette valeur et $\omega = \Omega$, l'intensité grandit et est représentée par une quantité proportionnelle à l'arc $D'G'_1$ (*fig. 4*) mesuré par $\varepsilon - k\alpha$; d'où l'on conclut pour I

$$I = hE \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} - k \right) = hE \left(\frac{\omega DN}{\pi V} - k \right) = hE \left(\frac{\omega}{\Omega} - k \right).$$

Pour $\omega = \Omega$, on retrouve $I = hE(1 - k)$, comme on devait s'y attendre; au delà, le phénomène redevient périodiquement le même: l'analyse en serait identique, seulement on rencontrerait les arcs $2\alpha, 3\alpha, \dots, p\alpha$ au lieu de l'arc simple α ; mais leur relation avec ε et $k\alpha$ conduirait à des formules numériquement équivalentes, car ω se trouverait lui-même augmenté de $\Omega, 2\Omega, (p - 1)\Omega$.

26. En résumé voici comment, pendant la première période, l'intensité I est liée à la vitesse angulaire :

$$\begin{array}{lll} \text{De } \omega = 0 & \text{à } \omega = k\Omega, & I = hE \left(1 - k - \frac{\omega}{\Omega} \right); \\ \omega = k\Omega & \text{à } \omega = (1 - k)\Omega, & I = hE(1 - 2k) = \text{const.}; \\ \omega = (1 - k)\Omega & \text{à } \omega = \Omega, & I = hE \left(\frac{\omega}{\Omega} - k \right). \end{array}$$

Au delà on retrouve les mêmes valeurs de I pour des valeurs de ω ne différant des précédentes que par Ω ou un multiple; le phénomène est périodique et sa période est $\Omega = \frac{\pi V}{ND}$, résultat obtenu déjà de deux manières différentes (n^{os} 7 et 10).

Ainsi la fonction, continue comme valeur, est discontinue comme forme; sa dérivée par rapport à ω est tout à fait discontinue; en effet

$$\begin{array}{lll} \text{De } \omega = 0 & \text{à } \omega = k\Omega, & \frac{dI}{d\omega} = - \frac{hE}{\Omega}; \\ \omega = k\Omega & \text{à } \omega = (1 - k)\Omega, & \frac{dI}{d\omega} = 0; \\ \omega = (1 - k)\Omega & \text{à } \omega = \Omega, & \frac{dI}{d\omega} = + \frac{hE}{\Omega}. \end{array}$$

Cette dérivée n'a donc que trois valeurs possibles: l'une est zéro, et les deux autres sont égales et de signe contraire.

Il ne faut pas oublier que c'est sur un exemple particulier correspondant à

une valeur de k plus petite que l'unité que nous avons raisonné. Les limites varient avec ce coefficient; en particulier la série de valeurs pour lesquelles $I = \text{const.} = 1 - 2k$ ne correspond à une valeur admissible de I que si I est positif, $2k < 1$, $k < \frac{1}{2}$. Il y a donc encore une discussion importante à faire pour savoir ce que deviennent les limites de la fonction I suivant la valeur de k .

Image auxiliaire facilitant la discussion du phénomène.

27. On pourrait faire cette discussion, d'après le mode d'analyse physique du phénomène que nous venons d'employer, en considérant successivement les valeurs de k depuis zéro jusqu'à 1; mais cette discussion serait pénible et difficile à suivre. En modifiant légèrement la manière de se représenter le phénomène, on parvient à le réduire à une image géométrique si aisée à concevoir que les résultats dont nous avons besoin deviennent pour ainsi dire intuitifs. Imaginons que la lumière de retour puisse peindre son image sur le revers de la roue dentée, c'est-à-dire sur la face tournée vers l'objectif. Dans le mouvement uniforme de la roue, la lumière passe périodiquement pendant des espaces de temps égaux correspondant au passage de chaque vide et est arrêtée périodiquement à chaque plein. Les rayons de retour viennent former leur image au point d'où ils sont partis; cette image persiste pendant un temps égal à la durée du passage d'un vide. Il en résulte que, si cette image laissait une impression (*) sur le revers de la roue, cette impression serait formée par un petit arc de cercle exactement égal à l'intervalle d'un vide $(1 - k)\alpha$. Ces petits arcs, que nous appellerons *lumineux*, sont séparés nécessairement par des arcs qu'on appellera *obscur*, puisqu'ils ne reçoivent aucune lumière. Leur position sur la roue dépend de sa vitesse; si la roue tourne lentement, les arcs lumineux viennent se peindre exactement sur les vides d'où ils dérivent. Dès que la roue acquiert une vitesse angulaire un peu grande, elle avance d'un certain angle pendant l'aller et le retour de la lumière, de sorte que l'arc se peint en partie sur le vide d'où elle provient et en partie sur le plein suivant. Pour une certaine vitesse particulière, l'arc lumineux sera tracé tout entier sur la largeur d'un plein: c'est le cas où la lumière de retour est complètement arrêtée par la rencontre successive des dents, c'est-à-dire le cas de l'extinction complète. Pour la vitesse double, l'arc

(*) On réaliserait partiellement cette condition si le revers de la roue dentée était rendu impressionnable à la lumière, comme une plaque daguerrienne.

lumineux tombera tout entier sur un vide : c'est le cas d'une réapparition complète. On raisonne de la même manière pour les multiples des vitesses correspondant à ces deux cas particuliers, et l'on retrouverait ces extinctions et ces réapparitions périodiques que l'on observe lorsque la vitesse de la roue dentée prend les valeurs $(2n - 1) \frac{\Omega}{2}$ et $2n \frac{\Omega}{2}$, $\frac{\Omega}{2}$ étant la valeur correspondant à la première extinction.

28. La quantité de lumière qui passe dans le cas d'une vitesse quelconque de la roue s'obtient aisément; elle est proportionnelle à la fraction d'arc lumineux qui tombe sur un vide, car celle qui tombe sur un plein est interceptée, et les arcs obscurs qui tombent sur un vide n'apportent aucune lumière. Il en résulte qu'au point de vue de la quantité de lumière reçue au retour, tout se passe comme si la roue était formée de deux roues en coïncidence qui se sépareraient angulairement d'une quantité proportionnelle à leur vitesse de rotation et comme si la lumière de retour était un point lumineux fixe et continu placé en arrière de ces deux roues, mais aussi près que possible de leur plan commun. En effet la lumière que recevra l'observateur sera proportionnelle à l'ouverture laissée libre par le système des deux roues, c'est-à-dire à la fraction du vide de l'une qui tombera sur le vide de l'autre. Cette manière de voir matérialise pour ainsi dire les interruptions de la lumière de retour sous la forme de l'action d'une roue idéale qui dérive de la première par une rotation angulaire ε égale à celle qu'effectue la roue réelle pendant la durée τ de l'aller et du retour de la lumière. A l'aide de cette représentation symbolique, l'analyse optique du phénomène se réduit à une discussion géométrique dont les données se résument ainsi :

La quantité de lumière reçue au retour des rayons est celle qu'un point lumineux fixe, ayant le même éclat et la même position que le point lumineux de retour, enverrait à travers les intervalles libres des dentures de deux roues concentriques infiniment minces, identiques de forme, dont les plans seraient en coïncidence, mais qui seraient déplacées l'une par rapport à l'autre d'un angle ε proportionnel à leur vitesse angulaire commune. Cet angle est lié aux éléments du problème par les formules

$$\frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{2D}{V} \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Représentation graphique de l'intensité lumineuse en fonction de la vitesse angulaire.

29. La discussion consiste à évaluer l'ouverture libre laissée par les deux roues pour une série de valeurs de l'angle ε comprise entre zéro et l'angle α d'une dent

complète; car au delà les mêmes intervalles se reproduisent périodiquement.

Il y a deux cas principaux :

1° Le plein est moindre que le vide, $k < \frac{1}{2}$;

2° Le plein est plus grand que le vide, $k > \frac{1}{2}$;

séparés par le cas isolé où le plein est égal au vide, $k = \frac{1}{2}$.

PREMIER CAS : *Le plein est moindre que le vide.* — C'est celui qui a été discuté sommairement plus haut. L'ouverture libre pour $\omega = 0$ est égale à $(1 - k)\alpha$, elle diminue de ε tant que les pleins de la roue réelle et de la roue idéale se recouvrent (*fig. 2*), puis elle devient constante et égale à $(1 - k)\alpha - k\alpha = (1 - 2k)\alpha$ tant que les deux pleins sont séparés (*fig. 3*); enfin elle augmente à partir du moment où la dent idéale commence à recouvrir la dent réelle qui suit (*fig. 4*). L'ouverture est alors égale à $\varepsilon - k\alpha$, elle reprend sa valeur initiale pour $\varepsilon = \alpha$. Pour les valeurs croissantes de ε , on retrouve périodiquement les ouvertures déjà obtenues.

Si l'on substitue à ε ses valeurs $\varepsilon = \omega \frac{2D}{V}$, $\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\omega}{\Omega}$ et qu'on multiplie, suivant la règle précitée, par $\frac{hE}{\alpha}$, on obtient précisément les valeurs de I déduites précédemment de l'analyse optique du phénomène :

$$\begin{aligned} I &= hE \left(1 - k - \frac{\omega}{\Omega} \right) & \text{de } \omega = 0 & \quad \text{à } \omega = k\Omega, \\ I &= hE (1 - 2k) & \text{de } \omega = k\Omega & \quad \text{à } \omega = (1 - k)\Omega, \\ I &= hE \left(\frac{\omega}{\Omega} - k \right) & \text{de } \omega = (1 - k)\Omega & \quad \text{à } \omega = \Omega. \end{aligned}$$

Il est utile de représenter graphiquement la marche que suit l'intensité I avec la vitesse angulaire ω . Portons comme ordonnée la valeur de I correspondant à la valeur ω prise comme abscisse (*fig. 6*). La longueur OU représentera l'intensité hE que nous prendrons égale à l'unité; la longueur OA, la valeur $1 - k$, OD = $1 - 2k$, par suite AU = DA = k . La parallèle à l'axe des abscisses DBCD'B'C'D'' constitue une partie de la ligne représentative cherchée entre les abscisses $\omega_1 = k\Omega$, $\omega_2 = (1 - k)\Omega$.

Or la période Ω est représentée par OΩ'; par suite on a le rapport

$$\frac{O\omega_1}{O\Omega'} = k = \frac{AU}{OU} = \frac{UE}{U\Omega'}.$$

On peut donc construire géométriquement l'abscisse ω_1 et le point B en menant les parallèles AE et DB à l'axe des abscisses et la parallèle E ω_1 à l'axe des ordonnées. Le point C et l'abscisse ω_2 se construiront d'une manière symétrique.

D'autre part, la fonction $I = Ef(\omega)$ étant linéaire depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega_1 = k\Omega$, et depuis $\omega_2 = (1 - k)\Omega$ jusqu'à $\omega = \Omega$, les valeurs successives de I seront représentées par les droites AB et CA'.

La construction géométrique des points B et C peut se faire d'une autre manière, car les coefficients angulaires de AB et de CA sont égaux et de signe contraire. Leur valeur absolue est $\frac{hE}{\Omega}$, dérivée de I par rapport à ω . Comme hE et Ω ne sont autres que OU et O Ω' , il en résulte que la droite AB est parallèle à U Ω ; de même CA' est parallèle à OU'. On remarquera, en passant, que les trois points A, B, ω_2 sont en ligne droite, ainsi que ω_1 , C, A', ce qui constitue un autre mode de construction des points ω_1 , ω_2 indépendant de la droite BC.

Mais on simplifiera encore davantage la construction en remarquant que les trois points U, B et P, milieu de O Ω , sont en ligne droite, car on a

$$\frac{DB}{OP} = \frac{2k}{1} = \frac{O\omega_1}{\frac{1}{2}O\Omega'}$$

30. En résumé, pour tracer la ligne représentative des intensités correspondant à un rapport k , on prend un point A tel, que le rapport de UA à UO soit égal à k . On mène AB parallèle à U Ω' (O Ω' représentant la période Ω) jusqu'à la rencontre de la droite qui joint U au point P milieu de O Ω' ; on construit d'une manière analogue A'C parallèle à U'O jusqu'à la rencontre de U'P. La ligne brisée ABCA' est la ligne représentative cherchée; les abscisses O ω_1 , O ω_2 des points B et C fixent les valeurs de ω auxquelles correspondent les discontinuités.

La règle s'applique depuis $k = 0$ jusqu'à $k = \frac{1}{2}$. Pour cette valeur limite, les deux points B et C se confondent avec le point P. En effet, la droite analogue à AB passant par un point A milieu de OU et parallèle à O Ω passe aussi par le milieu de O Ω ; la ligne représentative se réduit alors à deux droites qui expriment que l'intensité décroît depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro proportionnellement à la vitesse, et qu'elle croît ensuite de zéro à $\frac{1}{2}$ suivant le même coefficient de proportionnalité. C'est ce qu'on déduirait sans peine de la discussion du cas où le plein est égal au vide, en ayant recours à la représentation cinématique que nous venons d'employer.

Pour les valeurs de k comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, la règle est encore plus simple, puisque les parallèles à U Ω' et à U' Ω sont limitées à l'axe des abscisses.

31. DEUXIÈME CAS : *Le plein est plus grand que le vide.* — L'ouverture libre (*fig. 5*), pour $\omega = 0$, est égale à $(1 - k)\alpha$; elle diminue de l'angle ε quand la vitesse augmente, et devient nulle pour $\varepsilon = (1 - k)\alpha$. Au delà elle reste nulle tant que le plein de la roue idéale couvre le vide de la roue réelle, de sorte que l'intensité ne recommence à croître que quand la déviation angulaire ε devient égale au plein, $\varepsilon = k\alpha$. Pour des valeurs plus grandes de la vitesse l'ouverture libre devient égale à $\varepsilon - k\alpha$. Substituant à ε sa valeur, il vient pour I

$$\begin{array}{llll} I = hE \left(1 - k - \frac{\omega}{\Omega} \right) & \text{depuis } \omega = 0 & \text{jusqu'à } \omega = (1 - k)\Omega, \\ I = 0 & \text{» } \omega = (1 - k)\Omega & \text{» } \omega = k\Omega, \\ I = hE \left(\frac{\omega}{\Omega} - k \right) & \text{» } \omega = k\Omega & \text{» } \omega = \Omega. \end{array}$$

La représentation graphique est encore plus simple dans ce cas que dans le précédent, puisque l'axe des abscisses $I = 0$ forme une portion commune aux lignes représentatives correspondant à toutes les valeurs de k comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1. Ces lignes se composent d'une droite parallèle à $U\Omega'$ partant de l'ordonnée $OA = 1 - k$ et qu'on limite à l'axe des abscisses; cet axe représente l'intensité nulle depuis l'abscisse $\omega_1 = (1 - k)\Omega$, qui est évidemment donnée par cette intersection jusqu'à l'abscisse $\omega_2 = k\Omega$, symétrique de la précédente par rapport au point P. A partir de ω_2 , la ligne se compose d'une droite parallèle à OU' jusqu'à l'abscisse Ω . Au delà la ligne brisée se reproduit périodiquement.

Influence de la valeur de k sur la délicatesse des observations.

32. La *fig. 7* montre l'ensemble des lignes représentatives de la fonction $I = Ef\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$ correspondant à des valeurs de k (rapport du plein à la dent complète) variant de dixième en dixième. On reconnaît la forme périodique et les axes de symétrie distants de $\frac{\Omega}{2}$ en $\frac{\Omega}{2}$ prévus au n° 11. La propriété des vitesses ω' , ω'' , dont la somme est un multiple de $\frac{\Omega}{2}$, de correspondre à la même intensité, se traduit ici d'une manière très-simple : toute parallèle à l'axe des ω coupe une ligne représentative en deux points consécutifs dont la moyenne des abscisses correspond à un multiple de $\frac{\Omega}{2}$. Si le multiple est d'ordre pair, l'abscisse moyenne correspond à un maximum d'intensité; si le multiple est d'ordre impair, à un minimum.

Grâce à cette représentation graphique, on peut se rendre compte des cas divers qu'on peut rencontrer dans l'application de la méthode de la double observation décrite précédemment, laquelle consiste dans l'observation successive des deux intensités égales voisines d'une extinction.

Or l'extinction absolue ne se présente que pour les valeurs de k comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1. Il faudra donc employer une roue dentée dont le rapport du plein au vide soit au moins égal à $\frac{1}{2}$; toutefois, comme on observe toujours une intensité notablement différente de zéro, k peut être légèrement inférieur à $\frac{1}{2}$. Dans tous les cas, les deux intensités égales qu'on observe correspondent à des vitesses ω' , ω'' d'autant plus différentes que k s'éloigne plus de la valeur $\frac{1}{2}$. La différence de ces deux vitesses caractérise la *délicatesse* de l'observation, car l'observation sera d'autant plus précise et délicate que la variation de vitesse angulaire faisant passer de l'extinction à la réapparition de la lumière sera plus petite. On peut donc, par un choix convenable de k , obtenir telle sensibilité que l'on veut : la représentation graphique en donne une démonstration intuitive et complète; elle montre en outre ce résultat remarquable, c'est que l'erreur à craindre δV sera la même, toutes choses égales d'ailleurs, quelle que soit la valeur de k . En effet, toutes les lignes représentatives étant formées d'éléments parallèles, la valeur absolue $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ qui représente le coefficient angulaire de ces droites au moment de l'extinction est la même; par suite elle est indépendante du rapport k du plein à la dent complète. C'est un résultat annoncé au n° 12.

La valeur du rapport k , qui définit le plein de chaque dent réglant la sensibilité de l'appareil, il est utile de pouvoir le varier à volonté; on y parvient d'une manière excessivement simple, en employant une roue dont les dents ont la forme indiquée (*fig.* 8), c'est-à-dire ayant leurs flancs rectilignes, de façon que les pleins comme les vides se terminent en pointe.

Avec cette disposition, ou toute autre équivalente, on peut obtenir toutes les variétés de la loi représentée (*fig.* 7). En effet, il est évident que, si le point lumineux de retour occupe une certaine position relativement au centre de la roue, les pleins effectifs seront mesurés par les arcs que les dents interceptent sur la circonférence passant par le point f . Il en résulte que le rapport k du plein à la dent complète pourra varier depuis $k = 0$, pour la position du point f sur la circonférence $MM'M''...$ (*fig.* 8) qui passe par toutes les pointes, jusqu'à $k = 1$ pour la position du point f sur la circonférence $NN'N''...$ du fond des dents. L'observateur est donc maître, par un déplacement convenable de la roue dentée relativement au point lumineux de retour, de régler le rapport du plein au vide le plus favorable à la délicatesse de l'observation.

Expression générale de l'intensité lumineuse dans la période d'ordre p.

33. Le mode de démonstration employé pour l'étude de la première période s'applique sans difficulté à une période d'ordre quelconque. Voici les résultats qu'on obtient dans le cas de la période d'ordre p . On les obtient en considérant les deux roues déplacées l'une par rapport à l'autre d'un angle ϵ compris entre $(p - 1)\Omega$ et $p\Omega$, c'est-à-dire en supposant le retard relatif de l'une des deux roues compris entre $p - 1$ et p dents.

Voici les diverses formes de la fonction $I = Ef\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$ relatives à la période d'ordre p , ainsi que les valeurs de la variable ω correspondant aux changements de forme de la fonction.

$$k < \frac{1}{2}.$$

$$I = hE\left(p - k - \frac{\omega}{\Omega}\right) \quad \text{de } \omega = (p - 1)\Omega \quad \text{à } \omega = (p - 1 + k)\Omega,$$

$$I = hE(1 - 2k) \quad \text{de } \omega = (p - 1 + k)\Omega \quad \text{à } \omega = (p - k)\Omega,$$

$$I = hE\left(1 - p - k + \frac{\omega}{\Omega}\right) \quad \text{de } \omega = (p - k)\Omega \quad \text{à } \omega = p\Omega.$$

$$k > \frac{1}{2}.$$

$$I = hE\left(p - k - \frac{\omega}{\Omega}\right) \quad \text{de } \omega = (p - 1)\Omega \quad \text{à } \omega = (p - k)\Omega,$$

$$I = 0 \quad \text{de } \omega = (p - k)\Omega \quad \text{à } \omega = (p - 1 + k)\Omega,$$

$$I = hE\left(1 - p - k + \frac{\omega}{\Omega}\right) \quad \text{de } \omega = (p - 1 + k)\Omega \quad \text{à } \omega = p\Omega.$$

La fonction ne reste donc constante de forme qu'entre certaines valeurs de la variable, de sorte qu'elle présente une *infinité de discontinuités dans sa forme*. C'est grâce à ces discontinuités que cette fonction peut représenter un phénomène périodique qui de prime abord semblerait impossible à définir par une fonction linéaire. Numériquement les expressions de I sont identiques pour tous les ordres, car la valeur de la vitesse s'accroît successivement de Ω , 2Ω , ..., $(p - 1)\Omega$ qui compensent les coefficients numériques 2, 3, ..., p qui figurent dans ces formules. C'est ce qu'on vérifie aisément, dans le tableau précédent, en groupant

les termes des valeurs de I et des limites de façon à mettre en évidence $\omega - (p - 1)\Omega = \omega'$. La substitution de ω' à ω rétablit l'identité de ces expressions avec celle de la première période.

Fin de la discussion de l'expression de l'erreur.

34. Maintenant que nous sommes en possession de la fonction I , nous pouvons achever la discussion de la valeur de l'erreur δV commise sur la vitesse de la lumière par une erreur δI dans l'appréciation de l'intensité I .

On remarquera d'abord que les prévisions déduites de la discussion analytique relative à la fonction $I = E f(\omega)$ (nos 10 et 11) se sont toutes réalisées :

- 1° La fonction contient les quantités E, ω, V, N, D sous la forme $E f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$;
- 2° La fonction $f(\omega)$ ne change pas avec le signe de ω (*);
- 3° La période Ω est bien à une constante numérique près $\Omega = \frac{\pi V}{ND}$;
- 4° Le rapport k n'entre pas dans la valeur de la période.

Mais un résultat inattendu, c'est la forme et la valeur de $f'\left(\frac{1}{2}\right)$. En effet, la forme prévue $E f\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$ est en réalité, h, q, q' désignant trois constantes

$$I = E \left[h \left(q \pm \frac{\omega}{\Omega} \right) \right] \quad \text{ou bien} \quad h E q'.$$

(*) La vérification directe de cette propriété exige un peu d'attention. On aurait pu conclure, en effet, de cette condition que la fonction I était paire par rapport à ω ; mais il n'en est rien, à cause des discontinuités de forme de cette fonction. Dans la condition $f(\omega) = f(-\omega)$ on fait d'ordinaire la restriction implicite que la forme f reste la même; or l'analyse donnée au n° 11 ne suppose en rien cette restriction. Il en résulte que, si la forme f change entre certaines valeurs de ω , la symbole $f(-\omega)$ a deux sens distincts : il représente le résultat de la substitution de $-\omega$ dans la forme valable pour les valeurs comprises entre ω_1 et ω_2 , et en même temps le résultat de la substitution de la valeur absolue ω dans la forme correspondant aux valeurs comprises entre $-\omega_1$ et $-\omega_2$. On les distinguera en appelant f_+ la première forme, et f_- la seconde; la relation à vérifier est en réalité $f_+(-\omega) = f_-(+\omega)$. En voici un exemple : changeons ω en $-\omega$ dans la première forme du tableau précédent $I = \left(p - k - \frac{\omega}{\Omega} \right)$ valable entre les limites $\omega_1 = (p - 1)\Omega$ et $\omega_2 = (p - 1 + k)\Omega$; il vient $I = \left(p - k + \frac{\omega}{\Omega} \right)$. Si, d'autre part, on cherche la forme de la fonction I valable entre les limites $-(p - 1)\Omega$ et $-(p - 1 + k)\Omega$ (leur ordre de grandeur se trouve interverti), on reconnaît, d'après l'expression de ces limites, qu'elle se déduit de la troisième forme en y changeant p en $-(p - 1)$. Effectuant cette substitution, il vient $I = h E \left(p - k + \frac{\omega}{\Omega} \right)$, résultat identique au premier.

Il en résulte que le symbole f est celui de la première puissance ou de la puissance zéro; la dérivée de cette forme de fonction par rapport à son argument considéré comme variable indépendante se réduit dans le premier cas au coefficient h qui multiplie cet argument, dans le second à zéro.

Il en résulte que f' est indépendante de toute variable, et qu'il n'y a pas lieu de distinguer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ de $f'\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$; d'où l'on conclut, pour l'erreur δV , dans le premier cas,

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta I}{2n-1} \frac{2}{hE}.$$

On vérifierait aisément cette expression par le calcul direct.

La constance absolue de f' est très-importante; elle justifie, dans tous les cas possibles, l'emploi de la méthode d'observation indiquée au n° 14, découverte par expérience et qui satisfait analytiquement, à la condition d'éviter les valeurs de la vitesse rendant nulle ou indéterminée la dérivée $f'\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)$.

Quant au second cas où $f' = 0$, ce qui rend δV infini, il n'y a pas lieu de s'en occuper, puisqu'on l'évite par le mode même d'observation, et que d'ailleurs il serait presque impossible de l'atteindre rigoureusement.

35. La discussion du troisième facteur $\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$, que les considérations du n° 14

laissent indéterminé, se réduit à peu de chose, puisqu'il est égal à $\frac{1}{h}$. Il faut rendre cette constante h maximum. Or elle représente la fraction de lumière envoyée qui revient au point de départ constituer la lumière de retour. Cette fraction dépend à la fois du dispositif optique et de la transparence de l'air. L'observateur doit donc tâcher de rendre h aussi grand que possible, en ce qui concerne le dispositif optique: ce sera l'objet d'une discussion ultérieure. Il doit en outre attendre, pour faire ses observations, que la transparence de l'air soit maximum pour être dans les conditions de précision les plus favorables.

36. La valeur de l'erreur δV , dans le cas théorique où nous nous sommes placé, est donc actuellement discutée dans tous ses détails. Cette discussion se résume dans ces trois conditions:

1° Observer non pas la vitesse correspondant à l'extinction absolue de la lumière, mais deux couples de vitesses suffisamment rapprochées correspondant à une même intensité très-faible de la lumière de retour;

A. 5.

- 2° Rendre maximum l'éclat hE de cette lumière ;
- 3° Rendre maximum l'ordre n des extinctions.

L'erreur relative à craindre, provenant d'une erreur dans l'appréciation de l'intensité ∂I de la lumière, est en raison inverse de hE et de $2n - 1$, et est indépendante des autres éléments de l'expérience.

Les autres causes d'erreur qui ne sont pas, comme les précédentes, inhérentes au principe même de la méthode de la roue dentée, c'est-à-dire qui rentrent dans les imperfections ordinaires des appareils ou des méthodes d'observation, vont être l'objet de discussions spéciales, en vue d'examiner leur influence.

*Examen de l'influence des causes d'erreur résultant de l'impossibilité
de réaliser exactement les conditions théoriques.*

37. La discussion précédente avait pour but de montrer que, malgré l'intervention d'un observateur, dont l'organe visuel possède nécessairement une précision limitée, l'exactitude de la méthode est théoriquement illimitée. Mais, pour arriver à cette conclusion, il a fallu supposer un cas idéal dont les conditions, définies au n° 21, peuvent se résumer ainsi :

- 1° On dispose d'une roue dentée d'une perfection complète et tournant d'un mouvement uniforme ;
- 2° La lumière de retour forme un point lumineux géométrique ;
- 3° L'observateur mesure avec toute la précision désirable la vitesse que possède la roue dentée à des époques définies par l'appréciation d'une certaine valeur de l'intensité de la lumière de retour.

Il s'agit maintenant d'examiner jusqu'à quelle limite la réalisation pratique de ces conditions est possible, et quelle sera l'influence d'une réalisation nécessairement imparfaite sur le résultat définitif de l'observation.

D'après la nature des conditions théoriques à remplir, l'examen peut se partager en trois parties :

- 1° *Conditions mécaniques* relatives à la réalisation d'une roue à dents régulières et tournant d'un mouvement uniforme : étude des erreurs qui en dérivent ;
- 2° *Conditions optiques* relatives à la réalisation d'un point lumineux dans les circonstances de l'expérience à grande distance : étude des erreurs qui peuvent en résulter ;
- 3° *Conditions physiologiques* relatives à l'observation du phénomène optique et à la mesure correspondante de la vitesse de la roue dentée par l'observateur : étude des erreurs personnelles à l'observateur.

CONDITIONS MÉCANIQUES RELATIVES A LA FORME ET AU MOUVEMENT
DE LA ROUE DENTÉE.

38. Parmi les difficultés auxquelles on doit s'attendre dans l'application de la méthode de la roue dentée, celle qui s'offre au premier abord est la réalisation d'une roue dentée pour ainsi dire géométrique et tournant avec une régularité parfaite; malgré les progrès de la Mécanique, il est évident que ces conditions ne peuvent être qu'approchées; les roues dentées sont obtenues avec des machines spéciales nommées *machines à fendre*, analogues aux machines à diviser; le tracelet de ces dernières est remplacé par un burin en rotation rapide, qui enlève successivement des copeaux et creuse ainsi le vide des dents. Quelque parfaite que soit une semblable machine, les dents ainsi obtenues présentent nécessairement de petites différences de largeur, les unes fortuites, les autres systématiques, du genre de celles qui se rencontrent dans la distance des traits des cercles divisés. En outre, même en supposant à ces roues une forme parfaite, les conditions mécaniques dans lesquelles elles sont placées pour recevoir un mouvement de rotation entraînent des inégalités périodiques provenant de l'action discontinue des engrenages ou des trépidations inévitables, surtout au moment où la vitesse devient très-grande. Il en résulte que, en réalité ou en apparence, les roues dentées présentent nécessairement des imperfections dans leur forme ou dans leur mouvement.

Ce premier examen serait de nature à faire naître dans l'esprit des observateurs habitués aux mesures précises une sorte de prévention à l'égard de l'emploi d'une roue dentée comme dispositif essentiel d'un instrument de précision et à considérer une telle roue comme un organe grossier en comparaison des appareils délicats, tels que les cercles divisés et les micromètres. Un examen plus approfondi du rôle optique de la roue dentée va montrer qu'une semblable prévention serait mal fondée, et que, malgré les imperfections inévitables de cet organe et les irrégularités de son mouvement, supposées toutefois comprises entre d'étroites limites, on peut ne faire intervenir la roue dentée que par des éléments indépendants de ces causes d'erreur; il suffit, pour obtenir ce résultat, d'employer la méthode d'observations doubles dont il a été question si souvent.

IMPERFECTIONS DE FORME.

1° *Inégalités accidentelles de la largeur des dents.*

39. Considérons une forme de denture quelconque (*Pl. I, fig. 9*), et figurons par aa' la circonférence passant par le point f , point lumineux de retour, décrit autour du centre de rotation de la roue. Cette circonférence coupera chaque dent en deux points $gd, g'd', g''d'', \dots$; comme elle forme le lieu géométrique des points où la lumière de retour est susceptible de se concentrer, tout se passera comme si les dents étaient formées de flancs droits $gG, dD, g'G', d'D', \dots$; les pleins seront constitués par les distances $gd, g'd', \dots$, et les vides par les intervalles $gd', g'd'', \dots$. Donnons une coordonnée spéciale à chacun de ces points formant les *bords* de la denture : à cet effet prenons pour origine des arcs le milieu m_0 de la dent d'ordre zéro (*Pl. I, fig. 10*); les deux bords du *plein* d'une dent quelconque d'ordre p seront représentés par l'arc $p\alpha$ égal à p fois l'arc α qui mesure une *dent complète* ($N\alpha = 2\pi$), moins l'arc d_p pour le bord de droite, plus l'arc g_p pour le bord de gauche :

$$p\alpha - d_p, \quad p\alpha + g_p.$$

En général, on n'aura pas $d_p = g_p$; mais cette égalité sera très-près d'être remplie.

Calculons maintenant la quantité de lumière émise pendant un tour de la roue en mouvement uniforme. On a vu (n° 22) qu'il suffit de déterminer la largeur angulaire moyenne de l'ouverture laissée libre entre deux dents et de multiplier le résultat par $\frac{hE}{z}$ pour avoir l'intensité moyenne de la lumière de retour dans le cas où la roue tourne très-lentement. La largeur d'un intervalle quelconque compris entre le bord de droite de la dent d'ordre p et celui de gauche de la dent d'ordre $p - 1$ sera

$$p\alpha - d_p - (p - 1)\alpha - g_{p-1} = \alpha - (g_{p-1} + d_p).$$

La somme de tous les intervalles analogues s'obtiendra en additionnant les N expressions qu'on obtient en donnant à l'indice p toutes les valeurs entières, depuis zéro jusqu'à $N - 1$. Elle est égale à

$$N\alpha - \sum_0^{N-1} g_{p-1} - \sum_0^{N-1} d_p.$$

L'intervalle moyen s'obtiendra en divisant l'expression par N , et l'intensité moyenne en multipliant le tout par $\frac{hE}{\alpha}$:

$$I = hE \left(1 - \frac{\sum g + \sum d}{N\alpha} \right).$$

Or le second terme de la parenthèse représente le rapport *du plein moyen à une dent complète* α ; désignant ce rapport par k , l'intensité de la lumière a pour valeur $I = hE(1 - k)$, c'est-à-dire la même que si tous les pleins étaient égaux à leur valeur moyenne k .

Cette valeur de l'intensité moyenne est évidemment celle de la lumière de retour dans le cas où la vitesse de la roue est très-faible, c'est-à-dire juste suffisante pour donner la *visibilité continue*.

40. Examinons ce qui va se passer lorsque la vitesse de la roue devient sensible par rapport à la vitesse de la lumière; la représentation symbolique, décrite au n° 28 pour représenter le phénomène, va encore être d'un grand secours. Nous supposons de même que, par suite de sa vitesse de rotation, la roue semble se dédoubler : l'écart angulaire sera ε et tel que, par exemple, l'image de la dent d'ordre zéro de la roue idéale recouvre partiellement la dent d'ordre $p - 1$ de la roue réelle si ε est plus grand que $(p - 1)\alpha$ (*Pl. I, fig. 11*), mais ne le dépasse que d'une petite quantité; on exprimera aisément l'ouverture laissée libre par le recouvrement partiel des deux roues : ce sera l'intervalle compris entre le bord droit D_p de la dent d'ordre p et le bord gauche G'_0 de l'image de la dent d'ordre zéro. La coordonnée de D_p rapportée à l'origine m_0 est $p\alpha - d_p$; celle de G'_0 est $+g_0$ par rapport au milieu m'_0 de l'image de la dent d'ordre zéro, laquelle est déviée de l'arc ε : donc la coordonnée de G'_0 rapportée à la roue réelle est $\varepsilon + g_0$. La différence donne l'ouverture libre

$$p\alpha - d_p - \varepsilon - g_0 = p\alpha - \varepsilon - (g_0 + d_p).$$

La somme de toutes les ouvertures s'obtiendra en augmentant successivement de $1, 2, \dots, N - 1$ unités les indices de g et de d et additionnant tous les termes ainsi obtenus

$$Np\alpha - N\varepsilon - \left(\sum_p^{p+N-1} d_i + \sum_n^{N-1} g_i \right).$$

On remarquera que la valeur de chacune des deux sommes est indépendante de

l'origine à partir de laquelle on les compte, puis qu'après avoir parcouru la circonférence on retombe sur les mêmes intervalles; on retrouvera donc les deux sommes déjà calculées, et l'intensité moyenne sera, d'après le mode de calcul précédent,

$$I = hE \left(p - \frac{\varepsilon}{z} - \frac{\sum g + \sum d}{Nz} \right) = hE \left(p - \frac{\varepsilon}{z} - k \right).$$

Mais la déviation ε est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation; on a vu (n° 28) que $\frac{\varepsilon}{z}$ est égal à $\frac{\omega}{\Omega}$, d'où l'on tire

$$I = hE \left(p - k - \frac{\omega}{\Omega} \right),$$

expression identique avec celle qui a été déduite de l'hypothèse de l'égalité absolue des dents (n° 33).

On aurait, par une analyse identique,

$$I = hE \left(1 - p - k + \frac{\omega}{\Omega} \right),$$

si l'arc ε avait été un peu inférieur à pz au lieu d'être un peu supérieur à $(p-1)z$, parce que la différence $pz - \varepsilon$ eût été remplacée par $\varepsilon - (p-1)z$. On retrouve ainsi deux formes principales de la fonction I ; les autres cas ne présenteraient pas plus de difficultés.

Nous venons en réalité de donner sous une forme plus générale la démonstration des expressions du n° 33. Voilà pourquoi nous ne l'avons pas développée précédemment.

41. Ainsi les formules et les circonstances principales du phénomène sont, malgré l'inégalité des dents, identiques à celles que nous avons obtenues dans le cas de l'égalité parfaite, à la condition de substituer la largeur moyenne des pleins à la largeur constante du cas théorique.

Toutefois nous avons fait implicitement une restriction sur laquelle il est nécessaire d'insister, et sans laquelle la démonstration précédente serait en défaut : c'est que tous les bords de même nom de l'une des roues (G_{p-1}, G_p, \dots) sont couverts par les bords de nom opposé (D'_0, D'_1, \dots) de l'autre roue, et que les autres ne se recouvrent pas; autrement dit, que tous les intervalles vides sont limités d'un côté par les bords des dents de l'une des roues et de l'autre par les bords de nom contraire de l'autre roue. Cette condition suppose que l'on n'ap-

prochera pas trop ni du maximum ni du minimum que comporte l'ouverture laissée libre, parce qu'alors il arriverait nécessairement que, par suite de la combinaison des inégalités des dents, deux bords devant être cachés par la superposition de deux pleins, si les dents étaient égales, viendraient à déborder, ou que deux bords devant être séparés se recouvriraient mutuellement. L'expression de la forme et du nombre des ouvertures libres devient alors très-compiquée.

La complication devient même double dans le cas où les inégalités des deux systèmes de bords entrent en jeu; c'est ce qui arrive au moment des maxima et minima de lumière, dans le cas où le plein est presque égal au vide ($k < \frac{1}{2}$, mais voisin de $\frac{1}{2}$), ou encore lorsque le plein et le vide sont très-petits (k voisin de zéro ou de l'unité).

42. L'analyse précédente est insuffisante pour déterminer l'intensité de la lumière, parce que la somme algébrique des ouvertures ne représente pas l'ouverture totale qui livre passage à la lumière : la difficulté provient de ce qu'on ne doit compter que les ouvertures positives; or, lorsque deux bords opposés viennent à se croiser, il en résulte pour l'ouverture correspondante, une valeur négative qui algébriquement détruit dans la somme l'influence des valeurs positives, mais qui physiquement n'a aucun effet réel et doit être comptée pour zéro. Il en résulte que le phénomène, exprimé par une loi si simple dans les circonstances moyennes, présente, au moment des maxima et des minima, des *phases critiques* auxquelles les raisonnements et les formules précédentes ne s'appliquent plus. L'existence de ces phases, conséquence des imperfections de la roue dentée, serait de nature à jeter des doutes sur la validité même de la méthode telle qu'elle avait été conçue primitivement, c'est-à-dire sur la possibilité de mesurer avec précision la vitesse de la lumière par l'observation directe d'un minimum ou d'un maximum d'intensité de la lumière de retour. En effet les maxima et minima ont lieu justement vers le milieu de ces phases critiques, et rien ne prouve *a priori* qu'ils correspondent à la même vitesse que dans le cas où la perfection de la denture serait absolue.

43. Quelque grave que puisse être cette objection, elle n'entache en rien la certitude des mesures qu'on peut obtenir avec la roue dentée, si l'on adopte la méthode d'observation double, décrite au n° 14, lors de la discussion analytique de la fonction I.

En effet, dans ce mode opératoire, ce n'est pas un minimum ou un maximum d'intensité qu'on observe, ce sont deux intensités égales et consécutives comprenant un minimum. Comme la valeur commune de ces intensités est arbitraire,

il est possible, si l'on craint des inégalités dans la denture, d'éviter la phase critique en choisissant une valeur suffisamment éloignée du minimum : les circonstances sont d'ailleurs très-favorables à la réalisation de cette condition, car la lumière diffusée inévitablement dans le champ de la lunette par la source et surtout l'éclairement de la denture *noient* le point lumineux de retour dans une lueur brillante, et le rendent invisible longtemps avant son minimum, dès que ce minimum est voisin de zéro.

Cette considération accroît donc l'importance de ce mode opératoire et fournit un motif décisif pour l'adopter ; en l'employant, on échappe à une objection qui paraît grave, ou tout au moins on évite d'employer une phase compliquée du phénomène pour n'utiliser que le phénomène dans toute sa simplicité.

En résumé, les *petites inégalités accidentelles des dents n'ont aucune influence si l'on adopte la méthode d'observations doubles* décrite précédemment (n° 14) et qui consiste à remplacer l'observation des maxima ou des minima de lumière par celle des intensités égales *consécutives* qui les comprennent.

Loi qui lie l'intensité à la vitesse angulaire pendant les phases critiques, dans le cas où les dents sont nombreuses et leurs inégalités entièrement fortuites.

44. D'après ce qu'on vient de voir, il serait, à la rigueur, inutile de connaître la loi de l'intensité lumineuse pendant les phases critiques, puisqu'il paraît facile de les éviter. Néanmoins, comme on ne sait pas en général jusqu'à quel ordre de grandeur peuvent s'élever les inégalités de la denture, il est nécessaire de déterminer cette loi pour définir les limites de vitesses qui comprennent ces phases et évaluer au besoin l'erreur qu'on commettrait si on les dépassait.

Un autre motif de rechercher cette loi, c'est d'examiner la portée de l'objection que l'existence des phases critiques soulève contre la précision de la méthode de la roue dentée dans le cas de l'utilisation des maxima et des minima d'intensité ; cette considération à elle seule justifierait tout l'intérêt qui s'attache à cette question.

J'aurais voulu résoudre le problème, comme dans l'analyse précédente, sans faire aucune hypothèse sur le nombre des dents ni sur la nature de leurs inégalités, supposées toutefois de faible amplitude ; je n'y suis pas parvenu, et je crains que le problème ne soit, sinon insoluble, du moins d'une complication assez grande pour ne permettre aucune discussion générale. Une des difficultés a été signalée plus haut : il s'agit, dans la somme des valeurs des ouvertures donnant passage à la lumière (et dont les variations sont proportionnelles aux variations de la vitesse), d'annuler toutes celles qui deviennent négatives. Le Calcul

intégral fournit des moyens d'annuler une fonction de forme donnée entre des limites données; sous cette face le problème, malgré les complications analytiques, est abordable; mais la complication réelle réside dans l'expression de chacune de ces ouvertures, dont les éléments changent d'une manière discontinue et sans aucune loi, avec la position relative des deux roues auxiliaires considérée précédemment.

45. J'ai obtenu la solution complète du problème dans un cas très-général et surtout très-voisin du cas réel, en admettant les restrictions suivantes :

- 1° Le *nombre de dents* de la roue est *très-grand*;
- 2° Les *inégalités* de forme de la denture sont *petites* et *entièrement fortuites*;
- 3° La *loi de fréquence* de ces inégalités est celle des *erreurs fortuites*, découverte par Laplace et si élégamment mise en œuvre par Gauss.

Grâce à ces hypothèses, on ramène aisément le problème au Calcul des probabilités. Pour ne laisser aucun vague dans la démonstration, il est bon de rappeler succinctement les propriétés des *erreurs fortuites* et de la loi de leur *fréquence*; nous aurons d'ailleurs besoin de la plupart des résultats qui se rencontrent dans cet exposé rapide.

1° Lorsqu'on examine une série considérable de résultats entachés d'*erreurs fortuites*, on reconnaît que les *écarts* de chaque résultat avec la moyenne sont indifféremment positifs et négatifs, et offrent toutes les nuances de grandeur entre deux limites qui forment les *écarts extrêmes*.

2° On remarque, toutefois, que les grandes erreurs sont relativement rares et que les petites sont plus fréquentes; aussi, dans cette confusion apparente, reconnaît-on facilement que, si l'on range les écarts par ordre de grandeur, il existe une relation bien définie entre la *grandeur* et la *fréquence* de ces écarts. On désigne sous le nom de *fréquence* le nombre relatif de fois où se présente un écart compris entre deux limites données.

3° La *fréquence* d'un écart x dépend évidemment, dans chaque cas, des deux limites x_1 et x_2 , ou, ce qui revient au même, de l'écart moyen $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ et de leur différence $\Delta x = x_1 - x_2$; mais, si l'on resserre les deux limites, l'expression de la fréquence devient égale au produit d'une fonction de la valeur moyenne $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ des limites ou simplement de x par leur différence Δx . En effet, pour un nombre donné très-considérable N d'écarts, si l'on partage en deux, trois, ..., n parties égales, l'intervalle, très-petit déjà, des limites entre lesquelles un certain groupe d'écarts, ayant une fréquence donnée, est compris, le nombre d'écarts compris dans chacun des nouveaux groupes sera sensiblement la moitié,

A.6.

le tiers, ..., la $n^{\text{ième}}$ partie du nombre primitif. Donc, si l'on désigne par $\varphi(x)$ une fonction encore indéterminée de la grandeur de l'écart, l'expression du nombre d'écarts compris entre x et $x + \Delta x$ sera de la forme

$$\bar{N} \varphi(x) \Delta x,$$

à la condition que \bar{N} soit très-grand et Δx très-petit. La somme des écarts de chaque groupe est évidemment égale au nombre total \bar{N} ; d'où

$$\bar{N} \Sigma \varphi(x) \Delta x = \bar{N} \quad \text{ou} \quad \Sigma \varphi(x) \Delta x = 1.$$

L'expression $\varphi(x) \Delta x$, qui représente le nombre relatif d'écarts compris entre x et $x + \Delta x$, dans le cas où le dénombrement des écarts est effectué, représente la *probabilité* de ce même écart dans le cas où l'on cherche à prévoir l'arrivée fortuite d'un écart de cette grandeur. C'est en effet, suivant la définition de la *probabilité d'un événement*, le rapport du nombre des cas favorables à l'événement $\bar{N} \varphi(x) \Delta x$ au nombre total \bar{N} des cas possibles.

46. Toutes ces considérations sont d'autant plus rigoureuses que le nombre \bar{N} est plus grand et que l'intervalle des limites est plus petit; donc, si l'on suppose \bar{N} infiniment grand et Δx infiniment petit (de telle sorte cependant que le produit $\bar{N} \Delta x$ reste fini), on ramènera les expressions analytiques aux formes ordinaires du Calcul infinitésimal. On conclura, par exemple, que l'intégrale

$$\int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) dx = 1,$$

en prenant pour limites de l'intégrale les limites extrêmes X_1 , X_2 des écarts possibles. On peut, sans inconvénient, prendre $X_1 = +\infty$, $X_2 = -\infty$, car la fonction $\varphi(x)$ doit être nulle en dehors des écarts extrêmes, de sorte que la somme d'éléments ajoutés à l'intégrale est identiquement nulle.

4° La forme la plus probable de la fonction $\varphi(x)$ a été déterminée par Laplace d'après des considérations analytiques assez complexes. Gauss l'a déduite de l'hypothèse que la moyenne arithmétique d'un nombre fini de résultats entachés d'erreurs fortuites est la valeur la plus probable (*). Cette fonction est repré-

(*) Soit y la moyenne arithmétique de n résultats y_1, y_2, \dots, y_n , qui est par hypothèse la valeur la plus probable; on a

$$(1) \quad ny = y_1 + y_2 + \dots + y_n, \quad \text{ou encore} \quad y - y_1 + y - y_2 + \dots + y - y_n = 0.$$

La probabilité de rencontre simultanée des écarts fortuits $y - y_1, y - y_2, \dots, y - y_n$ est ex-

sentée par

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 x^2};$$

elle renferme un paramètre constant a , qui caractérise l'ordre de grandeur des écarts. L'expérience vérifie, dans les circonstances les plus diverses, l'exactitude de cette loi.

primée par le produit des probabilités d'arrivée de chacun d'eux

$$\varphi(y - y_1) dy \varphi(y - y_2) dy \dots \varphi(y - y_n) dy.$$

La valeur la plus probable de y doit rendre maximum la probabilité de rencontre de ces n écarts, par suite en annuler la dérivée. Cette dernière condition se met aisément sous la forme

$$(2) \quad \frac{\varphi'(y - y_1)}{\varphi(y - y_1)} + \frac{\varphi'(y - y_2)}{\varphi(y - y_2)} + \dots + \frac{\varphi'(y - y_n)}{\varphi(y - y_n)} = 0.$$

La valeur de y qui satisfait à cette relation doit, par hypothèse, coïncider avec la moyenne arithmétique, ce qui ne peut avoir lieu que si les relations (1) et (2) sont identiques; sans quoi, en éliminant y entre les deux équations, on aurait une relation nécessaire entre les n constantes arbitraires y_1, y_2, \dots, y_n . L'identification conduit à n équations identiques de la forme

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = kx, \quad \text{d'où} \quad \log \text{ nép. } \varphi(x) = \frac{1}{2} kx^2 + \log A \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = A e^{\frac{kx^2}{2}}.$$

Telle est la forme de la fonction qui satisfait à l'hypothèse.

La constante $\frac{k}{2}$ est nécessairement négative pour que la probabilité d'une erreur infinie soit nulle; nous l'appellerons $-a^2$. La constante A est liée à la précédente par la condition que l'intégrale $\varphi(x) dx$ prise entre $+\infty$ et $-\infty$ doit se réduire à l'unité. On est amené à l'intégrale bien connue égale à $\sqrt{\pi}$; d'où $A = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$.

On achève la détermination de la fonction φ par le calcul de a , d'après la connaissance des écarts $x_1 = y - y_1, x_2 = y - y_2, \dots, x_n = y - y_n$. En effet, il existe une valeur de a qui rend *maximum maximorum* la probabilité multiple ci-dessus. Substituant l'exponentielle, il vient

$$\frac{a^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-a^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à a , il reste

$$n a^{n-1} - 2 a^{n+1} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 0, \quad \frac{1}{2 a^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

La moyenne des carrés des écarts est donc égale à la moitié de l'inverse du carré de la constante a .

Phases critiques voisines du minimum d'intensité dans le cas où le plein des dents est notablement plus grand ou plus petit que leur vide.

47. Appliquons ces résultats aux inégalités de largeur de la denture. Les bords d'une dent quelconque d'ordre i sont définis par les arcs g_i et d_i comptés en sens inverse à partir de l'extrémité de l'arc $i\alpha$ (fig. 10). Chaque valeur g_i , d_i peut être considérée comme formée de deux parties : l'une constante G ou D égale à la moyenne de g_i ou d_i , et d'une partie variable γ_i ou δ_i définissant l'inégalité fortuite, de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} g_i &= G + \gamma_i, & d_i &= D + \delta_i, \\ NG &= \Sigma g_i, & ND &= \Sigma \delta_i; \end{aligned}$$

on en conclut

$$\Sigma \gamma_i = 0, \quad \Sigma \delta_i = 0 \quad \text{et} \quad G + D = k\alpha,$$

k étant la largeur moyenne d'un plein, relativement à celle d'une dent complète α . Cela revient à considérer la roue comme formée par une denture de forme géométrique à laquelle on ajouterait les inégalités positives ou négatives, mais fortuites, $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ sur les bords de droite, et $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ sur les bords de gauche.

Substituons les valeurs de g_i et d_i dans l'expression de l'ouverture laissée libre entre les deux roues idéales (n° 40) aux environs de l'extinction d'ordre p ,

$$p\alpha - \varepsilon - (g_0 + d_p),$$

qui devient

$$p\alpha - \varepsilon - (G + D) - (\gamma_0 + \delta_p).$$

Les trois premiers termes représentent l'ouverture libre, dans le cas où la roue serait d'une régularité parfaite; nous la désignerons par l , en posant

$$p\alpha - \varepsilon - k\alpha = l.$$

L'expression de chacun des n intervalles se déduira de celle-ci en ajoutant i aux deux indices, et prendra, en posant $i + p = j$, la forme

$$l - (\gamma_i + \delta_j);$$

mais, ainsi que nous l'avons remarqué, cette expression ne doit entrer dans la somme des ouvertures qui livrent passage à la lumière que si elle est *positive*.

Toute valeur négative doit être considérée comme nulle, quelle que soit sa grandeur.

Dans l'évaluation de cette somme d'ouvertures, l'ordre dans lequel elles se présentent est absolument indifférent; il importe seulement de passer en revue tous les cas possibles et de ne les considérer qu'une fois. En cherchant tous les cas possibles de combinaisons de γ et de δ qui forment la partie variable de l'expression $l - (\gamma_i + \delta_j)$, il n'y a pas à se préoccuper de la condition $j - i = p$ des numéros d'ordre, car la série des inégalités fortuites γ du bord de gauche de la denture est supposée complètement indépendante des inégalités fortuites δ du bord de droite.

48. Cherchons donc la loi de fréquence de chaque valeur particulière du binôme $\gamma + \delta$, que nous désignerons par z , et déterminons le nombre relatif de fois ou la probabilité que z soit compris entre z et $z + dz$.

Pour y parvenir, nous remarquerons que, sur le pourtour de la circonférence dentée, le nombre relatif de fois où l'inégalité γ est comprise entre γ et $\gamma + d\gamma$ est représenté par $\varphi(\gamma)d\gamma$; pour l'inégalité δ , par $\psi(\delta)d\delta$. Ces expressions représentent en même temps les probabilités qu'un bord de gauche pris au hasard présente une inégalité comprise entre γ et $\gamma + d\gamma$, et qu'un bord de droite présente une inégalité comprise entre δ et $\delta + d\delta$. La probabilité de trouver cette inégalité γ en regard de l'inégalité δ , pour fermer les deux bords de l'ouverture libre, est le produit de leurs probabilités respectives

$$\varphi(\gamma)\delta\gamma\psi(\delta)d\delta;$$

car les deux événements sont indépendants.

Cette probabilité représente aussi le nombre relatif de fois où l'ouverture libre sera formée par la réunion de deux inégalités ayant les valeurs γ et δ . Cherchons maintenant la probabilité que la somme $\gamma + \delta = z$ soit comprise entre z et $z + dz$. Remarquons, à cet effet, qu'il existe une infinité de combinaisons, telles que $\gamma + \delta = z$; car γ , par exemple, peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, et δ sera toujours déterminé par la condition $\delta = z - \gamma$, z restant constant. Toutes ces combinaisons ne sont pas également probables, tant à cause de la grandeur de γ qu'à cause de celle de δ ; mais, en prenant la somme des fréquences relatives de chaque combinaison, c'est-à-dire des probabilités de ces combinaisons, on obtiendra le nombre relatif de fois où toutes les valeurs de γ et δ procédant par degrés égaux à $d\gamma$ et δd peuvent entrer dans la composition de la somme constante z .

Remplaçons ϑ par $z - \gamma$, la probabilité de rencontre deviendra

$$\varphi(\gamma) \psi(z - \gamma) d\gamma d\delta,$$

fonction dont il faudra prendre l'intégrale pour toutes les valeurs de γ comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Quant au symbole $d\delta$, il exprime que, dans le cas où l'on aurait à intégrer par rapport à δ , il faudrait supposer γ constant ou $d\gamma = 0$. Comme on a en général $dz = d\gamma + d\delta$, on doit donc remplacer $d\delta$ par dz .

49. L'intégration n'est pas possible en laissant les fonctions φ et ψ indéterminées. Substituons-leur la fonction des erreurs fortuites indiquée plus haut (46) en donnant deux valeurs différentes a' , b au paramètre, pour les inégalités γ et ϑ , afin de ne pas supposer l'identité dans la loi des inégalités des deux bords de nom contraire, d'autant que ces bords appartiennent, les uns (δ) à la roue réelle, les autres (γ) à la roue idéale, image optique de la première.

La probabilité que la somme $\gamma + \vartheta$ soit comprise entre z et $z + dz$ sera

$$\frac{a' b}{\pi} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma e^{-a'^2 \gamma^2} e^{-b^2 (\gamma - z)^2}$$

Le produit des deux exponentielles se réduit à une seule, dont l'exposant se met aisément sous la forme

$$-(a'^2 + b^2) \left(\gamma - \frac{b^2}{a'^2 + b^2} z \right)^2 - \frac{a'^2 b^2}{a'^2 + b^2} z^2.$$

Intégrant par rapport à γ , en considérant z comme constant, il reste

$$\frac{a' b}{\sqrt{\pi} \sqrt{a'^2 + b^2}} e^{-\frac{a'^2 b^2}{a'^2 + b^2} z^2} dz, \quad \text{car on a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

On trouve ainsi, pour la probabilité cherchée, c'est-à-dire pour la loi de fréquence des inégalités de grandeur de l'ouverture totale, une fonction de même forme que les probabilités $\varphi(\gamma)$ et $\psi(\vartheta)$; seulement le paramètre est différent: il est égal à c défini par la relation

$$c^2 = \frac{a'^2 b^2}{a'^2 + b^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Cette forme de fonction aurait pu être admise *a priori*, comme conséquence de la fortuité des erreurs des deux bords; mais cette démonstration écarte toute objection.

50. Il résulte de ce calcul que le nombre relatif de fois où l'ouverture est comprise entre $l - z$ et $l - (z + dz)$ est donné par l'expression

$$\frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 z^2} dz.$$

L'ouverture moyenne L sera la somme des produits de la valeur $l - z$ par le nombre relatif de fois où elle se présente, c'est-à-dire l'intégrale

$$L = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^l (l - z) e^{-c^2 z^2} dz, \text{ représentant } \frac{a'b}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma \int_{-\infty}^l dz (l - z) e^{-a'^2 \gamma^2 - b^2 (\gamma - z)^2}.$$

Les limites doivent être prises depuis la limite négative des écarts extrêmes de z , que l'on compte comme $-\infty$, jusqu'à $z = l$; car au delà $l - z$ deviendrait négatif, tandis qu'elle doit compter pour zéro. Posant $cz = u$, il vient définitivement, pour la valeur moyenne de l'ouverture,

$$L = \frac{l}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{cl} e^{-u^2} du + \frac{e^{-c^2 l^2}}{2c\sqrt{\pi}}.$$

Comme vérification de ce calcul, on peut considérer les quatre cas particuliers suivants, où le résultat est évident :

1° $c = \infty$, c'est le cas où les inégalités seraient nulles; on trouve $L = l$.

2° l supérieur à la limite positive l_1 des inégalités (l_1 est très-petit, mais il équivaut à $+\infty$ dans l'intégrale et l'exponentielle à cause de la grandeur de c). On n'a pas encore atteint la phase critique; on retrouve $L = l$.

3° l inférieur à la limite négative l_2 des inégalités (l_2 est également très-petit, mais il équivaut à $-\infty$ dans l'intégrale et l'exponentielle). On a dépassé la phase critique; on trouve $L = 0$.

4° Enfin, pour $l = 0$, L se réduit à $\frac{1}{2c\sqrt{\pi}}$; c'est la moitié de l'écart moyen donné par l'intégrale (*)

$$2 \int_0^{\infty} x \varphi(x) dx = \frac{2c}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-c^2 x^2} dx = \frac{1}{c\sqrt{\pi}}.$$

En effet, l'ouverture se réduit alors à $\gamma + \delta$, laquelle présente autant de va-

(*) L'intégrale étendue de $-\infty$ à $+\infty$ donnerait zéro, parce qu'il y a autant d'écarts positifs que de négatifs. Il faut donc calculer séparément la somme positive et la somme négative, et ajouter les résultats en valeur absolue, ce qui revient à doubler la somme positive.

leurs positives que de négatives; ces dernières n'entrant pas en ligne de compte, la valeur moyenne de l'ouverture se réduit à moitié.

51. Pour discuter la valeur de L , on peut la mettre sous la forme

$$L = \frac{1}{c} \left(\frac{cl}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{cl} e^{-u^2} du + \frac{e^{-c^2 l^2}}{2c\sqrt{\pi}} \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2} du + \frac{e^{-t^2}}{2\sqrt{\pi}} \right),$$

en représentant cl par t . On voit que la discussion de la fonction entre parenthèses s'applique à toutes les valeurs de c . Si l'on représente cette fonction par une courbe dont L serait l'ordonnée et t l'abscisse, on obtient une ligne qui a pour asymptote, pour $t = \infty$, la droite $L = \frac{t}{c}$ passant par l'origine, puisqu'on a vu que L se réduit à l pour cette valeur. Pour $t = -\infty$, l'asymptote est l'axe des t , puisque L se réduit alors à zéro; elle ne présente ni maximum ni minimum, ni point d'inflexion. En effet, la dérivée première et la dérivée seconde de la parenthèse, prises par rapport à t , se réduisent à

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{c\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2} du \quad \text{et} \quad \frac{d^2L}{dt^2} = \frac{e^{-t^2}}{c\sqrt{\pi}},$$

expressions qui ne s'annulent pour aucune valeur finie de t .

On remarquera que cette ligne n'a pas, à proprement parler, de branches infinies, car elle ne s'étend que jusqu'aux limites extrêmes de l'inégalité $z = \gamma + \delta$. Il en résulte que la ligne est comprise entre deux abscisses t_1 et t_2 correspondant aux limites l_1, l_2 qui représentent pour elle $+\infty$ et $-\infty$. Quant à la grandeur absolue des ordonnées, elle est en raison inverse de c , c'est-à-dire d'autant plus petite que les inégalités sont plus faibles, résultat évident d'après l'expression de c donnée plus haut.

52. On déduit de ce résultat la valeur de l'intensité de la lumière de retour par la règle donnée plus haut (22), en multipliant l'expression de l'ouverture moyenne L par $\frac{hE}{z}$. On retrouve la forme $I = f(\omega)$ lorsqu'on substitue à l sa valeur $p\alpha - \varepsilon - k\alpha$, et à ε sa valeur $\frac{\omega}{\Omega} \alpha$. La formule serait un peu compliquée: on n'a pas besoin de l'écrire, il suffit de remarquer que la discussion de I en fonction de ω se déduit immédiatement de celle de L en fonction de l ; car I est

proportionnel à L et l est fonction linéaire de ω :

$$I = \frac{LhE}{\alpha}, \quad l = \left(p - k - \frac{\omega}{\Omega} \right) \alpha.$$

La ligne représentative que nous venons de discuter est donc, à un facteur constant près, la ligne représentative de l'intensité en fonction de la vitesse angulaire, avec un simple déplacement d'origine et inversion du sens des abscisses croissantes. L'origine à partir de laquelle on compte l est la valeur de ω , qui annule son expression.

Il n'y a plus aucune difficulté à voir que l'intensité pendant la phase critique, au lieu d'être représentée par deux portions de droite AB, BC (*fig. 16*), l'une inclinée, l'autre parallèle à l'axe des ω , est représentée par une ligne continue A₁, B₁ qui forme le raccordement de ces deux droites. L'équation de cette courbe vient d'être indiquée; l'expression du coefficient angulaire de la tangente est relativement simple :

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{dI}{dl} \frac{dl}{d\omega} = \frac{hE}{\alpha} \frac{dL}{dl} \left(-\frac{\alpha}{\Omega} \right) = -\frac{hE}{\Omega} \frac{dL}{dt} \frac{dt}{dl} = -\frac{hE}{\Omega \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2} du,$$

avec

$$t = c \left(p - \frac{\omega}{\Omega} - k \right) \alpha;$$

elle varie d'une manière continue de $-\frac{hE}{\Omega}$, qui est le coefficient de la première droite, à zéro, qui est celui de la seconde, et forme bien par conséquent une courbe de raccordement. Telle est l'influence des inégalités fortuites de la denture sur la *phase de l'extinction*.

L'expression analytique L montre, en outre, que l'intensité lumineuse sera toujours plus grande aux environs des minima, dans le cas des inégalités fortuites, que dans le cas où la denture serait régulière. L'observateur en sera averti par une certaine difficulté d'obtenir l'extinction complète pour les valeurs de k très-voisines de $\frac{1}{2}$; mais cet inconvénient ne présentera aucune gravité s'il emploie la forme de denture recommandée précédemment (32) et représentée *fig. 8*. En faisant pénétrer le point lumineux f plus avant dans la denture, il retrouvera le rapport k convenable pour l'extinction et le plus favorable à la délicatesse des mesures.

53. On traiterait de la même manière la phase critique de la réapparition, en partant de l'expression analogue de l'ouverture libre,

$$\varepsilon - (p - 1) \alpha - (d_0 + g_p) = \varepsilon - (p - 1) \alpha - k \alpha - (\gamma + \delta);$$

A. 7.

le binôme $\varepsilon - (p - 1)\alpha$ est ici positif; seulement, au lieu de diminuer, comme dans le cas précédent, il augmente avec ω .

On arrive exactement aux mêmes expressions analytiques, seulement les valeurs de l (40) et de c deviennent

$$l' = \left(\frac{\omega}{\Omega} + 1 - p - k \right) \alpha, \quad \frac{1}{c'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b'^2}.$$

Si le dispositif optique produisant les points lumineux de retour était parfait, on devrait supposer $a = a'$, $b = b'$, car l'image de la roue devrait être identique à la roue elle-même : on aurait alors forcément $c = c'$.

Nous supposons que l'imperfection du dispositif optique modifie les inégalités de l'image, de sorte que a soit différent de a' , b de b' et c de c' . On obtient alors une expression correspondante à L et que nous désignerons par L' ; elle conduit de même à une courbe de raccordement $B'_1 A'_1$ (fig. 16) pour la ligne représentative de l'intensité pendant la phase critique de réapparition, au lieu de deux portions de droite BC , CD . Cette courbe de raccordement serait identique à la précédente et symétriquement placée par rapport à l'axe de symétrie M de la ligne primitive, si c était égal à c' . En effet, l'équation de cette courbe L' en fonction de l' est absolument de même forme que celle de L en fonction de l ; on remarquera, toutefois, que l' varie dans le même sens que ω , tandis que l variait en sens inverse et que l'origine de l' , défini par le point c' (fig. 16), correspond à la valeur $\omega = (p + k - 1)\Omega$, tandis que l a pour origine le point B correspondant à $\omega = (p - k)\Omega$. La non-égalité de c et c' fait donc disparaître cette symétrie et donne naissance, comme on va le voir, à une *erreur systématique* d'autant plus grande que c sera plus différent de c' . En effet, si l'on emploie la méthode d'observation double, seule applicable dans le cas présent, on déterminera les deux valeurs consécutives de la vitesse ω , ω' correspondant à une valeur convenable I de l'intensité. Comme dans ces deux cas l'intensité est proportionnelle à L et L' (52), la condition qui lie ω à ω' est $L = L'$; on la met aisément sous la forme

$$\frac{1}{c} \left(l \int_{-\infty}^l e^{-u^2} du + \frac{e^{-l^2}}{2} \right) = \frac{1}{c'} \left(l' \int_{-\infty}^{l'} e^{-u^2} du + \frac{e^{-l'^2}}{2} \right),$$

en posant $t = cl$ et $t' = c'l'$. D'après la valeur choisie pour ω , l et t sont déterminés. L'équation précédente détermine t' , par suite l' et ω' . On remarquera que cette équation de condition est indépendante de la valeur et du signe de p ; par conséquent la différence entre t et t' entre l et l' est indépendante de l'ordre de

l'extinction et du sens de la rotation de la roue dentée; on pourra donc poser $l = l' + \omega\lambda$, λ étant une fonction de c , c' et de l'intensité choisie I , et α l'arc qui mesure une dent complète. On en conclut, par substitution,

$$p - k - \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\omega'}{\Omega} + 1 - p - k + \lambda, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega + \omega'}{2} = \frac{2p - 1}{2} \Omega + \frac{\lambda\Omega}{2}.$$

Ainsi la non-égalité de c et c' introduit une *erreur constante* dans la moyenne des vitesses déduites de l'observation double. Heureusement cette erreur est facile à éliminer : il suffit d'observer deux extinctions d'ordre différent p, p_1 . Retranchant membre à membre les deux équations correspondantes, on élimine l'erreur constante. En pratique, il est plus élégant et plus avantageux, sous d'autres rapports, de choisir pour p_1 la valeur qui correspond à des vitesses sensiblement égales et de signe contraire, $2p_1 - 1 = -(2p - 1)$. L'élimination de l'erreur constante se fait alors en prenant la moyenne des résultats obtenus par l'observation des extinctions de même ordre, mais correspondant à des rotations de sens inverse de la roue dentée.

54. La considération des lignes représentatives montre la possibilité de cette élimination sous une forme intuitive. En effet, les branches successives auront la forme donnée (*fig. 16*), symétrique ou dissymétrique, suivant l'égalité ou l'inégalité c et c' , mais se répéteront identiques à elles-mêmes à chaque période, aussi bien dans le sens des valeurs positives que dans le sens des valeurs négatives de la vitesse.

On pourrait craindre que l'axe des ordonnées $\omega = 0$ ne fût un axe de symétrie des lignes représentatives, et, par suite, n'établît une discontinuité dans l'allure de la courbe; mais il n'en est rien. La considération de la roue dédoublée montre, en effet, que, dans la variation continue de l'écart angulaire ε , le passage par zéro et le changement de signe n'altèrent en rien la loi de succession des ouvertures qui livrent passage à la lumière. Ces ouvertures sont formées alternativement par la combinaison des bords de noms contraires des deux roues; par conséquent, les courbes de raccordement sont alternativement de nature différente, caractérisées par c et c' . Il en résulte que la parallèle à l'axe des ω , qui représente la valeur choisie I de l'intensité, coupe chacune de ces branches par couples de points, dont les abscisses moyennes successives sont distantes d'une période, mais qui ne coïncident pas avec des multiples impairs de la demi-période. C'est donc un véritable déplacement de l'origine des abscisses, qu'on élimine en rapportant les couples d'abscisses ω, ω' , non pas à l'origine $\omega = 0$, mais à l'un quelconque d'entre eux.

En résumé, *les inégalités fortuites de la denture peuvent introduire une cause d'erreur qu'on élimine aisément; le moyen le plus simple consiste à observer les extinctions de même ordre, mais en imprimant à la roue dentée des vitesses de rotation de sens inverse, et à prendre la moyenne des résultats correspondants.*

Phase critique voisine du minimum d'intensité dans le cas où le plein et le vide des dents sont presque égaux.

55. Lorsque les pleins et les vides des dents sont presque égaux, les limites théoriques B, C (*fig.* 16) de la vitesse, qui rendent l'intensité constante, se rejoignent, et les deux phases critiques de l'extinction et de la réapparition, qui étaient séparées, se réunissent et se confondent en une seule. La représentation graphique de l'intensité permet alors d'induire ce qui doit se passer.

Les courbes de raccordement, séparées lorsque la ligne représentative présente une longueur notable parallèle à l'axe des ω , se rejoignent et se réduisent à une seule lorsque cette longueur est suffisamment petite, c'est-à-dire lorsque k est voisin de $\frac{1}{2}$ (*fig.* 17). Dans ce cas, qui correspond à la complication double indiquée plus haut, l'ordonnée de cette courbe unique de raccordement est fournie par la somme des deux expressions calculées précédemment.

En effet, il y a superposition de deux intensités dont la *fig.* 3 permet de se représenter l'origine, à savoir celle qui provient des ouvertures telles que $D'G'_1$, et celle qui provient des ouvertures telles que D_1G ; cette circonstance se présente même lorsque k est un peu supérieur à $\frac{1}{2}$, à cause des inégalités des bords. Ces deux systèmes d'ouverture étant indépendants, on calcule séparément l'intensité moyenne produite par l'influence de chacun d'eux et on les ajoute. Il en résulte que l'intensité est représentée par

$$I = \frac{hE}{\alpha} (L + L').$$

On peut, dans ce cas, employer soit la méthode d'observation double, qui est générale, soit observer directement le minimum d'intensité, ce qui exige précisément que k soit voisin de $\frac{1}{2}$.

1° *Emploi de la méthode d'observation double.* — Les deux valeurs ω , ω' de la vitesse correspondant à la même intensité I sont les deux racines de l'équation $I = \text{const.}$, dans laquelle on aurait substitué l et l' en fonction de ω . On peut, en changeant de variables, la mettre sous la forme

$$\frac{1}{c} \left(l \int_{-\infty}^c e^{-u^2} du + \frac{c-l^2}{2} \right) + \frac{1}{c'} \left(l' \int_{-\infty}^{l'} e^{-u^2} du + \frac{e^{-l'^2}}{2} \right) = \text{const.}$$

Les deux variables $t = cl$, $t' = cl'$ se réduisent à une seule; car il y a entre elles la relation

$$\frac{t}{c} + \frac{t'}{c'} = \alpha(1 - 2k) \quad \text{correspondant à} \quad l + l' = \alpha(1 - 2k),$$

laquelle provient de l'élimination de ω entre les expressions de l et l' . Il n'est pas nécessaire de résoudre cette équation pour arriver à la conclusion que nous avons en vue : en effet, le raisonnement du n° 53 s'applique complètement. La valeur de I choisie détermine ω , l et t ; l'équation $I = \text{const.}$ détermine t' , par suite l' et ω' ; il est certain qu'en général la valeur de t' , qu'on déduira de cette équation, sera différente de t et $c't'$ de ct ; mais cette équation est indépendante de p . On en conclut, comme précédemment, *l'existence d'une erreur constante et la possibilité de l'éliminer par les mêmes moyens.*

2° *Observation directe du minimum d'intensité.* — La vitesse ω , qui correspond au minimum d'intensité, s'obtient en égalant à zéro la dérivée de l'intensité par rapport à ω ; l'équation de condition prendra les diverses formes

$$\frac{dI}{d\omega} = 0, \quad \frac{dL}{dl} \frac{dl}{d\omega} + \frac{dL'}{dl'} \frac{dl'}{d\omega} = 0, \quad \frac{dL}{dl} - \frac{dL'}{dl'} = 0;$$

car ω entre de la même manière dans l et l' , mais avec des signes contraires. Substituant les valeurs des dérivées de L et L' données au n° 51, il vient

$$\int_{-\infty}^t e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{t'} e^{-u^2} du, \quad \text{d'où} \quad t = t' \quad \text{ou} \quad cl = c'l'.$$

Par conséquent le minimum n'a pas lieu pour la valeur théorique $l = l'$. *La valeur ω de la vitesse qu'on en déduit est donc entachée d'une erreur analogue aux précédentes, ce qui exige l'emploi des mêmes précautions pour l'éliminer.*

Il y a toutefois un cas où l'erreur systématique disparaît : c'est celui où le plein moyen des dents est égal au vide. En effet, la condition correspondante $1 - 2k = 0$ entraîne $l + l' = 0$, et, comme on a déjà $cl = c'l'$, il en résulte $l = l' = 0$ et $t = t' = 0$, solution qui satisfait à l'équation du minimum.

Phase critique aux environs du maximum d'intensité.

56. L'influence simultanée de quatre bords, qui se traite aux environs des minima d'intensité, par la considération de deux groupes indépendants, devient

un peu plus complexe aux environs des maxima et se présente toujours, quelle que soit la valeur de k ; mais le calcul de l'intensité s'effectue sans difficulté nouvelle à l'aide des mêmes principes. Je le traiterai brièvement, parce que le cas des maxima d'intensité n'est pas aussi utile que celui des minima pour la détermination de la vitesse de la lumière.

Soient $G_p D_p$ (fig. 11) la dent d'ordre p de la roue réelle en coïncidence approximative avec $G'_0 D'_0$, la dent d'ordre zéro de la roue idéale. Adoptant toujours les mêmes notations, la distance des centres des deux dents sera $p\alpha - \varepsilon$ ou $\varepsilon - p\alpha$, suivant que le maximum d'intensité n'est pas atteint ou se trouve dépassé. Calculons la largeur du plein dans le premier cas : $p\alpha$ est plus grand que ε ; nous appellerons ζ la différence positive $p\alpha - \varepsilon$.

Cette épaisseur peut se décomposer en deux parties indépendantes : la demi-épaisseur de droite comptée à partir du milieu m_p et la demi-épaisseur de gauche; la demi-épaisseur de droite sera égale, suivant les cas, à la demi-épaisseur moyenne D , plus la partie fortuite δ , c'est-à-dire à $D + \delta$ ou à $\zeta + D + \delta'$, suivant que le bord D_p dépassera ou ne dépassera pas le bord D'_0 ; la demi-épaisseur de droite P_d aura donc l'une ou l'autre des valeurs

$$P_d = \begin{cases} D + \delta, & \text{si } \delta > \zeta + \delta', \\ \zeta + D + \delta', & \delta < \zeta + \delta'. \end{cases}$$

Il faut alors donner dans chacun des cas à δ et δ' toutes les valeurs possibles compatibles avec les limites, multiplier chaque résultat par sa probabilité et faire la somme; la demi-épaisseur P_d aura donc pour valeur moyenne

$$P_d = \frac{bb'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta' \int_{\zeta + \delta'}^{+\infty} d\delta (D + \delta) e^{-b^2\delta^2 - b'^2\delta'^2} \\ + \frac{bb'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta' \int_{-\infty}^{\zeta + \delta'} (\zeta + D + \delta') e^{-b^2\delta^2 - b'^2\delta'^2}.$$

L'intégration se fait très-simplement, en rendant la limite $\zeta + \delta'$ indépendante de la variable, c'est-à-dire en prenant pour variable une quantité u telle, que la limite $\zeta + \delta'$ devienne égale à ζ ; cette condition donne $\delta = u + \delta'$. Posant $\delta' = \nu$ pour la symétrie, il vient, pour l'expression précédente,

$$P_d = \frac{bb'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_{\zeta}^{+\infty} du (D + u + \nu) e^{-b^2(u+\nu)^2 - b'^2\nu^2} \\ + \frac{bb'}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\zeta} du (\zeta + D + \nu) e^{-b^2(u+\nu)^2 - b'^2\nu^2}.$$

On simplifie notablement le calcul à effectuer en réunissant les parties communes de ces deux intégrales en une seule, à savoir, la différentielle où $(D + \varrho)$ est en facteur, parce que la limite ζ disparaît dans la somme et que les limites deviennent $-\infty$ et $+\infty$. Séparant d'ailleurs en deux cette intégrale double, on voit aisément que celle qui multiplie D est égale à l'unité et que l'autre est nulle. Le calcul qui reste à exécuter est alors la répétition de celui des nos 49 et 50.

On transforme l'exposant de l'exponentielle comme au n° 49, en posant $\frac{1}{B^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b'^2}$; intégrant d'abord par rapport à ϱ , il vient définitivement

$$P_d = D + \frac{B\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\zeta} e^{-B^2 u^2} du + \frac{e^{-B^2 \zeta^2}}{2 B \sqrt{\pi}}.$$

La demi-épaisseur de gauche se calculera exactement de la même manière, en remplaçant $D, B, \delta, \delta', \zeta$ par G, A, γ, γ' et $-\zeta$. On trouve aisément

$$P_g = G - \frac{A\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\zeta} e^{-A^2 u^2} du + \frac{e^{-A^2 \zeta^2}}{2 A \sqrt{\pi}}.$$

On a supposé différents les quatre paramètres a, a', b, b' , ce qui ne complique en rien le calcul. Ils doivent être en général bien voisins, de sorte qu'on peut supposer la simplification $A = B$, au moins pour faciliter la discussion. On a alors, dans ce cas particulier, pour l'épaisseur moyenne totale d'une dent,

$$P_g + P_d = G + D + \frac{A\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\zeta}^{+\zeta} e^{-A^2 u^2} du + \frac{e^{-A^2 \zeta^2}}{A \sqrt{\pi}}, \quad \text{en supposant } A = B,$$

quantité toujours plus grande que $G + D$ ou $k\alpha$, car les deux termes additionnels sont toujours positifs, quel que soit le signe de ζ . Il en résulte que l'ouverture moyenne, qui est égale à $\alpha - (P_g + P_d)$, est moindre que dans le cas où la denture est régulière.

(Cette formule se vérifie aisément dans les quatre cas particuliers indiqués précédemment pour $\zeta = \pm \infty, \zeta = 0$ et $A = \infty$.)

L'expression $\alpha - (P_g + P_d)$, multipliée par $\frac{hE}{\alpha}$, donne l'intensité moyenne. Comme cette expression ne change pas de signe avec ζ , il en résulte qu'elle représente une courbe de raccordement *unique* et *symétrique* pour la ligne représentative de l'intensité, ainsi qu'elle est donnée (*fig. 16*).

57. Revenons au cas général $A \geq C$; la fonction I n'est plus paire en ζ , dès lors il n'y a pas symétrie dans la courbe de raccordement. On pourrait néanmoins obtenir des déterminations de la vitesse de la lumière en opérant sur le maximum d'intensité comme on opère sur le minimum et en suivant les deux mêmes méthodes. Il suffirait de rendre l'intensité de la lumière de retour peu intense, de façon qu'elle fût visible seulement dans le voisinage de la valeur maximum.

1° *Emploi de la méthode d'observation double.* — On se donne une intensité I , par suite ω et $\zeta = p\alpha - \varepsilon$; on cherche la même intensité pour une autre valeur ω' de ω ; les deux valeurs ω, ω' correspondent donc aux deux valeurs ζ, ζ' , racines de l'équation $I = \text{const.}$, ou

$$\frac{hE}{z} (z - P_g - P_d) = \text{const.}$$

On n'aura pas $\zeta = -\zeta'$, car la fonction I ne conserve pas la même valeur lorsqu'on change ζ en $-\zeta'$, excepté lorsque $A = B$. Dès lors ζ est différent de ζ' , d'où

$$p\alpha - \varepsilon \geq \varepsilon' - p\alpha \quad \text{ou} \quad \omega + \omega' \leq p\omega.$$

Les conclusions du n° 53 s'appliquent donc complètement ici : *les inégalités fortuites introduisent une erreur indépendante de l'ordre p de l'extinction et qu'on élimine de la même manière.*

2° *Observation directe du maximum.* — On détermine la vitesse ω , qui rend I maximum. Si l'on remplace, dans P_g , ω par ζ ou par $z = A\zeta$; de même, dans P_d , ω ou ζ par $z' = B\zeta$, on a

$$\frac{dI}{d\omega} = 0, \quad \frac{dI}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\omega} = 0, \quad \frac{dP_g}{dz} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\omega} + \frac{dP_d}{dz'} \frac{dz'}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\omega} = 0,$$

ou encore

$$A \frac{dP_g}{dz} + B \frac{dP_d}{dz'} = 0.$$

Effectuant la dérivée de P_g et P_d , on trouve la même simplification qu'au n° 51,

$$\int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{z'} e^{-x^2} dx = 0, \quad \text{d'où} \quad z = z' \quad \text{et} \quad (A - B)\zeta = 0.$$

En définitive, $\zeta = 0$. Donc, malgré la dissymétrie de la courbe de raccordement, la solution est la même que si elle était symétrique et correspond à $\zeta = 0$, c'est-à-dire à

$$\omega = p\Omega.$$

Ainsi, dans le cas de l'observation du maximum d'intensité, les *inégalités fortuites n'entraînent aucune erreur systématique.*

En résumé, *les inégalités fortuites de la denture de la roue effacent les discontinuités de la fonction I, c'est-à-dire remplacent les points anguleux de la ligne représentative par des courbes de raccordement. Quand certaines conditions particulières sont remplies, ces courbes conservent les axes de symétrie de la ligne primitive, et alors les inégalités n'ont aucune influence sur les mesures; dans le cas contraire, les inégalités fortuites introduisent des erreurs qu'on élimine aisément de plusieurs manières, en particulier par le renversement du sens de la rotation de la roue.*

2° Inégalités systématiques de la largeur des dents.

58. Quoique la démonstration donnée plus haut (40) s'applique à toute espèce d'inégalité, il est bon de revenir sur le cas où les inégalités seraient systématiques, afin de montrer que la démonstration n'est pas en défaut, et de bien définir ce qu'on nomme, dans ce cas, la *largeur moyenne* des dents. Ces inégalités peuvent provenir de plusieurs causes bien différentes :

1° D'abord, de l'outil qui a servi à les tailler, c'est-à-dire de la *machine à fendre*, dont le plateau gradué, quoique soigneusement construit, peut présenter des erreurs systématiques de graduation ;

2° De la manière dont la roue a été fixée sur l'axe de la machine à fendre ; une petite excentricité dans l'ajustage entraîne alors une inégalité périodique bien connue ;

3° Du montage de la roue sur son axe de rotation ; une petite excentricité est presque inévitable : on dit alors, en langage d'atelier, que la roue *ne tourne pas rond.*

En général, ces inégalités périodiques auront une amplitude très-faible ; mais il faut examiner quelle peut être leur influence. On les représente aisément en ajoutant à chaque valeur de d et de g une expression périodique. Pour simplifier la démonstration, nous considérerons d'abord le cas particulier d'une *excentricité*, c'est-à-dire d'une erreur périodique dont la période est égale à la circonférence de la roue. Le terme additionnel sera de la forme

$$z \cos (x - x_0),$$

z étant un arc très-petit qui définit l'amplitude de l'inégalité, x étant l'arc qui mesure la distance de l'origine des arcs au bord de la dent, x_0 celui qui définit

A. R.

le point où l'amplitude est maximum et positive : on le laissera indéterminé, mais fixe.

Pour exprimer le terme additionnel qui correspond à la dent d'ordre p , dont les deux bords ont pour distance, à l'origine,

$$p\alpha - g_p, \quad p\alpha + d_p,$$

on aurait, pour le bord g , à substituer $x = p\alpha - g_p$, et pour le bord d , $x = p\alpha + d_p$; mais, comme la correction est en elle-même très-faible, on peut, pour la calculer, négliger la différence qui existe entre les g et les d , et prendre leur valeur moyenne; or, comme le plein moyen est égal à $k\alpha$, nous prendrons $\frac{k\alpha}{2}$ pour d et g . L'argument devient $x = p\alpha \pm \frac{k\alpha}{2}$, de sorte que les d_p et g_p deviennent

$$g_p + z \cos \left[\left(p - \frac{k}{2} \right) \alpha - x_0 \right], \quad d_p + z \cos \left[\left(p + \frac{k}{2} \right) \alpha - x_0 \right].$$

Nous n'avons pas besoin de répéter l'analyse détaillée plus haut (40); il suffit de remarquer que les sommes Σg , Σd se présentent sous la forme

$$\sum_0^{N-1} \left\{ g_p + z \cos \left[p\alpha - \left(\frac{k}{2} \alpha + x_0 \right) \right] \right\}, \quad \sum_0^{N-1} \left\{ d_p + z \cos \left[p\alpha + \left(\frac{k}{2} \alpha - x_0 \right) \right] \right\}.$$

On retrouve les deux termes Σg , Σd augmentés de deux sommes de termes périodiques, mais qui sont nulles séparément. En effet, en faisant sortir z , qui est constant, du signe Σ , on a à effectuer la somme de cosinus dont les arguments varient en progression arithmétique. D'après la formule bien connue

$$\sum_{p=0}^{p=N-1} \cos (a + p\alpha) = \frac{\sin \frac{N\alpha}{2} \cos \left(a + \frac{N-1}{2} \alpha \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

comme $N\alpha = 2\pi$, le $\sin \frac{1}{2} N\alpha$ annule le second membre.

Ainsi la démonstration donnée précédemment s'applique sans difficulté, et la largeur moyenne des dents est indépendante de l'erreur périodique.

Il faut ici, comme précédemment, supposer qu'on n'approchera pas trop du minimum d'intensité, c'est-à-dire qu'on restera en dehors de la *phase critique* où les inégalités de denture amènent des complications dans les fonctions qui représentent l'intensité. Le mode d'observation double permet, comme on l'a déjà

remarqué, d'éviter cette phase et de se tenir dans les limites où s'applique l'analyse précédente.

59. Nous avons supposé que l'inégalité périodique se composait d'un seul terme $z \cos(x - x_0)$; ce sera, en effet, le terme prédominant en général; mais il pourrait exister une périodicité plus complexe, par exemple celle qui provient de l'ellipticité des axes de rotation, etc. Mais la même démonstration s'applique au cas d'une inégalité périodique quelconque; car, d'après la série de Fourier, toute fonction $F(x)$, dont la période est 2π , est développable en série, suivant les sinus et les cosinus des multiples successifs de la variable x ,

$$F(x) = A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \dots \\ + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \dots$$

C'est à l'aide de cette série qu'on exprimera les inégalités périodiques des d_p et g_p . Les coefficients A, B seront nécessairement très-petits, vu la faible amplitude de ces inégalités, de sorte qu'on pourra poser, comme précédemment,

$$x = p\alpha \pm \frac{k}{2}\alpha.$$

Dans les sommes Σg , Σd , tous les termes périodiques s'annuleront comme sommes de sinus et de cosinus de sous-multiples de la circonférence. Seul, le terme A_0 , ajouté pour ne pas limiter la généralité de la fonction, serait multiplié par N; mais on doit le supposer nul, puisque les parties non périodiques, mesurant l'épaisseur des pleins, sont, par hypothèse, contenues dans les termes d_p et g_p .

Les erreurs périodiques de forme, supposées de faible amplitude, n'introduisent donc aucune erreur systématique; elles n'interviennent même pas dans la valeur de la largeur moyenne des dents, mais à la condition d'employer le mode d'observations doubles déjà si souvent décrit, et d'éviter les phases critiques dont la démonstration précédente ne prévoit pas l'influence, mais que nous allons maintenant étudier en détail dans le cas le plus ordinaire.

Phases critiques produites par les inégalités systématiques de la denture.

60. Les considérations exposées plus haut (42), relatives aux inégalités de la denture, démontrent l'existence de *phases critiques* dans la loi de la variation de l'intensité aux environs des maxima et des minima, lorsque la denture présente

des *inégalités systématiques*. Sous cette dénomination on comprend une variété infinie de lois diverses comprises dans la loi de Fourier (59). La discussion du cas général serait excessivement compliquée; nous nous bornerons à l'étude du cas particulier où le développement se réduit aux deux premiers termes périodiques, c'est-à-dire au cas où l'inégalité exprimée en *arc* a pour *période* la circonférence de la roue dentée. C'est l'inégalité la plus probable, on peut même dire la plus à redouter; car elle se présente inévitablement lorsque la roue n'a pas été parfaitement centrée, soit lors de la taille des dents, soit lors de sa monture sur son axe. Nous allons d'ailleurs traiter le cas plus général où les bords de droite et de gauche de la denture présenteraient une loi d'inégalité différente.

61. Nous définirons le plein de la dent d'ordre i , comme précédemment (n° 47),

$$g_i = G + \gamma_i, \quad d_i = D + \delta_i;$$

mais ici les valeurs de γ_i et de δ_i seront exprimées par une fonction périodique de leur coordonnée moyenne

$$\gamma_i = \xi \cos (i\alpha + G - x_0), \quad \delta_i = \eta \cos (i\alpha - D - \gamma_0),$$

ξ , η , x_0 , γ_0 étant des constantes caractéristiques de ces inégalités. Les quantités G et D représentent encore la valeur moyenne de g_i et d_i , car les parties périodiques γ_i et δ_i ont une somme nulle pour toute l'étendue d'une circonférence; leur somme $G + D$, épaisseur moyenne d'un plein, est représentée par $k\alpha$.

Considérons, comme précédemment, la roue réelle et la roue idéale séparées angulairement de l'angle ε au moment où la vitesse ω , voisine de celle qui produit l'extinction d'ordre p , est comprise entre $(p - 1)\Omega$ et $p\Omega$. Si ε est plus grand que $(p - 1)\alpha$, mais ne le dépasse que d'une petite quantité, l'ouverture libre sera formée par un bord de droite D_{i+p} de la roue réelle et un bord de gauche G'_i de la roue idéale; d'où l'on conclut l'expression générale

$$p\alpha - \varepsilon - (G + D) - (\gamma_i + \delta_{i+p}),$$

qu'on déduirait de celle du n° 47, en ajoutant i aux indices de γ et δ . Adoptant les mêmes notations, l'expression prend la forme

$$l - (\gamma_i + \delta_{i+p});$$

substituant à γ_i et à δ_{i+p} leurs valeurs, il vient

$$l - \xi \cos (i\alpha + G - x_0) - \eta \cos (i\alpha + p\alpha - D - \gamma_0) = l - Z \cos (i\alpha - \varphi);$$

en posant

$$Z \cos \varphi = \xi \cos (x_0 - G) + \eta \cos (\gamma_0 + D - p\alpha),$$

$$Z \sin \varphi = \xi \sin (x_0 - G) + \eta \sin (\gamma_0 + D - p\alpha),$$

d'où

$$Z^2 = \xi^2 + 2\xi\eta \cos (x_0 - \gamma_0 - G - D + p\alpha) + \eta^2.$$

Si l'angle ε est un peu moindre que $p\alpha$, l'expression générale de l'ouverture est

$$\varepsilon - (G + D) - (\rho - 1)\alpha - (\gamma_{i+p-1} + \delta_i) = l' - (\gamma_{i+p-1} + \delta_i),$$

que l'on met également sous la forme $l' - Z' \cos (i\alpha - \varphi')$ en posant

$$Z' \cos \varphi' = \xi \cos [x_0 - G - (\rho - 1)\alpha] + \eta \cos (\gamma_0 + D),$$

$$Z' \sin \varphi' = \xi \sin [x_0 - G - (\rho - 1)\alpha] + \eta \sin (\gamma_0 + D);$$

d'où

$$Z'^2 = \xi^2 + 2\xi\eta \cos [x_0 - \gamma_0 - G - D - (\rho - 1)\alpha].$$

Ainsi, suivant que les systèmes de bords opposés sont D_{i+p} et G'_i , ou bien D'_i et G_{i+p-1} , systèmes qui produisent l'extinction et la réapparition d'ordre p , la série des ouvertures a pour expression

$$l - Z \cos (i\alpha - \varphi) \quad \text{ou} \quad l' - Z' \cos (i\alpha - \varphi').$$

La forme de ces deux expressions est la même et leur valeur numérique, correspondant à une même grandeur de l ou l' , dépend des deux paramètres Z , φ ou Z' et φ' .

62. Pour obtenir l'intensité de la lumière de retour, il faut commencer par calculer la moyenne de toutes ces ouvertures angulaires, mais en comptant comme nulles toutes celles qui sont négatives, ce qui revient à une sommation, par rapport à i , entre des limites i_i et i_0 ,

$$\frac{1}{N} \sum_{i_0}^{i_i} [l - Z \cos (i\alpha - \varphi)],$$

ces limites étant les valeurs extrêmes qui rendent le binôme positif. Le calcul et surtout la discussion de cette expression seraient pénibles si l'on suppose N fini, à

cause des discontinuités des limites numériques procédant nécessairement par nombres entiers. Heureusement on obtient une expression très-approchée de cette somme aux différences finies en la réduisant à une intégrale. Il suffit de considérer l'arc α , d'ailleurs très-petit, puisque le nombre de dents est toujours très-grand, comme une différentielle $d\alpha$, avec la condition $Nd\alpha = 2\pi$. Le multiple $i\alpha$, somme des accroissements $d\alpha$, devient la variable d'intégration α . Le nombre de quantités à sommer devient infini; mais la moyenne converge vers une limite qui sera évidemment d'autant plus voisine du résultat cherché que N sera plus grand. Les sommes précédentes prennent, en remplaçant N par sa valeur $\frac{d\alpha}{2\pi}$, la forme

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} [l - Z \cos(\alpha - \varphi)] d\alpha = \frac{1}{2\pi} [l(\alpha_1 - \alpha_0) - Z \sin(\alpha_1 - \varphi) + Z \sin(\alpha_0 - \varphi)],$$

les limites représentant toujours les valeurs extrêmes de α , qui rendent le binôme positif. Désignant par β l'arc compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, dont le cosinus est $\frac{l}{Z}$ (l et Z sont supposés positifs), c'est-à-dire qui annule le binôme, on a évidemment, comme valeurs des deux limites,

$$\alpha_0 - \varphi = \beta, \quad \alpha_1 - \varphi = 2\pi - \beta;$$

d'où l'on conclut

$$\sin(\alpha_0 - \varphi) = +\sqrt{1 - \frac{l^2}{Z^2}}, \quad \sin(\alpha_1 - \varphi) = -\sqrt{1 - \frac{l^2}{Z^2}},$$

d'où

$$S = \frac{1}{\pi} \left[l \left(\pi - \arccos \frac{l}{Z} \right) + \sqrt{Z^2 - l^2} \right].$$

63. L'intensité lumineuse correspondante s'obtiendrait, suivant la règle du n° 22, en multipliant l'ouverture moyenne S par $\frac{hE}{\alpha}$. Les variations de l'intensité dans ces phases critiques sont donc proportionnelles à S . La fonction S représente, comme dans le cas des inégalités fortuites, une courbe de *raccordement* entre les droites représentant les valeurs normales de l'intensité : elle se réduit à l pour les valeurs de l supérieures à Z , et à zéro pour $l = -Z$. Ces valeurs extrêmes coïncident avec les valeurs de l dans le cas où les inégalités sont nulles. En dehors de cet intervalle, l'arc cosinus et le radical sont imaginaires.

Dans l'intervalle, pour $l = 0$, la fonction S est égale à $\frac{Z}{\pi}$ et varie d'une manière continue sans maxima, ni minima, ni inflexion, ainsi que le prouvent les valeurs de ses dérivées première et seconde, entre $+Z$ et $-Z$,

$$\frac{dS}{dl} = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{l}{Z}, \quad \frac{d^2S}{dl^2} = \frac{1}{\pi} \frac{l}{\sqrt{Z^2 - l^2}}.$$

La fonction S' , ne différant de S que par la valeur absolue de Z' , présente exactement les mêmes particularités. On en conclut que les points anguleux de la courbe représentative des intensités sont remplacés par des courbes de raccordement, tantôt distinctes, comme dans la *fig.* 16, tantôt réunies comme dans la *fig.* 17; mais l'inégalité des valeurs de Z et de Z' entraîne comme conséquence la *dissymétrie* des deux courbes de raccordement : il en résulte que les deux valeurs de l et de l' , qui correspondent à des couples d'égale intensité de part et d'autre du minimum, ne sont plus égales; elles sont données par la relation

$$S = S' \quad \text{ou} \quad -\arccos \frac{l}{Z} + \sqrt{Z^2 - l^2} = -\arccos \frac{l'}{Z'} + \sqrt{Z'^2 - l'^2}.$$

L'inégalité de l et l' entraîne la condition

$$p\alpha - \varepsilon - k\alpha \geq \varepsilon' - k\alpha - (p-1)\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\omega + \omega'}{2} \geq (2p-1) \frac{\Omega}{2},$$

en appelant ω et ω' les valeurs de la vitesse correspondant aux intensités égales. On ne peut donc plus, dans ce cas, conclure le multiple impair de la demi-période par l'observation de ces deux vitesses ω , ω' , comme on peut le faire lorsque des intensités égales correspondent à $l = l'$. De là l'existence d'une *erreur systématique variable dans les résultats lorsqu'on observe l'intensité lumineuse pendant les phases critiques*. Comme l'équation de condition $S = S'$ renferme Z et Z' qui sont fonctions de p , l'erreur systématique dépend de l'ordre d'extinction observé. Heureusement la méthode d'observation double permet de s'éloigner notablement de ces phases et affranchit de cette cause d'erreur les résultats qu'on en déduit.

Le changement de sens de rotation de la roue dentée ne permet pas, comme dans le cas des erreurs fortuites, d'éliminer cette erreur systématique; car, d'après l'image symbolique si utile à cette discussion, le dédoublement des deux roues d'un angle $+\varepsilon$ ou $-\varepsilon$ ne produit aucun changement dans le système d'ouvertures, car ce dédoublement de sens contraire équivaut au déplacement

relatif de l'une ou de l'autre des deux roues, ce qui revient au même, car elles sont identiques comme forme.

64. Toutefois il ne faut pas s'exagérer l'influence de cette erreur, car il existe, en pratique, une circonstance favorable à son annulation, circonstance masquée par la généralité des formules. En effet, nous n'avons fait aucune restriction sur les coefficients ξ , η , D , G , x_0 , y_0 ; or il est certain que, si le décentrage de la roue peut entraîner une inégalité périodique notable sur la répartition du milieu des dents, l'erreur périodique de la largeur des dents, ou mieux de la largeur des vides, est nécessairement très-petite, d'après le mode même de construction. En effet, le burin de la machine à fendre étant de largeur fixe et taillant à la fois les deux bords d'un vide produit des vides sensiblement égaux. Exprimons donc que la largeur d'un vide est la même, quel que soit son ordre; l'intervalle entre le bord droit de la dent d'ordre i et le bord gauche de la dent d'ordre $i - 1$ est égal à

$$p\alpha - D - \delta_i - [(p-1)\alpha + G + \gamma_i] = \alpha - (D + G) - (\gamma_{i-1} + \delta_i).$$

Le terme périodique à rendre constant $\gamma_{i-1} + \delta_i$, développé en fonction de $\cos i\alpha$ et $\sin i\alpha$, donne

$$[\xi \cos(x_0 - G + \alpha) + \eta \cos(y_0 + D)] \cos i\alpha + [\xi \sin(x_0 - G + \alpha) + \eta \sin(y_0 + D)] \sin i\alpha,$$

ce qui exige que les deux parenthèses soient nulles séparément. On en conclut aisément l'un ou l'autre des systèmes de conditions équivalentes :

$$\begin{aligned} \xi &= -\eta & \text{avec} & & x_0 - y_0 - G - D &= -\alpha, \\ \xi &= +\eta & \text{»} & & x_0 - y_0 - G - D &= -\alpha + \pi. \end{aligned}$$

Nous considérerons seulement le premier système. La seconde équation simplifie beaucoup l'argument des cosinus qui entrent dans les valeurs de Z et Z' , et le réduit à $(p-1)\alpha$ pour Z , et à $p\alpha$ pour Z' . Il en résulte que les valeurs de Z et Z' sont sensiblement égales, car leurs expressions seraient identiques si les arguments du cosinus étaient égaux. La substitution de la condition précédente établit cette égalité d'une manière presque complète, puisque les deux arguments ne diffèrent plus que par l'arc $\alpha = \frac{2\pi}{N}$, qui est par lui-même très-petit.

La substitution de $\xi = -\eta$ réduit alors les valeurs de Z et Z' à

$$Z = 2\xi \sin \frac{p-1}{2} \alpha, \quad Z' = 2\xi \sin \frac{p\alpha}{2}.$$

On arriverait à des conditions analogues si l'on supposait que c'est le plein de la dent et non le vide qui est constant, c'est-à-dire si l'on supposait que l'inégalité porte sur la largeur au lieu de porter sur la position des dents.

Nous n'insisterons pas sur les divers cas particuliers que pourrait présenter la discussion de ces phases critiques; ce qui précède suffit pour nous assurer que *la cause d'erreur apportée par les inégalités systématiques les plus ordinaires de la roue dentée se trouve presque complètement annulée par le mode même de construction de la denture.*

A plus forte raison peut-on affirmer que, si l'on fait usage de la méthode d'observation double, si utile pour éviter les phases critiques, on n'a à redouter aucune erreur systématique, même dans le cas où l'on aurait dépassé quelque peu les limites rigoureuses de ces phases.

IMPERFECTIONS DE MOUVEMENT.

65. La condition du mouvement uniforme de la roue dentée, que nous avons adoptée pour exposer la méthode de mesures et les formules, est évidemment la plus naturelle, tant au point de vue de la simplicité des raisonnements que de la facilité de mesure de la vitesse du mécanisme. Au point de vue expérimental, en effet, la mesure d'un mouvement uniforme est la plus aisée à concevoir et présente bien des chances de précision; mais cela suppose l'exécution matérielle d'un mécanisme produisant un mouvement uniforme. Or la réalisation d'un semblable mouvement est excessivement difficile. Dans les expériences actuelles, la difficulté est plus grande encore, car il s'agit non pas seulement de réaliser un mouvement uniforme donné, mais encore de régler à volonté la vitesse constante de ce mouvement pour lui faire produire les phénomènes voulus.

C'est la réalisation mécanique de ces conditions multiples qui a retardé pendant de longues années et finalement empêché l'exécution de la mesure de la vitesse de la lumière, que l'Académie des Sciences avait décidée, en 1850, sur la proposition d'Arago, et qui devait être entreprise par M. Fizeau. L'habile et savant constructeur, Froment, avait été chargé d'exécuter un moteur destiné à imprimer le mouvement de rotation uniforme à une roue dentée et d'y adjoindre un régulateur particulier permettant de faire varier la vitesse uniforme par degrés insensibles. Les études préliminaires du célèbre mécanicien furent très-longues; il avait toutefois, dit-on, réussi à remplir les conditions nécessaires au succès de l'opération quand la mort l'enleva. Les organes principaux du mo-

teur étaient achevés, mais le régulateur, c'est-à-dire la pièce principale, restait à construire. Froment n'a malheureusement laissé que des documents incomplets à l'aide desquels il a été impossible de reconstituer le régulateur.

66. On se trouve donc en présence d'une difficulté très-réelle si l'on veut s'imposer la condition d'un mouvement uniforme : heureusement elle n'est pas indispensable. C'est ce qui me frappa dès les premiers essais que je fis, en 1871, entre l'École Polytechnique et la tour des Télégraphes à l'Administration centrale des lignes télégraphiques. En imprimant au mécanisme un mouvement légèrement accéléré ou retardé, je vis que le phénomène de variation d'intensité de la lumière acquiert une netteté très-grande, plus grande même que si l'on variait le mouvement uniforme par degrés successifs et discontinus. C'est qu'en effet l'organe de la vue exige, pour acquérir son maximum de sensibilité, que son action soit assez prompte; l'œil se fatigue à contempler longtemps un phénomène stable : une légère variation dans l'allure du phénomène est favorable à la justesse de son appréciation. Alors je songeai à employer franchement un mouvement varié et à chercher à *saisir* le moment précis de l'extinction et de la réapparition; le problème change de nature, puisqu'il s'agit de déterminer à chaque instant la vitesse incessamment variable et de *pointer* le moment où elle a acquis la valeur convenable. Mais, sous cette forme, la solution du problème est beaucoup moins difficile. Le mouvement varié suivant une loi continue s'obtient avec un moteur quelconque fonctionnant régulièrement; il ne s'agit plus que de connaître à chaque instant la vitesse de la roue. J'imaginai alors d'enregistrer la loi complète du mouvement à l'aide de transmissions électriques et de noter par un signal particulier l'instant où le phénomène se produit.

La loi du mouvement s'obtient aisément en adaptant un contact électrique à l'un des rouages du mécanisme. A chaque révolution du rouage une came excentrique produit la fermeture ou la rupture d'un courant, et, par suite, un signal signifiant que la roue dentée a accompli M révolutions. Un chronographe convenable enregistre les époques auxquelles ces signaux ont été produits. De ces données on peut déduire la vitesse réelle de la roue à chaque instant : on la calcule en particulier pour les époques des signaux de l'observateur.

On remarquera que l'emploi d'une vitesse variant d'une manière continue se prête merveilleusement au mode d'observation double reconnu plus haut comme nécessaire à la précision des mesures. En faisant croître ou décroître la vitesse, on rencontre successivement les deux vitesses consécutives qui produisent l'extinction et la réapparition, et dont la moyenne est exactement celle qui correspond

au milieu du phénomène d'extinction complète, milieu qu'il est généralement impossible d'observer directement avec précision.

Tel est le principe de la méthode d'observation pour la mesure de la vitesse de la roue dentée correspondant au phénomène optique; on voit quelle est son importance pour l'exécution de ces expériences, puisque, faute d'une disposition mécanique convenable, la détermination de la vitesse de la lumière par la méthode de la roue dentée a été laissée en suspens pendant de longues années. L'emploi d'une vitesse variable entraîne, il est vrai, certaines causes d'erreurs physiologiques, mais on les discutera plus loin, et l'on verra que, par des observations convenablement croisées, on peut, de plusieurs manières, en annuler l'influence.

Inégalités systématiques de la vitesse.

67. La simplification introduite par l'emploi d'une vitesse variant suivant une loi continue ne doit pas empêcher d'avoir égard à une cause d'erreur inhérente à tous les mécanismes, qu'ils soient ou non réglés en vue d'un mouvement uniforme : je veux parler des erreurs périodiques à courte période.

Ces erreurs proviennent de deux causes distinctes : la première, due au *ballotement des axes*, se présente presque inévitablement pour tous les mobiles en rotation rapide, lorsque leur axe réel de rotation ne coïncide pas avec un axe principal d'inertie (*); la deuxième est la conséquence de la *transmission par engrenages*, qui imprime aux mobiles transmis une série de chocs réguliers à l'embrayage de chaque dent dans le creux du pignon correspondant.

Ces deux causes d'erreur sont nécessairement très-faibles lorsque le mécanisme a été construit par un artiste habile; mais il est bon d'analyser leur action, afin de juger approximativement entre quelles limites leur influence est négligeable.

1° *Ballotement de l'axe de la roue dentée.*

68. L'effet produit se compose de deux parties, l'une conduisant à un véritable décentrage géométrique de la roue, d'autant plus grand que le jeu des pivots est plus grand, et l'autre à une petite altération périodique correspondante de la vitesse. L'influence d'un décentrage ou d'une excentricité néces-

(*) Lors des grandes vitesses, les chocs produits à chaque révolution produisent sur l'oreille la sensation d'un son musical auquel on donne le nom de *son d'axe*. Il est souvent assez net pour définir la vitesse de rotation du mobile.

sairement très-petite de la roue a été étudiée précédemment, et l'on a vu qu'il n'a pas d'influence dans les conditions que nous avons adoptées, c'est-à-dire lorsqu'on emploie la double observation décrite si souvent déjà et qui permet d'éviter les *phases critiques*. Même dans le cas le plus défavorable où l'on utiliserait ces phases critiques, l'erreur systématique qui en résulterait serait presque négligeable (64).

L'influence d'une variation périodique de la vitesse, due au ballotement de l'axe, se ramène à ce cas d'une manière évidente, parce que la période de cette variation est précisément la durée d'une rotation de la roue dentée. On conçoit, en effet, qu'au lieu de supposer une roue à denture régulière se mouvant avec une vitesse légèrement périodique, mais qui se retrouve la même à chaque tour entier de la roue, on puisse supposer que la rotation de la roue soit parfaitement uniforme, mais que la denture présente des inégalités fixes.

69. Quoique cette conception d'*inégalités auxiliaires* soit très-simple, il est bon d'en développer la démonstration pour montrer sur quels éléments de la discussion elle porte. On admet que la vitesse ω devient fonction périodique de la position de la roue, c'est-à-dire de l'arc absolu $i\alpha$ décrit par elle à partir d'une position fixe

$$\omega = \omega_1 + \varphi(i\alpha),$$

φ étant une fonction périodique qui reprend la même valeur lorsque i s'accroît de N .

Dans un mécanisme construit avec soin, l'erreur périodique doit être très-petite et se réduire à un terme de la forme

$$\varphi(i\alpha) = \omega \cos(i\alpha - \alpha_0),$$

dont la période est bien $N\alpha$, car $N\alpha = 2\pi$. Le caractère de cette inégalité périodique est que l'amplitude ω est fonction de la vitesse et s'annule en même temps qu'elle. On pourrait supposer la proportionnalité à la vitesse moyenne ou à son carré, ainsi que l'expérience semble l'indiquer; mais le cas général n'est pas plus difficile à traiter dans l'ordre d'approximation où nous nous trouvons. En effet, si l'on développe ω suivant les puissances ascendantes de la vitesse moyenne ω_1 , on aura une série dont le terme général sera $\Lambda_q \omega_1^q$.

L'analyse du phénomène se fera toujours de la même manière; on calculera l'ouverture moyenne (40)

$$p\alpha - \varepsilon - (g_i + d_{i+p}),$$

en faisant varier i de zéro à N ; mais l'arc ε , au lieu d'être constant comme plus haut, sera variable avec l'angle de rotation de la roue. En effet, ε est l'arc décrit par la roue pendant le temps τ que la lumière met à parcourir la distance des deux stations; son expression est donc

$$\varepsilon = \int_t^{t+\tau} \omega dt = \int_t^{t+\tau} \omega_1 dt + \int_t^{t+\tau} \Sigma A_q \omega_1^q \cos(i\alpha - z_0) dt.$$

La vitesse moyenne ω_1 est une constante, ainsi que A_q et z_0 ; mais $i\alpha$, qui est l'arc absolu décrit par la roue, varie avec le temps, puisque la roue tourne d'un mouvement presque uniforme. On peut, dans l'argument de ce terme périodique, supposer, par approximation, cette uniformité parfaite et poser

$$i\alpha - z_0 = \omega_1(t - t_0),$$

en laissant indéterminée l'origine du temps; le terme périodique général devient

$$A_q \omega_1^q \int_t^{t+\tau} \cos \omega_1(t - t_0) dt = A_q \omega_1^{q-1} [\sin \omega_1(t + \tau - t_0) - \sin \omega_1(t - t_0)].$$

Réduisant la différence de sinus en produit et remplaçant $\omega_1(t - t_0)$ par $(i\alpha - z_0)$, il vient, pour la valeur définitive de ε ,

$$\varepsilon = \omega_1 \tau + 2 \sin\left(\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \cos\left(i\alpha - z_0 - \omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \Sigma A_q \omega_1^{q-1}.$$

70. Le résultat important à considérer, c'est que la partie périodique peut être mise sous la forme

$$A \cos(i\alpha - z'_0),$$

les paramètres A et z'_0 ne présentant aucune variation brusque pour les variations de vitesse moyenne de petite étendue, telles que celles qui sont nécessaires pour l'application de la méthode d'observation double. Il en résulte qu'on peut remplacer ces paramètres par leur valeur moyenne dans l'intervalle compris entre ω'_1 et ω''_1 , qui correspondent aux intensités égales consécutives, de part et d'autre d'un minimum.

Si l'on substitue la valeur de ε dans l'expression de l'ouverture donnée plus haut, le terme $\omega_1 \tau$ remplacera le terme ε dans le cas de la vitesse rigoureusement uniforme, et le terme périodique $A \cos(i\alpha - z'_0)$ pourra être attribué à une *inégalité fictive* de la denture. C'est le résultat annoncé plus haut.

71. Si la denture n'était pas régulière et présentait elle-même des inégalités périodiques, il n'y aurait aucune complication nouvelle, car le terme qui serait compris dans le binôme $g_i + d_{i+p}$ serait de même forme, et la somme des deux termes serait, suivant la règle bien connue, réductible à un terme unique encore de même forme.

Il est inutile, d'après ce qui a été dit précédemment, d'insister longuement sur ce sujet. Tous les résultats relatifs aux inégalités périodiques de la denture s'appliquent donc aux inégalités de la vitesse ayant pour période la circonférence de la roue. On peut donc en conclure que *les petites inégalités périodiques de la vitesse de la roue dentée n'ont pas d'influence appréciable sur les mesures.*

Il est toutefois nécessaire de remarquer que l'amplitude A du terme périodique croît avec la vitesse moyenne, et que, pour les grandes vitesses, les inégalités pourraient ne plus être *petites* (*); mais on s'en apercevrait aux vibrations de

(*) Je mentionnerai succinctement un mode de discussion géométrique qui m'a permis, au début de ces recherches, de traiter approximativement le cas des phases critiques, et même de découvrir le sens de l'erreur à craindre lorsque les erreurs périodiques de la vitesse croissent avec elle.

Elle est fondée sur la considération de la courbe représentative (fig. 7); en voici deux exemples :

1° *Cas de petites inégalités périodiques dans la largeur des dents.* — La vitesse angulaire ω étant constante, la largeur k varie périodiquement, la circonférence de la roue formant la période. L'intensité correspond (fig. 12), sur la ligne représentative, à une ordonnée dont l'abscisse est ω et dont l'extrémité varie à chaque instant d'une ligne à l'autre, suivant la valeur de k . Tant que les variations de k sont comprises entre des limites a_1, a_2 , pour lesquelles les lignes représentatives sont de même nature, l'intensité moyenne correspond bien à la valeur moyenne; mais si elles dépassent ces limites, soit vers b_1 , soit vers b_2 , l'intensité moyenne est moindre ou plus grande que la vitesse correspondant à la valeur moyenne de k : de là les phases critiques. Il est facile de voir que, si l'on connaît (fig. 13) la loi de variation de k , suivant la circonférence (ou avec le temps), on peut, si le nombre des dents est considérable, calculer par une quadrature la valeur moyenne de k et l'intensité moyenne en comptant comme nulle l'aire située au-dessus de la limite k_0 , et en comptant double celle située au-dessus de k_1 ; car les variations de I avec k sont comme 1, 0 ou 2, dans ces trois cas.

2° *Cas d'inégalités périodiques dans la vitesse.* — C'est le cas inverse. L'abscisse varie entre deux limites ω_1, ω_2 (fig. 14); mais l'ordonnée reste sur une même ligne représentative $k = \text{const.}$, et oscille entre deux points p_0, p_1 . Avec les mêmes restrictions que plus haut, lorsque les limites p_1, p_2 sont comprises dans la même forme de fonction pour I , l'intensité moyenne correspond évidemment à la moyenne des vitesses. Si la limite ω_0 vient en ω'_0 , il n'en est plus ainsi. On peut encore calculer par une quadrature la valeur des deux moyennes, si l'on connaît la loi (fig. 15) qui lie le temps à la vitesse angulaire pendant une période. On comptera comme nulle l'intensité correspondant à des vitesses inférieures à q . Il en résulte que l'intensité moyenne, dont les valeurs négatives sont comptées comme nulles, sera plus grande que celle qui correspondait à la moyenne des vitesses. De là l'existence de phases critiques et de courbes de raccordement (fig. 16 et 17) dans la ligne représentative. Si l'inégalité croît avec la vitesse, les limites $\omega'_1, \omega'_2, \omega''_1, \omega''_2, \dots, \omega'_n, \omega''_n$, iront en s'écartant (fig. 18) avec l'ordre des extinctions, et même dans le cas de l'observation

l'axe de la roue, qui deviendraient étendues et bruyantes. Il faut alors s'empres-
suer de corriger ce défaut, en diminuant le jeu des pivots ou des contre-
pointes ; il est vrai que les frottements augmentent alors et diminuent la vitesse,
mais au moins on conserve la régularité du mouvement.

2° *Transmission par engrenages.*

72. Les variations périodiques de vitesses causées par le choc des dents d'en-
grenages sont surtout à craindre pour la roue dentée dont la vitesse est consi-
dérable comme formant le dernier mobile et dont la masse est assez faible. On
pourrait atténuer ces variations périodiques en donnant à cette roue dentée une
masse et, par suite, un moment d'inertie considérable, de façon à la faire fonc-
tionner comme *volant* ; mais l'expérience prouve que cet avantage est contre-ba-
lancé par l'inconvénient grave d'augmenter les résistances passives dans des pro-
portions énormes. On s'en rend aisément compte en songeant que les résistances
passives croissent comme la masse des mobiles et environ comme le carré de leur
vitesse. Il résulte de là que la masse du dernier mobile, c'est-à-dire de la roue
dentée, doit être déterminée de façon à ménager ces deux conditions contradic-
toires : avoir une masse faible pour pouvoir acquérir une grande vitesse, avoir
une grande masse pour conserver une vitesse régulière.

73. La complication des conditions pratiques où l'on se trouve empêche de
rechercher analytiquement les meilleures conditions de construction. Heureuse-
ment les progrès de la Mécanique ont apporté le moyen d'atténuer, dans une
grande proportion, les chocs des dents d'engrenages, si sensibles dans les *engre-
nages droits* employés d'ordinaire et, par suite, les inégalités qu'ils introduisent
dans les mouvements de rotation. Ce moyen consiste dans l'emploi d'*engre-
nages hélicoïdaux* qui ont l'avantage non-seulement de diminuer les frottements,
mais aussi de rendre plus continue la transmission des mouvements. On verra,
dans la seconde Partie de ce Mémoire, que les trois derniers mobiles du mécanisme
sont munis de ces sortes d'engrenages, de sorte que toutes les précautions ont
été prises pour assurer la régularité du mouvement de rotation de la roue dentée.

double, l'influence de ces inégalités sera plus grande dans chaque couple sur la vitesse la plus forte ;
de là peut résulter une erreur négative sur la moyenne des deux couples de vitesses observées et sur
la valeur définitive du résultat.

Ce mode de discussion a l'avantage de parler aux yeux, mais il n'est qu'approximatif à cause de
la difficulté de connaître les lois exactes des inégalités représentées *fig. 13 et 15*.

2° CONDITIONS OPTIQUES RELATIVES A LA RÉALISATION D'UN POINT
LUMINEUX DE RETOUR.

74. Dans l'exposition sommaire de la méthode (3), on a vu la disposition théorique permettant d'obtenir un point lumineux par la convergence des rayons de retour. Quoiqu'il n'y ait absolument rien que de très-correct dans la disposition décrite et représentée (*fig. 1*) et que ce soit, à fort peu près, le mode de réglage adopté dans la pratique, cependant cette manière superficielle de présenter la marche des rayons conduirait à des conséquences erronées, si on voulait l'étendre, sans autre examen, à toutes les propriétés du faisceau de retour.

La première erreur et la plus grave (et qui, malheureusement, se trouve dans plusieurs ouvrages estimés) serait de faire croire que la lumière émise par la station de départ peut être considérée, surtout lorsque les objectifs des deux stations sont égaux, comme un faisceau sensiblement parallèle, qui ne subit aucune diminution d'intensité autre que celle occasionnée par l'absorption atmosphérique; il s'ensuivrait que, quelque grande que fût la distance des deux stations, le dispositif optique pourrait être le même et conserver au point lumineux de retour la même intensité, abstraction faite des rayons absorbés. On va voir qu'il n'en est pas ainsi, et que l'intensité de la lumière de retour décroît comme le carré de la distance des deux stations.

75. Voici en quoi le rôle du dispositif optique demande à être approfondi : on suppose au foyer R de la lunette d'émission l'existence d'un foyer lumineux réel produit par la *lentille-éclaireur* L; mais ce foyer n'est pas un point mathématique, c'est la section la plus resserrée d'un faisceau, de sorte que tout se passe comme si, dans le plan focal R, se trouvait une source lumineuse d'une surface très-petite, mais qui est loin d'être nulle. Ainsi, quand on dit qu'il existe en R un point lumineux, on énonce une impossibilité physique, car il y en a nécessairement une infinité; il en résulte que chacun des points de la source, supposée dans le plan focal principal, envoie un faisceau de rayons parallèles, dont l'axe est parallèle à la droite joignant chacun de ces points au centre optique de l'objectif O de la lunette d'émission. Dans ce mode de réglage, la lumière émise serait donc formée d'une série de faisceaux parallèles dont les axes vont en divergeant; c'est cet ensemble de faisceaux parallèles qui tombe sur l'objectif O' du collimateur à réflexion. On voit bien alors que la quantité de lumière reçue par le collimateur décroît comme le carré de la distance; car les axes des faisceaux divergents forment un cône dont les sections droites grandissent comme

le carré des distances au sommet, c'est-à-dire au centre optique de l'objectif O. Or le cas le plus favorable qui puisse se présenter, c'est que toute la lumière reçue par le collimateur soit renvoyée au point de départ; la quantité de lumière de retour décroîtra donc au moins comme le carré de la distance.

On pourrait, toutefois, objecter que, parmi tous ces faisceaux obliques, il y en a un, le faisceau central, qui suit la marche théorique, et qui, par suite, donne un point lumineux de retour dont l'intensité est indépendante de la distance, les autres rayons ajoutant une quantité lumineuse variable en surcroît; mais c'est précisément là qu'est l'erreur théorique. Si l'on considère un faisceau rigoureusement parallèle, il faut admettre qu'il provient d'un point rigoureusement mathématique; or un point lumineux mathématique envoie une quantité de lumière *nulle*, à moins que son éclat intrinsèque ne soit infini, ce qui, pratiquement, n'a pas de sens: l'intensité ne peut donc être indépendante de la distance qu'à la condition d'être nulle ou infinie; ainsi, on arrive à la conclusion annoncée, même en poussant la rigueur jusqu'à une limite voisine de l'absurde.

76. La seconde conséquence, dont l'erreur devient évidente d'après ce qui vient d'être dit, c'est que la lumière de retour forme un point lumineux mathématique. On voit qu'il ne doit pas en être ainsi, car les faisceaux réfléchis par le collimateur peuvent être, comme les faisceaux incidents, plus ou moins obliques sur l'axe optique commun aux deux objectifs; par suite au retour, après leur réfraction à travers le premier objectif O, ils viennent former leur foyer sur des axes optiques secondaires, parallèles à ces directions obliques. La valeur de l'obliquité est, il est vrai, très-petite, puisqu'elle doit être de l'ordre de l'angle sous-tendu par l'objectif du collimateur vu du centre optique de l'objectif de la lunette, mais elle suffit pour affirmer que les rayons de retour ne viendront pas converger en un point unique.

Il est donc nécessaire d'analyser rigoureusement la marche de la lumière, afin de chercher quelles sont réellement les conditions théoriques à remplir, et comment on peut les réaliser expérimentalement.

77. L'analyse sommaire que nous venons de faire montre que nous ne pouvons pas obtenir une intensité finie indépendante de la distance, ni un point lumineux mathématique.

La difficulté la plus grave est relative à la première condition, à savoir, la production d'une intensité lumineuse suffisante pour que l'expérience soit possible, car il ne servirait à rien d'être dans les conditions théoriques si la lumière de retour n'avait pas l'intensité nécessaire pour apprécier le phénomène avec pré-

cision; la seconde difficulté est moins grave qu'elle ne le paraît au premier abord; car, d'après l'ordre de grandeur de l'angle des faisceaux, on conçoit qu'en diminuant le diamètre angulaire de l'objectif du collimateur ou en augmentant la distance des deux stations on réduira l'image de retour à des dimensions suffisamment petites, à la condition, toutefois, de ne pas trop amoindrir son intensité. Ainsi, à quelque point de vue qu'on se place, la difficulté principale réside dans l'obtention de l'intensité maximum de la lumière de retour. Nous allons, par une marche rationnelle, montrer que le dispositif imaginé par M. Fizeau donne le maximum de lumière possible.

Commençons par chercher *a priori* les conditions que doit remplir un dispositif quelconque pour fournir l'intensité maximum de la lumière de retour. Le problème se sépare naturellement en deux parties :

1° *Étant donnée une source lumineuse ayant une surface Σ et un éclat intrinsèque E , envoyer la plus grande quantité possible de la lumière de cette source sur une surface planep Σ' lacée à une distance D de la source; les surfaces Σ, Σ' sont supposées normales à la droite qui joint leurs centres.*

2° *Renvoyer la totalité de cette quantité de lumière, reçue sur la surface Σ' , aux points de départ.*

Il est évident que, si ces deux problèmes sont résolus séparément, nous aurons les conditions cherchées, car le retour des rayons ne peut en aucune façon augmenter la quantité de lumière reçue.

78. *Premier problème.* — La source donnée est supposée celle que la lentille de concentration produit au foyer R (*fig. 1*). Elle est caractérisée par la propriété que chacun des points de sa surface Σ peut être considéré comme rayonnant également dans toutes les directions comprises dans l'ouverture du cône moyen de concentration. Les rayons iraient en divergeant indéfiniment; il faut donc, pour envoyer à la distance désignée la plus grande quantité possible de lumière, employer un appareil, objectif ou miroir, rendant les rayons convergents : nous choisirons un objectif. Suivant la distance de la source, ces rayons suivront une marche particulière dont l'analyse se fait d'une manière très-simple. En effet, la source peut être considérée comme un objet lumineux plan; les rayons, après réfraction, vont former une image agrandie de la source, et tous les rayons qui ont rencontré l'objectif sont utilisés à la production de cette image. La quantité de lumière concentrée sur cette image est donc celle qui est reçue par l'objectif. Soit Q cette quantité; elle est évidemment proportionnelle

à la surface Σ de la source, à son éclat intrinsèque E , à la surface de l'objectif S , et en raison inverse du carré de la distance φ de la source à l'objectif,

$$Q = A \Sigma \frac{ES}{\varphi^2}.$$

Soit φ' la distance de l'image à l'objectif; on sait que les dimensions linéaires de l'image et de l'objet, d'après la propriété que possède le centre optique d'être le centre de similitude de l'image et de l'objet, sont dans le rapport de leurs distances au centre optique, leurs surfaces dans le rapport des carrés; donc on aura

$$\frac{\Sigma'}{\varphi'^2} = \frac{\Sigma}{\varphi^2} \quad \text{avec la relation} \quad \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{f},$$

f étant la distance focale de l'objectif. Il en résulte, pour la quantité de lumière Q , deux expressions équivalentes,

$$Q = AES \frac{\Sigma}{\varphi^2} = AES \frac{\Sigma'}{\varphi'^2}.$$

La quantité de lumière Q reçue sur la surface Σ' , supposée constante, décroît donc en raison inverse du carré de la distance φ' à l'objectif. On peut d'ailleurs confondre la distance φ' avec la distance D de la surface Σ' à la source, car on a

$$\varphi + \varphi' = D,$$

et, comme la distance D est très-grande, φ est négligeable devant D .

Je dis que, pour avoir le maximum de lumière sur la surface Σ' placée à la distance D , il faut que le foyer conjugué se forme sur cette surface. En effet, chaque petit élément de surface, ou, si l'on veut, chaque point lumineux de la source, envoie un faisceau convergent dont le point de concours a lieu précisément au foyer conjugué. Un peu en deçà ou un peu au delà, chaque faisceau serait coupé suivant une section du cône de convergence, au lieu d'être coupé au sommet; la lumière reçue serait donc plus *étalée* et par conséquent moins intense que si la surface est exactement dans le plan focal conjugué de la source.

Réciproquement, si l'on se donne une surface plane Σ' et un objectif de foyer donné f , il faudra placer la source lumineuse supposée plane dans le plan focal conjugué de Σ' pour envoyer sur elle la plus grande quantité possible de lumière par unité de surface.

D'après cette condition, on voit que la source lumineuse doit avoir au moins

une surface Σ égale à l'aire de l'image de la surface Σ' : c'est ce qu'il est facile d'obtenir, car Σ sera, en général, très-petit.

79. Passons au deuxième problème. Proposons-nous de renvoyer aux points de départ la totalité des rayons parvenus à la surface Σ' . Tous les rayons peuvent être groupés en une série de faisceaux coniques convergents, ayant pour base l'objectif S et pour sommets les différents points de la surface Σ' . Chaque cône peut être considéré comme de révolution, puisqu'il a pour base le contour circulaire de l'objectif S, et que son axe est très-peu incliné sur l'axe optique principal de ce même objectif. Il en résulte que, si l'on plaçait un miroir concave MM' , dont le centre de courbure serait placé au centre optique O de l'objectif S (*fig. 19*), chacun des éléments de la surface de ce miroir serait normal à l'axe du cône des rayons dont le sommet tombe sur lui. Chacun des faisceaux convergents se réfléchirait ainsi, de façon que chaque rayon bM occupât, après réflexion, la position symétrique Mb par rapport à l'axe du cône OM. L'ensemble des rayons reprendrait donc le même chemin ; mais chacun d'eux ayant changé de trajectoire avec son symétrique par rapport à l'axe du cône auquel il appartient, il en résulte que chaque faisceau traverserait de nouveau l'objectif S et reviendrait former son image au point précis d'où il est parti.

80. Voilà donc un premier dispositif théorique pour renvoyer toute la lumière aux points de départ. Si la distance φ' était petite, la construction et le réglage de ce miroir concave seraient très-faciles : c'est précisément la disposition dont on fait usage dans l'expérience du miroir tournant. Dans le cas présent, il n'y a pas à songer à employer un miroir concave ayant plusieurs kilomètres de rayon de courbure et devant être réglé de façon à avoir son centre optique exactement au centre de courbure de l'objectif de la première station : les moyens mécaniques de construction, de réglage et de conservation des ajustements seraient illusoire. Il est donc nécessaire de modifier complètement ce dispositif, qui est évidemment le plus naturel lorsqu'on suit la marche que nous venons d'indiquer.

Il est bien connu en Optique qu'un miroir concave peut toujours être remplacé par un objectif et un miroir plan ou sphérique de forme et de position convenables. Il y a donc lieu de chercher si un pareil système ne pourrait pas tenir lieu du dispositif irréalisable auquel nous sommes conduits. Comme ce système comprend plusieurs éléments arbitraires, prenons à volonté un de ces éléments ; ce sera la position de l'objectif $S'o'$ (*fig. 20*) que nous supposerons placé dans le plan de la surface Σ' . Quant aux autres éléments, l'analyse même

de la marche des rayons va les déterminer; en effet, les rayons envoyés de la première station forment des cônes dont on reçoit les sommets tels que c sur la surface de l'objectif S . Cet objectif réfracte chacun de ces faisceaux coniques de façon que leurs axes aillent converger en un même point d , qui est précisément le foyer conjugué du centre optique O de l'objectif S de la station opposée; car tous les cônes ont cet objectif comme base et son centre comme point commun à tous les axes des cônes.

Telle est la transformation opérée sur chacun des axes des faisceaux; quant aux autres rayons qui composent chaque faisceau conique, ils sont réfractés suivant un faisceau conique ayant pour axe de révolution l'axe réfracté. En effet, après réfraction, tous ces faisceaux coniques ont une base commune qui est l'image mm' du contour de l'objectif S , puisque tous les rayons qui forment l'enveloppe extérieure de chacun de ces faisceaux sont partis des bords de cet objectif; ils doivent donc, lors de la formation de l'image conjuguée, passer par les points correspondants de cette image. Ces cônes réfractés sont encore sensiblement de révolution, puisqu'ils ont pour base l'image circulaire mm' et que leur axe est peu incliné sur l'axe optique $o'd$.

Imaginons qu'on place dans le plan de cette image un petit miroir concave mm' ayant son centre de courbure au centre optique o' de l'objectif S' ; tous ces faisceaux coniques divergents seront rendus convergents, et leurs points de convergence iront se former en un point c' de l'objectif, symétrique du point c , par rapport au centre optique de S' , en vertu de la propriété bien connue des miroirs concaves.

Le faisceau réfléchi sera donc, dans son ensemble, symétrique de celui dont il dérive; au sortir du collimateur, il continuera sa marche symétrique et ira couvrir toute la surface de l'objectif de l'autre station, et finalement converger dans le plan de la source lumineuse. Seulement le point de concours ne sera pas exactement le point de départ a , mais un point a' symétrique par rapport à l'axe optique commun aux deux objectifs.

81. En résumé, nous produisons le retour complet de la lumière à l'aide d'un objectif et d'un miroir concave. On voit combien ce dispositif est préférable au miroir unique défini plus haut, puisque le réglage du petit miroir mm' ne présente aucune difficulté de construction ni d'ajustement. Il y a plus, un petit défaut de réglage en inclinaison, qui eût été très-grave dans le miroir concave de long foyer, n'a ici qu'une influence négligeable; en effet, supposons que le centre de courbure du petit miroir soit un peu au-dessus du centre optique O' en O'' , le sommet c serait en c'' symétrique de c' par rapport à O'' ; or ce déplacement du sommet n'empêche pas les rayons de revenir à l'objectif de la première station. En

effet, l'axe du faisceau réfléchi de c'' passant par le point d , image du centre optique O , ira concourir en ce point O après réfraction. Il en résulte que le faisceau conique, dont il est l'axe, ira également passer par le contour de l'objectif. Le seul inconvénient d'une erreur de ce genre, c'est que quelques-uns des cônes, dont les sommets sont tout à fait au bord de l'objectif S' , peuvent, après réflexion, tomber en dehors de l'objectif et se perdre; mais la quantité de lumière ainsi perdue serait insignifiante.

Un raisonnement analogue montre qu'une variation notable dans la grandeur du rayon de courbure ne produit également qu'un effet insignifiant; en effet, au lieu d'un miroir concave mm' , prenons, par exemple, un miroir plan, plus facile à régler de toute manière qu'un miroir courbe, le faisceau conique cmm' ne sera pas rendu convergent, il arrivera en c' sur l'objectif avec la même divergence que s'il émanait d'un point virtuel c_1 symétrique du point c par rapport au plan du miroir; l'objectif S' le fera converger au foyer conjugué de c_1 , c'est-à-dire un peu en avant de la surface cc' dans le plan $\gamma\gamma'$; mais la marche du rayon qui forme l'axe du faisceau ne sera pas altérée: il en résulte que les faisceaux, au lieu de diverger des points tels que c' de l'objectif S' , divergeront des points tels que γ' d'un plan situé un peu en avant de sa surface. Or, comme la distance des deux stations est très-grande, la variation de position des points de divergence (qui ne s'élève pas à deux fois la distance focale de l'objectif S') ne produit dans la position du foyer d' qu'une variation absolument négligeable.

82. Ainsi un miroir plan peut, sans inconvénient appréciable, remplacer le miroir concave; de plus, une petite erreur d'inclinaison n'aurait d'autre effet que de perdre une portion excessivement faible de la lumière réfléchie: le réglage, sous ces deux rapports, offre donc une grande latitude comme précision; mais la condition rigoureuse à remplir, c'est de placer le miroir exactement au point d , foyer conjugué du centre optique de l'objectif de la première station. En effet, si cette condition n'était pas remplie, les rayons, au lieu de converger sur le miroir, iraient converger un peu en deçà ou un peu au delà. Supposons, par exemple, que ce soit un peu au delà (*fig. 21*), l'image conjuguée du centre optique O irait donc se faire en d_1 , symétrique du point d par rapport au miroir (concave ou plan, la différence serait très-faible). Après le second passage à travers l'objectif S' , l'image du point d_1 irait se faire au foyer conjugué correspondant; or, les foyers conjugués des points d et d_1 sont très-éloignés l'un de l'autre, parce que ces points d et d_1 sont très-voisins du foyer principal de l'objectif S' . Il en résulte que les rayons, au lieu de retourner passer

par le contour de l'objectif S, iraient converger beaucoup en arrière : dès lors il y aurait, par l'épanouissement des faisceaux, perte notable de lumière.

Réglage optique des appareils.

83. De l'analyse de la marche des rayons on déduit aisément le mode de réglage des appareils ; avec la lunette d'émission on visera l'objectif de la station opposée, de manière à amener son image dans le milieu du champ, et l'on placera le plan de la roue dentée dans le plan focal où vient se peindre cette image. Si les stations sont très-éloignées, ce plan sera très-voisin du plan focal principal, mais ne coïncidera pas avec lui. De même, à l'autre station, on visera l'objectif de la première station, dont on amènera l'image au milieu du champ, et, par une disposition optique ou mécanique quelconque, on substituera la surface réfléchissante d'un miroir concave ou plan (82) au plan du réticule servant à la mise au point de l'image. Lorsque ces deux opérations indépendantes auront été exécutées, la partie optique du réglage sera complète : on obtiendra alors à coup sûr le retour de la lumière en faisant converger le faisceau éclaircur, réfléchi par la glace à 45 degrés, sur l'image de l'objectif du collimateur.

Il est bon de remarquer que les objectifs n'ont pas besoin d'être dans une position rigoureusement normale à la droite oo' (*fig. 20*), qui joigne leurs centres optiques ; en d'autres termes, la droite oo' n'a pas besoin de coïncider avec les axes principaux des deux objectifs. Dès lors un petit défaut de construction des lunettes ou encore, ce qui revient au même, un petit écart des images focales relativement au milieu du champ, n'a aucune influence sur la marche ni sur l'intensité des rayons ; il est bon, toutefois, que le petit miroir mm' soit sensiblement normal à la direction de l'axe secondaire commun OO' .

Ces remarques sont importantes ; car, malgré le soin apporté d'ordinaire au montage des objectifs des lunettes et des diaphragmes qui en circonscrivent le champ, il y a toujours des dissymétries ou *décentrages* plus ou moins sensibles dans l'ajustement des diverses pièces : on voit que ces petits défauts n'ont ici aucun inconvénient appréciable.

Évaluation du diamètre apparent, de la quantité de lumière et de l'éclat intrinsèque du point lumineux de retour.

84. Maintenant que nous sommes en possession d'un dispositif optique ramenant au point de départ le maximum de lumière, il reste à examiner comment il s'accorde avec les conditions théoriques de l'expérience. On voit d'abord que

l'image de retour n'est autre que l'image de la surface éclairée de l'objectif du collimateur S' ; car chacun des points de cet objectif peut être considéré comme le sommet d'un cône de rayons divergents (*fig. 20*), comme le serait une surface lumineuse par elle-même. Ce ne sera donc pas un point lumineux, mais un disque de diamètre plus ou moins grand.

On peut calculer aisément le diamètre apparent, la quantité de lumière et l'éclat intrinsèque de cette image, et par conséquent discuter les éléments de visibilité du faisceau de retour.

On considérera seulement, dans les calculs qui vont suivre, l'image réelle formée au foyer de la lunette, car l'oculaire à travers lequel l'observateur regarde cette image n'est pas un organe indispensable au système optique dont nous discutons actuellement les propriétés. En effet, on pourrait le supprimer sans rien changer aux conditions théoriques de l'expérience; il suffirait que l'observateur approchât l'œil assez près du foyer pour recevoir, à travers l'ouverture de sa pupille, la totalité du faisceau de retour. La présence de l'oculaire a l'avantage d'éviter à l'observateur la gêne causée par l'accommodation de sa vue à une distance inaccoutumée et d'amener l'image qu'il examine à la distance de sa vision distincte.

Pour tenir compte de l'effet de l'oculaire, il suffira donc de remarquer qu'un oculaire n'altère pas la quantité totale de lumière reçue (abstraction faite des pertes par transmission), multiplie le diamètre linéaire des images par son pouvoir amplifiant et diminue par conséquent leur éclat dans le rapport du carré de l'amplification.

1° *Diamètre apparent.* — Le *diamètre linéaire* δ de l'image focale au foyer de la lunette d'émission a évidemment pour expression

$$\delta = \frac{d'}{D - \varphi} \varphi', \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{d'}{D} f,$$

d' étant le diamètre de cet objectif, D la distance des deux stations et φ' la distance focale conjuguée de cette lunette; car on peut négliger la différence entre le foyer conjugué de la station opposée et le foyer principal, et aussi la distance focale devant la distance des deux stations.

2° *Quantité de lumière.* — La quantité de lumière envoyée sur l'objectif du collimateur étant, par hypothèse, renvoyée sans perte aux points de départ, on aura, pour la quantité de lumière concourant à la formation de l'image de retour, d'après l'expression établie précédemment (n° 78),

$$Q = \frac{AESS'}{\varphi'^2}, \quad \text{ou mieux} \quad Q = AE \frac{SS'}{D'},$$

en appelant par symétrie S' la surface de l'objectif du collimateur, et mettant D au lieu de ϕ' . Cette expression est, en effet, le produit par S' de la quantité de lumière reçue par unité de surface dans le plan de S' .

Donc, *la quantité de lumière qui constitue l'image de retour est proportionnelle à l'éclat intrinsèque de la source au produit des surfaces des objectifs des deux stations et en raison inverse du carré de leur distance.*

On remarquera que l'expression est indépendante des distances focales de ces deux objectifs.

3° *Éclat intrinsèque.* — L'éclat intrinsèque e se calculera aisément en divisant l'expression de la quantité de lumière par la surface σ de l'image. Nous en avons calculé le diamètre δ ; d'où nous concluons

$$\sigma = \frac{\pi \delta^2}{4} = \frac{\pi d'^2}{4 D^2} f^2 = S' \frac{f^2}{D^2},$$

en remarquant que $\frac{\pi}{4} d'^2 = S$, d'où l'on conclut

$$e = AE \frac{S}{f^2}.$$

L'éclat intrinsèque de l'image réelle formée par les rayons de retour est donc proportionnel à l'éclat intrinsèque de la source, à la surface de l'objectif de la lunette d'émission et en raison inverse du carré de la distance focale principale de cet objectif.

L'expression est indépendante des éléments de l'autre objectif; il en résulte que, quelque grand ou quelque petit que soit le diamètre de l'objectif du collimateur, l'image de retour aura le même éclat intrinsèque; ce qui variera, ce sera le diamètre du disque lumineux formé par cette image (*).

Conditions les plus favorables que doivent remplir les appareils.

85. Pour être dans les meilleures conditions théoriques, il faut évidemment

(*) Si l'on veut se rendre un compte exact de l'éclat intrinsèque que possédera l'image au retour (en supposant, bien entendu, qu'il n'y ait aucune perte de lumière dans le trajet), on remarquera que ce serait précisément l'éclat intrinsèque de l'image qu'on obtiendrait au foyer d'une lunette identique à la lunette d'émission placée immédiatement devant elle, de façon à recueillir toute la lumière. En effet, si l'on néglige la petite différence qui existe entre la position de l'objet et de son image relativement au foyer principal de chaque instrument, on verra sans peine que l'image et la source sont de même dimension, et que l'image est formée par tous les rayons émanés du premier objectif. Un miroir plan, plus large que l'objectif, normal à l'axe optique de la lunette d'émission, dispenserait du deuxième objectif.

que la lumière de retour soit aussi *petite* et aussi *brillante* que possible. Les formules qu'on vient d'établir permettent de discuter séparément ces deux conditions.

Diamètre de l'image de retour. — Quelque intérêt qu'on ait à rendre, pour ainsi dire, mathématique le point lumineux de retour, il ne faut pas chercher à obtenir un diamètre trop petit pour cette image, parce que l'œil ne la percevrait plus avec netteté, et alors l'observation perdrait sa précision. Nous admettrons donc, comme un résultat physiologique, que l'œil exige, pour une perception satisfaisante de l'image de retour, une certaine dimension dans le disque apparent. Appelons δ_0 ce diamètre donnant une bonne perception pour l'œil de l'observateur; on devra avoir

$$\delta_0 = \frac{d'}{D} f,$$

équation qui fournit une relation nécessaire entre le diamètre de l'objectif du collimateur, la distance focale de l'objectif de la lunette d'émission et la distance des stations.

La nécessité de donner un diamètre sensible δ_0 à l'image de retour se retrouve aussi par des considérations d'un tout autre ordre. La théorie précédente suppose, en effet, une rigueur géométrique dans la marche des rayons, par suite une homogénéité complète de l'atmosphère et une perfection absolue des objectifs. Toute trace d'hétérogénéité ou toute aberration tend à altérer la marche des rayons, et cette altération a pour effet d'empêcher la convergence des faisceaux élémentaires en foyers ponctuels. Il en résulte que l'image de retour, au lieu d'être formée par une série de points lumineux contigus, est formée par une série de petits éléments superficiels empiétant les uns sur les autres. Le diamètre δ_0 de l'image sera donc augmenté du diamètre moyen de ces éléments superficiels. Comme la quantité de lumière reste la même, l'éclat intrinsèque moyen de l'image sera diminué dans le rapport inverse des surfaces δ_0^2 à $(\delta_0 + \delta')^2$, et ce rapport sera considérable si δ_0 est petit par rapport à δ' . On aurait donc tort de chercher à diminuer indéfiniment le diamètre de cette image, parce qu'on ne pourrait pas le réaliser optiquement, soit à cause des aberrations des verres, soit à cause de l'hétérogénéité de l'atmosphère. Même dans le cas où la perfection des objectifs permettrait cette réalisation, il faudrait éviter un diamètre δ_0 trop petit, parce que la moindre perturbation accidentelle de l'atmosphère sur le trajet des rayons diminuerait l'éclat de l'image dans des proportions énormes, ce qui occasionnerait des erreurs graves et inexplicables dans les observations. C'est à l'expérience seule à fixer la limite de δ_0 , car elle dépend d'éléments qui ne sont

pas susceptibles d'évaluation *a priori*, à savoir l'hétérogénéité de l'atmosphère et les aberrations des objectifs : nous verrons plus loin à quelle valeur j'ai cru devoir m'arrêter.

86. *Éclat de l'image de retour.* — La condition d'être aussi brillante que possible conduit à fournir à cette image la plus grande quantité possible de lumière; or comme son diamètre δ_0 est déterminé, c'est donc son éclat intrinsèque e qu'il faut rendre maximum. L'expression

$$e = AE \frac{S}{f^2} = \frac{A\pi}{4} E \left(\frac{d}{f}\right)^2$$

montre que cette condition dépend de deux facteurs : le premier est E , l'éclat intrinsèque de la source lumineuse dans le plan focal de la lunette; nous avons déjà eu l'occasion de dire (16) que c'est en employant la lumière oxyhydrique, électrique ou solaire, suivant les circonstances, qu'on y parvient; le second est le rapport $\frac{d}{f}$, *ouverture angulaire* de l'objectif, qu'on doit rendre aussi grande que possible, mais on est très-limité de ce côté, car ce rapport ne peut pas varier beaucoup. Sa valeur moyenne est $\frac{1}{12}$ (le *pied* pour *pouce*, comme disent les opticiens, c'est-à-dire autant de pieds dans la distance focale qu'il y a de pouces dans le diamètre); pour les objectifs des petites lunettes, on élève ce rapport à $\frac{1}{10}$, mais, pour les grands objectifs dont les images doivent supporter de forts grossissements à l'oculaire, on est souvent obligé d'abaisser ce rapport à $\frac{1}{26}$ et même à $\frac{1}{30}$, sans quoi les aberrations de toutes sortes, et spécialement les aberrations chromatiques, deviendraient gênantes.

Ainsi les conditions à remplir se bornent aux deux suivantes : adopter un diamètre suffisant pour l'image de retour et accroître l'éclat intrinsèque de cette image par l'emploi d'une lunette d'émission d'une grande ouverture angulaire.

87. La limite de diamètre perceptible δ_0 étant fixée, les diamètres d , d' des objectifs et leurs distances focales f , f' sont soumis aux relations suivantes :

$$\delta_0 = \frac{d'}{D} f, \quad e = \frac{A\pi}{4} E \left(\frac{d}{f}\right)^2, \quad \frac{d}{f} = u \text{ maximum.}$$

La distance focale f' du collimateur reste indéterminée, car elle n'entre pas dans ces équations; par suite, son *ouverture angulaire* est théoriquement indifférente. La condition que l'ouverture angulaire $\frac{d}{f}$ de la lunette d'émission soit, au contraire, maximum, semblerait donc établir une différence profonde entre les deux instruments d'optique, lunette et collimateur. En effet, substituant dans δ_0

la valeur $f = \frac{d}{u}$, on transforme la première condition en la suivante, $\delta_0 = \frac{1}{u} \frac{dd'}{D}$, qui montre que, pour obtenir le diamètre voulu δ_0 , on a le choix entre une infinité de couples équivalents d'objectifs, pourvu que le produit de leurs diamètres dd' soit égal à une certaine fraction u du produit du diamètre δ_0 par la distance D des deux stations

$$dd' = uD\delta_0.$$

La condition de maximum d'éclat intrinsèque conduit à prendre u aussi grand que possible; on serait donc tenté de choisir pour u la valeur $\frac{1}{10}$ des petits objectifs, c'est-à-dire de prendre pour la lunette d'émission une très-petite lunette; par contre, pour le collimateur un très-grand objectif, de manière que le produit dd' conserve sa valeur convenable.

88. Si l'on examine d'un peu plus près la question, on reconnaîtra que, pratiquement, on a intérêt à faire l'inverse, c'est-à-dire à prendre un grand objectif pour la lunette d'émission et un objectif plus petit pour le collimateur. C'est l'impossibilité de réaliser rigoureusement toutes les conditions théoriques qui introduit des éléments d'une tout autre nature. En effet, on a supposé, dans l'établissement de ces formules, que le collimateur renvoyait exactement tous les rayons qu'il reçoit; mais ce phénomène optique ne peut avoir lieu qu'à la condition que tous les rayons viennent exactement converger sur la surface réfléchissante du miroir focal. C'est là que se présente la difficulté pratique; les imperfections inévitables de la taille des verres, de leur homogénéité, de la compensation des pouvoirs dispersifs, etc., font qu'il n'y a pas, à proprement parler, de *foyer*; la concentration focale a lieu suivant un élément linéaire longitudinal plus ou moins régulier. Ces aberrations longitudinales sont d'autant plus à craindre que les courbures des verres sont plus faibles, c'est-à-dire que les distances focales sont plus longues: l'expérience l'a prouvé, et l'on s'en rend aisément compte en songeant que les rayons réfractés se coupent sous des angles de plus en plus petits à mesure que les courbures augmentent. Il en résulte que le plan focal est d'autant moins *bien défini* que la distance focale est plus longue. Cette condition, peu importante dans l'examen des images avec des oculaires faibles laissant à l'œil une certaine latitude d'accommodation, est très-défavorable à la réflexion opérée dans le collimateur, parce que cette réflexion a lieu sur une surface pour ainsi dire géométrique. On a donc intérêt à prendre pour cet appareil un objectif à foyer bien défini, c'est-à-dire dont les rayons se coupent tous en un point et suivant un grand angle, par conséquent un objectif bien

achromatique, à court foyer et à grande ouverture angulaire : ce sera donc un objectif de diamètre d' relativement petit qu'il faudra choisir. Comme le produit dd' est déterminé et égal à $uD\delta_0$, l'augmentation portera sur l'objectif de la lunette d'émission.

89. Nous voilà donc arrivé à la conclusion inverse. Les aberrations inévitables des objectifs nous forcent à sacrifier la grande ouverture angulaire de la lunette d'émission; car, dès qu'on se trouve obligé de prendre un grand diamètre, il faut diminuer l'ouverture angulaire. Toutefois, comme l'image focale n'est pas destinée à supporter de forts grossissements, il n'y aurait pas d'inconvénient à adopter pour u une valeur voisine de la valeur moyenne. C'est ce qu'on aurait raison de faire si l'on avait à construire un objectif destiné seulement à ces expériences; mais on ne pourrait pas aller bien loin dans cette voie, car on est forcé d'employer un oculaire assez puissant, sinon l'anneau oculaire, c'est-à-dire l'image réelle du contour de l'objectif formé par l'oculaire, serait plus grand que l'ouverture de la pupille, et l'observateur n'utiliserait pas toute la surface de l'objectif dans l'observation des rayons de retour.

90. Il reste, pour achever cette discussion, à montrer que la petite indétermination dans la position du plan focal causée par la grande ouverture et la grande distance focale de l'objectif de la lunette d'émission n'a pas d'inconvénient appréciable. En effet, on pourrait objecter que les raisons qui font rejeter un plan focal un peu indéterminé pour le collimateur s'appliquent également à la lunette d'émission, parce qu'alors le foyer conjugué de la source est rendu indéterminé dans des proportions considérables, en vertu de la formule des foyers conjugués

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{f};$$

on en conclurait alors que l'objectif du collimateur n'est plus au foyer conjugué de la source et ne reçoit plus la quantité maximum de lumière. Il est facile de répondre à cette objection : le raisonnement précédent est parfaitement exact, mais il y a une cause de compensation importante dans la grandeur de la source lumineuse dont la surface est toujours plus grande que celle de l'image σ de l'objectif du collimateur (84). Il en résulte que, si des rayons provenant de la partie théoriquement efficace de la source sont, par les aberrations de l'objectif de la lunette, rejetés en dehors de l'objectif du collimateur, des rayons provenant des parties voisines, qui devraient être inefficaces, viendront par la même cause compenser la lumière perdue.

Ainsi le grand diamètre de la source compense les aberrations, supposées d'ailleurs très-faibles, de l'objectif composant la lunette d'émission.

Quant à la *profondeur du foyer* (*) provenant de la faible ouverture angulaire de la lunette, elle n'a pas d'inconvénient pour les rayons de retour, grâce à ce qu'on n'a pas besoin d'employer d'oculaires à forts grossissements.

En résumé, si l'on dispose de deux objectifs satisfaisant à la condition imposée pour donner la quantité suffisante de lumière, dont l'un offre un grand diamètre et une petite ouverture angulaire, l'autre une ouverture angulaire plus grande et un diamètre plus petit, on aura intérêt à employer le premier comme objectif de la lunette d'émission, le second comme objectif du collimateur. Si les deux objectifs étaient de même dimension et de perfection inégale, on devrait de préférence adopter le meilleur pour le collimateur et l'autre pour la lunette d'émission : toutefois, on ne saurait donner de règle absolue sans préciser quelles sont les aberrations à redouter.

Quant au réglage des appareils, il a été donné précédemment n° 83, et les considérations précédentes n'y apportent aucune modification.

Influence d'un diamètre sensible du point lumineux de retour.

91. La discussion précédente montre que l'on peut toujours théoriquement renvoyer au point de départ une quantité de lumière suffisante, mais à la condition d'adopter un diamètre sensible pour l'image de retour ; quelle sera l'influence de ce diamètre ? La question mérite un examen sérieux, car la théorie a été faite en supposant que la lumière de retour était un point ; si, par suite d'un diamètre sensible de l'image de retour, les différents points du disque apparent, étant formés par des faisceaux suivant des marches diverses, acquièrent, sous l'influence des obturations successives par les dents de la roue, des intensités différentes, l'œil percevra une impression moyenne qui sera évidemment plus complexe que la théorie précédemment exposée ne l'indique. Ce qui tend à confirmer dans cette opinion, c'est la propriété singulière du dispositif optique décrit précédemment et qui est représenté (*fig. 20*), en vertu de laquelle les rayons émanés d'un point a de la source lumineuse viennent au retour former leur image non pas au point de départ, mais en a' symétrique de a par rapport à l'axe commun aux deux objectifs. Il en résulte que, si aa' représente le diamètre de l'image de retour, on aura théoriquement l'apparence étrange que voici : lorsque le bord D' d'une dent (*fig. 22*) viendra mordre sur le bord a de l'image, le bord opposé a'

(*) C'est l'expression usitée en photographie pour exprimer qu'il existe une certaine tolérance dans la mise au point au foyer.

paraîtra entamé de la même quantité par une ombre rectiligne D' , qui ne sera autre que l'image du bord D , les rayons suivant la marche indiquée (*fig. 20*). L'apparence serait celle que présenterait une fenêtre circulaire éclairée, susceptible de se fermer par deux volets reliés mécaniquement, de façon à recouvrir simultanément les parties symétriques.

Si le diamètre apparent de l'image est très-petit, et c'est le cas de l'expérience, puisque la distance des deux stations est très-grande et le diamètre du collimateur assez faible, l'œil ne distinguera pas ce phénomène au milieu des aberrations de toutes sortes qui estompent les contours du point lumineux de retour; mais, comme cette marche croisée des rayons n'est pas exactement celle qu'on avait prévue, il y a lieu d'examiner si ce phénomène ne peut pas introduire d'erreur systématique dans l'intensité moyenne de l'image, seul élément que l'œil puisse apprécier lorsque le diamètre apparent est très-petit.

92. Pour mieux se rendre compte du phénomène optique, exagérons la grandeur de l'image de retour. A cet effet, prenons le cas où la distance des deux stations est très-petite, de façon que l'image de retour, image du contour de l'objectif du collimateur, occupe dans le champ de vision une très-grande surface. La marche des rayons, détaillée *fig. 20*, s'applique en toute rigueur; elle entraîne comme conséquence que tout objet lumineux plan, placé dans le plan focal où se peint cet objectif, donne naissance à une image lumineuse de même dimension que l'objet, mais symétrique, point par point, à la trace de l'axe optique commun aux deux objectifs. Si l'on prend un objet opaque, comme une roue dentée, sur lequel on projette un large faisceau de lumière convergente couvrant toute l'étendue du plan focal, les contours de la roue joueront le rôle d'objets lumineux, et l'on aura ainsi l'image du corps opaque se peignant en noir sur un fond lumineux.

La *fig. 23* représente l'apparence qu'on obtient en examinant le plan focal où se peignent ces images avec un oculaire. PQR est le contour circulaire limitant l'image de l'objectif du collimateur placé à la station opposée; $ABCD$ est la roue dentée, enfumée, placée dans le plan de cette image. Si l'on projette, perpendiculairement au plan de la roue, un large faisceau de lumière couvrant au moins toute la surface PQR , il se dessinera une ombre noire à contours nets $A'B'C'D'$, qui n'est autre que l'image de la roue dentée $ABCD$ placée symétriquement par rapport au centre f de l'image circulaire. L'image $A'B'C'D'$ se limitera brusquement au contour de l'objectif du collimateur PQR , de sorte que le nombre de dents visibles en silhouette sur ce champ lumineux sera d'autant plus grand que l'objectif sera moins éloigné; c'est pourquoi nous avons

supposé deux stations assez proches. On jugera mieux le détail du phénomène.

93. Si l'on fait tourner la roue ABC dans le sens indiqué par la flèche, son image A'B'C'D' tournera suivant la flèche inverse. Dès que la vitesse de rotation dépassera dix dents par seconde, on ne verra plus les dents des deux roues, mais deux zones circulaires grises par suite de la persistance des impressions sur la rétine. En soulevant la roue dentée, on amènera la zone ABCD à couvrir le point f ; l'image A'B'C'D' prendra la position symétrique, de sorte que les deux zones grises se recouvriront. Alors se présentera un phénomène particulier. Dans la portion commune aux deux zones (*fig. 24*), on verra une série de bandes noires à bords estompés, séparées par des bandes claires, ces bandes étant deux fois plus resserrées que les dents d'où elles dérivent. C'est l'apparence analogue à celle qu'on obtient lorsqu'on fait tourner autour du même axe deux roues à rayons avec des vitesses égales, mais inverses; les rayons des roues paraissent fixes et en nombre double.

Sans nous arrêter à ces considérations étrangères, nous allons démontrer que la succession des intensités de ces bandes estompées sur la corde commune aux deux zones est précisément la réalisation expérimentale de la ligne représentative (*fig. 6* et *fig. 7*) décrite au n° 29. Il suffit pour cela de calculer la quantité de lumière qui traverse le système des deux roues pendant l'unité de temps en chaque point de cette corde commune. Considérons d'abord ce qui se passe au point f , centre de symétrie du système, dans le cas où la vitesse de rotation est très-faible. Partons du moment où le bord G_0 (*fig. 25*) d'une dent passe par le point f ; l'image G'_0 , symétrique de ce bord, passera également par ce point et coïncidera avec le bord G_0 . A mesure que le bord G_0 s'éloignera du point f dans le sens de la flèche, l'image G'_0 s'en éloignera d'une quantité égale en sens inverse. Le point f restera donc *découvert*, c'est-à-dire lumineux depuis le moment où le bord G_0 le quitte jusqu'au moment où le bord D_1 de la dent suivante le rejoindra (*fig. 26*), c'est-à-dire pendant toute la durée du passage d'un vide. En général, le point f ne sera obscur que pendant la durée du passage d'un plein d'une dent réelle ou de son image; mais, comme l'image est toujours symétrique de l'objet, l'obturation par l'image commencera et finira toujours en même temps que l'obturation par la dent.

94. On voit donc qu'au point f la lumière traverse pendant toute la durée du passage d'un vide et est interceptée pendant toute la durée du passage d'un plein. Si l'on se reporte au mode de raisonnement du n° 22, on reconnaîtra que, en appelant hE l'intensité du point f lorsque la lumière passe librement, l'intensité

moyenne I est représentée alors par

$$I = hE(1 - k),$$

k étant le rapport du plein à la dent complète, en supposant la roue parfaitement régulière. La démonstration s'applique également bien au cas d'inégalités dans la largeur des dents. En effet, la largeur d'un vide quelconque est représentée, suivant les notations du n° 39, par l'expression

$$(p\alpha - d_p) - (p-1)\alpha - g_{p-1} = \alpha - (g_{p-1} + d_p),$$

de sorte que la somme de tous les intervalles vides est représentée par

$$Nz - \sum_0^{N-1} (g + d);$$

divisant par N pour avoir l'intervalle moyen, on en conclura

$$I = hE \left[1 - \frac{\sum(g + d)}{Nz} \right] = hE(1 - k),$$

k représentant ici le rapport du *plein moyen* à une dent *moyenne complète*. C'est le résultat obtenu précédemment (39).

Ainsi l'intensité au point f est exactement celle qui correspond au point lumineux idéal dans le cas d'une très-faible vitesse de rotation de la roue, vitesse simplement suffisante pour permettre la persistance des impressions sur la rétine.

Considérons maintenant un point f' de la corde commune aux circonférences extérieures des roues. Cette corde passe par le point f , puisqu'elle est un axe de symétrie et que le point f est un centre de symétrie. Le point f' sera caractérisé par la distance ξ au point f compté sur la corde dans le sens du mouvement de rotation de la roue réelle (*fig. 27*). Partons du moment où le point f' commence à être découvert par le bord G_0 ; la lumière traversera en f' tant que ni le plein de la dent réelle, ni l'image d'un plein ne couvrira le point f' : c'est ce qui aura lieu pendant une partie du passage du vide G_0D_1 , mais non pendant tout le temps; car, dès que le bord D_1 arrivera à une distance de f égale à ξ , son image D'_1 , symétrique par rapport à f , viendra affleurer au point f' . Le libre passage de la lumière aura donc correspondu à la durée du déplacement de la roue depuis le moment où G_0 est en f' jusqu'à celui où D_1 occupe la position f'' symétrique de f' par rapport à f . En arc compté sur la circonférence passant par

le point f , ce déplacement est égal à l'arc qui mesure le vide $\alpha(1 - k)$ diminué de 2ξ . On compte, il est vrai, ξ comme un arc, tandis qu'il est porté sur une tangente à la circonférence; mais cette substitution est permise à cause de la petite différence entre l'arc et la tangente dans la limite des arcs que nous aurons besoin de considérer.

L'intensité lumineuse moyenne sera proportionnelle au rapport de la largeur de ce *vide optique* à la largeur d'une dent complète,

$$\frac{\alpha(1 - k) - 2\xi}{\alpha} = 1 - k - \frac{2\xi}{\alpha},$$

d'où

$$I = hE \left(1 - k - \frac{2\xi}{\alpha} \right).$$

On tiendrait encore facilement compte des inégalités des dents, ainsi qu'on l'a fait plus haut: il est inutile de s'arrêter à ce calcul.

95. On reconnaît, dans l'expression de I , l'analogie de celle qui correspond à un retard angulaire ε de la roue idéale sur la roue réelle dans la discussion du n° 24,

$$I = hE \left(1 - k - \frac{\varepsilon}{\alpha} \right).$$

Il en résulte, par identification, que, si l'on pose $\varepsilon = 2\xi$, on aura, pour la loi des intensités I en fonction de 2ξ , la même expression que la loi des intensités en fonction du retard ε ; par suite, si l'on porte sur la droite ff' comme abscisse les ordonnées I représentant les intensités au point f' , on aura précisément les lignes représentatives des *fig.* 6 et 7. On se rappellera toutefois qu'on a substitué à ε sa valeur déduite de la relation

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\omega}{\Omega};$$

mais, ces deux quotients étant purement numériques, leur valeur est identiquement la même.

96. Pour ne laisser aucun doute sur la valeur de cette assimilation, il faudrait continuer en détail l'examen des cas particuliers relatifs aux diverses valeurs de k et aux diverses positions relatives des deux dentures. Nous ne nous arrêterons pas à cette discussion, qui ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté après celle des n°s 25 et 31, et nous considérerons cette assimilation comme complète; nous nous

bornerons seulement à faire ressortir les différences. Comme ε vaut deux fois ξ , les périodes de la ligne représentative sur la droite ff' , prises comme axe des abscisses, seront deux fois plus resserrées, l'échelle des abscisses étant la même. Les maxima d'intensité qui correspondent à $\frac{\varepsilon}{\alpha} = i$ ou $\varepsilon = \alpha i$, i étant un nombre entier quelconque, seront distants sur la courbe de longueurs moitié moindres $\xi = \frac{i}{2}\alpha$. Or, comme α est l'arc qui mesure une dent complète, les bandes claires correspondront à des intervalles entiers d'une demi-dent. C'est le résultat prévu par la comparaison indiquée plus haut; dans la partie commune aux deux zones dentées, les bandes claires et sombres figurent donc les vides et les pleins, mais en nombre deux fois plus grand. Il est bon de remarquer que la démonstration précédente va plus loin, car elle prouve que la loi d'intensité en chaque point de la section transversale des bandes estompées est représentée par la loi $I = h E f \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)$, dans laquelle $\frac{\omega}{\Omega}$ serait remplacée par $\frac{2\xi}{\alpha}$.

Qu'arrivera-t-il maintenant lorsque la vitesse de rotation deviendra assez rapide pour que l'image formée par les rayons de retour mette un temps appréciable à venir se peindre sur le fond brillant? Soit, comme précédemment, ε l'arc qui mesure le retard angulaire de l'image, ou, ce qui revient au même, l'arc dont la roue réelle tourne pendant que la lumière accomplit son double trajet. Considérons ce qui se passe au point f , centre du disque brillant, et partons du moment où le bord G_0 de la dent réelle quitte le point f (fig. 28). L'image G'_0 de ce bord est en retard de l'arc ε sur la position qu'elle devrait occuper si la propagation de la lumière était instantanée; or cette position correspondrait à la coïncidence du bord G'_0 avec le point f ; le retard angulaire ε est donc représenté sur la figure par la distance du bord G'_0 à f . C'est bien un retard qu'on a figuré; car, d'après la flèche, le bord G'_0 n'a pas encore atteint le point f . Il en résulte que, lorsque le bord G_0 aura découvert le point f , ce point ne deviendra pas lumineux, car il sera encore dans la partie obscure de l'image de la dent, et il y restera jusqu'à ce que le bord G'_0 parvienne au point f , c'est-à-dire pendant le parcours de l'arc de retard ε .

97. Il est inutile d'aller plus loin dans l'analyse du phénomène, car on le ramène immédiatement au cas qui vient d'être examiné. En effet, tout se passe comme si le centre de symétrie f s'était déplacé; le centre apparent de symétrie est maintenant situé à égale distance du bord G_0 et de son image. En effet, les variations simultanées de position des deux roues sont égales et de sens contraire. Le bord G'_0 avance dans le sens de la flèche d'un arc égal à l'arc décrit

par le bord G_0 ; donc, sur la corde commune définie plus haut, le bord G_0 coïncidera avec son image lorsque tous deux auront marché de l'arc $\frac{\epsilon}{2}$.

Le retard angulaire ϵ a donc pour effet de déplacer d'un arc $\frac{\epsilon}{2}$ le centre de symétrie des images dans le sens de la rotation réelle.

La même démonstration s'appliquerait à un point f' quelconque de la corde commune; on retrouverait la même distribution des intensités, mais déplacées de l'arc $\frac{\epsilon}{2}$.

98. Nous avons maintenant une idée très-nette de l'ensemble du phénomène; le système de bandes, qui sillonne la partie commune aux deux zones dentées, se déplace parallèlement à lui-même, par rapport au centre de l'image circulaire, d'une quantité $x = \frac{\epsilon}{2}$, ϵ étant le retard angulaire de l'image de la roue. Il n'y a plus, à proprement parler, d'extinctions et de réapparitions, mais un déplacement de ces bandes proportionnel à la vitesse de rotation; pour les vitesses très-faibles, le centre f de l'image circulaire est traversé par une bande claire, puisque, pour $\epsilon = 0$ ou $\omega = 0$, l'intensité est maximum et égale à $hE(1 - k)$. C'est une bande centrale, et sa ligne médiane est l'axe de symétrie des autres bandes. La vitesse augmentant progressivement, la bande centrale claire quitte le centre f et se déplace dans le sens de la rotation de la roue, de manière que le déplacement angulaire ξ de la bande centrale corresponde à la moitié du retard angulaire ϵ produit par la propagation successive de la lumière. La vitesse ω croissant toujours, il arrive un moment où le centre f devient le siège d'une bande obscure. L'*extinction* a lieu au point f ; à cet instant le retard ϵ vaut une demi-dent complète, et le déplacement ξ vaut un quart de dent complète, c'est-à-dire une demi-bande complète, en appelant bande complète l'ensemble d'une bande obscure et d'une bande brillante. Pour des vitesses progressivement croissantes, on retrouvera au point f la succession périodique des apparitions et des extinctions.

99. Si l'on revient maintenant au cas réel des expériences, c'est-à-dire si l'on suppose que le collimateur s'éloigne progressivement, rien ne sera changé à l'ensemble du phénomène, si ce n'est la grandeur du champ circulaire lumineux sur lequel les dentures se projettent, lequel diminuera en raison inverse de la distance, car ce champ circulaire n'est autre que l'image du contour de l'objectif. Les bandes conserveront leur même largeur égale à une demi-dent; seulement le nombre des bandes visibles deviendra de plus en plus petit à cause du

rétrécissement du champ. Bientôt le cercle lumineux ne pourra plus contenir qu'une seule bande brillante aux faibles vitesses, laquelle fera place à une bande obscure, à des vitesses plus grandes, et ainsi de suite alternativement. La loi de décroissement d'intensité pour les parties estompées de ces bandes se conservera théoriquement sans aucune altération, quel que soit le diamètre du contour circulaire conservé autour du centre f . Enfin, aux grandes distances des stations, l'objectif du collimateur ne sous-tendant plus qu'un angle excessivement petit, le disque lumineux qui forme son image ne sera plus qu'une fraction très-faible d'une largeur de bande.

100. Si l'on veut appliquer en toute rigueur les résultats précédents, on obtiendra aisément l'intensité lumineuse en chaque point de l'image, en considérant la portion de bande qui s'y trouve contenue. A cet effet, on n'aura qu'à porter sur la ligne représentative des intensités deux ordonnées dont la différence des abscisses figure le diamètre δ de l'objectif, et la moyenne des abscisses devra coïncider avec $\frac{1}{2} \frac{\xi}{\alpha}$ ou $\frac{1}{2} \frac{\omega}{\Omega}$. D'après ce qu'on a vu, le centre du disque lumineux aura l'éclat mesuré par l'ordonnée correspondante, et la répartition des intensités sur le diamètre du disque parallèle à l'arc de rotation de la roue sera donné par les ordonnées voisines.

Mais cette répartition sera en général peu utile à connaître; car, pour un disque lumineux aussi petit que celui qu'on observe dans ces expériences, les variations d'éclat, dans un si petit espace, sont très-mal appréciées par l'œil. C'est l'éclat moyen ou l'intensité moyenne que peut seulement apprécier la vue, et c'est l'élément utile à considérer; c'est celui que donne justement l'ordonnée moyenne. Cette construction géométrique, du genre de celle que nous avons indiquée pour l'étude des inégalités périodiques (71), montre qu'il n'y a aucune erreur systématique à craindre lorsqu'on adopte le mode d'observation double déjà si souvent décrit.

En résumé, le dispositif optique imaginé par M. Fizeau pour obtenir le retour de la lumière, bien que s'écartant en apparence des conditions théoriques les plus simples, réalise expérimentalement ces conditions avec une rigueur parfaite et une très-grande facilité d'exécution.

Remarque. — Il viendra peut-être à l'esprit du lecteur l'idée de comparer le cas que nous venons d'examiner avec le cas idéal analysé précédemment, lequel avait fourni une image très-élégante et si claire de l'influence du retard de la lumière sur l'intensité du point lumineux de retour. On a vu que tout se passait comme si la roue dentée se dédoublait en deux roues tournant d'un mouvement com-

mun autour du même axe, mais séparées angulairement de l'angle ε , qui définit le retard de propagation. On peut se demander s'il n'existe pas de dispositif optique qui puisse le réaliser.

Il en existe une infinité, ainsi qu'on va le voir, et qui se ramènent aux types que nous avons déjà étudiés. D'abord celui de la *fig.* 19, composé d'un objectif et d'un miroir concave. On a vu, n° 79, que les rayons lumineux issus d'un point a reviennent, après réflexion, au point de départ. Il en résulte que tout objet lumineux placé dans le plan focal conjugué de la surface du miroir concave MM' coïncidera avec son image formée par les rayons réfléchis. Ainsi une roue dentée, éclairée en arrière, se détachera en noir sur un fond lumineux pour un observateur placé lui-même en arrière de la roue; le fond lumineux sera l'image du contour du miroir MM' , et l'image de la roue sera invisible, parce qu'elle coïncidera avec la roue elle-même.

Mais si cette roue avait un mouvement de rotation assez rapide pour qu'elle eût le temps de tourner d'un angle ε avant l'arrivée des rayons qui forment son image, on aurait le phénomène décrit précédemment, à savoir l'obscurcissement graduel de la zone dentée, à laquelle la persistance des impressions sur la rétine attribue une teinte uniforme. L'apparence serait donc toute différente de celle que nous venons d'analyser. Avec une vitesse croissante on aurait en *teinte plate* la succession des teintes qui sont juxtaposées dans les *bandes*.

On a vu que, pour de grandes distances, l'emploi d'un miroir concave est inadmissible; mais on peut le remplacer par un objectif et un miroir: la disposition la plus simple à adopter consiste à adopter l'appareil même de M. Fizeau, mais à en modifier le réglage de la façon suivante. La roue dentée et le miroir seraient placés exactement au foyer principal de leurs objectifs respectifs; chacun des points lumineux de la source enverrait ainsi un faisceau de rayons parallèles qui irait, en totalité ou en partie, tomber sur l'objectif du collimateur. La portion recueillie du faisceau irait se concentrer sur le miroir concave et s'y réfléchir normalement. Le faisceau conjugué réfléchi reprendrait un chemin parallèle, et au retour viendrait former une image au point même de la source d'où il dérive. On est donc ainsi ramené au cas que nous venons d'analyser. La différence est cependant assez grande; c'est que le champ éclairé, sur lequel se projetterait la roue dentée, n'est plus nettement circonscrit par le contour de l'objectif du collimateur. L'image de ce contour ne peut pas être nette dans le plan focal principal, puisque les rayons qui partent de ce contour ne viennent pas de l'infini. Cet estompement des bords du champ lumineux serait surtout apparent à petite distance, parce que la différence des foyers serait notable; aux grandes distances la démarcation entre ces deux modes de réglage s'efface de plus en plus; car, pour une distance infinie, ils coïncident complètement. On pourrait, en conséquence, appliquer indifféremment l'un ou l'autre mode de réglage lorsque les stations sont très-éloignées; mais la préférence restera toujours au premier, parce qu'il est très-difficile de régler chacune des distances focales exactement sur l'infini sans être obligé de démonter les appareils ou d'y ajouter des dispositifs plus ou moins compliqués, tandis qu'il suffit de viser l'objectif illuminé de la station opposée pour obtenir très-exactement le premier mode de réglage; l'illumination de l'objectif n'est pas même nécessaire, il suffit de viser les objets avoisinant la station optique.

On pourrait conserver le mode de réglage fondé sur la considération de l'image de l'objectif de la station opposée; il suffirait de remplacer le miroir par un très-petit objectif, qui produirait une image réelle de l'objectif voisin: c'est dans ce plan qu'on placerait alors le miroir concave, ayant pour rayon la distance focale du petit objectif. On retombe ainsi dans l'un des cas discutés plus haut.

Enfin on obtiendrait alternativement les apparences optiques, que l'on peut qualifier de *droites* et *renversées*, en plaçant le foyer d'un nouvel objectif dans le plan focal conjugué du précédent et un miroir concave dans le plan du nouveau foyer. On aurait ainsi une série indéfinie dont les termes, de deux en deux, forment un dispositif analogue à celui que Foucault a employé dans sa détermination de la vitesse de la lumière pour multiplier l'espace parcouru par les rayons réfléchis.

Influence des erreurs de réglage de l'appareil optique.

101. 1° *Collimateur*. — La condition la plus délicate à remplir est, ainsi qu'on l'a montré au n° 88, le réglage du miroir réfléchissant au foyer du collimateur; une erreur notable sur la position de ce miroir entraînerait la dispersion complète des faisceaux réfléchis, et par suite l'impossibilité de voir la lumière de retour. On est donc assuré de n'avoir commis aucune erreur grave dans le réglage du miroir si l'on aperçoit le point lumineux. Cette vérification est plus facile à faire de jour, avec la lumière solaire, que la nuit; car, la nuit, on juge mal de l'état de transparence ou de calme de l'atmosphère, tandis que, un peu avant le coucher du Soleil, il est rare de ne pas trouver, lorsque l'atmosphère a été bien pure tout le jour, quelques instants pendant lesquels les agitations onduleuses de l'air cessent complètement: les images deviennent alors d'une netteté extrême; la réflexion des rayons solaires se fait avec un éclat remarquable qui ne permet aucun doute sur l'exactitude approchée du réglage du miroir focal.

Quant à des erreurs très-petites sur la position de ce miroir, elles n'ont pour effet que de diminuer l'éclat de l'image de retour sans en modifier beaucoup le diamètre. En effet, si l'on se reporte au n° 80 (*fig. 20*), on verra que le fait du retour de tous les rayons reçus par le collimateur à la première station provient de ce que les rayons de retour constituent une image conjuguée bb' , d'un disque lumineux mm' , qui n'est autre que l'image conjuguée de l'objectif bb' ou S. C'est donc une *image conjuguée d'image conjuguée* par rapport à l'objectif du collimateur; dans le cas d'un réglage parfait, l'image doublement conjuguée redevient identique à l'objet. La réflexion sur le miroir bien réglé dans le plan focal conserve l'image sur la surface même du miroir; mais, si le miroir est un peu en deçà ou au delà du foyer, l'image réfléchie va se former dans un plan qui est distant du plan focal conjugué de S du double de l'erreur de position du miroir. Il en résulte qu'au lieu d'avoir, comme dans le premier cas, deux systèmes de foyer conjugués en coïncidence, on a deux systèmes différents, et alors l'image conjuguée de cette nouvelle image va se former dans un plan autre que celui de l'objectif S.

102. Pour rendre ce raisonnement plus clair, rappelons que la formule classique des lentilles

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle les distances des deux foyers conjugués p, p' , au centre optique de

la lentille, sont comptées positivement de part et d'autre de la lentille, peut se mettre sous la forme

$$(p - f)(p' - f) = f^2,$$

ou, en posant $p - f = x$, $p' - f = x'$,

$$xx' = f^2,$$

ce qui revient à compter les distances des foyers conjugués non plus à partir d'une même origine, le centre optique, mais de deux origines différentes, à savoir les foyers principaux situés respectivement du côté de leurs accroissements positifs.

Soit D' la distance des objectifs des deux stations diminuée de f' , distance focale principale du collimateur. On a, pour définir le plan focal conjugué de l'objectif de la première station, l'équation

$$D'x' = f'^2.$$

Pour la marche inverse des rayons dans le cas où le miroir est placé exactement à la distance x' du foyer principal, si l'on désigne par y la distance du foyer conjugué de l'image après réflexion,

$$yx' = f'^2, \quad \text{d'où } y = D',$$

c'est-à-dire que l'image doublement conjuguée va coïncider avec l'objet.

Si le miroir est en erreur d'une distance z sur la position théorique, la première image viendra, par suite de la réflexion, se former à la distance $x' + 2z$ du foyer principal, et l'image doublement conjuguée sera rejetée à la distance y' définie par la relation

$$y'(x' + 2z) = f'^2.$$

Comme x' est très-petit parce que D' est très-grand, on voit que le second facteur sera très-notablement modifié, et par suite y' différera notablement de D' . Divisant, en effet, membre à membre, il vient

$$\frac{y'}{D'} = \frac{x'}{x' + 2z} = \frac{1}{1 + 2\frac{z}{x'}};$$

donc, si le rapport $\frac{z}{x'}$ est appréciable, le rapport de y' à D' sera très-différent de l'unité.

103. Mais il y a une cause de compensation; car, si, d'un côté, l'image *doublement conjuguée* est rejetée à une distance y' très-différente de D' , l'angle sous-tendu par cette image, vué du centre de l'objectif S' (*fig. 20*), varie très-peu. En effet, d étant le diamètre de l'objectif S , la tangente trigonométrique de l'angle qu'il sous-tend est $\frac{d}{D}$; son image conjuguée sous-tend au foyer le même angle. La tangente trigonométrique $\text{tang } \alpha'$ de cet angle est représentée par son diamètre d' divisé par sa distance au centre optique $f' + x'$,

$$\text{tang } \alpha' = \frac{d'}{f' + x'} = \frac{d}{D'}$$

Si, par suite d'une petite erreur dans la position du miroir, le foyer conjugué vient se former à la distance $x' + 2z$ du foyer principal, l'image, doublement conjuguée, aura un diamètre d'' défini par le rapport $\frac{d''}{y'}$ et tel que

$$\frac{d''}{y'} = \frac{d'}{f' + x' + 2z} = \text{tang } \alpha'',$$

α'' étant l'angle sous lequel l'image, doublement conjuguée, est vue du centre optique de l'objectif S' . Divisant membre à membre, il vient

$$\frac{\text{tang } \alpha''}{\text{tang } \alpha'} = \frac{f' + x'}{f' + x' + 2z} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2z}{f' + x'}\right)}$$

Or z est toujours très-petit par rapport à f' ; donc ce rapport est sensiblement égal à l'unité.

Il résulte de cette analyse que l'ensemble des cônes divergeant de l'objectif du collimateur occupera dans l'espace à peu près le même volume et, par suite, qu'il conservera à peu près les mêmes sections aux mêmes distances. Donc il rencontrera l'objectif S de la première station à peu près en totalité; il y aura, toutefois, nécessairement de la lumière perdue, parce que c'est dans le plan d'un foyer conjugué que les faisceaux offrent la section la plus resserrée, mais la différence ne sera pas grande et ne portera que sur les faisceaux extérieurs.

104. Ainsi une petite erreur de réglage du miroir n'a pas une grande influence sur l'intensité de la lumière de retour, mais cette influence grandit comme le carré de l'erreur; car les quantités de lumière reçues au retour varient en raison inverse de $\text{tang}^2 \alpha''$, de sorte qu'on a intérêt à apporter beaucoup de soin à ce réglage.

Quant aux erreurs systématiques résultant de ce défaut de réglage, elles sont

évidemment négligeables. En effet, la marche des rayons reste sensiblement la même pour les faisceaux centraux (c'est-à-dire dont l'axe est peu incliné sur l'axe commun des deux objectifs) que dans le cas d'un réglage parfait. Pour les faisceaux latéraux, la différence consiste en ce qu'ils sont rejetés partiellement ou totalement au retour. Il en résulte que l'image de retour n'aura plus un éclat uniforme sur toute l'étendue de son disque; l'affaiblissement sera plus ou moins grand, mais symétriquement distribué vers les bords. Pour l'œil qui ne perçoit que l'intensité moyenne d'un disque si petit, l'effet produit sera un affaiblissement général; or on voit aisément que, par l'action du mouvement des dents, les variations d'éclat sont, en chaque point du disque, proportionnelles à l'éclat intrinsèque qui s'y trouve; l'éclat moyen sera, comme précédemment (nos 99 et 100), proportionnel à l'éclat du centre du disque; or, comme au centre le phénomène a lieu dans les circonstances normales, on n'aura donc à craindre aucune erreur systématique dans les observations.

105. 2° *Lunette d'émission.* — La condition à remplir est de placer le plan de la roue dentée (ou, plus exactement, le plan qui contient les bords des dents) dans le plan focal conjugué de l'objectif du collimateur. Il n'y a aucune difficulté à la remplir; il suffit d'examiner successivement, avec un oculaire suffisamment puissant, l'image de retour et le bord des dents. En faisant varier le tirage de l'oculaire, on arrive à voir successivement les deux objets avec la plus grande netteté. Si le tirage est le même pour les deux objets, le réglage est complet; s'il existe une petite différence, on l'annulera par un moyen quelconque de rectification qu'on devra se ménager dans la construction des pièces qui portent la roue dentée. Le défaut de réglage sera donc nécessairement très-faible, parce que l'observateur a toujours sous les yeux le phénomène qui le met en évidence et sous la main le moyen de le corriger.

Il est facile de voir qu'une petite erreur de ce genre n'entraîne aucune erreur systématique dans les observations. En effet, si l'on considère chaque point de l'image de retour, le faisceau conique qui lui donne naissance, n'étant plus coupé en son sommet, ne sera pas brusquement interrompu par le bord de la dent; l'extinction aura lieu graduellement par l'obturation progressive de divers rayons du faisceau. Tout se passe alors comme si la dent à bords nets, mais mal réglée de position, était bien réglée au sommet du faisceau conique, mais était limitée par des bords estompés. On reporte le défaut de réglage sur le défaut de netteté du bord. Sous cette forme, les raisonnements employés aux nos 69, 98 et suivants) s'appliquent aisément. On en conclurait de même l'existence de bandes alternativement claires et obscures, mais dont la loi d'intensité serait

légèrement modifiée. La symétrie dans la répartition de ces bandes serait néanmoins conservée, ce qui suffit pour démontrer l'absence d'erreurs systématiques dans le cas de la méthode des observations doubles décrites déjà si souvent.

3° CONDITIONS PHYSIOLOGIQUES RELATIVES A L'OBSERVATION DU PHÉNOMÈNE
OPTIQUE ET A LA MESURE DE LA VITESSE DU MÉCANISME.
ÉTUDE ET ÉLIMINATION DES ERREURS PERSONNELLES.

106. Dans l'exposition théorique de la méthode, on a supposé (nos 4 et 12) que l'observateur note rigoureusement la vitesse angulaire de la roue dentée à deux époques définies par l'appréciation d'une certaine valeur de l'intensité de la lumière de retour. La réalisation de cette exactitude géométrique est impossible, puisque c'est l'observateur qui non-seulement apprécie l'intensité d'après les impressions de sa vue, mais encore transmet avec la main un signal électrique au moment où la vitesse est convenable. Ce signal, qui définit la vitesse de la roue dentée, comporte évidemment des erreurs propres aux deux organes qui servent d'intermédiaires, la vue et le toucher, et une erreur due à leur corrélation par l'intermédiaire du cerveau. La vitesse observée est ainsi entachée d'erreurs dues à ces transmissions physiologiques, *erreurs qu'on peut appeler personnelles* et qui doivent influencer nécessairement sur l'exactitude des résultats. On a démontré, il est vrai, dès le début (n° 7), que toute erreur constante dans l'appréciation de l'intensité est atténuée indéfiniment par l'observation des extinctions d'ordre croissant n , à cause du facteur $\frac{1}{2n-1}$, qui multiplie le résultat observé. Cette proposition pourrait, à la rigueur, dispenser d'examiner en détail les causes d'erreur provenant de cette source; mais, comme nous nous proposons d'atteindre la plus grande précision possible, il est nécessaire de se rendre un compte très-approché de la valeur de ces erreurs et surtout de chercher à les éliminer au lieu de les réduire par le facteur $\frac{1}{2n-1}$.

Nous avons donc à faire une véritable étude des *erreurs personnelles* dans l'emploi de la méthode de la roue dentée avec enregistrement électrique, étude analogue à celle que les astronomes font journellement pour l'emploi de leurs instruments et qui présente avec elle beaucoup de points communs.

1° *Évaluation approximative de l'erreur personnelle dans l'enregistrement du phénomène de l'extinction.*

107. La série des opérations physiologiques et mécaniques de l'enregistrement de la vitesse est la suivante : L'observateur juge, par l'intermédiaire de l'organe de la vue, que la disparition du point lumineux est complète; puis, par l'intermédiaire de l'organe du toucher, il produit un signal électrique, lequel s'enregistre sur un cylindre par l'intermédiaire de pièces mécaniques qui seront décrites plus loin.

On peut distinguer dans cette série de transmissions quatre phases distinctes donnant naissance à quatre retards. En effet, il faut un certain temps pour que l'œil juge la valeur de l'intensité lumineuse : au moment où l'intensité devient nulle, la persistance des impressions sur la rétine prolonge la sensation d'intensité au delà de l'instant précis où elle aurait dû disparaître; voilà un premier retard. Il est évidemment très-petit; car on évalue à moins de $\frac{1}{10}$ de seconde la durée totale d'une impression lumineuse assez vive sur la rétine. Il est probable qu'une sensation lumineuse peu intense produit une persistance moindre.

Une seconde cause de retard, c'est le besoin inconscient de vérifier que le point lumineux a disparu réellement et que cette disparition n'est pas accidentelle, c'est-à-dire occasionnée par une fatigue, une inadvertance de l'œil ou un trouble momentané de l'atmosphère. L'œil ne se décide à juger l'extinction complète que lorsque la disparition s'est maintenue pendant quelques instants. Cette période d'*hésitation*, nécessaire à l'appréciation consciencieuse et réfléchie du phénomène, période que l'on amplifie nécessairement en l'analysant, est assez rapide; j'estime qu'elle atteint rarement 2 à $\frac{3}{10}$ de seconde, d'après certaines observations pendant lesquelles j'ai suivi les hésitations de l'œil, tandis qu'avec l'oreille j'écoutais les battements d'un chronographe donnant $\frac{1}{10}$ de seconde (*).

Comme troisième cause de retard, il faut compter le temps qu'exige la transmission des impressions de l'organe de la vue à l'organe du toucher, c'est-à-dire le temps qui s'écoule depuis le moment où l'observateur est satisfait du phénomène optique jusqu'au moment où sa main produit le signal électrique. C'est une cause d'erreur du genre de celles qu'étudient les astronomes, et qui consti-

(*) Lorsque le point lumineux n'est pas bien fixe en intensité par suite des réfractions irrégulières de l'atmosphère, la période d'hésitation de l'œil augmente notablement et les appréciations deviennent moins sûres. Toutefois, lorsque le point lumineux présente un caractère de scintillation régulière, l'œil adopte le rythme de la scintillation et conserve une assez grande délicatesse, mais relative seulement à l'appréciation de l'intensité aux instants des maxima périodiques.

tue une grande partie de ce qu'on nomme l'*erreur personnelle*. Elle se rencontre à peu près sous la même forme dans l'emploi des pointages électriques pour l'enregistrement du passage des astres aux instruments méridiens : elle atteint rarement $\frac{1}{10}$ de seconde.

Enfin, la quatrième cause de retard, toute mécanique, provient de ce que le tracé du signal sur l'enregistreur exige, pour être exécuté, un temps appréciable. En effet, lorsque la pression de la main de l'observateur a abaissé le levier de la clef électrique, le courant se ferme, l'électro-aimant s'aimante, attire son contact, entraîne le tracelet et produit un petit trait sur le papier enfumé de l'enregistreur. Ces effets successifs se prolongent pendant une durée qui dépend de la forme et de l'inertie des appareils, mais qui ne dépasse pas quelques centièmes de seconde.

108. Ces quatre causes d'erreur agissent dans le même sens pour produire un retard dans la formation du signal qui doit définir la vitesse de la roue dentée. Si l'on connaissait la durée exacte de tous ces retards, on pourrait calculer l'erreur qu'ils produisent sur la mesure de cette vitesse. Malheureusement ces retards sont presque tous du domaine des phénomènes nerveux, c'est-à-dire essentiellement variables, suivant les circonstances extérieures. Cependant on peut, en supposant un observateur exercé à ce genre d'appréciations, et maniant des appareils auxquels il est habitué, considérer ces erreurs comme tendant vers un régime fixe, de sorte qu'on peut regarder comme constantes certaines erreurs personnelles et adopter pour les autres une loi hypothétique s'appliquant seulement aux circonstances où se font les observations.

Ainsi nous considérerons comme constant, dans une même série d'expériences, le retard dû à la persistance des impressions sur la rétine; nous le désignerons par r . Il en sera de même du retard provenant de la corrélation indirecte des organes de la vue et du toucher par l'intermédiaire du cerveau; nous l'appellerons c . Le retard dû aux transmissions électriques et mécaniques doit être également considéré comme constant dans une même série d'expériences. Nous désignerons par ε , non pas le retard lui-même, mais la différence de ce retard fixe avec le retard de même nature produit par les pièces analogues qui enregistrent les signaux automatiques du mécanisme auxquels on compare ceux de l'observateur. On peut aussi considérer comme figurant dans ε la différence de position ou *parallaxe* des tracelets. En effet, une différence de position dans les deux tracelets équivaut, si la feuille où s'enregistrent les signaux possède un mouvement sensiblement uniforme, à un retard relatif mesuré par le quotient de la distance des deux traits simultanés par la vitesse de la feuille.

109. Il reste à exprimer le retard dû à l'hésitation de l'observateur; on ne peut pas le considérer comme constant. En effet, si la variation d'intensité de la lumière est très-rapide, l'hésitation est très-courte et ne comprend guère que le retard dû à la persistance des impressions sur la rétine. Si, au contraire, la variation de l'intensité lumineuse est lente, l'indécision augmente dans le même sens. On peut donc, avec vraisemblance, adopter, pour le retard dû à l'hésitation de l'observateur, la loi de proportionnalité inverse avec la vitesse de variation de l'intensité $\frac{dI}{dt}$; et comme, pour une variation très-rapide, l'hésitation n'est probablement pas absolument nulle, on écrira, comme expression du retard,

$$\eta_0 - \frac{\eta}{\left(\frac{dI}{dt}\right)},$$

η_0 et η étant deux constantes positives fixes dans les circonstances de l'observation. On met le signe $-$, parce que $\frac{dI}{dt}$ est négatif lorsque I décroît.

La somme des quatre retards, dans l'ordre où ils ont été analysés, est donc

$$\Delta t = r + \eta_0 - \frac{\eta}{\left(\frac{dI}{dt}\right)} + c + \varepsilon.$$

Nous représenterons par ρ la somme $r + \eta_0$, dont les deux termes sont inséparables, et par τ la somme $c + \varepsilon$ pour le même motif. La variation de vitesse angulaire de la roue dentée correspondant à ce retard pourra se calculer comme une différentielle, car la somme des retards Δt est nécessairement très-petite par rapport à la durée qui amène un changement notable dans la vitesse

$$\Delta\omega = \frac{d\omega}{dt} \Delta t = \frac{d\omega}{dt} (\rho + \tau) - \eta \frac{d\omega}{dI}.$$

Telle est l'expression approchée de l'erreur commise sur la *vitesse enregistrée électriquement* pour le pointé correspondant à une *extinction*.

2° *Évaluation approximative de l'erreur personnelle dans l'enregistrement du phénomène de la réapparition.*

110. Dans ce cas, les causes de retard sont analogues, mais non pas toutes identiques. On retrouve également quatre phases distinctes : l'œil n'aperçoit

pas le point lumineux dès qu'il apparaît. Nous désignerons ce retard par r' . On ne peut pas affirmer qu'il soit égal au retard r , car le phénomène physiologique est différent; en effet, dans le second cas, pour employer une comparaison acoustique, le retard r' est une espèce de mise en vibration de la rétine; dans le premier, c'était, au contraire, une prolongation de résonance.

L'hésitation à reconnaître la réapparition est également d'une nature spéciale, différente de l'hésitation à percevoir l'extinction. De plus, il s'ajoute un élément particulier d'incertitude : c'est le lieu de réapparition du point lumineux (*).

Dans le dispositif expérimental on trouve, toutefois, une circonstance très-favorable à l'atténuation de cette cause d'erreur : c'est que le champ où le point lumineux doit réapparaître est très-limité. Ce champ n'est autre que la tache grise produite par la lumière diffusée sur le noir de fumée de la denture. Si l'on prend soin de donner une forme circulaire à cette tache (elle est l'image conjuguée du diaphragme de l'éclaireur) et de régler l'axe optique de la lunette de telle façon que le point lumineux soit au centre de cette tache, l'incertitude du lieu de réapparition est presque complètement éliminée.

Nous admettons que la loi qui représente le retard dû à cette hésitation est de même forme que précédemment (109), mais avec des coefficients différents,

$$r'_0 + \frac{r'}{\left(\frac{dI}{dt}\right)}.$$

On met ici le signe +, parce que $\frac{dI}{dt}$ est positif lorsque I croît. Quant aux deux autres causes de retard, elles sont les mêmes; par conséquent on aura, pour la somme des retards,

$$\Delta t' = r' + r'_0 + \frac{r'}{\left(\frac{dI}{dt}\right)} + \tau.$$

Appelant de même ρ' la somme $r' + r'_0$, on aura, pour l'erreur commise sur la vitesse angulaire dans l'observation d'une *réapparition*,

$$\Delta \omega = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) (\rho' + \tau) + r'_0 \frac{d\omega}{dI}.$$

(*) En Astronomie, on rencontre des difficultés du même genre dans l'observation des éclipses des satellites de Jupiter. Les immersions correspondent aux extinctions du point lumineux, les émer-sions aux réapparitions. Les erreurs qu'on peut commettre dans l'observation de chacun de ces phénomènes sont différentes.

3° *Erreur personnelle sur l'observation complète.*

111. La vitesse ω de la roue dentée à substituer dans la formule fondamentale qui donne la vitesse de la lumière (7) est la moyenne des deux vitesses observées, l'une au moment t' de l'extinction, l'autre au moment t'' de la réapparition (14). Cette vitesse est entachée d'une erreur personnelle égale à la demi-somme des erreurs qu'on vient de calculer; mais il faut remarquer que les dérivées n'ont pas exactement la même valeur; on les distinguera par les accents ' et'', indiquant qu'elles correspondent aux époques $t = t'$, $t = t''$.

$$\frac{\Delta' \omega + \Delta'' \omega}{2} = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{d\omega}{dt} \right)' + \rho' \left(\frac{d\omega}{dt} \right)'' \right] + \frac{\tau}{2} \left[\left(\frac{d\omega}{dI} \right)' + \left(\frac{d\omega}{dI} \right)'' \right] - \frac{1}{2} \left[\eta \left(\frac{d\omega}{dI} \right)' - \eta' \left(\frac{d\omega}{dI} \right)'' \right].$$

On peut, dans le calcul approché de cette erreur, admettre que l'observation a été faite dans les circonstances normales définies au n° 21; la valeur de $\frac{d\omega}{dI}$ est une constante (n° 26) négative quand I diminue avec ω , et positive dans le cas contraire. Supposons d'abord que la vitesse du mécanisme aille en croissant, on aurait

$$\left(\frac{d\omega}{dI} \right)' = - \frac{\Omega}{hE}, \quad \left(\frac{d\omega}{dI} \right)'' = + \frac{\Omega}{hE};$$

substituant, il vient

$$\frac{\Delta' \omega + \Delta'' \omega}{2} = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{d\omega}{dt} \right)' + \rho' \left(\frac{d\omega}{dt} \right)'' \right] + \frac{\tau}{2} \left[\left(\frac{d\omega}{dt} \right)' + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)'' \right] + \frac{\Omega}{hE} \left(\frac{\eta + \eta'}{2} \right).$$

Telle est l'erreur commise sur la vitesse enregistrée dans une observation double en *vitesse croissante* du mécanisme.

Supposons maintenant que la *vitesse* soit *décroissante*, les mêmes phénomènes se reproduisent exactement à l'extinction et à la réapparition, mais le signe de $\frac{d\omega}{dI}$ est changé dans les deux cas,

$$\frac{\Delta' \omega_1 + \Delta'' \omega_1}{2} = \frac{1}{2} \left[\rho \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)' + \rho' \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)'' \right] + \frac{\tau}{2} \left[\left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)' + \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)'' \right] - \frac{\Omega}{hE} \left(\frac{\eta + \eta'}{2} \right).$$

On a mis ω_1 au lieu de ω , parce que les époques t'_1 , t''_1 des deux nouveaux pointés ne sont pas les mêmes que dans le premier cas. Toutefois, si la nouvelle observation est *symétrique* de la première, c'est-à-dire si la variation décroissante de la vitesse est de même ordre que la variation croissante du premier cas, les

vitesse seront égales et de même signe, les dérivées ou accélérations sensiblement égales et de signe contraire aux époques correspondantes $t' t_1''$ et $t'' t_1'$.

Ces deux expressions nous montrent qu'on peut éliminer les deux retards η , η' caractérisant la partie variable de l'hésitation de l'observateur. Il suffira, en effet, de combiner toujours deux à deux les mesures relatives à une extinction d'un ordre donné, de manière que l'observation de l'une ait été faite en *vitesse croissante*, l'autre en *vitesse décroissante* de la roue dentée. La moyenne de ces deux déterminations sera affranchie des deux retards η , η' .

112. Il y a plus, les trois autres retards ρ , ρ' , τ seront également éliminés, sinon rigoureusement, au moins d'une manière presque complète.

Considérons, en effet, l'expression de l'erreur de la moyenne de ces observations, que nous appellerons *doubles et croisées*,

$$\Delta = \frac{1}{4} \rho \left[\left(\frac{d\omega}{dt} \right)' + \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)' \right] + \frac{1}{4} \rho' \left[\left(\frac{d\omega}{dt} \right)'' + \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)'' \right] + \frac{\tau}{4} \left[\left(\frac{d\omega}{dt} \right)' + \left(\frac{d\omega}{dt} \right)'' + \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)' + \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)'' \right].$$

Les dérivées $\frac{d\omega}{dt}$ sont très-petites en valeur absolue, car l'accélération angulaire de la roue dentée est maintenue très-faible. Elles sont positives en vitesse croissante et négatives en vitesse décroissante, et, suivant la remarque précédente, les vitesses aux époques t' et t_1'' , t'' et t_1' sont à peu près égales.

Ceci posé, examinons d'abord le coefficient de τ ; il est formé par la somme de quatre termes individuellement très-petits et deux à deux sensiblement égaux et de signe contraire,

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)' \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)'', \quad \left(\frac{d\omega_1}{dt} \right)' \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\omega}{dt} \right)'.$$

Ce coefficient est donc voisin de zéro; or, comme τ , somme des retards fixes de transmissions, est lui-même très-petit [de $0^s,1$ à $0^s,2$ d'après les observations des astronomes (*)], l'erreur provenant de cette source peut être considérée comme sensiblement éliminée.

La même conclusion s'appliquerait également à ρ et ρ' s'ils étaient égaux; car le coefficient de $\rho + \rho'$ serait le même que celui de τ ; or, comme leur grandeur

(*) C'est une limite supérieure de τ ; car, dans les observations du passage d'une étoile à un fil, la persistance de l'impression sur la rétine, qui est ici considérée à part, ajoute quelque chose au retard de corrélation de l'organe de la vue et du toucher.

est de même ordre, leur influence sur l'erreur de la moyenne est presque entièrement annulée.

Toutefois ce mode de raisonnement n'est qu'approché, et, comme on peut objecter que les quantités ρ et ρ' , persistances d'impressions rétinienne, peuvent peut-être acquérir des valeurs notables, il est nécessaire de chercher un moyen de diminuer encore leur influence. Pour cela il suffit d'examiner si le facteur qui les multiplie ne peut pas devenir nul ou très-petit. Or $\frac{d\omega}{dt}$ devient nul ou négligeable dans le cas où la vitesse angulaire approche d'un maximum ou d'un minimum; si, en outre, on peut conserver le changement de signe de $\frac{d\omega}{dt}$ dans deux observations conjuguées, de manière que les multiplicateurs de ρ et ρ' soient non-seulement composés de termes très-petits, mais deux à deux de signe contraire, on aura obtenu le résultat demandé.

Représentation géométrique des erreurs personnelles et des conditions qui les éliminent.

113. La recherche de ces conditions, et même l'ensemble de cette discussion, deviendront, pour ainsi dire, intuitifs, si l'on adopte le mode de représentation géométrique que voici.

Portons sur l'axe des abscisses $O\omega$ (*fig. 29*) les vitesses angulaires $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, qui correspondent à l'extinction et à la réapparition théoriques d'ordre croissant dans les circonstances de l'observation. Élevons des ordonnées en chacune de ces abscisses et prenons l'axe des ordonnées comme axe des temps. Chaque mode de mouvement de la roue dentée sera représenté par une courbe qui représentera la loi des vitesses successives avec le temps; inversement, une courbe quelconque représentera un mouvement possible de cette roue à la condition qu'une parallèle à l'axe des abscisses ne coupe la courbe qu'en un seul point, car le mécanisme ne peut avoir, à une époque déterminée, qu'une seule vitesse. Étant donnée une courbe représentative de ces vitesses $MM'NN'$, on peut construire géométriquement les époques t, t' auxquelles ont lieu l'extinction et la réapparition d'un certain ordre n . Il suffit de déterminer l'intersection de la courbe avec les ordonnées A_n, B_n . Si l'on prend soin de mettre des hachures dans l'intervalle des ordonnées de même indice, il n'y aura aucune confusion possible entre les deux phénomènes, les hachures rappelant que, lorsque la vitesse est comprise entre les deux valeurs A_n, B_n , la lumière de retour est invisible; il en résulte que, si l'on parcourt la courbe dans le sens des temps

croissants M, N, on distinguera les extinctions et les réapparitions suivant qu'on pénétrera dans un espace hachuré (M) ou qu'on en sortira (N).

On figure aussi aisément l'influence des erreurs personnelles; les retards constants sont représentés par une variation constante des ordonnées T', T'', indépendantes de l'angle suivant lequel l'arc de courbe coupe les ordonnées A_n, B_n. Les abscisses des points M', N', qui leur correspondent sur la courbe, définissent les vitesses que possédait le mécanisme au moment où l'observateur a cru observer l'extinction ou l'apparition. La moyenne des deux vitesses, qui devrait correspondre au milieu de A_nB_n, est augmentée, par suite des deux retards, lorsque la vitesse est croissante (courbe MN); elle serait diminuée d'une quantité analogue si la vitesse était décroissante (courbe PQ). On retrouve aisément le résultat de la discussion précédente, à savoir, que la moyenne de ces deux observations doubles et croisées est sensiblement affranchie des erreurs constantes (τ , ρ , ρ'); on peut même suivre le détail de la démonstration, car les dérivées $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ sont les coefficients angulaires de la tangente aux points M, N, P, Q ou des cordes MN', NN', PP', QQ'. On aperçoit même immédiatement le cas où la compensation serait rigoureuse: c'est celui où les lignes représentatives seraient des droites également inclinées, mais en sens inverse; c'est un cas très-vraisemblable et qui se présente fréquemment, au moins en moyenne, dans l'ensemble d'un grand nombre d'observations *symétriques*; car la vitesse angulaire varie alors proportionnellement au temps, c'est-à-dire que le mouvement du mécanisme est uniformément varié sous l'action de forces dont le moment est constant.

Les erreurs personnelles, qui varient en raison inverse de la vitesse de variation d'intensité lumineuse η , η' , se représentent également bien, quoique l'intensité ne figure pas sur le diagramme. On a vu, en effet (111), que, si l'on se trouve dans les circonstances normales d'observation, c'est-à-dire loin des vitesses critiques (lesquelles sont ici voisines de l'ordonnée milieu de A_nB_n), les retards, multipliés par $\frac{d\omega}{dt}$, deviennent $\frac{d\omega}{dt}$ ou $\pm \frac{\Omega}{nE}$; les erreurs correspondantes sur la vitesse deviennent indépendantes du temps; on les représentera donc par la variation des abscisses A_n, B_n. Il n'y a pas d'erreur possible sur leur signe, quoiqu'elles puissent être portées dans le sens positif ou négatif; elles tendent toujours à prolonger l'impression visuelle, lumineuse si l'on passe de la lumière à l'obscurité, obscure si l'on passe de l'obscurité à la lumière. La *fig. 30* montre géométriquement l'élimination rigoureuse de leur influence par la combinaison de deux observations doubles et croisées.

114. Il reste à montrer à quelles conditions doit satisfaire le mouvement pour

annuler l'influence des retards constants ρ, ρ' . Nous avons vu précédemment qu'il fallait rendre $\frac{d\omega}{dt}$ aussi petit que possible; géométriquement, c'est rendre la direction de la tangente en M, N, P ou Q aussi voisine que possible de la direction de l'axe des temps et, par suite, s'approcher d'un maximum ou d'un minimum de la vitesse angulaire. Mais alors, si la courbe coupe l'une des ordonnées $A_n B_n$ sous un très-petit angle, elle passera par un maximum ou un minimum de l'abscisse ω avant d'avoir atteint l'autre ordonnée $A_n B_n$; de sorte que le mouvement commencé en vitesse croissante, par exemple (*fig.* 31, courbe MN), finira en vitesse décroissante (courbe PQ), ou inversement. La même figure montre que, dans ce cas, il n'y aura pour l'observateur aucun changement apparent dans le phénomène; il apercevra la même succession d'intensité que si la vitesse avait varié dans le même sens. En effet, il constatera d'abord le phénomène d'extinction, puis celui de réapparition, comme dans les cas précédemment décrits (*fig.* 29 et 30); il n'y a donc pas de nouvelle analyse à faire dans le cas de ce mode de mouvement de la roue : tous les coefficients restent les mêmes.

Il est facile de voir maintenant que le nouveau système d'observations doubles et croisées annule sensiblement l'influence de toutes les erreurs personnelles.

D'abord les retards de toute nature agissent en sens contraire sur la valeur de la vitesse à l'extinction et à la réapparition; car les abscisses des points M', N' (*fig.* 31) sont situés de part et d'autre de l'ordonnée A_n , de même P' et Q' par rapport à l'ordonnée B_n .

Si ce sont des retards constants comme ρ, ρ' et τ , ils n'agissent que par la projection des arcs MM', NN', PP', QQ' sur l'axe $O\omega$; or, comme ces arcs sont presque normaux à cet axe, leurs projections sont par elles-mêmes très-petites; de plus, elles sont de signe contraire deux à deux. Ce mode d'observation annule donc presque rigoureusement l'influence des retards constants dans chaque observation double individuelle, quand même ρ et ρ' seraient différents.

Si ce sont des retards proportionnels à la variation d'intensité lumineuse, leur effet est annulé par la moyenne des observations doubles et croisées, car ils se traduisent par des variations de vitesse indépendantes du temps. Appelons x celle qui correspond à l'extinction, et x' celle qui correspond à la réapparition. Dans la première observation, MM', NN', ces retards produisent sur la vitesse A_n une erreur qui est la différence $\frac{1}{2}(x - x')$; dans la seconde observation, PP'QQ', une erreur sur B_n , $\frac{1}{2}(-x + x')$ égale et de signe contraire à la précédente. La moyenne des deux résultats est donc affranchie rigoureusement de l'influence de ces causes d'erreur.

On reconnaît dans les valeurs de z et z' les variations $\eta \frac{\Omega}{hE}$ et $\eta' \frac{\Omega}{hE}$ du n° 111.

115. En résumé, nous sommes en possession de deux systèmes d'observations croisées qui permettent chacun d'éliminer sensiblement l'influence des erreurs personnelles. Ces deux systèmes comprennent les quatre modes de variation que peut affecter l'accélération angulaire de la roue dentée pendant la durée d'une observation double.

		Notation du résultat calculé.	
Accélé- ration variant	{ toujours dans le même sens. }	Premier système. {	Vitesse croissante..... V
			Vitesse décroissante..... "
	{ successivement dans les deux sens }	Deuxième système {	Vitesse passant par un minimum... U
			Vitesse passant par un maximum... "

Pour abrégé la désignation de ces quatre modes de mouvement, on les représentera par les quatre lettres V, v, U, u . Ces notations abrégées seront employées dans la discussion numérique des expériences pour qualifier la valeur de la vitesse de la lumière calculée en substituant dans la formule fondamentale (n° 7) la moyenne des deux vitesses de la roue dentée, enregistrées dans chaque observation simple. Les résultats seront groupés en quatre séries qui seront respectivement désignées par V, v, u, U , suivant que l'observation aura été faite selon l'un ou l'autre de ces quatre modes.

D'après la discussion précédente, les moyennes

$$\frac{1}{2} (V + v), \quad \frac{1}{2} (U + u)$$

sont toutes deux affranchies de l'influence des erreurs personnelles; ces deux moyennes doivent être égales entre elles et égales au résultat exact.

116. Il semblerait que la seconde moyenne fût plus exacte que la première, car la démonstration géométrique, dans ce cas, se présente peut-être sous une forme plus concluante que dans le premier cas. Il ne faut pas attacher une grande importance à cette différence de rigueur dans la démonstration; la forme rigoureuse qu'on donne à l'analyse de ces erreurs ne doit pas faire oublier que les causes physiologiques dont elles dérivent sont essentiellement variables, que la constance des lois qui les représentent est une hypothèse probable, mais qu'elle n'a rien d'absolu. On doit donc considérer comme un résultat analytique

très-satisfaisant d'être parvenu à trouver les circonstances où ces causes d'erreur s'atténuent et s'annulent mutuellement; mais, quant à la certitude de les avoir éliminées complètement, il n'y a pas de démonstration qui puisse la donner; on ne peut obtenir qu'une probabilité qui repose, d'une part, sur l'exactitude des lois hypothétiques adoptées pour représenter ces erreurs, d'autre part sur les chances de compensation des erreurs fortuites.

Il y a donc lieu de considérer ces deux systèmes d'observation comme absolument équivalents, ce qui nous fournira une relation nécessaire entre les divers groupes de résultats obtenus,

$$\frac{1}{2}(V + v) = \frac{1}{2}(U + u).$$

Si cette relation se vérifie jusqu'à une certaine limite d'approximation, on aura par là même, avec une grande probabilité, la limite d'erreur qu'on doit supposer au résultat moyen de toutes les séries.

DEUXIÈME PARTIE.

DESCRIPTION DES EXPÉRIENCES RELATIVES A LA DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE.

Choix des stations.

117. Après avoir essayé entre l'École Polytechnique et le mont Valérien (n° 1) les perfectionnements relatifs à la méthode de la roue dentée, j'avais formé le projet de répéter à grande distance la mesure de la vitesse de la lumière, en choisissant deux stations dans le midi de la France, où l'atmosphère passe pour avoir une transparence parfaite.

Les propositions les plus gracieuses m'avaient été faites, d'abord par M. d'Abbadie, Membre de l'Institut, qui avait bien voulu m'offrir l'hospitalité dans sa propriété, au pied des Pyrénées, dans le but d'opérer entre son château et le phare de Biarritz; il mettait en outre très-obligeamment à ma disposition les ressources de son observatoire particulier pour faciliter le succès de l'opération.

M. Stéphan, Directeur de l'Observatoire de Marseille, et M. Alluard, Directeur de l'Observatoire météorologique du Puy-de-Dôme, à qui j'avais parlé de mon projet, s'empressèrent de m'offrir aussi les moyens d'installation de mes appareils en relation avec quelque colline ou sommet des environs. J'ai été très-touché de ces offres obligeantes, et je prie ces savants de recevoir ici le témoignage de ma gratitude; mais, en réfléchissant aux difficultés à vaincre, je ne crus pas pouvoir accepter leur gracieuse hospitalité. Le principal motif était l'impossibilité de connaître exactement la distance des stations que j'aurais choisies, sans recourir à une opération géodésique spéciale comprenant la mesure d'une base. C'était donc un travail supplémentaire de plusieurs mois à effectuer loin de Paris, où me retiennent mes fonctions et ma famille. Il eût nécessité un personnel nombreux, d'assez grandes dépenses, et, bien que le sujet ne comportât pas l'extrême précision des opérations géodésiques, les résultats de mes mesures n'auraient peut-être pas été acceptés sans réserve.

118. Il m'a donc, presque dès le début, paru nécessaire, pour éviter toute critique sur la distance des stations, d'emprunter cette distance aux réseaux géodésiques des grandes opérations de la méridienne, en choisissant une région où les résultats sont à l'abri de toute contestation. Pour certaines parties des réseaux de triangles, en effet, les mesures ont été répétées à diverses époques par les observateurs les plus habiles, discutées par les savants les plus compétents; de sorte que les incertitudes qui peuvent encore exister sur les éléments calculés sont d'un ordre de grandeur incomparablement plus petit que celui auquel je pouvais raisonnablement aspirer.

Les parties du réseau géodésique des environs de Paris remplissent au plus haut degré toutes ces conditions. Là, grâce au séjour habituel des savants français à Paris, toujours groupés autour de l'Académie, les opérations exécutées à loisir ont été répétées et vérifiées dans les circonstances les plus variées et par les observateurs les plus éminents. Le climat de Paris, il est vrai, est moins favorable à des expériences d'optique que celui du Midi, en ce sens que la transparence parfaite de l'atmosphère y est plus rare; mais les ressources de tout genre et surtout la possibilité pour l'observateur d'attendre, sans préoccupation, les époques favorables, compensent, bien plus que je ne l'avais pensé d'abord, l'influence du climat.

La direction habituelle des vents à Paris, qui est sud, sud-ouest ou ouest, conduit forcément à choisir la partie méridionale de la chaîne géodésique; car les fumées et les brumes de Paris sont entraînées vers le nord à une très-grande distance et limitent l'horizon à quelques kilomètres. Au sud, au contraire, l'ho-

Le rizon est presque toujours clair. Les stations géodésiques les plus voisines dans cette région sont Brie, Montlhéry et Torfou. Dans Paris même, les stations choisies à différentes époques ont été Montmartre, l'Observatoire et le Panthéon. La station de Montmartre, utilisée dans les opérations de 1740, n'est pas acceptable à cause de sa position au nord de Paris, car les faisceaux lumineux auraient à traverser l'atmosphère enfumée de la ville. D'ailleurs le repère auquel il faudrait rapporter la station, à savoir, le signal de Cassini et La Caille, qui était le clocher de l'église de Montmartre, n'existait déjà plus en 1793 (*Base du système métrique*, discours préliminaire, t. 1^{er}, p. 23), ce qui avait forcé Delambre à lui substituer le Panthéon.

Le Panthéon aurait été une fort belle station, mais l'exiguïté de la lanterne (*) et la difficulté de trouver dans une autre partie de la coupole à la fois une altitude et une stabilité suffisantes, est un obstacle sérieux à l'installation d'appareils de grandes dimensions (**).

D'ailleurs, des difficultés d'un autre ordre se présentaient : la hauteur de la coupole au-dessus du sol est très-grande, la fatigue de l'ascension n'est pas à négliger pour l'observateur ; de plus, le Panthéon est actuellement rendu au culte, et la nécessité d'opérer jusqu'à des heures avancées de la nuit aurait été probablement peu compatible avec les exigences ordinaires du service et de la surveillance du monument.

119. L'Observatoire se présentait, au contraire, dans d'excellentes conditions, au point de vue des ressources de toute nature, des heures de travail et de sa situation encore plus au sud de Paris que les deux stations précédentes. Une terrasse dallée en pierres de taille et soutenue par des galeries voûtées couvre tout le bâtiment. Elle est située à une hauteur de 30 mètres au-dessus du sol, ce qui fait environ 90 mètres d'altitude. Du haut de cette terrasse Cassini et La Caille ont fait un nombre considérable de relevements géodésiques ; les stations les plus éloignées qu'ils atteignaient étaient, dans la région du sud, le clocher de Brie et la tour de Montlhéry. Cette tour formait un signal géodésique très-important à cause de

(*) Elle n'a que 4 mètres de diamètre intérieur ; il aurait fallu plus du double de longueur pour y installer seulement la lunette d'émission, qui a 9 mètres de foyer.

(**) Cette station du Panthéon aurait cependant présenté un avantage particulier, celui de permettre d'utiliser à la fois les deux stations de Montlhéry et de Torfou, qui se trouvent presque en ligne droite avec le Panthéon, la première à 24 kilomètres, l'autre à 34. On aurait pu, en déviant légèrement l'axe de la lunette, faire alternativement deux séries de mesures à des distances différentes, ce qui eût fourni d'utiles vérifications.

sa grande distance (23 kilomètres), de sa grande altitude (114 mètres au niveau du sol, 144 mètres au sommet) et de l'élégance de sa forme. Aussi avait-elle servi non-seulement de signal dans le réseau des triangles de la méridienne, mais encore de repère pour la détermination de l'azimut absolu de ce réseau, c'est-à-dire de la direction de la méridienne de l'Observatoire.

J'ai donc été particulièrement heureux d'apprendre que le Conseil de l'Observatoire désirait voir exécuter une détermination directe de la vitesse de la lumière. D'autre part, M. Fizeau m'apprit que le projet d'Arago avait été de le charger d'une semblable détermination entre l'Observatoire et la tour de Montlhéry. Je m'empressai donc d'étudier la question en vue des nouvelles expériences à entreprendre.

120. La situation topographique de la tour de Montlhéry, autant que le nombre et la précision des mesures dont elle a été l'objet, la désignait naturellement comme seconde station pour la détermination projetée. Les autres sommets géodésiques voisins, Brie-Comte-Robert et Torfou, sont d'ailleurs inutilisables. Le clocher de Brie était déjà du temps de Delambre à peine reconnaissable au milieu des bois de toute nature qui couvrent le pays. Le clocher de Torfou n'a jamais été visible de l'Observatoire, car il est entièrement caché par un pli de terrain voisin de Longjumeau.

D'après les documents de la *Méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifiée* (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, année 1740) que j'avais consultés dès qu'il fut question d'installer l'expérience à l'Observatoire, c'est-à-dire au mois de février 1874, j'avais bon espoir de trouver dans la tour de Montlhéry la station la plus favorable, et j'espérais avoir la bonne fortune d'installer mes appareils aux points mêmes où Cassini et La Caille avaient fait leurs observations. Dès que la brume d'hiver fut moins intense, je me mis en devoir de retrouver sur la terrasse le centre de station des observateurs de la méridienne de 1740 et la direction de Montlhéry. J'avais pour me guider le résultat relaté à la page 45 de la *Méridienne vérifiée* :

La tour de Montlhéry décline à l'occident de la méridienne de l'Observatoire de $11^{\circ}58'28''$.

Et plus loin, 3^e Partie, p. lxj :

On peut prendre $11^{\circ}58'28''$ pour la véritable déclinaison occidentale de la tour de Montlhéry, à l'égard du Méridien qui passe au milieu du Parapet de la face méridionale de l'Observatoire, et qui répond à très-peu près au Zénith de la grande Méridienne tracée dans la Salle supérieure.

Quelle ne fut pas ma déception lorsque, après avoir placé un petit théodolite au point indiqué et avoir pointé dans la direction voulue, je tombai sur le milieu

A. 15.

d'une caserne bâtie près des fortifications et se projetant sur le ciel. La grandeur du bâtiment me parut un instant rendre absolument impossible la vue de la tour de Montlhéry du haut de la terrasse de l'Observatoire. Heureusement ce découragement ne fut pas de longue durée, et en me déplaçant jusqu'à l'extrémité orientale de la terrasse, j'aperçus la tour se profiler à l'ouest de la caserne. Un examen plus approfondi me montra que, de l'extrémité orientale de la terrasse et de tous les points de la coupole de l'est, elle est encore mieux visible. Près de la cage d'escalier vitrée, elle apparaît dégagée, dans toute sa hauteur, entre la caserne précitée, qui est affectée aujourd'hui au personnel d'une école de dressage (bastion n° 81) et le manège de l'établissement.

121. Après avoir hésité à installer les appareils dans la grande coupole, qui était alors inutilisée, je me décidai, pour avoir une plus grande stabilité, à faire construire sur la terrasse l'installation figurée sur le plan (*Pl. II, fig. 4*). Je l'ai définie par la condition que la ligne de visée passât par le milieu O de la droite joignant les bords des deux obstacles entre lesquels devait passer le faisceau lumineux. Ces deux obstacles sont l'angle sud-est de la cage vitrée V de l'escalier de communication de la coupole de l'est avec la terrasse et l'angle nord-ouest d'un massif C de cheminées. La droite joignant le point O à la tour de Montlhéry a fixé le plan vertical contenant l'axe optique des appareils. Comme il suffisait à l'observateur de s'élever d'environ 1 mètre au-dessus du niveau du trottoir qui longe le parapet de la terrasse pour apercevoir la tour complètement dégagée, j'ai fixé à 2^m,60 la hauteur du centre de l'objectif de la lunette d'émission au-dessus du niveau du trottoir. Trois piliers de maçonnerie, de 2^m,20, ont été élevés pour soutenir cette lunette et divers autres appareils; enfin une cabane de bois a été construite pour abriter le tout et servir de chambre d'observation.

L'installation n'a présenté aucune difficulté; le détail de la construction des appareils sera donné bientôt. On verra plus loin que cet objectif a 8^m,90 de foyer à partir de la surface extérieure du crown-glass; il en résulte que, dans mes expériences, la position du centre de la station de l'Observatoire est à 8^m,90 en arrière du point O. L'alignement sud-sud-ouest a été prolongé jusqu'au bord intérieur du mur M et la distance OM a été trouvée de 6^m,20.

Pour achever de rattacher la position du foyer optique de la lunette à l'axe du bâtiment de l'Observatoire, il suffit de donner la distance du point M à cet axe. Elle est égale à 6^m,01 + 3^m,60 = 9^m,61 dans l'alignement du bord intérieur du parapet. Si l'on veut le rapporter à l'ancien signal de Cassini et La Caille, il faut remarquer que ce signal était sur le milieu du parapet central, en A, c'est-à-dire de 0^m,86 + $\frac{1}{2}$ 0,56 = 1^m,14 vers le nord sur le méridien ou axe du bâti-

ment. Le signal de Delambre (axe du puits) est de 15 mètres encore plus au nord sur le même axe.

L'autre station a été placée au sommet de la tour de Montlhéry; elle ne renferme comme appareil qu'une lunette munie d'un miroir focal.

J'ai levé le plan de la terrasse et des abords de la tour pour y rapporter la position du collimateur et du miroir; le croquis (*Pl. II, fig. 5*) reproduit ce levé. D'après ces mesures, le miroir du collimateur est de 0^m, 50 plus rapproché de Paris que l'axe de la tour. On y voit aussi la position du signal que Delambre avait fait élever sur un mur en ruine au pied de la tour et qui lui a servi de station dans l'opération de la méridienne de 1792.

DÉTERMINATION DE LA DISTANCE DES STATIONS.

Première marche, d'après les opérations de Cassini et La Caille.

122. La distance de la tour de Montlhéry à l'Observatoire a été déterminée avec beaucoup de soin au siècle dernier, en 1740, lors de la vérification de la méridienne de Picard, de la prolongation méridionale de cette méridienne et de la construction de la carte de France dite de *Cassini*.

D'après les opérations de Cassini de Thury et La Caille, consignées dans l'ouvrage intitulé : *la Méridienne de Paris vérifiée*, on trouve, p. 124, que la distance de Montlhéry à l'Observatoire est de 11 746 $\frac{2}{3}$ toises. Il n'y a aucune incertitude sur les centres de station; pour Montlhéry, c'est l'axe de la tour. En effet, la réduction des angles au centre de la tour est donnée en détail avec deux figures explicatives comme exemple de ce genre de calcul (p. vj et vij, 3^e partie). La position du signal de l'Observatoire est bien définie (p. xxij, 3^e partie) dans le détail des mesures effectuées à l'Observatoire :

Au milieu du parapet de la face méridionale de l'Observatoire, sur la Terrasse supérieure, où l'on a placé un Signal.

Il résulte de cette mention et de l'identité de l'angle observé entre Brie et Montlhéry avec l'angle réduit au centre de station, que le quart de cercle avait son centre précisément au centre de station. A la page lxj, le rédacteur de l'ouvrage et l'auteur de beaucoup de ces mesures (très-probablement La Caille) insiste sur la position de ce signal :

On peut prendre 11°58'28" pour la véritable déclinaison occidentale de la Tour de Montlhéry à l'égard du Méridien qui passe par le milieu du Parapet de la face méridionale de l'Observatoire, et qui répond, à très-peu près, au Zénith de la grande Méridienne tracée dans la Salle supérieure.

J'ai levé avec soin le plan de la terrasse supérieure de l'Observatoire (*Pl. II,*

fig. 4) et celui de la plate-forme de la tour de Montlhéry (*fig. 5*), afin de rapporter à ces deux signaux les *extrémités optiques* de la distance employée à la mesure de la vitesse de la lumière.

A Montlhéry, le miroir du collimateur est d'environ $0^m,50$ plus rapproché de l'Observatoire que l'axe de la tour. A l'Observatoire, le foyer de l'objectif de la lunette d'émission est situé à $8^m,85 + 6^m,20$ (ainsi qu'on l'a vu plus haut, n° 121) de la paroi intérieure du mur méridional. La paroi de ce mur est au sud du milieu du parapet, où était le signal de Cassini, de $0^m,86$ (largeur de l'escalier qui les sépare), plus la demi-épaisseur du parapet $\frac{1}{2} 0,56$. La distance de la méridienne du signal au point où la paroi intérieure du mur rencontre la projection verticale de l'axe de la lunette étant $6^m,01$ (demi-longueur du parapet), plus $3^m,60$, on aura tous les éléments pour déterminer la correction x de la distance donnée par la *Méridienne vérifiée*. En effet, projetons sur la direction de la tour AB, on aura, en appelant α l'azimut de cette tour par rapport à la méridienne ou axe du bâtiment [$\alpha = 11^{\circ}58'28''$ (*voir* n° 120)],

$$x = (6^m,01 + 3,60) \sin \alpha - (0^m,86 + 0,28) \cos \alpha + 8,85 + 6^m,20 = 15^m,93.$$

Ajoutant la correction négative de Montlhéry $- 0^m,50$, il vient, pour la correction définitive. $15^m,43$

Si l'on réduit en mètres les $11746 \frac{2}{3}$ toises (toises de 1740 ou *du Pérou*) d'après la table donnée par Delambre (*Base du système métrique*, t. III, p. 228 et 433), où $1^m = 0^t,513074$, on trouve $22894,70$

Ajoutons, pour mémoire, la correction optique correspondant au retard du passage de la lumière à travers l'épaisseur e des verres des objectifs, retard qui équivaut à un surcroît de chemin mesuré par $e \times (n - 1)$, n étant l'indice de réfraction moyen, $n = 1,55$. Comme la somme des épaisseurs des deux objectifs est de $0^m,12$, la correction ne s'élève qu'à. $0,066$

La somme totale, ou la *distance optique des deux stations*. $22910,196$

L'erreur probable de cette distance est la même que celle de la détermination géodésique; car les mesures complémentaires ne peuvent introduire que quelques centimètres d'incertitude.

Remarques sur l'erreur probable.

123. Sans entrer dans une discussion approfondie des opérations de 1740, on peut rappeler avec quel soin les observateurs mesuraient leurs angles, autant que

possible voisins de 60 degrés, vérifiaient leurs quarts de cercle par l'observation des trois angles des triangles et par des tours d'horizon. L'incertitude des angles atteint rarement 5 secondes. Or 5 secondes d'erreur sur l'angle d'un triangle équilatéral correspondent à une erreur sur le côté opposé, qu'on peut aisément calculer en différentiant la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

ce qui donne

$$ada = + bc \sin A dA,$$

ou, en supposant $A = 60^\circ$, $b = c = a$,

$$\frac{da}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} dA = \frac{5''\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \times 200000} = \frac{\sqrt{3}}{80000} = \frac{1,73}{80000};$$

l'erreur relative maxima est de $\frac{1}{46000}$. L'ordre des erreurs dues à la mesure des angles est entièrement négligeable vis-à-vis de celle qui a pu être commise sur la mesure des bases.

Les triangles voisins de Paris ont été rapportés à la base de *Villejuif-Juvisy* (*Pl. II, fig. 6*, d'après la *Pl. X de la Méridienne vérifiée*) par trois triangles auxiliaires (*Méridienne vérifiée*, p. 38), *Villejuif-Juvisy-Fontenay* — *Juvisy-Fontenay-Monthéry* — *Brie-Monthéry-Fontenay*. Le côté *Brie-Monthéry* est le côté du triangle *Observatoire-Brie-Monthéry* dont nous avons emprunté le côté *Monthéry-Observatoire*. Le raccordement est donc très-direct avec la base de *Villejuif-Juvisy*.

Le détail des angles et le calcul des côtés en toises se trouvent p. 124. Les observations originales sont consignées p. xxij et suiv., 3^e Partie.

L'Observatoire.....	63° 1' 2"	} Brie.....	39° 18' 44"	
<i>Brie-Comte-Robert</i>	52.59.42		} <i>Monthéry</i>	74.23.36
Tour de <i>Monthéry</i>	62.59.16			Moulin de <i>Fontenay-aux-Roses</i> ..
De l'Observatoire à <i>Monthéry</i> ..	11745 $\frac{1}{3}$ S.-O.		De <i>Brie</i> au moulin de <i>Fontenay</i> ..	13788 $\frac{1}{2}$ N.-O.
De <i>Brie</i> à <i>Monthéry</i>	13108 $\frac{1}{2}$ S.-O.	De <i>Monthéry</i> au moulin de <i>Fontenay</i>	9070 N.-O.	
<i>Monthéry</i>	44° 59' 54"	} Moulin de <i>Fontenay</i>	61° 39' 1"	
Moulin de <i>Fontenay</i>	34.18.37		Signal de <i>Juvisy</i>	30.32.9
Signal de <i>Juvisy</i>	100.41.29		Pyramide de <i>Villejuif</i>	87.48.50
De <i>Monthéry</i> au signal de <i>Juvisy</i>	5203 $\frac{1}{2}$ N.-E.		Du moulin de <i>Fontenay</i> à la pyramide de <i>Villejuif</i>	3818 $\frac{1}{2}$ N.-E.
Du moulin de <i>Fontenay</i> au signal de <i>Juvisy</i>	6526 $\frac{2}{3}$ S.-E.		Du signal de <i>Juvisy</i> à la pyramide de <i>Villejuif</i> (base mesurée)..	5748 N.-O.

Quant à la mesure de cette base, elle a été répétée

« Cinq fois de suite aux mois de juin, juillet et août 1740 (*), et l'on trouva la distance des deux termes qu'on avait pris (*Méridienne vérifiée*, p. 35) :

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
Par la première mesure, de . . .	5728	3	0	6
Par la deuxième, de	5728	4	4	9
Par la troisième, de	5728	3	8	10
Par la quatrième, de	5728	4	9	10
Par la cinquième, de	5728	4	4	0

La température fut observée pendant les mesures, et l'on fit la correction nécessaire : « Nous avons reconnu par quelques expériences qu'il fallait ajouter environ 2 pieds à la grandeur moyenne de la base; en conséquence nous la conclûmes alors de 5729 toises.

» On doit construire une pyramide à la place de l'arbre qui a servi de terme méridional; on en a bâti une, en 1742, à 18^t 5^{pi} 8^{po} au delà du piquet qui servait de terme septentrional, ce qui fait que nous avons supposé la base entière de 5748 toises juste (p. 36). »

124. D'après Delambre, qui a discuté les résultats de la *Méridienne vérifiée*, (*Base du système métrique*, t. III, p. 146 et suivantes) l'exactitude des mesures voisines de la base de Villejuif-Juvisy serait très-remarquable; la différence des nombres de 1740 et des siens relatifs aux mêmes points géodésiques, par exemple Malvoisine et Brie, n'est que de 0^{toises},6 sur 12374; ceux de la méridienne de 1740 seraient un peu trop forts : il les explique par une petite erreur en excès sur l'évaluation de la base de Villejuif-Juvisy (t. III, p. 505).

Mais, d'autre part, Delambre remarque une petite cause d'erreur possible qui se trouve justement agir ici en sens inverse; c'est dans la mesure du triangle Observatoire-Brie-Montlhéry.

En 1740, on a visé au milieu de la tour; mais cette tour est accompagnée d'une tourelle dans laquelle était l'escalier, et cette tourelle, qui, placée du côté de Paris, est difficile à distinguer de la tour principale, fait que le centre apparent, vu de Paris, est à droite du centre véritable (t. I, p. 127-128.)

(*) En 1756, deux Commissions académiques composées, l'une de Godin, Clairaut, Lemonnier et La Caille; l'autre de Bouguer, Camus, Cassini de Thury et Pingré, répétèrent la mesure de la base de Juvisy (*Base du système métrique*, t. III, p. 505). Le résultat a été le suivant (en ajoutant 31^t 1^{pi} 2^{po} 0^l pour la réduction de la nouvelle pyramide à l'arbre choisi en 1740 comme terme méridional de la base) :

Lemonnier	5746 ^t .5 ^{pi} .11 ^{po} .0 ^l
Bouguer	5747.7.0.0
La Caille	5746.7.1.3
Moyenne	5747.1.1.0

Cette apparence aurait donc dû diminuer la distance de l'Observatoire de Montlhéry de la demi-saillie de la tourelle, soit 1^m, 10 à 1^m, 20, c'est-à-dire d'environ 0^{toise},6. Ainsi les deux causes d'erreur se compenseraient sensiblement, de sorte que le nombre déduit des documents de la *Méridienne vérifiée* est probablement exact à moins de 1 mètre sur 22910, approximation bien suffisante pour nos expériences.

Deuxième marche, d'après les opérations de Delambre (1792) et quelques mesures nouvelles.

125. Malgré toutes les garanties que présentent les opérations de 1740 et la certitude d'avoir rapporté mes stations à celles de Cassini et La Caille, j'ai voulu contrôler la valeur de leur distance en prenant pour données fondamentales celles de la *Base du système métrique* de Delambre et Méchain. La comparaison faite par Delambre de ses observations avec celles de 1740 (t. III, p. 141 et 482) m'assurait par avance, ainsi qu'on vient de le voir, de l'identité presque complète des résultats; mais elle me fournissait un moyen précieux d'éviter toute erreur matérielle dans les réductions.

J'aurais voulu n'emprunter que des observations faites par Delambre ou ses collaborateurs; mais, malheureusement, l'Observatoire n'a pas été relié directement au réseau des triangles de la nouvelle méridienne (t. II, p. 414 et suivantes) : j'ai donc été obligé d'exécuter quelques mesures auxiliaires pour opérer ce raccordement.

J'ai adopté comme base d'opération le côté Panthéon-Montlhéry de la *Base du système métrique*. La station du Panthéon est l'axe même de la lanterne.

Nous avons pris pour point de mire la calotte de la lanterne qui terminait alors le dôme du Panthéon (t. I^{er}, p. 104).

Mais celle de Montlhéry n'est pas l'axe de la tour.

... J'ai placé un signal sur le mur qui joint la tour. Ce signal est une pyramide tronquée, dont l'axe est à quelques pouces en avant du mur, à la distance de 3 toises de l'angle curviligne formé par le mur de la tour (t. I, p. 128).

Ce signal n'existe plus, mais j'ai retrouvé les vestiges de ses scellements à la distance indiquée. Il n'y a pas d'incertitude sur le mur dont il est question; c'est celui qui est dirigé vers Brie-Comte-Robert; car, à la page 109 du *Discours préliminaire* (t. I^{er}), Delambre dit :

Le signal de Montlhéry, vu de Brie, se projetait sur la tour. J'ai blanchi le signal et noirci la tour, sans quoi l'observation était impossible.

Depuis, comme confirmation, j'ai retrouvé dans les manuscrits de Delambre, conservés à la bibliothèque de l'Observatoire (t. I^{er}, p. 79), un croquis complet comprenant le plan de la tour, du mur, du signal et des points où étaient posés les cercles répéteurs dans les observations faites par lui et par Le Français-Lalande. L'incertitude qui peut rester sur la position du signal de Montlhéry ne s'élève pas à 0^m,50.

Dans le croquis (*Pl. II, fig. 12*), je restitue la perspective de la tour et du signal vu du Panthéon.

Dans le tome II, p. 813, on trouve, pour la *distance vraie des signaux Panthéon-Montlhéry*, 12371^{toises},112 (voir l'explication du tableau, p. 702), ou en mètres, en divisant par 0,513074, 24111^m,76.

D'après le plan que j'ai levé (*Pl. II, fig. 5*), le signal de Delambre devait être plus près du Panthéon de 3^m,50 environ que l'axe de la tour de Montlhéry; l'influence de l'incertitude de 0^m,50 sur la position du signal est presque nulle, car le mur où il était placé est presque perpendiculaire à la direction de la tour au Panthéon. Il en résulte, pour la distance du Panthéon à l'axe de la tour, le nombre 24115^m,36.

126. Pour déduire de ce résultat la distance de mes deux stations, j'ai observé deux angles du triangle *Panthéon-Montlhéry-Observatoire* à l'aide d'un petit théodolite de Rigaud à lunette centrale, donnant directement les 10 secondes et permettant d'estimer les 5 secondes.

Le premier de ces angles a été observé en plaçant l'axe du théodolite au foyer même de la lunette d'émission dont l'objectif était enlevé. On pouvait ainsi viser exactement l'axe de la tour de Montlhéry, dont la partie supérieure est bien cylindrique, et, d'autre part, par une ouverture percée dans la paroi de la cabane, viser la pointe du paratonnerre placé sur la croix qui surmonte la lanterne du Panthéon : l'angle azimutal a été trouvé (*) de 159° 17' 38"; il ne comporte aucune correction, puisque l'instrument était placé au centre de station.

D'autre part, avec le même théodolite, j'ai observé, du haut de la lanterne du Panthéon, l'angle horizontal formé par l'axe de la tour de Montlhéry et le centre de l'ouverture faite dans la paroi de la cabane pour laisser voir la lanterne du Panthéon. Un carton blanc portant deux lignes noires rectangulaires cloué extérieurement fixait la direction à moins de 1 centimètre près; le réglage en

(*) Cercle vertical à gauche 159. 17. 33" Cercle à droite 159. 17. 35"
Réitération à 90° de distance. 159. 17. 37 Réitération à 90° de distance. 159. 17. 40

avait été fait en dirigeant la lunette du théodolite sur la lanterne du Panthéon et en observant à l'anneau oculaire deux ficelles en croix prolongeant les traits sur l'ouverture. L'angle réduit à l'axe de la lanterne (*) est de $19^{\circ}37'40''$.

Connaissant dès lors un côté et deux angles, on peut calculer les deux autres côtés; on trouve, pour la distance du foyer de la lunette de l'Observatoire à l'axe de la tour de Montlhéry, $22909^m,77$.

Il faut en retrancher $0^m,50$ pour avoir la distance au miroir du collimateur à réflexion de la tour, et ajouter $0^m,07$ pour l'excès du chemin optique à travers les objectifs, ce qui donne, pour la distance définitive, $22909^m,34$. La première marche avait donné $22910^m,20$; la moyenne est $22909^m,77$.

Ainsi, en suivant deux voies complètement indépendantes, nous trouvons que la distance optique des deux stations est en nombre rond 22910 mètres, l'une donnant $0^m,66$ en moins, l'autre $0^m,20$ en plus, approximation supérieure à celle qui est nécessaire à nos expériences et supérieure même aux erreurs auxquelles on doit s'attendre dans de semblables opérations. J'adopterai donc

$$D = 22910^m$$

pour la valeur de la distance de mes stations dans les calculs.

Description et installation des appareils.

127. Dans la première Partie du Mémoire, le principe de la méthode, le mode d'observation et l'usage de l'enregistrement électrique ayant été exposés et discutés en détail, il suffira de décrire les appareils en les classant suivant la nature de leurs fonctions.

- Appareils optiques* pour la production de la lumière de retour.
- » *mécaniques* pour la production du mouvement de la roue dentée.
- » *enregistreurs* pour la mesure de la vitesse du mécanisme.

(*) Voici les éléments de la réduction (voir *Pl. II, fig. 3*):

Distance de l'axe du théodolite à l'axe du Panthéon, $1^m,67$.

Azimut du centre de la station	182.50' 00"
» de la station del'Observatoire	380. 2.35
» de la tour de Montlhéry	360.23.33

La correction est de $-1'21''$ sur l'angle observé $19^{\circ}38'59''$ $\left\{ \begin{array}{l} 19.39.00 \\ 38.52 \end{array} \right\}$ C. .G
 qui est la moyenne des quatre angles. . . $\left\{ \begin{array}{l} 19.39. 3 \\ 39. 2 \end{array} \right\}$ C. D.

APPAREILS OPTIQUES.

Lunette d'émission.

128. La lunette d'émission est formée par un objectif de 0^m,38 d'ouverture libre (14 pouces) et de 8^m,90 de distance focale (*). Le corps de la lunette, en bois très-épais et d'un poids considérable (environ 250 kilogrammes), est posé horizontalement sur deux piliers de maçonnerie, ce qui assure à l'axe optique de l'appareil une stabilité parfaite. Les images terrestres, examinées sous un grossissement de 80 à 100 fois environ, dans des circonstances atmosphériques convenables, sont très-belles. Ainsi, au coucher du soleil, lors de l'accalmie bien connue des géodésiens et des astronomes, on distinguait les détails du petit mur en briques, décrit au n^o 133, placé sur le sommet de la tour de Montlhéry. On apercevait très-distinctement chaque brique posée à plat et souvent même quelques détails sur l'épaisseur de chacune d'elles; or l'épaisseur d'une brique de 6 centimètres, à 23 kilomètres, correspond à un angle d'une demi-seconde : cette épreuve donne la mesure de la perfection de la lunette.

De nuit le point lumineux de retour était net sans être rigoureusement circulaire; quelques petites bavures, d'ailleurs très-pâles, n'apparaissent que lorsque l'intensité lumineuse est considérable; elles n'ont jamais été visibles pendant les observations à travers la zone dentée en rotation. Dans ces circonstances, l'image de retour a toujours affecté la forme d'un point sans dimensions appréciables et sans aucune apparence de dissymétrie. C'est là l'épreuve la plus directe, la seule nécessaire et suffisante pour s'assurer qu'on est placé dans les conditions théoriques.

Pour compléter ce qui concerne la lunette d'émission, il reste à dire comment, malgré son poids, on parvient à rectifier à volonté la direction de l'axe optique. Elle repose sur les deux piliers en maçonnerie BC (*Pl. II, fig. 7*) par l'intermédiaire de deux pièces de fonte coulées dans le même moule (*fig. 8 et 9*); l'une, C', posée sur le pilier C, située à 3 mètres de l'objectif, embrasse la moi-

(*) Cet objectif, acheté vers 1846 par le Bureau des Longitudes, avait été travaillé par la maison Lerebours et Secrétan; il passait alors pour le plus puissant objectif connu. La surface antérieure du crown-glass s'altéra, ce qui le fit rejeter pendant de longues années, même après l'installation de la grande coupole de l'est et de la monture parallactique construite par Brunner. A l'occasion de ces expériences, la surface altérée fut de nouveau travaillée par la maison Secrétan et l'objectif remis dans un état très-satisfaisant.

tié de la circonférence du corps de la lunette, comme le ferait un coussinet pour un arbre de couche; une bande de feutre répartit la pression d'une manière plus régulière et laisse un peu de mobilité à l'axe de la lunette.

L'autre pièce B', située sur le pilier B, à 2 mètres de l'oculaire, soutient la partie étroite du tube de la lunette à l'aide d'une vis de calage en hauteur v et de deux vis de calage latéral v' , v'' . Un anneau de bronze enveloppe le tube et le protège contre la pression de ces vis. Grâce à cette disposition, la lunette se manœuvre très-aisément malgré son poids; elle pivote légèrement sur son coussinet de feutre et se règle avec les trois vis.

129. Ces réglages sont plus fréquents qu'on ne pourrait le supposer. La réfraction de l'atmosphère varie, en effet, d'une manière notable suivant la température et la pression; or, comme la lunette, vu sa grande distance focale et la petite dimension de ses oculaires, possède un champ très-étroit (3 à 4 minutes d'angle), il arrive que l'image de la station opposée peut se déplacer presque jusqu'à sortir du champ dans le sens vertical.

Il est nécessaire de tenir compte de ce déplacement lorsqu'on règle l'appareil de jour pour observer la nuit; faute d'avoir songé à ce phénomène, j'ai éprouvé au début quelques mécomptes. Après avoir soigneusement réglé la lunette vers 3 heures de l'après-midi et vérifié le bon fonctionnement du collimateur par l'éclat onduleux mais bien visible du point brillant de retour produit avec la lumière solaire, je revenais le soir, à la nuit close, sans pouvoir reproduire le phénomène de retour lumineux. Les premières fois que j'éprouvai ces déceptions, je les attribuai à une brume superficielle et je perdis ainsi plusieurs belles soirées de juin et de juillet. Enfin, un soir, ayant la certitude, d'après le coucher de la lune à l'horizon, que l'atmosphère était parfaitement transparente et éprouvant encore le même mécompte, j'eus l'idée de relever l'axe de la lunette dans le plan vertical d'environ 1 minute à 2 minutes, et la lumière de retour apparut de nouveau.

Oculaire et éclaireur.

130. Au foyer de la lunette se trouvent placés sur une même pièce, portés par un coulant, l'oculaire et l'éclaireur. La *fig. 1, Pl. III*, donne une perspective de cette pièce portée à l'extrémité de la lunette, dans la position qu'elle occupe relativement au mécanisme de la roue dentée figuré au-dessous. La *fig. 2* représente la projection horizontale de l'oculaire et de l'éclaireur. L'oculaire O est une simple lentille achromatique de 80 millimètres de foyer ou un double

verre à faibles courbures ; le premier donne un grossissement d'environ 100 fois, le second de 70 fois environ : l'un ou l'autre se montent à frottement, suivant l'axe AA' de la lunette.

Latéralement est fixé l'éclaireur, dont l'axe optique EM (*fig. 2*) est perpendiculaire à l'axe optique AA' de la lunette et situé dans le même plan. Il se compose d'une lentille achromatique D de 40 millimètres de foyer, porté par un tube. Au double de sa distance focale est une petite pièce, mobile dans son plan par deux vis rectangulaires FF, qui porte un diaphragme percé en son centre d'un petit trou circulaire d'environ 1^{mm},5 de diamètre. Une lentille collectrice G, également achromatique, produit dans le plan du diaphragme une image renversée de la source lumineuse. On projette sur l'ouverture libre du diaphragme la partie de l'image la plus convenable, soit comme intensité, soit comme égalité d'éclat.

L'image conjuguée de l'ouverture de ce diaphragme vient se former en B au double de la distance focale de l'objectif D. Sur son trajet le faisceau convergent est reçu sur une lame réfléchissante à 45 degrés M, qui en renvoie une partie, suivant l'axe de la lunette, en un foyer B. Le système éclaireur GFD tout entier étant mobile à l'aide d'une crémaillère C, on peut toujours amener l'image du plan B' à coïncider exactement avec le plan focal de la grande lunette où se trouve la roue dentée B'B''.

131. La lame réfléchissante M, portée sur une monture qui permet tous les réglages (*fig. 3*), est en réalité formée, ainsi que l'a imaginé M. Fizeau, de deux petites lames de verre de microscope d'environ $\frac{1}{10}$ de millimètre d'épaisseur. On les choisit individuellement aussi planes que possible, en observant les images d'un objet à contours nets, bien éclairés (comme les barreaux d'une fenêtre), réfléchies successivement sur l'une et l'autre face. Lorsque les lames sont courbes, l'une des faces agit comme un miroir légèrement convexe, grossit et estompe les contours de l'objet ; l'autre comme un miroir concave et rapetisse ces contours en les rendant plus nets. Si donc les images réfléchies paraissent identiques sur les deux faces, c'est que la lame est suffisamment plane. On place les deux lames ainsi choisies en contact immédiat en les pressant avec deux petites bandes de papier gommé. On doit apercevoir en quelques points des anneaux colorés qui témoignent de la faible épaisseur de la lame d'air interposée. On doit encore vérifier que les quatre images réfléchies provenant des quatre surfaces coïncident sensiblement, sans quoi les surfaces ne seraient pas suffisamment parallèles.

Calcul du maximum d'effet de la lame réfléchissante.

132. Cette double lame permet d'obtenir, pour la lumière de retour, un éclat supérieur à celui qu'on obtiendrait avec une seule lame. C'est que, en effet, cette lame joue un double rôle, et des rôles contradictoires. Comme lame réfléchissante, elle doit renvoyer dans l'axe de la lunette la plus grande proportion possible, c'est-à-dire posséder un pouvoir réfléchissant aussi grand que possible. D'autre part, comme elle laisse passer la lumière de retour, elle doit en perdre le moins possible par réflexion : ces deux conditions sont donc réellement contradictoires. Un calcul très-simple montre que, pour produire l'effet utile maximum, son pouvoir réfléchissant doit être égal à $\frac{1}{2}$. En effet, soit Q la quantité de lumière émise, p le pouvoir réfléchissant de la lame simple ou composée; Qp sera la quantité réfléchie. Au retour, cette quantité, affaiblie par diverses causes, devient kQp ; elle traverse la lame, et ce qui passe est évidemment $kQp(1-p)$. L'effet utile de la lame est de rendre ce produit aussi grand que possible; on le rendra maximum en rendant maximum le produit $p(1-p)$ de ces deux facteurs, dont la somme est constante, ce qui a lieu, lorsque ces deux facteurs sont égaux, $p = 1-p$ ou $p = \frac{1}{2}$; dès lors $p(p-1) = \frac{1}{4} = 0,250$.

Une seule lame de verre (crown-glass), sous l'incidence de 45 degrés, réfléchit environ 0,08 de la lumière incidente : $p(p-1) = 0,074$. La double lame, ainsi que je l'ai mesurée directement, réfléchit 0,16, d'où $p(p-1) = 0,136$: il y a donc avantage à l'employer. Toutefois cette disposition ne donne guère que la moitié du maximum 0,250 : on l'obtiendrait avec trois lames superposées; mais on tomberait dans des inconvénients secondaires que ne compenserait pas l'accroissement d'intensité.

Parmi ces inconvénients on peut citer la diffusion de la lumière causée par le défaut de transparence des glaces et l'imperfection inévitable de leur poli. Cette diffusion, insensible dans les circonstances ordinaires, devient très-appreciable sous l'influence de la vive lumière qu'on est obligé d'employer; elle a pour effet d'éclairer le champ de vision et de diminuer, par contraste, l'éclat de la lumière de retour. On n'a donc pas intérêt à augmenter le nombre des lames au delà d'une certaine limite, et l'expérience prouve que la double lame donne le meilleur effet.

Collimateur à réflexion.

133. Le collimateur à réflexion de la station opposée est une lunette de 0^m,15 d'ouverture et de 2 mètres environ de distance focale. C'est une ancienne lunette de Lerebours et Secrétan; elle passe pour bonne à l'Observatoire. Le miroir placé au foyer de cet objectif est celui que M. Fizeau avait fait construire lorsqu'il préparait un projet d'expérience avec Arago.

Il s'est présenté une difficulté spéciale qui n'a pas été sans me donner beaucoup de travail. Il fallait soustraire la lunette ou collimateur à réflexion à la curiosité des visiteurs, qui, les jours de fête, montent par centaines pour contempler le magnifique panorama qui se déroule du haut de la terrasse de la tour.

Après bien des projets d'installation à divers étages de la tour, je me suis arrêté à la solution suivante. La lunette fut placée dans un tube en fonte AB (*Pl. II, fig. 5*) de 3 mètres de longueur, de 0^m,20 de diamètre intérieur (semblable à ceux qui servent pour les conduites d'eau ou de gaz), et scellé sur la dernière assise horizontale du haut de la muraille.

Une double couronne de trois vis vissée dans l'épaisseur du tube, dont les têtes carrées affleurent sa surface extérieure, soutient intérieurement la lunette et permet d'achever le réglage de son axe dans la direction convenable. Une plaque épaisse de tôle, mobile à charnière et fixée par un cadenas, ferme l'entrée du tube en A du côté de l'oculaire et du miroir. On ouvre cette porte pour régler le miroir; puis, le réglage opéré, on la referme hermétiquement. L'extrémité B du tube de fonte est en surplomb dans l'espace pour empêcher qu'on puisse, de la plate-forme et du haut de l'escalier de la tourelle, apercevoir l'objectif. Un petit mur en briques formant parapet, CD, achève de protéger l'ouverture libre contre les projectiles que les visiteurs pourraient s'aviser d'y lancer. Comme la lunette n'a guère que 2^m,20 de longueur, l'objectif se trouve à près de 0^m,80 de l'ouverture libre du tube et n'a rien à craindre de la pluie, de la neige ou de la poussière.

Malgré ces précautions, j'ai eu à souffrir deux fois des effets de la curiosité turbulente des visiteurs. Une fois, la porte a été forcée et le miroir arraché; aucune pièce, toutefois, n'a été dérobée. Cet accident m'a fait perdre, malheureusement, plusieurs belles soirées du mois d'août et m'a forcé de recommencer le réglage. Une autre fois, deux des boulons de réglage, dont la tête avait pourtant été cachée par une couche de ciment, ont été dévissés; prévenu heureusement à temps, j'ai pu réparer l'accident sans difficulté.

Miroir focal.

134. Le miroir focal est formé par une glace argentée, montée dans un anneau à vis qui permet de faire butter la surface antérieure non argentée sur une portée métallique. Pour mettre la surface réfléchissante exactement au foyer de l'objectif, on substitue à ce miroir une lame de glace exactement de même épaisseur, taillée dans un même morceau de glace à faces parallèles, qui peut butter sur la même portée. La face correspondant à l'argenteure de l'autre lame porte un réticule tracé au diamant. Avec un oculaire convenablement ajusté en arrière, on vise le réticule qu'on met bien au point. A l'aide du tirage de la lunette, on amène l'image focale en coïncidence avec le plan du réticule. Une petite graduation auxiliaire tracée sur le tirage permet de se rendre compte de la précision du pointé et de prendre la position moyenne. Quand cette opération a été faite avec soin, on dévisse la lame transparente et l'on y substitue le miroir : on est assuré que la surface réfléchissante est exactement réglée (*).

(*) M. Fizeau ayant bien voulu me confier cette pièce, je n'ai pas eu besoin d'en faire construire une nouvelle. Je rappellerai toutefois le dispositif très-simple qui m'a réussi au collimateur du mont Valérien (n° 1) :

« Le miroir est un petit disque de glace à faces parallèles, dont l'une des faces a été argentée : toutefois, elle fonctionne comme si elle était étamée, c'est-à-dire qu'on utilise la surface intérieure dont le brillant se conserve plus longtemps. Ce disque est fixé sur le diaphragme focal ; mais, avant de l'y fixer, on enlève avec le tracelet d'une machine à diviser la moitié de l'argenteure de la glace. On prend pour tracelet une pointe de fer doux, de façon à enlever la couche argentée sans risquer de rayer la glace, mais on laisse à dessein quelques filets adhérents qui vont jouer dans le réglage le rôle de réticules placés rigoureusement dans le plan réfléchissant.

» On place ensuite l'oculaire dans sa position normale, définie par la condition de voir nettement les filets d'argenteure laissés par le tracelet, puis on règle le tirage de façon à apercevoir avec netteté la fenêtre de la première station dans la moitié libre du champ. Il est évident, si l'oculaire est puissant, qu'on peut amener avec une extrême précision l'image focale à coïncider avec le plan des filets d'argenteure, c'est-à-dire avec le plan de la surface réfléchissante. Il suffit alors d'un très-petit déplacement angulaire latéral pour faire tomber sur la partie argentée le foyer de la fenêtre de la première station. Deux vis horizontales, destinées au réglage en azimut, permettent ce petit déplacement. »

Je ferai remarquer que la limite de l'argenteure doit former une ligne verticale, afin que les déplacements de l'image focale dus aux variations de la réfraction ne risquent pas de faire sortir l'image du champ argenté ; la plus grande variation ayant lieu dans le sens vertical, on est assuré de conserver toujours un bon réglage.

Si l'on voulait sacrifier un peu de la simplicité du dispositif pour obtenir à la fois une plus grande facilité de mise au point et une plus grande sécurité, je conseillerais de faire glisser cette glace dans son plan comme si elle était mobile à coulisse, afin de pouvoir à volonté rendre ce plan focal transparent ou réfléchissant ; c'est ce que je comptais faire exécuter si je n'avais trouvé un appareil tout prêt.

Mode de réglage employé.

135. Le réglage a été opéré en dirigeant d'abord l'axe du collimateur fonctionnant comme la lunette sur l'Observatoire. On distingue très-bien les trois coupoles et la petite cabane renfermant la lunette d'émission. Pour donner une plus grande précision à ce réglage, j'ai cherché à rendre aussi visible que possible le contour même de l'objectif de la station opposée. A cet effet, la flamme d'une lampe à pétrole, allumée à des heures convenues, a été placée dans le plan de l'anneau oculaire de la lunette de l'Observatoire, un jour où le temps était couvert, pluvieux par instants, mais où l'atmosphère était très-pure. Toute la surface de l'objectif apparaissait illuminée, et ce fut sur ce disque brillant, semblable à celui d'une planète, que j'ai réglé le tirage du collimateur.

Je dois dire que le réglage, opéré ainsi d'une façon rigoureuse, a coïncidé exactement avec celui que j'avais employé d'abord et provisoirement, et qui consistait à mettre au point les objets environnant la station opposée, c'est-à-dire les coupoles et les détails visibles de la terrasse.

APPAREILS MÉCANIQUES POUR LA MISE EN ROTATION RAPIDE DE LA ROUE DENTÉE.

Conditions à remplir.

136. Les conditions auxquelles je me suis efforcé de satisfaire dans la construction de ce mécanisme sont les suivantes :

1° Obtenir une vitesse de rotation de la roue dentée permettant d'atteindre un nombre élevé dans l'ordre des extinctions, afin de se ménager une série étendue de valeurs de la vitesse de la lumière : ces séries, groupées par numéros d'ordre d'extinction, peuvent être discutées d'une manière indépendante.

2° Obtenir ce résultat avec la force motrice la plus petite possible, afin que l'observateur puisse seul et sans fatigue suffire à la mise en action du moteur.

3° Se ménager les moyens de varier toutes les circonstances du mouvement, c'est-à-dire la force motrice, la vitesse, le sens de la rotation, la grandeur des roues, le nombre des dents, etc.

Je fis d'abord une étude préliminaire des appareils employés antérieurement en Physique pour obtenir des mouvements très-rapides. L'appareil le plus parfait en ce genre paraît être celui d'Arago, construit par M. Bréguet pour répéter les expériences du miroir tournant. Cet appareil, conservé dans les collections de

l'Observatoire, peut imprimer au petit miroir d'acier poli qui constitue le dernier mobile une vitesse de 2000 tours par seconde. Je me suis donc naturellement adressé à M. Bréguet pour la construction de mes appareils. M. Bréguet voulut bien me montrer et me confier les appareils d'essai qu'il avait autrefois construits pour arriver à l'instrument définitif. Je pus ainsi exécuter diverses expériences relatives à la recherche des meilleures dispositions à donner au nouveau mécanisme. Pendant toute la durée de ces travaux, M. Bréguet n'a cessé d'y prendre le plus vif intérêt : je le prie de recevoir ici le témoignage de ma gratitude.

Résumé des expériences préliminaires relatives à la détermination des dimensions les plus favorables de la roue dentée.

137. Il serait beaucoup trop long de rapporter les divers essais qui m'ont permis de fixer les dimensions principales et la force motrice du mécanisme de la roue dentée; je me contenterai d'indiquer en quelques mots le résultat le plus curieux et le plus utile : c'est la loi relative à l'influence du diamètre des disques sur leur vitesse de rotation. J'ai déjà annoncé au n° 18 qu'en augmentant le diamètre des disques à mettre en rotation par un mécanisme donné, on diminue, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse angulaire de rotation, mais que le produit de cette vitesse angulaire par le diamètre de la roue, quantité proportionnelle à *la vitesse à la circonférence*, passe par un maximum. C'est ce maximum qui fixe le diamètre des disques à employer pour le mécanisme qu'on adopte. On arrive à l'équation de condition cherchée en écrivant que la vitesse limite ω du disque est atteinte lorsque la somme des moments des forces agissant sur le disque est nulle. Ces forces sont de trois espèces :

1° La force motrice appliquée au premier mobile : son moment M est réduit sur le dernier mobile, qui est le disque denté et qui tourne α fois plus vite, dans le rapport de α à l'unité.

2° La résistance de l'air qu'on peut supposer, comme dans le cas des mouvements très-rapides, proportionnelle au carré de la vitesse de l'élément de surface $r d\theta dr$ et à un coefficient particulier τ mesurant l'effort tangentiel exercé par l'air sur l'unité de surface animée d'une vitesse égale à l'unité. Le moment élémentaire de cette résistance a pour expression $r d\theta dr \times \tau \omega^2 r^2 \times r$: l'intégrale étendue aux deux faces du disque donne le moment total.

3° Les résistances passives du moteur, en particulier celles qui se développent dans le mouvement des mobiles en rotation rapide, comme les chocs des dents d'engrenage, les ballottements d'axes, etc. Ces résistances croissant rapi-

dement avec la vitesse, on peut admettre que leur moment croît comme le carré de cette vitesse et représenter leur ensemble par un terme $\Lambda \omega^2$: Λ est un coefficient qui sera évidemment d'autant plus grand que les pièces en mouvement seront plus massives. L'équation de condition est donc

$$\frac{M}{\alpha} - 2\tau\omega^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r^4 dr - \Lambda \omega^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = \frac{\left(\frac{M}{\alpha}\right)}{\Lambda + \frac{4}{5}\pi\tau r^5}.$$

J'ai constaté, par une série de mesures précises, dont le détail entrainerait trop loin, que cette formule est très-sensiblement vérifiée par l'expérience (*): elle a donc, pour le moins, la valeur d'une bonne formule empirique.

138. On voit, en discutant cette formule, que la vitesse ω diminue rapidement avec le rayon du disque denté. La valeur de r , qui donne le maximum de $\omega^2 r^2$, annule la dérivée de cette expression prise par rapport à r ,

$$r \left(r^5 - \frac{5\Lambda}{6\pi\tau} \right) = 0, \quad \text{d'où} \quad r_0 = 0, \quad r_1 = \sqrt[5]{\frac{5\Lambda}{6\pi\tau}}.$$

La valeur $r_0 = 0$ correspond à l'absence de disque; la valeur r_1 est la seule utile. Les vitesses correspondantes des disques de rayon r_0 et r_1 sont

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M}{\Lambda\alpha}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{5M}{3\Lambda\alpha}}.$$

La valeur r_1 de r , qui donne le maximum de ωr , montre que le rayon cherché est indépendant de la valeur du couple moteur, résultat curieux et important; toutefois ce rayon r_1 , le plus convenable, varie peu avec le coefficient Λ , c'est-

(*) Voici, comme exemple, une série obtenue avec un mécanisme pour lequel on avait $M = 1500^{\text{gr}} \times 0^{\text{m}},06$, $\alpha = 500$; les nombres de tours par seconde m du dernier mobile étaient enregistrés électriquement. Les disques, au nombre de dix, avaient été taillés dans une même feuille de carton bristol.

$r =$	$0,11$	$0,10$	$0,09$	$0,08$	$0,07$	$0,06$	$0,05$	$0,04$	$0,03$	$0,02$
m obs. =	12,1	14,7	17,2	22,9	32,3	44,7	75,1	117,8	164,0	182,0
m cal. =	10,6	13,4	17,4	23,3	32,3	46,7	70,5	108,5	154,7	182,0

Les coefficients de la formule précédente, mise sous la forme $m^2 = m_0^2 (1 + \gamma r^5)$, sont $\log m_0 = 2,31715$, $\log \gamma = 7,39385$. Le coefficient τ , un peu variable avec les divers appareils suivant la distance des disques aux pièces fixes, est d'environ 0,5 en valeur absolue (unités : mètre, gramme, seconde).

à-dire avec l'inertie du rouage, à cause de la grandeur de l'indice 5 de la racine ; de sorte que des moteurs de construction analogue conduiront, malgré leur différence de masse, à des dimensions très-voisines pour r_1 .

C'est ce que j'ai bientôt reconnu par expérience et ce qui m'a conduit à adopter, pour la roue dentée de l'appareil définitif, les dimensions des disques employés dans les appareils qui m'avaient servi aux études préliminaires.

Le moteur d'un appareil construit par Froment, et appartenant au cabinet de physique de l'École Polytechnique, m'avait donné 40 millimètres pour le rayon r_1 ; ce moteur est très-massif. Le mécanisme du miroir tournant de Bréguet, assez léger comme rouages, donnait 15 millimètres de rayon. Celui que j'avais le projet de faire construire étant d'une masse intermédiaire, mais plus voisin du dernier, j'adoptai pour rayons des disques dentés des valeurs comprises entre 17 et 23 millimètres. J'étais dès lors assuré d'être, à très-peu près, dans les limites de vitesse les plus favorables.

On voit de quelle importance était la détermination préalable de la dimension approximative de la roue dentée, puisque sa dimension la plus convenable est liée aux dimensions de son moteur.

Description du mécanisme moteur de la roue dentée.

139. Le mécanisme moteur de la roue dentée est représenté en perspective (*Pl. III*), en plan et coupes verticales (*Pl. IV, fig. 1, 2 et 3*) ; il est composé de deux parties distinctes. La première, ou partie inférieure, comprise entre deux épaisses platines de bronze BB, B'B' (*Pl. IV, en plan fig. 1, en élévation fig. 2, en coupe verticale fig. 3*), contient :

1° L'*arbre moteur* A (*fig. 2*), muni d'une roue à éperons E, sur les dents de laquelle engrène une chaîne sans fin, bien assouplie. Cette chaîne s'enroule sur la poulie P (*fig. 2 et 3*) qui porte les disques de plomb servant de poids moteur ; la charge peut aller jusqu'à 30 kilogrammes répartis en disques de 5 kilogrammes, avec subdivisions en 1 et 2 kilogrammes. Comme la poulie joue le rôle de *moufle*, la charge effective n'est que de moitié ; elle s'élève donc à 15 kilogrammes agissant sur un bras de levier de 25 millimètres environ.

2° Le *remontoir du poids*. C'est une roue à éperons E' (*fig. 1*) sur laquelle vient s'enrouler la chaîne sans fin ; elle est portée par un axe R muni d'une roue à cliquet C, qui empêche la rotation dans le sens de la chute du poids. La chaîne tombe verticalement en R' (*fig. 2*), puis remonte en F' et passe sur une poulie folle F. Les parties R', F' sont tendues par une seconde poulie non représentée sur la figure, qui porte un contre-poids d'environ 1 kilogramme. Une manivelle M per-

met de remonter le poids à un moment quelconque sans troubler le mouvement du mécanisme.

3° *L'inverseur de la vitesse.* C'est un arbre I formant le deuxième mobile (*fig. 1 et 2*) parallèle à l'arbre moteur A, engrenant sur lui par l'intermédiaire d'un pignon p (*fig. 1*). Cet arbre est carré sur une partie de sa longueur. Sur cette partie carrée glisse un manchon portant une double roue d'angle aa' . Dans l'espace libre entre ces deux roues est comprise une troisième roue d'angle b fixée sur l'axe du troisième mobile G, dont l'axe est perpendiculaire à celui des deux premiers mobiles. Si l'on pousse le manchon dans un sens ou dans un autre, l'une ou l'autre des roues a, a' engrène avec la troisième b ; le sens de rotation du troisième mobile G est ainsi renversé par cette manœuvre.

La course du manchon est limitée à ses deux extrémités par deux buttoirs sur l'arbre carré; mais cette limitation est insuffisante pour assurer le bon fonctionnement de l'appareil; il faut empêcher le débrayage spontané des roues. A cet effet, les choses sont disposées de manière que le manchon ne puisse glisser sans la volonté de l'observateur. Dans ce but il est maintenu dans l'une ou l'autre de ses deux positions d'embrayage, d'un côté par l'un des buttoirs qui limitent sa course, et de l'autre par une espèce de doigt d qui frotte le long du flanc d'un bourrelet circulaire c régnant autour du manchon. Lorsqu'on veut déplacer le manchon pour renverser la vitesse, il faut relever ce doigt, qui est monté sur un axe particulier H (*fig. 1 et 2*), mobile à l'aide d'un levier L qu'on manœuvre de l'extérieur. Le bourrelet n'étant plus arrêté par ce doigt, le manchon peut glisser sur son arbre carré et arriver au buttoir opposé. On abaisse le doigt d , qui s'appuie alors sur la face opposée du bourrelet, et le manchon se trouve fixé dans la position correspondant à l'autre mode d'embrayage; le sens de la rotation du troisième mobile est ainsi renversé.

140. 4° *Levier et buttoir de sûreté.* Il est très-important que cette inversion ne s'exécute pas lorsque le rouage est en mouvement; car, inévitablement, on briserait ou au moins on fausserait les dents des engrenages, ce qui mettrait l'appareil hors de service. Il faudrait donc attendre, pour faire cette manœuvre, que le poids moteur fût au bas de sa course; mais une inadvertance ou une maladresse pourrait causer ce grave accident. Pour le rendre impossible, j'ai ajouté le dispositif suivant, qui empêche de manœuvrer le manchon tant que l'action du poids moteur n'est pas équilibrée. L'arbre H, qui porte le doigt et le levier extérieur L, porte également un autre buttoir k (*fig. 1 et fig. 2*) qui, dans le mouvement commun imprimé par le levier, s'avance vers l'arbre I pendant que le doigt d s'en éloigne. Dans ce mouvement il rencontre une roue à rochets r ,

montée sur l'arbre carré, dont les dents viennent d'abord battre légèrement sur lui et finalement butter d'une manière complète, ce qui arrête la rotation de ce mobile, et par suite de tout le mécanisme. Quand le buttoir est bien au fond d'un de ces rochets, le doigt est suffisamment levé pour permettre au manchon de se déplacer : la manœuvre d'inversion se fait alors sans aucun risque et même sans effort, car le poids moteur n'agit plus sur l'arbre; il est équilibré par le cliquet-buttoir. On voit que cette roue à rochets joue le rôle de frein, et que, par conséquent, il faut agir avec précaution dans la manœuvre du levier L pour arrêter le moteur. Cependant, si l'on agissait trop brusquement, on ne risquerait guère que de fausser les dents de la roue à rochets, inconvénient beaucoup moins grave que le précédent et qui n'empêcherait pas le bon fonctionnement de l'appareil. Pour éviter même ce petit inconvénient, j'avais toujours soin, lorsqu'il y avait lieu de renverser la vitesse sous une forte charge motrice, d'appuyer le pouce de la main droite sur la circonférence dentée de la grande roue J du troisième mobile (vue de face dans la *fig. 3*), de façon à éteindre en grande partie la vitesse du mécanisme avant d'abaisser le levier L.

Enfin, par mesure de précaution, le levier L est maintenu dans l'une ou l'autre de ses deux positions extrêmes, correspondant, l'une à l'arrêt, l'autre au dégagement complet de la roue à rochets, par une clavette à ressort dont la tête est justement le bouton T de l'extrémité du levier et qui s'engage aux extrémités de sa course dans deux trous percés dans la platine de bronze BB.

141. 5° Le troisième mobile. Il se compose de l'axe G sur lequel est montée la roue d'angle b qui sert à produire l'inversion de la vitesse, et d'une roue J qui transmet la rotation aux mobiles suivants. Il porte en outre une distribution électrique destinée à l'enregistrement automatique de la loi du mouvement du mécanisme. Ce dispositif se compose d'une cheville de platine écroui π (*fig. 3*), vissée sur le moyeu de la roue J parallèlement à l'axe, à une distance de cet axe d'environ 15 millimètres. Cette cheville, à chaque rotation de l'axe, vient toucher un petit ressort isolé qui peut fonctionner soit pour fermer, soit pour ouvrir un circuit. Dans le premier cas, la cheville de platine touche une pièce arrondie en platine fixée au ressort. Le circuit électrique est fermé pendant toute la durée du contact, c'est-à-dire pendant environ un dixième de tour du mobile. Aux vitesses faibles, le contact électrique s'établit très-bien; mais, quand la rotation devient un peu rapide, le contact s'établit mal et le signal électrique risque de manquer; aussi ai-je transformé le mode de production du signal en faisant, au contraire, rompre le circuit par la cheville. Il a suffi pour cela d'armer le ressort d'une pièce arrondie en ivoire au lieu de platine, et de faire éta-

blir un contact permanent entre ce ressort xy (*fig. 4*) et une petite lame z qui ferme le circuit. La cheville soulève le ressort un instant et ouvre le circuit, ce qui produit un signal très-net, même aux grandes vitesses. Je n'insiste pas sur le réglage de la tension du ressort y et de la lame antagoniste z ; il se fait avec des vis buttantes représentées en détail sur la *fig. 4*. Chaque signal, c'est-à-dire chaque tour du troisième mobile, correspond à quatre cents tours de la roue dentée.

142. *Rouage proprement dit.* — La seconde partie du mécanisme ou partie supérieure comprend le rouage proprement dit, destiné à multiplier la vitesse de rotation du disque. Il est formé de trois mobiles renfermés dans une cage spéciale dont les platines WW , $W'W'$ (en élévation *fig. 3*, en coupe *fig. 2*) sont posées à angle droit sur les platines de la partie inférieure. La *Pl. III*, qui donne la perspective du mécanisme, montre l'ajustement relatif de ces deux parties. Cette cage, formée par des lames épaisses de laiton écroui, renferme :

1° Le *quatrième mobile N*, lequel porte le *frein* destiné à régler les variations de la vitesse suivant la volonté de l'observateur. Ce frein est composé d'une espèce de galet Q en bronze (*fig. 2* et *3*, et en détail *fig. 5*). Sur sa surface extérieure frotte une pièce d'ivoire s encastrée dans la branche horizontale d'un levier coudé $tt't''$ (*fig. 3* et *5*) tournant autour d'un axe t' parallèle à l'axe du mobile. Un ressort à boudin uu' , fixé à l'extrémité du levier, appuie la surface frottante sur le galet; l'autre branche du levier, terminée par une lame d'acier $t''t'''$ un peu flexible, vient butter sur la pointe d'une vis t''' qui sert à contre-balancer l'action du ressort. La tête de cette vis porte un bouton moleté que l'observateur manœuvre de la main droite pour régler la pression du frein et par suite la vitesse du mécanisme d'après le phénomène optique et le son rendu par les rouages. Il peut ainsi graduer la vitesse sans craindre de fausser ou de briser l'axe du mobile N , même en manœuvrant le frein sans précaution, la pression maximum étant celle du ressort uu' .

Ce quatrième mobile porte en outre une came électrique disposée comme la précédente; elle produit un signal qui correspond à quarante tours de la roue dentée. On l'emploie dans le cas de vitesses très-faibles, lorsque la came du mobile précédent donnerait des signaux trop espacés.

2° Le *cinquième mobile N'* (*fig. 2*) engrène avec le précédent par l'intermédiaire d'un pignon et d'une roue à denture hélicoïdale, dont les frottements sont moindres que dans les engrenages à dentures droites (73).

3° Le *sixième et dernier mobile N''* porte la roue dentée; il se compose d'un axe en acier très-léger et très-court, portant un pignon à denture hélicoïdale

comme le précédent, d'une pièce ou *platine* en aluminium qui présente une partie plane sur laquelle s'appuie le disque denté δ , et d'une contre-plaque annulaire qui serre par trois vis ε le disque sur la platine.

L'axe est terminé à ses deux extrémités par deux pointes *trempees très-dur*, qui s'engagent dans les trous de deux contre-pointes q, q' (*fig. 2*); l'une de ces contre-pointes q est vissée dans la platine même de la cage, l'autre dans l'épaisseur d'une pièce additionnelle e : des contre-écrous assurent l'invariabilité de ces contre-pointes.

La pièce conique e joue le rôle d'un *pont* d'horlogerie; elle est destinée à remplacer la platine, qui serait trop éloignée pour la longueur de l'axe; l'axe a , en effet, été choisi à dessein très-court pour atténuer les inconvénients qui se présentent aux grandes vitesses, c'est-à-dire les ballottements et, par suite, les pertes de force vive qui croissent avec la longueur et le poids de l'axe. Les pointes d'acier pivotent dans des trous percés dans des pièces rapportées en bronze d'aluminium.

143. *Roue dentée.* — La roue dentée est formée par une feuille d'aluminium très-mince ($\frac{1}{16}$ ou $\frac{1}{8}$ de millimètre environ), et bien égale d'épaisseur, taillée entre deux disques de laiton. J'ai opéré avec quatre modèles différents, dont le diamètre varie de 35 à 48 millimètres. On peut aisément les substituer les uns aux autres en dévissant les trois vis de la contre-plaque annulaire ε, ε du dernier mobile.

Les platines de la cage supérieure sont évidées convenablement pour découvrir plus de la moitié de leur circonférence (*Pl. III, fig. 1*, et *Pl. IV, fig. 1*).

144. *Réglage de l'appareil.* — Tout le mécanisme est fixé sur un socle en fonte par deux boulons α, α' (*Pl. IV, fig. 2* et 3) porté lui-même par trois vis calantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; les évidements et les épaisseurs du socle ont été ménagés de façon à assurer une répartition convenable de la charge totale sur les trois vis. Le socle est vu en projection horizontale (*Pl. III, fig. 2*).

Les trois vis calantes servent d'abord au réglage en hauteur de la roue dentée; mais elles sont utiles surtout aux petites rectifications dont il a été parlé précédemment au n° 32. Ainsi la vis β_3 (*Pl. IV, fig. 3*) permet de faire pivoter très-légèrement tout l'appareil autour de la ligne d'appui des deux autres β_1, β_2 . Ce mouvement déplace la roue dentée dans son propre plan et permet de faire pénétrer le point lumineux de retour dans la zone dentée à une profondeur convenable. Cette manœuvre changeant un peu la position de l'appareil par rapport à la verticale, on pourrait craindre que ce mouvement n'empêchât le

bon fonctionnement de la chaîne sans fin; mais, grâce à la flexibilité de cette chaîne et du jeu latéral qu'elle a nécessairement dans les dents de la roue à éperons, une inclinaison, même beaucoup plus grande que celle dont on a besoin pour le réglage indiqué, n'aurait aucun inconvénient.

Les deux autres vis β_1 , β_2 produisent des rotations analogues et permettent la petite rectification utile à la mise en coïncidence du plan du disque denté avec le plan focal de la lunette (n° 105).

APPAREILS DESTINÉS A MESURER LA VITESSE DU MÉCANISME.

145. Il faut distinguer l'*appareil enregistreur* proprement dit, destiné au tracé des signaux de tous les appareils, et les *appareils chronographiques* qui produisent les signaux relatifs à la mesure exacte du temps.

Cylindre enregistreur.

L'enregistreur, représenté en perspective (*Pl. V*), se compose essentiellement d'un cylindre couvert de papier enfumé sur lequel des tracelets mus par des électro-aimants inscrivent une série de signaux répartis sur une ligne hélicoïdale. L'enregistrement sur papier enfumé m'a toujours paru sinon le plus commode, au moins le plus sûr des modes d'inscription automatique. En effet, quoiqu'on ait beaucoup perfectionné dans ces derniers temps l'enregistrement sur papier blanc sans aucune préparation, à l'aide de plumes portant de l'encre (*), et que ce système soit très-apprécié par plusieurs observateurs, je n'ai pas hésité à adopter le papier enfumé, par le seul motif qu'on ne risque jamais de perdre des signaux lorsque les tracelets sont réglés à la pression convenable, tandis que l'autre mode exige une condition de plus, à savoir la nécessité d'*encre* le tracelet au degré convenable. Si, par suite d'une inadvertance ou par oubli, un des

(*) A l'Observatoire de Greenwich l'enregistrement se fait sur un cylindre de papier blanc par le choc d'une pointe sèche. Ce dispositif très-simple, lorsque la précision requise ne s'élève qu'au dixième de seconde, me paraît avoir un inconvénient : le choc des pointes doit modifier un peu le mouvement du cylindre pendant la pénétration dans le papier ou ployer les ressorts des tracelets. Étant obligé de porter à quatre le nombre de tracelets, l'inconvénient pourrait devenir grave; en outre, la force nécessaire pour le pointé ou signal exige l'emploi de courants énergiques qui s'accorderaient mal avec les contacts délicats des appareils chronographiques; enfin la visibilité des signaux piqués est assez pénible et leur relevé moins exact que celui des tracés linéaires.

tracelets n'est pas suffisamment encre, on risque de perdre toute une série importante; avec quatre tracelets la probabilité d'un semblable accident devenait inadmissible.

J'étais d'autant plus conduit à ce choix, que j'avais tout disposé en vue d'opérer absolument seul, cas qu'il fallait prévoir pour profiter des éclaircies soudaines et les utiliser : il était donc important de n'avoir aucune préoccupation du côté de l'enregistreur. Heureusement ce cas ne s'est pas présenté; j'ai constamment trouvé près de moi l'assistance patiente, affectueuse et dévouée qui m'était nécessaire et dont la part doit être comptée dans le succès de l'entreprise.

146. Le cylindre a de grandes dimensions, afin de permettre une assez longue série d'observations sur la même feuille. Il a près de 1 mètre ($0^m, 95$) de circonférence et $0^m, 50$ de long; il tourne autour d'un axe horizontal aa' reposant sur quatre galets et accomplit sa révolution en cinquante et une secondes environ, de sorte que la valeur linéaire d'une seconde de temps est à peu près de 20 millimètres.

C'est la valeur qui m'a paru convenable d'après mes premières expériences. L'enregistreur dont je faisais usage alors ne donnait que 7 à 9 millimètres pour une seconde. Cette longueur, déjà un peu petite dans mes expériences d'essai, eût été tout à fait insuffisante dans le cas présent, à cause de la difficulté qu'on éprouvait à en apprécier les fractions. J'avais jugé qu'en doublant ou en triplant les dimensions des tracés on atteindrait la limite utile comme précision, comme netteté des signaux et surtout comme facilité de lecture.

Il est évident qu'on a toujours intérêt à augmenter les dimensions des tracés, mais il ne faut pas les exagérer; d'abord parce qu'il est inutile de chercher à atteindre une précision qui serait illusoire et ensuite parce que l'on rencontre des difficultés pratiques d'un autre ordre, par exemple la longueur du temps et des soins nécessaires à la préparation des feuilles, l'embarras de leur maniement et les précautions indispensables à leur conservation.

Les tracelets, au nombre de quatre, et les électro-aimants qui les mettent en mouvement sont portés par un chariot C qui s'avance de 15 millimètres par tour du cylindre. L'hélice quadruple décrite par ces tracelets a donc 15 millimètres de pas et le cylindre peut contenir trente-trois spires qui se transforment en trente-trois lignes droites quadruples lorsque la feuille est développée. Cette ligne de signaux offre donc un développement d'environ 33 mètres, correspondant à $33 \times 51 = 1683$ secondes de temps ou 28 minutes. L'enregistreur peut ainsi, pendant près d'une demi-heure, fonctionner sans discontinuer : c'est beau-

coup plus que ce que permet la fatigue des observations, lesquelles demandent au contraire à être interrompues fréquemment.

147. Le cylindre et le chariot sont mus par un rouage très-fort R, dont la vitesse est réglée par un régulateur à ailettes Y, imaginé par M. Villarceau, régulateur qui fonctionne avec une précision remarquable. La transmission de mouvement du rouage au cylindre se fait par l'intermédiaire d'un toc t , c'est-à-dire d'une cheville excentrique placée sur le second mobile du moteur. Cette cheville s'engage dans une fourchette f portée par l'axe du cylindre; l'intérieur de cette fourchette est garni d'un ressort d'acier sur lequel appuie le toc. Cette disposition empêche les temps perdus et adoucit les à-coups de la transmission. L'embrayage et le débrayage sont faciles, car le toc est mobile, à charnière et à ressort.

Le chariot, représenté en élévation et en coupe (*Pl. VI, fig. 2 et 3*), est monté sur trois galets gg' , qui roulent sur deux rails $pp, p'p'$ parallèles à l'axe du cylindre. Il est conduit par une petite cheville c (*Pl. VI, fig. 3*) qui s'enfonce dans la rainure hélicoïdale d'un arbre hh' monté sur deux contre-pointes kk' (*Pl. V*), entre les deux rails et parallèle à leur direction.

La transmission du mouvement à cet arbre se fait par l'intermédiaire d'un cordon sans fin et de deux poulies j, j' ; l'une j , montée sur l'arbre moteur du cylindre, l'autre j' sur l'arbre rainé hélicoïdalement. Un galet l assez lourd, porté à l'extrémité d'un levier articulé, sert de *tenseur* au cordon et assure la transmission du mouvement

La cheville c , conductrice du chariot, est portée à l'extrémité d'un levier mobile m (*Pl. VI, fig. 3*), qui permet de débrayer et d'embrayer à volonté le chariot, c'est-à-dire de le transporter d'un point à l'autre du cylindre et de l'embrayer dans la spire la plus voisine de la position choisie.

Les poulies j, j' ont trois diamètres différents, de sorte qu'on pourrait changer le rapport des vitesses de transmission, resserrer ou écarter les hélices tracées sur le cylindre, c'est-à-dire augmenter ou diminuer la durée de service d'une même feuille de l'enregistreur.

Un petit frein à ressort n , placé sur l'axe du dernier mobile (axe du régulateur à ailettes), permet d'arrêter à volonté l'appareil. Lorsqu'on cesse la pression du ressort, le mouvement reprend de lui-même sans que l'observateur ait besoin de donner d'impulsion. Un autre frein tout semblable n' peut remplir le même office lorsqu'il est plus à portée que l'autre de la main de l'observateur.

148. Le chariot est une pièce assez compliquée en apparence, par suite de la

nécessité de réunir sous un petit volume et sur une pièce mobile quatre électro-aimants avec leurs quatre tracelets et tous les réglages, au nombre de douze, nécessaires à leur bon fonctionnement. Il se compose d'un plateau horizontal de fonte C roulant sur trois galets gg' (*Pl. VI, fig. 2 et 3*); sur ce plateau s'élèvent deux pieds verticaux qq qui supportent deux vis à pointes ss servant d'axe de rotation au système que voici

Un cadre carré de bronze $aa'aa'$ (*fig. 2*), mobile autour des pointes ss , porte les quatre électro-aimants formés chacun de deux bobines $E_1E'_1, E_2E'_2, E_3E'_3, E_4E'_4$. Ils sont fixés chacun par deux vis v, v' traversant la pièce de fer doux ou *cuisse* qui réunit les deux bobines, sur les deux côtés du cadre $aa'aa'$ perpendiculaires à l'axe de rotation ss . Ils sont ainsi deux à deux parallèles ou deux à deux opposés, suivant qu'on regarde le cadre perpendiculairement à son plan (*fig. 2*), ou parallèlement à son axe de rotation (*fig. 3*). Les quatre palettes en fer doux P_1, P_2, P_3, P_4 sont à l'intérieur du groupe des électro-aimants, chacune d'elles étant placée devant les deux noyaux correspondants; elles sont ainsi parallèles entre elles et perpendiculaires à l'axe de rotation du cadre. Chacune d'elles peut osciller entre deux pointes $\beta\beta'$ convenablement placées. Le ressort antagoniste de l'action électromagnétique est une lame d'acier flexible $\alpha\beta$ fixée à angle droit de chaque palette et buttant sur une vis de réglage u_1, u_2, u_3, u_4 destinée à modifier la force du ressort suivant l'énergie de l'attraction. Le ressort maintient la palette écartée de la bobine, l'aimantation l'attire jusqu'au contact; mais un buttoir en cuivre vissé sur les noyaux empêche qu'elle n'y reste attachée sous l'influence du magnétisme rémanent. Chaque palette porte une tige T et une lame de clinquant L taillée en pointe, qui sert de tracelet. L'oscillation de la palette fait décrire à l'extrémité de chaque tracelet un petit arc de cercle dont la corde est sensiblement parallèle à l'axe de rotation ss , ou, d'après la position du chariot sur les rails, parallèle aux génératrices du cylindre. C'est cette petite oscillation qui produit le signal sur le papier enfumé.

Les quatre tiges étant deux à deux dans des plans différents, on ramène les pointes des tracelets à se trouver sur une même génératrice du cylindre en courbant convenablement les lames des tracelets (*fig. 3*); les deux lames supérieures portent même un petit réglage à vis W, qui facilite beaucoup l'ajustement.

149. Les tiges des tracelets sont amincies perpendiculairement au plan de leur déplacement, afin d'avoir une certaine élasticité qui a pour effet d'exagérer l'amplitude du déplacement. En effet, sous l'influence de l'attraction magnétique ou de l'action du ressort, la palette vient butter d'un côté sur le fer doux,

de l'autre sur un buttoir mobile destiné à régler l'amplitude et qu'on manœuvre par un bouton à vis x . A chaque *à-coup* produit par ces chocs, la tige élastique du tracelet se met en oscillations rapides, lesquelles diminuent rapidement d'amplitude à partir de la première oscillation double : il en résulte que, sur le tracé graphique, chaque signal est accompagné d'un *ressaut* qui en fixe la place avec une grande précision. Le *fac-simile* du tracé (*Pl. VI, fig. 9*) montre l'effet de cette oscillation élastique, spécialement sur les signaux du dixième de seconde.

Pour que le tracé ait le maximum de netteté, il faut que la pression des tracelets sur le cylindre enfumé soit convenable. On y arrive grâce à l'élasticité des lames du tracelet et à l'emploi d'une vis de réglage γ , bien visible sur la *Pl. VI, fig. 3*. Cette vis sert de buttoir au cadre dans son mouvement de rotation. Sa pointe mousse vient s'appuyer sur le cadre en un point α'' , où l'on a ménagé dans la fonte une petite masse additionnelle. Dans cette position la manœuvre de cette vis fait basculer le cadre et varier la pression des tracelets; on choisit celle qui leur fait tracer les signaux les plus nets. Grâce à la position de son centre de gravité G par rapport à son axe de rotation ss (*fig. 3*), le cadre vient de lui-même butter contre la pointe de la vis γ et se maintient dans une position qui est celle où les tracelets fonctionnent; mais il possède encore une autre position d'arrêt dans laquelle il est utile de le placer lorsque les tracelets doivent être écartés du cylindre.

C'est celle où l'appendice α''' du cadre (*fig. 2 et 3*) s'appuie sur le buttoir γ vissé sur la plate-forme du chariot. Les tracelets sont alors verticaux, la pointe en l'air, éloignés d'environ 10 centimètres de la surface enfumée. Dans chacune de ces positions, le système est en équilibre stable, c'est-à-dire que, écarté légèrement de sa position, il y revient immédiatement. Deux manettes ou oreilles $O'O$ permettent d'exécuter ces rotations sans toucher à aucune pièce.

Cette disposition accessoire est très-importante; elle permet de manœuvrer le système des tracelets, très-délicat en lui-même, sans aucune précaution spéciale et sans crainte d'accidents; elle conserve leur réglage malgré la manœuvre qui les éloigne du cylindre lors du renouvellement de la surface enfumée et donne à l'observateur une grande sécurité sur le fonctionnement de l'enregistreur.

150. La mise en action de l'appareil est très-simple; on commence par couvrir le cylindre de papier blanc. On choisit, à cet effet, une feuille de papier à dessin format grand aigle, qu'on coupe à la dimension de 1 mètre de long sur 0^m, 50 de large; on l'humecte légèrement, sur le côté le moins glacé, avec une éponge

mouillée, et on laisse l'imbibition s'effectuer pendant quelques minutes. On repasse l'éponge une seconde fois sur toute la feuille, à l'exception de la lisière qui doit être gommée, et avec un peu d'adresse on parvient à enrrouler la feuille humide sur le cylindre de façon que les bords du papier suivent les bords du cylindre, la surface la plus glacée étant à l'extérieur; puis on colle le bord libre avec de la gomme assez épaisse. Le recouvrement est d'environ 5 centimètres, car le cylindre n'a que 0^m,95 de tour : on le dispose dans le sens de la rotation du cylindre. Au bout de quelques minutes le joint gommé est sec et la dessiccation du reste de la feuille amène progressivement un retrait qui applique parfaitement la feuille sur la surface du cylindre. On l'enfume après dessiccation complète (sous peine de la faire éclater ou au moins de faire naître des plissements) à l'aide d'une lampe à huile munie d'une mèche plate de 30 millimètres de largeur.

Comme, dans cette opération, on risquerait de heurter le chariot ou les tracelets, il est bon d'enlever le cylindre. Cette manœuvre ne serait pas très-aisée, vu le poids du cylindre (4 à 5 kilogrammes), la petitesse de l'axe et la délicatesse des galets sur lequel il repose. Je l'ai rendue excessivement facile à l'aide d'un double levier coudé DD portant deux fourchettes F (*Pl. VI, fig. 1*) qui embrassent les extrémités de l'axe du cylindre. L'observateur débraye le toc, relève les tracelets et abaisse les deux manettes DD; le cylindre est alors soulevé à bonne portée des deux mains de l'opérateur, qui l'emporte sur un support spécial où il le couvre de papier et l'enfume; il le replace sur ses galets en effectuant les mêmes mouvements en ordre inverse. Pour éviter toute espèce d'accidents que causerait la chute du cylindre par un renversement brusque du levier, un cliquet double Z arrête automatiquement le levier dans ses deux positions extrêmes.

La préparation complète d'une feuille exigeant environ une demi-heure (à cause de la durée de la dessiccation d'une feuille aussi épaisse), il faut avoir deux cylindres de rechange préparés d'avance. Il est bon de les garder à l'abri de la poussière, qui se fixe sur le noir de fumée et lui fait perdre son velouté noir si favorable à la netteté des signaux.

Le cylindre enfumé étant remis en place, l'observateur débraye le chariot, l'embraye à l'extrême droite de sa course, abaisse les tracelets, vérifie les communications électriques et règle le bon fonctionnement des tracelets; puis il embraye le toc du cylindre, remonte le moteur, déclanche le frein et constate la transmission régulière du mouvement des poulies par le cordon. L'enregistreur est alors prêt à fonctionner et à fournir les quatre systèmes de signaux simultanés dont on verra bientôt la signification.

Appareils chronographiques.

151. Ils comprennent :

1° Une *horloge astronomique* battant les secondes et distribuant un courant électrique à chaque battement ; c'est l'organe chronographique fondamental qui fournit l'unité de temps.

2° Un *appareil subdiviseur de l'unité de temps*, qui comprend : (a) un *pendule battant la demi-seconde* et distribuant un courant électrique à chaque oscillation simple, (b) et un *trembleur subdiviseur* battant le demi-dixième de seconde et distribuant un courant électrique à chaque oscillation double.

1° *Horloge astronomique.*

C'est l'horloge à secondes de Winnerl, qui est installée dans les caves de l'Observatoire et maintenue à une température et sous une pression constantes, dans une caisse de fonte hermétiquement fermée. Elle distribue, à l'aide d'un dispositif spécial, un courant toutes les secondes, lequel, par l'intermédiaire d'un *relai*, sert à synchroniser la plupart des pendules de l'Observatoire, en particulier celles de la salle méridienne.

L'horloge Winnerl est excellente; elle est réglée sur le temps sidéral, et sa marche est d'une uniformité remarquable. Elle a été d'environ $0^s,1$ par jour pendant la durée de mes expériences.

Le courant émis par le relai distributeur arrivait à la cabane où étaient installés les appareils et mettait en mouvement un deuxième relai. Il eût été possible, à la rigueur, de supprimer ce relai et de mettre les appareils dans le circuit des horloges de l'Observatoire; mais j'ai jugé qu'il valait mieux être tout à fait indépendant afin de pouvoir, selon les besoins, interrompre ou modifier l'intensité du courant à distribuer dans mes appareils sans craindre de troubler les services réguliers de l'établissement.

Le courant émis par le deuxième relai, représenté (*Pl. VII, fig. 4*), sert à mettre en mouvement le tracelet n° 1 de l'enregistreur. A chaque seconde le courant produit par le contact de la palette *p* avec la pointe de la vis *q* fait produire sur le cylindre un signal à l'unisson des battements de la pendule de la salle méridienne. On a donc ainsi sur les tracés graphiques l'unité de temps avec une rigueur parfaite, puisqu'elle est continuellement contrôlée par les observations aux instruments méridiens.

2° *Appareils subdiviseurs de l'unité de temps.*

152. (a) *Pendule battant la demi-seconde.* — Ce pendule, représenté en coupe et en élévation (*Pl. VII, fig. 1 et fig. 2*), exécute des oscillations réglées à chaque seconde par celles du balancier de l'horloge astronomique précédemment décrite. On parvient à ce résultat en fixant à l'extrémité du pendule un arc de fer doux BC (*fig. 2*), qui s'engage dans une bobine électromagnétique D. Le fil de cette bobine est dans le circuit de l'électro-aimant du tracelet n° 1, c'est-à-dire du courant fourni par le relai. Le pendule reçoit donc chaque seconde une attraction de courte durée (environ $\frac{1}{10}$ de seconde).

On règle au début la longueur du pendule en supprimant l'attraction périodique; il oscille alors librement; on manœuvre l'écrou qui soutient la masse lenticulaire, de façon qu'il batte très-approximativement la demi-seconde. Cette opération se fait très-simplement, en suivant de l'œil les oscillations du pendule et en écoutant le rythme du relai. On perfectionne le réglage en utilisant la distribution électrique que produit le pendule. En effet, le pendule porte un bras métallique *l* (*fig. 2*) muni d'une pointe mousse de platine qui vient toucher un ressort fixe *r* muni à son extrémité d'un renflement ρ également en platine, et établir un contact électrique à chaque oscillation simple. On peut donc enregistrer plusieurs dizaines d'oscillations de ce pendule et les comparer aux battements de la seconde. Le tracé graphique montre l'avance ou le retard progressif des signaux successifs du pendule; dès lors, par des essais méthodiques dans le réglage de l'écrou E qui soutient la lentille, on arrive à un synchronisme très-approximatif, par exemple à une oscillation sur mille. A ce degré, le réglage est suffisant: on le constate en rétablissant le circuit électrique dans la bobine après avoir ramené le pendule au repos; les attractions périodiques ne tardent pas à le mettre en oscillation; l'amplitude va grandissant jusqu'à ce que les résistances passives la limitent à une valeur constante. Cette limite est atteinte quand le travail des forces électromagnétiques est, pour chaque oscillation, égal au travail de la résistance de l'air et du frottement du ressort. On peut donc aisément obtenir une amplitude convenable soit en graduant l'intensité du courant, soit en modifiant la pression du ressort, soit en avançant ou reculant la bobine, qui est mobile, à l'aide d'une vis W. Une disposition très-commode simplifie encore le réglage et le rend presque automatique. La bobine contient un noyau de fer doux F égal à peu près à la moitié de sa longueur, et qui peut glisser à frottement doux dans son intérieur. Ce fer s'aimante d'autant plus qu'il est plus engagé dans la bobine, et sa présence augmente considérablement l'attraction électromagnétique. On commence

par enfoncer ce noyau dans la bobine jusqu'à refus, c'est-à-dire jusqu'à ce que le bourrelet qui le termine vienne butter sur la face extérieure de la bobine. L'attraction sur le fer doux du pendule est alors très-énergique; l'amplitude croît rapidement: bientôt l'extrémité du fer doux du pendule vient le frapper. Ce choc fait sortir le noyau d'une petite quantité en dehors de la bobine, et, par suite, diminue un peu sa puissance attractive. Tant que les oscillations augmentent d'amplitude, un semblable petit choc a lieu et un semblable recul du noyau se produit, ce qui diminue progressivement l'attraction; enfin, lorsque l'amplitude devient constante, le noyau ne recule plus, il devient fixe. L'équilibre est donc atteint de lui-même; et, comme une petite variation dans la longueur du noyau engagé dans la bobine produit une assez grande variation d'attraction, la limite d'amplitude conserve une valeur à peu près constante, même lorsque les résistances varient dans des proportions relatives assez grandes.

En résumé, le pendule se met de lui-même en mouvement et atteint rapidement une limite d'amplitude qu'il ne dépasse plus: deux ou trois minutes suffisent pour obtenir ce résultat. Il reste à indiquer comment on règle la distribution électrique du pendule de manière qu'elle produise à chaque oscillation double les deux contacts à des intervalles égaux, condition nécessaire, ainsi qu'on le verra bientôt, pour l'usage de cet appareil.

A cet effet le courant émis à chaque oscillation simple peut, à l'aide d'un commutateur P, passer dans un *parleur* G (*fig. 2*), c'est-à-dire dans un électro-aimant auxiliaire dont le contact H, porté par un ressort I, produit un bruit particulier à chaque oscillation. Le choc est renforcé par la résonance de la boîte de bois *sz* qui enveloppe l'appareil et sur laquelle le parleur est fixé. L'observateur, à chaque émission de courant, entend deux bruits de timbre différent, le bruit qui correspond à la fermeture et celui qui correspond à la rupture du circuit; il juge ainsi à la fois et de la durée du contact électrique et de l'égalité plus ou moins parfaite des intervalles de temps auxquels ces contacts se succèdent. On peut rectifier l'un et l'autre de ces effets: on règle la durée du contact électrique ou de l'émission de courant en manœuvrant la vis L (*fig. 2*) dont la pointe appuie sur le ressort *r* et dont la tête sort au dehors de la boîte. On règle l'égalité d'intervalle des deux émissions en manœuvrant la vis K qui fait pivoter autour de l'axe J la pièce en zigzag $\alpha\beta\gamma\epsilon$ (*fig. 1*), laquelle porte le ressort *r* et son réglage. L'axe de rotation J étant à la même hauteur que l'axe d'oscillation du pendule et que le point de contact du bras *l* avec le ressort, la petite rotation imprimée par la vis K fait décrire à l'extrémité du ressort *r* un petit arc de cercle dont la direction moyenne est verticale, c'est-à-dire dirigée suivant le déplacement de l'extrémité du bras *l*. Or les contacts successifs de ces

deux pièces se feront à des intervalles égaux lorsque l'extrémité ρ du ressort sera à la même hauteur verticale que le milieu de la course de l'extrémité du bras. On est donc assuré, en manœuvrant la vis K, d'arriver à ce réglage; c'est l'oreille qui guide, et l'oreille apprécie avec beaucoup de délicatesse l'égalité d'intervalle de bruits périodiques.

Si l'on ne voulait pas se fier à l'oreille, on aurait la ressource de l'enregistrement électrique.

Ce pendule n'est qu'un appareil auxiliaire : il sert à mettre en mouvement, par sa distribution électrique, l'appareil suivant.

153. (b) Trembleur subdiviseur. — Cet appareil, qui est le subdiviseur proprement dit, est la répétition, à une moindre échelle, du pendule précédent. C'est une lame élastique en acier A (*fig. 3*), encastrée à une de ses extrémités dans une pièce métallique épaisse B solidement fixée au socle de l'appareil PP'P''P''', qui est en bronze doublé de plomb. L'autre extrémité porte une tige filetée sur laquelle se visse une double masse additionnelle MM' et un arc de fer doux dont une des branches s'engage dans une bobine électromagnétique E.

Le mode de réglage du subdiviseur est le même que celui du pendule. On commence par le régler approximativement, de manière qu'il fasse dix oscillations doubles par seconde; pour y parvenir on utilise la distribution électrique qu'il porte (bornes $\eta\eta'$), c'est-à-dire le circuit qu'il ferme à chaque oscillation double en venant s'appuyer sur un fil de platine F monté à l'extrémité d'un ressort. Une vis de réglage G sert à régler le contact. On fait osciller le subdiviseur librement, c'est-à-dire sans aucun courant périodique dans la bobine, et l'on enregistre ses oscillations en même temps que les signaux de la seconde. D'après le tracé obtenu on reconnaît s'il y a lieu de diminuer le temps d'oscillation en rapprochant la masse additionnelle M et son contre-écrou M' du point d'encastrement, ou, au contraire, de l'augmenter par l'opération inverse. Un essai méthodique, consistant à mesurer l'effet produit par le déplacement de la masse d'un ou plusieurs filets de la tige, permet d'arriver rapidement à un réglage très-approximatif.

On établit alors la communication du courant émis à chaque demi-seconde par le pendule avec la bobine E du subdiviseur par l'intermédiaire des bornes $\xi\xi'$. Celui-ci reçoit alors une attraction périodique de très-courte durée à des intervalles de temps égaux à cinq de ses oscillations doubles. S'il a été bien réglé, il se met de lui-même en mouvement et atteint rapidement la limite que lui imposent les résistances passives auxquelles il est soumis (résistance de l'air, frottement du contact, transmission de force vive au support, etc.). On

accroît l'attraction de la bobine en y introduisant un petit noyau de fer doux H qui occupe la moitié libre de sa longueur.

Les courants émis par le pendule doivent être de courte durée, afin d'exercer une action toujours motrice. Ils doivent donc durer au plus pendant une oscillation simple du subdiviseur, c'est-à-dire pendant un demi-dixième de seconde. Aussi est-il important d'avoir sous la main un moyen facile de régler cette durée; ce moyen, c'est la pression du ressort distributeur du courant dans le pendule à demi-seconde. En effet, plus la pression est grande, plus l'arc de contact du ressort avec le bras du pendule est étendu, et plus, à amplitude égale, la durée de fermeture du courant est grande. Or, comme le ressort est très-faible, la variation de pression causée par une rectification du réglage modifie à peine l'amplitude du pendule. Il en résulte qu'en manœuvrant la vis L (*fig. 2*) on arrive immédiatement au résultat demandé. On se guide, pendant ce réglage, sur l'amplitude des oscillations du subdiviseur, qu'on cherche à obtenir, sinon maximum, du moins d'une étendue suffisante pour assurer le bon fonctionnement de son distributeur.

Lorsque le pendule et le subdiviseur sont bien réglés, ils fonctionnent sans interruption tant que les éléments des piles qui fournissent les courants sont en activité. Le système chronographique est alors en état de fonctionner. L'électro-aimant du tracelet n° 2 est mis dans le circuit que ferme le subdiviseur à chaque oscillation, et ce tracelet trace une ligne dentelée qui marque les dixièmes de seconde à côté du tracelet n° 1, qui marque les secondes. La vitesse du cylindre enregistreur est donc mesurée avec une grande certitude.

154. Les communications électriques demandaient un ajustement spécial à cause du nombre de circuits indépendants. Il y en a cinq comprenant chacun, en général, deux couples Leclanché, moyen modèle, ou quatre couples Callaud (petit modèle) :

1° Circuit du relai, comprenant la bobine du pendule, l'électro-aimant du tracelet n° 1.

2° Circuit de la demi-seconde traversant l'interrupteur du pendule et la bobine du subdiviseur.

3° Circuit du dixième de seconde, comprenant l'interrupteur du subdiviseur et l'électro-aimant du tracelet n° 2.

4° Le circuit du signal du mécanisme passant par l'interrupteur du mécanisme et l'électro-aimant du tracelet n° 3.

5° Le circuit de la clef électrique en communication avec l'électro-aimant du tracelet n° 4.

Pour simplifier le nombre de conducteurs, j'ai disposé un fil de cuivre d'environ 4 millimètres de diamètre, ayant une résistance négligeable, servant de *fil de terre*, c'est-à-dire de partie commune à tous les circuits. Ce fil circule dans le voisinage de tous les appareils; le zinc de chaque pile communique directement avec ce fil. Grâce à cette disposition, on supprime quatre des conducteurs; d'autre part, les circuits des quatre électro-aimants ont également un fil en communication commune. Il en résulte qu'on peut ouvrir ou fermer à la fois les quatre circuits par un simple commutateur; quant au cinquième circuit, celui de la demi-seconde, on l'ouvre ou on le ferme par un commutateur spécial.

Cette disposition est très-commode, parce qu'elle permet de laisser reposer les piles pendant tout le temps où l'on n'observe pas. Comme il suffit d'environ deux minutes pour mettre le système chronographique en mouvement permanent, on évite ainsi les accidents provenant de l'usure des piles.

155. Il y avait encore quelques précautions à prendre pour éviter les communications de mouvements des appareils les uns aux autres.

Le pendule est posé sur une lourde planchette de chêne scellée par deux corbeaux au pilier B (*Pl. II, fig. 7*), le relai et le subdiviseur sur une deuxième planchette, au-dessous de la première. L'enregistreur est placé sur une table spéciale dont les quatre supports descendent jusque sur le sol de la terrasse et sont isolés du parquet et des piliers. Le mécanisme de la roue dentée, dont les trépidations sont assez intenses aux grandes vitesses, est supporté par le pilier A et se trouve complètement isolé des appareils et spécialement de la lunette portée par les deux autres piliers.

Discussion de l'établissement des appareils chronographiques.

156. Les descriptions précédentes, un peu minutieuses et compliquées, éveilleront probablement dans l'esprit du lecteur l'idée qu'il eût été facile d'obtenir un système chronographique beaucoup plus simple que celui qui vient d'être décrit. L'énumération des conditions à remplir dans les circonstances présentes montrera que les chronographes très-simples, employés ordinairement, dans le cas d'expériences peu nombreuses, seraient insuffisants.

Voici quelles sont ces conditions :

1^o *Conditions purement chronographiques.* — (a). Conserver sur les tracés graphiques les signaux de l'horloge astronomique, qui fixe avec précision l'unité de temps.

(b). Subdiviser par des signaux particuliers l'unité choisie, qui est trop grande comparativement aux variations de vitesse du mouvement de l'enregistreur.

2° Conditions relatives au relevé des signaux dans le cas spécial où ces signaux sont en très-grand nombre. — (c). Choisir un mode de subdivision conduisant à un système de numération simple des signaux et se prêtant à des vérifications faciles.

(d). Choisir le rapport de subdivision de manière à simplifier autant que possible les calculs numériques ultérieurs.

157. La première condition (a) est évidente, car le résultat à obtenir doit être exprimé en *valeur absolue*; elle entraîne la nécessité d'avoir un tracelet spécial pour l'unité de temps qui est, dans le cas présent, la *seconde sidérale*. Quant à la seconde condition, elle dépend de circonstances bien plus complexes qu'on ne le croirait au premier abord.

Les appareils les plus simples qui subdivisent le temps en parties très-petites sont les lames vibrantes simples ou doubles (diapasons); mais les diapasons ne fonctionnent avec sécurité que quand leur nombre de vibrations est un peu considérable, une ou plusieurs centaines par seconde, du moins c'est le seul cas où ils ont été étudiés.

Or un pareil nombre d'oscillations est, dans le cas présent, tout à fait inadmissible pour bien des motifs; le plus grave est l'inconvénient pratique de donner à ces signaux assez d'écartement pour être facilement comptés et vérifiés. Il faut supposer au minimum 1 millimètre d'intervalle, sans quoi l'œil se fatigue dans leur numérotage. Avec un diapason donnant cent vibrations simples par seconde, il faudrait donc 50 millimètres pour une seconde, ce qui conduirait à un développement énorme pour les tracés graphiques, développement inutile pour l'exactitude qu'on est en droit d'attendre des expériences, et surtout fâcheux à cause du nombre de feuilles qu'il faudrait préparer d'avance ou de la dimension qu'il faudrait leur donner. En outre, un pareil nombre de signaux à compter et à vérifier conduirait à un travail considérable se chiffrant par centaines de milles (*).

De plus, il y aurait à chaque série d'observations un calcul à effectuer sur les

(*) Le nombre des observations à effectuer devait être, suivant mon projet, compris entre cinq cents et mille; en supposant que chacune d'elles ne nécessitât que 10 secondes à relever, cela eût exigé 500 ou $1000 \times 50 \times 10 = 250\,000$ ou $500\,000$ signaux à numérotter et à vérifier. On verra plus loin que le nombre d'observations a atteint près de sept cents, ce qui eût exigé le contrôle de plus de $350\,000$ signaux.

résultats, à savoir la réduction à l'unité de temps vrai. En effet, le diapason ne donne ni un nombre exact de vibrations par seconde, ni même un nombre constant; car la valeur de l'oscillation varie sous l'influence des changements de température et de diverses causes mal analysées, de sorte que le facteur de réduction sera toujours variable.

Ces deux derniers motifs justifient, comme l'on voit, l'importance des deux conditions (c), (d) énoncées plus haut.

Enfin il faudrait supposer résolues diverses difficultés pratiques pour obtenir l'entretien continu du mouvement du diapason et la communication de ses oscillations au tracelet du chariot.

Tous ces motifs doivent donc faire rejeter la subdivision en très-petits intervalles, comme le font les chronographes à diapason, d'ordinaire si commodes lorsque le nombre ou la précision des expériences sont limités. Ils conduisent, au contraire, à choisir un intervalle de subdivision aussi grand que le comporte la régularité du mouvement de l'enregistreur. C'est le choix de cet intervalle qui doit d'abord nous occuper.

Insuffisance des signaux de l'horloge et nécessité de la subdivision du temps.

158. D'abord pourquoi ne pas se contenter des signaux de l'horloge, c'est-à-dire de signaux distants d'une seconde, comme je l'avais fait dans mes premiers essais entre l'École Polytechnique et le mont Valérien ?

La raison est celle-ci. Pour obtenir une exactitude suffisante, il faut : 1° que la valeur linéaire d'une seconde sur l'enregistreur soit suffisamment grande et 2° que l'uniformité du mouvement de l'enregistreur soit assez parfaite pour que l'hypothèse de proportionnalité ne conduise pas à des erreurs supérieures à l'approximation qu'on a en vue.

La valeur linéaire de la seconde (20 millimètres) a été choisie plus haut (n° 146) et donne certainement l'approximation suffisante pour les lectures. Reste la possibilité d'effectuer la subdivision par proportionnalité du temps aux longueurs d'une manière non-seulement précise, mais encore facile. Or cette double condition suppose que l'uniformité du mouvement de l'enregistreur soit assez parfaite et que l'on possède un instrument d'un maniement aisé et précis pour apprécier les fractions de seconde. Dans le cas présent, où la valeur de 20 millimètres pour la seconde donne aisément une approximation d'au moins $\frac{1}{200}$ pour la mesure des longueurs, la constance de la vitesse de l'enregistreur peut-elle être considérée comme exacte à la même approximation? Il serait dif-

ficile de l'affirmer. La denture des roues d'engrenage, le frottement variable des surfaces, surtout pour les mobiles à rotation lente qui mènent le cylindre, doivent introduire des inégalités assez grandes dans son mouvement pour qu'on doive craindre que la vitesse ne reste pas constante à $\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_0}$ près de sa valeur pendant une seconde. La difficulté augmente encore si l'on songe que ce n'est pas pendant *une* seconde, mais bien pendant *deux* secondes que l'uniformité doit être supposée rigoureuse, car la période d'oscillation du balancier de l'horloge qui produit les signaux est de deux secondes, et les signaux ne se trouvent rigoureusement tracés dans les mêmes conditions que de deux en deux secondes.

Quant à la subdivision précise et rapide, il n'existe pas d'instrument qui la fournisse. Une lame de verre ou de corne présentant vingt et une lignes convergentes, semblables à celles que j'ai employées dans mes premières expériences, permet de subdiviser l'intervalle de deux secondes en $\frac{1}{10}$ de seconde, et d'estimer le $\frac{1}{50}$ ou le $\frac{1}{100}$; mais il se prête difficilement à une approximation supérieure. Nous serions donc en dessous de la limite que nous sommes en droit de demander aux tracés. D'ailleurs l'application d'un pareil instrument est toujours délicate et risque d'endommager les tracés à cause des frottements nécessaires à son usage.

Ainsi l'intervalle des signaux de l'horloge comme unité chronographique est un intervalle trop grand; d'abord, parce qu'on ne connaît pas d'instrument permettant la subdivision facile et précise, et surtout parce que le mouvement de l'enregistreur ne peut être supposé uniforme pendant deux secondes. Il est donc nécessaire de choisir une unité auxiliaire assez petite pour que l'hypothèse de l'uniformité du mouvement ne se traduise que par des erreurs insignifiantes. Voici un théorème qui détermine cette unité d'après la valeur de l'erreur qu'on peut regarder comme négligeable.

*Calcul de la réduction de l'erreur due à la subdivision proportionnelle
par la diminution de l'unité chronographique.*

159. THÉORÈME. — *La réduction de l'unité chronographique dans le rapport de 1 à m réduit, dans le rapport de 1 à m^2 , l'erreur qu'on commet en supposant rigoureuse l'uniformité du mouvement de l'enregistreur.*

Soit v la vitesse d'un point du cylindre qu'on suppose constante entre les époques t_0 et t_1 , tandis qu'en réalité le mouvement est légèrement varié. En désignant par c et α deux constantes, on a, avec une très-grande approxima-

tion,

$$v = c + \alpha t.$$

L'espace e parcouru au temps t s'obtient en intégrant et déterminant les constantes arbitraires par la condition que pour $t = t_0$ l'espace parcouru soit e_0 .

$$e - e_0 = c(t - t_0) + \alpha \frac{t^2 - t_0^2}{2}.$$

La vitesse moyenne w entre les deux époques t_1 et t_0 est donnée par

$$w = \frac{e_1 - e_0}{t_1 - t_0} = c + \alpha \frac{t_1 + t_0}{2}.$$

Si, avec cette vitesse moyenne, on calcule l'espace parcouru E à l'époque intermédiaire t , on aura, en supposant le mouvement uniforme,

$$E - e_0 = w \times (t - t_0) = c(t - t_0) + \alpha \frac{t_1 + t_0}{2} (t - t_0),$$

expression différente de la valeur de e .

On commet ainsi une erreur $\varepsilon = E - e$, qui est exprimée par

$$\varepsilon = E - e = \alpha \frac{t_1 + t_0}{2} (t - t_0) - \alpha \frac{t^2 - t_0^2}{2} = \frac{\alpha}{2} (t - t_0) (t_1 - t).$$

Cette erreur, nulle pour les époques t_0 et t_1 , est de même signe que α , *positive* si le mouvement est *accélééré* et *négative* s'il est *retardé*. En valeur absolue elle passe par un maximum pour la valeur de t , qui rend égaux les deux facteurs $t - t_0$ et $t_1 - t$, car leur somme est constante, c'est-à-dire pour

$$t = \frac{t_0 + t_1}{2};$$

substituant cette valeur de t , il vient, pour l'erreur maximum ε_1 ,

$$\varepsilon_1 = \frac{\alpha}{8} (t_1 - t_0)^2;$$

donc, si l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ devient m fois plus petit, l'erreur maximum à craindre sera m^2 fois plus petite (*).

(*) Ce calcul suppose un mouvement continu et régulier. Les discontinuités, produites par des

Ce résultat va s'appliquer immédiatement au choix de notre unité chronographique : en effet, forcés de rejeter la double seconde à cause de sa grandeur, nous sommes conduits à prendre la première subdivision décimale de la seconde. L'unité est réduite dans le rapport de 2 à $\frac{1}{10}$ ou de 1 à $\frac{1}{20}$; par suite, l'erreur à craindre provenant de l'interpolation proportionnelle est réduite dans le rapport de 1 à $\frac{1}{400}$. Or, comme jamais l'erreur commise dans le premier cas n'eût atteint $\frac{1}{15}$ de seconde, l'erreur d'interpolation du $\frac{1}{10}$ n'atteindra pas $\frac{1}{15} \times \frac{1}{400} = \frac{1}{6000}$, quantité bien inférieure à l'erreur de lecture.

160. En suivant la même série d'idées que précédemment, on doit chercher à construire un diapason donnant dix oscillations doubles ou vingt oscillations simples par seconde, entretenues électriquement. C'est précisément l'un des premiers essais que j'ai tentés quand j'ai eu reconnu l'insuffisance de la double seconde comme signal chronographique.

J'ai d'abord essayé une simple lame élastique portant le contact d'un électro-aimant, autrement dit un *trembleur électrique* analogue à celui des sonneries. Je constatai immédiatement que, pour mon appareil d'essai, dont la masse était faible, l'action électromagnétique changeait la durée d'oscillation de la lame dans des proportions énormes : par exemple, la lame élastique faisait neuf oscillations par seconde lorsqu'elle était libre, et dix lorsque son mouvement était entretenu électriquement par deux éléments Daniell.

La durée de l'oscillation d'une lame élastique portant une masse relativement légère est donc fonction de l'intensité du courant qui entretient le mouvement. Cette remarque me fit aussitôt rejeter les trembleurs électriques à oscillations lentes, parce que, les courants dont on se sert étant constamment variables, on risque de considérer comme identiques des oscillations qui varieraient avec l'énergie de la pile.

161. J'ai construit ensuite un diapason avec une lame de fer longue et mince, dont les deux branches sont réglées par deux masses additionnelles mobiles à vis. Un électro-aimant placé entre les deux branches et agissant simultanément sur chacune d'elles sert à entretenir le mouvement. Pendant le réglage, j'ai ob-

choes, empêcheraient de représenter le mouvement presque uniforme par un mouvement uniformément varié. Dans le cas présent, toutes les précautions de construction ont été prises pour éviter les discontinuités. Les ressorts, dont le contre-toc est garni, sont destinés précisément à amortir les chocs; d'autre part, le cylindre lui-même, par sa grande masse, fonctionne comme *volant*. Son mouvement de rotation remplit donc, autant que possible, les conditions théoriques imposées par le calcul précédent.

servé un phénomène qui m'a beaucoup inquiété et qui, finalement, m'a fait rejeter aussi les diapasons. Il est arrivé que chaque branche vibrait isolément avec une amplitude périodiquement variable à chaque instant et complémentaire de l'amplitude de l'autre branche, de sorte que le mouvement vibratoire semblait passer alternativement d'une branche à l'autre.

Il est juste de dire que, lorsque la mise en mouvement de ce diapason est faite par deux efforts égaux et symétriques sur chaque branche, les oscillations des deux branches restent égales et constantes sans variation périodique d'amplitude.

Mais la possibilité de cette variation périodique dans l'amplitude des oscillations m'a paru un motif suffisant pour rejeter le diapason à branches minces battant le $\frac{1}{10}$ de seconde. Si l'on joint à cette source possible d'erreur celle qui peut aussi provenir de l'influence de l'intensité du courant et l'inconvénient grave de l'incommensurabilité constamment variable de l'oscillation des diapasons ou des trembleurs, on comprendra pourquoi j'ai immédiatement cherché à lier les oscillations des subdiviseurs aux battements de l'horloge qui fournit l'unité de temps.

Il reste à montrer que le mode de liaison auquel je me suis arrêté est irréprochable au point de vue théorique, sauf à vérifier ultérieurement par les mesures directes que les conditions théoriques ont été bien remplies et que l'exactitude du chronographe est satisfaisante.

Il suffit pour cela d'examiner le principe sur lequel est fondé le mode de régulation ou mieux de *liaison synchronique* commun aux deux appareils, pendule et subdiviseur (nos 152 et 153). Ce principe est le suivant :

Un corps en oscillation, pendule ou lame vibrante, reçoit une attraction très-faible pendant un temps très-court, mais à des intervalles bien égaux. Si la durée de l'oscillation diffère peu de la période de succession des attractions extérieures, le système finit par prendre un mouvement oscillatoire et permanent, de même période que ces attractions.

Théorie de la liaison synchronique des appareils oscillants.

162. Considérons le mouvement du centre de gravité de l'un des appareils oscillants, par exemple du pendule, l'équation qui régit le mouvement de ce point s'obtient en écrivant que le moment des forces d'inertie est égal à la

somme des moments des forces qui agissent sur lui,

$$\mu \frac{d^2\theta}{dt^2} = -pl \sin\theta - q \frac{d\theta}{dt};$$

μ est le moment d'inertie du pendule, p son poids, l la distance de son centre de gravité à l'axe d'oscillation, θ l'angle d'écart avec la position d'équilibre, $q \frac{d\theta}{dt}$ le moment de la résistance de l'air qu'on suppose proportionnelle à la vitesse. Dans le cas de petites oscillations, on peut remplacer $\sin\theta$ par θ ; dès lors l'équation différentielle devient linéaire en θ et s'intègre en posant $\vartheta = e^{\alpha t}$. L'équation du second degré qui détermine α a ses racines imaginaires, et la solution la plus générale se met aisément sous la forme

$$\vartheta = Ce^{-\alpha t} \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} \right), \quad \text{en posant} \quad \alpha = \frac{q}{2\mu} \quad \text{et} \quad \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{pl}{\mu} - \left(\frac{q}{2\mu} \right)^2.$$

Les constantes C et t_0 représentent les constantes d'intégration. Le déplacement x du centre de gravité sur son arc de cercle s'obtiendra en posant $x = l\vartheta$ et $a = Cl$,

$$x = ae^{-\alpha t} \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} \right).$$

C'est un mouvement périodique dont la période T et la phase $\frac{t_0}{T}$ restent fixes, mais dont l'amplitude moyenne $ae^{-\alpha t}$ décroît indéfiniment avec le temps, car α est positif.

163. Examinons l'influence sur ce pendule d'une force additionnelle de faible intensité, agissant pendant un instant très-court. J'appellerai *force de faible intensité* une force qui n'imprimerait au pendule supposé au repos qu'une vitesse très-petite par rapport à la vitesse maximum pendant l'oscillation. Par *temps très-court*, je désignerai un intervalle assez petit pour que, sous l'influence de la force donnée, le déplacement du pendule supposé au repos soit insensible. Ces définitions, malgré leur apparence contradictoire, sont d'accord avec les principes de la Mécanique. En effet, la variation élémentaire de la vitesse ou du déplacement est proportionnelle à la force; mais la variation de la vitesse est proportionnelle au temps pendant lequel la force agit, tandis que la variation du déplacement est proportionnelle au carré de ce temps: une même force peut donc, en agissant pendant un temps très-court, produire une variation appréciable de vitesse et un déplacement insensible.

Ces deux circonstances se présentent dans l'impulsion du *pendule balistique*. Le cas à examiner présentement est un peu plus complexe, parce que la force additionnelle, au lieu d'agir lorsque le pendule est au repos, peut exercer son action à une époque quelconque du mouvement d'oscillation. Pour le traiter, je ferai usage d'un mode de représentation géométrique particulier, qui rend très-simple l'analyse du phénomène mécanique, et qui consiste à figurer la loi du mouvement par une courbe, en prenant comme abscisse le déplacement et comme ordonnée une longueur proportionnelle à la vitesse

$$x = x, \quad y = K \frac{dx}{dt}.$$

Ce mode de représentation permet de construire à chaque instant la grandeur de la force agissant sur le point matériel; en effet, l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ est donnée par l'expression

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y}{K} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{K} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dy}{dx} \frac{y}{K} = \frac{y}{K^2} \frac{dy}{dx},$$

expression qui, dans le cas d'axes rectangulaires, représente, à un facteur constant près, la valeur de la *sous-normale* de la ligne représentative.

164. Avant d'examiner le cas général, nous traiterons le cas particulier plus facile où le mouvement à synchroniser est un mouvement pendulaire simple. Il suffit de supposer $\alpha = 0$ dans les formules précédentes, ce qui revient à négliger la résistance de l'air,

$$x = a \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} \right), \quad y = K \frac{dx}{dt} = aK \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} \right).$$

Comme la constante K est arbitraire, nous la choisirons de telle façon que le facteur $\frac{2\pi}{T} K$ soit égal à l'unité, de sorte que la ligne représentative du mouvement soit un cercle $x^2 + y^2 = a^2$. L'espace parcouru OP (*Pl. VI, fig. 4*) est la projection d'un point mobile M, et la vitesse est proportionnelle à l'ordonnée MP de ce point. On vérifie immédiatement la propriété de la sous-normale d'être proportionnelle à l'accélération ou à la force agissante; car on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a \frac{4\pi^2}{T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t - t_0}{T} \right) = -\frac{4\pi^2}{T^2} x = -\frac{1}{K^2} x.$$

Or x est précisément égal à OP.

Dans le cas présent, il se rencontre une simplification très-utile : c'est que le *temps* lui-même est représenté par un élément simple de la figure, à savoir l'arc décrit par le point M compté à partir d'une origine convenable; en effet, le mouvement pendulaire simple est la projection d'un point M parcourant la circonférence d'un mouvement uniforme.

165. Supposons qu'à partir de l'instant correspondant au déplacement OP une force définie comme plus haut agisse pendant un temps très-court, correspondant au déplacement très-petit PP_1 ; considérons d'abord, pour simplifier, le cas où cette force est constante, commence et finit brusquement. Cette force ajoute brusquement à l'accélération PO la quantité constante OF, de sorte que la normale à la courbe représentative devient MF; son action continue pendant tout le déplacement PP_1 , et, à l'époque correspondant à P_1 , cette force cesse brusquement. D'après l'hypothèse adoptée sur la grandeur et la durée de la force additionnelle, la composante du déplacement dû à son action est négligable. Il en résulte que le mobile arrivera en P_1 au même moment que si cette force n'avait pas agi. La loi du déplacement avec le temps, pendant cette période, n'a donc pas été sensiblement modifiée; mais la loi de la vitesse l'aura été notablement. En effet, il se sera ajouté sous l'influence de cette force une composante proportionnelle au temps, et la ligne représentative qui eût été formée par l'arc MM_1 sera formée par l'arc MM_2 . Cet arc est sensiblement un arc de cercle décrit du point F; car, en vertu de la superposition de l'accélération de la force additionnelle à l'accélération du mouvement pendulaire, la normale passe constamment par le point fixe F.

Lorsque la force additionnelle aura cessé son action, l'accélération redeviendra brusquement OP_1 , et par suite le mouvement redeviendra rigoureusement pendulaire. En effet, la normale à la courbe représentative passera par le point O et la sous-normale sera égale à OP_1 . La ligne représentative du nouveau mouvement sera donc un cercle ayant OM_2 comme rayon.

Si la force additionnelle, au lieu d'être constante, variait d'une manière continue au commencement et à la fin de son action, il n'y aurait rien de changé à l'effet définitif. Le point F se séparerait peu à peu du point O au début pour y revenir à la fin. L'arc MM_2 , au lieu d'être un arc de cercle, serait une ligne se raccordant à l'arc AM en M et à l'arc M_2A_2 en M_2 ; car, en chaque point, la normale doit passer par l'extrémité F de l'accélération additionnelle variable.

En définitive, l'effet de la force additionnelle aura été de réduire l'*amplitude* du mouvement, laquelle sera devenue OA_2 au lieu d'être OA' . La *phase* aussi sera modifiée; en effet, le rayon vecteur OM, qui tourne d'angles proportionnels au temps dans le mouvement pendulaire, tourne plus vite dans le mouvement MM_2 .

qu'il eût tourné si la ligne représentative fût restée MM_1 , car les arcs MM_1 et MM_2 exigent le même temps pour être décrits; le mouvement pendulaire modifié est donc *en avance* sur le mouvement primitif de tout l'angle M_1OM_2 .

166. Si la force avait agi à une autre époque du mouvement, l'effet eût été différent pour un même accroissement de vitesse M_1M_2 . Ainsi, en répétant l'analyse précédente à l'époque correspondant au point A' , on trouve que la variation d'amplitude est insensible, parce que l'arc MM_2 coïncide avec l'arc de cercle en A' ; mais la variation de phase est maximum. En A ce serait l'inverse, de sorte que, si la force additionnelle agit au moment où la vitesse d'oscillation est nulle, l'amplitude n'est pas altérée, mais la phase subit l'altération maximum; au contraire, si elle agit au moment où la vitesse est maximum, l'effet est inverse, la phase n'est pas altérée, et l'amplitude reçoit le maximum d'altération (*). Le changement de sens de la force, toutes choses égales d'ailleurs, change le sens de l'effet produit.

Entre ces extrêmes, les variations de l'amplitude Δa et de la phase Δt_0 ont des valeurs intermédiaires faciles à calculer en fonction de la variation de vitesse $u = M_1M_2$ (fig. 4),

$$\Delta a = M_2M_2'' = u \times \cos M_2M_1M_2'' = u \cos M_1OA = u \cos \tau,$$

$$\Delta t_0 = \frac{M_1M_2''}{a} = \frac{u}{a} \sin \tau,$$

τ étant l'angle AOM qui caractérise l'époque à laquelle la force additionnelle a agi. Ces deux expressions peuvent se mettre sous la forme

$$(\Delta a)^2 + a^2 (\Delta t_0)^2 = u^2 \quad \text{et} \quad \text{tang } \tau = \frac{a \Delta t_0}{\Delta a}.$$

Dans ces deux effets la force additionnelle n'entre que par la quantité u , laquelle est proportionnelle à la quantité de mouvement (*percussion* ou *impulsion*) qu'elle imprimerait au système oscillant si elle agissait seule.

167. Appliquons ces résultats à la liaison synchronique des appareils oscillants. La force additionnelle devient la *force régulatrice* et exerce son action à des intervalles égaux Θ sur le pendule, que nous supposons d'abord au repos

(*) Il n'entre pas dans le cadre de ce Mémoire de développer les applications de cette analyse à l'horlogerie; mais on aperçoit aisément que le problème traité actuellement donne la solution de beaucoup de questions relatives au mouvement des balanciers d'horloge et de chronomètres.

et susceptible d'osciller suivant la même période Θ . La première action a pour effet de lui imprimer une vitesse OV_1 (*fig. 5*) qui le met en oscillation, oscillation qui n'est autre que la projection sur une perpendiculaire OA' d'un point mobile sur la circonférence décrite sur OV_1 comme rayon. Au bout d'une période Θ il reçoit une nouvelle impulsion qui double sa vitesse et, par suite, son amplitude OV_2 , et ainsi de suite; de sorte que sa vitesse et son amplitude croîtront proportionnellement au temps, si la durée de l'oscillation est exactement égale à la période de retour de l'action régulatrice.

Mais, en général, il n'en sera pas ainsi; les deux périodes seront légèrement différentes. Supposons que la période d'oscillation T du pendule soit un peu plus courte que la période de retour Θ de l'action régulatrice : celle-ci se fera sentir un peu après que le pendule aura repassé au même point de sa course, par exemple en P (*fig. 6*), projection de M , tandis que l'action régulatrice avait agi précédemment au moment où il était en O . L'effet produit sera d'augmenter la vitesse de M_1 en M_2 , par suite de *retarder* l'oscillation. D'après cela, il est facile de voir que le synchronisme rigoureux s'établira; en effet, le retard Δt_0 , comme on l'a vu précédemment, croît comme le sinus de $MOA = \tau$, c'est-à-dire comme l'avance progressive de l'oscillation sur le retour de l'action régulatrice. Il arrivera donc un moment où ce retard sera égal à la différence des deux périodes

$$\Delta t_0 = \Theta - T = \frac{u}{a} \sin \tau, \quad \frac{a}{\sin \tau} = \frac{u}{\Theta - T}.$$

Alors le synchronisme sera établi et persistera indéfiniment. Comme on est maître de donner à l'action régulatrice et, par suite, à la vitesse u telle valeur que l'on veut, on sera toujours sûr de satisfaire à cette équation.

168. Toutefois, on pourrait craindre que l'amplitude a ne grandît indéfiniment et, par suite, que la valeur de $\sin \tau$ devînt plus grande que l'unité. Il n'en est rien; a tend vers une limite facile à calculer. En effet, la variation d'amplitude $\Delta a = u \cos \tau$ devient nulle pour $\tau = 0$; il arrive donc un instant où l'amplitude ne croît plus, malgré l'action régulatrice. Pour se rendre compte de la valeur de cette limite d'amplitude, il suffit de remarquer qu'elle est la somme d'une série de termes diminuant jusqu'à zéro. Si la variation Δa est grande, le nombre de termes sera petit, parce que la variation correspondante de phase accroît τ de Δt_0 . Dans ce cas la limite est nécessairement finie; mais, si la variation Δa est faible, le nombre de termes à sommer grandit beaucoup, et c'est alors qu'on peut craindre une limite infinie. Supposons donc l'accroissement de vitesse u assez petit pour qu'on puisse traiter Δa et Δt_0 comme des différentielles, Δt_0 étant

précisément la différentielle $\Delta\tau$ de τ , les formules précédentes donnent

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta\tau}{\text{tang}\tau} = \frac{\cos\tau \Delta\tau}{\sin\tau} \quad \text{ou} \quad d(\log a) = d(\log \sin \tau);$$

d'où

$$a = C \sin \tau,$$

C étant la constante d'intégration. On la détermine par la condition déjà donnée (n° 167)

$$\frac{a}{\sin \tau} = \frac{a}{\Theta - T}, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{a}{\Theta - T},$$

qui exprime qu'à la limite la valeur de Δt_0 est égale à $\Theta - T$.

Ainsi nous arrivons, dans le cas où la masse oscillante ne rencontre aucune résistance, à un régime pour lequel le synchronisme établi persiste indéfiniment avec une amplitude finie proportionnelle à l'impulsion de la force régulatrice et en raison inverse de la différence des périodes.

Cas général.

169. Rétablissons le terme dû à la résistance du milieu. Le coefficient α est positif, mais très-petit; car l'expérience montre que le pendule peut effectuer un très-grand nombre d'oscillations sans que leur amplitude varie beaucoup.

Employons le même mode de représentation géométrique du mouvement, à savoir

$$x = ae^{-\alpha t} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T},$$

$$y = K \frac{dx}{dt} = Kae^{-\alpha t} \left(-\alpha \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} + \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T} \right).$$

L'équation de la courbe représentative s'obtiendrait en éliminant t entre ces équations; mais, comme l'élimination n'est pas possible sous forme finie, la courbe n'a aucun intérêt à cause de sa complication. La forme particulière de l'équation du mouvement permet toutefois une représentation géométrique presque aussi simple que dans le cas précédent, à la condition d'employer, au lieu de coordonnées rectangulaires, des coordonnées obliques dont l'angle soit convenablement choisi.

Soit ψ l'angle des axes AOA' (fig. 7); on aura, entre les coordonnées d'un point $M(x, y)$ et le rayon vecteur $\rho = OM$, les relations déduites du tri-

angle OMP

$$x = \frac{\rho}{\sin \psi} \sin \tau, \quad y = \frac{\rho}{\sin \psi} \sin (\psi - \tau),$$

qu'on peut identifier avec les précédentes, en posant

$$\tau = 2\pi \frac{t - t_0}{T}, \quad \frac{\rho}{\sin \psi} = ae^{-\alpha t}, \quad K \left(-\alpha \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T} + \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \frac{t - t_0}{T} \right) = \sin (\psi - \tau);$$

on en conclut aisément

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2\pi}{T} K = \sin \psi, \\ \alpha K = \cos \psi; \end{array} \right\} \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan \psi = \frac{2\pi}{\alpha T}, \\ K^2 \left(\alpha^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} \right) = 1. \end{array} \right.$$

Il en résulte que la courbe représentative est une spirale logarithmique dont l'équation en coordonnées polaires est de la forme

$$\rho = Ae^{-\alpha t}.$$

La projection oblique d'un point quelconque de cette ligne fournit comme abscisse le déplacement et comme ordonnée la vitesse correspondante.

Comme dans le cas précédent, le *temps* est représenté par l'angle $\tau = \text{AOM} (*)$.

On sait que le rayon vecteur de la spirale logarithmique coupe la courbe sous un angle constant dont la tangente est donnée par l'expression

$$\rho \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) = -\frac{2\pi}{\alpha T}.$$

C'est précisément l'angle ψ des axes ou son supplément. Il doit, en effet, en être ainsi, car la tangente parallèle à l'axe des y doit avoir son point de contact sur l'axe des x pour que l'ordonnée correspondante qui représente la vitesse soit nulle au moment où le déplacement est maximum.

170. La représentation de l'accélération en coordonnées obliques est un peu

(*) L'équation générale des courbes représentatives en coordonnées obliques qui jouissent de cette propriété est

$$\rho = e^{\gamma \tau} \sin^{\beta} \tau,$$

les constantes β et γ étant liées au coefficient K et à l'angle ψ des axes par les relations

$$\beta = \frac{\sin \psi}{K} + 1, \quad \gamma = \frac{\cos \psi}{K}.$$

moins simple qu'en coordonnées rectangulaires; dans ce cas, l'accélération est proportionnelle au segment de l'axe des x compris entre l'abscisse du point donné et une droite symétrique de la tangente par rapport à la bissectrice des axes menée par ce point.

La propriété de la spirale de couper son rayon vecteur sous un angle constant, égal à l'angle ψ des axes, apporte ici une petite simplification. En effet, le rayon vecteur OM (*fig. 7*) fait avec l'axe des x le même angle que la tangente au point M fait avec l'axe des y ; donc la direction MG, qui détermine l'extrémité de l'accélération PG, forme un triangle isocèle MOG. On rétablira la symétrie avec le cas précédent en portant PG' = PG; il en résulte que OG' = 2 PQ, Q étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe des x .

Tous les raisonnements que nous avons faits avec le cercle peuvent se répéter avec la spirale. Ainsi, l'accélération du mouvement oscillatoire étant à chaque instant représentée par la longueur GP (*fig. 7*), l'action d'une force additionnelle représentée par GF sur le pendule aura pour effet de modifier la ligne représentative et de substituer l'arc MM₂ à l'arc MM₁; seulement l'arc de courbe MM₂ ne sera plus, comme précédemment, normal au rayon vecteur joignant M au point F; mais, lorsque l'angle ψ sera voisin de 90 degrés, l'angle de la tangente avec la droite qui joint les points représentatifs M et F restera, pour de petites variations de l'accélération, sensiblement constant et voisin d'un angle droit.

On considérera de même la variation de l'amplitude Δb et celle de la phase Δt_0 . L'amplitude, à la vérité, est variable; mais, si l'on représente par b la valeur $ae^{-\alpha t}$ pour l'époque considérée, c'est-à-dire le rayon vecteur lui-même, la variation instantanée Δb a un sens parfaitement précis, à savoir la variation de l'amplitude actuelle. Les expressions approchées de Δb et Δt_0 s'obtiennent aisément en remplaçant l'arc de spirale MM₁ par la tangente en M; de sorte que, pour calculer $\Delta b = M_2 M'_2$, on a un triangle obliquangle M₂M₁M''₂, au lieu d'un triangle rectangle comme dans le cas du cercle. L'expression de Δt_0 reste la même

$$\Delta b = \frac{u}{\sin \psi} \sin(\psi - \tau), \quad \Delta t_0 = \frac{u \sin \tau}{b}$$

On voit que, suivant l'époque τ à laquelle la force régulatrice a lieu, elle agit principalement sur l'amplitude ou sur la phase, suivant que τ est voisin de zéro ou de $\tau = \psi$. Comme l'angle ψ est, dans la pratique, voisin d'un angle droit, la discussion du cas utile ne différencierait pas de celle qui a été faite pour $\psi = 90^\circ$.

On est donc assuré, en particulier, de l'établissement d'un synchronisme

parfait, qui sera atteint lorsque la variation Δt_0 sera égale à la différence des périodes,

$$\Delta t_0 = \frac{u \sin \tau}{b} = (\Theta - T) \frac{2\pi}{T}$$

La résistance du milieu diminue nécessairement l'amplitude à chaque oscillation, de sorte que la force régulatrice agit toujours dans le sens d'une restitution d'amplitude. La variation d'amplitude perdue en une oscillation se calcule aisément en prenant la différence des expressions de b aux époques t et $t + \Theta$

$$ae^{-\alpha t} - ae^{-\alpha(t+\Theta)} = ae^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha\Theta}),$$

différence qui se réduit sensiblement à $\alpha T e^{-\alpha t} = b \alpha$ lorsque le produit αT est suffisamment petit, de sorte qu'on aura comme seconde équation de condition

$$\Delta b = \frac{u \sin(\psi - \tau)}{\sin \psi} = b \alpha$$

L'amplitude limite b et la phase τ de l'oscillation à laquelle la restitution a lieu se trouvent donc déterminées.

On en tire

Reductions faites
 $\tan \tau = \frac{\Theta - T}{\Theta} \tan \psi$
Valons approximative de tang
 $b = \frac{u}{2\pi} \tan \psi$
 $b = \frac{u \cdot T}{2\pi (\Theta - T)}$

en posant
 $m = \frac{\alpha T}{(\Theta - T) \frac{2\pi}{T}}$

$\tan \tau = \frac{\tan \psi}{1 + \frac{\alpha T}{2\pi(\Theta - T)} \tan \psi}$ et $b = \frac{u}{\frac{2\pi}{T}(\Theta - T)} \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 + 2m \tan \psi + (m^2 + 1) \tan^2 \psi}}$

si on fait
 $\frac{u \sin \tau}{2\pi \frac{(\Theta - T)}{\Theta}}$
 ou bien
 $\frac{u \cos \tau}{\alpha T}$

L'effet définitif de la force régulatrice est donc, sur la ligne représentative, de faire décrire périodiquement le même arc de spirale dont les deux extrémités sont raccordées par une petite ligne qui ferme le contour.

171. Quant à la résistance due au frottement du distributeur, comme elle est faible et qu'elle a lieu pendant un temps très-court, elle est de même nature que la force régulatrice; mais, au lieu de restituer du mouvement, elle en détruit : elle tend donc à modifier à la fois l'amplitude et la phase de l'oscillation. Toutefois, le réglage qu'on lui impose (n° 152), à savoir la condition de s'exercer au moment où le pendule passe par la verticale, c'est-à-dire par sa vitesse maximum, réduit à zéro son influence sur la phase : l'amplitude seule est altérée.

On tiendrait compte de cette action en ajoutant à la variation d'amplitude Δb due à la résistance de l'air un terme de correction δb très-petit et qui ne changerait pas notablement les conclusions précédentes sur la limite de la phase et de l'amplitude. Ce terme, d'ailleurs, est en raison inverse de l'amplitude b dès que l'oscillation est notable, de sorte qu'il devient rapidement négligeable. En effet le travail du frottement sur la petite surface du distributeur est indépendant de la vitesse; il est donc constant, quelle que soit l'amplitude, et diminue d'une quantité constante z la force vive au moment de son maximum, quantité qu'on peut déterminer par une expérience préliminaire. Comme cette vitesse est proportionnelle à l'amplitude b et la force vive à b^2 , on a par différentiation

$$z = h \delta(b^2) = 2hb \delta b, \quad \text{d'où} \quad \delta b = \frac{z}{2hb}.$$

Si l'on voulait tenir compte de ce terme, on procéderait par approximations successives en substituant la valeur de b donnée précédemment.

DESCRIPTION SOMMAIRE D'UNE EXPÉRIENCE.

172. Les préparatifs d'une expérience consistent dans la vérification du bon fonctionnement du moteur de la roue dentée, du chronographe et de l'enregistreur. A cette occasion, l'observateur renouvelle les huiles des mobiles à rotation rapide, constate le bon état des piles, enfume le cylindre de l'enregistreur, règle la pression des tracelets et prépare les cylindres de rechange.

L'expérience étant plus facile de nuit, on dispose une source artificielle de lumière aussi intense que possible; on n'a guère le choix qu'entre la lumière électrique et la lumière Drummond. La préférence doit être, en général, donnée à la lampe Drummond, dont l'éclat, beaucoup moins vif il est vrai, présente une fixité remarquable, et dont la mise en train est immédiate. Il suffit, en effet, d'avoir à sa disposition le gaz d'éclairage et une provision d'oxygène renfermé dans des sacs en caoutchouc. On règle l'intensité de l'incandescence du bâton de chaux en modifiant le débit et la vitesse des gaz par la manœuvre des robinets ou la pression des sacs.

Quelquefois, mais rarement, l'éclat de la flamme d'une grosse lampe à pétrole à mèche plate, dans le sens de la tranche, suffit, sinon pour faire de bonnes observations, au moins pour les essais; il faut donc compter la lampe à pétrole parmi les sources de lumière: elle peut rendre service au besoin.

Réglage de l'éclaireur. — On reçoit l'image de la source lumineuse sur l'ouverture du diaphragme F de l'éclaireur (*Pl. III, fig. 1 et 2, voir n° 130*). Si la lampe est un peu éloignée de l'appareil, cette image est trop petite, ce qui est un inconvénient, parce qu'elle ne peut couvrir d'un éclat uniforme l'ouverture du diaphragme. On évite, dans tous les cas, cet inconvénient en plaçant la lampe dans la lanterne de Duboscq, au foyer d'une lentille de $0^m,10$ à $0^m,15$ de distance focale, qui projette l'image amplifiée du bâton de chaux incandescent sur la lentille collectrice G de l'éclaireur. Cette lentille étant au centre d'un écran noir qui protège l'observateur, l'image amplifiée est bien visible, et l'on peut projeter sur la lentille sa partie la plus brillante. Cette disposition optique est calquée sur le réglage de la lunette d'émission (*voir nos 83 et 84*). La surface de la lentille de projection paraît tout entière illuminée avec l'éclat de la partie de la source projetée sur la lentille G, et c'est l'image de son disque brillant qui se projette sur l'ouverture du diaphragme.

Grâce à cette disposition, l'ouverture du diaphragme reçoit à coup sûr un faisceau de largeur convenable et d'éclat uniforme, quelque petit que soit le diamètre réel de la source lumineuse : il en résulte aussi qu'on peut diminuer beaucoup sans inconvénient la surface incandescente du bâton de chaux en réduisant les dimensions du chalumeau, ce qui économise la provision d'oxygène. En effet, il suffit d'une très-petite source lumineuse, *pourvu qu'elle soit très-intense*; car c'est l'éclat intrinsèque et non la quantité totale de lumière qu'on utilise dans l'expérience.

Si l'on opère de jour avec la lumière solaire, la disposition optique est toute semblable : on reçoit les rayons d'un héliostat sur une lentille de projection à long foyer, qui projette l'image du disque solaire sur la lentille collectrice.

173. Obtention de la lumière de retour pendant le jour. — Il reste à faire naître le point lumineux de retour. De jour, lorsque l'atmosphère est convenable, cette opération n'offre aucune difficulté avec la lumière solaire, parce qu'on voit, dans le champ de la lunette, la station opposée, et qu'on connaît approximativement le point où se trouve le collimateur à réflexion. On a d'abord soin, pour dégager le champ, de rejeter un peu de côté la roue dentée en manœuvrant la vis calante β_3 (*voir n° 144*), et d'amener au besoin l'image présumée de l'objectif du collimateur au milieu du champ en manœuvrant les vis de rectification de la lunette (*Pl. II, fig. 8, voir n° 128*). Il suffit alors de projeter sur cette image le faisceau convergent de lumière réfléchié par la glace M (*Pl. III, fig. 2 et 3*), laquelle est mobile en azimut par le levier m' et en inclinaison par un autre levier à vis m'' . Pour cela il faut pouvoir suivre la position du point de concen-

tration lumineuse. On y arriverait en approchant de temps en temps un écran dans le plan focal $B'B''$ (*fig. 2*); mais on risquerait ainsi de toucher à la roue dentée, de la fausser ou d'enlever le noir qui couvre la denture : il est beaucoup plus simple de placer cet écran (qui est un simple morceau de papier noir) sur le prolongement des rayons de l'éclaireur après leur passage à travers la lame réfléchissante M . On arrive aisément à le placer au foyer B en cherchant à rendre maximum l'éclat et la netteté de la surface éclairée de l'écran qu'on aperçoit par réflexion sur M , en regardant à travers l'oculaire O . A ce moment l'image de cette surface éclairée se projette sur le plan focal $B'B''$ au point même où elle apparaîtrait si l'écran était placé dans ce plan.

On peut ainsi amener le point de concentration lumineuse sur l'image présumée de l'objectif du collimateur, et, en tout cas, explorer les diverses parties du champ. Lorsque la projection lumineuse se fait exactement sur l'image du collimateur préalablement réglé (n° 135), on voit subitement apparaître un point brillant comme une étoile : c'est l'*écho lumineux* ou la lumière de retour.

Pendant le jour, les images sont souvent tellement onduleuses, que leurs contours disparaissent complètement; le réglage, aussi bien que l'observation, devient impossible. Cependant, avec un peu d'habitude et de patience, on arrive au moins à reconnaître quelques éclats de la lumière de retour suffisants pour constater que le collimateur est en bon état.

C'est au crépuscule surtout, avec la lumière Drummond, que ce mode de réglage est parfois facile, à cause du calme et de la transparence de l'atmosphère.

174. *Obtention de la lumière de retour pendant la nuit.* — De nuit, le réglage est plus difficile, parce qu'on ne voit pas l'image de la station opposée. On retrouve néanmoins la lumière de retour en *balayant* méthodiquement toute la surface du plan focal $B'B''$ avec le faisceau de lumière qu'on élargit encore en supprimant le diaphragme focal F . Cette opération s'exécute facilement en manœuvrant les leviers m' , m'' de la lame réfléchissante M . Si l'axe optique de la lunette n'est pas trop dérégulé, on voit le point lumineux apparaître quelque part; en manœuvrant avec précaution les vis de rectification de la lunette, on l'amène au milieu du champ.

Cette opération réussit à coup sûr lorsque l'atmosphère est bien transparente, avec une lunette présentant une longueur moyenne et un champ étendu. Avec la lunette dont je disposais, laquelle possède une distance focale considérable et un champ très-étroit, j'ai rencontré une difficulté spéciale signalée plus haut (n° 129). Malgré le soin apporté à l'exploration du champ, il me fut plusieurs fois impossible de retrouver la lumière de retour. Je reconnus plus tard

la cause de ce mécompte en rapprochant ce fait d'un autre auquel je n'avais pas d'abord attaché d'importance. Plusieurs fois, le lendemain d'une observation de nuit où le point lumineux avait été bien visible, je trouvai l'image de la tour de Montlhéry, c'est-à-dire de la station opposée, tout à fait au haut du champ. Je crus à quelque dérangement accidentel du tube de la lunette, et je m'empressai de le rectifier; mais c'était là une fausse manœuvre et qui préparait un mécompte pour la soirée suivante. En effet, c'est aux variations de la réfraction atmosphérique, exagérée peut-être par la configuration du terrain le long du trajet du rayon lumineux, que ce déplacement de l'image est dû. Pendant le jour l'air devient moins dense, la réfraction diminue et l'image des objets dans la lunette qui renverse s'élève dans le champ; la nuit l'effet est inverse, les objets s'élèvent et leur image s'abaisse. C'est ce que j'ai constaté et vérifié souvent depuis; un soir où le même mécompte m'arrivait, je relevai l'axe de la lunette d'environ 1 minute : la lumière de retour apparut sans difficulté.

Le point lumineux de retour étant bien réglé au milieu du champ, on vérifie si le faisceau de lumière émise couvre bien tout l'objectif de la lunette. Pour cela, on se transporte en avant de cet objectif, et de tous les points de sa surface on constate l'égale visibilité de la lumière concentrée au foyer; s'il n'en était pas ainsi, c'est qu'il y aurait dans l'éclairage quelque dissymétrie facile à rectifier.

175. *Réglage focal de la roue dentée et du faisceau éclaireur.* — Il reste à établir bien exactement la coïncidence du plan focal de la lunette, du plan de la roue dentée et du plan focal de l'éclaireur. On y parvient, ainsi qu'il a été dit plus haut (n° 105), en réglant d'abord le tirage de l'oculaire de façon à voir nettement le point lumineux de retour; ensuite on amène, en manœuvrant les vis calantes β , la roue dentée dans le plan focal de l'oculaire, et enfin on réduit au minimum la tache grise lumineuse que le faisceau éclaireur produit sur la roue dentée, ce qui s'obtient aisément en déplaçant longitudinalement tout l'appareil éclaireur à l'aide de la crémaillère C. La position de la roue dentée est provisoirement réglée de façon que le point lumineux de retour occupe le milieu de la zone dentée; le reste du réglage, relatif au choix du rapport du plein au vide des dents, se fait pendant l'observation, lorsqu'on se sert de roues à dents pointues (n° 32).

Mais ce qu'il importe de régler avec soin, c'est la position du point lumineux de retour au centre de la tache grise circulaire que le faisceau éclaireur produit sur la roue dentée. Cette tache grise, qui n'est autre que l'image conjuguée de l'ouverture circulaire du diaphragme F, visible par diffusion de la lumière sur le noir de fumée, paraît, au premier abord, devoir n'apporter que des inconvé-

nients, en particulier celui d'affaiblir, par contraste, l'éclat du point lumineux : sous ce rapport, on a tout intérêt à diminuer son éclat, ce qu'on obtient en enfumant la denture avec la flamme d'une petite lampe à huile. Mais cette tache grise offre aussi un avantage précieux : en effet, si le champ de vision était entièrement obscur, l'œil resterait sans repère pendant le phénomène de l'extinction, et, lors de la réapparition, il n'apercevrait le point lumineux que lorsque son éclat serait déjà notable : de là une erreur personnelle discutée précédemment (n° 110). La tache grise forme précisément ce repère ; si donc on veille à ce que le point lumineux en occupe le centre, l'œil de l'observateur conservera pendant sa disparition pour ainsi dire la trace de sa position et le reverra, sans surprise, dès qu'il sera perceptible. L'erreur personnelle se trouvera ainsi notablement atténuée.

176. *Précautions additionnelles pour les observations de nuit.* — Dans les expériences de jour, d'ailleurs très-rares à cause des circonstances exceptionnelles qu'elles exigent, la lumière solaire est si éclatante par rapport à l'éclairement des objets, qu'il n'est besoin d'aucune précaution spéciale relative à l'aménagement de la lumière d'émission. Dans les expériences de nuit, au contraire, c'est par défaut de lumière que pèche le point lumineux de retour, par rapport à l'éclairement accidentel du champ. Aussi doit-on veiller à n'introduire dans la lunette d'émission que la quantité de lumière strictement nécessaire pour produire le phénomène principal ; car la lumière émise se réfléchit partiellement dans l'intérieur de la lunette, spécialement sur l'objectif, et revient vers l'observateur proportionnellement à la quantité envoyée ; le champ de la lunette s'éclaire donc et son éclat diminue d'autant celui du point lumineux de retour.

On atténue l'éclat des reflets gênants de deux manières : d'abord en rétrécissant l'ouverture du diaphragme F ; mais on ne peut pas l'abaisser au-dessous d'une certaine limite qui dépend de l'épaisseur des deux lames réfléchissantes accolées et du recouvrement mutuel des images réfléchies sur les quatre surfaces. En second lieu, on peut diminuer l'ouverture angulaire du faisceau éclaireur dont le foyer est précisément la tache grise déjà mentionnée, c'est-à-dire l'image de l'ouverture du diaphragme : à cet effet on diminue, par un écran convenable, la surface de la lentille D (*Pl. III, fig. 1 et 2*) qui produit cette image ; mais il faut avoir bien soin de ne pas trop la rétrécir, sans quoi l'objectif de la lunette d'émission ne serait pas entièrement couvert par le faisceau divergent, ce qui causerait une perte proportionnelle de lumière.

Une autre cause d'éclairement du champ est la présence de petits grains de poussière qui s'attachent aux lames réfléchissantes ; il faut donc essuyer souvent

ces lames avec un petit pinceau, et au besoin les démonter et les nettoyer isolément si les poussières se trouvaient emprisonnées entre les deux lames.

177. Ces précautions prises, il ne reste plus guère que l'illumination due aux points brillants qui se forment par réflexion sur les surfaces de l'objectif. M. Fizeau les éliminait en plaçant à l'anneau oculaire de la lunette un petit fil métallique qui couvrait les images presque confondues de ces points brillants; ce dispositif a l'avantage d'être en dehors de l'appareil optique.

Je suis arrivé au même résultat en collant un petit disque noir de 10 millimètres de diamètre au centre de la surface intérieure de l'objectif; la grande surface de cet objectif permet de négliger la perte de la lumière et les phénomènes de diffraction que peut occasionner la présence de ce disque; cette disposition avait en outre l'avantage de servir à régler l'inclinaison, sur l'axe de la lunette, de l'objectif dont le barillet était fixé au tube par trois vis buttantes; il suffisait d'ôter l'oculaire et de chercher méthodiquement l'inclinaison qui faisait disparaître les points brillants sous le disque noir.

178. *Observations proprement dites.* — Lorsque tous ces réglages sont effectués et que le point lumineux présente un éclat et une fixité convenables, on peut procéder aux observations; l'observateur, après avoir remonté le poids moteur de la roue dentée, dicte à son aide les différents éléments qui caractériseront la série de mesures qu'il va exécuter: en particulier, la charge du moteur, le nombre de dents de la roue dentée employée, le sens de sa rotation et le signe distinctif de la série que l'aide doit marquer sur le cylindre enregistreur.

Après quelques essais préliminaires, l'observateur avertit l'aide de mettre l'enregistreur en marche; il déclanche le levier L (*Pl. IV, fig. 1, 2 et 3*) pour mettre en marche la roue dentée, manœuvre de la main droite le bouton Y du frein (*Pl. III, fig. 1*), et de la main gauche la clef électrique X qui transmet ses signaux. D'autre part, il observe à l'oculaire O le point lumineux de retour au centre de la tache grise (n° 175); il s'efforce de bien saisir la corrélation entre la manœuvre du frein et la variation d'intensité du point lumineux, afin de n'éprouver aucune surprise au moment des extinctions ou des réapparitions, et de pointer exactement avec la clef électrique le moment précis de ces deux phénomènes.

Durant ce temps, l'aide surveille les quatre tracés qui se produisent sur le cylindre enregistreur, afin d'avertir l'observateur en cas d'accident.

179. Il reste peu de chose à ajouter aux descriptions déjà faites (n°s 14, 111)

de la méthode d'observations doubles et croisées nécessaires pour l'élimination des divers genres d'erreurs; il suffit de dire que l'observateur cherche à maintenir les variations de la vitesse entre d'étroites limites, juste suffisantes pour obtenir les extinctions et les réapparitions. Avec un peu d'habitude, il produit à volonté et à peu près en nombre égal les observations en vitesse croissante et en vitesse décroissante caractérisées par abréviation au n° 115 par les notations V et v ; les observations désignées par U et u sont moins faciles à obtenir à coup sûr, parce qu'au moment de son maximum ou de son minimum la vitesse du mécanisme est presque constante; mais les relevés ont montré qu'on les obtient souvent sans s'en apercevoir et qu'elles existent en nombre suffisant pour les discussions ultérieures

L'observateur a soin aussi d'exécuter toutes ces séries par couples aussi identiques que possible, en donnant à la roue dentée des rotations de sens inverse: c'est ce qu'il produit très-simplement par la manœuvre de l'inverseur (n° 139).

Il n'est pas besoin non plus d'insister longuement sur le réglage de la roue à dents pointues, qui donne le rapport du plein au vide le plus convenable à la délicatesse des observations (voir n° 32): l'observateur le choisit, d'après quelques essais, en faisant pénétrer plus ou moins le point lumineux dans la zone dentée et en manœuvrant la vis β_3 (voir n° 144).

Au point de vue des signaux à transmettre, j'ai trouvé que le plus commode et le plus sûr était de produire, pendant toute la durée de l'extinction, une série de signaux rythmés; on les voit représentés sous forme d'une ligne ondulée sur le fac-simile du tracé d'une observation (*Pl. VI, fig. 9*): le moment de l'extinction correspond au premier des signaux et la réapparition à la fin du dernier.

180. L'observateur doit, pour effectuer de bonnes observations, éviter de se fatiguer la vue; aussi, après avoir observé de cinq à dix fois le phénomène d'extinction et de réapparition, doit-il se reposer pendant une ou deux minutes. Il en profite pour dicter à son aide les remarques relatives à la série qu'il vient d'exécuter; en particulier, le nombre des pointés et tout ce qui concerne l'appréciation de leur précision: ces données sont très-utiles pour la discussion ultérieure des résultats.

Lorsque la feuille de l'enregistreur est couverte de signaux, on enlève le cylindre et on le remplace par un de ceux qui ont été préparés à l'avance; les observations peuvent ainsi se continuer tant que l'observateur est dispos et que les circonstances sont favorables. Les feuilles d'observations sont, à la fin de la séance, détachées du cylindre, vernies et séchées. On verra bientôt comment on

peut y trouver les éléments numériques nécessaires pour le calcul de la vitesse de la lumière.

181. *Conditions météorologiques nécessaires.* — Il ne suffit pas d'apercevoir le point lumineux de retour pour pouvoir faire une bonne série d'observations ; il faut que ce point lumineux soit suffisamment brillant, même à travers la denture en mouvement convenable, et surtout qu'il soit parfaitement fixe comme éclat, afin que ses variations d'intensité soient dues exclusivement aux variations de la vitesse de la roue dentée et non pas à des perturbations accidentelles de l'atmosphère. La condition d'éclat est assez souvent remplie : c'est la condition de fixité qui est, au contraire, la plus rare. D'après l'expérience antérieurement acquise, je savais par avance que ce serait là la difficulté principale, vu la grande ouverture de la lunette employée ; j'étais donc bien décidé à m'armer de patience pour attendre les conditions météorologiques favorables. Malgré cela j'ai éprouvé au début (juin 1874) de véritables découragements ; toutes les mauvaises chances semblèrent se réunir, les ondulations pendant le jour, pendant la nuit la brume ou ce que je croyais être la brume (et qui était probablement le déplacement des images par la réfraction atmosphérique), si bien que je restai vingt-trois jours de suite sans pouvoir faire une observation, ni même apercevoir la lumière de retour, qui pourtant avait été très-belle le jour où le collimateur fut réglé.

Ce fut, comme on le voit, un rude apprentissage, mais qui eut le bon côté de me faire étudier une à une toutes les difficultés de détail, en particulier celles qui provenaient de la réfraction (n^{os} 129, 174), et qui auraient pu me faire renoncer à ces expériences. J'appris aussi bientôt à reconnaître les conditions météorologiques favorables pour de bonnes observations ; elles sont en effet différentes de celles qu'on croirait au premier abord les meilleures : ainsi les nuits où le ciel est absolument découvert, nuits si précieuses pour les astronomes, ont toujours été mauvaises pour mes expériences. L'horizon était embrumé, la lumière de retour faible et onduleuse ; au contraire, les nuits où le ciel restait couvert de nuages, surtout après une journée pluvieuse, ont généralement été satisfaisantes, au moins comme éclat du point lumineux de retour ; en revanche, dès que le ciel se découvrait, la température s'abaissait et l'image s'obscurcissait presque toujours. Les mois de juin, juillet et août se passèrent sans que je pusse faire d'observations dignes d'être enregistrées ; mais le mois de septembre fut très-favorable et j'obtins aisément le nombre d'observations nécessaires à une discussion complète ; les mois suivants devinrent brumeux et la lumière de retour ne fut presque plus visible jusqu'au printemps suivant.

Relevé des signaux sur la feuille de l'enregistreur.

182. Les tracés graphiques ont tous été obtenus d'une manière uniforme. Les quatre systèmes de signaux, répartis sur quatre hélices parallèles ou sur quatre droites après le déroulement de la feuille, sont disposés dans l'ordre suivant :

- 1° Signaux de la *seconde sidérale*;
- 2° Signaux du chronographe au *dixième de seconde sidérale*;
- 3° Signaux du *mécanisme* correspondant à 40 ou 400 tours de la roue dentée;
- 4° Signaux de l'*observateur*.

Cet ordre n'a pas été indifférent; en effet, il faut que les signaux de la seconde soient vis-à-vis de ceux du dixième de seconde, afin que la comparaison soit directe et immédiate. La nécessité d'une comparaison directe et immédiate est encore plus évidente pour les signaux du mécanisme et du dixième de seconde, puisque l'*élément de mesure est l'évaluation de la durée du passage de deux ou plusieurs signaux consécutifs du mécanisme, c'est-à-dire de la durée de 40 à 400 révolutions de la roue dentée, en fonction de la durée d'un battement du chronographe*. On satisfait à ces deux conditions en disposant les signaux du chronographe entre ceux de la seconde et ceux du mécanisme. Quant aux signaux de l'observateur, leur place est moins rigoureusement assignée, puisqu'ils ne comportent pas une aussi grande précision : aussi peut-on disposer leur ligne d'un côté ou de l'autre du groupe précédent.

183. L'opération du relevé de ces signaux comprend cinq parties :

1° Le numérotage des battements du chronographe dans le voisinage des signaux de l'observateur. A chaque signal des secondes on écrit (*) un chiffre 0, 1, 2, 3, ... Chaque dixième de seconde porte aussi un chiffre de 0 à 10; l'origine 0 correspond à un battement de la seconde. L'origine du numérotage des secondes entières est arbitraire et change à chaque observation; il suffit de la placer un peu en avant du premier signal à relever, afin d'éviter l'emploi de nombres négatifs.

Le numérotage des dixièmes de seconde n'a pas besoin d'être effectué complètement dans les intervalles où il n'y a pas de signaux du mécanisme ou de l'ob-

(*) Il est très-commode, à cet effet, d'employer une plume métallique trempée dans des couleurs à la gomme délayées convenablement avec de l'eau, qu'on trouve dans le commerce pour la peinture à la gouache. On ajoute une ou deux gouttes d'alcool lorsque la feuille *boit* la couleur.

servateur; mais il est nécessaire de les compter au moins mentalement, battement par battement, afin de vérifier leurs coïncidences de 10 en 10, ou plutôt de 20 en 20 avec les battements de l'horloge (car la période des battements de l'horloge est réellement 2 secondes), et surtout afin d'éviter les erreurs matérielles. Quelque fastidieux que soit ce numérotage, je n'ai pas hésité à l'effectuer au delà même de ce qui était rigoureusement utile au relevé des observations; j'y ai gagné, outre la sécurité des relevés, la certitude absolue de l'excellence du chronographe subdiviseur. En effet, sur les 40 000 ou 50 000 battements que j'ai eu l'occasion de compter, le chronographe n'a *jamais été trouvé une seule fois en défaut*, c'est-à-dire que la coïncidence des traits de 20 en 20 n'a jamais manqué une seule fois: la petite incertitude qui s'est parfois présentée n'a jamais dépassé $\frac{2}{10}$ de battement; du reste, cette discussion reviendra plus loin et sera traitée en détail.

2° La désignation des deux signaux de l'observateur qui correspondent, l'un au commencement de l'extinction θ' , l'autre à la fin θ'' , le fac-simile (*Pl. IV, fig. 9*), montre que ces signaux sont le commencement et la fin d'une espèce d'oscillation que l'observateur produit avec la clef électrique pendant toute la durée de l'extinction (n° 179). Deux traits perpendiculaires à la ligne, prolongés jusqu'aux signaux du chronographe, doivent être tracés pour servir ultérieurement au relevé.

3° La désignation par des lettres a, b, c, \dots des signaux du mécanisme qui doivent servir à déterminer la vitesse au moment des deux signaux de l'observateur. En général trois signaux a, b, c suffisent pour chaque signal θ' ou θ'' , de sorte qu'il faut relever les époques a, b, c, d, e, f des six signaux du mécanisme: souvent on peut se contenter de cinq et même de quatre, parce que les deux groupes de trois signaux peuvent avoir un ou deux termes communs; d'autres fois on est, au contraire, obligé d'en relever un plus grand nombre pour suivre mieux la loi du mouvement.

4° Le relevé des époques θ', θ'' des signaux de l'observateur. Ces signaux, exécutés par la pression de la main sur la clef électrique, ne sont pas susceptibles de la même précision que ceux du mécanisme; aussi peut-on se contenter de les estimer à vue à $\frac{1}{10}$ de battement du chronographe, c'est-à-dire à $\frac{1}{100}$ de seconde à l'aide des deux traits transversaux dont il a été parlé ci-dessus. D'ailleurs une erreur de $\frac{1}{10}$ à $\frac{2}{10}$ de seconde n'aurait qu'une influence très-petite sur le résultat.

5° Le relevé micrométrique des époques a, b, c , auxquelles les signaux du mécanisme ont été tracés: c'est le plus important, et je vais donner quelques détails à ce sujet.

Relevé micrométrique des signaux du mécanisme de la roue dentée.

184. Ce relevé doit être fait avec toute la précision que comporte la finesse des tracés. J'ai adopté dans ce but une méthode à la fois très-rigoureuse et très-expéditive : elle consiste dans l'emploi d'un microscope (*Pl. VI, fig. 8*), portant au foyer de l'oculaire une échelle divisée sur verre en 10 parties égales; on amène le microscope de manière à projeter, sur les traits 0 et 10 de l'échelle, les deux signaux du chronographe qui comprennent le signal à relever : ce dernier se projette sur une partie intermédiaire de l'échelle; on lit immédiatement le dixième et l'on estime le centième du battement du chronographe. La *fig. 11* (*Pl. VI*) montre l'apparence qu'offre le champ du microscope : on aperçoit le numérotage des dixièmes de seconde; la lecture se fait bien, quoique les images soient renversées; mais c'est simplement à titre de vérification, car la lecture du dixième se fait à vue avant d'employer le microscope; on aperçoit aussi le détail des oscillations élastiques du tracelet (*voir n° 149*), si favorables à la précision des signaux.

Il en résulte qu'en juxtaposant les chiffres lus successivement :

- 1° Sur la ligne des secondes;
- 2° Sur la ligne des battements du chronographe;
- 3° Sur les divisions de l'échelle divisée;

4° D'après l'estime de la fraction des divisions de l'échelle, on obtient le nombre qui exprime, en fonction du battement du chronographe, l'époque correspondant au tracé du signal du mécanisme.

Dans l'exemple représenté (*fig. 11*), c'est le signal *c* du fac-simile (*fig. 9*) dont on relève l'époque. Le chiffre des secondes est 2, celui des dixièmes de seconde 8, celui des divisions de l'échelle 7, et celui de l'estime 8, ce qui donne 28, 78, en prenant pour unité le dixième de seconde; c'est en réalité 2^s,878; mais il vaut mieux grouper les chiffres deux par deux, 28, 78, parce que ce sont précisément les groupes qu'on lit séparément, le premier à vue (28), le deuxième dans le champ du microscope (78). Ce changement d'unité, qui conduirait à une valeur de la vitesse de la lumière dix fois trop forte si l'on oubliait d'y avoir égard, ne peut causer aucune erreur sur le résultat final, tandis qu'un autre groupement des chiffres risquerait d'introduire des erreurs plus difficiles à apercevoir. Lorsque le numéro d'ordre des secondes entières dépasse 9, le premier groupe est de trois chiffres, mais la règle de juxtaposition des chiffres s'applique encore.

185. L'exactitude de ce relevé qui, en définitive, permet d'estimer *à vue*, sans

lecture de vis micrométrique, le temps au centième de battement du chronographe, c'est-à-dire au *millième de seconde*, repose tout entière sur la précision avec laquelle on établira la coïncidence des traits extrêmes de l'échelle avec les signaux consécutifs du chronographe. Or il se présente une difficulté qu'il a fallu lever pour donner à la méthode toute l'exactitude qu'elle comporte : les battements consécutifs, bien qu'égaux en durée, offrent sur le tracé graphique des espacements qui ne sont pas rigoureusement identiques à cause des petites variations de vitesse angulaire du cylindre enregistreur, de sorte que, si l'échelle divisée a été tracée de façon que, pour un grossissement donné, les deux traits extrêmes de l'échelle coïncident exactement avec les deux battements du chronographe, il n'en sera plus de même dans une autre région de la feuille. L'emploi du régulateur de M. Yvon Villarceau a réduit les différences à être très-petites ; mais cependant les erreurs qu'elles produiraient ne sont pas négligeables dans des expériences de précision.

186. J'ai alors imaginé de faire varier le grossissement du microscope d'une manière continue, de façon à obtenir toujours la coïncidence de ces longueurs. Cette variation par degrés insensibles du grossissement entraînerait un dépointement continu du microscope ; dès lors une double opération : d'abord un changement de distance de l'objectif à l'objet, puis une adaptation correspondante de l'oculaire au nouveau foyer conjugué de l'objectif.

Dans ces conditions, le maniement d'un semblable appareil serait impraticable ; aussi ne me suis-je arrêté à l'emploi d'un microscope à grossissement variable qu'après avoir trouvé un moyen de réduire à un réglage unique la double accommodation simultanée nécessaire à l'observation. La condition est de lier l'oculaire et l'objectif par un mécanisme permettant d'écarter l'oculaire d'une quantité égale à celle dont le rapprochement de l'objectif vers l'objet éloigne le foyer conjugué ; on parvient ainsi à maintenir l'image de l'objet dans le plan focal de l'oculaire. Cette image étant variable de dimensions, on n'a plus qu'à faire varier d'une manière continue le tirage de l'objectif pour rencontrer une position où la distance de deux signaux consécutifs du chronographe est égale à la distance des traits extrêmes de l'échelle.

*Théorie géométrique du mode de liaison de l'oculaire et de l'objectif
du microscope à grossissement variable.*

187. Soit O l'objet, L la lentille objective, F le plan focal où l'image amplifiée de l'objet vient se former et où se trouve l'échelle divisée (*Pl. VI, fig. 8*).

Soient $p = OL$, $p' = LF$, on a, par la formule bien connue,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

en supposant la lentille objective infiniment mince. (Si l'on veut tenir compte de son épaisseur et de sa complexité, il suffit, comme on sait, de supposer le centre optique L dédoublé en deux points nodaux et le reste du calcul est identique.)

Soit h la distance OF, on a, en outre,

$$p + p' = h.$$

Nous n'avons pas besoin de supposer que les variations de grossissement soient grandes, car les longueurs à égaliser varient peu : considérons donc des variations infiniment petites dp et dp' de p et p' ; elles sont liées par la relation

$$\frac{dp}{p^2} + \frac{dp'}{p'^2} = 0.$$

J'ai adopté comme mécanisme de liaison un pignon fixe P, engrenant deux crémaillères, l'une C' fixée au tube qui porte l'oculaire, l'autre C à celui qui porte l'objectif : en tournant le bouton P dans un certain sens, on écarte le plan F d'une certaine quantité dh et l'objectif d'une quantité égale, mais de sens contraire; il en résulte que $p + p'$ varie de dh et que p varie de $-dh$. Dès lors, on doit avoir les deux nouvelles relations

$$dp + dp' = dh, \quad dp = -dh; \quad \text{d'où} \quad dp' = +2dh.$$

Substituant dans la première relation différentiée,

$$-\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p'^2} = 0 \quad \text{ou} \quad p' = p\sqrt{2}.$$

Cette condition exprime que, dans le voisinage des positions où les deux distances focales conjuguées sont dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, le mode de liaison adopté maintiendra dans le plan focal de l'oculaire l'image conjuguée de l'objet supposé fixe.

188. Le réglage du microscope est très-simple; on peut le faire de deux manières : 1^o par la condition théorique que, dans la position moyenne des crémail-

lères les deux foyers conjugués soient dans le rapport de 1 à $\sqrt{2} = 1,41$. A cet effet, l'oculaire est porté par un tube de tirage spécial T, qu'on peut allonger ou raccourcir à volonté; dès lors, cette condition est facile à remplir.

2° Par tâtonnement, en allongeant ou en raccourcissant le tirage du tube de l'oculaire jusqu'à ce que les variations de netteté d'un bout à l'autre de la course des crémaillères soient négligeables.

L'usage de ce microscope est rendu encore plus simple par deux dispositions pratiques très-importantes.

La première consiste à guider le pied du microscope (qui est carré) en l'appuyant le long d'une règle parallèle aux hélices développées suivant lesquelles se trouvent les signaux; de cette manière, un simple glissement permet de trouver dans le champ du microscope les traits à mesurer. Pour ne pas endommager les feuilles enfumées, ce glissement pourrait s'effectuer sur une planche posée à plat sur la feuille : on évitera mieux encore les accidents en fixant la règle-guide G sur une table AB (*fig. 8*), où l'on a pratiqué une fente longitudinale H parallèle à la règle; cette fente permet à la feuille $\varphi\varphi'$ de se replier à angle droit le long de son bord cylindrique. On repère alors la position, de manière que l'hélice développée coïncide avec la génératrice H' suivant laquelle se raccorde le bord cylindrique avec le plan de la table, génératrice qui se trouve constamment dans l'axe optique RH' du microscope.

189. La seconde disposition additionnelle consiste dans l'emploi au foyer de l'oculaire d'un petit chariot analogue à ceux des micromètres à fil pour déplacer latéralement l'échelle divisée (*fig. 10*); on s'en sert pour achever, par un mouvement délicat, de mettre exactement en coïncidence les traits extrêmes de l'échelle avec les signaux du chronographe. On y arriverait évidemment en faisant glisser le microscope tout d'une pièce le long de son guide; mais il faudrait plus de temps et l'on n'atteindrait pas la précision que donne le déplacement par une vis placée à l'oculaire.

En résumé, l'emploi du microscope ainsi perfectionné augmente la précision des lectures et diminue dans une proportion considérable le temps et la fatigue de ces relevés, par suite les chances d'erreur.

On comprendra de quelle importance il était de perfectionner le mode opératoire quand on songera que le nombre de signaux à relever avec précision a été d'environ 5 pour chaque groupe de signaux et que le nombre des groupes étudiés a atteint 700, au total 3500 lectures. Grâce à ces divers perfectionnements, j'ai pu réduire à 30 secondes le temps nécessaire pour placer le microscope, ajuster l'échelle, lire les chiffres numérotés ou estimés et dicter le nombre

final. Ce mode très-général d'enregistrement d'un système de signaux quelconques, avec une précision d'un millième de seconde, est donc très-pratique.

Calcul numérique des résultats d'après les relevés exécutés sur les tracés graphiques.

190. En résumé, chaque observation donne lieu au relevé de 4, 5, 6, ... signaux du mécanisme et des deux signaux de l'observateur, qu'on inscrit directement sur une feuille lithographiée, dite *feuille de calcul*, dont la disposition sera donnée plus loin. L'observation donnée comme exemple (*fac simile*, Pl. VI, fig. 9) a conduit aux résultats suivants :

Observations n° 143.	Dixièmes de seconde sidérale.	
D = 22910 ^m .	a = 7,91	g' = 12,30
M = 400 tours à chaque signal.	b = 18,35	
N = 150 dents.	c = 28,78	g'' = 30,30
k = 2 signaux relevés de deux en deux.	d = 39,31	

Il s'agit de déduire de ces chiffres la vitesse de la roue dentée, et finalement la valeur absolue de la vitesse de la lumière.

1° *Emploi de la formule d'interpolation de Newton.*

191. Le problème à résoudre est très-simple; il suffit de calculer par interpolation la vitesse de la roue dentée aux époques g', g''. Dans ce but, on remarque que les nombres a, b, c, d représentent les époques (comptées à partir d'une origine arbitraire) des passages successifs de M tours de la roue dentée. Si l'on prend comme variables le temps t et le nombre x de tours de la roue dentée, en regardant t comme fonction de x, t = f(x), les nombres a, b, c sont représentés par

$$\begin{aligned}
 a = f(x_0) &= t_0, & \Delta t_0 &= t_1 - t_0, & \Delta^2 t_0 &= \Delta t_1 - \Delta t_0, & \Delta^3 t_0 &= \Delta^2 t_1 - \Delta^2 t_0, & \dots, \\
 b = f(x_0 + M) &= t_1, & \Delta t_1 &= t_2 - t_1, & \Delta^2 t_1 &= \Delta t_2 - \Delta t_1, & \dots, & \dots, \\
 c = f(x_0 + 2M) &= t_2, & \Delta t_2 &= t_3 - t_2, & \dots, & \dots, & \dots, \\
 d = f(x_0 + 3M) &= t_3, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots,
 \end{aligned}$$

x₀ étant une constante arbitraire qui dépend de l'origine du temps. On a ainsi

une série de valeurs de la fonction correspondant à des valeurs de la variable en progression arithmétique; on est donc conduit à effectuer l'interpolation à l'aide de la formule de Newton, qui s'exprime en fonction des *différences* d'ordre croissant

$$t = t_0 + \frac{x - x_0}{M} \Delta t_0 + \left(\frac{x - x_0}{M} \right) \left(\frac{x - x_0}{M} - 1 \right) \frac{\Delta^2 t_0}{1.2} + \dots$$

Cette formule permet de calculer l'époque t correspondant à un nombre x de tours ou, inversement, de calculer x correspondant à une valeur de t donnée.

Mais, dans le cas présent, la question est un peu plus complexe; ce n'est pas la valeur de x correspondant à t , mais celle de $\frac{dx}{dt}$, c'est-à-dire la vitesse de la roue dentée, qu'il faut calculer. Différentiant la formule par rapport au temps, il vient, après réduction,

$$1 = \frac{1}{M} \frac{dx}{dt} \left\{ \Delta t_0 + \left(\frac{x - x_0}{M} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta^2 t_0}{1} + \left[\left(\frac{x - x_0}{M} - 1 \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \frac{\Delta^3 t_0}{1.2} + \dots \right\},$$

formule qui donne la valeur de $\frac{dx}{dt}$ correspondant à une valeur donnée de x ; il y a donc lieu de calculer d'abord la valeur de x correspondant à t et de la substituer ensuite dans cette formule.

192. Ce calcul sera compliqué ou simple, suivant que le nombre de termes conservés sera grand ou petit; or, grâce à ce que le mouvement du mécanisme est presque uniforme, le développement de la série peut être très-limité. En effet, les différences $\Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2, \dots$ sont presque constantes, ainsi que le montre le tableau suivant :

$$\begin{array}{l|l|l|l} t_0 = a = 7,91 & \Delta t_0 = 10,44 & \Delta^2 t_0 = -0,01 & \Delta^3 t_0 = 0,11 \\ t_1 = b = 18,35 & \Delta t_1 = 10,43 & \Delta^2 t_1 = +0,10 & \\ t_2 = c = 28,78 & \Delta t_2 = 10,53 & & \\ t_3 = d = 39,31 & & & \end{array}$$

Cet exemple, choisi au hasard, ne présente aucune particularité dans l'ordre de grandeur des différences; on peut dire, en général, que la différence seconde est très faible et de l'ordre de grandeur des chiffres *estimés* (millièmes de seconde sidérale) dans la lecture au microscope. La différence troisième ne présente donc, pour ainsi dire, aucune réalité physique, puisque les incertitudes de l'*es-*

time, qui entachent déjà la différence seconde, ont une influence encore plus grande sur elle. Il est donc plausible de négliger les termes du développement à partir du terme en $\Delta^3 t_0$, d'autant que son coefficient est notablement plus petit que celui du terme précédent.

193. Cette limitation du développement réduit l'expression de la vitesse $\frac{dx}{dt}$ à la formule

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M}{\Delta t_0 + \left(\frac{x - x_0}{M} - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 t_0},$$

dans laquelle il reste à substituer la valeur de x correspondant à t , donnée par le premier développement; la valeur de $\frac{x - x_0}{M}$, qu'on représentera par z pour abrégé, est la plus petite racine de l'équation du second degré

$$t = t_0 + z \Delta t_0 + z(z - 1) \frac{\Delta^2 t_0}{2} \quad \text{ou} \quad z^2 \frac{\Delta^2 t_0}{2} + z \left(\Delta t_0 - \frac{\Delta^2 t_0}{2} \right) - t + t_0 = 0.$$

On l'obtiendra par approximations successives; les deux premières donnent

$$z_1 = \frac{t - t_0}{\Delta t_0 - \frac{\Delta^2 t_0}{2}}, \quad z_2 = \frac{t - t_0}{\Delta t_0 - \frac{\Delta^2 t_0}{2}} \left[1 - \frac{\Delta^2 t_0}{2} \frac{t - t_0}{\left(\Delta t_0 - \frac{\Delta^2 t_0}{2} \right)^2} \right].$$

Si l'on remarque que le rapport $\frac{\Delta^2 t_0}{\Delta t_0}$ est, en général, voisin de $\frac{1}{100}$, quantité dont on peut négliger le carré devant l'unité, car le coefficient qui la multipliera sera, au plus, de quelques unités, on réduira la valeur de z_2 à

$$z = \frac{x - x_0}{M} = \frac{t - t_0}{\Delta t_0} \left[1 + \frac{\Delta^2 t_0}{2 \Delta t_0} \left(1 - \frac{t - t_0}{\Delta t_0} \right) \right].$$

Sous cette forme, on voit que, pour la substitution de z dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$, on peut même réduire à l'unité la parenthèse, sans dépasser la limite des quantités négligeables, à cause de la petitesse du facteur $\Delta^2 t_0$, qui multiplie le terme où se trouve z . Il vient donc finalement

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M}{\Delta t_0 + \left(\frac{t - t_0}{\Delta t_0} - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 t_0} = \frac{M}{\Delta t_0 + \left(t - \frac{t_0 + t_1}{2} \right) \frac{\Delta^2 t_0}{\Delta t_0}} = \frac{M}{\mu},$$

en désignant, pour abrégé, par μ la valeur du dénominateur.

Chaque observation double (n° 14) donne lieu à deux calculs semblables et par suite deux valeurs μ' , μ'' , qui correspondent aux époques $t = \theta'$, $t = \theta''$, du commencement et de la fin de l'extinction (*). La moyenne des deux valeurs

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M}{\mu'} + \frac{M}{\mu''} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{M}{2} \left(\frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} \right)$$

représente la vitesse moyenne du mécanisme, celle qui correspondrait au minimum d'intensité de la lumière de retour, s'il était directement observable (n° 14). Cette vitesse, qui exprime un nombre de tours de la roue dentée dans l'unité de temps, est précisément la valeur m , qui entre dans la formule fondamentale (n° 2). On calculera donc la valeur de la vitesse de la lumière par la formule définitive

$$V = \frac{4DMN}{2n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} \right),$$

expression dans laquelle tous les éléments sont connus : D , la distance des stations; M , le nombre de tours de la roue dentée dans l'intervalle de deux signaux; N , le nombre de dents de cette roue, et n l'ordre de l'extinction. Ce dernier nombre se détermine, ainsi qu'on le verra bientôt, sans aucune incertitude, d'après la valeur même du résultat calculé par la formule dans laquelle le facteur $2n - 1$ serait remplacé par l'unité.

(*) On serait tenté de donner, pour justifier cette approximation et supprimer du même coup tous les raisonnements jugés nécessaires pour en établir la légitimité, un motif qui paraît bien plausible au premier abord : c'est que l'époque t , qui sert à calculer x , est donnée avec une approximation assez médiocre; car c'est l'époque θ' ou θ'' du signal de l'observateur, laquelle peut être accidentellement en erreur de $\frac{2}{10}$ à $\frac{3}{10}$ de seconde. On ne voit donc pas, au premier abord, pourquoi l'on évite avec tant de soin de commettre sur cette quantité des erreurs qui évidemment sont d'un ordre très-petit vis-à-vis de l'erreur accidentelle du pointé de l'observateur.

Ce raisonnement, d'ailleurs parfaitement juste, s'appliquerait en toute rigueur à une observation isolée; mais il tombe en défaut lorsqu'on l'applique à une série d'observations nombreuses, dont on prend la moyenne dans les circonstances où les erreurs systématiques doivent s'éliminer et où les erreurs accidentelles, comme celles du pointé de l'observateur, se compensent presque rigoureusement. Dans ce cas, ce n'est plus l'écart moyen des pointés qui fixe la précision, mais l'erreur probable, laquelle diminue rapidement lorsque le nombre d'observations devient considérable.

Il faut donc bien se garder de commettre dans la formule des erreurs appréciables qui entacheraient la moyenne d'erreurs systématiques particulières, tandis que l'effet des erreurs accidentelles des pointés serait éliminé; l'erreur sur le résultat viendrait alors des formules de calcul et non de l'incertitude des observations.

2^o Hypothèse d'un mouvement uniformément varié.

194. On peut traiter la question par des considérations purement mécaniques et trouver une autre formule d'interpolation aussi plausible que la précédente. En effet, la vitesse du mécanisme étant presque constante, l'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire sur la nature du mouvement est de le supposer uniformément varié. Cette hypothèse est d'ailleurs très-naturelle si l'on se reporte à la construction même de l'appareil, dont le poids moteur est une force constante, dont le frein exerce aussi une action constante; car le frottement de deux corps solides est indépendant de la vitesse. La résistance de l'air et les résistances passives du mécanisme sont, il est vrai, fonctions de la vitesse; mais, comme la vitesse varie peu dans le cours d'une observation, on peut considérer l'influence de leur variation comme très-faible. Or un mobile qui n'est soumis qu'à des forces constantes prend un mouvement uniformément varié.

Si ces considérations paraissaient insuffisantes, on pourrait remarquer qu'en général un mouvement quelconque, variant d'une façon continue, peut être remplacé dans un petit intervalle par un mouvement uniformément varié, de même qu'un arc de courbe quelconque peut être remplacé par l'arc du cercle osculateur correspondant au milieu de l'arc.

195. Considérons donc le nombre de tours x du dernier mobile comme fonction du temps $x = \varphi(t)$ (c'est la fonction inverse de celle qui a été considérée précédemment); elle se réduit, dans cette hypothèse, à

$$x = \alpha + \beta t + \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

α , β , γ étant trois constantes qui ont des significations faciles à établir: α est la valeur de x qui correspond à $t = 0$; c'est donc une constante arbitraire, comme l'origine du temps. Différentiant deux fois la valeur de x par rapport au temps, on a

$$\frac{dx}{dt} = v = \beta + \gamma t \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma;$$

β forme la partie la plus influente de la vitesse v à l'époque t , car γ représente l'accélération, et, comme le mouvement est presque uniforme, l'accélération γ est nécessairement très-petite par rapport à β .

Quoi qu'il en soit, la vitesse v varie proportionnellement au temps; il en

résulte que la vitesse moyenne entre les époques t_0 et t_1 est la vitesse réelle à l'époque moyenne $\frac{t_0 + t_1}{2}$: en effet

$$v_0 = \beta + \gamma t_0, \quad v_1 = \beta + \gamma t_1; \quad \text{d'où} \quad \frac{v_0 + v_1}{2} = \beta + \gamma \frac{t_0 + t_1}{2}.$$

Or on connaît immédiatement une série de vitesses moyennes de la roue, car on sait qu'elle a exécuté M tours de l'époque a à l'époque b , M tours de b à c , etc., et les époques correspondantes $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$, où ces vitesses étaient les vitesses réelles du mécanisme.

Désignons par m_0, m_1, m_2, \dots ces vitesses moyennes (ou nombres moyens de tours par seconde), et par $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ les époques correspondantes; on aura le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} m_0 = \frac{M}{a-b} & \text{correspondant à } \tau_0 = \frac{a+b}{2}, \\ m_1 = \frac{M}{b-c} & \text{» } \tau_1 = \frac{b+c}{2}, \\ m_2 = \frac{M}{c-d} & \text{» } \tau_2 = \frac{c+d}{2}, \\ \dots\dots\dots & \text{» } \dots\dots\dots \end{array}$$

Pour calculer la vitesse réelle v à l'époque t , il suffit de considérer les deux vitesses moyennes m_0, m_1 , dont les époques correspondantes τ_0 et τ_1 comprennent l'époque t , et d'écrire la relation de proportionnalité

$$\frac{v - m_0}{m_1 - m_0} = \frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}; \quad \text{d'où} \quad v = m_0 + \frac{m_1 - m_0}{\tau_1 - \tau_0} (t - \tau_0)$$

ou la formule équivalente

$$\frac{m_1 - v}{m_1 - m_0} = \frac{\tau_1 - t}{\tau_1 - \tau_0}; \quad \text{d'où} \quad v = m_1 + \frac{m_1 - m_0}{\tau_1 - \tau_0} (t - \tau_1).$$

On voit que le terme influent est le premier terme m_0 ou m_1 , car la différence $m_1 - m_0$ est très-petite (le mouvement étant presque uniforme); de plus, la fraction qui le multiplie est, dans les deux formules, moindre que l'unité, et, dans l'une ou l'autre, moindre que $\frac{1}{2}$.

Cette expression n'emploie, comme celle qui est déduite de la formule de Newton, que trois époques, a, b, c , pour chaque calcul d'interpolation; elle

serait, au point de vue des opérations arithmétiques à calculer, plus simple que la première s'il n'y avait pas à effectuer des divisions pour obtenir m_0, m_1, \dots . Nous allons voir bientôt qu'on peut se dispenser de ces opérations.

Équivalence numérique des deux formules d'interpolation.

196. L'hypothèse mécanique sur laquelle s'appuie ce calcul est évidemment équivalente à l'hypothèse analytique qui a permis de limiter le développement de la série de Newton; le résultat doit donc être le même, au point de vue numérique, à l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons. En effet les époques a, b, c, d s'appelaient t_0, t_1, t_2, t_3 ; d'autre part, on a

$$m_0 = \frac{M}{\Delta t_0}, \quad m_1 = \frac{M}{\Delta t_1}, \quad m_2 = \frac{M}{\Delta t^2}, \quad \tau_0 = \frac{t_0 + t_1}{2}, \quad \tau_1 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Substituant dans la valeur de ν , on obtient aisément

$$\nu = \frac{M}{\Delta t_0} \left[1 - \left(t - \frac{t_0 + t_1}{2} \right) \frac{\Delta^2 t_0}{\Delta t_1 \left(\frac{\Delta t_0 + \Delta t_1}{2} \right)} \right] = \frac{M}{\Delta t_0} \left[1 - \left(t - \frac{t_0 + t_1}{2} \right) \frac{\Delta^2 t_0}{(\Delta t_0)^2} \right];$$

car, si l'on néglige, comme plus haut (193), les termes où figure le carré de $\frac{\Delta^2 t_0}{\Delta t_0}$, on peut remplacer Δt_1 par Δt_0 . Cette expression de ν coïncide avec celle de $\frac{dx}{dt} = \frac{M}{\mu}$, déduite de la formule de Newton, lorsqu'on effectue la division par μ en supprimant les termes négligeables.

Interprétation mécanique comparée des deux expressions. Forme définitive de la formule d'interpolation.

197. On peut rendre plus évident le lien existant entre ces deux résultats et rendre les deux expressions tout à fait symétriques en modifiant un peu les notations de la formule de Newton et la valeur de l'un de ses termes dans la limite des approximations permises.

Appelons μ_0, μ_1, μ_2 les différences $\Delta t_0, \Delta t_1, \Delta t_2$; on aura alors

$$\Delta^2 t_0 = \mu_1 - \mu_0.$$

La valeur de μ deviendra

$$\mu = \mu_0 + \left(t - \frac{t_0 + t_1}{2} \right) \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0}$$

ou, en posant $\tau_0 = \frac{t_0 + t_1}{2}$,

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} = \frac{t - \tau_0}{\mu_0},$$

formule qui serait de même forme que l'expression de v , établie dans l'hypothèse du mouvement uniformément varié, si, au lieu de μ_0 au quatrième terme de la proportion, on avait $\tau_1 - \tau_0$; mais, dans l'ordre d'approximation où nous sommes, ces deux termes sont équivalents. En effet

$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{t_0 + t_1}{2} = \frac{t_2 - t_1}{2} + \frac{t_1 - t_0}{2} = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2} - \mu_0 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} = \mu_0 + \frac{\Delta^2 t_0}{2}.$$

Or on peut négliger $\frac{1}{2} \Delta^2 t_0$ devant Δt_0 dans ce terme, comme on le voit en revenant à la valeur de μ ; de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} = \frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \quad \text{en regard de} \quad \frac{v - m_0}{m_1 - m_0} = \frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0},$$

avec les relations

$$\frac{1}{\mu_0} = \frac{m_0}{M}, \quad \frac{1}{\mu_1} = \frac{m_1}{M}, \quad \frac{1}{\mu} \quad \text{équivalant à} \quad \frac{v}{M},$$

ce qui montre que la formule d'interpolation de Newton équivaut à supposer que les inverses des vitesses du mécanisme varient proportionnellement au temps, tandis que, dans l'hypothèse du mouvement uniformément varié, ce sont les vitesses elles-mêmes.

La nouvelle formule (en μ) étant un peu plus simple au point de vue du calcul numérique, c'est celle que j'ai adoptée définitivement.

Calcul de la différence des résultats fournis par les deux formules.

198. Sous ces formes symétriques, on peut reconnaître d'une manière plus facile que les deux hypothèses conduisent au même résultat, malgré leur apparence contradictoire; il suffit de calculer directement la différence des valeurs de la vitesse obtenues à l'aide de ces deux expressions correspondant à une

même valeur de t , différence égale à $v - \frac{M}{\mu}$. Ces deux quantités étant très-voisines, on peut indifféremment diviser par l'une ou par l'autre pour avoir la *différence relative*. Choisissons la seconde $\frac{M}{\mu}$: la différence relative est alors $\frac{v\mu}{M} - 1$. Si l'on effectue ce calcul très-simple en remplaçant m_0, m_1, m_2 par leurs valeurs $\frac{M}{\mu_0}, \frac{M}{\mu_1}, \frac{M}{\mu_2}$, on obtient, toutes réductions faites, le résultat suivant, très-symétrique et facile à interpréter :

$$\frac{v\mu}{M} - 1 = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\mu_1 - \mu_0}{\tau_1 - \tau_0} (t - \tau_0) \right] \frac{1}{\mu_1} \left[\frac{\mu_1 - \mu_0}{\tau_1 - \tau_0} (\tau_1 - t_0) \right].$$

Si l'on remarque que le produit des deux facteurs

$$\frac{t - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}, \quad \frac{\tau_1 - t}{\tau_1 - \tau_0},$$

dont la somme est constante, ne peut pas dépasser $\frac{1}{4}$, et que le produit $\mu_0\mu_1$ peut être remplacé par le carré de μ , qui est compris entre μ_0 et μ_1 , il vient, pour la différence relative,

$$\frac{v\mu}{M} - 1 < \frac{1}{4} \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu} \right)^2, \quad \text{sensiblement égal à } \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta^2 t_0}{\Delta t_0} \right)^2;$$

car $\mu_1 - \mu_0$ est égal à $\Delta^2 t_0$ et $\mu - \Delta t_0 < \frac{\Delta^2 t_0}{2}$. Cette différence est toujours positive, par conséquent la valeur de la vitesse calculée par l'expression v (mouvement uniformément varié) est plus grande que celle calculée par l'expression en μ (formule de Newton); mais, comme le rapport de $\Delta^2 t_0$ à Δt_0 est toujours voisin de $\frac{1}{100}$, l'erreur relative commise est moindre que $\frac{1}{40000}$. Le rapport $\Delta^2 t_0$ à Δt_0 pourrait s'élever à $\frac{1}{16}$ que la différence des deux formules ne donnerait pas $\frac{1}{10000}$ d'erreur relative, limite d'exactitude que je me suis proposé d'atteindre dans le résultat final des expériences (*). On peut donc employer indifféremment l'une ou l'autre formule pour l'interpolation des valeurs de la vitesse sans craindre d'introduire d'erreurs systématiques provenant de la formule de réduction. J'ai choisi la formule de Newton modifiée (celle en μ), parce qu'elle conduit à des calculs numériques un peu plus simples que l'autre.

(*) Sur les 630 observations réduites, ce rapport a été seulement deux fois inférieur à cette limite (valeurs nos 94 et 95 du tableau général) et égal à $\frac{1}{13}$; à part ces deux valeurs accidentelles, le rapport n'a jamais atteint $\frac{1}{5}$.

EXEMPLE NUMÉRIQUE DE LA RÉDUCTION D'UNE OBSERVATION.

Disposition des calculs.

199. Voici le détail du calcul numérique appliqué à l'exemple précédemment cité (observation n° 143), avec la disposition uniforme adoptée pour les feuilles de calcul.

$$\begin{array}{l} \text{N}^{\circ} 143. \quad N = 150 \text{ dents,} \quad \int D'MN = 55135,2, \\ \quad \quad \quad M = 400 \text{ tours.} \quad \int D'MN \times 2 = 110270,4. \end{array}$$

$t_0 = a = 7,91$					
$t_1 = b = 18,36$	26,27	$\tau_0 = 13,14$		$\mu_0 = 10,45$	$\Delta^2 t_0 = -0,03 - \frac{0,03}{10,43} = -0,0029$
$t_2 = c = 28,78$	47,14	$\tau_1 = 23,57$	$\tau_1 - \tau_0 = 10,43$	$\mu_1 = 10,42$	$\Delta^2 t_1 = +0,11 + \frac{0,11}{10,48} = +0,0106$
$t_3 = d = 39,31$	68,09	$\tau_2 = 34,05$	$\tau_2 - \tau_1 = 10,48$	$\mu_2 = 10,53$	

$\theta' = 12,30$				$\theta'' = 30,30$	
$\tau_0 = 13,14$	$-0,81 \times -0,029 = +0,002$	$\mu_0 = \frac{10,450}{10,452}$		$\tau_1 = 23,57$	$+6,73 \times +0,0106 = 0,071$
		$\mu' = \frac{10,452}{10,452}$			$\mu_0 = \frac{10,420}{10,491}$
					$\mu'' = \frac{10,491}{10,491}$
$\frac{1}{\mu'} \times \int D'MN \times 2 = (2n - 1)V' = 10550100$				$\frac{1}{\mu''} \times \int D'MN \times 2 = (2n - 1)V'' = 10510900$	
	$= 35 \times 301400.$				$= 35 \times 300300.$

$$\text{Moyenne } u = 35 \times 300900 \checkmark.$$

La première colonne renferme les époques des passages successifs de la came du mécanisme, relevées comme il a été dit précédemment; ce sont des temps exprimés en dixièmes de seconde; la deuxième est une colonne auxiliaire qui renferme les sommes $a + b$, $b + c$, $c + d$; la troisième contient les demi-sommes $\tau_0 = \frac{a+b}{2}$, $\tau_1 = \frac{b+c}{2}$, $\tau_2 = \frac{c+d}{2}$; la quatrième, les différences $\tau_0 - \tau_1$, $\tau_1 - \tau_2$; dans la cinquième se trouvent les différences premières $\Delta t_0 = t_1 - t_0 = \mu_0$, $\Delta t_1 = t_2 - t_1 = \mu_1, \dots$; dans la sixième, les différences secondes $\Delta^2 t_0 = \mu_1 - \mu_0, \dots$; enfin, dans la septième, la valeur des quotients $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\tau_1 - \tau_0}$.

La seconde partie du tableau montre le détail de l'application de la formule

de Newton modifiée, donnée plus haut (n° 197) pour la valeur de μ , qu'on peut écrire

$$\mu = \mu_0 + (t - \tau_0) \frac{\mu_1 - \mu_0}{\tau_1 - \tau_0}.$$

La formule est appliquée deux fois : l'une pour $t = \theta'$, époque de l'extinction; l'autre pour $t = \theta''$, époque de la réapparition. Dans le premier cas, $\theta' - \tau_0 = -0,84$, le facteur $\frac{\Delta^2 t_0}{\Delta t_0}$, calculé dans la septième colonne, est égal à $-0,0029$; la valeur de μ' se compose donc de $\Delta t_0 = 10,450$, augmenté de $+0,002 = 10,452$; la correction ne porte donc que sur le chiffre qui suit le chiffre estimé. Dans le second cas, ce ne sont plus les époques $a, b, c, (t_0, t_1, t_2)$ qui servent, mais $b, c, d, (t_1, t_2, t_3)$ (*).

Le calcul de μ'' est identique à celui de μ' , seulement les indices des t sont augmentés d'une unité. Comme on le voit, les deux groupes de trois signaux nécessaires au calcul des deux vitesses ont deux termes communs, t_1 et t_2 (b et c).

200. D'après ce qui a été dit plus haut (n° 193), il faudrait calculer $4D'MN \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} \right)$; mais j'ai préféré calculer séparément

$$\frac{4D'MN}{\mu'} \quad \text{et} \quad \frac{4D'MN}{\mu''},$$

(*) A ce propos, il est bon d'indiquer la règle pratique qui sert à déterminer le choix des signaux du mécanisme à relever pour le calcul des vitesses correspondant à θ' et θ'' . Étant donné que trois signaux suffisent pour définir le mouvement du mécanisme, il est évident que la vitesse la mieux déterminée est, suivant toute probabilité, celle qui correspond à l'époque moyenne des trois signaux, c'est-à-dire dans le voisinage du deuxième signal. On s'approchera donc le plus possible de cette condition en prenant, pour le deuxième signal du groupe de trois signaux qu'on a à choisir, le signal le plus voisin de celui de l'observateur, ce qui détermine les deux autres. Il en résulte que le signal de l'observateur est toujours compris entre le milieu du premier et du deuxième, et le milieu du deuxième et du troisième, c'est-à-dire entre les deux τ correspondants. C'est même par cette condition, qui frappe les yeux lorsqu'on examine le tracé graphique, qu'on choisit instinctivement les groupes de signaux à relever.

Cette condition se trouve remplie pour le signal $\theta'' = 30,30$, qui est compris entre $\tau_1 = 23,57$ et $\tau_2 = 34,05$, correspondant aux trois signaux b, c, d ; mais elle ne l'est pas pour le signal $\theta' = 12,30$, qui est un peu plus petit que $\tau_0 = 13,14$ et que $\tau_1 = 23,57$; cependant, comme on le voit, la différence est bien faible, $0,84$. Pour la remplir rigoureusement, il aurait fallu relever un signal de plus, ce qui eût été un surcroît de travail sans utilité appréciable. Il en résulte que, lorsque les corrections sont aussi faibles, il n'est pas nécessaire d'observer la règle d'une manière absolue.

ce qui donne comme résultat deux valeurs $(2n - 1)V'$, $(2n - 1)V''$. La simplicité du calcul arithmétique n'en est pas modifiée; mais, sous cette forme, on juge mieux, après la division par $2n - 1$, sur les valeurs V' et V'' , très-voisines du résultat définitif, du plus ou moins d'écart existant entre elles. Ce mode d'appréciation intuitive manquerait complètement sur l'inverse de ces nombres abstraits μ' et μ'' , qui changent de grandeur avec tous les éléments variables de l'expérience, M , N , n . Or l'existence d'un écart un peu considérable entre V' et V'' est généralement l'indice d'une erreur de calcul, d'une erreur de relevé ou d'une imperfection dans l'observation, toutes choses qui apparaîtraient avec moins d'évidence dans l'autre forme de calcul.

Valeur du facteur numérique fixe dans chaque série.

201. Le facteur numérique fixe dans chaque série est $4D'MN$, qui ne diffère du facteur théorique $4DMN$ (n° 193) que par la valeur de D , sur laquelle on a fait porter les multiplicateurs relatifs à l'unité de temps adoptée. En effet, dans le relevé des signaux enregistrés, l'unité de temps est le dixième de seconde; si l'on n'avait pas égard à cette particularité, on trouverait pour la vitesse, c'est-à-dire pour l'espace parcouru pendant l'unité de temps, un nombre dix fois trop petit; il faut donc ajouter le facteur 10 au multiplicateur.

De plus, la seconde du chronographe est la seconde de temps sidéral; or il est d'usage, en Astronomie et en Physique, de prendre pour unité de temps la seconde de temps moyen, laquelle est plus longue que la précédente; le résultat devra donc encore être multiplié par le facteur σ , plus grand que l'unité, représentant le rapport de la seconde moyenne à la seconde sidérale. Ce facteur $\sigma = \frac{366,24}{365,24} = 1,002739$ est défini par le rapport du nombre de jours sidéraux contenus dans l'année tropique (intervalle de retour du Soleil au même équinoxe) au nombre de jours solaires moyens correspondant à la même durée.

Il en résulte que, en exprimant la distance des stations (n° 126) en kilomètres, on aura

$$D' = 10 \sigma D = 10,02739 \times 22^{\text{km}},910 = 229,73,$$

et la vitesse calculée avec ce facteur sera exprimée en kilomètres par seconde de temps moyen. M est le nombre de tours de la roue dentée correspondant à deux signaux consécutifs: on a, en général, $M = 400$ ou $M = 40$ pour les petites vitesses du mécanisme; N est le nombre de dents de la roue: ici $N = 150$; les valeurs de M et de N sont inscrites en haut de chaque tableau.

On remarquera que le facteur employé (199) n'est pas $4D'MN$, mais $4D'MN \times 2$. Cela tient à ce que les signaux du mécanisme ont été relevés seulement de deux en deux, ce qui fait que c'est $(2M)$ et non M qui exprime le nombre de tours de la roue dentée effectués dans l'intervalle des deux signaux mesurés. Il a été souvent nécessaire de compter ainsi les signaux de deux en deux et quelquefois de trois en trois. En effet, lorsque les vitesses sont très-grandes, les signaux successifs se rapprochent beaucoup; or, comme l'erreur inévitable des relevés est à peu près constante sur chaque valeur a, b, c, \dots , il en résulte que l'erreur relative des différences $\Delta t_0 = b - a, \Delta t_1 = c - b$ augmente en raison inverse de ces quantités; comme ce sont les $\Delta t_0, \Delta t_1, \dots$ qui forment les parties importantes de μ , on a intérêt à diminuer cette erreur en doublant ou triplant ces différences. S'il restait quelque doute à ce sujet, il suffirait de considérer le cas extrême où les signaux seraient excessivement rapprochés; il est évident qu'alors l'incertitude des relevés rendrait illusoire la détermination de la loi du mouvement dans l'intervalle de trois signaux.

Détermination de l'ordre n de l'extinction.

202. Enfin il reste à préciser le facteur $2n - 1$. Il semblerait, au premier abord, nécessaire de le déterminer au moment de l'observation, en laissant croître la vitesse depuis zéro et en comptant les extinctions successives; mais il est presque impossible d'opérer ainsi dès que l'ordre dépasse le troisième ou le quatrième, parce que les extinctions se succèdent trop rapidement; d'ailleurs les inadvertances de l'observateur causées par la fatigue de l'observation et, d'autre part, les troubles accidentels de l'atmosphère risqueraient d'induire en erreur. Heureusement il n'est pas nécessaire de faire ce compte très-pénible et très-difficile. Le résultat du calcul $\frac{4D'MN}{\mu}$ fournit $2n - 1$ fois la valeur de la vitesse de la lumière; or il ne peut y avoir de doute sur le facteur $2n - 1$: il suffit de comparer le résultat calculé par la formule ci-dessus avec la série des multiples impairs de la valeur approchée de la vitesse de la lumière. Les termes de cette série se reconnaissent même à vue, grâce à ce que la vitesse de la lumière est à moins de 1 pour 100 en valeur relative égale à 300 000 kilomètres. Les premiers chiffres de chaque terme sont donc sensiblement

	300000	900000	1500000	2100000	2700000	3300000	3900000	...
$(2n-1)$	1	3	5	7	9	11	13	...

La liste des résultats bruts de la formule précédente se trouve, en effet, formée de nombres qui se groupent autour de chacun de ces termes avec de petits écarts causés par les erreurs d'observation; mais ces écarts sont toujours assez petits pour ne laisser aucune incertitude sur le choix du terme et du facteur correspondant; d'ailleurs, si pareille incertitude se fût présentée, l'observation aurait été rejetée comme inadmissible.

Pratiquement on détermine ce facteur en divisant par 3 les premiers chiffres du résultat calculé par la formule $\frac{4D'MN}{\mu}$; ainsi, dans l'exemple choisi, les trois premiers chiffres sont 105, qui, divisés par 3, donnent 35; d'où $2n - 1 = 35$, et $n = 18$.

En résumé, le facteur par lequel il faut multiplier $\frac{1}{\mu}$ dans l'exemple choisi est

$$4 \times 229,73 \times 400 \times 150 \times 2 = 110270,4.$$

Les résultats correspondant à μ' et μ'' sont

$$\begin{aligned} (2n - 1)V' &= 10550100 = 35 \times 301400 \text{ kilomètres à la seconde moyenne;} \\ (2n - 1)V'' &= 10510900 = 35 \times 300300 \qquad \qquad \qquad \text{»} \end{aligned}$$

La moyenne de ces deux nombres est 35×300900 . On la désigne par u , suivant la notation adoptée (n° 115) dans la discussion de l'influence et de l'élimination des erreurs personnelles. On a ajouté le signe \curvearrowright , qui rappelle le sens de la rotation de la roue dentée.

Distinction des quatre espèces de valeurs V, v, U, u et d'une cinquième w.

203. Pour terminer cet exposé, il est bon de faire remarquer combien il est simple de distinguer les quatre modes d'observations doubles décrits et définis lors de la discussion du n° 115, à savoir les résultats obtenus :

		Signe de $\Delta^2 t_0$ correspondant à			
		θ' .	θ'' .		
La vitesse variant d'une manière continue	{	en croissant.	V	—	—
	{	en décroissant.	v	+	+
La vitesse passant	{	par un maximum.	u	—	+
	{	par un minimum.	U	+	—

Il suffit de considérer le signe du $\Delta^2 t_0$ employé (Δt_0 est toujours positif). Dans le cas de V, les deux $\Delta^2 t_0$ (correspondant l'un à θ' , l'autre à θ'') sont négatifs;

positifs tous deux dans le cas de v ; de signes différents dans le cas des deux autres; le premier négatif pour u , positif pour U . C'est pour faciliter la comparaison de ces deux signes que sur chaque feuille de calcul on les met en évidence sur la ligne qui sépare les deux parties du tableau (199).

Enfin on aura une cinquième classe de valeurs désignées par ϖ , pour lesquelles les différences secondes $\Delta^2 t_0$ sont nulles; elles seront discutées à part.

Vérification de l'exactitude numérique des calculs.

204. Tel est le mode de réduction qui a été adopté et exécuté d'une manière uniforme pour toutes les observations. Grâce à la simplicité des calculs et à l'ordre dans lequel ils sont rangés, j'ai tout lieu de croire que les réductions sont exemptes de fautes; il y a d'ailleurs quelques vérifications à observer: en particulier, les différences $\tau_1 - \tau_0$, $\tau_2 - \tau_1$ sont respectivement égales aux moyennes de μ_0 et μ_1 , et de μ_1 et μ_2 ; outre ces vérifications, j'ai considéré comme nécessaire d'effectuer par deux moyens indépendants la division du facteur $4D'MN$ par les μ , à l'aide des Tables de logarithmes et à l'aide de l'arithmomètre de Thomas de Colmar. En outre, l'ensemble du calcul, c'est-à-dire l'opération précédente augmentée de la division par $2n - 1$, a été vérifiée par une série de tableaux numériques déduits de la formule

$$\mu = \frac{4D'MN}{(2n - 1)V},$$

calculés en donnant à M , N , $(2n - 1)$ les valeurs qui se présentaient dans les diverses séries, et à V les valeurs entières comprises depuis 290 jusqu'à 310.

TABLEAU GÉNÉRAL DES DONNÉES NUMÉRIQUES RELATIVES AUX OBSERVATIONS.

205. Les tableaux suivants renferment le détail des relevés numériques effectués sur les tracés graphiques, $t_0, t_1, \dots, t_3, \theta', \theta''$, exprimés en dixièmes de seconde de temps sidéral, ainsi que les résultats correspondants, qualifiés V, v, U, u, ϖ , suivant les notations définies aux nos 115 et 203; ils représentent la vitesse de la lumière en milliers de kilomètres; on y a joint toutes les données nécessaires au calcul numérique de chaque série. L'ordre adopté est celui dans lequel les observations ont été faites et numérotées sur les feuilles de l'enregistreur; les lettres A, B, C, \dots désignent les groupes d'observations faites sans interruption; le numéro qui accompagne cette lettre est la *note de mérite* (de 1 médiocre à 6 excellent) donnée à la série au moment de l'expérience; la flèche indique le

sens de rotation de la roue dentée. La signification du multiplicateur k a été expliquée à la fin du n° 201. Les données météorologiques sont déduites des observations trihoraires faites à l'Observatoire et publiées chaque jour dans le *Bulletin international de l'Observatoire de Paris*. J'ai adopté pour la température moyenne extérieure la température calculée par interpolation pour l'heure moyenne de mes expériences; pour la pression barométrique (réduite à zéro), j'ai effectué le même calcul, mais en retranchant du résultat $2^{\text{mm}},5$ pour tenir compte de la différence d'altitude entre la terrasse de l'Observatoire (90 mètres) et le premier étage (65 mètres), où se font les observations météorologiques.

FEUILLE I.

3 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 6^h30^m à 9 heures du soir.

Roue dentée de 35^{mm} de diamètre; dents pointues. Température moyenne extérieure. 18°.2
 Nombre de dents. . N = 150. Pression atmosphérique 749^{mm},3
 Nombre de tours. . M = 40 jusqu'au n° 43. M = 400 au delà. Direction du vent. OSO fort.
 Facteur $4kD'MN = 55135,2 \times k$ pour M = 400.

No d'ordre.	Lettre de série. N° de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur k	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux									Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.	
			du mécanisme.						de l'observateur.					
			t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	θ'	θ''	$2n-1$			
1	A. 2 ↗	1	7,00	11,00	14,96	18,67	22,35			10,80	18,70	5	288,4	V
2	»	1	5,74	9,52	13,45					7,00	10,70	5	288,3	»
3	»	1	0,53	3,19	5,84	8,48	11,11			2,50	6,50	7	297,3	V
4	»	1	2,14	4,88	7,67					4,20	6,20	7	284,4	»
5	»	1	4,49	6,55	8,60	10,72	12,77	14,83		8,40	14,20	9	296,0	»
6	»	3	0,47	6,59	12,76	25,00	31,09	37,21		5,50	29,50	9	300,5	»
7	»	1	3,92	5,97	7,99					5,20	7,50	9	302,0	V
8	A. 2	1	8,32	10,29	12,33					10,30		9	305,6	
9	B. 3 ↗	3	2,40	8,57	14,79	20,93	27,13			9,20	24,50	9	296,6	U
10	»	2	1,98	7,26	12,65	17,95	23,28	28,55		7,20	24,20	7	294,9	»
11	»	2	28,55	33,80	39,10	44,37				29,20	40,30	7	299,8	U
12	»	3	6,47	12,55	18,61	24,80	30,89	44,91		12,80	39,40	9	299,8	V
13	»	2	5,72	9,75	13,76	17,80	21,83			7,50	17,60	9	303,8	V
14	»	2	3,97	8,08	12,18	16,22	20,36			8,40	18,80	9	296,8	»
15	»	2	1,52	5,58	9,72	13,85	17,92	22,02		3,90	15,70	9	304,0	U
16	»	2	22,02	26,12	30,28					25,70	27,70	9	296,0	»
17	B. 3	3	0,92	7,00	13,10	19,20	25,30	31,31		4,00	27,00	9	303,5	U
18	C. 4 ↗	5	3,18	13,35	23,47	33,48	43,51	53,60		10,50	52,20	9	302,9	»
19	»													
20	C. 4	2	5,82	10,18						7,80		9	281,1	

Signaux effacés par accident.

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLHÉRY.

A. 195

N ^o d'ordre.	Lettre de serie. N ^o de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux									Vitesse de la lum.		Quali- fication du résultat.
				du mécanisme.					de l'observateur.				en milliers de kilom.	2 <i>n</i> - 1	
				<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>g</i> '	<i>g</i> "				
21	D. 1	↘	2	7, 12	11, 43	15, 11	19, 12	23, 10			10, 60	20, 20	9	306, 7	V
22	»		3	1, 18	7, 35	13, 56	19, 76			5, 60	15, 20	9	296, 9	U	
23	»		2	6, 33	10, 42	14, 50	18, 60			8, 80	16, 60	9	299, 2	»	
24	»		2	5, 18	9, 67	13, 75	17, 98			7, 90	14, 00	9	293, 3	»	
25	»		2	17, 98	22, 16	26, 34	30, 60			21, 60	25, 70	9	291, 5	U	
26	D. 4		3	6, 05	12, 20	18, 36	24, 11	30, 56	36, 72	10, 80	32, 30	9	298, 7	»	
27	E. 5	↘	2	6, 83	12, 09	17, 35	22, 60	27, 91		10, 90	21, 30	7	298, 1	»	
28	»		2	3, 25	8, 56	13, 82	18, 94			7, 50	13, 50	7	299, 6	U	
29	»		5	2, 31	15, 11	28, 10	41, 41	54, 27		11, 00	11, 90	7	303, 3	V	
30	»		3	3, 35	11, 30	19, 22	27, 30	35, 20		12, 60	30, 00	7	298, 1	V	
31	»		2	4, 33	9, 13	14, 15	19, 56			6, 60	16, 90	7	308, 8	»	
32	»		2	7, 55	12, 60	17, 90				11, 80		7	306, 9		
33	»		2	17, 90	23, 05	28, 24	33, 15	38, 60		21, 10	31, 30	7	305, 1	U	
34	E. 5		3	9, 77	17, 71	25, 60	33, 12	41, 40		16, 00	35, 50	7	297, 9	»	
35	F. 4	↘													
36	»		2	1, 18	6, 44	11, 70	16, 92			5, 10	10, 10	7	299, 5	»	
37	»		2	16, 92	22, 24	27, 60	32, 93			15, 40	28, 10	7	296, 4	U	
38	»		3	5, 95	13, 10	20, 75	28, 05			11, 10	23, 90	7	320, 8	V	
39	»		2	9, 28	14, 61	20, 02				15, 10		7	292, 9		
40	»		3	7, 96	15, 72	23, 17	31, 11			12, 00	26, 00	7	306, 6	V	
41	»		3	1, 50	9, 13	17, 20	24, 95			5, 40	22, 00	7	301, 5	V	
42	»		3	24, 95	32, 60	40, 16	47, 68			32, 50	40, 60	7	312, 2	V	
43	F. 4	↘	5	1, 30	14, 15	26, 95	39, 67	52, 35		9, 00	49, 30	7	308, 8	V	
44	H. 4	↘	1	4, 67	21, 07	37, 48	54, 10			20, 80	47, 60	11	303, 3	»	
45	»		1	4, 68	21, 00	37, 18	53, 81	70, 00		6, 60	58, 80	11	308, 8	U	
46	»		1	2, 93	19, 65	36, 50				16, 20	23, 00	11	298, 7	»	
47	»		1	1, 86	19, 00	35, 75				35, 00	37, 20	11	296, 0	V	
48	J. 4	↘	1	0, 97	22, 22	43, 23	63, 69			27, 20	42, 80	9	292, 8	V	
49	»		1	7, 12	28, 12	48, 15				18, 90	38, 70	9	299, 4	V	
50	L. 4	↘	1	8, 29	28, 85	49, 24	68, 15			28, 85	55, 00	9	307, 2	V	
51	»		1	4, 54	24, 84	44, 97	63, 52			28, 50	43, 10	9	309, 2	V	

FEUILLE II.

3 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 9^h 30^m à 10^h 30^m du soir.

Roue dentée de 35^{mm} de diamètre; dents pointues.
 Nombre de dents... N = 150.
 Nombre de tours... M = 400.
 Facteur $\frac{1}{k}$ D'AN = 55135,2 \times k.

Température moyenne extérieure..... 16°.33
 Pression atmosphérique..... 750^{mm},6
 Direction du vent..... OSO fort.

52	M. 3	↘	1	6, 03	22, 82	39, 07			20, 50	30, 10	11	305, 0	V
53	»		1	2, 57	18, 78	34, 60			11, 00	20, 10	11	311, 5	V
54	»		1	9, 76	25, 09	41, 90			44, 00	54, 00	11	275, 0	»

A. 25.

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de kilom.			Quali- fication du résultat.
			du mécanisme.					de l'observateur.		<i>n</i> - 1	résultat.		
			<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ</i> '			<i>θ</i> "	
55	N. 5 ↘	1	5,81	22,35	39,53				19,40	31,00	11	291,9	°
56	»	1	3,52	24,90	45,53	65,66			29,50	48,50	9	298,0	V
57	»	1	4,77	25,30	45,90				19,00	23,20	9	298,1	°
58	»	1	45,90	66,30	87,60				53,20	67,00	9	297,9	°
59	»	1	0,23	20,07	39,25				14,00	20,20	9	312,5	V
60	»	1	39,25	59,14	79,67	100,48			57,50	72,50	9	299,9	°
61	»	1	6,50	27,16	47,51				19,30	39,50	9	298,4	V
62	»	1	4,35	23,96	43,42				17,10	19,50	9	312,8	V
63	»	1	0,48	20,00	40,12				19,50	27,10	9	307,6	°
64	P. 4 ↗	1	1,40	15,53	29,58	43,94			11,50	29,00	13	299,7	°
65	»	1	7,95	24,31	40,88	57,48			15,60	18,00	11	306,2	°
66	»	1	7,95	24,31	40,88	57,48			33,00	48,60	11	304,2	°
67	»	1	4,30	20,88	37,48	54,27			10,60	32,10	11	301,9	°
68	»	1	2,64	19,54	36,32				10,50	26,50	11	297,5	V
69	»	1	1,78	18,13	34,55	50,96			24,70	43,60	11	305,4	U
70	»	1	5,50	22,47	39,05				11,80	19,60	11	296,1	V
71	»	1	0,15	16,25	32,98				17,80	20,00	11	303,6	°
72	»	1	16,25	32,98	49,80				29,80	39,00	11	298,7	°
73	»	1	7,60	24,66	42,00				22,80	29,00	11	290,6	°
74	Q. 4 ↗	1	4,20	18,10	32,11	46,18			13,50	15,80	13	304,5	°
75	»	1	4,20	18,10	32,11	46,17			21,80	31,00	13	302,8	°
76	»	1	5,20	22,08	38,48	54,90			27,60	35,20	11	306,3	V
77	»	1	54,90	71,34	87,70	103,50			67,60	81,60	11	306,5	V
78	»	1	5,57	19,50	33,75	48,03			22,50	37,70	13	298,4	°
79	»	1	7,90	22,20	36,35	50,12			24,80	35,80	13	301,1	V
80	»	1	6,44	20,24	34,50				14,20	22,70	13	303,6	°
81	»	1	4,10	18,00	31,52				14,00	23,10	13	309,8	V
82	R. 4 ↘	1	0,38	14,62	28,85	42,63			14,10	28,10	13	300,6	V
83	»	1	1,90	16,13	30,31	44,50			14,00	31,00	13	298,7	°
84	»	1	8,05	22,17	36,30	50,40			17,60	43,40	13	300,7	U
85	»	1	2,93	17,10	31,05	45,36			8,90	30,30	13	300,3	°
86	»	1	5,66	19,76	33,85	47,92			14,80	39,20	13	301,1	V
87	»	1	9,32	23,52	37,72				15,20	31,00	13	298,7	°
88	»	1	5,64	19,27	33,28				32,20	34,40	13	307,0	° (*)
89	S. 4 ↘	1	7,00	23,84	40,50	56,82			20,50	35,00	11	303,3	V
90	»	1	6,94	23,50	39,60				18,30	28,20	11	306,6	V
91	»	1	1,00	17,78	34,58	52,20			13,60	30,70	11	296,6	°
92	»	1	6,70	23,28	39,65				15,00	25,20	11	300,5	V
93	»	1	2,18	22,70	41,70				8,50	17,70	9	296,8	V
94	»	1	9,18	28,73	49,82				24,00	31,00	9	303,5	°
95	»	1	0,83	18,26	34,40				18,00	28,60	11	306,3	V

(*) Par extrapolation.

FEUILLE III.

6 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 11^h 15^m à minuit 15^m. (Interrompues par la brume.)

Roue dentée de 35^{mm} de diamètre; dents pointues. Température moyenne extérieure..... 15°, 1
 Nombre de dents.... N = 150. Pression atmosphérique..... 755^{mm}, 3
 Nombre de tours.... M = 100. Direction du vent..... SO faible.
 Facteur 4 k D'MN = 55135,2 × k.

No d'ordre.	Lettre de série. No de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur k	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de kilom.			Quali- fication du résultat.
				du mécanisme.					de l'observateur.		2π—t	kilom.	résultat.	
				t ₀	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	θ'				
96	A. 3	↖	1	6,55	17,43	28,35	39,17	50,03	19,70	41,40	17	298,2	v	
97	B. 4	↖	1	9,63	21,71	33,76	45,83		20,50	31,10	15	304,7	u	
98	»		1	1,91	12,53	23,10	33,63		12,00	20,00	17	306,6	V	
99	»		1	33,63	44,43	55,45	66,55		47,30	57,10	17	294,3	v	
100	»		1	9,42	20,34	31,08	41,80		21,00	28,80	17	301,0	V	
101	»		1	3,28	13,78	24,39	35,08		19,00	27,30	17	304,8	v	
102	»		1	7,04	21,26	35,40	49,30		26,50	43,80	13	301,7	V	
103	»		1	9,15	23,42	37,46	51,68	65,90	26,00	52,00	13	299,4	u	
104	»		1	6,86	20,95	35,05	49,00	63,10	22,50	47,30	13	303,1	U	
105	»		1	2,25	14,30	26,00			10,30	14,50	15	307,3	V	
105 bis	»		1	8,76	20,90	33,30	45,90		20,00	33,50	15	297,6	v	
106	»		1	5,70	16,76	27,54	38,20	48,74	22,40	36,00	17	299,3	V	
107	»		1	0,17	11,12	22,21			8,80	14,50	17	294,1	v	
108	»		1	8,53	19,04	29,21			18,00		17	315,2		
109	»		1	29,21	39,82	50,82	62,00		41,70	49,00	17	295,8	v	
110	C. 4	↖	1	4,96	16,94	28,90	40,97		18,30	29,80	15	306,4	u	
111	»		1	0,57	12,75	24,88	37,07		11,00	26,80	15	302,3	u	
112	»		1	3,21	15,36	27,38			11,00	16,60	15	303,8	V	
113	»		1	5,23	17,48	29,73			12,00	14,20	15	300,1	v	
114	»		1	29,73	42,10	54,43	66,82		38,70	57,40	15	297,2	u	
115	»		1	8,80	19,61	30,42	41,24		24,00	33,40	17	299,9	v	
116	»		1	9,80	21,95	34,20			5,00	7,20	15	302,5	v	
117	»		1	21,95	34,20	46,55	58,87	71,20	33,40	57,20	15	298,7	v	
118	»		1	8,27	20,42	32,40			14,30	19,30	15	303,4	V	
119	»		1	1,53	13,90	26,25			7,00	12,80	15	297,3	V	
120	»		1	26,25	38,70	51,21			36,00	42,00	15	294,5	v	
121	»		1	5,83	16,30	26,75			17,60	20,40	17	310,2	V	
122	»		1	7,33	17,95	28,64	39,25		12,00	31,60	17	305,3	U	
123	»		1	0,42	11,28	22,10			6,30	15,20	17	299,2	V	
124	D. 3	↖	1	9,58	17,63	25,58	33,42		11,90	28,00	23	301,0	V	
125	»		1	7,35	15,33	23,62			13,00	16,00	23	296,1	v	
126	»		1	8,41	16,38	24,34	32,32		15,60	23,10	23	300,9	u	
127	»		1	0,72	8,50	16,25			7,20	10,00	23	308,8	V	
128	»		1	5,60	13,40	21,22			11,50		23	307,1		

FEUILLE IV.

7 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 6^h 45^m à 8 heures. (Interrompues par les ondulations atmosphériques.)

Roue dentée de 35^{mm} de diamètre); dents pointues. Température moyenne extérieure... 17°, 3
 Nombre de dents... N = 150. Pression atmosphérique... 755^{mm}, 8
 Nombre de tours... M = 400. Direction du vent... OSO très-faible.
 Facteur k D'MN = 55135,2 \times k .

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur k	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux									Vitesse de la lum. en milliers de kilom.		Quali- fication du résultat.	
			du mécanisme.					de l'observateur.				2 n - 1	résultat.		
			t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	θ'	θ''					
129	A.5 ↘	2	7,98	21,62	35,33	48,83					12,00	40,50	27	300,9	U
130	»	2	7,10	20,65	34,10						12,10	26,00	27	302,3	V
131	»	2	4,23	17,65	31,03						10,50	22,50	27	304,7	V
132	»	1	5,47	12,30	19,11	25,97	32,83				10,00	32,00	27	298,4	»
133	B.5 ↗	1	4,50	11,80	19,20	26,60	34,00				9,80	26,60	25	299,6	e
134	»	2	8,61	22,30	36,00	49,75					15,00	34,80	27	298,0	e
135	»	1	8,42	15,20	21,93						16,70	18,80	27	303,2	V
136	»	1	9,00	15,80	22,70	29,45					16,40	23,60	27	298,9	U
137	»	1	3,81	10,60	17,40						5,60	12,40	27	300,6	e
138	»	1	7,65	14,45	21,25						14,50		27	300,3	»
139	»	1	5,10	11,90	18,75	25,50					10,00	17,50	27	299,7	U
140	C.5 ↗	1	1,37	6,68	11,86	17,15					4,50	15,30	35	297,1	»
141	»	2	0,25	10,77	21,35						17,50	19,40	35	297,5	e
142	»	2	21,35	31,90	42,80						28,80	36,50	35	301,1	V
143	»	2	7,91	18,36	28,78	39,31					12,30	30,30	35	300,9	»
144	»	2	6,52	17,00	27,47						14,00	21,40	35	300,8	V
145	»	2	8,15	18,70	29,30	39,78					13,00	30,50	35	299,1	U
146	»	2	7,87	18,45	29,08						16,00	21,80	35	297,1	e
147	»	2	5,70	16,30	26,90						12,50	21,50	35	297,2	»
148	»	2	26,90	37,38	47,90	58,45					31,00	55,50	35	299,7	e
149	»	2	4,45	15,00	25,57						6,80	11,00	35	298,7	e
150	»	2	25,57	36,12	46,70						29,40	37,10	35	298,5	e
151	»	1	0,55	5,80	11,00	16,35					3,60	12,80	35	298,0	»
152	»	2	2,85	13,98	25,12						9,20	13,00	33	300,2	e
153	»	2	25,12	36,30	47,75						32,50	36,50	33	296,5	e
154	»	2	47,75	58,97	70,30						54,50	58,60	33	297,0	e
155	»	1	1,42	6,98	12,52	18,18	23,82				4,00	17,50	33	298,0	V
156	»	1	1,63	7,20	12,75	18,35					4,20	12,00	33	300,5	»
157	»	2	10,10	20,55	30,95						19,00	21,60	35	302,2	V
158	»	2	41,38	51,86	62,30						47,30	55,00	35	301,1	V
159	D.4 ↘	1	8,20	13,85	19,42	25,05					11,20	22,00	33	296,4	»
160	»	1	2,82	8,25	14,53	Le mécanisme s'arrêtait.					9,00	11,60			
161	»	2	9,13	20,24	31,34						18,20	22,30	33	300,9	V
162	»	2	31,34	42,55	53,65	64,65					37,20	52,30	33	300,0	V

No d'ordre.	Lettre de série. No de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux									Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.	
			du mécanisme.						de l'observateur.					
			t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	θ'	θ''	$2n-1$			
163	D. 4 ↗	1	4,03	10,03	16,01					12,00	31	297,2		
164	"	2	2,80	13,85	21,80					10,00	16,20	33	303,8	V
165	"	2	13,85	21,80	35,80					24,40	28,70	33	304,3	e
166	"	2	2,32	13,57	24,78					9,00	13,20	33	297,4	V
167	"	1	7,45	13,04	18,65	21,28				10,60	22,00	33	297,7	e
168	"	1	5,43	10,93	16,50	22,00	27,60			8,30	17,70	33	303,2	U
169	"	1	27,60	33,12	38,75	Le mécanisme s'arrêtait.			34,00	41,00	33	295,2	e	
170	E. 4 ↘	2	1,80	12,32	23,02	33,55				11,80	23,00	35	297,0	U
171	"	2	23,02	33,55	43,91					34,90	37,00	35	302,9	V
172	"	1	6,30	11,41	16,75					12,00	14,00	35	299,0	e
173	"	2	7,71	18,11	28,87					14,00	17,80	35	300,0	e
174	"	2	28,87	39,43	49,84	60,20				36,60	56,20	35	301,8	V
175	"	2	6,48	17,08						11,00		35	297,2	
176	"	2	6,48	17,08	27,62	37,94				26,60	32,10	35	302,2	V
177	"	2	5,02	15,50	25,83	36,20				10,50	16,50	35	302,0	V
178	"	2	36,20	46,68	57,17	67,61				42,30	63,00	35	301,3	U
179	"	2	8,35	19,48	30,04					16,50	23,00	33	299,8	e
180	"	2	30,64	41,75	52,75					36,60	44,30	33	301,9	V
181	"	2	9,30	20,50	31,73					17,00	22,20	33	298,0	e
182	"	2	6,91	18,09	29,42					16,60	20,20	33	296,9	e
183	"	1	5,03	10,25	15,50	20,73				7,00	18,20	35	301,6	U
184	"	1	8,50	13,76	19,02	24,25	29,48			12,00	26,40	35	300,4	e
185	"	1	5,50	10,75	16,05	21,27				9,20	18,50	35	300,7	U
186	"	2	0,15	10,55	20,96					5,50	14,20	35	302,8	e
187	"	2	7,32	18,53	29,73					13,60	23,10	33	298,2	V
188	"	2	3,76	14,82	25,92					8,80	17,80	33	301,8	e
189	"	2	2,40	13,61	24,87					9,10	16,80	33	297,5	e
190	"	2	0,54	11,80	23,02					5,40		33	296,8	
191	"	2	23,02	34,02	45,18	56,32				29,00	50,10	33	302,0	e
192	"	2	9,15	20,24	31,26	42,18				15,30	30,00	33	301,8	e
193	"	2	0,12	11,87	23,68					7,70	17,20	31	301,9	e
194	"	2	8,88	20,75	32,61	44,45				17,20	36,30	31	300,0	V
195	"	1	3,96	9,96	15,90					7,00	14,00	31	298,0	V
196	"					Numéro omis par erreur.								
197	"	1	8,37	14,35						11,70		31	297,4	
198	"	1	6,22	12,12	18,00					14,40		31	301,6	
199	"	2	1,72	13,62	25,42					6,50	19,00	31	300,0	V
200	F. 5 ↗	2	7,15	16,10	25,15					11,00	21,20	41	298,9	e
201	"	2	1,70	10,69	19,76	28,68	37,50			7,00	27,50	41	301,2	U
202	"	2	6,37	15,35	24,45	33,40	42,22			13,30	37,00	41	301,5	U
203	"	2	7,83	17,32	26,80					14,00	20,00	39	298,2	V
204	"	2	26,80	36,35	46,00					32,60	34,70	39	295,5	e
205	F. 5 ↘	2	7,52	17,50	27,53					16,00	21,50	37	297,7	e
206	G. 5 ↗	2	0,45	9,50	18,48	27,38	36,28			5,40	28,80	41	300,5	V
207	"	2	1,30	10,75	20,12	29,57				8,00	28,00	39	299,0	e
208	"	2	0,72	10,27	19,80	29,18				4,30	21,30	39	297,9	V

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de kilom.			Quali- fication du résultat.
			du mécanisme.					de l'observateur.		<i>2n-1</i>			
			<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ'</i>				
209	»	2	8,55	17,95	27,45				19,50		39	298,7	
209 bis	»	2	0,50	10,40	20,23				5,60	15,00	37	302,1	V
209 ter	»	2	5,70	15,60	25,47				11,60	20,50	37	301,6	V
209 quater	»	2	9,28	19,28	29,30	39,28			16,30	31,60	37	298,2	U
210	»	2	5,80	15,84					10,20		37	297,9	
211	»	2	1,00?	10,50	20,57	30,55			4,00	25,00	37	299,0	
212	»	2	4,85	14,75	24,48				8,50	20,00	37	303,5	
213	»	2	29,43	39,45	49,42				35,50	43,00	37	298,4	V
214	»	2	0,10	10,10	20,13	30,12	39,99		6,50	36,00	37	300,1	U
215	»	2	2,90	11,95	21,09				7,30	12,80	41	295,8	e
216	»	2	5,94	14,90	23,84	32,77	41,71	50,70	10,10	40,00	41	298,6	u
217	»	2	8,06	17,11	26,05	35,00			15,20	30,20	41	300,9	u
218	»	2	3,05	11,92	20,87	30,00			10,30	19,50	41	300,4	e
219	»	2	3,90	12,80	21,77				11,40		41	301,4	
220	»	2	8,25	17,17	26,09	34,99			12,80	27,80	41	301,8	U
221	»	2	2,96	11,90	20,82	29,85			11,00	18,20	41	301,0	u
222	»	2	9,92	18,96	27,94				16,00		41	297,9	
223	»	2	27,94	36,91	45,87				31,00	40,40	41	300,0	V
224	»	2	45,87	54,95	63,80	72,68			54,20	63,70	41	301,4	u
225	»	2	9,10	17,78					13,00	14,80	43	295,4	
226	II.5	2	8,33	17,20	26,15				13,50	17,20	41	302,5	e
227	»	2	9,65	18,70	27,65	36,63			14,50	28,50	41	298,6	u
228	»	2	7,40	16,32	25,28				9,90	8,50	41	301,9	e
229	»	2	4,85	13,72	22,60				10,20	17,50	41	303,1	e
230	»	2	4,78	13,72	22,75				10,40	14,10	41	299,8	e
231	»	2	8,75	17,80	26,80	35,75			17,30	28,50	41	298,6	u
232	»	2	9,90	18,88	27,88	36,79			19,50	28,50	41	300,4	U
233	»	2	5,22	14,16					9,30		41	300,8	
234	»	2	2,90	11,86	20,82				5,10	16,90	41	300,2	u
235	»	2	3,45	12,48	21,49				9,90	12,00	41	298,1	V
236	»	2	7,99	16,98	25,90	34,85	43,88		13,80	33,60	41	299,5	u
237	»	2	5,42	14,38	23,25				9,00	13,80	41	300,7	V
238	»	2	23,25	32,20	41,17				26,50	35,60	41	300,3	e
239	»	2	5,45	14,40	23,35	32,41			11,30	23,00	41	299,7	e
240	»	2	9,05	18,02	27,00	35,97			14,40	33,30	41	299,9	U
241	»	2	3,77	12,80	21,83				7,50	19,60	41	297,8	u
242	»	2	7,48	16,57	25,62	34,50			15,60	21,40	41	296,8	V
243	»	2	34,50	43,37	52,27				39,80	47,20	41	302,7	e

FEUILLE V.

8 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 6 heures à 6^h 25. (Interrompues par la brume.)

Roue dentée de 40^{mm} de diam.; dents carrées, plein égal au vide. Température moy. extérieure... 21°, 1
 Nombre de dents.... N = 180. Pression barométrique..... 752^{mm}. 3
 Nombre de tours.... M = 400. Direction du vent..... S faible.
 Facteur 4*k* D'MN = 66162,2 × *k*.

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux									Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.
			du mécanisme.						de l'observateur.				
			<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ'</i>	<i>θ''</i>	2 <i>n</i> - 1		
244	A. 4	1	10,05	18,85	27,75	36,42	45,10		16,60	36,00	25	302,5	c
245	»	1	8,22	17,05	26,00				15,40	22,60	25	296,9	c
246	»	1	1,12	9,97	18,73	27,45			13,20	25,10	25	303,1	V
247	»	1	4,88	13,75	22,55	31,42			12,50	25,70	25	299,0	»
248	»	1	3,52	12,46	21,35	30,28	39,08		15,00	32,20	25	300,1	V
249	»	1	7,15	16,00	24,80	33,53			15,80	25,40	25	301,0	V
250	»	1	3,33	12,15	20,96	29,77	38,55		11,40	29,60	25	299,7	V
251	»	1	2,90	11,73	20,46				7,10	9,30	25	300,2	V
252	»	1	11,73	20,46	29,23	38,00			22,10	34,70	25	302,0	c
253	»	1	1,64	10,50	19,44	28,20			5,60	24,10	25	300,5	U

FEUILLE V (SUITE).

11 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 6^h 15 à 6^h 30. (Interrompues par la pluie.)

Nombre de dents..... N = 200. Température moy. extérieure... 17°, 8
 Nombre de tours..... M = 40 jusqu'au n^o 268 : M = 400 au delà. Pression barométrique..... 749^{mm}. 9
 Facteur 4*k* D'MN = 73513,6 pour M = 400. Direction du vent..... SO fort.

254	A. 4	5	5,92	12,35	18,80	25,23	31,72		8,70	24,00	19	300,4	c
255	»	5	5,20	11,72	18,20	24,80			9,00	20,00	19	296,1	»
256	»	5	3,95	10,50	16,94	23,41			8,30	16,80	19	298,0	»
256 bis	»	5	0,22	6,62	13,08	19,52			4,50	15,80	19	301,1	U
257	B. 5	5	9,35	16,45	23,70	30,90	38,12		12,90	33,40	17	302,1	c
258													
259													
260													
261	»	5	5,00	11,35	17,85				6,00	15,00	19	302,2	c
262													
263	»	5	3,08	10,25	17,38	24,60			7,00	19,30	17	301,0	»
264	»	5	2,12	9,38	16,68	23,85			6,60	19,20	17	299,2	U
265	»	5	7,63	14,80	21,97	29,20			12,00	24,80	17	300,5	»
266	»	5	2,30	9,48	16,75	23,95			4,60	18,40	17	300,2	U
267	»	5	2,10	9,22	16,38	23,55			6,80	16,00	17	302,6	c
268	»	5	0,75	7,95	15,13	22,42			5,00	16,60	17	299,3	»

XIII.

A. 26

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux								2 <i>n</i> -1	Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.	
			du mécanisme.						de l'observateur.					
			<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ'</i>	<i>θ''</i>				
269	C. 3 ↗		Signaux mal formés.											
270	»	1	1,70	14,58	27,42					6,60	21,60	19	300,9	V
270 bis	»	1	1,03	14,05	27,08	39,95				18,50	27,40	19	298,1	U
271	D. 4 ↗	1	7,30	20,22	33,11	46,13				18,00	30,00	19	299,7	»
272	»	1	5,03	17,83	30,63	43,15				19,10	27,00	19	303,0	U
273	»	1	9,34	24,00	38,53	52,93				28,80	45,60	17	298,7	V
274	»	1	3,50	17,65	31,83	46,15				17,80	30,10	17	304,6	»
275	»	1	8,85	23,12	37,38	51,53				19,00	37,50	17	303,8	V
276	»	1	8,80	23,35	38,10	52,75				23,00	37,70	17	294,7	U
276 bis	»	1	7,45	21,93	36,80					19,00		17	296,3	
277	»	1	1,13	14,20	27,42					8,00	19,10	19	294,5	»
278	»	1	7,23	20,13	32,95					15,00	26,50	19	301,0	V
279	»	1	1,56	15,97	30,21					11,50	24,50	17	302,4	V
280	»	1	11,75	26,23	40,73					24,20	35,00	17	298,4	»
281	»	1	6,10	20,18	34,32	48,70				20,50	31,20	17	305,5	»
282	»	1	2,43	17,03	31,56					11,00	24,20	17	297,0	V
283	»	1	5,82	20,26	34,75					15,20	23,00	17	299,1	»
284	»	1	9,26	23,83	38,25	52,38				29,00	38,00	17	301,1	V
285			Signaux mal formés.											
286	»	1	0,59	15,35	30,08					9,60	24,80	17	293,4	V

FEUILLE VI.

11 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 7^h45^m à 9 heures.Roue dentée de 45^{mm} de diamètre; dents pointues.

Nombre de dents.. N = 200.

Nombre de tours.. M = 400.

Facteur 4*k*D'MN = 73513,6 × *k*.Température moyenne extérieure..... 17^o,7Pression atmosphérique..... 750^{mm},0

Direction du vent..... SO fort.

287	E. 5 ↗	1	4,25	18,48	32,77	47,00				14,20	32,50	17	303,4	U
288	»	1	1,50	15,75	29,91					8,60	19,00	17	304,2	V
289	»	1	44,17	58,58	73,12					55,30	61,70	17	298,5	»
290	»	1	3,33	17,94	32,44	46,75				20,70	33,00	17	299,0	V
291	»	1	46,75	61,15	75,52	89,93				65,00	76,60	17	300,4	»
292	»	1	3,81	18,23	32,75					14,00	24,70	17	298,7	»
293	»	1	3,80	18,20	32,55					11,00	22,20	17	300,7	V
294	»	1	5,24	19,55	33,82					11,60	23,00	17	302,5	V
295	»	1	33,82	48,22	62,60	77,18				52,00	61,00	17	299,9	»
296	»	1	6,30	20,77	35,28	49,80				14,10	32,80	17	298,4	»
297	»	1	3,47	17,92	32,30					10,00	21,10	17	299,8	V
298	»	1	0,80	15,12	29,54	43,98				20,60	24,90	17	300,0	»
299	»	1	43,98	58,45	73,17					52,00	60,80	17	297,1	»
300	»	1	3,57	18,10	32,48					22,20	24,70	17	301,1	»
301	»	1	32,48	46,77	61,07					43,60	54,50	17	302,5	»

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLHÉRY.

A. 203

d'ordre.	Lettre de série. N° de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de kilom.			Quali- fication du résultat.	
				du mécanisme.					de l'observateur.		<i>2n-1</i>				
				<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ'</i>					<i>θ''</i>
302	»	1	1	2,54	16,80	30,98	45,40			15,50	28,60	17	303,6	u	
303	»	1	1	45,40	50,95	74,48	89,37			59,00	68,70	17	297,2	u	
304	»	1	1	89,37	103,86	118,35				103,90	110,30	17	298,4	u	
305	»	1	1	118,35	132,80	147,18	161,60			137,60	153,00	17	300,2	u	
306	»	1	1	6,43	20,95	35,32				25,70		17	300,4	u	
307	»	1	1	35,32	49,78	64,00				49,20	59,70	17	303,3	V	
308	»	1	1	64,00	78,35	92,75	107,18			82,50	95,50	17	300,2	e	
309	»	1	1	6,12	20,58	34,90				14,60	22,40	17	300,1	V	
310	»	1	1	6,14	20,21	34,45	48,70			18,00	36,00	17	304,9	e	
311	»	1	1	48,70	62,97	77,40				57,00	67,00	17	301,6	e	
312	»	1	1	3,15	18,02	32,55	47,00			24,30	39,10	17	298,2	V	
313	»	1	1	1,58	15,67	29,86	44,32			20,00	29,90	17	303,6	u	
314	»	1	1	9,35	23,76	38,20				18,40	26,00	17	299,9	e	
315	F.6	↗	1	3,45	17,92	32,22				23,00	27,00	17	302,4	V	
316	»	1	1	32,22	46,55	60,87				39,60	50,80	17	301,9	V	
317	»	1	1	6,03	20,57	34,92	49,18			18,00	35,70	17	300,6	V	
318	»	1	1	0,65	14,93	29,43				13,20	17,40	17	300,4	e	
319	»	1	1	14,93	29,43	43,97				25,00	38,60	17	297,7	e	
320	»	1	1	2,67	16,97	31,16	45,38			15,00	21,00	17	303,7	u	
321	»	1	1	45,38	59,68	74,10	88,60			62,20	82,70	17	299,1	e	
322	»	1	1	0,57	14,93	29,18	43,12			6,60	32,40	17	304,7	V	
323	»	1	1	5,18	19,54	33,83	48,08			21,70	38,50	17	302,7	V	
324	»	1	1	4,07	18,54	32,90				21,90	28,00	17	301,0	V	
325	»	1	1	18,54	32,90	47,33	61,72			33,00	46,00	17	300,2	V	
326	»	1	1	1,15	15,14	29,40	43,65			17,80	42,00	17	303,4	U	
327	»	1	1	43,65	58,02	72,52	86,92			63,00	81,50	17	299,7	U	
328	»	1	1	7,32	22,20	37,20				17,80	20,00	17	290,0	e	
329	»	1	1	22,20	37,20	52,10	67,12			35,00	53,40	17	288,0	u	
330	»	1	1	2,70	17,38	31,92				12,00	19,80	17	296,0	V	
331	»	1	1	8,04	22,52	36,95	51,78	66,67		21,50	31,00	17	299,1	u	
332	»	1	1	66,67	81,08	95,43	109,60			85,00	95,00	17	302,1	V	
333	»	1	1	8,87	23,13	37,57	52,25	67,20	82,02	18,60	34,80	17	300,3	e	
334	»	1	1	82,02	96,52	110,95	125,25			94,00	109,00	17	299,7	V	
335	»	1	1	0,50	14,90	29,30	43,40	57,02	71,06	11,70	25,00	17	301,0	U	
336	»	1	1	71,06	85,30	99,63				79,70	81,60	17	303,4	e	
337	»	1	1	85,30	99,63	114,00	128,33			102,20	121,00	17	301,5	U	
338	»	1	1	128,33	142,83	157,34	171,80	186,50		146,50	168,00	17	298,6	e	
339	»	1	1	1,52	16,15	30,64	45,16			13,00	26,00	17	297,1	u	
340	»			Numéro omis par mégarde.											
341	»	1	1	6,00	20,23	34,52	48,88	63,70		20,50	38,00	17	302,3	e	
342	»	1	1	78,80	93,41	107,72	122,00	135,88	149,90	98,00	114,10	17	302,0	V	
343	»	1	1	149,90	164,20	178,62	193,20			164,10	179,00	17	299,7	e	
344	»	1	1	3,38	17,82	32,12				10,60	27,70	17	301,3	V	
345	G.3	↗	1	0,95	12,70		Signaux insuffisants.			2,00	23,00				
346	»	1	1	2,32	14,07	25,77				14,00	19,30	21	298,9	V	
347	»	1	1	6,35	18,27	30,06	41,78			23,00	35,00	21	297,6	V	

A. 26.

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

N° d'ordre.	Lettre de série. N° de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de			Quali- fication du résultat.	
				du mécanisme.					de l'observateur.		<i>n</i> - 1	kilom.			
				<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>t</i> ₆			<i>θ</i> '		<i>θ</i> "
348	»		1	9,06	20,75	32,32					19,00	28,00	21	301,8	V
349	»		1	8,32	19,81	31,47	43,22				22,00	34,80	21	300,1	»
350	»		1	6,13	17,80	29,50	41,12	52,55	63,93		14,80	30,70	21	300,1	U
351	»		1	63,93	75,40	87,03	98,65				79,80	93,30	21	301,5	U
352	»		1	7,82	19,60	31,20	42,90	54,50			20,00	41,80	21	300,0	V
353	»		1	1,32	12,80	24,42	36,10				7,80	24,00	21	302,7	»
354	»		1	4,00	15,60	27,20	38,84				11,20	26,00	21	301,6	»
355	»		1	9,61	21,40	33,05	44,61				22,50	39,20	21	301,0	V
356	»		1	6,53	18,11	29,70	41,32				21,70	34,80	21	301,7	»
357	H.4	↗	1	4,11	15,90	27,41	38,87				15,00	32,00	21	302,7	V
358	»		1	1,90	13,52	25,08	36,62				15,00	31,00	21	302,8	V
359	»		1	2,13	13,75	25,45	37,12				15,00	25,40	21	299,8	U
360	»		1	2,50	14,12	25,78					8,50	18,00	21	300,8	»
361	»		1	9,00	20,57	32,30	44,16	56,21	68,43		20,00	34,60	21	298,5	»
362	»		1	68,43	80,20	91,90	103,70				81,00	97,70	21	297,5	»
363	»		1	3,30	14,78	26,20	37,71				16,50	29,30	21	305,4	»
364	»		1	37,71	49,31	61,03	72,82	84,70			45,30	54,00	21	300,2	»
365	»		1	84,70	96,29	107,89					92,00	100,40	21	301,9	»
366	I.5	↘	1	1,75	13,55	25,30	37,01				13,80	30,00	21	298,1	V
367	»		1	37,01	48,80	60,45					41,00	53,50	21	298,7	V
368	»		1	2,31	14,09	25,71	37,40				12,30	33,00	21	298,9	»
369	»		1	10,01	21,52	33,22	44,92				23,00	38,60	21	300,1	»
370	»		1	1,07	12,75	24,42	36,07				11,10	30,30	21	300,2	V
371	»		1	5,72	17,43	29,17	40,89				17,70	35,50	21	298,6	U
372	»		1	10,00	21,60	33,30	44,81	56,40			17,80	37,00	21	302,4	U
373	»		1	56,40	68,10	79,73					64,00	75,80	21	300,4	V
374	»		1	2,32	14,00	25,75	37,45	49,14			8,00	37,00	21	299,5	U
375	»		1	9,77	21,31	32,96	44,60	56,18			24,50	45,00	21	301,5	U
376	»		1	5,21	17,16	28,89	40,45				18,60	34,00	21	299,5	V
377	»		1	1,61	13,32	25,00	36,65				8,80	28,60	21	299,7	V
378	»		1	6,57	18,35	30,00	41,50				19,20	35,60	21	301,7	V
379	»		1	53,17	64,85	76,50					64,20	76,00	21	300,3	V
380	»		1	8,25	19,92	31,42	43,07				19,30	35,00	21	301,6	»
381	»		1	3,50	15,28	27,02	38,70	50,40			16,00	40,80	21	298,6	»
382	»		1	6,35	17,95	29,60	41,15				12,00	35,00	21	302,4	U
383	»		1	2,50	14,23	26,02	37,80				11,80	31,00	21	297,6	U
384	»		1	5,65	17,30	28,92	40,62	52,33			17,70	45,60	21	300,0	»
385	»		1	10,00	21,73	33,42	45,10				21,00	41,70	21	299,4	V
386	»		1	7,02	18,77	30,41					12,80	17,30	21	298,5	V
387	»		1	30,41	42,20	53,89	65,45	77,27			37,00	69,00	21	297,3	»
388	J.3	↘	1	10,55	24,68	38,88	53,16				27,00	41,50	17	304,2	» (*)
389	»		1	2,13	16,85	31,54	46,15				16,30	36,50	17	294,9	V
390	»		1	8,43	22,45	36,53					20,70	30,30	17	307,5	»

(*) Lumière de la lampe au pétrole jusqu'à la fin de la feuille.

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite.		Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux									Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.	
	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	du mécanisme.					de l'observateur.						
			<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ'</i>	<i>θ''</i>	2 <i>n</i> -1			
391	»	1	1,00	15,60	30,10	44,56				11,00	37,00	17	298,0	V
392	»	1	9,80	24,25	38,77	53,38				15,40	37,40	17	298,3	<i>e</i>
393	»	1	2,98	17,61	32,17	46,60				15,00	33,50	17	297,3	V
394	»	1	1,60	15,90	30,32	44,84	59,45			21,80	43,00	17	298,6	U
395	»	1	8,62	23,11	37,55	52,01				17,00	41,00	17	298,8	<i>u</i>
396	»	1	3,21	17,70	32,30	47,00				12,00	41,00	17	296,0	<i>e</i>
397	»	1	6,27	20,80	35,30	50,21	Fin brusque.			18,70	37,20	17	295,5	<i>u</i>
398	K.3	1	1,97	16,48	31,12	45,75				10,80	29,10	17	296,6	V
399	»	1	0,50	15,09	29,64					7,60	26,10	17	296,2	<i>u</i>
400	»	1	1,72	16,39	31,00	45,66				11,80	38,70	17	295,0	<i>u</i>
401	»	1	3,65	18,19	32,72	47,18				11,20	35,00	17	298,0	V
402	»	1	47,18	61,46	75,73	90,10				67,00	83,00	17	301,9	<i>u</i>
403	»	1	8,19	22,43	36,88					18,00	29,80	17	301,0	<i>e</i>
404	»	1	5,00	19,30	33,66	48,10				22,60	41,60	17	300,5	<i>e</i>
405	»	1	7,40	21,92	36,30	50,51	64,78			28,00	51,80	17	302,1	<i>u</i>
406	»	1	5,21	19,50	33,78	48,20				17,80	37,40	17	302,0	<i>u</i>
407	»	1	1,95	16,52	30,78	45,00				18,30	43,10	17	302,6	V

FEUILLE VII.

11 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 9^h45^m à 11^h45^m.

Roue dentée de 45^{mm} de diamètre; dents pointues. Température moyenne extérieure 17^o,6
 Nombre de dents. . . N = 200. Pression atmosphérique 750^{mm},4
 Nombre de tours. . . M = 400. Direction du vent SO fort.
 Facteur $kD'MN = 73513,6 \times k$.

408	L.5	1	8,38	21,25	34,18	47,23				13,00	31,10	19	299,7	<i>e</i>
409	»	1	6,08	18,80	31,62	44,51	57,47			24,50	42,00	19	300,9	<i>e</i>
410	»	1	5,95	19,00	32,00	44,95				20,00	38,50	19	298,0	V
411	»	1	3,00	15,85	28,72	41,62				15,80	28,70	19	300,6	<i>e</i>
412	»	1	0,47	13,52	26,49	39,50	52,42			17,60	41,00	19	298,4	V
413	»	1	5,35	18,18	31,00	43,85				17,00	36,00	19	301,5	<i>u</i>
414	»	1	6,48	19,52	32,54	45,52	58,53			20,50	49,00	19	297,3	<i>u</i>
415	»	1	3,38	16,21	29,07	41,90	54,92			13,00	37,00	19	301,2	<i>e</i>
416	»	1	0,71	13,57	26,39	39,17				8,50	26,30	19	301,7	V
417	»	1	4,35	17,25	30,17					12,00	20,50	19	299,8	<i>e</i>
418	»	1	5,82	18,74	31,68	44,60				13,00	27,50	19	299,3	U
419	»	1	44,60	47,50	70,39					41,20	44,00	19	299,9	V
420	»	1	44,60	47,50	70,39					61,20	63,50	19	300,3	V
421	»	1	0,51	13,41	26,30	39,30				14,60	23,50	19	299,8	<i>u</i>
421 bis	»	1	5,08	18,00	31,07					20,50		19	297,0	
422	»	1	7,53	20,38	33,23	46,11	59,08			17,00	43,20	19	299,8	<i>e</i>
423	M.5	1	2,27	14,97	27,62	40,33				11,00	35,40	19	304,7	<i>u</i>
424	»	1	0,32	13,52	26,68	39,90				16,00	31,30	19	293,3	<i>u</i>

DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite. Sens de rotation.	Multi- plicateur k	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux								Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.	
			du mécanisme.					de l'observateur.					
			t ₀	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	t ₆	θ'			θ''
425	»	1	10,12	22,95	35,80	48,70			19,10	38,30	19	300,9	e
426	»	1	5,10	18,25	31,40	44,54			12,00	29,20	19	294,3	U
427	»	1	0,56	13,30	26,00				11,80		19	304,1	
428	»	1	26,00	38,78	51,69	64,60	77,72		39,30	64,80	19	299,2	e
429	»	1	3,84	16,70	29,55	42,35			11,70	35,00	19	301,6	V
430	N. 6 ↘	1	0,80	13,53	26,31	39,06			7,80	28,10	19	303,6	U
431	»	1	7,12	20,24	33,33	46,35			16,00	31,20	19	295,6	V
432	»	1	5,95	18,90	31,70	44,60			14,60	36,20	19	299,7	V
433	»	1	2,97	15,74	28,53	41,31	54,01		13,60		19	302,8	
434	»	1	2,97	15,74	28,53	41,31	54,01		22,50	37,00	19	302,8	V
435	»	1	0,00	12,98	25,95	38,90	51,86		14,70	37,30	19	298,5	u
436	»	1	6,44	19,33	32,20	45,08	57,90		18,50	42,80	19	300,7	V
437	»	1	5,42	18,28	31,15	43,94			13,00	35,00	19	301,5	U
438	»	1	9,52	22,26	35,32	48,35			22,00	44,00	19	298,7	U
439	»	1	4,45	17,50	30,50	43,51	56,43		19,20	43,00	19	297,8	V
440	»	1	4,50	17,21	29,98	42,80	55,60		15,60	48,00	19	303,1	U
441	»	1	55,60	68,42	81,40				64,00	70,50	19	300,3	e
442	»	1	4,18	17,27	30,22	43,20	56,15		17,00	46,30	19	297,9	V
443	»	1	1,11	13,78	26,50				13,50	18,20	19	304,6	e
444	»	1	13,78	26,50	39,28	52,00			24,00	40,30	19	303,7	U
445	»	1	3,40	16,52	29,74	42,88	55,96		12,20	45,70	19	295,0	U
446	O. 6 ↗	1	6,99	19,77	32,61				13,10	29,50	19	301,9	e
447	»	1	19,77	32,61	45,48	58,41			26,70	46,00	19	300,6	e
448	»	1	4,13	17,08	29,97				13,40	18,60	19	299,4	V
449	»	1	29,97	42,83	55,60	68,33	81,10	93,59	41,50	65,40	19	302,7	u
450	»	1	6,08	18,69	31,51	44,38			25,00	38,50	19	301,3	e
451	»	1	57,24	70,16	83,07	96,08			70,20	81,20	19	299,3	u
452	»	1	8,50	21,32	34,22	47,15	60,28		14,30	42,00	19	300,4	e
453	»	1	0,85	13,77	26,63	39,57	52,68		13,00	44,80	19	297,8	u
454	»	1	5,61	18,67	31,60	44,48	57,44		21,00	48,00	19	298,7	u
455	»	1	9,90	22,75	35,53	48,42	61,26		26,90	58,00	19	302,0	V
456	»	1	4,39	17,35	30,37	43,32	56,29		10,80	42,00	19	298,6	e
457	»	1	9,00	21,86	34,70	47,54	60,52		26,60	54,00	19	299,7	u
458	Réuni au suivant; interruption fortuite des signaux θ' θ''.												
459	»	1	6,46	19,33	32,07	44,87	57,50		21,00	49,20	19	304,2	V
460	»	1	5,72	18,53	31,50	44,42	57,46		13,00	36,20	19	300,6	U
461	»	1	31,50	44,42	57,46				42,50	50,80	19	297,6	e
462	»	1	7,10	19,96	32,80				17,00		19	301,0	
463	»	1	32,80	45,60	58,27				49,50		19	304,8	
464	»	1	0,93	13,90	26,85	39,60	52,41	65,21	18,40	69,70	19	300,5	V
465	P. 5 ↗	Réuni au suivant.											
466	»	1	5,51	17,20	28,93	40,60	52,40		18,20	38,80	21	298,9	e
467	»	1	5,04	16,82	28,70	40,51			16,30	33,30	21	296,1	U
468	»	1	1,88	13,52	25,20	36,81			10,00	32,00	21	301,1	U
469	»	1	6,83	18,45	30,09	41,82			12,20	29,00	21	300,6	e
470	»	1	-3,40	15,12	26,80	38,45	50,13		15,60	39,00	21	299,5	u

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLIHÉRY.

A. 207

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur k	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lam. en milliers de kilom.			Quali- fication du résultat.
				du mécanisme.					de l'observateur.		2n-1			
				t ₀	t ₁	t ₂	t ₃	t ₄	t ₅	t'				
471	»	1	1	2,75	14,53	26,31				9,00	17,00	21	297,2	α
472	»	1	1	3,88	15,57	27,30	39,00			15,00	37,00	21	299,3	U
473	»	1	1	2,13	13,68	25,15	36,73			9,90	26,00	21	303,5	»
474	»	1	1	2,50	14,14	25,82	37,47	49,12		14,50	40,00	21	300,4	U
475	»	1	1	6,86	18,55	30,27	53,56	65,16	76,65	19,50	51,00	21	299,9	U
476	»	1	1	88,07	99,50	110,98	122,43	134,10		95,00	119,00	21	305,4	e
477	»	1	1	134,10	145,86	157,61	169,42			146,20	163,50	21	297,2	e
478	»	1	1	8,90	20,55	32,17	43,73	55,21		25,30	40,30	21	301,8	V
479	»	1	1	5,72	17,23	28,64	40,10			16,50	31,40	21	305,6	»
480	»	1	1	8,52	20,18	31,77	43,48	55,40		18,30	40,90	21	299,2	»
481	»	1	1	1,14	12,85	24,57	36,30	48,00		7,20	34,30	21	298,9	U
482	»	1	1	0,11	11,69	23,33	35,00	46,73		13,20	37,90	21	300,0	e
483	»	1	1	2,60	14,12	25,70	37,23	48,78		12,20	34,00	21	303,4	U
484	Q. 4	1	1	7,18	18,86	30,50	42,12			20,20	34,00	21	300,8	V
485	»	1	1	0,88	12,57	24,30				12,50	16,50	21	298,8	e
486	»	1	1	1,63	13,27	24,96	36,57	48,14		16,00	34,60	21	300,9	U
487	»	1	1	4,16	15,77	27,41	39,03			12,40	31,00	21	301,2	U
488	»	1	1	9,12	20,77	32,51	44,32			19,00	26,00	21	299,0	e
489	»	1	1	2,17	13,91	25,58	37,20	48,76		18,00	38,30	21	300,9	V
490	»	1	1	8,17	19,79	31,37	42,92	54,42		14,50	41,20	21	302,4	V
491	»	1	1	7,90	19,63	31,42	43,30			14,00	25,30	21	297,7	e
492	»	1	1	55,10	66,60	78,13	89,57	100,98		71,30	89,40	21	305,1	U
493	»	1	1	1,48	13,12	25,00	36,78			12,70	18,50	21	296,5	e
494	»	1	1	36,78	48,38	60,00	71,60	83,17		43,70	73,00	21	302,1	U
495	»	1	1	4,40	16,10	27,82	39,54	51,23		12,20	36,20	21	299,0	U
496	»	1	1	5,77	17,47	29,20	40,89	52,63	64,52	17,80	49,30	21	298,1	e
497	»	1	1	5,80	17,40	29,15	40,74	52,40	63,93	19,50	50,80	21	300,3	U
498	»	1	1	8,34	19,89	34,06	Le mécanisme s'arrête.			23,60	28,00		?	
499	R. 6	1	1	0,51	15,22	29,77	44,17	58,62		18,50	47,30	17	298,0	»
500	»	1	1	5,10	19,43	33,80	48,14			16,20	33,50	17	300,8	U
501	»	1	1	4,05	18,41	32,69				16,00		17	301,7	
502	»	1	1	32,69	47,04	61,40	75,84	90,57		40,20	65,00	17	300,6	e
503	»	1	1	5,25	19,69	34,08	48,50			20,80	42,00	17	300,2	e
504	»	1	1	5,14	19,49	33,80	48,11	62,55		24,00	49,00	17	301,4	»
505	»	1	1	7,20	21,76	36,20	50,67			22,60	39,80	17	298,7	»
506	»	1	1	3,90	18,24	32,47	46,84			12,00	31,00	17	302,0	»
507	»	1	1	46,84	61,24	75,84				55,10	65,30	17	298,6	e
508	»	1	1	0,50	15,00	29,47	43,89	58,38		8,70	41,80	17	298,9	»
509	»	1	1	3,93	17,92	32,00	46,19	60,70		20,60	41,40	17	305,7	e
510	»	1	1	10,14	24,68	39,12	53,56	67,75		20,00	51,00	17	299,5	V
511	»	1	1	10,73	27,06	43,40	59,67			28,50	49,00	15	300,5	U
512	»	1	1	6,78	22,75	38,90	55,26			16,20	39,00	15	304,1	e
513	»	1	1	3,98	20,67	37,26	53,45			19,20	37,00	15	296,7	V
514	»	1	1	9,64	25,34	41,40				33,10	35,70	15	304,8	e
515	»	1	1	11,40	27,63	44,05	60,72			49,20	65,00	15	300,4	e
516	»	1	1	11,40	27,63	44,05	60,72			75,50	77,60	15	295,6	e

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de kilom.			Quali- fication du résultat.	
				du mécanisme.					de l'observateur.		<i>n</i> - 1				
				<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>θ'</i>					<i>θ''</i>
517	»		1	7,93	24,70	41,11	57,56	74,00		26,20	59,00	15	297,0	V	
518	S. 5	↗	1	1,46	14,25	27,16	39,98	52,75		20,60	44,60	19	301,3	U	
519	»		1	3,77	16,61	29,38	42,23			15,00	35,50	19	301,6	u	
520	»		1	7,00	19,84	32,60	45,47			18,00	40,20	19	301,2	u	
521	»		1	7,37	20,42	33,33	46,22	59,10		23,90	44,80	19	299,7	V	
522	»		1	7,57	20,14	33,25	45,96	58,58		24,20	41,00	19	303,2	V	
523	»		1	10,14	23,34	36,27	49,12			18,50	37,70	19	300,1	U	
524	»		1	4,18	17,04	29,90	42,69	55,69		14,40	38,00	19	301,4	e	
525	»		1	5,70	18,53	31,47	44,54			16,50	32,00	19	299,1	e	
526	»		1	8,70	21,52	34,38	47,15			16,30	38,40	19	302,2	U	
527	»		1	6,12	19,07	31,90	44,72			15,00	32,80	19	300,5	V	
528	»			Réuni au suivant; interruption fortuite des signaux <i>θ' θ''</i> .											
529	»		1	57,50	70,15	82,78	95,33	108,13		64,80	91,60	19	306,5	u	
530	»		1	108,13	120,91	133,76	146,62			115,00	140,00	19	301,8	e	
531	»		1	8,90	21,86	34,84	47,83			18,60	40,70	19	298,2	e	
532	»		1	3,40	16,13	28,85	41,45			15,40	39,00	19	306,0	V	
533	»		1	7,00	20,00	32,92	45,85	58,80		25,50	45,50	19	299,2	u	
534	»		1	2,17	15,00	27,83	40,72			9,50	31,40	19	301,1	u	
535	»		1	3,07	15,90	28,79	41,60			11,00	33,00	19	301,6	U	

FEUILLE VIII.

27 SEPTEMBRE 1874. — Observations faites de 4 heures à 5 heures de l'après-midi.

Roue dentée de 30 ^{mm} de diamètre, dents pointues.	Température moyenne extérieure	22°, 8
Nombre de dents. . . N = 144.	Pression atmosphérique	754 ^{mm} , 0
Nombre de tours. . . M = 100.	Direction du vent	SSO faible.
Facteur k d'MN = 52930 × <i>k</i> .		

536	A. 4	↗	2	9,70	22,02	34,28				18,00		29	296,5	(*)
537	»		2	22,02	34,28	46,56	83,08	95,18	107,13	32,50	100,60	29	301,5	U
538	»		2	8,00	20,12	32,20	44,23	56,34	68,48	17,40	63,00	29	301,1	u
539	»		2	2,81	15,13	27,14	39,67	51,76	63,70	13,00	57,30	29	301,0	V
540	»		2	8,43	20,56	32,64	44,92	57,33		14,00	53,40	29	297,8	u
541	»		2	3,00	15,15	27,42	39,85			11,80	27,80	29	297,6	e
542	»		2	52,40	64,79	77,05	89,24	101,27	113,19	63,20	98,80	29	300,1	V
543	»		2	9,91	22,06	34,08	46,33			15,50	31,30	29	301,3	u
544	»		2	46,33	58,64	71,09				55,00	59,30	29	295,3	e
545	»		2	8,55	20,80	32,87				11,50	16,80	29	297,7	V
546	B. 3	↘	2	2,75	14,26	25,62	36,87			12,50	29,50	31	300,6	V
547	»		2	2,30	13,59	25,02	36,62			14,50	29,50	31	297,6	e
548	»		2	2,72	14,80	26,83	38,85			14,80	32,30	29	303,3	V

(*) Lumière solaire jusqu'à la fin.

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLIÉRY.

A. 209

N ^o d'ordre.	Lettre de série. N ^o de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux							Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.		
				du mécanisme.					de l'observateur.					
				<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>t</i> '			<i>t</i> ''	<i>2n-1</i>
549	"	"	2	9,50	21,52	33,67	45,88	58,50		19,20	29	302,7		
550	"	"	2	9,50	21,52	33,67	45,88	58,50		35,10	47,00	29	296,1	e
551	"	"	2	5,12	18,27	31,19	44,04	56,69		15,60	32,70	27	302,1	V
552	"	"	2	68,96	80,86	92,64	104,22			75,00	91,00	29	307,6	V
553	"	"	2	5,24	16,67	28,28				13,30	19,00	31	296,7	e
554	"	"	2	28,28	40,23	52,75				45,00		29	290,0	
555	"	"	2	40,23	52,75	65,83	79,40	93,04		56,60	63,80	27	299,3	e
556	"	"	2	6,73	19,69	32,50				12,50	20,20	27	303,4	V
557	"	"	2	6,73	19,69	32,50				27,00	30,80	27	305,8	e
558	"	"	2	3,68	9,74	16,52				11,20	14,20	27	291,2	e
559	C. 4	↙	2	3,00	14,98	27,05				12,50	20,80	29	303,3	e
560	"	"	2	0,65	12,91	25,16	37,15	49,14		8,00	41,00	29	301,1	V
561	"	"	2	7,89	20,10	32,45	45,00			19,00	37,20	29	294,5	e
562	"	"	2	8,75	20,88	33,10	45,21	57,23	69,04	15,70	56,20	29	302,6	U
563	D. 5	↘	2	2,90	14,96	27,10	51,33	63,70	76,11	11,00	61,70	29	298,5	e
564	"	"	2	9,27	21,54	33,74	45,89	57,92	69,90	19,70	60,30	29	301,3	V
565	"	"	2	6,39	18,43	30,51	42,59			17,20	32,10	29	303,1	U
566	"	"	2	8,20	20,34	32,48	44,78	57,10	69,50	14,00	59,00	29	297,9	e
567	"	"	2	4,83	17,04	29,23	41,38	53,30		14,50	43,40	29	302,4	V
568	"	"	2	5,40	17,75	30,28				13,00	20,00	29	293,9	e
569	"	"	2	30,28	43,00	56,02	69,40	82,84		42,60	61,00	27	299,5	e
570	"	"	2	82,84	96,01	109,11	122,25	135,36	147,95	90,60	138,60	27	303,1	V
571	"	"	2	160,60	173,57	186,68	199,77	213,20	227,07	172,30	207,70	27	296,1	e
572	"	"	2	240,78	253,86	267,00	279,90			247,00	272,00	27	301,5	U
573	E. 5	↙	2	1,70	14,09	26,50				10,10	16,00	29	294,4	e
574	"	"	2	6,48	18,58	30,79	43,11	55,46	68,00	16,30	39,00	29	298,5	e
575	"	"	2	68,00	80,32	92,61	104,71	116,78		81,00	105,30	29	299,4	V
576	"	"	2	5,90	18,00	30,22	42,51			12,00	29,70	29	299,9	e
577	"	"	2	9,60	21,82	34,02	46,08	58,00		19,30	47,00	29	301,8	V
578	"	"	2	4,36	16,51	28,57	40,63	52,59		11,00	47,50	29	303,0	V
579	"	"	2	1,84	13,77	25,61	37,55			10,80	16,00	29	307,1	V
580	"	"	2	37,55	49,62	61,67				42,50	55,20	29	302,7	V
581	"	"	2	61,67	73,87	86,00	98,30	110,80	123,39	67,50	97,80	29	296,9	"
582	"	"	2	123,39	135,92	148,32				138,00		29	293,4	
583	"	"	2	148,32	160,58	172,77	184,83	196,66		158,00	183,20	29	301,6	V
584	"	"	2	4,81	17,09	29,23	41,53	54,16		11,40	37,50	29	296,4	"
585	"	"	2	8,10	20,27	32,25	44,12			18,30	33,00	29	304,0	V
586	F. 5	↘	2	1,73	14,70	27,36				11,00		27	303,9	
587	"	"	2	27,36	40,14	53,32	67,01			43,80	58,00	27	293,9	e
588	"	"	2	8,96	20,74	32,63	44,70			26,00		29	307,2	
589	"	"	2	32,63	44,70	56,86	81,11	93,43	105,97	43,50	98,60	29	296,5	e
590	"	"	2	118,49	131,00	143,30	155,70			136,20	144,20	29	295,9	"

XIII.

A. 27

No d'ordre.	Lettre de série. N° de mérite.	Sens de rotation.	Multi- plicateur <i>k</i>	Époques (en dixièmes de seconde sidérale) des signaux								Vitesse de la lum. en milliers de kilom.	Quali- fication du résultat.	
				du mécanisme.				de l'observateur.						
				<i>t</i> ₀	<i>t</i> ₁	<i>t</i> ₂	<i>t</i> ₃	<i>t</i> ₄	<i>t</i> ₅	<i>t</i> ₆	<i>θ'</i>			<i>θ''</i>
591	»	»	2	155,70	167,86	180,10	192,17	204,20		162,70	195,20	29	301,6	U
592	»	»	2	5,57	17,76	29,98	42,30			12,20	33,50	29	298,1	e
593	»	»	2	4,00	16,10	28,21	40,33	52,60	65,42	12,80	53,60	29	295,9	e
594	G. 5	↘	2	7,15	19,19	31,34	43,75	56,14		21,00	34,50	29	298,6	e
595	»	»	2	68,58	80,68	92,71	104,74			78,00	95,30	29	301,9	u
596	»	»	2	4,20	16,20	28,21	40,29	52,69		13,80	29,80	29	303,5	e
597	»	»	2	4,20	16,20	28,21	40,29	52,69		37,00	46,00	29	297,6	e
598	»	»	2	6,60	18,92	31,12	43,25	55,25	67,10	16,20	56,40	29	301,8	V
599	»	»	2	1,62	16,74	31,06	Le mécanisme s'arrête.			10,00	27,30		?	
600	»	»	2	2,50	14,53	26,73	39,19			13,70	32,00	29	297,5	e
601	»	»	2	4,38	16,66	28,96	53,11	65,11	77,00	11,00	65,00	29	301,5	U
602	»	»	2	0,80	13,06	25,61	38,24			6,30	13,80	29	296,1	e
603	»	»	2	38,24	50,60	62,70	74,67			50,00	66,00	29	301,2	V
604	»	»	2	8,47	20,69	32,80	44,78			13,80	35,80	29	301,3	V
605	»	»	2	9,88	21,91	34,00	46,20	58,60		21,20	50,90	29	298,9	e
606	»	»	2	5,36	17,63	29,87				13,00		29	297,6	
607	»	»	2	17,63	29,87	41,89	53,85			27,80	39,20	29	302,9	V
608	»	»	2	7,47	19,60	31,97	44,40	56,91		19,30	50,40	29	295,0	e
609	»	»	2	2,32	14,60	26,75	38,83	50,68	62,35	13,80	57,70	29	306,0	V
610	»	»	2	3,10	15,31	27,39	39,40			8,70	14,60	29	299,6	V
611	»	»	2	3,10	15,31	27,39	39,40			31,00		31	307,7	
612	»	»	2	4,25	16,39	28,61	41,07			10,80	35,30	29	296,7	e
613	»	»	2	2,31	14,63	26,80	38,89	50,82		10,50	46,30	29	301,7	V
614	»	»	2	3,16	15,24	27,50	39,84	52,35		13,00	43,80	29	296,7	e
615	»	»	2	0,45	12,37	24,37				6,70		29	306,2	
616	»	»	2	0,45	12,37	24,37	36,56	48,86		19,00	42,50	29	300,4	e
617	»	»	2	3,92	16,47	28,91	41,33			15,00		29	291,7	
618	»	»	2	41,33	53,54	65,60	77,54	89,36		50,80	80,80	29	304,1	V
619	»	»	2	7,03	19,18	31,22	43,33	55,62		12,50	46,70	29	299,2	u
620	»	»	2	9,10	21,21	33,31	45,70	69,61	81,41	18,00	73,50	29	305,2	V
621	»	»	2	2,79	14,82	27,06	39,41	51,90		14,00	36,00	29	298,0	e
622	»	»	2	64,27	76,53	88,75	100,86	112,83	124,66	71,00	113,00	29	302,6	V
623	H. 1	↗	2	5,85	17,90	29,96				11,70	21,50	29	302,8	e
624	»	»	2	29,96	41,96	53,88	65,82	77,64		39,30	67,30	29	306,3	V

Nota. — Les feuilles de tracés graphiques et les feuilles de calcul (199) qui contiennent le détail des opérations effectuées sont soigneusement conservées. Ces documents portent toutes les indications qui établissent la correspondance immédiate avec ces tableaux ; si, plus tard, on reconnaissait quelque erreur dans ces calculs ou dans les relevés micrométriques, ou encore si l'on découvrait un mode de discussion plus parfait que celui dont j'ai fait usage, on aurait, sans avoir besoin de refaire les observations, tous les éléments nécessaires pour corriger ou refondre ce travail.

DISCUSSION DES RÉSULTATS.

1^o *Étude préliminaire de la régularité du chronographe.*

206. Toutes les mesures consignées dans les tableaux précédents étant rapportées non pas à la *seconde*, mais aux oscillations du chronographe, il importe, avant toute discussion, d'examiner quelle confiance on doit avoir dans la régularité de ces oscillations; car c'est sur leur exactitude que repose toute la précision du résultat définitif, et, d'autre part, c'est la limite des écarts qu'elle comporte qui guidera dans la discussion des résultats partiels.

La propriété fondamentale du chronographe, de battre synchroniquement de 10 en 10 oscillations (ou mieux de 20 en 20) avec le balancier de l'horloge astronomique, qui fournit l'unité de temps (n^o 151), rend immédiat le contrôle de son exactitude. Effectivement, à la simple inspection des tracés graphiques, on reconnaît que les signaux du chronographe coïncident avec une grande régularité, de 20 en 20, avec ceux de la *seconde*; la coïncidence est assez caractéristique pour faire distinguer à première vue les secondes d'ordre pair ou impair, dont l'égalité n'est pas absolue. Bien que ce mode de contrôle à *vue* ne comporte pas une grande précision dans chaque observation individuelle, il n'en permet pas moins de conclure tout d'abord que le chronographe possède en moyenne une perfection indéfiniment croissante. En effet, quelque longue que soit la série des signaux comparés, on n'observe *jamais* d'erreur atteignant $\pm \frac{1}{6}$ de battement. C'est ce que j'ai eu l'occasion de remarquer bien des fois dans le travail de numérotage des 30000 ou 40000 oscillations qui ont servi aux mesures. Ce fait permet donc d'affirmer qu'il n'y a pas de divergences *progressives*, c'est-à-dire *variant proportionnellement* au temps (*), et que, par conséquent, les

(*) Si l'on se reporte au mode de liaison synchronique des différentes pièces du système chronographique (152 et 153), on verra sans peine que, lorsque les mouvements d'oscillation sont arrivés à l'état de régime permanent, ces variations, progressives avec le temps, sont absolument impossibles. En effet, si ces oscillations présentaient une variation progressive de durée relativement aux attractions régulatrices qui règlent et entretiennent leur mouvement, il se produirait une divergence croissante entre le retour de l'attraction et la phase de l'oscillation où l'attraction est motrice. Lorsque cette divergence aurait atteint une demi-période, l'action régulatrice contrarierait l'oscillation au lieu de l'entretenir et finirait par l'éteindre. De là, sinon l'arrêt complet du mouvement, du moins une allure particulière présentant des maxima et des minima périodiques qui se traduisent sur l'enregistreur par de véritables *battements*. Ce phénomène s'observe toujours dans les essais préliminaires de réglage du subdiviseur lorsqu'on cherche à entretenir son mouvement avant qu'il soit complètement réglé. L'existence d'un régime permanent dans l'allure des appareils oscillants et dans le tracé chronographique est donc une preuve de l'impossibilité d'une erreur progressive et l'indice du bon fonctionnement du chronographe.

erreurs possibles du chronographe sont d'autant moindres en valeur relative que le nombre de signaux utilisés est plus considérable.

207. Toutefois, vu l'importance de cette question, je n'ai pas cru devoir me contenter de cette vérification générale; j'ai pensé que le mode de contrôle le plus concluant était de déterminer directement la valeur des battements du chronographe en fonction de la seconde, absolument comme s'il n'était pas synchronisé, et en suivant, pour cette comparaison, la même marche que pour les autres relevés chronographiques.

En conséquence, j'ai relevé, avec l'aide du microscope et en prenant les précautions décrites précédemment (n° 184), une série de groupes de 10 secondes en fonction des battements du chronographe. Ces groupes ont été repartis sur toute l'étendue des tracés graphiques à raison d'un groupe par dizaine d'observations. Ce groupe a été pris au hasard sur la ligne de signaux, en évitant toutefois de le placer sur une région défectueuse comme netteté, et de traverser le bord des feuilles, cas où les lectures eussent été incertaines ou incommodes.

Grâce à ce mode de répartition, on conclut la valeur des battements du chronographe correspondant à la moyenne des observations. Dans le cas où la différence entre la valeur observée et la valeur théorique eût été appréciable, on aurait pu appliquer une correction à la moyenne des résultats. Heureusement, comme on va le voir, cette différence est entièrement négligeable, car la valeur d'une oscillation du chronographe a été trouvée rigoureusement égale à $\frac{1}{14}$ de seconde sidérale.

Première série de mesures de vérification.

208. Voici la série de mesures qui conduisent à cette conclusion.

Le tableau suivant renferme une première série de mesures effectuées suivant les indications précédentes. La première colonne de ce tableau indique le numéro d'ordre des groupes; la deuxième et la troisième colonne contiennent les lectures initiales et finales du groupe de 10 secondes rapportées aux battements du chronographe; la quatrième donne la différence de ces deux lectures ou la valeur de 10 secondes en fonction des oscillations chronographiques; la cinquième colonne renferme diverses indications évidentes, et la sixième des nombres dont l'utilité sera indiquée plus loin.

ENTRE L'OBSERVATOIRE ET MONTLIHÉRY.

A. 215

N ^o d'ordre.	Lecture		Différ.	Distance au bord de la feuille.	N ^o d'ordre.	Lecture		Différ.	Distance au bord de la feuille.	
	initiale.	finale.				initiale.	finale.			
1	0,53	100,48	99,94	Feuille I. (947 ^{mm}).	31	0,70	100,50	99,80	Feuille VI.	87 ^{mm}
2	0,57	100,60	100,03	»	32	0,72	100,53	99,81	»	212
3	0,56	100,62	100,06	»	33	0,54	100,49	99,95	»	351
4	0,70	100,47	99,77	»	34	0,60	100,60	100,00	»	317
5	0,25	100,34	100,09	»	35	0,45	100,50	100,50	»	645
6	1,02	101,02	100,00	Feuille II. (917 ^{mm}).	36	0,77	100,81	100,04	»	87
7	0,47	100,31	99,84	»	37	0,89	100,78	99,89	»	615
8	0,87	100,75	99,88	»	38	0,63	100,63	100,00	»	72
9	0,37	100,17	99,80	»	39	1,23	101,12	99,89	»	306
10	0,80	100,90	100,10	Feuille III. (919 ^{mm}).	40	0,53	100,46	99,93	»	528
Somme			999,51		Somme			999,36		
11	0,52	100,57	100,05	»	41	0,80	101,00	100,20	Feuille VII. (918 ^{mm}).	173
12	0,57	100,44	99,87	»	42	0,40	100,17	99,77	»	170
13	0,30	100,26	99,96	Feuille IV. (917 ^{mm}).	43	0,48	100,54	100,06	»	82
14	1,00	100,88	99,88	»	44	0,56	100,37	99,81	»	709
15	0,90	100,87	99,97	»	45	0,36	100,41	100,05	»	459
16	0,87	100,89	100,02	»	46	0,20	100,34	100,14	»	86
17	0,56	100,63	100,07	»	47	0,56	100,45	99,89	»	77
18	0,53	100,59	100,06	»	48	0,64	100,54	99,90	»	257
19	0,56	100,77	100,21	»	49	0,87	100,85	99,98	»	690
20	1,14	100,94	99,80	»	50	0,48	100,60	100,12	»	94
Somme			999,89		Somme			999,92		
21	0,79	100,78	99,99	»	51	0,39	100,70	100,31	»	708
22	0,96	100,84	99,88	»	52	0,24	100,23	99,99	»	286
23	1,12	100,89	99,77	»	53	0,50	100,45	99,95	»	104
24	0,64	100,37	99,73	»	54	0,67	100,70	100,03	Feuille VIII. (943 ^{mm}).	388
25	0,47	100,43	99,96	Feuille V. (916 ^{mm}).	55	0,73	100,76	100,03	»	691
26	0,38	100,35	99,97	»	56	0,52	100,60	100,08	»	70
27	1,08	101,16	100,08	»	57	0,70	100,55	99,85	»	33
28	1,15	101,17	100,02	»	58	0,57	100,67	100,10	»	152
29	0,48	100,54	100,06	Feuille VI. (916 ^{mm}).	59	0,57	100,64	100,07	»	239
30	0,52	100,44	99,92	»	60	0,62	100,64	100,02	»	18
Somme			999,38		Somme			1000,43		
0	0,53	100,41	99,88	Feuille I. (947 ^{mm}).	61	0,72	100,75	100,03	»	646
					62	0,79	100,64	99,85	»	345

La moyenne de ces 63 valeurs se déduit aisément de la somme de tous ces groupes :

N ^{os}	1 à 10 =	999,51
	11 à 20 =	999,89
	21 à 30 =	999,38
	31 à 40 =	999,36
	41 à 50 =	999,92
	51 à 60 =	1000,43
	0,61 et 62 =	299,76
Somme générale :		6298,25

Moyenne : 99.972.

Ainsi, d'après ce calcul, un battement de l'horloge vaut 9,9972 battements du chronographe; l'erreur sur le nombre théorique (10,000) n'est que de 0,0028, ce qui correspond à une erreur relative égale à environ $\frac{1}{3600}$. Le résultat paraît donc satisfaisant et conforme aux prévisions.

209. Cependant, comme on se propose d'atteindre, pour le résultat final, une approximation relative de $\frac{1}{10000}$, il y a lieu d'être plus exigeant, d'examiner de plus près les causes qui peuvent produire cette petite divergence et de voir si elles se compensent mieux que dans la moyenne ci-dessus.

On remarquera d'abord que, quelles que soient ces causes, pourvu qu'elles soient fortuites, les chances de compensation sont beaucoup plus grandes sur les six cent trente mesures relatives à la vitesse de la lumière que sur les soixante-trois valeurs précédentes; le calcul des probabilités indique que l'erreur probable est $\sqrt{10}$ fois ou environ 3 fois plus faible. Si donc on admet que l'erreur probable coïncide ici avec l'erreur certaine $\frac{1}{3600}$, l'erreur probable sur le résultat général serait inférieure à $\frac{1}{10000}$ en valeur relative : dans ces conditions l'approximation serait largement suffisante et la correction négligeable.

Malgré tout ce que ce raisonnement offre de rassurant sur l'approximation finale, il y a lieu de s'étonner de la différence relativement grande entre la valeur observée et la valeur calculée; il est nécessaire de rechercher pourquoi le chronographe synchronisé, dont la perfection doit être regardée comme indéfinie d'après un premier examen (206), ne donne pas une approximation plus grande pour la moyenne de soixante-trois mesures comprenant par conséquent six mille trois cents oscillations prises pour ainsi dire au hasard. Il faut conclure du résultat précédent qu'il existe quelque cause d'erreur systématique, d'ailleurs très-faible, que la moyenne n'a point éliminée. Il paraîtra peut-être un peu

minutieux de s'arrêter à cet examen ; mais, comme il s'agit du contrôle de l'*unité de temps auxiliaire*, on ne saurait être trop difficile.

210. Parmi les causes qui peuvent troubler les indications chronographiques, voici les plus probables :

1° Les imperfections du tracé, qui empêchent de définir exactement la position des signaux ; mais elles ne peuvent pas conduire à des erreurs bien graves, car, d'après les nombreuses lectures au microscope effectuées pour le relevé des observations, j'estime qu'elles dépassent rarement $\pm 0^{\text{battement}},05$, et elles sont entièrement fortuites.

2° Les imperfections de mouvement du cylindre, dues en grande partie à la transmission par engrenages. La masse du cylindre atténue beaucoup ces inégalités dans la vitesse transmise, parce qu'elle agit comme volant ; mais ces inégalités existent, tantôt continues, tantôt brusques, ainsi qu'on le constate, lors du relevé des signaux, par la variation d'ajustement du microscope (186).

Il est facile de voir que, si une petite accélération du cylindre a lieu brusquement, elle fait varier d'autant l'intervalle des deux signaux consécutifs du chronographe. Lors de l'évaluation proportionnelle de l'époque des signaux à comparer, on commet une erreur qui peut, dans les circonstances les plus défavorables, s'élever jusqu'à la totalité de la variation brusque de l'intervalle. On doit donc s'attendre à trouver de ce chef des erreurs accidentelles supérieures à celles qui proviennent des pointés, et c'est probablement à cette cause qu'on doit attribuer la plupart des divergences atteignant à $0^{\text{battement}},15$ ou $0,20$; mais, comme ces erreurs se présentent, relativement aux signaux du chronographe, sans aucune loi régulière, on doit supposer qu'elles se compensent exactement dans la moyenne d'une série d'observations suffisamment étendue. Il n'y a donc pas encore là d'erreur systématique à redouter.

3° Les variations d'intensité du courant des piles et de résistance électrique des contacts. Ces variations, bien connues des physiciens et des télégraphistes, ont pour effet de modifier les actions électromagnétiques comme intensité et comme époque de fonctionnement. Les variations continues à longues périodes n'auraient qu'une influence insensible ; dans le cas d'une variation brusque, le régime des oscillations entretenues électriquement est brusquement modifié d'une petite quantité, mais il revient progressivement à son état limite. Il est difficile d'assigner une grandeur précise à cette influence, qui est très-petite et n'apporte, d'ordinaire, que quelques millièmes de seconde d'erreur. Elle a dû se faire sentir plusieurs fois dans le tracé des signaux de la seconde, qui ne se produit que par l'intermédiaire de deux relais (151) ; mais, comme dans le

cas précédent, cette influence, entièrement fortuite, n'occasionne pas d'erreur systématique et devient négligeable sur une nombreuse série d'observations.

211. 4° Enfin les imperfections de la surface de l'enregistreur. Sous cette dénomination, il faut comprendre les inégalités de grain du papier enfumé, qui modifient le frottement et par suite la résistance au tracé, les inégalités d'épaisseur du papier, celles produites soit au moment de l'enroulement de la feuille sur le cylindre, soit par sa dessiccation inégale : toutes ces imperfections fortuites ne peuvent amener aucune erreur systématique.

Mais, sur la partie où la feuille est doublée pour le collage des bords, on rencontre un autre genre d'erreur ; car la duplication de l'épaisseur du papier produit à chaque révolution du cylindre un accroissement momentané, puis une diminution de son rayon, et, par suite, une flexion inégale des tracelets, dont les points de flexion sont inégalement distants de l'axe du cylindre. C'est probablement là la source de la petite erreur systématique qui a masqué la précision du chronographe. Son influence, négligeable, par compensation, sur une longue série de tracés se présentant fortuitement par rapport à la partie doublée de la feuille d'enregistrement, doit être sensible sur les mesures précédentes ; car les soixante-trois groupes de mesures ont été faits en évitant précisément les bords de la feuille (207). J'avais été guidé dans cette exclusion par la crainte d'une petite erreur occasionnée par le déplacement et l'ajustement de la feuille qu'il faut exécuter entre les deux lectures du microscope ; mais la crainte de ces petites erreurs fortuites ne peut pas se mettre en balance avec l'erreur réelle provenant de l'exclusion systématique des mesures sur plus d'un cinquième de chaque spire (chaque spire vaut 5 r secondes).

Deuxième série de mesures. — Vérification plus précise.

212. Cette considération montre donc que la vérification effectuée précédemment est, à un point de vue rigoureux, défectueuse sous deux rapports :

1° Elle ne met en œuvre qu'une série incomplète de relevés, un cinquième de la surface du cylindre n'étant pas représenté.

2° Sur le reste de la surface, les groupes relevés ne sont probablement pas répartis d'une manière suffisamment uniforme.

Pour améliorer ces données, j'ai relevé une nouvelle série de groupes de 10 secondes, répartis dans le voisinage des numéros multiples de 5 de la série des soixante-trois groupes précités ; ils portent les n^{os} 5 bis, 10 bis, etc., jusqu'à 60 bis. Ces nouveaux groupes *chevauchent* tous sur les bords de la feuille et sont

répartis uniformément sur la zone exclue, le premier groupe ayant son origine à près de 10 secondes du bord de droite, le deuxième à 9 secondes, etc., jusqu'au douzième, qui a son origine tout près du bord. Voici le tableau des mesures :

				Report. . . .	600,11		
5 bis.	0,45	100,16	99,71	35 bis.	0,52	100,46	99,94
10 »	0,66	100,83	100,17	40 »	0,41	100,57	100,16
15 »	0,80	101,04	100,24	45 »	0,33	100,42	100,09
20 »	0,12	100,15	100,03	50 »	0,49	100,52	100,03
25 »	0,62	100,57	99,95	55 »	0,67	100,95	100,28
30 »	0,43	100,44	100,01	60 »	0,59	100,74	100,15
	A reporter. . . .		600,11		Total. . . .		1200,76

D'autre part, j'ai relevé la distance en millimètres de l'origine de chaque groupe au bord gauche de la feuille ; ces nombres sont consignés dans la sixième colonne du premier tableau (208). Ils fournissent la répartition des groupes sur la surface du cylindre. J'ai partagé alors cette surface en cinq zones égales limitées par des génératrices du cylindre, en subdivisant chaque ligne (dont la longueur est d'environ 948 millimètres) en cinq parties égales. On peut alors, d'après les distances mesurées, répartir les soixante-trois premières valeurs en quatre parts correspondant aux quatre premières zones où elles ont été relevées ; la cinquième zone comprend les douze valeurs de la deuxième série. Il est évident qu'en formant séparément la moyenne de chaque zone et en prenant la moyenne des cinq nombres ainsi obtenus, on obtiendra un résultat définitif qui représentera plus exactement que ci-dessus la valeur moyenne d'un battement du chronographe et qui sera affranchi de l'erreur systématique indiquée plus haut.

213. Voici le tableau de la répartition des relevés en cinq zones :

Nos	PREMIÈRE ZONE. De 0 ^{mm} à 190 ^{mm} .			Nos	DEUXIÈME ZONE. De 190 ^{mm} à 379 ^{mm} .			Nos	TROISIÈME ZONE. De 379 ^{mm} à 569 ^{mm} .			Nos	QUATRIÈME ZONE. De 569 ^{mm} à 758 ^{mm} .			Nos	CINQUIÈME ZONE. De 758 ^{mm} à 948 ^{mm} .		
	δ	δ^2			δ	δ^2			δ	δ^2			δ	δ^2			δ	δ^2	
3	100,06	6	36	0	99,88	12	144	1	99,94	6	36	4	99,77	36	529	5 bis	99,71	29	481
5	100,09	9	81	8	99,88	12	144	2	100,03	3	9	10	100,10	10	100	10 bis	100,17	17	289
6	100,00	»	»	15	99,97	3	9	7	99,84	16	256	14	99,88	12	144	15 bis	100,24	24	576
9	99,80	20	400	17	100,07	7	49	11	100,05	5	25	19	100,21	21	441	20 bis	100,03	3	9
12	99,87	13	169	18	100,06	6	36	13	99,96	4	16	23	99,77	23	529	25 bis	99,95	5	25
16	100,02	2	4	20	99,80	20	400	22	99,88	12	144	27	100,08	8	64	30 bis	100,01	1	1
26	99,97	3	9	21	100,78	22	484	24	99,73	27	729	30	99,92	8	64	35 bis	99,94	6	36
31	99,80	20	400	28	100,02	2	4	25	99,96	4	16	35	100,05	5	25	40 bis	100,16	16	256
36	100,04	4	16	32	99,81	19	361	29	100,06	6	36	37	99,89	11	121	45 bis	100,09	9	81
38	100,00	»	»	33	99,95	5	25	40	99,93	7	49	44	99,81	19	361	50 bis	100,03	3	9
41	100,20	20	400	34	100,00	»	»	45	100,05	5	25	49	99,98	2	4	55 bis	100,28	28	784
42	99,77	23	529	39	99,89	11	121	54	100,03	3	9	51	100,31	31	961	60 bis	100,15	15	225
43	100,06	6	36	48	99,90	10	100	58	100,10	10	100	55	100,03	3	9	Tot.	1200,75	156	3132
46	100,14	14	196	52	99,99	1	1	Tot.	1299,56	108	1450	61	100,03	3	9	Moy.	100,064		
47	99,89	11	121	59	100,07	7	49	Moy.	99,966			Tot.	1399,83	179	3361				
50	100,12	12	144	62	99,85	15	225	Moy.	99,988										
53	99,95	5	25	Tot.	1599,92	152	3152												
56	100,08	8	64	Moy.	99,995														
57	99,85	15	225																
60	100,02	2	4																
Tot.	1999,73	193	2859																
Moy.	99,987																		

Résumé.

Moyennes.	Première zone.....	99,987
	Deuxième zone.....	99,995
	Troisième zone.....	99,966
	Quatrième zone.....	99,988
	Cinquième zone.....	100,064
	Total.....	500,000
	Moyenne générale.	10,000

Comme on le voit, les deux prévisions étaient justes; la zone exclue présente une valeur moyenne supérieure à celle de toutes les autres, et les relevés n'étaient pas répartis uniformément dans les quatre zones considérées (*).

(*) L'examen plus attentif de la disposition des deux tracelets vérifie le sens de la différence observée. Le tracelet de la seconde est le tracelet n° 1, celui du chronographe le n° 2; or le second est plus oblique que le premier sur la surface du cylindre (fig. 3, Pl. VI); une variation

Le groupement précédent remédie à ces deux inconvénients; aussi la moyenne des cinq zones coïncide-t-elle avec le nombre théorique avec une rigueur à laquelle il ne faut pas d'ailleurs attacher une importance exagérée. L'erreur relative est donc nulle et la correction inutile; on devait évidemment s'attendre à un pareil résultat en ayant égard à la simplicité et à la rigueur des conditions théoriques qui ont présidé à la construction du chronographe synchronisé.

En résumé, on peut avoir toute confiance dans les indications du chronographe; les signaux consécutifs représentent exactement, en moyenne, des dixièmes de seconde sidérale. Quant aux erreurs accidentelles qui peuvent se rencontrer, elles sont dues à des causes générales indépendantes du mode particulier de synchronisme auquel il doit sa propriété fondamentale, et qui agiraient au même degré sur des chronographes quelconques entretenus électriquement.

Évaluation de l'erreur probable des tracés de l'enregistreur.

214. Nous pouvons dès à présent nous rendre compte de la précision de l'enregistreur et montrer que les déterminations déduites de ces tracés ne présenteront, du fait des imperfections inévitables de l'enregistreur, que des erreurs négligeables par rapport à la limite, de $\frac{1}{1000}$ en valeur relative, que nous nous sommes imposée pour le résultat final des expériences qui seront discutées plus loin. En effet, les soixante-quinze valeurs précédentes fournissent les données nécessaires pour calculer l'*erreur moyenne* et l'*erreur probable de la détermination de la différence de deux époques* déduites des tracés de l'enregistreur exactement par le même mode de relevé que les nombres à discuter ultérieurement. Ces valeurs offrent un avantage qu'on rencontre rarement; elles représentent un nombre connu *a priori* et que leur moyenne a reproduit exactement: il en résulte que les divergences des résultats partiels avec la moyenne représentent les *écarts absolus* au lieu de donner, comme dans les cas ordinaires, les différences avec une moyenne d'une approximation incertaine en elle-même. On a donc les éléments nécessaires pour étudier exactement la loi des écarts absolus.

d'épaisseur du cylindre déplace plus le n° 1 que le n° 2. Il en résulte que les traits du n° 2 paraissent par comparaison se dilater en arrivant sur la double épaisseur et se resserrer en la quittant. La moyenne de la quatrième zone, qui empiète à la fin des relevés sur la double épaisseur, est, en effet, une des moindres de toutes; celle de la cinquième, qui offre la disposition inverse, présente, au contraire, la moyenne la plus forte.

Voici, d'après le tableau précédent, la somme des *écarts* $\Sigma \delta$ et $\Sigma \delta^2$ présentés par les nombres des cinq zones, exprimés en millièmes de seconde. On en a déduit les moyennes des écarts de chaque zone : on leur donne le même poids afin de ramener au cas où les mesures auraient été faites en nombre égal dans chacune d'elles :

	Nombre de valeurs.	$\Sigma \delta$	$\Sigma \delta^2$	Écart moyen sans égard au signe.	Moyenne des carrés des écarts.
1 ^{re}	20	193	2859	9,65	142,95
2 ^e	16	152	2152	9,50	134,50
3 ^e	13	108	1450	8,31	111,54
4 ^e	14	179	3361	12,78	240,07
5 ^e	12	156	3132	13,00	261,00
			Moyenne	$e = 10,648$	$\varepsilon^2 = 178,012$

$$\frac{2\varepsilon^2}{e^2} = \frac{356,024}{113,380} = 3,1401.$$

215. On ne peut tirer de conclusion sur la précision de la moyenne d'un nombre donné d'observations par application des règles du calcul des probabilités qu'après avoir préalablement montré que les *écarts* avec la moyenne satisfont à la condition expresse sur laquelle ces règles sont fondées, c'est-à-dire satisfont à la loi des *erreurs fortuites* de Laplace et Gauss (n° 46) : c'est ce qu'en général on néglige de faire. Comme nous aurons plusieurs fois l'occasion d'effectuer ce contrôle, il est bon d'indiquer dès à présent la condition qui sert en quelque sorte de *criterium* pratique. Cette condition (nécessaire d'ailleurs, mais non suffisante) est très-facile à vérifier; mais elle paraît peu employée par les observateurs appelés à discuter des résultats numériques. En voici l'énoncé :

THÉORÈME. — Lorsque les écarts d'une série de nombres avec leur moyenne arithmétique satisfont à la loi de fréquence des erreurs fortuites, le double du quotient de la moyenne ε^2 du carré de ces écarts, par le carré de l'écart moyen e (moyenne des écarts faite sans avoir égard au signe), est égal au nombre $\pi = 3,1415$.

Ce théorème, qui n'est rigoureux que pour un nombre extrêmement grand de données, se démontre très-simplement en calculant les expressions de e et de ε^2 (*)

$$e = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{2a^2},$$

(*) Ces deux résultats ont été obtenus plus haut à propos d'autres considérations : le premier à la fin du n° 50, où la lettre c est substituée à a ; le second à la fin de la note du n° 46, mais par une autre méthode que l'intégration directe.

d'où

$$\frac{2\varepsilon^2}{e^2} = \pi = 3,14159.$$

La substitution des valeurs numériques ε^2 et e du tableau précédent donne 3,1401; il en résulte, avec une grande vraisemblance, que les écarts suivent bien la loi des erreurs fortuites, et que nous avons le droit d'appliquer à ces données les conclusions déduites du Calcul des probabilités.

216. Nous déduirons d'abord l'*erreur probable* d'une double lecture, c'est-à-dire la grandeur de l'erreur E dont la probabilité est $\frac{1}{2}$: elle est donnée par la condition bien connue

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-E}^{+E} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-aE}^{aE} e^{-t^2} dt.$$

Le calcul numérique de cette intégrale, qu'on développe aisément en série, donne $aE = 0,477$.

La valeur de α , paramètre de l'exponentielle, est définie par e ou, ce qui revient au même, par $\varepsilon^2 = \frac{1}{2\alpha^2}$, ou

$$E = \frac{0,477}{\alpha} = 0,477 \varepsilon \sqrt{2} = 0,674 \varepsilon,$$

ce qui montre que l'*erreur probable* est les 0,477 de l'inverse du paramètre, ou à peu près les deux tiers de la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts.

Substituant la valeur numérique $\varepsilon = \sqrt{178,012} = 13,70$, il vient $E = 9,24$, c'est-à-dire un peu plus de $\frac{9}{1000}$ de seconde, ou un peu moins de $\frac{1}{100}$ de seconde.

Telle est l'*erreur probable commise* sur la *différence des deux lectures* qui constituent la mesure d'un intervalle de 10 secondes. L'erreur relative probable est donc $\frac{1}{1000}$ sur une mesure isolée de cet intervalle.

Erreur probable d'une lecture des tracés.

217. On en déduit aisément un nombre qu'il est intéressant de connaître, l'erreur probable commise sur une seule lecture, c'est-à-dire l'erreur probable du pointé dans le relevé des tracés graphiques. En effet, si l'on admet que les écarts de chaque pointé sont soumis à la loi de fréquence des erreurs fortuites, α étant le paramètre de l'exponentielle pour le pointé initial, α' pour le pointé

final, l'erreur sur la différence de deux mesures suivra aussi la loi des erreurs fortuites avec un paramètre a lié aux premiers par la relation

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{a''^2},$$

théorème général qui a été démontré à propos des inégalités fortuites de la largeur des dents d'une roue dentée (nos 48 et 49). Dans le cas présent, la considération des écarts donnés plus haut ayant prouvé que la loi des erreurs fortuites s'applique à la différence des deux lectures, nous sommes en droit d'admettre qu'elle s'applique aussi aux lectures isolées; et comme rien ne distingue la première de la seconde, on a

$$a = a', \text{ d'où } a^2 = 2a'^2 \text{ et } a = a'\sqrt{2}.$$

On en conclut aisément, en appelant E_1 l'erreur *probable d'une seule lecture*.

$$E_1 = \frac{E}{\sqrt{2}} = 0,707 E = 6,53.$$

Ainsi l'erreur probable d'une lecture isolée est comprise entre 6 à 7 millièmes de seconde.

Sous le nom d'*erreur de lecture*, on doit comprendre non-seulement les erreurs diverses provenant du fait de l'observateur qui apprécie plus ou moins bien la coïncidence du micromètre avec les tracés, mais encore toutes les inégalités provenant des imperfections de forme des traits enregistrés sur la feuille, des inégalités de mouvement du chronographe et de celles du cylindre enregistreur. Aussi l'erreur probable donnée plus haut $E_1 = 0^s,00653$ résume-t-elle *en bloc* toutes ces influences. Elle est donc précieuse sous ce rapport, car elle isole la partie de l'erreur qui provient uniquement de l'emploi de l'enregistreur comme intermédiaire de mesures.

Erreur probable de la moyenne des mesures précédentes.

218. L'erreur probable d'une détermination isolée de l'intervalle de 10 secondes étant de $0^s,00924$, l'erreur probable de la moyenne des 75 valeurs se calculera, suivant la règle bien connue du Calcul des probabilités (*), en divi-

(*) La démonstration de cette règle est fondée : 1° sur la connaissance de la valeur du para-

sant ce nombre par $\sqrt{75}$, c'est-à-dire par 8,66, d'où l'on conclut 0^s,00107, ou, comme erreur relative probable, 0,000107. L'erreur réelle a été trouvée nulle, mais c'est probablement une coïncidence fortuite, et l'erreur sur la moyenne

mètre de l'exponentielle qui représente la loi de fréquence des erreurs fortuites, lequel se calcule à l'aide de la moyenne des carrés des écarts absolus par la formule démontrée dans la note du n° 46 et au n° 215,

$$\frac{1}{2a^2} = \frac{\sum r^2}{n} = \varepsilon^2.$$

2^o Sur le théorème suivant : *La somme de n nombres erronés chacun suivant une loi exponentielle (LAPLACE et GAUSS), ayant pour paramètres respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, est erronée suivant une loi exponentielle de même forme, dont le paramètre a est lié aux autres par la relation*

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n^2}.$$

Ce théorème, démontré dans le cas de la somme de deux nombres (n° 49), s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de paramètres; il s'interprète aisément : *Le carré de l'erreur moyenne de la somme de n nombres erronés est la somme des carrés des erreurs moyennes de chacun d'eux.*

Dans le cas où tous les nombres ont la même loi de fréquence d'erreur, c'est-à-dire le même paramètre, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, on a

$$\frac{1}{a^2} = \frac{n}{\alpha^2}, \quad m = \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\alpha\sqrt{2}}.$$

L'erreur moyenne m de la somme est \sqrt{n} fois l'erreur moyenne de chacun d'eux.

L'erreur correspondante sur la moyenne arithmétique est n fois moindre, par conséquent égale à l'erreur moyenne d'une mesure isolée divisée par \sqrt{n} . c. q. f. d.

Si donc on exprime l'erreur d'une observation isolée en fonction des carrés des écarts, on aura, comme expressions de l'erreur moyenne d'une observation isolée et de l'erreur commise sur la moyenne de n observations, respectivement,

$$\sqrt{\frac{\sum r^2}{n}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\sum r^2}}{n}.$$

On passe aux erreurs probables en multipliant les erreurs moyennes par 0,674.

On donne quelquefois pour ces quantités des expressions un peu différentes, dont l'approximation est considérée comme plus grande. Cette démonstration suppose, en effet, la connaissance des *erreurs absolues* x_1, x_2, \dots, x_n , et, de plus, en nombre assez grand pour que l'on puisse calculer le paramètre a d'après $\sum r^2$; mais on connaît rarement les erreurs absolues. L'emploi des *erreurs apparentes*, c'est-à-dire des écarts avec la moyenne arithmétique et non avec le résultat vrai, modifie un

aurait pu atteindre $0^s,001$, ainsi que l'indique le calcul précédent, ce qui eût fait, au n° 213, $0^{\text{battement}},050$ sur la somme des moyennes des zones, sans que les conclusions qu'on en déduit en soient le moins du monde infirmées.

Conclusion relative à l'influence du mode d'enregistrement sur l'erreur probable de la moyenne des mesures définitives.

219. Nous pouvons en conclure aussi l'erreur probable de la moyenne des 630 déterminations de la vitesse de la lumière, du moins en ce qui concerne l'influence de l'enregistreur. Si ces mesures consistaient dans l'évaluation d'une vitesse uniforme se réduisant au relevé d'un seul intervalle voisin de 10 secondes, l'erreur probable sur la moyenne des résultats s'obtiendrait en divisant l'erreur probable d'une mesure de $10^s = 0^s,00924$ par $\sqrt{630}$ ou $25,1$, ce qui donnerait $0,00037$. L'erreur probable relative serait $0,000037$; comparée à la limite $0,001$ que nous nous sommes imposée, on voit qu'elle serait vingt-sept fois moindre.

Il est facile de voir que cette erreur probable sera dans le cas réel à peu près du même ordre. En effet, les déterminations comprennent le relevé de 3, 4, 5 ou même de 6 signaux sur un intervalle variant de 4 à 10 secondes.

peu ces formules. Soient x'_1, x'_2, \dots, x'_n les erreurs apparentes. Exprimant que chacune d'elles est la différence entre l'erreur vraie (d'ailleurs inconnue) et la moyenne des erreurs vraies, on a évidemment

$$x'_i = x_i - \frac{\sum x_i}{n}, \quad \text{d'où} \quad \sum x_i'^2 = \sum x_i^2 - \frac{2}{n} (\sum x_i)^2 + \frac{n}{n^2} (\sum x_i)^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2.$$

On voit que la substitution de la somme des carrés des erreurs apparentes $\sum x_i'^2$ à la somme des carrés des erreurs absolues entraînerait une inexactitude dans le paramètre de l'exponentielle; mais le théorème précédent donne la valeur approchée du terme de correction. En effet $(\sum x_i)^2$, carré de la somme des erreurs, n'est autre que le carré de l'erreur de la somme des n nombres. Dès que n est un peu grand, on peut le prendre égal à n fois le carré moyen ou $\sum x_i^2$. On en conclut

$$\sum x_i'^2 = \sum x_i^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\sum x_i'^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n-1}.$$

L'erreur moyenne d'une observation isolée et celle de leur moyenne arithmétique sont donc respectivement

$$\sqrt{\frac{\sum x_i'^2}{n-1}}, \quad \sqrt{\frac{\sum x_i'^2}{n(n-1)}}.$$

Sans entrer à ce sujet dans une discussion approfondie qui nous mènerait un peu loin, on peut dire que, en moyenne, si l'erreur relative augmente par suite de la diminution de l'intervalle à mesurer, elle diminue probablement un peu par l'influence des mesures intermédiaires, et qu'on peut compter sur une compensation approximative.

D'autre part, si ce n'est pas une vitesse rigoureusement uniforme qu'on détermine, la variation de la vitesse dans l'intervalle considéré est si faible qu'on peut la négliger pour l'évaluation approximative de l'erreur. En effet, il suffirait, sur les trois signaux employés pour l'interpolation, de faire abstraction du signal intermédiaire qui ne sert qu'à mettre en évidence l'accélération du mouvement et de raisonner sur la vitesse moyenne. Chaque détermination étant double est ainsi déterminée par 4 lectures indépendantes formant 2 groupes comprenant 2 intervalles de 2 à 4 secondes dont on prend la moyenne. On est ainsi ramené à des conditions bien voisines de celles qui ont été prises comme point de départ et conduit aux mêmes conclusions. On peut donc admettre, avec beaucoup de vraisemblance, que la moyenne des 630 déterminations de la vitesse de la lumière, qui vont être discutées, ne sera affectée, du fait de l'emploi de l'enregistreur comme intermédiaire de mesures, que d'une *erreur probable relative* voisine de 0,000037, négligeable par conséquent vis-à-vis de la limite 0,001 que nous nous sommes imposée. Elle pourrait être deux ou trois fois plus grande sans cesser d'être négligeable.

Le mode d'enregistrement est donc *pratiquement* parfait, et les erreurs qu'il reste à éliminer ne dépendent plus que de la difficulté propre aux observations.

DISCUSSION DES RÉSULTATS RELATIFS A LA DÉTERMINATION DE LA VITESSE DE LA LUMIÈRE.

Nécessité de discuter les résultats par séries indépendantes, suivant l'ordre d'extinction.

220. Le caractère périodique du phénomène lumineux observé conduit naturellement à la classification des déterminations partielles d'après l'ordre de la période qui a servi à les obtenir.

les erreurs probables correspondantes s'obtiennent en multipliant ces expressions par 0,674. Ce sont les formules généralement adoptées. La rigueur de cette démonstration est plus apparente que réelle, car elle est fondée sur la possibilité de calculer le paramètre de l'exponentielle d'après la connaissance de n écarts; or, réels ou absolus, ces n écarts sont insuffisants, à moins que n ne soit considérable, auquel cas les formules deviennent identiques avec les premières.

Cette classification est non-seulement naturelle, mais encore nécessaire au point de vue de la discussion numérique des résultats; car j'ai démontré, dès le début de ce Mémoire, que l'erreur à craindre était, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse du facteur $2n - 1$, n étant l'ordre de l'extinction observée. Il serait donc illogique et très-certainement inexact de comparer entre elles, par voie de moyenne, des observations dont l'erreur probable ne serait pas la même. Aussi le premier pas dans la discussion doit-il être de classer toutes les déterminations par *ordre* d'extinction, et l'on posera en principe que toutes les opérations relatives à la comparaison de ces résultats, telles que les calculs de moyennes, d'erreurs probables, etc., devront d'abord se limiter aux nombres d'un même groupe, c'est-à-dire correspondant à un même ordre d'extinction.

Dans chacun de ces groupes il faudra ensuite, conformément à la méthode indiquée (115), pour éliminer les erreurs personnelles, subdiviser les résultats en quatre séries, qualifiées d'une manière abrégée par les lettres V, v , U, u , suivant la loi de variation de la vitesse du mécanisme pendant la durée de l'observation. On prendra la moyenne de chaque série et l'on calculera les demi-sommes $\frac{1}{2}(V + v)$, $\frac{1}{2}(U + u)$, qui, d'après la discussion précédente (111), doivent être toutes deux affranchies des erreurs personnelles et, par conséquent, égales entre elles.

Remarques sur les qualifications des résultats partiels.

221. Ces qualifications ont été établies lors de la réduction de chaque détermination partielle, d'après le signe des $\Delta^2 t$, ainsi qu'il a été expliqué en détail au n° 203 : nous n'avons donc pas besoin d'y revenir; mais il se présente parfois une petite incertitude sur laquelle il est nécessaire d'insister. Lorsque les différences Δt sont presque égales, c'est-à-dire lorsque le mouvement est presque uniforme, les différences secondes $\Delta^2 t$ peuvent être nulles ou égales à 1, 2 ou 3 unités du chiffre estimé. Comme l'erreur probable sur ce chiffre est du même ordre (217), le signe de cette différence, quoique bien défini algébriquement, est en réalité très-incertain; il est même indéterminé dans le cas où cette différence est nulle. Je me suis à cet égard posé deux règles bien simples qui ne laissent aucune place à l'arbitraire et auxquelles le grand nombre des observations donne une rigueur complète.

- 1° Le signe de la différence seconde est celui que le calcul numérique indique;
- 2° Toute différence seconde *nulle* est regardée comme *positive*.

La première règle n'est que l'expression de la réalité; elle a pour but d'interdire des altérations arbitraires de signes dans des cas où l'on croirait voir des qualifications erronées. Voici dans quelles circonstances.

La probabilité d'une erreur se manifeste par l'interversion des grandeurs probables des déterminations partielles; ainsi, les V et les U doivent être plus grands et les v et u plus petits que la moyenne générale des résultats (115). Quand on voit, par exemple, un résultat partiel donner pour e une valeur trop forte, on est porté à craindre que les différences secondes n'aient pas leurs signes bien déterminés; car l'inversion de l'un d'eux changerait la qualification de e en U. On conçoit alors quelle part on laisserait à l'arbitraire et aux idées préconçues si l'on s'engageait sans discrétion dans de pareilles altérations des signes; le plus prudent est de s'en abstenir et d'appliquer rigoureusement la règle énoncée plus haut.

En effet, si les erreurs inévitables provenant des lectures ou des tracés amènent un renversement dans le signe de ces différences secondes, comme ces erreurs sont fortuites, il y a autant de chances pour que le renversement ait lieu dans un sens que dans un autre: dès lors, dans une longue série, la moyenne de tous les résultats doit être la même que si l'on avait rectifié les signes dans le sens probable.

222. C'est ce qui ressort clairement de la discussion suivante, fondée sur l'examen du tableau ci-dessous, où se trouve résumée la règle à suivre (203) pour déterminer les qualifications d'après les signes des deux $\Delta^2 t$ qui entrent dans le calcul d'une observation (199) et les changements qu'introduit une altération des signes.

Signes des $\Delta^2 t$ correspondant		Qualification.	Altération de la qualification lorsqu'on renverse		
à l'extinction.	à la réapparition.		le premier signe.	le deuxième signe.	les deux signes.
—	—	V	U	u	v
+	+	v	u	U	V
+	—	U	V	v	u
—	+	u	v	V	U

On voit que si une cause fortuite (comme les erreurs de lecture ou de pointé), mais d'ailleurs peu fréquente, vient à renverser le signe des $\Delta^2 t$, il se mêlera, par exemple, aux valeurs qualifiées V, un petit nombre de valeurs qui auraient dû être rangées parmi les U si c'est le premier signe qui est altéré, ou qui auraient dû être rangées parmi les u , si c'est le second, et enfin un nombre plus petit encore de valeurs qui auraient dû être rangées parmi les v si l'altération a

A. 25).

porté sur les deux signes à la fois. (Je dis *plus petit encore*, parce que le nombre de fois où ces altérations se présentent est proportionnel à la probabilité d'action de la cause fortuite, et la probabilité de rencontre simultanée de deux altérations est le produit de ces deux probabilités, supposées elles-mêmes assez petites.) De même aux valeurs ν se mêlera un petit nombre de u et U , et un nombre plus petit encore de V . En vertu de la fortuité de la cause d'altération des signes, l'inversion aura lieu aussi souvent sur le premier signe que sur le second; dès lors il se produira dans les deux cas autant de U que de u et de ν et que de V . La demi-somme des deux séries définitives V et ν sera donc entachée d'une petite proportion de valeurs dont la moyenne est $\frac{1}{2}(U + u)$ et d'une proportion plus petite encore de valeurs dont la moyenne est $\frac{1}{2}(V + \nu)$.

Comme nous savons d'avance (115) que ces deux demi-sommes doivent être égales entre elles, la petite proportion de leur mélange n'aura aucune influence fâcheuse sur le résultat définitif; elle n'aura d'autre effet que de diminuer la petite différence accidentelle qui peut subsister entre ces demi-sommes, sans pouvoir d'ailleurs l'annuler dans le cas où elle serait notable.

223. La seconde règle paraît, au premier abord, inexacte, parce qu'elle semble favoriser les $\Delta^2 t$ positifs au détriment des négatifs; il n'en est rien, grâce à une compensation analogue à celle qu'on vient d'analyser. En effet, si le signe $+$, accordé par la règle au $\Delta^2 t$ nul, est le signe véritable, la qualification sera ce qu'elle doit être; si le signe avait dû être négatif, l'application de la règle amènerait, d'après le tableau précédent, parmi les ν , des valeurs qui auraient dû être qualifiées u si l'altération porte sur le premier signe, et des valeurs qui auraient dû être qualifiées U si l'altération porte sur le second; enfin, des valeurs qui auraient dû être qualifiées V si l'altération porte sur les deux. Il faut remarquer ici qu'il n'y a pas symétrie: la règle n'amènera jamais de valeurs u et U parmi les V dont les deux signes sont négatifs. C'est là le seul point anormal, mais c'est précisément le cas où les deux $\Delta^2 t$ sont nuls à la fois et où, par conséquent, la qualification est ϖ : on l'étudiera à part lors de la discussion de ces valeurs. Il ne reste donc à considérer que les trois séries ν , u , U ; on voit aisément qu'il se mêlera à la série ν une petite proportion de valeurs qui, comme dans la discussion précédente, a pour moyenne $\frac{1}{2}(U + u)$; on verra de même qu'aux séries U et u se mêle une petite proportion de valeurs ayant pour moyenne $\frac{1}{2}(V + \nu)$. La conclusion est la même et la règle est justifiée.

224. Il existe cependant des cas où l'incertitude est manifeste et où la rectification est si évidente, qu'il est utile de la faire, mais c'est seulement dans des

séries peu étendues où les chances de compensation des erreurs invoquées plus haut sont très-limitées; encore ne doit-on avoir recours à cette rectification qu'avec une grande réserve et ne l'employer qu'après avoir donné le résultat calculé d'après la règle uniforme et en indiquant les motifs qui la rendent nécessaire.

Nous effectuerons ces modifications et quelques autres de même nature sous la rubrique *Rectifications probables*; mais nous distinguerons soigneusement les résultats obtenus dans ces circonstances sous le nom de *valeurs rectifiées*, par opposition aux valeurs obtenues en appliquant rigoureusement les règles, et qui porteront le nom de *valeurs non rectifiées*; celles-ci seront toujours données en premier lieu.

Discussion des résultats par groupes indépendants d'après l'ordre de l'extinction observée.

225. Il n'est pas besoin de revenir sur la manière de déterminer l'ordre n de l'extinction observée : elle a été exposée en détail au n° 202. Le tableau général des observations donne pour chaque résultat le facteur $2n - 1$ et la qualification V, v, U, u qui le caractérise : il suffit donc d'en extraire les résultats correspondant à la même valeur de $2n - 1$ et de les répartir en quatre colonnes suivant leur qualification.

Toutes les observations qui ont été enregistrées ont été réduites et figureront dans la discussion, quelle que soit l'erreur accidentelle qu'elles présentent : on réserve toutefois, pour une discussion ultérieure, les observations qualifiées w , qui correspondent à une vitesse apparente constante du mécanisme, ainsi que les observations incomplètes non susceptibles de qualification. Les résultats discutés sont rangés d'après leur numéro d'ordre du tableau général. Pour éviter des décimales inutiles, toutes les valeurs sont exprimées en milliers de kilomètres par seconde de temps moyen. Enfin, pour abrégé, on rappelle le sens de rotation de la roue dentée (vue par l'observateur ayant l'œil à l'oculaire) par un point placé près du numéro d'ordre, à droite si la rotation avait lieu dans le sens des aiguilles d'une montre, à gauche si la rotation était de sens contraire.

Premier, deuxième et troisième ordre.

226. Il n'y a pas d'observations d'extinction du premier ni du deuxième ordre ($2n - 1 = 1$ et $2n - 1 = 3$) : il n'y en a que deux du troisième ordre ($2n - 1 = 5$), mais elles doivent être rejetées (valeurs 1 et 2); elles sont en effet trop peu nombreuses, trop faibles, comparées aux valeurs déterminées ulté-

rièvement, et ont été obtenues dans de mauvaises conditions. Le mouvement du mécanisme était si lent qu'il était difficile de le rendre régulier : de plus, dans ces premiers ordres, les variations de vitesse sont considérables pour franchir la période d'extinction de la lumière, ce qui est fâcheux pour la délicatesse du pointé. En outre, comme l'exactitude des déterminations croît avec l'ordre d'extinction, on n'a aucun intérêt à employer les premiers ordres, dont le peu de précision devrait être compensé au moins par le nombre d'observations.

Quatrième ordre.

227. Les observations du quatrième ordre ne se rencontrent que dans les feuilles I et II; en voici le tableau :

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 7.$		Roue de 150 dents pointues.			
N ^o	V	N ^o	ν	N ^o	U	N ^o	u
3.	297,3	4.	284,4?	11.	299,8	.31	308,8
.29	303,3	10.	294,9	.28	299,6	.34	297,9
.30	298,1	.27	298,1	.33	305,1		606,7
.38	320,8?		877,4	.37	296,4		
.40	306,6				1200,9		
.41	301,5						
.42	312,2						
.43	308,8						
	2448,6						
Moyenne.	306,08 (8)		292,47 (3)		300,23 (4)		303,35 (2)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,28$ (11)				$\frac{1}{2}(U + u) = 301,79$ (6)		

La valeur moyenne V est évidemment trop forte à cause de l'observation (42) et surtout de (38); de même ν est trop faible à cause de (4) et u trop forte à cause de (31) : la vérification $\frac{1}{2}(V + \nu) = \frac{1}{2}(U + u)$ est tout à fait masquée par les erreurs accidentelles.

Rectifications probables. — Si l'on rejette les valeurs qui présentent les écarts extrêmes (38 et 4), la moyenne de V devient 303,97 (7), et celle de $\nu = 296,5$ (2). On est alors entraîné à rejeter aussi la valeur (31) qui porte sur u et lui donne une grandeur inadmissible supérieure à U, ce qui la réduit à $u = 297,9$. Les valeurs rectifiées deviennent ainsi

$$V = 303,97 (7), \quad \nu = 296,50 (2), \quad U = 300,23 (4), \quad u = 297,9 (1).$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,24 (9), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 299,07 (5).$$

Cinquième ordre.

228 Les observations du cinquième ordre ne se rencontrent que dans les feuilles I et II.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 9.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
7.	302,0	5.	296,0	9.	296,6	14.	296,8
12.	299,8	6.	300,5	15.	301,0	18.	302,9
13.	303,8	16.	296,0	17.	303,5	23.	299,2
21.	306,7	25.	291,5?	22.	<u>296,9</u>	24.	<u>293,3</u>
48.	292,8?	26.	298,7		1198,0		1192,2
49.	299,4	57.	298,1				
50.	307,2	58.	297,9				
51.	309,2	60.	299,9				
56.	298,0	63.	307,6?				
59.	312,5?	94.	<u>303,5</u>				
61.	298,4		<u>2989,7</u>				
62.	312,8?						
93.	<u>303,5</u>						
	3946,1						
Moyenne.	303,55 (13)		298,97 (10)		299,50 (4)		298,05 (4)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 301,26$ (23)				$\frac{1}{2}(U + u) = 298,78$ (8)		

Rectifications probables. — La moyenne V est probablement un peu trop forte à cause des valeurs (59) et (62), qui, d'ailleurs, d'après leur calcul, correspondent à des variations de vitesse trop rapides; il est vrai qu'en sens inverse la valeur (48) est trop faible; mais elle est insuffisante pour compenser l'effet fâcheux des deux autres. De même, la moyenne ν est un peu élevée à cause de la valeur (63) en partie compensée par (25). La demi-somme $\frac{1}{2}(V + \nu)$ est donc probablement un peu trop forte. En revanche, la moyenne U paraît un peu trop faible à cause de (22), qui pourrait, d'après les valeurs de $\Delta^2 t_0$ (n° 221), être comptée parmi les ν ; la demi-somme $\frac{1}{2}(U + u)$ est donc aussi trop faible, ce qui masque la vérification. Il y a donc lieu de supprimer au moins la valeur extrême (62) et de reporter la valeur (22) qui figure aux U parmi les ν ; il vient alors, pour les moyennes rectifiées,

$$V = 302,80 (12), \quad \nu = 298,78 (11), \quad U = 300,37 (3), \quad u = 298,05 (4).$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,79 (23). \quad \frac{1}{2}(U + u) = 299,21 (7).$$

Sixième ordre.

229. Les observations du sixième ordre sont toutes comprises dans les feuilles I et II.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 11.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	"	N°	U	N°	"
47.	296,0	44.	303,3	45.	308,8	"	"
.52	305,0	46.	298,7	69.	305,4		
.53	311,5?	.54	275,0??		614,2		
68.	297,5	.55	294,9				
70.	296,1	65.	306,2?				
76.	306,3	66.	304,2				
77.	298,4	67.	301,9				
.89	300,3	71.	303,6				
.90	306,6	72.	298,7				
.92	303,5	73.	290,6?				
.95	306,3	.91	296,6				
	3327,5		3273,7				
Moyenne.	302,50 (11)		297,61 (11)		307,1 (2)		
	$\frac{1}{2}(V + v) = 300,05$						

Cette série est incomplète; les u font totalement défaut, de sorte que la valeur U devient inutile. La valeur V est probablement un peu forte à cause de (53); celle de v est certainement trop faible à cause de la valeur (54), qui est évidemment à exclure.

Rectifications probables. — On peut rejeter la valeur anormale de v (54); l'autre valeur extrême, en sens inverse (65), peut également être supprimée, car elle a été obtenue dans de mauvaises circonstances. En effet, si l'on se reporte au tableau général, on verra que les signaux de l'observateur $\theta''\theta''$ ont été très-rapprochés ($18,00 - 15,60 = 0^s,240$ ou $\frac{1}{4}$ de seconde); c'était probablement une extinction accidentelle due à quelque perturbation atmosphérique.

Je pense qu'il faut s'arrêter là dans l'élimination des valeurs divergentes, sans quoi on tomberait dans l'arbitraire. Ainsi il est évident qu'il y a de grandes chances pour que la valeur (73) de v soit trop faible, mais aussi, en sens contraire, pour que la valeur (53) de V soit trop grande. En définitive, il faut laisser agir les chances de compensation, d'autant que l'erreur de ces écarts accidentels atteint à peine 10 unités sur 300 ou 3 pour 100 en valeur relative, quantité relativement faible pour un ordre d'extinction si peu élevé.

Septième ordre.

230. Les observations de l'extinction du septième ordre sont peu nombreuses. Les feuilles I, II (du 3 septembre) en comprennent la majeure partie; la feuille III (du 6 septembre) contient les trois dernières: elles ont toutes été obtenues avec la roue de 150 dents.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 13.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
79.	301,1	78.	298,4	.84	300,7	.83	298,7
81.	309,8?	80.	303,6	.104	303,1	.85	300,3
.82	300,6	.88	307,0?		603,8	.103	299,4
.86	301,1		909,0				898,4
.102	$\frac{301,7}{1514,3}$						
Moyenne.	302,86 (5)		303,00 (3)		301,90 (2)		299,47 (3)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 302,93 (8)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 300,69 (5)$		

Rectifications probables. — Il est difficile de conserver dans la série de V la valeur (81), évidemment trop forte et pour laquelle il n'y a guère de compensation à attendre dans la moyenne d'un si petit nombre d'observations. Quant à la valeur (88) de ν , elle est certainement aussi à rejeter, d'abord parce qu'elle est évidemment trop forte, mais surtout parce qu'elle a été obtenue dans des circonstances tout à fait anormales. En effet, le tableau général montre: 1° que les deux signaux de l'observateur ne sont distants que de

$$(34,40 - 32,20) = 2,20 = 0^s,22$$

ou moins de $\frac{1}{4}$ de seconde, durée trop courte pour une bonne observation; 2° que les données t_0, t_1, t_2 sont insuffisantes pour calculer autrement que *par extrapolation* la vitesse; le mécanisme s'arrêtait brusquement par suite de l'arrivée du poids moteur au bas de sa course. Si l'on écarte ces deux observations, il vient, pour les moyennes rectifiées,

$$V = 301,13 (4), \quad \nu = 30,001 (2), \quad U = 301,9 (2), \quad u = 299,5 (3).$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 301,06 (6), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 300,69 (5).$$

XIII.

A.30

Huitième ordre.

231. Les observations du huitième ordre sont en petit nombre et se trouvent en partie sur la feuille III (6 septembre, roue de 150 dents), et en partie sur la feuille IV (11 septembre, roue de 200 dents) : il faut donc les examiner séparément.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 15.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
.105	307,3?	.105 bis	297,6	"	"	.97	304,7
112.	303,8	116.	302,5			110.	306,4
118.	303,4	117.	298,7			111.	302,3
119.	297,3	120.	294,5			114.	297,2
	<hr/>		<hr/>				<hr/>
	1211,8		1193,3				1210,6
Moyenne.	303,0 (4)		298,3 (4)				303,5 (4)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,65$ (8)						

Les valeurs U sont complètement défaut; celles de u deviennent inutiles. La moyenne V est évidemment un peu trop grande à cause de la valeur (105). Dans la série ν , la valeur (116), qui correspond à une observation soutenue trop peu de temps ($7,20 - 5,00 = 2,2 = 0^s,22$), pourrait être rejetée; mais ce seul motif n'est pas suffisant pour autoriser cette élimination. En effet, on remarquera que l'observation (120), qui n'a été soutenue que pendant ($42,00 - 36,00 = 0^s,60$), pourrait l'être, pour le même motif et à cause de sa faiblesse évidente; mais alors il faudrait rejeter aussi (112), (118) et (119), dont la durée d'observation a été également assez courte. On voit qu'on serait conduit à rejeter presque toutes les valeurs, déjà trop peu nombreuses. Cet exemple prouve qu'il faut être excessivement sobre dans l'élimination des résultats divergents et ne les effectuer que dans le cas où les motifs sont sérieux et autant que possible multiples.

Il n'y a donc aucune rectification plausible à effectuer.

2° Feuille VII.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 15.$	Roue de 200 dents pointues.				
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
.513	296,7	.512	304,1	.511	300,5	"	"
.517	<u>297,0</u>	.514	304,8				
	593,7	.515	300,4				
		.516	<u>295,6</u>				
			1204,9				
Moyenne.	296,85 (2)		301,23 (4)				
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,04$ (6)						

Rectifications probables. — Ces nombres appartiennent à une même série d'observations consécutives; leur annotation est très-bonne : elles valent donc la peine d'être discutées malgré leur petit nombre. D'après les différences secondes $\Delta^2 t_0$, la valeur U est de qualification presque indéterminée; on peut aussi bien la classer parmi les V. Pour la même raison, la valeur (517) serait peut-être mieux placée parmi les u ; par conséquent il faut la rejeter, puisque la catégorie des U n'existe plus. Il en résulte, pour les moyennes rectifiées,

$$V = 298,60 (3), \quad \nu = 301,23 (4),$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,10 (7).$$

Neuvième ordre.

232. Les observations de l'extinction du neuvième ordre sont nombreuses; elles ont été obtenues dans des circonstances diverses : aussi est-il nécessaire de les discuter en plusieurs groupes.

La feuille III (6 septembre) en contient une douzaine effectuées avec une roue de 150 dents; toutes les autres ont été obtenues avec une roue de 200 dents. La feuille V (8 septembre) renferme une vingtaine d'observations; la feuille VI (11 septembre) près de soixante, et une série d'une vingtaine faite comme essai de la lumière d'une lampe à pétrole au lieu de la lumière Drummond. Enfin la feuille VII (11 septembre) comprend une douzaine d'observations désignées spécialement comme excellentes sur le carnet d'observations. On doit séparer la discussion des valeurs de la feuille III, obtenues avec la roue de

A.30.

150 dents, de celles des observations à la lumière de la lampe à pétrole ; mais on peut réunir toutes les autres, obtenues avec la même roue dentée de 200 dents et la même source de lumière.

1° *Feuille III.*

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 17.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	v	N°	U	N°	"
.98	306,6	.96	298,2	122.	305,3	"	"
.100	301,0	.99	294,3				
.106	299,3	.101	304,8				
121.	310,2?	.107	294,1				
123.	299,2	.109	295,8				
	<u>1516,3</u>		<u>1487,2</u>				
Moyenne.	303,26 (5)		297,44 (5)				
	$\frac{1}{2}(V + v) = 300,35$						

Rectifications probables. — La valeur (121) est évidemment trop forte, on peut la rejeter ; mais il faut aussi retrancher la mesure la plus faible de toutes, c'est-à-dire la valeur (107), afin de rejeter les deux écarts extrêmes. Il vient alors

$$V = 301,53 (4), \quad v = 298,33 (4).$$

$$\frac{1}{2}(V + v) = 299,93 (8).$$

2° *Feuille VI.*

233. Ce sont les observations faites avec la lumière du pétrole et une roue de 200 dents pointues. La soirée du 11 septembre présentait une pureté d'atmosphère et un calme des images tout à fait exceptionnels ; la lumière de retour était d'un éclat vif, même avec une simple lampe à pétrole à mèche plate, dont la flamme était utilisée dans le sens de la tranche. Les observations, faites à titre d'essai, ont été moins sûres qu'avec la lumière Drummond, à cause de la faiblesse de l'intensité lumineuse et de la fatigue qui en résultait pour l'observateur. L'essai n'ayant pas paru satisfaisant n'a pas été répété.

Lumière d'une lampe à pétrole.		$2u - 1 = 17.$		Roue de 200 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
.389	294,9?	.388	304,2	398.	296,6	.395	298,2
.391	298,0	.390	307,5			.397	395,5
.393	297,3	.392	298,0			399.	296,2
401.	298,0	.394	298,6			400.	295,0
407.	302,6	.396	296,0			402.	301,9
	<u>1490,8</u>	403.	301,0			405.	302,1
		404.	300,5			406.	302,0
			<u>2105,8</u>				<u>2091,5</u>
Moyenne.	298,16 (5)		300,83 (7)		296,6 (1)		298,77 (7)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,50$				$\frac{1}{2}(U + u) = 297,69$		

Rectifications probables. — L'unique valeur U, beaucoup trop faible, ne devrait pas être combinée par voie de moyenne avec le groupe u , d'autant que, comme on le verra plus loin, cette valeur devrait plutôt être classée parmi les ν ; on serait donc ainsi forcé de rejeter toute la série u ou plus d'un tiers des observations.

Comme ce groupe de valeurs a été obtenu avec une lumière faible, il y a lieu de chercher à en tirer un meilleur parti, et surtout d'examiner de plus près si la faiblesse des moyennes ne tiendrait pas à l'influence de la source lumineuse. On pourrait craindre, en effet, en poussant les choses à l'extrême, que la vitesse de propagation de la lumière ne fût fonction de l'intensité.

Réduite aux douze valeurs qui constituent la moyenne $\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,5$, la série donne un résultat trop rapproché des moyennes antérieures (300,3 environ) pour qu'on puisse hasarder une conclusion quelconque; d'ailleurs les considérations suivantes vont encore atténuer la différence.

Si l'on examine les différences secondes $\Delta^2 t$, on voit que leur valeur est souvent si petite, et par conséquent leur signe si mal défini, que l'on est en droit de modifier la qualification d'un certain nombre de résultats. Ainsi il est très-plausible de ranger la plus forte valeur de u (405) parmi les V, la valeur (402) et l'unique valeur U parmi les ν ; en sens inverse, l'observation (401) doit passer des V aux U. Dans cet ordre d'idées, on est forcé d'exclure les valeurs extrêmes (389 et 390) dont la qualification est inexplicable devant leur grandeur relative. Le tableau devient, après ces rectifications :

N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
.391	298,0	.388	304,2	401.	298,0	.395	298,8
.393	297,3	.392	298,3			.397	295,5
405.	302,1	.394	298,6			399.	296,2
407.	302,6	.396	296,0			400.	295,0
	<u>1200,0</u>	398.	296,6			406.	<u>302,0</u>
		402.	301,9				<u>1487,5</u>
		403.	301,0				
		404.	300,5				
			<u>2397,1</u>				
Moyenne.	300,00 (4)		299,64 (8)		298,0 (1)		297,5 (5)
			$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,82$ (12)				$\frac{1}{2}(U + u) = 297,50$ (6)

Il n'y a guère d'amélioration pour la série U, de sorte qu'il faut abandonner la moyenne $\frac{1}{2}(U + u)$; mais la moyenne $\frac{1}{2}(V + \nu)$ a été améliorée en ce sens que maintenant V est plus grand que ν , ce qui doit être, et que la valeur s'est rapprochée notablement de la moyenne générale des valeurs antérieures (300,3). Le résultat aurait à peine été modifié si l'on avait conservé les deux valeurs extrêmes (389 et 390), car on aurait trouvé

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} V = 298,98 \text{ (5)} & \text{et} & \nu = 300,51 \text{ (9)}, \\ \frac{1}{2}(V + \nu) = 299,75. \end{cases}$$

au lieu de 299,84; mais ν devrait être moindre que V : la combinaison adoptée est donc plus satisfaisante.

Cette série d'observations n'est que très-peu inférieure aux autres et ne peut servir en quoi que ce soit à prouver que l'intensité de la lumière a de l'influence sur la valeur de la vitesse de propagation. Du reste, cette question se présentera de nouveau dans la série des mesures faites avec la lumière solaire sous une forme encore plus concluante.

3° Feuilles V, VI et VII.

234. Le tableau suivant renferme le reste des observations du neuvième ordre :

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 17.$		Roue de 200 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
273.	298,7	257.	302,1	.264	299,2	.263	301,0
275.	303,8	.267	302,6	266.	300,2	.265	300,5
279.	302,4	.274	304,6	276.	294,7	.268	299,3
282.	297,0	280.	298,4				
284.	301,1	281.	305,5				
286.	293,4?	283.	299,1				
.288	304,2	.289	298,5	.287	303,4	.291	300,4
.290	299,0	.292	298,7	326.	303,4	.295	299,9
.293	300,7	.296	298,4	327.	299,7	.302	303,6
.294	302,5	.298	300,0	335.	301,0	.303	297,2
.297	299,8	.299	297,1	337.	301,5	.305	300,2
.307	303,3	.300	301,1			329.	288,0?
.309	300,1	.301	302,5			331.	299,1
.312	298,2	.308	300,2			339.	297,1
.315	302,4	.310	304,9				
316.	301,9	.311	301,6				
317.	300,6	.313	303,6				
320.	303,7	.314	299,9				
322.	304,7	318.	300,4				
323.	302,7	319.	297,7				
324.	301,0	321.	299,4				
325.	300,2	328.	290,0?				
330.	296,0	333.	300,3				
332.	302,1	336.	303,4				
334.	299,7	338.	298,6				
342.	302,0	341.	302,3				
344.	301,3	343.	299,7				
.503	300,2	.502	300,6	.500	300,8	.499	298,0
.510	299,5	.507	298,6		2703,9	.504	301,4
	8722,2	.509	305,7?			.505	298,7
			9015,5			.506	302,0
						.508	298,9
							4785,3
Moyenne.	300,77 (29)		300,52 (30)		300,43 (9)		299,08 (16)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,65 (59)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 299,76 (25)$		

Rectifications probables. — Les séries V et ν étant nombreuses, il est permis de compter sur les chances de compensation des erreurs accidentelles; celles des valeurs de u et surtout de U sont moins favorables, mais il n'y a guère qu'une observation u (329) présentant un écart inadmissible et que l'on doive rejeter.

On serait tenté de rejeter aussi la valeur trop faible (328) de ν ; mais, dans une série si nombreuse, il est bien peu utile d'opérer de semblables éliminations, car on serait amené à rejeter aussi les valeurs trop fortes (281 et 509), qui compensent presque exactement l'influence de (328).

Toutefois, la rectification qu'on peut faire, c'est celle de la qualification des valeurs de ν (257, 274, 310), qui, d'après les valeurs de $\Delta^2 t$, peuvent être rangées parmi les U , dont le nombre se rapproche ainsi de celui de u . On trouve également que la valeur trop faible de V (286) peut passer aux ν . Si l'on opère ces rectifications, il vient comme moyenne

$$V = 301,03 (28), \quad \nu = 299,90 (28), \quad U = 301,30 (12), \quad u = 299,82 (15), \\ \frac{1}{2}(V + \nu) = 300,47 (56), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 300,56 (27).$$

La vérification $\frac{1}{2}(V + \nu) = \frac{1}{2}(U + u)$ se présente ici avec une grande approximation: on devait s'y attendre; car l'ordre d'extinction commence à être élevé et les séries sont assez nombreuses.

Dixième ordre.

235. Les observations du dixième ordre sont nombreuses; elles ont toutes été obtenues avec la lumière Drummond et la roue dentée de 200 dents des mesures précédentes. La feuille V (8 septembre) en contient une dizaine et la feuille VII (11 septembre) environ soixante-quinze; les annotations du carnet d'observations de cette dernière feuille sont excellentes. Ces deux groupes, réunis dans le même tableau, seront discutés ensemble.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 19.$		Roue de 200 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
270.	300,9	254.	300,4	256 bis.	301,1	255.	296,1
278.	301,0	261.	302,2	270 bis.	298,1	256.	298,0
.		277.	294,5	272.	303,0	271.	299,7
410.	298,0	408.	299,7	418.	299,3	413.	301,5
412.	298,4	409.	300,9	426	294,3?	414.	297,3
416.	301,7	411.	300,6	430	303,6	421.	299,8
419.	299,9	415.	301,2	437	301,5	423	304,7
420.	300,3	417.	299,8	438	298,7	424	293,3?
429	301,6	422.	299,8	440	303,1	435	298,5
431	295,6?	425	300,9	444	303,7	449.	302,7
432	299,7	428	299,2	445	295,0	451.	299,3
434	302,8	441	300,3	460.	300,6	453.	297,8
436	300,7	443	304,6?	518.	301,3	454.	298,7
439	297,8	446.	301,9	523.	300,1	457.	299,7
442	297,9	447.	300,6	526.	302,2	519.	301,6
448.	299,4	450.	301,3	535.	301,6	520.	301,2
455.	302,0	452.	300,4		4807,2	528.	306,5
458.	304,2	456.	298,6			533.	299,2
464.	300,5	461.	297,6			534.	301,1
521.	299,7	524.	301,4				5696,7
522.	303,2	525.	299,1				
527.	300,5	530.	301,8				
532.	306,0	531.	298,2				
	6611,7		6905,0				
Moyenne.	300,35 (22)		300,22 (23)		300,45 (16)		299,83 (19)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,29 (45)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 300,14 (35)$		

Les séries sont très-concordantes. La vérification $\frac{1}{2}(V + \nu) = \frac{1}{2}(U + u)$ est aussi complète qu'on peut le désirer. On remarquera que les différences entre les écarts accidentels extrêmes diminuent notablement à mesure que l'ordre d'extinction augmente, ce qui est conforme à la prévision démontrée au début du Mémoire (7).

Rectifications probables. — D'après la remarque faite précédemment (234), il n'y a aucun bénéfice à rejeter les valeurs présentant des écarts un peu grands lorsque les séries sont nombreuses, à cause des compensations qui se présentent

spontanément; l'examen de la grandeur des $\Delta^2 t$ indique cependant quelques rectifications à essayer.

Trois valeurs très-élevées de u (423, 449 et 528) peuvent être rangées parmi les V ; par contre, l'observation (521) peut passer des V aux u . D'autre part, la valeur (530) des v peut permuter avec (438) des U . On en conclut

$$V = 301,08 (24), \quad v = 300,08 (23), \quad U = 300,64 (16), \quad u = 298,97 (17), \\ \frac{1}{2}(V + v) = 300,58 (47), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 299,81 (33).$$

On voit, par cet exemple, que les *rectifications probables* n'améliorent pas toujours la concordance $\frac{1}{2}(V + v) = \frac{1}{2}(U + u)$. Toutefois, la concordance n'est pas une garantie absolue de l'exactitude des mesures. Il ne faut pas oublier qu'en tout cas V doit être plus grand que v et U que u . Or, dans les résultats non rectifiés, la différence $V - v$ était presque nulle, ce qui était l'indice de quelque anomalie. Les rectifications qui viennent d'être faites ont rétabli une différence acceptable entre V et v ; c'est donc une amélioration réelle ou tout au moins une interprétation très-utile des résultats.

Onzième ordre.

236. Les observations du onzième ordre se rencontrent, au nombre d'une quarantaine, dans la feuille VI et d'une trentaine dans la feuille VII; comme elles ont été obtenues toutes dans la même soirée (11 septembre), avec la même roue dentée et la même source de lumière, on doit les réunir dans la même discussion.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 21.$		Roue de 200 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
346.	298,9	349.	300,1	350.	300,1	354.	301,6
347.	297,6	353.	302,7	351.	301,5	362.	297,5
348.	301,8	356.	301,7	359.	299,8	363.	305,4?
352.	300,0	360.	300,8	.371	298,6	.368	298,9
355.	301,0	361.	298,5	.372	302,4	.380	301,6
357.	302,7	364.	300,2	.374	299,5	.381	298,6
358.	302,8	365.	301,9	.375	301,5	.384	300,0
.366	298,1	.369	300,1	.382	302,4	.387	297,3
.367	298,7			.383	297,6		
.370	300,2	465.	298,9			470.	299,5
.373	300,4	469.	300,6	467.	296,1	473.	303,5
.376	299,5	476.	305,4	468.	301,1	479.	305,6
.377	299,7	477.	297,2	472.	299,3	480.	299,2
.378	301,7	482.	300,0	474.	300,4		3608,7
.379	300,3	483.	303,4	475.	299,9		
.385	299,4	485.	298,8	481.	298,9		
.386	298,5	.488	299,0	486.	300,9		
		.491	297,7	487.	301,2		
478.	301,8	.493	296,5	.492	305,1		
484.	300,8	.496	298,1	.494	302,1		
.489	300,9		5701,6	.495	299,0		
.490	302,4			.497	300,3		
	6307,2				6307,7		
Moyenne.	300,34 (21)		300,08 (19)		300,37 (21)		300,71 (12)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,21 (40)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 300,54 (33)$		

On remarquera l'atténuation progressive avec l'ordre des extinctions des écarts accidentels, ainsi que l'amélioration de la vérification $\frac{1}{2}(V + \nu) = \frac{1}{2}(U + u)$.

Rectifications probables. — Elles consistent à ranger parmi les U les valeurs de ν (356, 369, 476 et 483) d'après l'indétermination du signe des $\Delta^2 t$; inversement, la valeur (383) doit passer de U aux ν ; enfin l'observation (479) doit passer de u aux V. Ces modifications conduisent aux moyennes suivantes :

$$V = 300,58 (12), \quad \nu = 299,29 (16), \quad U = 300,86 (24), \quad u = 300,27 (11),$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,94 (38), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 300,57 (35).$$

La vérification est moins complète, mais l'inégalité nécessaire, $u < U$, qui n'avait pas lieu primitivement, est rétablie.

Douzième ordre.

237. Il ne se rencontre que quatre observations de l'extinction du douzième ordre, feuille III.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 23.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
124.	301,0	125.	296,1	»	»	126.	300,9
127.	308,8						
	<u>609,8</u>						
Moyenne.	304,9 (2)		296,1 (1)				
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,50$ (3)						

Il est bien difficile de tirer parti d'un si petit nombre d'observations; comme les U ne sont pas représentés, il faut rejeter la valeur de u ; il ne reste que la demi-somme $\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,50$. Elle est très-voisine de la moyenne des autres ordres; mais c'est une coïncidence heureuse à laquelle il ne faut attacher qu'une faible importance, car la valeur V (127) est évidemment beaucoup trop forte : par contre, la valeur ν (125) est trop faible, ce qui fait compensation.

Rectifications probables. — La valeur (126), vu la petitesse des $\Delta^2 t$, pourrait passer aux ν ; d'autre part, on ne peut guère conserver la valeur anormale (127), ce qui réduit aux résultats suivants :

$$V = 301,0 \text{ (1), } \nu = 298,5 \text{ (2),}$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,75 \text{ (3).}$$

Treizième ordre.

238. A part une observation $\nu = 299,6$ (133), feuille IV (7 septembre, roue dentée de 150 dents), qui se trouve isolée parmi des valeurs de l'ordre suivant, les observations du treizième ordre ne se rencontrent qu'au nombre de dix sur la feuille V (8 septembre); elles ont été obtenues avec une roue dentée de 180 dents carrées, à l'aide de la lumière Drummond, au crépuscule, et ont été interrompues promptement par la brume.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 25.$		Roue de 180 dents carrées.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
.246	303,1	.244	302,5	.253	300,5	.247	299,0
.248	300,1	.245	296,9				
.249	301,0	.252	302,0				
.250	299,7		<u>901,4</u>				
.251	300,2						
	<u>1504,1</u>						
Moyenne.	300,82 (5)		300,47 (3)		300,5 (1)		299,0 (1)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,65 (8)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 299,85 (2)$		

Rectifications probables. — Il n'y a aucun écart extraordinaire à rejeter ; mais la valeur (244) peut être classée parmi les U et la valeur (250) parmi les u , d'après la considération des $\Delta^2 t$. On en conclut

$$V = 301,10 (4), \quad \nu = 299,45 (2), \quad U = 301,50 (2), \quad u = 299,35 (2),$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,28 (6), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 300,43 (4).$$

Quatorzième ordre.

239. La feuille IV (6 septembre) contient une dizaine de bonnes observations du quatorzième ordre obtenues avec une roue de 150 dents et à la lumière Drummond. La feuille VIII (27 septembre) en contient aussi une dizaine, mais obtenues avec une roue de 144 dents et à la lumière solaire. Il faut les examiner séparément

1° Feuille IV.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 27.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	u
.130	302,3	134.	298,0	.129	300,9	.132	298,4
131.	304,7	137.	300,6	136.	298,9		
135.	<u>303,2</u>		<u>598,6</u>	139.	<u>299,7</u>		
	910,2				899,5		
Moyenne.	303,40 (3)		299,30 (2)		299,83 (3)		298,40 (1)
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 301,35 (5)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 299,12 (4)$		

Il n'y a aucune rectification plausible à apporter à cette petite série.

2° Feuille VIII.

Lumière solaire.		$2n - 1 = 27$		Roue de 144 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	"
.551	302,1	.555	299,3	.572	301,5	»	»
.556	303,4	.557	305,8?				
.570	303,1	.558	291,2?				
	<u>908,6</u>	.569	299,5				
		.571	296,1				
		.587	<u>293,9?</u>				
			1785,8				
Moyenne.	302,87 (3)		297,63 (6)				
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,25$						

La série, peu nombreuse, paraît assez médiocre, à cause des valeurs extrêmes qui s'y rencontrent; mais il faut remarquer que ces mesures ont été effectuées pendant le jour, où la stabilité du calme de l'atmosphère est moins complète que pendant la nuit.

Rectifications probables. — Les valeurs extrêmes (557 et 558) doivent être rejetées; quant à la valeur (587), elle est certainement trop faible, si l'on en juge par l'hésitation indiquée par la valeur voisine non qualifiée 303,9 (n° 586 du tableau général). Si l'on suppose que ces deux pointés appartiennent à une même extinction interrompue par quelque perturbation, on rectifiera la valeur 587 en l'augmentant dans le sens de la valeur 586. On pourra, par exemple, faire entrer cette dernière pour un tiers dans la moyenne comparée des deux et adopter comme valeur $\nu = 297,2$. Cette rectification, un peu arbitraire, je l'avoue, est plus logique que la suppression de la valeur en litige dans une série déjà si peu nombreuse. Il vient alors

$$V = 302,87 (3), \quad \nu = 297,3 (4),$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,10 (7),$$

La suppression totale de la valeur (587) aurait donné $\nu = 298,30 (3)$ et $\frac{1}{2}(V + \nu) = 300,60$. On voit que la différence ne serait pas grande. Malgré le peu d'importance de la série, il est bon de remarquer que l'influence du changement de source lumineuse est insensible (*voir* n° 233). La série suivante va donner sur ce sujet des résultats encore plus concluants.

Quinzième ordre.

240. Les observations de l'extinction du quinzième ordre sont nombreuses ; elles ont été toutes obtenues de jour, avec la lumière solaire, par le moyen d'une roue dentée de 144 dents. Elles forment la presque totalité des observations de la feuille VIII (27 septembre).

Lumière solaire.		2 n - 1 = 29.		Roue de 144 dents pointues.			
N°	V	N°	v	N°	U	N°	u
539.	301,0	541.	297,6	537.	301,5	538.	301,1
542.	300,1	544.	295,3	562.	302,6	540.	297,8
545.	297,7	.550	296,4	565.	303,1	543.	301,3
.548	303,3	.559.	303,3	.591	301,6	.581	296,9
.552	307,6?	561.	294,5	.601	301,5	584.	296,4
560.	301,1	.563	298,5		1510,3	.590	295,9
.564	301,3	.566	297,9			.595	301,9
.567	302,4	.568	293,9			.619	299,2
575.	299,4	573.	294,4				2390,5
577.	301,8	574.	298,5				
578.	303,0	576.	299,9				
579.	307,1?	589.	296,5				
580.	302,7	.592	298,1				
583.	301,6	.593	295,9				
585.	304,0	.594	298,6				
.598	301,8	.596	303,5				
.603	301,2	.597	297,6				
.604	301,3	.600	297,5				
.607	302,9	.602	296,1				
.609	306,0	.605	298,9				
.610	299,6	.608	295,0				
.613	301,7	.612	296,7				
.618	304,1	.614	296,7				
.620	305,2	.616	300,4				
624.	306,3	.621	298,0				
	7564,2	.622	302,6				
		623.	302,8				
			8045,1				
Moyenne.	302,57 (25)	297,96 (27)		302,06 (5)		298,81 (8)	
	$\frac{1}{2} (V + v) = 300,27 (52)$			$\frac{1}{2} (U + u) = 300,44 (13)$			

On remarquera que, contrairement aux séries précédentes, les différences $V - v$ et $U - u$ sont notables. Ce résultat est une conséquence nécessaire des circonstances où ces valeurs ont été obtenues. En effet, les observations ont été faites de jour avec la lumière solaire. Le champ de vision et surtout la tache grise provenant de l'éclairement de la denture (n^{os} 110 et 175) étaient fortement éclairés, ce qui diminuait la sensibilité de l'œil de l'observateur; par contre, l'éclat du point lumineux de retour était très-vif et un peu onduleux à cause de l'instabilité du calme de l'atmosphère.

Dans ces conditions, pour que l'observation soit nette, il faut mener rapidement l'expérience, c'est-à-dire donner des variations assez rapides à la vitesse, afin que la variation d'intensité lumineuse due au phénomène observé se dégage nettement des variations accidentelles; il faut, en outre, adopter pour la denture un rapport du plein au vide beaucoup plus grand que dans les expériences de nuit pour que la période d'extinction soit plus longue et facile à distinguer des extinctions fortuites. L'augmentation de la variation de vitesse ou de l'accélération a pour effet d'augmenter les erreurs systématiques de V et de v (n^o 115) dues aux retards de perception et de transmission des signaux, lesquelles sont égales et de signes contraires: voilà pourquoi la différence $V - v$ augmente. L'allongement de la période d'extinction ne modifie pas beaucoup les erreurs personnelles de U et u ; mais elle diminue beaucoup les valeurs u et augmente de la même quantité les valeurs U : c'est la cause qui augmente la différence $U - u$ (*).

Ces modifications n'altèrent en rien la précision des mesures, puisque, dans les deux cas, les erreurs sont égales et de signes contraires, ainsi qu'on l'a minutieusement démontré aux n^{os} 111 et suivants; la preuve expérimentale n'en est que plus saillante dans la vérification $\frac{1}{2}(V + v) = \frac{1}{2}(U + u)$, qui se présente ici avec une très-grande approximation.

Remarque. — D'après l'analyse succincte du cas présent, on voit que les deux divergences apparentes $V > v$, $U > u$ sont dues à des causes immédiates tout à fait distinctes. La première, $V - v$, représente le double de l'erreur personnelle due aux retards d'impression visuelle et de transmission des signaux; la deuxième, $U - u$, correspond au double de la différence des vitesses de la roue dentée qui produisent sur l'œil l'impression d'extinction et de réapparition de

(*) Les observations exécutées de nuit avec une lumière faible, comme celles qui ont été faites à la lampe à pétrole (voir plus haut, n^o 233) présentent les caractères précisément inverses; les variations de vitesse du mécanisme sont si lentes que les $\Delta^2 t$ sont presque insensibles, ce qui cause l'indétermination des qualifications.

la lumière. Elle est représentée (*Pl. I, fig. 31*) par la différence d'abscisse des sommets des deux courbes représentatives, tandis que la différence $V - v$ est (*fig. 30*) la différence d'abscisse des milieux des arcs $M'N'$ et $P'Q'$ (*voir les nos 113 et 114*).

La coïncidence presque complète des deux moyennes $\frac{1}{2}(V + v) = \frac{1}{2}(U + u)$ est donc, dans le cas présent, une garantie très-précieuse de l'exactitude des résultats ; et comme ces moyennes reproduisent les valeurs des autres séries, cette garantie s'étend, jusqu'à un certain point, à l'ensemble des mesures.

A un autre point de vue, l'importance de cette série n'est pas moins grande ; elle prouve, par une suite nombreuse d'observations, que l'influence du changement d'intensité de la source lumineuse (*) sur la valeur de la vitesse de la lumière est insensible. Ce résultat avait, du reste, été déjà pressenti dans la discussion des valeurs du neuvième et du quatorzième ordre.

Rectifications probables. — Les écarts accidentels sont en moyenne un peu plus grands que dans les observations de nuit des ordres précédents : cela tient probablement à ce que les perturbations atmosphériques sont plus intenses de jour que de nuit. On peut se borner à rejeter les deux valeurs extrêmes, vraiment inadmissibles : l'une (552), parmi les V , qui est trop forte ; l'autre, trop faible, parmi les v (568). Parmi les changements de qualification, il n'y a guère qu'à ranger parmi les V la valeur u (595), rectifications indiquées par la faible valeur des $\Delta^2 t$. Il vient alors

$$V = 302,34 (25), \quad v = 298,13 (26), \quad U = 302,06 (5), \quad u = 298,37 (7), \\ \frac{1}{2}(V + v) = 300,24, \quad \frac{1}{2}(U + u) = 300,22.$$

Seizième ordre.

241. Il ne se rencontre que sept observations de l'extinction du seizième ordre : quatre sur la feuille IV (roue de 150 dents, lumière Drummond) et trois sur la feuille VIII (roue de 144 dents, lumière solaire). Les voici séparément :

(*) Pour avoir une idée du rapport des intensités extrêmes des sources employées dans mes expériences, j'ai déterminé directement, d'une manière approximative, le rapport des éclats intrinsèques de la flamme de la lampe à pétrole, prise de tranche, et du disque solaire, en projetant successivement l'image du Soleil et de la flamme sur une ouverture de grandeur variable, et en comparant les éclaircissements avec un photomètre spécial que j'ai nommé *microphotomètre*. Le rapport d'intensité pour les rayons rouges ou jaunes est compris entre 5000 et 10000.

*Feuille IV.**Feuille VIII.*Lum. Drum. $2n - 1 = 31$. Roue de 150 dents.Lum. sol. $2n - 1 = 31$. Roue de 144 dents.

N°	V	N°	v	N°	V	N°	v
.194	300,0	.193	301,9	.546	300,6	.547	297,6
.195	298,0					.553	296,7
.199	300,0						594,3
	<u>898,0</u>						
Moyenne.	299,33 (3)		301,90 (1)		300,60 (1)		297,15 (2)
	$\frac{1}{2}(V + v) = 300,62$ (4)				$\frac{1}{2}(V + v) = 298,88$ (3)		

Dans les deux séries, les valeurs U et u font défaut. Quoique les deux séries soient peu comparables, nous prendrons leur moyenne composée pour représenter le seizième ordre $\frac{1}{2}(V + v) = 299,87$ (7).

Il ne se présente d'ailleurs aucune rectification plausible.

Dix-septième ordre.

242. C'est dans la feuille IV (6 septembre) seulement qu'on rencontre des observations de l'extinction du dix-septième ordre.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 33$.		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	v	N°	U	N°	u
.155.	298,0	.152.	300,2	.168	303,2	.156.	300,5
.161	300,9	.153.	296,5			.159.	296,4
.162	300,0	.154.	297,0			.191	302,0
.164	303,8	.165	304,3?			.192	301,8
.166	297,4	.167	297,7				<u>1200,7</u>
.180	301,9	.169	295,2?				
.187	<u>298,2</u>	.179	299,8				
	2100,2	.181	298,0				
		.182	296,9				
		.188	301,8				
		.189	<u>297,5</u>				
			3284,9				
Moyenne.	300,03 (7)		298,63 (11)		303,20 (1)		300,18 (4)
	$\frac{1}{2}(V + v) = 299,33$ (18)				$\frac{1}{2}(U + u) = 301,69$ (5)		

Rectifications probables. — La série des valeurs v contient deux écarts en sens contraire, mais qui se compensent rigoureusement, relativement à la moyenne; il est donc indifférent de les rejeter ou de les garder. L'examen des différences secondes $\Delta^2 t$ montre que la valeur (155) doit passer des V aux u , et, inversement, la valeur 191 des u aux V. Les valeurs trop faibles (166 et 167) sont malheureusement indéterminées comme qualification, à cause de la petitesse des $\Delta^2 t$. Toutefois, la seconde paraît devoir être classée parmi les u . Il vient alors, comme moyennes rectifiées :

$$V = 301,00 (6), \quad v = 298,63 (11), \quad U = 303,20 (1), \quad u = 298,98 (5),$$

$$\frac{1}{2}(V + v) = 299,82 (17), \quad \frac{1}{2}(U + u) = 301,09 (6).$$

Dix-huitième ordre.

243. Les observations du dix-huitième ordre se trouvent toutes sur la feuille IV (6 septembre).

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 35.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	v	N°	U	N°	u
142.	301,1	141.	297,5	145.	299,1	140.	297,1
144.	300,8	146.	297,1	170.	297,0	143.	300,9
157.	302,2	148.	299,7	178.	301,3	151.	298,0
158.	301,1	149.	298,7	183.	301,6		<u>896,0</u>
171.	302,9	150.	298,5	185.	300,7		
174.	301,8	172.	299,1		<u>1499,7</u>		
176.	302,2	173.	300,0				
177.	302,0	186.	302,8				
	<u>2411,1</u>		<u>2393,4</u>				
Moyenne.	301,76 (8)		299,18 (8)		299,94 (5)		298,67 (3)
	$\frac{1}{2}(V + v) = 300,47 (16)$				$\frac{1}{2}(U + u) = 299,31 (8)$		

Il n'y a aucune rectification plausible à apporter à ce résultat. La valeur v (186) paraît un peu forte, mais sa qualification est presque complètement indéterminée : on ne saurait donc pas dans quel groupe la ranger.

Dix-neuvième ordre.

244. Il ne se rencontre qu'un très-petit nombre d'observations du dix-neuvième ordre et seulement sur la feuille IV (6 septembre) :

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 37.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	"
209 <i>bis.</i>	302,1	.205	297,7	209 <i>quater.</i>	298,2	"	"
209 <i>ter.</i>	301,6			214.	300,1		
212.	303,5						
213.	298,4						
	<hr/>						
	1205,6						
Moyenne.	301,40 (4)		297,7 (1)		299,15 (2)		
	$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,55$						

Rectifications probables. — D'après la considération des $\Delta^2 t$, la valeur (209 *quater*) peut être classée aussi bien dans les ν que dans les U, et la valeur (214) dans les V. Il vient alors

$$V = 301,14 \text{ (5)}, \quad \nu = 297,95 \text{ (2)},$$

$$\frac{1}{2}(V + \nu) = 299,55 \text{ (7)},$$

mais la moyenne n'est pas changée.

Vingtième ordre.

245. Il est impossible de tirer parti des cinq valeurs du vingtième ordre, qu'on rencontre sur la feuille IV (6 septembre).

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 39.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	ν	N°	U	N°	"
.203	298,2	.204	295,5?	"	"	207.	299,0
.208	297,9	.205	297,7				

La valeur (203) des V est très-mal déterminée comme qualification; la valeur (204) est évidemment peu admissible; le petit nombre de résultats enlève toute chance de compensation.

Il est bon d'ajouter que, dans les ordres élevés, les observations deviennent plus difficiles, à cause du bruit assourdissant des rouages du mécanisme, auquel l'observateur a de la peine à s'accoutumer (la roue dentée a exécuté jusqu'à 1200 tours par seconde); et comme les valeurs précédentes appartiennent justement au commencement des séries employant les grandes vitesses de la roue dentée (de 200 au 243), c'est probablement à cette cause qu'il faut attribuer les

défauts de ce petit groupe d'observations; elles doivent être considérées plutôt comme des essais que comme des valeurs à faire entrer en ligne de compte.

Il n'y a aucune rectification probable.

Vingt et unième ordre.

246. Les observations correspondant aux grandes vitesses du mécanisme n'ont pas été très-nombreuses, à cause des difficultés qu'on vient de signaler (245). Heureusement elles forment une série de valeurs du vingt et unième ordre en nombre suffisant pour permettre une discussion assez complète. Elles correspondent à peu près à la limite de vitesse que j'ai cru pouvoir atteindre sans risquer d'endommager le mécanisme de la roue dentée.

Lumière Drummond.		$2n - 1 = 41.$		Roue de 150 dents pointues.			
N°	V	N°	v	N°	U	N°	u
206.	300,5	.200	298,9	.201	301,2	216.	298,6
223.	300,0	.215.	295,8	.202	301,5	.217	300,9
.235	298,1 *	.218.	300,4	.220.	301,8	.221.	301,0
.237	300,7	.226	302,5	.232	300,4	.224.	301,4
.242	296,8 *	.228	301,9 *	.240	299,9	.227	298,6
	1496,1	.229	303,1		1504,8	.231	298,6
		.230	299,8			.236	299,5
		.238	300,3 *				2098,6
		.239	299,7				
		.243	302,7 *				
			3005,1				
Moyenne.	299,22 (5)		300,51 (10)		300,96 (5)		299,80 (7)
	$\frac{1}{2}(V + v) = 299,87$				$\frac{1}{2}(U + u) = 300,38$ (12)		

Rectifications probables. — Les qualifications indéterminées sont nombreuses; elles sont marquées d'un astérisque. Il est évident qu'il doit en être ainsi pour un ordre aussi élevé. En effet, les variations relatives de vitesse qui produisent le passage de l'extinction à la réapparition sont faibles, de sorte que le mouvement reste presque uniforme; aussi les différences secondes $\Delta^2 t$ sont-elles souvent presque nulles et les qualifications presque indéterminées.

En dehors du sens de leur écart, il n'y a pas de motif suffisant pour changer de groupes les valeurs marquées d'un astérisque dans les V et v . On remarquera toutefois que leur influence se compense, mais en altérant le sens de l'inéga-

lité $V > v$. D'autre part on peut, avec beaucoup de vraisemblance, d'après l'examen de $\Delta^2 t$, classer parmi les V les trois valeurs (217, 221 et 224), qui figurent parmi les u . Si l'on effectue ces rectifications très-probables, il vient

$$V = 299,93 \text{ (8)}, \quad v = 300,51 \text{ (10)}, \quad U = 300,96 \text{ (5)}, \quad u = 298,83 \text{ (4)}, \\ \frac{1}{2}(V + v) = 300,22 \text{ (18)}, \quad \frac{1}{2}(U + u) = 299,89 \text{ (9)}.$$

Il est bon de remarquer combien les écarts accidentels sont faibles; c'est la conséquence prévue de l'atténuation des erreurs personnelles par l'élévation de l'ordre de l'extinction sur laquelle j'ai tant insisté au début (*voir* n° 7). Il en résulte que l'influence des erreurs personnelles doit être très-minime; à la rigueur même, la simple combinaison par voie de moyenne les éliminerait en grande partie. En effet, la moyenne des vingt-sept valeurs ci-dessus, sans distinction de qualification, est égale à 300,02, valeur très-voisine du résultat moyen (300,3).

On reconnaît toutefois que la valeur est approchée par défaut, ce qui n'a rien d'étonnant, puisque le mécanisme atteignait sa limite de vitesse; sa vitesse avait, par conséquent, une tendance à diminuer.

Vingt-deuxième ordre.

247. Il ne s'est présenté qu'une seule observation (225) du vingt-deuxième ordre, $2n - 1 = 43$; sa valeur 295,4 est un peu trop faible, ce qui s'explique, comme on vient de le voir, par la difficulté qu'on éprouvait à maintenir le mécanisme à la limite extrême de sa vitesse. L'existence de cette valeur au milieu de la série des observations du vingt et unième ordre suffit toutefois à prouver que la vitesse du mécanisme pouvait osciller entre des limites suffisamment étendues pour produire sans peine les extinctions et les réapparitions du vingt et unième ordre. On est donc assuré de la validité des résultats de cet ordre, validité déjà établie par la discussion des résultats, mais dont la confirmation, par un argument indépendant, est évidemment très-utile.

Examen des valeurs qualifiées w .

248. Dans la discussion précédente, on n'a fait entrer que les valeurs qualifiées, dans le tableau général des résultats, par les lettres V , v , U , u , c'est-à-dire celles qui ont été obtenues en vitesse croissante, décroissante, minimum ou maximum du mécanisme. On a laissé de côté une série, d'ailleurs peu nombreuse,

de valeurs qualifiées ω , qui correspondent au cas où la vitesse paraît, d'après le relevé micrométrique, être restée constante ($\Delta^2 t_0 = 0$) pendant la durée de l'observation.

On aurait dû, d'après l'application rigoureuse de la règle donnée précédemment (221), ranger ces valeurs parmi les ν , puisque les $\Delta^2 t$ nuls sont conventionnellement regardés comme positifs. L'extension de cette règle aux valeurs ω , où la convention s'applique deux fois, ne m'a pas paru suffisamment justifiée dans le cas présent, parce qu'il y a une contradiction trop manifeste entre la qualification et l'allure de la vitesse du mécanisme. En effet, cette catégorie de valeurs devrait, théoriquement, ne pas exister d'après le mode d'observation adopté, puisqu'il faut nécessairement une variation notable de vitesse de la roue dentée pour produire successivement l'extinction et la réapparition de la lumière. Dans le cas des valeurs qualifiées V ou ν , cette variation notable n'est pas douteuse; il en résulte que, si la variation de vitesse est nulle ou sensiblement nulle, c'est que la vitesse était voisine d'un maximum ou d'un minimum, c'est-à-dire se trouvait dans les circonstances où d'ordinaire on obtient les valeurs qualifiées U ou u ; par conséquent, il y a contradiction formelle entre la qualification ν , déduite de l'application stricte de la règle, avec l'allure de la vitesse du mécanisme. Il faut donc supposer que quelque cause étrangère est intervenue, soit au moment de l'observation réelle, soit au moment du relevé micrométrique des tracés.

249. Quoi qu'il en soit, voici la liste de ces valeurs ω dans l'ordre où elles se rencontrent dans le tableau général :

N°	ω	$2n - 1$	N°	ω	$2n - 1$
.35	299,5	7	.184	300,4	35
.87	298,7	13	.234	300,2	41
113.	300,1	15	.241	297,8	41
115.	299,9	17	.304	298,4	17
138.	300,3	27	.471.	297,2	21
147.	297,2	35			
			Somme.....	3289,7	
			Moyenne simple.....	299,06	
			Moy. composée en multi- pliant par $2n - 1$	299,03	

La moyenne simple ou composée de ces onze valeurs est très-voisine de la moyenne générale des résultats, égale, ainsi qu'on le verra bientôt, à 300,2. L'adjonction de ces valeurs aux groupes ν , suivant l'application rigoureuse de la

règle précitée, n'aurait en rien modifié la moyenne générale, car les valeurs v sont généralement approchées par défaut, comme la moyenne des w , et à peu près de la même quantité, une unité sur 300.

On aurait pu aussi les classer parmi les U ou les u avec autant de vraisemblance et indifféremment dans l'une ou l'autre catégorie. Dans le cas le plus défavorable, où on les aurait classées parmi les U , la moyenne générale n'aurait été abaissée que d'environ la moitié de la différence [on prend $\frac{1}{2}(U + u)$] entre 300,20, et 299,06 divisée par la somme $U + u = 164$, augmentée de $11 = \frac{1,14}{2 \times 175} = 0,032$, quantité dix fois moindre que la limite d'approximation que je me suis imposée.

Si on les répartissait également entre ces deux groupes, ce qui serait plus logique, la différence serait réduite à moitié, soit 0,016; le rapport de répartition ne serait pas encore, dans ce cas, le plus rationnel possible. Il faudrait faire la part des u plus grande que celle des U ; car, dans l'ensemble des résultats, on compte 95 u et seulement 85 U , ce qui réduirait encore l'influence de ces valeurs anormales. Enfin, si on les rangeait toutes parmi les u , leur influence serait absolument nulle.

250. Il résulte de cette discussion qu'il est à peu près indifférent de classer ces valeurs dans l'une de ces trois catégories ou même de les rejeter complètement; le résultat final n'en serait pas sensiblement affecté.

Cette considération ôte tout intérêt à la recherche des causes qui ont amené l'existence de ces valeurs : aussi me bornerai-je à indiquer les deux plus probables.

La première se trouverait dans l'influence des erreurs de lecture qui ont, en apparence, annulé la valeur de l'accélération dans certains cas où elle était très-petite. Si cette explication était exacte, la contradiction signalée plus haut entre la qualification et l'allure de la vitesse du mécanisme ne serait plus qu'apparente; alors, en vertu des compensations des erreurs fortuites qui légitiment la règle conventionnelle du signe positif de zéro (223), il faudrait classer les valeurs w parmi les v : on a vu que cette classification n'influerait en rien sur le résultat.

La seconde cause peut être trouvée dans les troubles atmosphériques qui ont fortuitement affaibli la lumière de retour et hâté l'extinction à un moment où la vitesse du mécanisme était presque constante; dans ce cas, ces valeurs seraient légèrement erronées, car la vitesse du mécanisme n'avait pas atteint la valeur qui eût donné un résultat qualifié U ou u ; il faudrait donc alors les rejeter comme légèrement erronées.

En raison de ces circonstances exceptionnelles, j'ai cru devoir rejeter les valeurs w qui, d'ailleurs, n'auraient, dans le cas le plus défavorable, qu'une influence négligeable sur les résultats.

Examen des valeurs non qualifiées.

251. On rencontre dans le tableau général des valeurs non qualifiées, au nombre de trente-cinq : ce sont les résultats des observations pour lesquelles l'observateur n'a donné qu'un seul signal θ' au lieu de deux θ' , θ'' . On peut les considérer comme l'indice d'une hésitation ou mieux d'un désappointement de l'observateur. En effet, le premier signal prouve que la lumière de retour a disparu, mais la non-prolongation des signaux rythmés (179) prouve qu'elle a reparu aussitôt, ce qui est contraire à l'allure accoutumée du phénomène optique. C'est donc aussi l'indice de l'existence momentanée d'une cause étrangère troublant la continuité ordinaire de la variation d'intensité lumineuse, car la vitesse de la roue dentée, en vertu de l'inertie du mécanisme, varie d'une manière parfaitement continue.

Parmi les causes les plus vraisemblables de cet affaiblissement momentané de la lumière, on doit placer au premier rang les perturbations accidentelles de l'atmosphère. En effet, toute trace d'hétérogénéité qui se produit sur le trajet des rayons lumineux trouble leur marche normale et altère la netteté de l'image focale : de là un *étalement* de lumière et une diminution de son éclat intrinsèque.

Si donc le mécanisme possède une vitesse voisine de celle d'une extinction, la lumière s'éteint momentanément, l'observateur signale le commencement du phénomène, puis reconnaît qu'il s'est trompé.

252. Quelle que soit d'ailleurs la cause de ces extinctions passagères, il est évident que les valeurs obtenues dans ces circonstances ne répondent pas à la définition du phénomène régulier sur lequel les formules sont basées : elles doivent donc être rejetées. Elles méritent cependant d'être examinées ; en effet, il est bon de vérifier que, ces causes étrangères ayant vraisemblablement agi d'une manière toute fortuite par rapport à la phase de l'observation, leur influence a dû produire à peu près autant d'erreurs positives que d'erreurs négatives : par conséquent, la moyenne des résultats *provoqués* par leur intervention doit être bien voisine de la moyenne générale des valeurs qualifiées.

Voici la liste de ces valeurs non qualifiées dans l'ordre où elles se rencontrent dans le tableau général :

N°	2n - 1		N°	2n - 1		N°	2n - 1	
8.	9	305,6	210.	37	297,9	.501	17	301,7
20.	9	281,1	211.	37	299,0	.549	29	302,7
.32	7	306,9	219.	41	301,4	.554	29	290,0
.39	7	292,9	222.	41	297,9	.582.	29	293,4
.108	17	315,2	.233	41	300,8	.586	27	303,9
.128.	23	307,1	276 bis.	17	296,3	.587	27	293,9
.163	31	297,2	.306	17	300,4	.588	29	307,2
.175	35	297,2	421 bis.	19	295,0	.606	29	297,6
.190	33	296,8	.427	19	304,1	.611	31	307,7
.197	31	297,4	.433	19	302,8	.615	29	306,2
.198	31	301,6	.462.	19	301,0	.617	29	294,7
209.	39	298,7	.463.	19	304,8			
							Somme.....	10498,1
							Moyenne simple.....	299,95
							Moy. composée en multi-	
							pliant par 2n - 1.....	299,87

La moyenne brute, 299,95, ou la moyenne composée, 299,87, est presque identique à la moyenne générale 300,2 des résultats qualifiés.

Il est bon de remarquer que, conformément à l'hypothèse qui explique leur formation, ces valeurs sont rarement voisines de leur moyenne; elles sont toujours notablement en dessus ou en dessous, de sorte qu'il y a une véritable lacune comprise entre 299 et 301 : c'est précisément la place qu'occupent les observations normales.

Malgré ces concordances, les valeurs non qualifiées doivent être rejetées à cause de leur absence de signification individuelle; mais il était très-utile de montrer que des causes étrangères, agissant d'une manière *fortuite*, comme les perturbations de l'atmosphère, n'introduisent aucune erreur systématique appréciable dans les résultats, même dans des circonstances très-défavorables. Nous en déduisons l'assurance complète que ces perturbations atmosphériques n'ont eu aucune influence systématique sur l'ensemble des observations, et qu'il n'y aura pas lieu de s'en préoccuper dans la discussion finale.

Détermination de la moyenne générale des résultats.

253. La discussion des mesures, par ordre d'extinction, a donné une quadruple série de nombres V, ν , U, u , dont il s'agit de déduire le résultat le plus probable.

Les quatre séries ont été réduites à deux seulement par la formation des moyennes $\frac{1}{2}(V + \nu)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$ qui, seules, sont affranchies des erreurs sys-

tématiques personnelles discutées précédemment (nos 111 et suivants); mais ces moyennes ont une importance individuelle très-inégale au point de vue de leur exactitude probable : d'abord, elles résument des nombres très-divers d'observations partielles, ensuite elles sont d'ordres différents. Or on sait que, toutes choses égales d'ailleurs, la grandeur du nombre des résultats et l'élévation de l'ordre d'extinction augmentent les chances de précision. On ne doit donc pas, pour obtenir le résultat le plus probable, se contenter de prendre la moyenne pure et simple de ces déterminations sans distinction ni du nombre ni de l'ordre des valeurs qu'elles représentent; il faut, au contraire, donner à chacun des résultats partiels $\frac{1}{2}(V + v)$, $\frac{1}{2}(U + u)$ un *poids* qui tienne compte, d'une manière aussi rationnelle que possible, de l'importance de ces deux éléments; en un mot, il faut en prendre une moyenne composée.

254. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de se rendre un compte bien exact de l'utilité du calcul de cette moyenne. On espère, en opérant ainsi, éliminer certaines erreurs, mais il ne faut pas oublier que les seules erreurs qu'on ait chance d'éliminer par ce procédé sont les *erreurs purement fortuites*; que si chacun de ces nombres est affecté en outre d'une erreur systématique, la moyenne composée sera affranchie de l'ensemble des erreurs accidentelles, mais affectée de la moyenne composée de ces erreurs systématiques.

En conséquence, nous allons effectuer cette moyenne suivant la règle que donne le Calcul des probabilités, pour réduire au minimum l'erreur probable due aux influences accidentelles; mais cette moyenne n'acquerra de signification définitive qu'après la recherche approfondie des erreurs systématiques et l'évaluation de la correction que cette étude pourra entraîner.

Règle déduite du Calcul des probabilités.

255. On démontre aisément (*) que, si l'on veut prendre la moyenne com-

(*) Cette règle se déduit très-simplement du théorème énoncé (note du n° 218) sur l'erreur probable de la somme de p nombres y_1, y_2, \dots, y_p . Si, au lieu de la somme, on prend une fonction linéaire à coefficients numériques déterminés $L = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_p y_p$, la loi de fréquence des erreurs de L est encore celle des erreurs fortuites, le paramètre a de son exponentielle étant lié aux p autres paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ par la relation

$$\frac{1}{a^2} = \frac{A_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{A_2^2}{\alpha_2^2} + \dots + \frac{A_p^2}{\alpha_p^2},$$

d'où l'on conclut aisément que le carré de l'erreur moyenne (ou de l'erreur probable E qui lui est

A.33.

posée d'une série de résultats entachés individuellement d'erreurs fortuites dont la loi de fréquence est celle de Laplace et Gauss (46), les poids qui donnent l'erreur probable minimum, ou POIDS THÉORIQUES (AIRY, *Theory of errors*, p. 50, sont les inverses des carrés des erreurs probables; la formule étant homogène par rapport à ces poids, il suffit de prendre des nombres qui leur soient proportionnels. L'erreur probable de la moyenne ainsi composée est alors définie par l'énoncé suivant : *Le poids théorique de la moyenne composée est la somme des poids théoriques de toutes les mesures.*

Il faut donc commencer par chercher les erreurs probables de chacun de ces résultats $\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$; le mot *erreur probable* signifiant non pas l'erreur probable relativement au résultat définitif affranchi des erreurs systématiques, mais relativement au résultat partiel affranchi seulement des erreurs accidentelles.

256. Le Calcul des probabilités donne une règle très-simple pour calculer cette erreur probable lorsque les résultats sont eux-mêmes la moyenne d'une série de valeurs (218) d'après la somme des carrés des écarts de ces valeurs individuelles; mais cette règle suppose que les écarts satisfont à la loi des erreurs fortuites, ce qu'on ne peut vérifier (215) que si le nombre des valeurs est suffisamment grand. Dans le cas des séries peu nombreuses, on s'expose, par l'ap-

proportionnelle) est égale à la somme des carrés des erreurs moyennes (ou probables) e_1, e_2, \dots, e_p des p nombres multipliés respectivement par les carrés des coefficients A_1, A_2, \dots, A_p .

$$E^2 = A_1^2 e_1^2 + A_2^2 e_2^2 + \dots + A_p^2 e_p^2.$$

Si L représente une moyenne composée, un coefficient quelconque A_i est égal au poids correspondant b_i divisé par la somme de tous les autres. L'expression de l'erreur probable E de L est donc

$$E^2 = \frac{b_1^2 e_1^2 + b_2^2 e_2^2 + \dots + b_p^2 e_p^2}{(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_p^2)^2}.$$

On rend cette erreur minima en égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport aux lettres b_1, b_2, \dots . Comme ici elles sont indépendantes, on égale à zéro les dérivées partielles, ce qui conduit à la condition très-simple

$$b_1 e_1^2 = b_2 e_2^2 = \dots = b_p e_p^2 = \text{const. } C, \quad \text{d'où } b_i = \frac{C}{e_i^2},$$

ce qui est la règle énoncée. Substituant les b_i dans l'expression de E , on obtient le second résultat

$$\frac{1}{E^2} = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} + \dots + \frac{1}{e_n^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

plication de cette règle, à prendre pour erreur probable une valeur tout à fait erronée, surtout si les causes d'erreurs accidentelles sont multiples. C'est précisément le cas où nous nous trouvons placés ; car les séries les plus nombreuses comprennent à peine une trentaine de valeurs, et les moins nombreuses s'abaissent quelquefois au chiffre de deux ou trois ; il en résulte que, dans la presque totalité des cas, l'erreur probable calculée d'après cette règle serait illusoire.

257. J'ai pensé qu'il était conforme à l'esprit de la méthode de rechercher directement une expression de l'erreur probable tirée de la nature du sujet, en profitant de l'analyse faite précédemment du phénomène mesuré, sauf à montrer la concordance des deux manières de voir.

Examinons, en effet, quelles sont les causes des plus fortes erreurs fortuites qui peuvent agir simultanément ; car les plus petites disparaissent sensiblement devant celles-là, d'après la règle de la combinaison des erreurs probables e' , e'' , ... dues à plusieurs causes simultanées, $\sqrt{e'^2 + e''^2 + \dots}$.

Ces erreurs ne peuvent provenir que de deux causes : ou des défauts d'appréciation de l'intensité lumineuse par l'observateur, ou des imperfections des mécanismes, en comprenant dans cette désignation non-seulement le mécanisme de la roue dentée, mais encore l'enregistreur et les instruments qui ont servi à déchiffrer les tracés.

D'après la description de ces mécanismes et de leur fonctionnement, il est facile de se convaincre que leurs erreurs *accidentelles* (je ne parle pas des erreurs systématiques) sont négligeables devant les erreurs d'appréciation d'intensité au moment de l'observation ; ce sont donc ces dernières qui ont l'importance prédominante ; elles peuvent dériver, soit de l'observateur qui juge mal, soit surtout de l'atmosphère, qui présente des variations incessantes de constitution optique le long des 23 kilomètres que parcourent les rayons lumineux.

Or il a été minutieusement démontré, dès le début de ce Mémoire (nos 7 à 12), que, grâce à la forme de la fonction qui donne la valeur de la vitesse de la lumière, toute erreur constante d'appréciation introduit une erreur absolue qui décroît en raison inverse du facteur $2n - 1$, n étant l'ordre de l'extinction observée. Comme toutes les observations ont été faites par le même observateur dans des circonstances de calme atmosphérique aussi identiques que possible, il y a de grandes chances pour que l'erreur probable d'une détermination isolée soit, en moyenne, à peu près la même dans toutes les séries de même ordre.

On peut donc admettre que l'erreur probable d'une valeur isolée d'ordre n est inversement proportionnelle à $2n - 1$. Cette conclusion est, du reste, conforme aux remarques faites dans la discussion des valeurs par ordre. On a re-

connu (236) que les écarts diminuaient notablement avec l'ordre observé; le calcul direct des écarts moyens vérifie à peu près la loi de l'inverse de $2n - 1$; mais le nombre des valeurs comprises dans les séries de chaque ordre est généralement trop faible pour qu'il y ait intérêt à s'arrêter à cette vérification.

258. En conséquence, si l'on désigne par e' , e'' , e''' , e^{IV} l'erreur probable idéale d'une observation isolée de l'extinction du premier ordre dans les quatre séries de valeurs V, ν , U, u , l'erreur probable d'une observation isolée du $n^{ième}$ ordre e_n s'obtiendra en divisant les premières par $2n - 1$.

Nous n'avons aucun motif de rejeter la règle donnée précédemment (218), qui permet de déduire l'erreur probable $\frac{e}{\sqrt{p}}$ de la moyenne de p nombres dont l'erreur probable individuelle est e . De même, nous appliquerons la règle de la formation de l'erreur probable de la moyenne de deux séries dont les erreurs probables sont respectivement $\frac{e'_n}{\sqrt{p'}}$ et $\frac{e''_n}{\sqrt{p''}}$ au calcul de l'erreur probable des résultats $\frac{1}{2}(V + \nu)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$; elles seront de la forme

$$\sqrt{\frac{1}{4} \frac{e'_n}{p'} + \frac{1}{4} \frac{e''_n}{p''}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e'_n}{p'} + \frac{e''_n}{p''}},$$

p étant le nombre de valeurs entrant dans la moyenne de la série V et p'' de la série ν , par exemple.

259. Mais on peut simplifier beaucoup cette expression en remarquant que, dans chacun de ces résultats, $\frac{1}{2}(V + \nu)$, $\frac{1}{2}(U + u)$, les deux groupes V, ν ou U, u , qui sont eux-mêmes des moyennes représentant, à très-peu près, des nombres égaux de valeurs; de sorte qu'on peut très-approximativement considérer p' comme égal à p'' .

Voici, en effet, le relevé du nombre des valeurs qui figurent dans le résumé de la discussion :

	Nombre total de valeurs figurant dans les groupes			
	V	ν	U	u
Valeurs non rectifiées	191	191	77	77
Valeurs rectifiées	190	180	82	73

L'égalité, fortuitement parfaite dans le cas des valeurs non rectifiées, est encore très-suffisamment exacte dans le cas des valeurs rectifiées pour le but que nous

nous proposons, à savoir la détermination approchée de l'erreur probable.

D'autre part, les deux groupes V et ν ou U et u , qui composent respectivement chacun des résultats $\frac{1}{2}(V + \nu)$ ou $\frac{1}{2}(U + u)$, étant obtenus dans des circonstances absolument identiques, sauf que l'accélération du mécanisme a été de signes contraires dans les deux groupes (115), il est très-vraisemblable que leurs erreurs accidentelles (dues, comme on l'a vu plus haut, en majeure partie à l'appréciation défectueuse de l'intensité et non aux imperfections du mécanisme) suivent la même loi de fréquence; par suite, on peut considérer comme identiques les erreurs probables de V et de ν et les poser égales à e_n ; de même, supposer égales celles de U et u et les représenter par e'_n .

L'expression donnée plus haut avec les deux simplifications indiquées $p' = p'' = \frac{1}{2}p$ et $e' = e'' = e_n$ devient, en substituant à e_n sa valeur $\frac{e_1}{2n-1}$,

$$\frac{e_1}{(2n-1)\sqrt{p}}.$$

Telle est l'expression définitive que nous adopterons comme valeur approchée de l'erreur probable. L'inverse de son carré donnera le poids à employer pour le calcul de la moyenne composée. Il y entre une inconnue e_1 ; mais, comme il suffit de prendre un nombre proportionnel, on prendra simplement $p(2n-1)^2$.

260. On peut montrer que cette expression est tout à fait conforme à la règle du Calcul des probabilités d'après les considérations suivantes, que nous ne développerions pas si les conclusions qu'elles fournissent ne devaient pas nous être utiles plus loin.

On montre aisément que la recherche de la moyenne composée, dont l'erreur probable est minimum, revient à rendre minimum la somme des carrés des écarts entre la moyenne cherchée et les nombres donnés. En effet, soient y la moyenne cherchée et une série de groupes de p_n valeurs dont la moyenne est y_n et dont l'erreur individuelle est e_n . Si l'on divise par $\frac{e_n}{\sqrt{p_n}}$ chaque écart $y_n - y$, tous les quotients $\sqrt{p_n} \frac{y_n - y}{e_n}$ ont numériquement la même erreur probable et doivent figurer tous au même titre dans la somme des carrés des écarts à rendre minimum. Prenons dans la somme des carrés tous les écarts de tous les groupes, il vient, pour l'expression à rendre minimum,

$$\sum p_n \left(\frac{y_n - y}{e_n} \right)^2 = M^2 \text{ minimum.}$$

En égalant à zéro la dérivée de cette expression par rapport à y , on obtient une équation linéaire qui donne la valeur inconnue y , rendant cette somme de carrés minimum. Cette équation est précisément celle qui définit la moyenne composée donnée plus haut, car $\frac{e_n}{\sqrt{p}}$ est précisément l'erreur probable de la moyenne partielle y_n . On retrouve aussi la valeur du carré moyen de l'écart, et par suite l'erreur probable de la moyenne (*). Il suffit de tirer y de cette équation, de la substituer dans l'expression M^2 , et de diviser cette somme M^2 par la somme des coefficients qui multiplient les carrés des écarts

$$\frac{\sum \frac{p_n (y_n - y)^2}{e_n^2}}{\sum \frac{p_n}{e_n^2}} = m^2 \quad \text{avec} \quad \sum \frac{p_n}{e_n^2} (y_n - y) = 0.$$

261. Appliquons au cas présent la notion d'erreur probable déduite de l'analyse faite aux nos 7 et suivants, à savoir que l'erreur probable des mesures φ_n de l'ordre n est inversement proportionnelle à $2n - 1$, et comptons chaque moyenne $\frac{1}{2}(V + v)$ ou $\frac{1}{2}(U + u)$ formée par l'ensemble de p_n valeurs comme p_n valeurs identiques, nous en déduisons que les carrés des écarts $(\varphi_n - \varphi)$ de chaque moyenne avec la valeur cherchée φ , multipliée par $p_n(2n - 1)^2$, doivent être minimum, ce qui donne l'équation $\sum p_n(2n - 1)^2 (\varphi_n - \varphi) = 0$ pour définir la moyenne générale φ ; c'est précisément la moyenne composée avec le poids défini plus haut.

Nous trouvons aussi l'expression de l'écart moyen. Posant, pour abrégé, $2n - 1 = q_n$, on a, pour le carré moyen m^2 des écarts,

$$m^2 = \frac{\sum p_n q_n^2 (\varphi_n - \varphi)^2}{\sum p_n q_n^2} \quad \text{avec} \quad \sum p_n q_n^2 (\varphi_n - \varphi) = 0.$$

Le résultat de la substitution de φ , tiré de l'équation du minimum, simplifie

*) Il est un peu moins facile de voir que son expression coïncide avec celle du poids théorique de la moyenne. Pour s'en convaincre, il faut remarquer que l'erreur moyenne de chaque groupe est supposée satisfaire à la condition d'être égale à la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs : M^2 est alors égal à autant d'unités qu'il y a de groupes ou P , d'où $M^2 = P$. On est ramené au cas de la moyenne arithmétique. L'erreur probable du résultat est $E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{P}}$, ε étant l'erreur probable d'un groupe isolé (218); car on doit définir ε en écrivant $M^2 = P \frac{m^2}{\varepsilon^2}$, d'où $E = \frac{m}{\sqrt{P}}$. C'est l'expression que donnerait la règle du poids théorique (255).

l'expression de m^2 . En effet, en séparant les deux facteurs qui composent le carré de $\varphi_n - \varphi$ et effectuant séparément la multiplication par les deux termes qui se trouvent dans l'un d'eux, le coefficient de φ est identiquement nul en vertu de l'équation du minimum, de sorte qu'il reste

$$m^2 = \frac{\sum p_n q_n^2 (\varphi_n - \varphi) \varphi_n}{\sum p_n q_n^2} = \frac{\sum p_n q_n^2 \varphi_n^2 - \varphi \sum p_n q_n^2 \varphi_n}{\sum p_n q_n^2} = \frac{\sum p_n q_n^2 \varphi_n^2}{\sum p_n q_n^2} - \varphi^2,$$

expression dans laquelle il est inutile de substituer la valeur algébrique de φ , puisqu'on est obligé d'en calculer la valeur numérique.

262. *Simplification du calcul arithmétique.* — Les nombres φ_n et φ_n^2 doivent être multipliés par des nombres assez considérables $p_n q_n^2$, ce qui donne lieu à des opérations arithmétiques très-pénibles. On simplifie beaucoup le travail, en remarquant que c'est la différence $\varphi_n - \varphi$ qui seule entre dans les équations fondamentales. On peut donc retrancher une constante φ_0 à toutes les valeurs, ce qui ne change pas les résultats. Posons donc $\gamma_n = \varphi_n - \varphi_0$, $\gamma = \varphi - \varphi_0$, et les formules resteront les mêmes, en substituant γ_n et γ à φ_n et à φ . Nous prendrons cette constante φ_0 égale à 300 (mille kilomètres), ce qui réduira les différences γ_n à des fractions très-petites et en général positives.

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION DES VALEURS.

Calcul des moyennes composées.

263. Les quatre tableaux qui suivent renferment les résultats de la discussion faite précédemment (nos 226 à 247), rangés suivant l'ordre n de l'extinction observée. On y a joint les éléments du calcul de la moyenne composée, non-seulement avec les poids $p_n(2n - 1)^2$ ou $p_n q_n^2$, mais avec la série des poids p_n , $p_n q_n$, $p_n q_n^2$, $p_n q_n^3$, qui nous seront utiles dans la suite.

Suivant la simplification adoptée, ce ne sont pas les valeurs φ_n , mais $\varphi_n - 300 = \gamma_n$ qui figurent dans ces calculs.

On a séparé les résultats en deux groupes (224) : d'abord les *valeurs non rectifiées* ; ce sont les résultats bruts, classés sans aucune discussion, comprenant tous les résultats obtenus, même ceux qui représentent des écarts inadmissibles et sans aucune altération de la qualification. Ensuite les *valeurs rectifiées* : ce sont celles qui ont été discutées et qui ont subi les rectifications probables indiquées dans l'examen séparé des résultats de chaque ordre. On a vu que ces rectifications ont consisté seulement dans l'élimination des valeurs présentant des écarts extraordinaires ou le changement de la qualification dans le cas où elle était mal déterminée.

Valeurs non rectifiées.

Série $\frac{1}{2}(V + v)$.

Série $\frac{1}{2}(V + v)$.

Ordre n .	$q_n=2n-1$.	Résultats ψ_n	Nombre de dents de la roue.	Source de lumière.	Nombre d'observat. P_n	$P_n q_n$	$P_n q_n^2$	$P_n q_n^3$	$P_n q_n^4$	$\psi_n - 300 = \gamma_n$	$P_n \gamma_n$	$P_n q_n \gamma_n$	$P_n q_n^2 \gamma_n$	$P_n q_n^3 \gamma_n$	$P_n q_n^4 \gamma_n$	Nombre de dents de la roue.	Source de lumière.
4	7	299,28	150	Drummond.	11	77	539	3773	26411	- 0,72	- 7,92	- 55,44	- 388,08	- 2716,56	279,4176	150	D.
5	9	301,26	150	»	23	207	1863	16767	150903	1,26	28,98	260,82	2347,38	21126,42	2957,6988	150	»
6	11	300,05	150	»	22	242	2662	29282	322102	0,05	1,10	12,10	133,10	1464,10	6,6550	150	»
7	13	302,93	150	»	8	104	1352	17576	228488	2,93	23,44	304,72	3961,36	51497,68	11606,7848	150	»
8	15	300,65	150	»	8	120	1800	27000	405000	0,65	5,20	78,00	1170,00	17550,00	760,5000	150	»
		299,04	200	»	6	90	1350	20250	303750	- 0,96	- 5,76	- 86,40	- 1296,00	- 19440,00	1244,1600	200	»
		300,35	150	»	10	170	2890	49130	835210	0,35	3,50	59,50	1011,50	17195,50	354,0250	150	»
9	17	299,50	200	Pétrole.	12	204	3468	58956	1002252	- 0,50	- 6,00	- 102,00	- 1734,00	- 29478,00	867,0000	200	P.
		300,65	200	Drummond.	59	1003	17051	289867	492739	0,65	38,35	651,95	11083,15	188413,55	7204,0175	200	U.
10	19	300,29	200	»	45	855	16245	308655	586445	0,29	13,05	247,95	4711,05	89509,95	1366,2045	200	»
11	21	300,21	200	»	40	840	17640	370440	779240	0,21	8,40	176,40	3704,40	77792,40	777,9240	200	»
12	23	300,50	150	»	3	69	1587	36501	839523	0,50	1,50	34,50	793,50	18250,50	396,7500	150	»
13	25	300,65	180	»	8	200	5000	125000	3125000	0,65	5,20	130,00	3250,00	8125,00	2112,5000	180	»
14	27	301,35	150	»	5	135	3645	98415	2657205	1,35	6,75	182,25	4920,75	132860,25	6643,0125	150	»
		300,25	144	Soleil.	9	243	6561	177147	478969	0,25	2,25	60,75	1640,25	44286,75	410,0625	144	S.
15	29	300,27	144	»	52	1508	43732	1268228	36778612	0,27	14,04	407,16	11807,64	342421,56	3188,0628	144	»
16	31	298,88	144	»	3	93	2883	89373	2779563	- 1,12	- 3,36	- 104,16	- 3228,96	- 100097,76	3616,4352	144	»
		300,62	150	Drummond.	4	124	3844	119164	3694084	0,62	2,48	76,88	2383,28	73881,68	1477,6336	150	D.
17	33	299,33	150	»	18	594	19602	646866	21346578	- 0,67	- 12,06	- 397,98	- 13133,34	- 433400,22	8799,3378	150	»
18	35	300,47	150	»	16	560	19600	686000	24010000	0,47	7,52	263,20	9212,00	322420,00	4329,6400	150	»
19	37	299,55	150	»	5	185	6845	253265	9370805	- 0,45	- 2,25	- 83,25	- 3080,25	- 113969,25	1386,1125	150	»
21	41	299,87	150	»	15	615	25215	1033815	42386415	- 0,13	- 1,95	- 79,95	- 3277,95	- 134395,95	426,1335	150	»
Sommes.....					382	8238	205374	5725470	173607294		122,46	2037,00	35990,78	573297,60	60210,0976		

Série $\frac{1}{2}(U + u)$.

Série $\frac{1}{2}(U + u)$.

4	7	301,79	150	Drummond.	6	42	294	2058	14406	1,79	10,74	75,18	526,26	3683,82	942,0054	150	D.
5	9	298,78	150	»	8	72	648	5832	52488	- 1,22	- 9,76	- 87,84	- 790,56	- 7115,04	964,4832	150	»
7	13	300,69	150	»	5	65	845	10985	142805	0,69	3,45	44,85	583,05	7579,65	402,3045	150	»
9	17	297,69	200	Pétrole.	8	136	2312	39304	668168	- 2,31	- 18,48	- 314,16	- 5340,72	- 90792,24	12337,0632	200	P.
		299,76	200	Drummond.	25	425	7225	122825	2088025	- 0,24	- 6,00	- 102,00	- 1734,00	- 29478,00	416,1600	200	D.
10	19	300,14	200	»	35	665	12635	240065	4561235	0,14	4,90	93,10	1768,90	33609,10	247,6460	200	»
11	21	300,54	200	»	33	693	14553	305613	6417873	0,54	17,82	374,22	7858,62	165031,02	4243,6548	200	»
13	25	299,85	180	»	2	50	1250	31250	781250	- 0,15	- 0,30	- 7,50	- 187,50	- 4687,50	28,1250	180	»
14	27	299,12	150	»	4	108	2916	78732	2125764	- 0,88	- 3,52	- 95,04	- 2566,08	- 69284,16	2258,1504	150	»
15	29	300,44	144	Soleil.	13	377	10933	317057	9194633	0,44	5,72	165,88	4810,52	139505,08	2116,6288	144	S.
17	33	301,69	150	Drummond.	5	165	5445	179685	592965	1,69	8,45	278,85	9202,05	303667,65	15551,4645	150	D.
18	35	299,31	150	»	8	280	9800	343000	12005000	- 0,69	- 5,52	- 193,20	- 6762,00	- 236670,00	4665,7800	150	»
21	41	300,38	150	»	12	492	20172	827052	3390912	0,38	4,56	186,96	7665,36	314279,76	2912,8368	150	»
Sommes.....					164	3570	89028	2503458	77890404		12,06	419,30	15033,90	529329,24	47086,3026		

Valeurs rectifiées.

Série $\frac{1}{2}(V + v)$.

Ordre n .	$q_n = 2n - 1$.	Résultats V_n	Nombre de dents de la roue.	Source de lumière.	Nombre d'observat.		Série $\frac{1}{2}(V + v)$										Nombre de dents de la roue.	Source de lumière.
					P_n	$P_n q_n$	$P_n q_n^2$	$P_n q_n^3$	$P_n q_n^4$	$V_n - 300 = J_n$	$P_n J_n$	$P_n q_n J_n$	$P_n q_n^2 J_n$	$P_n q_n^3 J_n$	$P_n q_n^4 J_n$			
4	7	300,24	150	Drummond.	9	63	441	3087	21609	0,24	2,16	15,12	105,84	740,88	25,4016	150	D.	
5	9	300,79	150	"	23	207	1863	16767	150903	0,79	18,17	163,53	1471,77	13245,93	1162,6983	150	"	
6	11	300,84	150	"	20	220	2420	26620	292820	0,84	16,80	184,80	2032,80	22360,80	1707,5520	150	"	
7	13	301,06	150	"	6	78	1014	13182	171366	1,06	6,36	82,68	1074,84	13972,92	1139,3304	150	"	
8	15	300,65	150	"	8	120	1800	27000	405000	0,65	5,20	78,00	1170,00	17550,00	760,5000	150	"	
		300,10	200	"	7	105	1575	23625	354375	0,10	0,70	10,50	157,50	2362,50	15,7500	200	"	
9	17	299,93	150	"	8	136	2312	39304	668168	-0,07	-0,56	-9,52	-161,84	-2751,28	-11,3288	150	"	
		299,82	200	Pétrole.	12	204	3468	58956	1002232	-0,18	-2,16	-36,72	-624,24	-10612,08	-112,3632	200	P.	
10	19	300,47	200	Drummond.	56	952	16184	275128	4677176	0,47	26,32	447,44	7606,48	129310,16	3575,0456	200	D.	
		300,58	200	"	47	893	16967	322373	6125087	0,58	27,26	517,94	9840,86	186976,34	5707,6988	200	"	
11	21	299,94	200	"	38	798	16758	351918	7390278	-0,06	-2,28	-47,88	-1005,48	-21115,08	-60,3288	200	"	
12	23	300,50	150	"	3	69	1587	36501	839523	0,50	1,50	34,50	793,50	18250,50	396,7500	150	"	
13	25	300,28	180	"	6	150	3750	93750	2343750	0,28	1,68	42,00	1050,00	26250,00	294,0000	180	"	
14	27	301,35	150	"	5	135	3645	98415	2657205	1,35	6,75	182,25	4920,75	132860,25	6643,0125	150	"	
		300,10	144	Soleil.	7	189	5103	137781	3720087	0,10	0,70	18,90	510,30	13778,10	51,0300	144	S.	
15	29	300,24	144	"	51	1479	42891	1243839	36071331	0,24	12,24	354,96	10293,84	298521,36	2470,5216	144	"	
16	31	298,88	144	"	3	93	2883	89373	2770363	-1,12	-3,36	-104,16	-3228,96	-100097,76	-3616,4352	144	"	
		300,62	150	Drummond.	4	124	3844	119164	3694084	0,62	2,48	76,88	2383,28	73881,68	1477,6336	150	D.	
17	33	299,82	150	"	17	561	18513	610929	20160657	-0,18	-3,06	-100,98	-3332,34	-109967,22	-599,8212	150	"	
18	35	300,47	150	"	16	560	19600	686000	24010000	0,47	7,52	263,20	9212,00	322420,00	4329,6400	150	"	
19	37	299,55	150	"	7	259	9583	354571	13119127	-0,45	-3,15	-116,55	-4312,35	-159556,95	-1940,5575	150	"	
21	41	300,22	150	"	18	738	30258	1240578	50863698	0,22	3,96	162,36	6656,76	272927,16	1464,4872	150	"	
Sommes.....					371	8133	206459	5868861	181509059		125,23	2219,25	46615,31	1141308,21	37561,8863			

Série $\frac{1}{2}(U + u)$.

Ordre n .	$q_n = 2n - 1$.	Résultats U_n	Nombre de dents de la roue.	Source de lumière.	Nombre d'observat.		Série $\frac{1}{2}(U + u)$										Nombre de dents de la roue.	Source de lumière.
					P_n	$P_n q_n$	$P_n q_n^2$	$P_n q_n^3$	$P_n q_n^4$	$U_n - 300 = J_n$	$P_n J_n$	$P_n q_n J_n$	$P_n q_n^2 J_n$	$P_n q_n^3 J_n$	$P_n q_n^4 J_n$			
4	7	299,07	150	Drummond.	5	35	245	1715	12005	-0,93	-4,65	-32,55	-227,85	-1594,95	-211,9005	150	D.	
5	9	299,21	150	"	7	63	567	5103	45927	-0,79	-5,53	-49,77	-447,93	-4031,37	-353,8647	150	"	
7	13	300,69	150	"	5	65	845	10985	142805	0,69	3,45	44,85	583,05	7579,65	402,3045	150	"	
9	17	300,56	200	"	27	459	7803	132651	2255067	0,56	15,12	257,04	4369,68	74284,56	2447,0208	200	P.	
10	19	299,81	200	"	33	627	11913	226347	4300593	-0,19	-6,27	-119,13	-2263,47	-43005,93	-430,0593	200	D.	
11	21	300,57	200	"	35	735	15435	324135	6806835	0,57	19,95	418,95	8797,95	184756,95	5014,8315	200	"	
13	25	300,43	180	"	4	100	2500	62500	1562500	0,43	1,72	43,00	1075,00	26875,00	462,2500	200	"	
14	27	299,12	150	"	4	108	2916	78732	2125764	-0,88	-3,52	-95,04	-2566,08	-69284,16	-2258,1504	180	"	
15	29	300,22	144	Soleil.	12	348	10092	292668	8487372	0,22	2,64	76,56	2220,24	64386,96	488,4528	150	"	
17	33	301,09	150	Drummond.	6	198	6534	215622	7115526	1,09	6,54	215,82	7122,06	235027,98	7763,0454	144	S.	
18	35	299,31	150	"	8	280	9800	343000	12005000	-0,69	-5,52	-193,20	-6762,00	-236670,00	-4665,7800	150	D.	
21	41	299,89	150	"	9	369	15129	620289	25431849	-0,11	-0,99	-40,59	-1664,19	-68231,79	-183,0609	150	"	
Sommes.....					155	3387	83779	2313747	70291243		22,94	525,94	10236,46	170092,90	24680,7208			

264. On déduit aisément de ces tableaux les moyennes composées prises de quatre manières différentes, en prenant comme poids de chaque résultat p_n , $p_n q_n$, $p_n q_n^2$ ou $p_n q_n^3$ (q_n représentant $2n - 1$). Il suffit de diviser respectivement $\Sigma p_n \gamma_n$, $\Sigma p_n q_n \gamma_n$, $\Sigma p_n q_n^2 \gamma_n$, $\Sigma p_n q_n^3 \gamma_n$ par Σp_n , $\Sigma p_n q_n$, $\Sigma p_n q_n^2$, $\Sigma p_n q_n^3$, et d'ajouter 300,000 au quotient (262).

Série.	$\frac{\Sigma p_n \gamma_n}{\Sigma p_n} = M_0$,	$\frac{\Sigma p_n q_n \gamma_n}{\Sigma p_n q_n} = M_1$,	$\frac{\Sigma p_n q_n^2 \gamma_n}{\Sigma p_n q_n^2} = M_2$,	$\frac{\Sigma p_n q_n^3 \gamma_n}{\Sigma p_n q_n^3} = M_3$.
Valeurs non rectifiées. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(V + v) \\ \frac{1}{2}(U + u) \end{array} \right.$	300,321 300,074	300,247 300,117	300,175 300,168	300,100 300,211
Valeurs rectifiées. $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(V + v) \\ \frac{1}{2}(U + u) \end{array} \right.$	300,337 300,148	300,273 300,155	300,225 300,122	300,194 300,074

On reconnaît, pour chaque série, que la moyenne est, à l'ordre d'approximation cherchée des résultats ($\frac{1}{1000}$ en valeur relative ou 0,3 en valeur absolue), à fort peu près la même, quelle que soit la manière dont elle a été formée. Cependant, à mesure que la puissance de $q = 2n - 1$ augmente, c'est-à-dire à mesure que les ordres élevés prennent une importance prédominante, la moyenne composée des séries $\frac{1}{2}(V + v)$ diminue légèrement. Au contraire, la moyenne composée des séries $\frac{1}{2}(U - u)$ augmente ou reste presque stationnaire. Cette variation progressive laisse supposer l'existence d'erreurs systématiques, d'ailleurs très-faibles, suivant l'ordre d'extinction.

Comme la moyenne dont l'erreur probable est minimum est, d'après ce qu'on a vu précédemment (259), celle dans laquelle les poids sont $p(2n - 1)^2$ ou pq^2 , que nous appellerons *moyenne principale* M_2 , on considérera donc seulement les chiffres de la troisième colonne, et l'on prendra pour moyenne générale les quatre nombres 300,175, 300,168, déduits des valeurs non rectifiées, et 300,225, 300,122, déduits des valeurs rectifiées.

Les carrés moyens des écarts des observations avec la moyenne, calculés par la formule du n° 261 pour les quatre séries, sont respectivement 0,2625, 0,5004, 0,1310, 0,2800, ce qui porterait à croire que c'est le troisième nombre 300,225, c'est-à-dire le plus élevé, qui est le plus rapproché de la vérité. Quoi qu'il en soit, on remarquera la concordance complète de ces quatre nombres si l'on se borne aux quatre premiers chiffres, les seuls sur lesquels il soit raisonnable de compter, de sorte qu'on pourrait adopter comme moyenne définitive 300,15 ou 300,20, s'il n'était nécessaire de rechercher préalablement la grandeur probable des erreurs systématiques que la variation progressive des valeurs de la moyenne suivant les différents poids paraît indiquer.

Recherche des erreurs systématiques suivant l'ordre de l'extinction observée.

265. Les quatre tableaux résumant les résultats obtenus ne dénotent aucune erreur systématique apparente avec l'ordre n de l'extinction; car les divergences avec la moyenne générale sont de l'ordre d'approximation que je m'étais imposé au début de ces expériences (0,001 en valeur relative ou 0,3 en valeur absolue, l'unité étant le millier de kilomètres). Cependant on a remarqué une petite variation progressive (264) dans les moyennes composées M_0, M_1, M_2, M_3 , suivant les différents poids $p_n, p_n q_n, p_n p_n^2, \dots$, ce qui indique probablement l'existence d'une petite erreur systématique masquée dans les séries par des erreurs accidentelles.

Le Calcul des probabilités permet de dégager de ces erreurs accidentelles la loi continue de l'erreur systématique fonction de l'ordre n , à la condition que la forme de la loi soit prévue et qu'il n'y ait plus que des coefficients numériques à déterminer. Toute la difficulté réside dans le choix judicieux de la fonction à essayer; elle doit être recherchée d'après une analyse approfondie des erreurs à craindre. Grâce à l'étude complète que nous avons faite de la méthode, nous allons reconnaître que, parmi toutes les variétés de formes de fonction qu'on peut se proposer, il en est deux qui s'imposent d'elles-mêmes. Nous allons successivement les examiner.

266. Nous avons déjà eu, en effet, l'occasion de remarquer (257) que les erreurs ne peuvent provenir que de deux causes : ou des défauts d'appréciation d'intensité lumineuse au moment de l'observation, c'est-à-dire du fait de l'observateur, ou des imperfections des mécanismes. De l'analyse de ces deux sources d'erreurs nous allons conclure la forme vraisemblable de l'erreur systématique spéciale à chaque cas : la substitution des valeurs numériques montrera s'il y a lieu d'adopter l'une ou l'autre des lois, et quelle est la limite de l'influence systématique.

Il n'y aura d'ailleurs rien d'arbitraire dans le choix à faire entre ces deux lois systématiques, ni dans l'appréciation de l'importance qu'on doit leur attribuer; la valeur de l'écart moyen entre les résultats observés et les résultats calculés devra être d'autant moindre que la forme de fonction proposée représentera mieux l'erreur systématique; de sorte qu'il faudra joindre dans chaque cas, au calcul des coefficients numériques les plus probables, celui de la valeur du carré de l'écart moyen des résultats observés et calculés.

Détermination de la forme de la fonction qui représente l'erreur systématique variable avec l'ordre d'extinction dans l'hypothèse où cette erreur proviendrait du fait de l'observateur.

267. Au début de ce Mémoire j'ai beaucoup insisté sur la périodicité de la fonction qui lie l'intensité lumineuse à la vitesse angulaire de la roue dentée ; au point de vue expérimental, cette périodicité se traduit par le fait que, pour l'observateur, rien ne distingue une période d'une autre. En conséquence, si l'observateur commet une certaine erreur dans la manière dont il observe ou dont il enregistre le phénomène d'un certain ordre, il y a de grandes chances pour qu'il commette la même erreur dans l'observation de tous les autres. Soit donc θ la fraction de la période Ω (7) qui représente l'erreur commise dans l'appréciation définitive du phénomène d'extinction, l'erreur correspondante sur la vitesse angulaire ω de la roue dentée sera $\theta\Omega$, θ étant une fraction vraisemblablement très-petite, mais, par hypothèse, indépendante de l'ordre d'extinction. Ainsi, en observant l'extinction d'ordre n , au lieu de mesurer la vitesse $(2n - 1) \frac{\Omega}{2}$, qui, théoriquement, correspond à cet ordre, l'observateur enregistre la vitesse $\omega = (2n - 1) \frac{\Omega}{2} + \theta\Omega$. En substituant cette valeur dans la formule qui donne la vitesse de la lumière, il obtient un résultat erroné φ_n ,

$$\varphi_n = \frac{2DN\omega}{\pi(2n-1)^2} = \frac{2DN}{\pi(2n-1)} (2n-1 + 2\theta) \frac{\Omega}{2} = V \left(1 + \frac{2\theta}{2n-1} \right);$$

d'où l'on conclut

$$\varphi_n - V = \frac{2\theta V}{2n-1}.$$

C'est le résultat démontré dès le début (7) et qui a été rappelé déjà plusieurs fois (257, 220). Appelant H la constante $2\theta V$, on voit que les valeurs erronées sont liées à la valeur vraie par l'équation précédente, qu'on peut traiter comme une équation à deux inconnues dont on connaît de nombreuses solutions approchées φ_n . Nous traiterons donc cette équation par la méthode des moindres carrés pour déterminer la valeur inconnue V , que nous appellerons φ , pour distinguer la valeur rigoureuse V de la vitesse de la lumière d'avec des résultats plus ou moins erronés φ auxquels le calcul approché des erreurs donnerait le même

nom, de sorte que l'équation à traiter est de la forme

$$\vartheta_n - \vartheta - \frac{H}{q_n} = 0,$$

en posant comme précédemment $2n - 1 = q_n$.

Détermination de la forme de la fonction qui représente l'erreur systématique avec l'ordre d'extinction dans l'hypothèse où elle proviendrait du mécanisme.

268. C'est le cas inverse du précédent. L'observateur observe le phénomène d'extinction sans erreur systématique personnelle; on suppose, au contraire, que, par suite des inégalités du mouvement de la roue dentée, en particulier des inégalités périodiques dans la vitesse angulaire, le phénomène optique peut être troublé (71); la vitesse enregistrée correspond alors, non pas au phénomène pour ainsi dire théorique conduisant à la valeur $\omega = (2n - 1) \frac{\Omega}{2}$ ou $q_n \frac{\Omega}{2}$, mais à un phénomène *moyen*.

Il est bon de remarquer que le mode d'observations doubles employé, permettant de se tenir loin des *phases critiques* (42), est affranchi en principe de ce genre d'erreur. En effet, la phase utilisée du phénomène est telle, qu'aux environs de la vitesse observée les variations d'intensité sont proportionnelles aux vitesses de la roue dentée; de sorte que la valeur moyenne de l'intensité correspond toujours à la valeur moyenne de la vitesse. J'ai insisté précédemment (71) sur les cas où il n'en serait pas ainsi, et j'ai tâché de maintenir les observations en dehors de ces cas.

Quoi qu'il en soit, nous admettrons que cette erreur puisse se rencontrer, et nous examinerons son effet.

L'erreur $\delta\omega$ qui en résulte, en général très-faible si le mécanisme est bien construit, pourra se développer en série, suivant les puissances ascendantes de la vitesse exacte ω correspondant au phénomène théorique

$$\delta\omega = a\omega + b\omega^2 + c\omega^3 + \dots$$

Le terme constant est nul; car, pour $\omega = 0$, l'erreur est évidemment nulle. Lorsqu'on observe le phénomène d'extinction de l'ordre n , la vitesse enregis-

trée, au lieu d'être $(2n - 1) \frac{\Omega}{2}$ ou $q_n \frac{\Omega}{2}$, sera

$$\omega = q_n \frac{\Omega}{2} + a q \frac{\Omega}{2} + b q_n^2 \frac{\Omega^2}{4} + c q_n^3 \frac{\Omega^3}{8} = q_n \frac{\Omega}{2} \left(1 + a + b q_n \frac{\Omega}{2} + c q_n^2 \frac{\Omega^2}{4} + \dots \right);$$

substituée dans la formule qui donne la vitesse de la lumière, elle conduit à une valeur erronée φ_n

$$\varphi_n = V \left(1 + a + b q_n \frac{\Omega}{2} + c q_n^2 \frac{\Omega^2}{4} + \dots \right).$$

Sous cette forme on voit que la partie de l'erreur systématique proportionnelle à la vitesse ne peut pas être mise en évidence par l'observation de différents ordres, parce qu'elle produit une erreur systématique constante Va , tandis que les parties proportionnelles à des puissances quelconques de la vitesse se traduisent par des erreurs systématiques variables avec l'ordre.

269. Heureusement on peut atténuer beaucoup, sinon éliminer cette erreur constante provenant du terme $a\omega$: il suffit de renverser le sens de la vitesse de rotation. Comme l'erreur sur la vitesse provient exclusivement du mécanisme, il y a beaucoup de chances pour que la fonction qui représente cette erreur reste la même; seulement les termes contenant les puissances impaires de ω changeront de signe, puisque ω se change en $-\omega$. Si l'on prend soin de faire toujours les observations par couples correspondant à des rotations égales et de sens inverse de la roue dentée (57, 179), la moyenne des vitesses de ces couples sera affranchie de l'effet des termes $a\omega$, $c\omega^3$, ... renfermant les puissances impaires de ω . On peut donc réduire la formule précédente à

$$\varphi_n = V \left(1 + b q_n \frac{\Omega}{2} + \dots \right) \quad \text{ou} \quad \varphi_n - \varphi - K q_n + \dots = 0.$$

Telle est la forme de la fonction cherchée. Quoique bornée à ce développement, elle est pourtant, sous les réserves indiquées plus haut, exacte jusqu'à la troisième puissance de la vitesse inclusivement.

Détermination des coefficients de ces fonctions et de l'écart moyen du calcul avec l'observation.

270. Si, dans l'une ou l'autre des deux fonctions supposées numériquement définies, on substituait à la place de φ_n les résultats trouvés expérimentalement,

on trouverait des écarts plus ou moins considérables, les uns positifs, les autres négatifs. La méthode des moindres carrés permet de déterminer les coefficients numériques de ces fonctions de façon à rendre minimum la somme des carrés des écarts obtenus dans la substitution. Dans le cas présent, il y a une remarque essentielle à faire : c'est que les écarts n'ont pas la même importance pour les valeurs d'ordre différent ; il faut donc rétablir l'égalité d'importance de ces écarts en multipliant les équations par un coefficient particulier, de façon que chaque valeur $(\varphi_n - \varphi)^2$ soit affectée, comme on l'a vu plus haut (259), du facteur $p_n q_n^2$. C'est ainsi qu'on exprimera le fait que les erreurs accidentelles qui masquent l'erreur systématique sont dues à des défauts d'appréciation d'intensité (*).

Il est facile maintenant d'écrire les conditions relatives aux deux fonctions données ; on peut même, pour simplifier les calculs, les réunir dans une même expression

$$\varphi_n - \varphi - R q_n^\alpha = 0,$$

R étant le coefficient constant désigné précédemment par H lorsque $\alpha = - 1$ (erreurs systématiques personnelles, n° 267), et par K lorsque $\alpha = + 1$ (erreurs systématiques du mécanisme, n° 269).

D'après la remarque précédente, l'expression à rendre minimum est donc

$$\sum p_n p_n^2 (\varphi_n - \varphi - R q_n^\alpha)^2.$$

On écrit la condition du minimum en égalant à zéro la différentielle de cette expression par rapport aux paramètres V et R, qui seuls en font varier la valeur. Or, comme ils sont indépendants, il suffit d'égaliser à zéro les dérivées partielles prises par rapport à ces paramètres : on obtient ainsi un système de deux équations linéaires, qui prend l'une ou l'autre des formes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum p_n q_n^2 (\varphi_n - \varphi - R q_n^\alpha) = 0, \\ \sum p_n q_n^{2+\alpha} (\varphi_n - \varphi - R q_n^\alpha) = 0, \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \sum p_n q_n^2 + R \sum p_n q_n^{2+\alpha} = \sum p_n q_n^2 \varphi_n, \\ \varphi \sum p_n q_n^{2+\alpha} + R \sum p_n q_n^{2+2\alpha} = \sum p_n q_n^{2+\alpha} \varphi_n. \end{array} \right.$$

On peut mettre en évidence les diverses espèces de moyennes composées calculées précédemment (264). Désignons, en général, par M_i la moyenne composée faite en prenant pour poids le produit du nombre p_n de valeurs individuelles que représente le résultat φ_n par la puissance i du facteur $2n - 1$ ou q_n ,

(*) Si l'on voulait adopter une autre valeur du poids à donner à chaque carré d'écart, par exemple le produit $p_n q_n^\alpha$, les formules qui vont suivre s'appliqueraient sans difficulté en substituant partout la lettre α au chiffre 2 en exposant ou en indice.

de sorte qu'on aura

$$M_0 = \frac{\sum p_n \vartheta_n}{\sum p_n}, \quad M_1 = \frac{\sum p_n q_n \vartheta_n}{\sum p_n q_n}, \quad M_2 = \frac{\sum p_n q_n^2 \vartheta_n}{\sum p_n q_n^2}, \dots, \quad M_i = \frac{\sum p_n q_n^i \vartheta_n}{\sum p_n q_n^i}.$$

Le système d'équations linéaires peut alors se mettre sous la forme plus simple

$$\vartheta + \frac{R \sum p_n q_n^{\lambda+\alpha}}{\sum p_n q_n^\lambda} = M_\lambda,$$

$$\vartheta + \frac{R \sum p_n q_n^{\lambda+\alpha}}{\sum p_n q_n^{\lambda+\alpha}} = M_{\lambda+\alpha}.$$

Pour obtenir les formules relatives aux deux formes de fonctions à essayer, il suffit de faire dans ces expressions $\alpha = -1$ (erreurs systématiques personnelles) et $\alpha = +1$ (erreurs systématiques du mécanisme). La valeur $\alpha = 0$ s'interprète également et donne une fonction déjà étudiée; elle correspond au cas de la recherche de la moyenne principale M_2 . En effet, le terme $R q_n^\alpha$ se réduit alors à R , lequel, étant une constante au même titre que ϑ , ne se distingue pas d'elle; aussi la seconde équation de condition devient-elle identique avec la première, et le résultat ϑ qu'on déduit de cette équation unique est la moyenne principale calculée plus haut (260); ainsi cette formule embrasse les trois cas de la discussion où la méthode des moindres carrés nous est utile.

271. Il reste encore à calculer la moyenne m^2 des carrés des écarts entre l'observation et le calcul. Il suffit de substituer, à cet effet, dans l'expression de la somme des carrés, la valeur ϑ qui la rend minimum et de diviser le tout par la somme des coefficients de ces carrés d'écarts; mais il se présente des réductions importantes dans cette substitution. En effet, on peut écrire m^2 sous la forme suivante :

$$m^2 = \frac{\sum p_n q_n^2 (\vartheta_n - \vartheta - R q_n^\alpha) (\vartheta_n - \vartheta - R q_n^\alpha)}{\sum p_n q_n^2}.$$

Effectuant la multiplication par les trois termes de la seconde parenthèse, on voit que les deux derniers produits, dans lesquels ϑ et R sortent du signe Σ , sont nuls identiquement en vertu des deux équations de condition du minimum. Il ne reste donc que le premier produit. Développant alors l'expression qui reste pour mettre en facteur les constantes ϑ et R , il vient

$$m^2 = \frac{\sum p_n q_n \vartheta_n^2}{\sum p_n q_n^2} - \vartheta \frac{\sum p_n q_n^2 \vartheta_n}{\sum p_n q_n^2} - R \frac{\sum p_n q_n^{\lambda+\alpha} \vartheta_n}{\sum p_n q_n^\lambda}.$$

Le premier terme est la moyenne composée des carrés des résultats en prenant pour poids $p_n q_n^2$; nous la désignerons par \mathfrak{R}_2^2 , l'indice supérieur rappelant que l'on prend la moyenne des carrés, l'indice inférieur indiquant, selon la convention précédente, que l'exposant de la puissance de q est 2. Le coefficient de φ est la moyenne M_2 ; quant au troisième terme, on peut y mettre en évidence la moyenne $M_{2+\alpha}$ en l'écrivant

$$R \frac{\sum p_n q_n^{2+\alpha}}{\sum p_n q_n^2} \times \frac{\sum p_n q_n^{2+\alpha} \varphi_n}{\sum p_n q_n^{2+\alpha}} = R \frac{\sum p_n q_n^{2+\alpha}}{\sum p_n q_n^2} M_{2+\alpha};$$

mais, sous cette forme, le coefficient de $M_{2+\alpha}$ est, d'après la première équation de condition du minimum (270), égal à $M_2 - \varphi$.

On arrive ainsi à l'expression très-élégante et surtout très-facile à calculer numériquement

$$m^2 = \mathfrak{R}_2^2 - \varphi (M_2 - M_{2+\alpha}) - M_2 M_{2+\alpha},$$

dans laquelle il n'entre que le paramètre φ calculé d'après la fonction choisie et des moyennes $M_2, M_{2+\alpha}$, qu'on a déjà eu l'occasion de calculer numériquement. Comme vérification de la formule, si nous faisons $\alpha = 0$, la moyenne $M_{2+\alpha}$ devient égale à M_2 , et il reste

$$m^2 = \mathfrak{R}_2^2 - (M_2)^2,$$

qui coïncide avec l'expression calculée précédemment (261) dans la recherche du carré moyen de l'écart des observations avec la moyenne principale, car alors φ représente M_2 .

Remarque. — Tous ces calculs s'appliquent aussi bien aux résultats désignés précédemment par γ_n (262), et qui ne diffèrent des φ_n que par une constante, qu'aux résultats φ_n eux-mêmes, car il n'entre dans les formules fondamentales que la différence $\varphi_n - \varphi$; c'est ce qu'on vérifierait directement dans l'expression de m^2 qu'on vient d'obtenir, en changeant φ_n en $\varphi_n - \varphi_0$: on n'a pas même besoin d'avoir égard aux deux équations de condition. Le calcul arithmétique étant simplifié dans des proportions considérables par l'emploi des γ_n , ce sont les moyennes rapportées à ces quantités qui ont toujours été employées comme intermédiaires dans les calculs numériques qui suivent.

Application numérique des formules précédentes.

272. 1° $\alpha = -1$. *Erreur systématique provenant de l'observateur.* — La substitution des données numériques empruntées aux quatre tableaux (263) et au tableau

des moyennes conduit aux valeurs suivantes pour les coefficients de l'équation représentant la variation systématique avec l'ordre n (267). Le système des deux équations à deux inconnues (270) a été résolu quatre fois pour obtenir séparément dans chaque série l'évaluation de la partie systématique de l'erreur cherchée.

	φ	$\frac{H}{q_n}$	Erreur systématique const. en fraction de période $\theta = \frac{H}{2V}$	m^2 carré moyen de l'écart.	
				avec la formule.	avec la moy. principale M_2 .
Série $\frac{1}{2}(V + v)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs} \\ \text{non rectifiées} \end{array} \right\}$		$= 299,714 + \frac{11,5}{2n-1}$	+0,019	0,23025	0,2625
» $\frac{1}{2}(U + u)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs} \\ \text{non rectifiées} \end{array} \right\}$		$= 300,512 - \frac{8,6}{2n-1}$	-0,014	0,4864	0,5004
» $\frac{1}{2}(V + v)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs} \\ \text{non rectifiées} \end{array} \right\}$		$= 299,921 + \frac{7,7}{2n-1}$	+0,013	0,1167	0,1310
» $\frac{1}{2}(U + u)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs} \\ \text{non rectifiées} \end{array} \right\}$		$= 299,872 + \frac{6,2}{2n-1}$	+0,010	0,2714	0,2797

L'erreur systématique θ d'appréciation de l'intensité, exprimée en fraction de période, serait, d'après ce calcul, comprise entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{60}$. Les valeurs φ , censées affranchies des erreurs systématiques et qui devraient être égales dans les quatre séries, sont assez divergentes; mais on ne doit accorder qu'une confiance très-limitée à ces résultats. En effet, les carrés moyens des écarts sont presque égaux aux carrés moyens des écarts avec la moyenne principale. Il en résulte que la formule

$$\varphi + \frac{H}{2n-1}$$

ne représente pas sensiblement mieux les observations que l'hypothèse de la constance complète des valeurs avec l'ordre d'extinction.

En outre, les valeurs φ et H sont numériquement très-mal déterminées. Les coefficients de H , dans chaque système d'équations mises sous la forme donnée précédemment (270), sont si voisins, que ces équations sont presque incompatibles. On doit donc conclure à une quasi-impossibilité de mettre l'erreur systématique sous cette forme et considérer les valeurs des paramètres H et φ comme très-incertaines.

On peut toutefois retenir de l'examen comparatif de ces résultats que les séries $\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$ auraient des erreurs systématiques de sens inverse, ce qui donnerait à leur moyenne une grande chance d'exactitude qui ne nous

avait été révélée jusqu'ici que par l'apparence, insuffisante d'ailleurs, de la concordance mutuelle des résultats.

273. 2° $\alpha = + 1$. *Erreur systématique provenant du mécanisme.* — La résolution des quatre systèmes d'équations (270) conduit aux résultats suivants :

Séries.	φ	K	Carré moyen des écarts m^2	
			avec la formule.	avec la moy. principale M_2 .
Valeurs non rectifiées.	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(V + v) = 301,031 - 0,030692(2n - 1) \\ \frac{1}{2}(U + u) = 299,764 + 0,014366(2n - 1) \end{array} \right.$		0,2159	0,2625
			0,4838	0,5004
Valeurs rectifiées.	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(V + v) = 300,593 - 0,012394(2n - 1) \\ \frac{1}{2}(U + u) = 300,601 + 0,017375(2n - 1) \end{array} \right.$		0,1148	0,1310
			0,2810	0,2797

La valeur du carré moyen des écarts m^2 est à peine modifiée; il faut donc en conclure que la formule

$$\varphi + K(2n - 1)$$

ne représente pas beaucoup mieux l'ensemble des résultats que la formule précédente ou que l'hypothèse de la non-existence de l'erreur systématique suivant l'ordre d'extinction. Cependant l'erreur moyenne est un peu diminuée et les équations de condition mieux déterminées que dans le cas précédent; il y aurait donc à tenir un compte plus grand de ces résultats que des précédents. Si, d'autre part, on se reporte à la note du n° 71, on verra que le sens de l'erreur indiqué ici, erreur négative, est précisément celui qui paraît provenir des irrégularités périodiques de la vitesse. On pourra en conclure, avec une certaine vraisemblance, qu'il y a une légère diminution systématique avec l'ordre et que les moyennes principales M_2 sont un peu trop faibles.

Il est bon de résumer l'influence systématique mise en évidence par ce calcul, en prenant la moyenne des valeurs du paramètre φ , qui en sont censées affranchies :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Valeurs non rectifiées.} \dots\dots \text{ Moyenne} = 300,398 \\ \text{» rectifiées.} \dots\dots\dots \text{ Moyenne} = 300,596 \end{array} \right\} \text{Moyenne } 300,497.$$

La concordance, sans être complète, est assez satisfaisante. Le résultat définitif semble donc indiquer que la valeur exacte doit être plus forte que les moyennes principales données précédemment (264).

274. De ce qui précède on peut déjà conclure que l'erreur systématique, sui-

vant l'ordre d'extinction, est, sinon négligeable, au moins très-faible et négative; car, si elle était plus appréciable, elle devrait, par la correction que sa détermination approchée permet de faire subir aux résultats partiels, apporter une diminution importante de la valeur du carré moyen de l'écart. L'influence devrait être notable, car il y a deux paramètres arbitraires dans les formules essayées, au lieu d'un seul, comme dans la formule de la moyenne composée.

Cette considération montre en outre qu'il est inutile d'essayer des formes d'équations plus complexes avec un nombre plus grand de termes à coefficients indéterminés. Si l'on augmentait le nombre de paramètres arbitraires des formules, on diminuerait certainement la valeur du carré moyen des écarts; mais cet accord serait évidemment illusoire et ne prouverait rien en faveur de l'existence d'une loi continue.

Il faut donc s'en tenir aux quatre moyennes principales M_2 , d'ailleurs si concordantes (264), et conclure que leurs chiffres communs représenteront le résultat exact après une légère correction positive dont nous allons essayer d'apprécier la valeur dans la suite de la discussion.

En effet, il nous reste encore, pour achever de lever tous les doutes sur la précision de ce résultat, à examiner deux questions importantes : la première est de rechercher s'il n'y a pas une erreur systématique variable avec la roue dentée employée, ou le nombre des dents; la seconde, de rechercher s'il n'y a pas une erreur systématique constante : ce sont les points que nous allons présentement examiner.

Recherche d'une erreur systématique variant avec les diverses roues dentées.

275. Les roues dentées employées (143) sont au nombre de quatre, dont voici les éléments :

Diamètre.....	30 ^m	35 ^m	40 ^m	45 ^{mm}
Nombre de dents.....	144	150	180	200
Forme de la denture.....	Pointue.	Pointue.	Carrée.	Pointue.

Elles ont été prises dans des feuilles d'aluminium de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{16}$ de millimètre d'épaisseur et taillées entre deux roues épaisses de laiton, pour éviter les déformations pendant la taille. Leur dimension, au premier abord, paraît bien petite : c'est cependant la plus convenable. Elle a été fixée, d'après diverses séries d'expériences résumées plus haut (137), de façon à fournir la plus grande vitesse pos-

sible à la circonférence (18 et 138). Avec le mécanisme employé, toute dimension s'éloignant de celle-ci n'eût donné, à poids moteur égal, que des vitesses moindres à la circonférence, et, finalement, à largeur de dents égale, que des ordres d'extinction moins élevés.

Voici le résumé des nombres obtenus avec ces roues, en laissant de côté ceux qui correspondent à la roue de 180 dents. Cette dernière roue n'a été utilisée que pour les observations consignées dans la feuille V; car sa denture carrée, présentant un rapport fixe du plein au vide, est beaucoup moins favorable que la denture pointue recommandée dès le début (32); aussi n'ai-je pas poursuivi l'utilisation de cette roue, dont l'essai ne m'avait pas paru satisfaisant. Les résultats obtenus avec cette roue ne présentent du reste, comme on le voit, dans le résumé des résultats (238), aucune divergence anormale; mais, comme ils sont peu nombreux et tous du treizième ordre, il n'y aurait aucune conclusion à tirer de leur comparaison avec les autres.

Séries.	Moyennes.	$M_0 = \frac{\sum p_n q_n \lambda_n^2}{\sum p_n}$	$M_1 = \frac{\sum p_n q_n \lambda_n^3}{\sum p_n q_n}$	$M_2 = \frac{\sum p_n q_n^2 \lambda_n^2}{\sum p_n q_n^2}$	$M_3 = \frac{\sum p_n q_n^3 \lambda_n^2}{\sum p_n q_n^3}$	Nombre de déterminations partielles $\sum p_n$	Ordre moyen d'extinction $n = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_n}$
$\frac{1}{2}(V+u)$	valeurs	Roue de 144 dents. 300,202	300,197	300,192	300,187	64	$n = 15$
	non rectifiées.	» 150 » 300,380	300,204	300,066	299,991	148	12
	» 200 » 300,295	300,297	300,296	300,293	162	10	
$\frac{1}{2}(U+u)$	valeurs	Roue de 144 dents. 300,440 *	300,440 *	300,440 *	300,440 *	13	15
	non rectifiées.	» 150 » 300,175	300,171	300,196	300,218	48	12
	» 200 » 299,983	300,026	300,069	300,111	101	10	
$\frac{1}{2}(V+u)$	valeurs	Roue de 144 dents. 300,157	300,153	300,149	300,144	61	15
	non rectifiées.	» 150 » 300,415	300,311	300,227	300,188	144	12
	» 200 » 300,311	300,301	300,290	300,278	160	10	
$\frac{1}{2}(U+u)$	valeurs	Roue de 144 dents. 300,220 *	300,220 *	300,220 *	300,220 *	12	15
	non rectifiées.	» 150 » 299,768	299,866	299,890	299,892	44	12
	» 200 » 300,303	300,305	300,310	300,316	95	10	

276. Avant de discuter les nombres consignés dans ce tableau, il est nécessaire de prévenir que les circonstances dans lesquelles les roues ont été utilisées ne sont pas absolument les mêmes. Ainsi la roue de 144 dents n'a servi que pour l'observation de jour avec la lumière du soleil; de plus, elle n'a fourni que des résultats de trois ordres, le quatorzième, le quinzième et le seizième, qui se réduisent même au quinzième seulement dans la série des $\frac{1}{2}(U+u)$, ce qui fait que les moyennes M_0, M_1, M_2, M_3 sont identiques, le facteur q_n étant commun au numérateur et au dénominateur: on les a marquées d'un astérisque.

La roue de 150 dents, au contraire, a fourni des valeurs sur presque toute

l'étendue des ordres, en particulier dans les ordres extrêmes (*voir* les tableaux 263); l'ordre moyen des résultats obtenus est le douzième, mais c'est une moyenne composée, calculée en divisant Σpq_n par Σp_n . Il en résulte que, s'il existe une légère erreur systématique avec l'ordre, c'est surtout des observations faites avec cette roue qu'elle dérive. On voit combien il était nécessaire de faire cette remarque, car elle pourrait modifier tout à fait notre appréciation sur l'erreur systématique aperçue précédemment.

La roue de 200 dents, en raison même de sa masse, n'a pas permis de dépasser le onzième ordre; mais les observations qu'elle a fournies sont certainement les meilleures d'après l'impression notée sur le carnet d'expériences au moment de l'observation, tant à cause de la douceur du fonctionnement du mécanisme que de l'excellence des conditions atmosphériques (soirée du 11 septembre 1874, feuilles V, VI et VII).

Malheureusement elles ne s'étendent que du huitième au onzième ordre, de sorte qu'il est difficile de tirer de la série de ces valeurs des indications suffisantes pour la détermination de l'erreur systématique suivant l'ordre.

277. Toutes ces différences étant bien établies, constatons, malgré cela, l'accord complet sur le sens de la variation des moyennes suivant le poids employé. Les moyennes des séries $\frac{1}{2}(V + v)$, rectifiées ou non rectifiées, vont en diminuant lorsque la puissance de $2n - 1$ ou de q_n augmente. Cette variation, très-notable pour la roue de 150 dents, est presque négligeable pour celles de 144 et de 200 dents, qui ont donné des résultats peu étendus suivant l'échelle des ordres.

Les séries $\frac{1}{2}(U + u)$ donnent des variations de sens inverse; les moyennes augmentent avec la puissance de q_n .

On peut en conclure que, s'il existe une erreur systématique, elle est de sens contraire dans chacune de ces séries, et que le résultat exact ou du moins affranchi de l'erreur en question est compris entre les deux genres d'observations. Pour mieux apprécier cette conséquence, effectuons la moyenne des résultats $\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$ pour chaque roue, en séparant d'ailleurs toujours les valeurs rectifiées de celles qui ne le sont pas.

Moyennes.		M ₀	M ₁	M ₂	M ₃	Nombre de déterminations partielles.	Ordre moyen.
$\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$. Valeurs non rectifiées.	Roue de 144 dents	300,321	300,319	300,316	300,314	77	15
	» 150 »	300,278	300,188	300,181	300,105	196	12
	» 200 »	300,139	300,162	300,183	300,202	263	10
$\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$. Valeurs rectifiées.	Roue de 144 dents	300,189	300,187	300,185	300,182	73	15
	» 150 »	300,107	300,089	300,059	300,045	188	12
	» 200 »	300,307	300,303	300,300	300,297	255	10

Les résultats deviennent à peu près indépendants de la manière dont on fait la moyenne; seuls, les résultats non rectifiés de la roue de 150 dents présentent une diminution un peu notable avec l'ordre.

278. Ces remarques nous montrent que, s'il y a chance de dégager une erreur systématique avec l'ordre d'extinction, c'est de la considération des valeurs obtenues avec la roue de 150 dents prises isolément, le mélange des résultats obtenus avec les autres roues ne pouvant que gêner dans l'appréciation d'une loi continue.

Voici le calcul numérique des systèmes d'équations dans les deux cas considérés plus haut, mais en n'y faisant entrer que les valeurs obtenues avec la roue de 150 dents :

1° $\alpha = -1$. *Erreur systématique provenant de l'observateur.*

Séries.	Roue de 150 dents.	$\varphi_n = \varphi + \frac{H}{2n-1}$.	θ	Carré moyen de l'écart avec	
				la formule.	la moyenne principale M ₃ .
$\frac{1}{2}(V + v)$	valeurs non rectifiées	$= 299,635 + \frac{12,31}{2n-1}$	0,021	0,3674	0,4267
$\frac{1}{2}(U + u)$	valeurs non rectifiées	$= 300,284 - \frac{2,87}{2n-1}$	-0,005	0,6497	0,6519
$\frac{1}{2}(V + v)$	valeurs rectifiées	$= 299,951 + \frac{8,17}{2n-1}$	+0,014	0,14	0,1720
$\frac{1}{2}(U + u)$	valeurs rectifiées	$= 299,979 - \frac{2,88}{2n-1}$	-0,004	0,4253	0,4274

Comme dans le cas de l'étude de l'ensemble des résultats (278), les systèmes d'équations sont presque incompatibles, de sorte que les paramètres H et φ sont très-incertains.

En outre, le carré moyen de l'écart avec la formule est resté, à fort peu près,

A. 36.

le même que celui qui correspond à la moyenne principale; cette forme d'équations a donc très-peu de chances de représenter l'erreur systématique, résultat conforme à celui qui a été déduit de l'ensemble des déterminations (278).

2^o *Erreur systématique provenant du mécanisme.*

279. On trouve, en appliquant les mêmes formules que précédemment :

Séries.	Roue de 150 dents.	$\varphi_n = \varphi + K(2n - 1).$	Carré moyen de l'écart avec	
			la formule.	la moyenne principale M_1 .
$\frac{1}{2}(V + v)$	valeurs non rectifiées	$= 301,182 - 0,03381(2n - 1)$	0,3418	0,4267
$\frac{1}{2}(U + u)$	valeurs non rectifiées	$= 299,612 + 0,01618(2n - 1)$	0,6391	0,6519
$\frac{1}{2}(V + v)$	valeurs rectifiées	$= 300,886 - 0,01952(2n - 1)$	0,1462	0,1720
$\frac{1}{2}(U + u)$	valeurs rectifiées	$= 299,838 + 0,00147(2n - 1)$	0,3923	0,4274

Dans le cas présent, les coefficients des équations de condition sont bien déterminés; mais la valeur du carré de l'écart moyen avec la formule n'a que peu diminué sur celle relative à la moyenne principale. On remarquera que les moyennes des paramètres φ , qui sont censés affranchis de l'erreur systématique, sont presque identiques et plus fortes que les moyennes principales M_2 (264).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Valeurs non rectifiées.....} \quad \text{Moyenne } 300,397 \\ \text{'' rectifiées.....} \quad \text{Moyenne } 300,357 \end{array} \right\} \text{Moyenne } 300,377.$$

280. Il nous reste encore un autre mode d'examen. Nous avons supposé que les erreurs accidentelles les plus fortes provenaient vraisemblablement du défaut d'appréciation de l'intensité lumineuse au moment de l'observation (257), de sorte que l'erreur probable d'un groupe de déterminations a été considérée comme due exclusivement à cette cause; aussi avons-nous posé, pour l'erreur probable de la moyenne de p résultats d'ordre n , l'expression (259)

$$\frac{e_1}{\sqrt{p_n(2n-1)^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{e_1}{\sqrt{p_n \varphi_n^2}}.$$

Dans la recherche des erreurs systématiques décroissant avec la vitesse,

comme celle de la forme

$$\varphi_n = \psi + \frac{H}{2n-1},$$

cette hypothèse n'a pas grand inconvénient, parce que les erreurs probables systématiques et accidentelles diminuent proportionnellement; et, comme nous avons vu que l'erreur systématique de cette forme est négligeable, l'hypothèse adoptée ne peut influencer que très-peu le résultat. Ce sont alors, dans ce cas, les ordres supérieurs qui tendent à donner les meilleurs résultats, de sorte que, parmi les moyennes M_0, M_1, M_2, M_3 , ce sont celles dont l'indice est le plus élevé qui doivent présenter le plus d'exactitude; mais il en est tout autrement lorsqu'on cherche une erreur systématique variant rapidement avec la vitesse comme celle qui correspond à la formule

$$\varphi_n = \psi + K(2n-1).$$

Dans ce cas, les ordres les moins élevés doivent, au contraire, donner les valeurs les plus exactes; mais, comme leur importance devient très-faible en raison de la grandeur des coefficients dont on affecte les ordres élevés dans l'hypothèse précédente, la partie systématique de l'erreur est mal définie pour les premiers ordres. On doit craindre que la valeur de ψ ne soit un peu incertaine.

281. Il est bon alors d'essayer l'hypothèse inverse, c'est-à-dire de supposer que l'erreur probable accidentelle due aux défauts d'appréciation d'intensité

$$\frac{e_i}{\sqrt{p(2n-1)^2}}$$

est très-petite, et que les divergences des valeurs des divers ordres sont dues à des erreurs accidentelles de cause indéterminée, mais *indépendante de l'ordre*; on a alors des chances de mieux définir la partie de l'erreur systématique correspondant aux ordres inférieurs.

Il suffit dans ce cas, qu'on doit considérer comme un essai de confirmation des résultats précédents, de déterminer la valeur des coefficients de l'équation cherchée en prenant pour poids de chaque équation partielle seulement le nombre p_n des résultats correspondant à l'ordre n donné; de sorte que la condition se présente sous la forme

$$\sum p_n [\varphi_n - \psi - K(q,)]^2 = \text{minimum},$$

ce qui conduit aisément au système d'équations

$$\varphi + K \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_n} = M_0,$$

$$\varphi + K \frac{\sum p_n q_n^2}{\sum p_n q_n} = M_1.$$

Ce système d'équations, résolu quatre fois, donne, pour l'ensemble des résultats :

$$\frac{1}{2}(V + v) \text{ valeurs non rectifiées} = 300,795 - 0,02199(2n - 1),$$

$$\frac{1}{2}(U + u) \text{ valeurs non rectifiées} = 299,779 + 0,01357(2n - 1),$$

$$\frac{1}{2}(V + v) \text{ valeurs rectifiées} = 300,742 - 0,01848(2n - 1),$$

$$\frac{1}{2}(U + u) \text{ valeurs rectifiées} = 300,095 + 0,00243(2n - 1).$$

La constante φ serait, d'après ce qu'on vient de voir, vraisemblablement mieux déterminée; les moyennes de ces constantes sont :

$$\left. \begin{array}{l} 300,287, \text{ valeurs non rectifiées.} \\ 300,419, \text{ valeurs rectifiées.} \end{array} \right\} \text{Moyenne} = 300,353.$$

Le même calcul, appliqué aux résultats partiels obtenus avec la roue de 150 dents, donne :

$$\frac{1}{2}(V + v) \text{ valeurs non rectifiées} = 300,930 - 0,02542(2n - 1),$$

$$\frac{1}{2}(U + u) \text{ valeurs non rectifiées} = 300,175 - 0,00055(2n - 1),$$

$$\frac{1}{2}(V + v) \text{ valeurs rectifiées} = 300,885 - 0,01937(2n - 1),$$

$$\frac{1}{2}(U + u) \text{ valeurs rectifiées} = 299,403 + 0,01436(2n - 1).$$

Les moyennes des constantes φ sont :

$$\left. \begin{array}{l} 300,560, \text{ valeurs non rectifiées.} \\ 300,144, \text{ valeurs rectifiées.} \end{array} \right\} \text{Moyenne} = 300,352.$$

Ce mode de calcul confirme les résultats obtenus précédemment; il achève de prouver que l'erreur systématique avec l'ordre est très-faible, mais qu'elle est négative.

Remarque sur l'élimination de l'influence des inégalités des dentures.

282. Pour terminer ce qui concerne l'examen des résultats obtenus avec les diverses roues dentées, il est utile de faire remarquer que les inégalités fortuites, et même systématiques de la largeur des dents, ne peuvent avoir qu'une influence négligeable, par suite de diverses circonstances que nous allons rappeler. D'abord, ainsi que je l'ai longuement démontré, la méthode d'observation double, en permettant d'éviter les phases critiques (41), annule l'influence de l'inégalité des dents.

En outre, j'ai pris les précautions utiles pour éliminer ces erreurs comme si j'avais eu à les redouter. Ainsi, pour éliminer l'influence des inégalités fortuites de la largeur des dents (57) le sens de la rotation de la roue dentée a été renversé à chaque série d'observations, de façon à obtenir un nombre à très-peu près égal de résultats correspondant à des rotations de sens inverse de la roue (179). Voici, en effet, le nombre de ces deux espèces de résultats rangés par qualification :

	V		v		U		u	
Sens de la rotation								
Valeurs non rectifiées . . .	90	101	88	103	38	39	44	43
» rectifiées	90	101	85	95	42	40	35	38

L'égalité, sans être complète dans les groupes V et v, est très-suffisamment établie pour qu'on puisse penser que l'influence des inégalités fortuites de la denture, dans le cas où elle serait appréciable, est entièrement éliminée.

Il y a enfin une circonstance particulière qui favorise singulièrement l'élimination de l'influence fâcheuse des inégalités de la denture, dans le cas même où elle aurait pu devenir appréciable : c'est l'opération fréquente de l'enfumage des dents (175). En effet, la denture se trouve recouverte d'une couche notable de noir de fumée, qui modifie la largeur des dents dans une proportion relative assez grande et, par suite, la loi des inégalités produites lors de la taille des dents; on peut même dire que ces inégalités varient sans cesse, car des grains de noir de fumée sont inévitablement déplacés ou projetés de temps à autre sous l'action de la force centrifuge et des vibrations des engrenages. C'est donc en réalité avec une roue dentée sans cesse variable au point de vue optique qu'on opère. Cette variation continue est éminemment favorable à l'élimination des erreurs causées par la forme de la denture, puisque les choses se

passent comme si l'on opérât successivement avec un nombre considérable de roues différentes. C'est probablement à cette cause que l'on doit la concordance si satisfaisante des déterminations obtenues avec les diverses roues dentées.

Recherche d'une erreur systématique constante.

283. La cause d'une erreur constante sur la valeur de la vitesse de la lumière, calculée d'après la formule adoptée et démontrée au début de ce Mémoire, ne peut se trouver que dans l'appréciation inexacte d'un des éléments qui s'y rencontrent. Cette formule peut se mettre sous les formes diverses

$$V = \frac{4DNm}{2n-1} = \frac{2DN\omega}{\pi(2n-1)} = \frac{\Omega}{\omega} \frac{2V}{2n-1} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\pi V}{ND}.$$

Parmi tous ces éléments, il en est deux qui sont déterminés d'une manière certaine, ce sont N , le nombre de dents de la roue, et n , l'ordre de l'extinction (202).

Les deux autres éléments, D distance des stations et m nombre de tours dans l'unité de temps (ou ω vitesse angulaire) de la roue dentée, peuvent seuls, par une appréciation erronée, conduire à une *erreur constante* sur le résultat. Examinons leur influence successivement.

1° *Influence d'une erreur sur la distance des deux stations.*

284. L'expression de la vitesse de la lumière étant proportionnelle à la distance des deux stations, toute erreur δD sur la détermination de cette distance agirait proportionnellement sur la valeur de cette vitesse, et produirait une erreur δV

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta D}{D}, \quad \delta V = \frac{V}{D} \delta D.$$

J'ai déterminé, comme on l'a vu, par deux voies indépendantes, la distance de mes deux stations, de l'Observatoire à la tour de Montlhéry, et j'ai trouvé $D = 22910^m$ (126); mais si, plus tard, on apercevait une erreur, soit dans le raccordement de mes stations avec les données géodésiques, soit même dans la triangulation de la méridienne, on pourrait immédiatement faire la correction, à l'aide de la formule précédente.

Réduite en nombre, elle donnerait une correction, dans le même sens, de $13^{km} 108^m$ sur la vitesse de la lumière pour 1 mètre d'erreur sur la distance.

Inversement, pour produire une erreur de 100 kilomètres ou $\frac{1}{3000}$ en valeur relative, il faudrait que j'eusse adopté pour la distance une valeur en erreur de 7^m,63.

M'étant proposé l'approximation de $\frac{1}{1000}$ en valeur relative, l'erreur extrême correspondante sur la distance eût été de 22^m,91.

La grandeur de ces derniers résultats montre qu'il n'y a guère de chances pour que le résultat définitif de mes expériences soit entaché d'une erreur constante de ce genre.

2° *Influence d'une erreur sur la vitesse angulaire du mécanisme.*

285. La vitesse angulaire étant le quotient d'un certain nombre de révolutions par un temps donné, une erreur sur la vitesse peut provenir, soit d'une erreur sur la valeur des unités de l'un ou de l'autre de ces éléments, soit d'une corrélation inexacte entre la valeur de la vitesse mesurée et le phénomène auquel elle correspond.

Des deux unités qui servent à mesurer la vitesse angulaire de la roue dentée par la méthode d'enregistrement automatique, l'une, le nombre M de tours de la roue dentée compris entre deux signaux successifs de l'enregistreur, est déterminée par construction sans aucune erreur possible; elle est égale à 40 ou à 400, dans les appareils employés et décrits plus haut (201); l'autre unité est la seconde sidérale transmise par une excellente pendule dont la marche diurne était négligeable (151) et transformée en seconde moyenne par un multiplicateur 1,002739 à l'abri de toute contestation. Il est vrai que l'on a pris pour intermédiaire les battements d'un chronographe particulier; mais le résultat d'un examen minutieux (206 à 213) a montré qu'il n'y avait aucune erreur appréciable à craindre dans l'emploi de ce chronographe.

Il ne reste donc plus, comme source d'erreur constante, que la corrélation entre la vitesse angulaire de la roue dentée et le phénomène optique qui servait de base à l'observation. L'examen des erreurs systématiques de la vitesse angulaire nous a, en effet, montré la possibilité d'une erreur constante que l'observation des divers ordres d'extinction ne peut pas mettre en évidence (268); elle est produite par le terme proportionnel à la vitesse dans le développement de l'erreur systématique

$$\delta\omega = \omega + a\omega + b\omega^2 + c\omega^3 + \dots$$

On a vu que c'est au mécanisme même, y compris le dernier mobile, c'est-à-dire la roue dentée, qu'il faut attribuer une erreur de cette forme. J'ai indiqué alors

le mode d'observation que j'ai employé pour éliminer les termes contenant les puissances impaires de la vitesse, mais toutefois nous ne sommes pas certain que l'influence de la première puissance ait été rigoureusement éliminée.

286. C'est à l'effet d'avoir quelques éléments d'appréciation sur ce point que j'ai tenu à opérer avec des roues dentées de grandeurs différentes, et voici en quoi les déterminations obtenues avec ces roues peuvent nous éclairer.

L'influence du dernier mobile sur la vitesse du mécanisme est extrême : c'est lui qui sert de volant ; de plus, c'est son poids ou plutôt son moment d'inertie qui règle la vitesse angulaire la plus favorable, celle qui donne la vitesse maximum à la circonférence et sur laquelle j'ai insisté à plusieurs reprises (18, 138). Il est évident alors que les inégalités périodiques, auxquelles il faut attribuer l'erreur systématique possible $\delta\omega$, seront d'autant moins à redouter que le moment d'inertie de ce dernier mobile sera plus grand. C'est précisément ce que j'ai tâché d'obtenir avec la série de roues dentées de 200, de 150 et de 144 dents, dont les diamètres sont respectivement de 45, 35 et 30 millimètres ; les moments d'inertie de ces roues étant proportionnels aux quatrièmes puissances des rayons sont entre eux comme 9^4 , 7^4 , 6^4 ou 6561, 2401 et 1296, ou environ 5, 2 et 1. Il est donc vraisemblable de supposer que les inégalités périodiques (ballottements, trépidations, etc.) seront atténuées dans des proportions très-diverses par ces différentes roues dentées.

Si nous nous reportons aux tableaux des valeurs obtenues avec les diverses roues dentées, et en particulier des moyennes M_0 , M_1 , M_2 , M_3 des demi-sommes $\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$ (277), nous ne verrons aucune influence systématique appréciable dans le sens du nombre croissant des dents.

D'après les considérations que l'on vient d'exposer, ce serait la roue la plus grande, celle de 200 dents, qui donnerait la valeur la plus probable ; or les moyennes diverses des valeurs obtenues avec cette roue varient de 300,139 à 300,307, tandis que les moyennes obtenues avec la roue de 144, la plus petite de toutes, varient de 300,182 à 300,321.

On peut donc conclure que l'erreur constante cherchée est très-probablement insensible.

Évaluation de la correction de l'erreur systématique.

287. D'après l'examen minutieux auquel nous venons de nous livrer, nous pouvons conclure que la moyenne principale M_2 de l'ensemble des résultats calculés en prenant pour poids $p(2n - 1)^2$, moyenne qui est sensiblement la

même ($M_2 = 300,15$ à $300,20$) pour les quatre groupes considérés (264), est vraisemblablement un peu faible. La détermination des constantes de la formule représentant l'erreur systématique a conduit (273), pour l'ensemble des résultats, à $300,497$. Ce nombre, qui n'a pas grande probabilité comme valeur absolue, donne déjà sinon la grandeur, au moins le sens de la correction et indique que l'erreur à craindre croît avec l'ordre d'extinction.

La détermination des constantes de la formule analogue appliquée aux valeurs obtenues avec la roue légère de 150 dents sur toute l'échelle des ordres (279) conduit au nombre $300,377$. Un calcul analogue, où les déterminations des ordres peu élevés, obtenues avec la même roue de 150 dents, ont une plus grande influence (281), a donné $300,353$.

D'autre part, de nombreuses séries, notées comme excellentes, exécutées avec la roue la plus massive dans les ordres moyens d'extinction (10^6), malheureusement trop peu différents les uns des autres (277), donnent pour moyennes $M_2 = 300,183$ (valeurs non rectifiées) et $M_2 = 300,300$ (valeurs rectifiées).

En résumé, les nombres extrêmes sont $300,183$ (roue de 200 dents, valeurs non rectifiées) et $300,497$ (moyenne corrigée de l'erreur systématique déduite de l'ensemble des résultats). Nous prendrons la moyenne de toutes ces valeurs, ce qui portera à $300,35$ le résultat affranchi de l'erreur systématique considérée.

Il reste à lui appliquer une petite correction, d'ailleurs parfaitement certaine, due à la réfraction de l'air, que nous allons présentement calculer.

Correction due à la réfraction de l'air.

288. Les mesures, ayant été faites dans l'air, doivent subir une petite correction si l'on veut obtenir la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide nécessaire pour le calcul des constantes de l'Optique et de l'Astronomie; il suffit, pour effectuer cette correction, de multiplier le résultat obtenu dans l'air par l'indice de réfraction de l'air rapporté au vide; car, d'après la théorie des ondulations, l'indice de réfraction d'un milieu rapporté au vide n'est autre que le quotient de la vitesse de la lumière dans le vide par la vitesse dans le milieu donné.

L'indice de réfraction des corps variant en général avec la température et la pression, il est nécessaire de connaître ces deux éléments pour effectuer la réduction. Dans le cas des gaz, la loi qui lie la pression et la température est très-simple; le quotient de l'indice de réfraction ν diminué de l'unité par le poids spécifique du gaz est une constante; or, comme le poids spécifique du gaz est proportionnel à la pression et en raison inverse du binôme de dilatation, on en

conclut, pour l'expression de la loi cherchée,

$$\frac{(\nu - 1)(1 + \alpha t)}{p_0} \frac{0^m,760}{H} = C,$$

formule dans laquelle α est le coefficient du gaz (0,00366 d'après M. Regnault), H sa pression, p_0 le poids spécifique du gaz à zéro et sous la pression de 0^m,760, C la constante de réfraction qui est approximativement la même pour les gaz simples qui suivent la loi de Mariotte et de Gay-Lussac.

Les expériences de Biot, de M. Fizeau et de M. Jamin ont prouvé que la vapeur d'eau n'a qu'une influence absolument négligeable sur l'indice de réfraction de l'air, à l'approximation utile pour la réduction au vide; par conséquent, la formule s'applique à l'air atmosphérique, quel que soit son état hygrométrique.

Les expériences de Biot et celles de Dulong ont donné, pour l'air atmosphérique, $\nu = 1,000294$ à zéro et à la pression 0^m,760; d'où $Cp_0 = 0,000294$, et par suite

$$\nu = 1 + \frac{H}{0^m,760(1 + \alpha t)} 0,000294.$$

Tel est le facteur par lequel il faut multiplier la vitesse de la lumière observée dans l'air atmosphérique à la température t et sous la pression H , pour obtenir la vitesse de la lumière dans le vide, tel qu'il est fourni par la machine pneumatique.

Valeur définitive de la vitesse de la lumière.

289. Il résulterait de cette expression que le facteur de correction, variable avec la température et la pression, a dû être différent, sinon à chaque observation, au moins à chaque série nouvelle; mais les changements de température et de pression ont été assez faibles pour que les variations relatives d'un jour à l'autre soient entièrement négligeables. En effet, la pression atmosphérique a varié entre 749,3 et 755,8, c'est-à-dire de $\pm 3^{\text{mm}},3$; la température de 15°,1 à 22°,8 ou de $\pm 3^{\circ},8$ (voir les tableaux n° 205). Même en supposant, ce qui n'est pas, que la pression la plus élevée corresponde à la température la plus haute, la variation de la correction est en valeur relative inférieure à $\pm (\frac{4}{760} + 4 \times 0,0037) = \pm \frac{1}{60}$, et comme la correction absolue est de $\frac{1}{3000}$, à peu près, l'erreur n'est pas de $\pm \frac{1}{150000}$ ou de ± 2 unités sur le sixième chiffre de la vitesse de la lumière, quantité absolument négligeable dans nos expériences.

Ce calcul montre qu'il n'est pas besoin de prendre la moyenne composée des

coefficients de correction relatifs à chaque série, et qu'il suffit de prendre la température et la pression moyenne de l'ensemble des observations $t = 18^\circ$, $H = 754^{\text{mm}}$, pour calculer le coefficient de correction de l'ensemble des résultats.

On peut même tenir compte de la différence d'altitude entre la tour de Montlhéry (144 mètres environ) et celle de l'Observatoire (90 mètres), c'est-à-dire de 54 mètres, en retranchant de la pression atmosphérique la hauteur de mercure correspondant à la moitié de 54 mètres ou 27 mètres, environ $2^{\text{m}}, 6$, la température étant supposée la même, en moyenne, entre les deux stations, ce qui réduit à $751^{\text{mm}}, 4$ la pression moyenne à employer dans la formule de correction.

On trouve ainsi 1,000273 pour le facteur par lequel il faut multiplier le résultat définitif 300,350 obtenu dans l'air (287), ce qui ajoute à ce nombre 0,082, de sorte que le résultat définitif donne pour la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide

$$V = 300400 \text{ kilomètres par seconde de temps moyen.}$$

Tel est le résultat définitif de mes expériences.

Évaluation de l'approximation du résultat définitif.

290. L'évaluation de l'approximation du résultat définitif est extrêmement délicate. A un point de vue rigoureux, la chose est même impossible, parce que, malgré tout le soin que j'ai pris à reconnaître les causes d'erreur, à les écarter ou à éliminer leur influence, il est bien probable que plusieurs, peut-être même un grand nombre de pareilles causes m'ont échappé. Il est donc nécessaire de restreindre la question et de poser le problème en ces termes : Les causes d'erreur les plus graves étant supposées connues, et les autres étant considérées comme négligeables, déduire des discussions qui ont été faites une sorte de limite de l'erreur à craindre ou, si cela est possible, une valeur de l'erreur probable du résultat définitif.

Réduite à ces termes, la question est encore difficile. Nous allons néanmoins l'examiner à divers points de vue, et l'ensemble de l'examen permettra alors de fixer avec vraisemblance l'approximation du résultat final de nos mesures.

Nous avons reconnu, dans le cours de la discussion des valeurs partielles, deux sortes d'erreurs : des erreurs accidentelles plus ou moins considérables, et des erreurs systématiques qui paraissent au contraire extrêmement faibles. Nous allons donc diviser l'examen en deux parties et calculer séparément l'erreur probable provenant de ces deux sources.

Portion de l'erreur probable provenant des erreurs fortuites.

291. Nous déduirons cette erreur probable de la considération des écarts individuels, c'est-à-dire en regardant tous les écarts comme produits par des causes fortuites, sans avoir égard aux erreurs systématiques qui sont si faibles. La valeur que nous calculerons ainsi sera une limite supérieure de l'erreur cherchée, car les écarts ont pu être légèrement diminués par la détermination d'une fonction représentant l'erreur systématique.

Considérons donc, parmi les erreurs qui entachent le résultat définitif, celle qui provient de l'influence des écarts accidentels; nous allons la considérer comme identique avec celle que présente la moyenne générale des résultats désignés précédemment par M_2 , moyenne composée formée en prenant comme *poids* le facteur $p_n(2n-1)^2$ ou $p_n q_n^2$ (264).

On a démontré que ce mode de formation de la moyenne fournissait l'erreur probable minimum, parce que les multiplicateurs p_n, q_n^2 étaient les *poids théoriques*, c'est-à-dire des nombres inversement proportionnels aux carrés des erreurs probables (255).

En effet, chaque demi-somme $\frac{1}{2}(V + v), \frac{1}{2}(U + u)$ d'ordre n a pour erreur probable une expression (259)

$$\frac{e_1}{(2n-1)\sqrt{p}} \quad \text{ou} \quad \frac{e_1}{q_n\sqrt{p}},$$

e_1 représentant l'erreur probable idéale d'une observation isolée de l'ordre 1. D'après la règle énoncée plus haut (255), le poids théorique de la moyenne est la somme des poids théoriques des nombres partiels, de sorte que l'erreur probable E est donnée par la relation

$$\frac{1}{E^2} = \frac{\sum p q_n^2}{e_1^2} \quad \text{ou} \quad E = \frac{\sqrt{\sum p q_n^2}}{e_1}.$$

Il reste à connaître e_1 ; on la déduit aisément de la considération des écarts des résultats φ_n ou $\frac{1}{2}(V + v)$ et $\frac{1}{2}(U + u)$, avec la moyenne composée $\varphi = M_2$. En effet, le résultat $\varphi - \varphi_n$ est, par hypothèse, entaché d'une erreur fortuite moyenne $\frac{e_1}{\sqrt{p_n q_n^2}}$, e_1 étant l'erreur moyenne idéale d'une observation isolée de

l'ordre 1; $e_1 = 0,674 e_1$; son carré, multiplié par $p_n q_n^2$ est entaché de l'erreur moyenne e_1^2 . Si donc nous avons P résultats semblables, la moyenne

$$e_1^2 = \frac{\sum (\varphi - \varphi_n)^2 p_n q_n^2}{P}, \quad e_1 = \sqrt{\frac{\sum (\varphi - \varphi_n)^2 p_n q_n^2}{P}}$$

nous donnera avec d'autant plus d'approximation la valeur de e_1 que P sera plus grand. Malheureusement les valeurs combinées par voie de moyenne composée ne sont pas très-nombreuses; mais, comme elles sont formées d'un nombre souvent assez grand de résultats partiels, les circonstances sont meilleures qu'elles ne le paraissent au premier abord. On en tire

$$E = 0,674 \frac{e_1}{\sqrt{\sum p_n q_n^2}} = \sqrt{\frac{\sum (\varphi - \varphi_n)^2 p_n q_n^2}{P \sum p_n q_n^2}} = 0,674 \frac{m}{\sqrt{P}},$$

en substituant l'expression m^2 définie précédemment (261).

292. Voici la substitution des valeurs numériques de m^2 correspondant à $\varphi = M_2$ et à P, c'est-à-dire les erreurs probables des moyennes composées M_2 pour les quatre groupes suivants :

	Moyenne M_2 .	m^2 .	P.	Erreur probable	
				absolue.	relative.
				$\pm 0,674 \frac{m}{\sqrt{P}}$	
$\frac{1}{2} (V + v)$ valeurs non rectifiées..	300,175	0,2625	22	$\pm 0,074$	$\pm 0,00025$
$\frac{1}{2} (U + u)$ " non rectifiées..	300,168	0,5004	13	0,132	0,00044
$\frac{1}{2} (V + v)$ " rectifiées.	300,225	0,1310	22	0,053	0,00018
$\frac{1}{2} (U + u)$ " rectifiées.	300,122	0,2797	12	0,106	0,00037
Moyenne arithmétique des valeurs non rectifiées.				0,076	0,00025
" " rectifiées.				0,058	0,00019
" de l'ensemble.				0,048	0,00016

Comme les quatre moyennes M_2 sont à peu près identiques, on voit que l'erreur probable de l'ensemble, du chef des causes fortuites, atteindrait à peine 1 à 2 dix-millièmes en valeur relative.

293. Mais il ne faut pas s'illusionner sur la valeur de ces erreurs probables, comme on le fait souvent dans des circonstances pareilles. En effet, tous ces calculs reposent sur l'hypothèse que les écarts des résultats partiels suivent la loi de fréquence des erreurs fortuites (46); il est donc nécessaire de

vérifier cette hypothèse. Le moyen le plus simple consiste à essayer le critérium indiqué précédemment (215), c'est-à-dire à calculer le quotient du double du carré moyen de l'écart par le carré de l'écart moyen, abstraction faite du signe. Ce quotient doit être égal à $\pi = 3,14159$ si les écarts suivent la loi de Laplace et Gauss. Dans le cas présent, l'expression du quotient cherché est assez simple, elle se réduit à (*)

$$\frac{\frac{2 \sum (\psi - \psi_n)^2 p_n q_n^2}{\sum p_n q_n^2}}{\left[\frac{\sum (\psi - \psi_n) p_n q_n^2}{\sum p_n q_n^2} \right]^2} = \frac{2m^2}{\left[\frac{\sum (\psi - \psi_n) p_n q_n^2}{\sum p_n q_n^2} \right]^2} = \frac{2m^2}{\mu^2},$$

en employant l'expression m^2 et représentant le dénominateur par μ^2 , le signe \sum étant destiné à rappeler que tous les termes de la somme doivent entrer avec le même signe.

Cet écart moyen μ , où entre \sum , exige un calcul numérique plus laborieux que celui du carré moyen, parce qu'il faut calculer séparément tous les termes $(M_2 - \psi_n) p_n q_n^2$, pour mettre à part les termes positifs et négatifs; on en profite pour vérifier que leur somme est nulle.

294. Voici le résultat du calcul numérique appliqué aux écarts des quatre groupes précédents avec leur moyenne M_2 :

	m^2	μ^2	$\frac{2m^2}{\mu^2}$
$\frac{1}{2}(V + v)$ valeurs non rectifiées . .	0,26246	0,12614	4,1614
$\frac{1}{2}(U + u)$ » non rectifiées . .	0,50038	0,24036	4,1635
$\frac{1}{2}(V + v)$ » rectifiées	0,13096	0,06229	4,2048
$\frac{1}{2}(U + u)$ » rectifiées	0,27966	0,20332	2,7510

Aucun de ces quotients n'est exactement égal à $\pi = 3,14159$, comme il l'avait été dans l'étude du chronographe (215); les trois premiers sont plus élevés d'une unité, le dernier plus bas de $\frac{4}{10}$ d'unité. On ne peut donc pas affirmer que les

(*) On ramène en effet le cas de la moyenne composée au cas d'une moyenne simple par le raisonnement suivant, que nous appliquerons au cas actuel. Chaque terme $(\psi - \psi_n)^2 p_n q_n^2$ peut être remplacé, en posant $p_n q_n^2 = P_n$, par P_n fois un certain carré d'écart x^2 , ou par P_n carrés d'écarts $x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2$ dont la moyenne serait x^2 . Comme tous les écarts ainsi formés sont comparables, quel que soit n (puisque'ils ont tous la même erreur probable, et qu'ils représentent tous e^2), la somme $\sum (\psi - \psi_n)^2 p_n q_n^2$ peut être considérée comme la somme de tous les P_n (ou $\sum P_n q_n^2$) carrés de même nature. Les écarts simples $\psi - \psi_n$ correspondants sont en nombre égal à celui des carrés d'écart: leur moyenne sera donc représentée par l'expression correspondante.

écarts suivent exactement la loi des erreurs fortuites, et, par conséquent, considérer comme rigoureuses les valeurs des erreurs probables données plus haut.

Il sera donc prudent de prendre dans le tableau de ces erreurs la valeur la plus grande au lieu de la valeur théorique, et de conclure que l'erreur probable due à l'influence des erreurs non systématiques est seulement un peu inférieure à $\pm \frac{1}{2}$ millième en valeur relative.

Comme ces valeurs ont été déduites du carré moyen des écarts m^2 et non de l'écart moyen μ , il y a des chances pour que leur évaluation soit un peu trop forte; car, dans les trois premiers groupes, le quotient $\frac{2m^2}{\mu^2}$ surpasse notablement la valeur théorique 3,1415, et c'est à l'un d'eux qu'on emprunte cette valeur maxima de l'erreur probable; la limite fixée ainsi paraît donc une limite supérieure.

Portion de l'erreur probable provenant des influences systématiques.

295. Les erreurs systématiques sont souvent les erreurs les plus difficiles à découvrir, parce qu'elles sont cachées sous la concordance des moyennes ou au milieu des petits écarts considérés comme accidentels. Je crois avoir mis en évidence (281) une très-petite erreur de ce genre croissant avec l'ordre n de l'extinction, et de l'ensemble de la discussion j'ai conclu à une correction d'environ 0,15 ou à peu près $\frac{1}{2}$ millième en valeur relative. Comme les diverses roues dentées donnent sensiblement les mêmes résultats, que la moyenne principale M_2 (264) des demi-sommes $\frac{1}{2}(V + v)$ est sensiblement la même que celle des $\frac{1}{2}(U + u)$, j'ai tout lieu de croire que cette erreur systématique est la seule qui ait une influence sensible; elle paraît d'ailleurs provenir d'une cause très-vraisemblable, à savoir les petites inégalités périodiques du mouvement du mécanisme.

En supposant que je me sois trompé et que cette correction soit nulle, ou, au contraire, qu'elle soit double de la valeur adoptée, ces deux hypothèses formant des limites assez étendues comparées à la grandeur de la correction, il ne s'introduirait, de ce chef, qu'une erreur de $\frac{1}{2}$ millième en valeur relative.

Résumé.

296. En résumé, nous trouvons une erreur probable d'environ $\frac{1}{2}$ millième en valeur relative aussi bien pour l'influence des causes fortuites que pour celle des causes systématiques. Adoptant l'hypothèse la plus défavorable où ces erreurs seraient dans le même sens, nous pouvons conclure de cette discussion

que la valeur de la vitesse de la lumière, qui se présente comme résultat définitif de mes expériences, à savoir, 300 400 kilomètres par seconde de temps moyen, est approchée à $\pm \frac{1}{1000}$ en valeur relative ou à ± 300 kilomètres en valeur absolue (*).

Je pourrais appeler cette erreur *erreur probable*, c'est-à-dire erreur dont la probabilité est $\frac{1}{2}$; mais nous venons de voir que, dans le cas présent, les conditions requises pour l'application précise du Calcul des probabilités ne sont pas

(*) Les expériences que j'ai faites en 1872, entre l'École Polytechnique et le mont Valérien, décrites dans le XLIV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, m'ont conduit au nombre $V = 298500^{\text{km}}$; j'avais cru pouvoir conclure à une approximation de $\frac{1}{300}$, probablement par défaut (*loc. cit.*, p. 178).

D'après les nouvelles mesures, ce nombre est, en effet, approché par défaut; mais son erreur serait un peu plus forte que je ne l'avais estimée alors d'après la discussion des valeurs obtenues: au lieu de $\frac{1}{300}$, elle s'élèverait à $\frac{1}{100}$ environ.

Quoique cette différence d'approximation soit assez faible, j'ai tenu à me rendre compte de la cause d'erreur qui l'avait produite, afin d'être assuré de ne pas l'avoir laissé subsister dans les expériences présentes.

J'ai examiné les modes d'observation et de calcul, et mesuré de nouveau la distance des deux stations (ainsi qu'on le verra plus loin dans l'Appendice n^o I). Je n'ai trouvé aucune incertitude appréciable sur tous ces points; mais j'ai reconnu que la cause d'erreur cherchée se trouvait vraisemblablement tout entière dans l'influence systématique des moteurs employés.

En effet, c'était, sauf un seul, des mouvements d'horlogerie mus par un ressort dont la force était, par conséquent, constamment décroissante. Il en résulte que l'accélération de la vitesse angulaire de la roue dentée, annulée en général d'une manière presque complète par l'action du frein, au lieu de rester sensiblement constante, avait une tendance systématique à devenir négative.

J'avais eu, il est vrai, la précaution (*loc. cit.*, p. 156) de faire des observations alternativement en vitesse croissante et en vitesse décroissante du mécanisme, de façon à obtenir des résultats qualifiés dans ce Mémoire par les lettres V et v (115); mais, comme je ne m'étais pas astreint à distinguer ces valeurs et à les grouper en deux séries distinctes, il est très-certain que les valeurs en vitesse décroissante ont dû prédominer, parce que jamais elles ne peuvent manquer, tandis que les premières pouvaient ne pas réussir dès que le ressort était suffisamment détendu.

Il est probable aussi qu'il a dû se glisser un certain nombre de valeurs trop basses qualifiées *u*, non compensées par un nombre égal de valeurs U. En effet, lorsque le ressort arrivait à une certaine limite de détente, la vitesse ne pouvait plus croître au delà d'une valeur maximum; si ce maximum avait lieu immédiatement après une extinction, la réapparition avait lieu comme si la vitesse avait continué à croître, et l'observateur, à son insu, avait fait une observation *u*, croyant avoir obtenu une valeur V.

Le cas inverse d'un minimum de vitesse a dû être beaucoup plus rare.

Ces considérations suffisent, je pense, pour expliquer le sens et la valeur de la petite différence signalée plus haut entre l'approximation calculée alors et celle que donnerait la détermination actuelle. Une discussion plus étendue m'entraînerait beaucoup trop loin et n'aurait qu'un intérêt rétrospectif. Il paraît, toutefois, bien établi que la valeur $V = 298500$ est inférieure au résultat exact.

suffisamment remplies. C'est donc une approximation vraisemblable qui se déduit de l'ensemble des discussions sans qu'on puisse donner d'évaluation numérique rigoureuse de sa probabilité.

Je pense donc avoir atteint le but que je m'étais proposé (1).

Calcul de la parallaxe du Soleil.

297. Je me bornerai à donner succinctement les valeurs que l'introduction du résultat de mes expériences permet de déduire des diverses formules qui donnent la parallaxe du Soleil.

Équation de la lumière. — On désignait sous ce nom, au siècle dernier, le temps θ que met la lumière du Soleil à parcourir le rayon moyen R ou demi-grand axe de l'orbite terrestre. La discussion de mille éclipses des satellites de Jupiter a donné à Delambre $\theta = 493^s,2$ de temps moyen (*Tables écliptiques des satellites de Jupiter*, Introduction, p. vij). En appelant ε la parallaxe du Soleil, c'est-à-dire l'angle sous lequel on verrait du centre du Soleil le rayon équatorial ρ de la Terre, on a évidemment

$$R = V\theta, \quad \rho = R \operatorname{tang} \varepsilon, \quad \operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\rho}{V\theta}.$$

Si l'on substitue dans cette formule la valeur θ donnée par Delambre $\theta = 493^s,2$ la valeur $\rho = 6378^{\text{km}},233$, généralement adoptée, et la valeur $V = 300400^{\text{km}}$, résultat définitif de mes expériences, il vient

$$\varepsilon = 8'',881.$$

Aberration annuelle de la lumière. — Bradley, qui a découvert ce phénomène, a trouvé, pour la demi-élongation annuelle maximum α d'une étoile idéale située au pôle de l'écliptique, la valeur $\alpha = 20'',25$. D'après W. Struve, ce nombre devrait être porté à $20'',445$. Ce déplacement périodique apparent des étoiles est dû à la composition de la vitesse de la Terre dans son orbite avec la vitesse de la lumière; on obtient aisément l'expression de cette élongation en remarquant que les points les plus éloignés de l'orbite apparente décrite par l'étoile idéale correspondent aux deux positions où la vitesse de la Terre est maximum et minimum, c'est-à-dire au périhélie et à l'aphélie. L'équation de l'ellipse décrite par la Terre dans son mouvement par rapport au Soleil étant, en coordonnées polaires,

$$r = \frac{R(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

ν étant l'angle du rayon vecteur r avec la direction du grand axe (anomalie vraie), R le demi-grand axe ou distance moyenne, e l'excentricité.

D'autre part, les aires décrites étant proportionnelles au temps, on a $\frac{1}{2}r^2 d\nu = C dt$ avec $\pi R^2 \sqrt{1 - e^2} = CT$; car $\pi R^2 \sqrt{1 - e^2}$ représente l'aire de l'ellipse et T la durée de l'année sidérale.

Au périhélie et à l'aphélie, la Terre prend successivement les vitesses maximum et minimum u_1 et u_2 dans des directions opposées correspondant aux rayons vecteurs $r_1 = R(1 - e)$ et $r_2 = R(1 + e)$. L'expression des vitesses sur l'orbite est très-simple aux extrémités du grand axe, parce que l'élément d'arc au sommet est représenté par $r d\nu$. On en conclut

$$u = \frac{rd\nu}{dt} = 2 \frac{C}{r} = \frac{2\pi R^2 \sqrt{1 - e^2}}{Tr}$$

Substituant r_1 et r_2 , faisant la somme des deux valeurs de u correspondantes, il vient, en appelant α la demi-élongation annuelle,

$$2 \operatorname{tang} \alpha = \frac{u_1 + u_2}{V} = \frac{4\pi R}{TV \sqrt{1 - e^2}}$$

Substituant $R \operatorname{tang} \varepsilon = \rho$, il vient, pour la valeur de la parallaxe,

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{2\pi \rho}{TV \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tang} \alpha}$$

Les valeurs numériques des nouveaux éléments de la formule étant

$$T = 365^{\text{jours}}, 26 \times 86400 \text{ secondes de temps moyen,}$$

$$e = 0,017,$$

il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 8'',882 \quad \text{pour} \quad \alpha = 20'',25, & (\text{BRADLEY.}) \\ \varepsilon &= 8,798 \quad \text{»} \quad \alpha = 20,445. & (\text{W. STRUVE.}) \end{aligned}$$

298. Il ne m'appartient pas de discuter ici, au point de vue astronomique, quelle est la valeur la plus probable de la parallaxe solaire; je ne puis que renvoyer aux belles recherches de M. Le Verrier sur ce sujet (*), et rappeler qu'il a déduit de l'étude approfondie des perturbations du mouvement de Vénus et

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXV, p. 165, juillet 1872.

de Mars des valeurs très-concordantes dont la moyenne est 8",86. En voici succinctement l'énumération :

1° Par la considération des latitudes de Vénus aux instants de ses passages sur le Soleil en 1761 et 1769, $\varepsilon = 8",853$;

2° Par la discussion des observations méridiennes de Vénus dans un intervalle de cent six ans, $\varepsilon = 8",859$.

3° D'après l'observation de l'occultation par Mars de ψ_2 du Verseau, faite par Richer, Picard et Røemer, le 1^{er} octobre 1672, $\varepsilon = 8",866$.

On remarquera que, la parallaxe calculée d'après l'équation de la lumière de Delambre, la valeur de la vitesse de la lumière déduite de mes expériences est 8",880, bien voisine de 8",860, moyenne des trois valeurs précédentes.

Les deux valeurs déduites plus haut de la constante de l'aberration sont : $\varepsilon = 8",882$ pour $\alpha = 20",25$ (BRADLEY); $\varepsilon = 8,798$ pour $\alpha = 20,445$ (W. STRUVE).

La seconde est notablement trop faible, mais la première est identique à celle déduite de l'équation de la lumière; cette concordance des deux valeurs tient à une circonstance spéciale qu'il est nécessaire d'indiquer : les deux constantes astronomiques de l'aberration et de l'équation de la lumière ont entre elles une relation nécessaire, indépendante de la vitesse de la lumière et de la parallaxe du Soleil.

En effet, égalant les deux valeurs de $\text{tang } \varepsilon$ données par les deux formules

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{\rho}{V\theta} = \frac{2\pi\rho}{TV\sqrt{1-e^2}\text{tang } \alpha},$$

il vient

$$\text{tang } \alpha = \frac{2\pi\theta}{T\sqrt{1-e^2}}.$$

Telle est la relation nécessaire entre l'équation de la lumière θ et la constante de l'aberration α . Si l'on substitue dans cette formule $\theta = 493^s,2$, on trouve

$$\alpha = 20",257.$$

Par conséquent, la constante de Bradley est celle qui satisfait à cette relation nécessaire; la valeur de Struve s'en écarte de près de 0",20, c'est-à-dire de 1 pour 100. •

L'opinion généralement admise par les astronomes est que la valeur donnée par Struve est la meilleure; ce serait donc la valeur $\theta = 493,2$ de Delambre qui serait erronée de 1 pour 100 ou de 4^s,9 environ.

Je n'ai pas qualité pour trancher ces questions délicates. Je me permettrai, toutefois, une remarque sur l'importance théorique, à mon avis, très-inégale

de ces deux constantes qui, combinées avec la valeur de la vitesse de la lumière, permettent de calculer la parallaxe du Soleil, et sur la nécessité de déterminer surtout l'une d'elles pour obtenir cette parallaxe avec précision.

La première, l'équation de la lumière, correspond à un phénomène périodique bien défini, à savoir le retour des émergences ou des immersions des satellites de Jupiter, phénomène qui se passe dans l'intérieur d'un espace interplanétaire relativement restreint. Il se présente, il est vrai, quelques petites complications dans l'observation précise du phénomène lumineux, à cause des variations d'éclat de ces astres avec la distance, mais à l'aide de mesures photométriques spéciales on pourrait avoir raison de ces difficultés.

La seconde, la constante de l'aberration, correspond à un phénomène qui embrasse pour ainsi dire la totalité de l'espace sidéral, c'est-à-dire des régions dont la constitution optique nous est inconnue et qui est la résultante des vitesses de mouvements dont les lois sont ou inconnues ou mal déterminées, à savoir le mouvement propre du système solaire et celui des étoiles. La constante de l'aberration, telle qu'elle est actuellement déterminée, ne représente donc que sous toutes réserves le phénomène qu'on cherche à utiliser (*).

Aucune de ces objections ne se présente dans l'étude des éclipses des satellites de Jupiter; il y aurait donc grand intérêt à s'appliquer à l'observation de ces éclipses par tous les moyens que les progrès de l'Optique physique et astronomique mettent entre les mains des observateurs. J'ai eu l'occasion, à propos des présentes recherches, d'examiner la question, et si je ne craignais de sortir du cadre de ce Mémoire déjà trop étendu, je pourrais montrer que, sous beaucoup de rapports, le phénomène des éclipses est l'analogue du phénomène observé par la méthode de la roue dentée; l'analogie se poursuit même beaucoup plus loin qu'on ne l'imagine au premier abord. Ainsi on retrouve ces sortes d'ordres d'extinction, une loi analogue dans la variation de l'intensité de la lumière, les deux sortes d'erreurs personnelles à l'extinction et à la réapparition, la possibilité de les éliminer par la combinaison des données numériques déduites des immersions et des émergences, etc....

C'est donc dans l'étude très-approfondie des éclipses des satellites de Jupiter qu'on doit chercher la constante la mieux appropriée à la comparaison avec la vitesse de la lumière pour la détermination de la parallaxe du Soleil.

(*) Au moment de mettre sous presse, j'apprends que M. Yvon Villarceau, si compétent sur ces questions délicates, a développé ces considérations dans l'*Addition à la Connaissance des Temps pour 1878*. Je suis heureux d'être arrivé, par une voie différente, aux mêmes conclusions.

APPENDICE I.

Vérifications indirectes de la distance des stations. — Distance du Panthéon à l'Observatoire.

L'importance capitale de la détermination exacte de la distance des stations (117) m'a engagé à rechercher d'autres vérifications que je vais rapidement indiquer. Elles consistent à déterminer par diverses marches le plus petit côté du triangle *Panthéon-Observatoire-Montliéry*, qui a servi au contrôle de la distance de mes deux stations (126), contrôle déduit des données de la méridienne de 1792.

A cet effet, j'ai déterminé de plusieurs manières la distance horizontale de l'axe du Panthéon à un signal particulier fixé sur la face intérieure du parapet du nord de la terrasse (*Pl. II, fig. 4*), dans l'axe du bâtiment.

C'est un poteau cylindrique sur lequel fut enroulé et cloué un carton blanc entre deux anneaux de carton noir. Je l'appellerai *signal septentrional de l'Observatoire* et je le désignerai par SS, pour le distinguer du *signal méridional SM* de La Caille et Cassini, du *signal de Delambre SD*, placé au-dessus du puits, et du *signal idéal* de la cabane des appareils de la vitesse de la lumière SV, censé placé au foyer de l'objectif de la lunette d'émission et dont il a été parlé plus haut (126). J'aurais préféré prendre ce dernier point comme centre de station, mais, malheureusement, les constructions élevées sur la terrasse masquent plusieurs directions que j'ai utilisées : c'est ce qui m'a décidé à employer le nouveau signal SS.

J'ai relevé, au moyen du petit théodolite de Rigaud et avec les précautions nécessaires, une série d'angles horizontaux reliant l'Observatoire (signaux désignés), l'axe du Panthéon, la pointe de la pyramide de Montmartre, élevée en 1736 en vue des travaux de la méridienne de 1740, la flèche des Invalides et l'angle sud-est de la caserne C du mont Valérien. (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIV^e Cahier, p. 145.)

Voici le détail des mesures faites aux trois stations :

La verticalité de l'axe du cercle horizontal était réglée à chaque mesure : les lettres D et G signifient *cercle vertical à droite* et *cercle vertical à gauche*, pour indiquer la position de la lunette sur ses tourillons. Les tableaux suivants comprennent l'angle vrai, c'est-à-dire réduit avec tous les éléments nécessaires pour le calculer, en particulier les

lectures (moyenne des lectures, deux verniers opposés) des pointés sur chaque signal; ainsi que leur différence ou angle apparent des deux signaux. La réduction de chaque ligne de visée au signal voisin de la station est donnée à la suite des séries de lectures.

Station du Panthéon.

21 septembre 1874. — Théodolite placé dans la lanterne, à 1^m,659 de l'axe (*Pl. II, fig. 3*). La direction de cet axe, ou l'azimut du signal, est donné : série (*), par 182°50'; série (**), 162°20'; série (***), 163°30'; série (****), 90°0'.

O. Montlhéry (tour)-Observatoire SV : 19°37'38".			III. Mont Valérien-Pyramide : 64°27'35".				
G	0.20.35"	19.59.35"	19.39.0"	D	0.48.5"	65.15.35"	64.27.30"
	90.27.18	110.6.10	38.52		90.57.58	155.25.30	32
D	90.21.35	110.0.38	39.3	G	91.3.55	155.31.23	28
	0.23.33	20.2.35(*)	39.2		0.52.18	65.19.55(****)	37
Réd.	0",60	-1'20",52	Moy. 19.38.59	Réd.	-33",91	-30",63	Moy. 64.27.32
I. Observatoire SS-Pyramide : 137°40'6".			IV. Observatoire SV-Observatoire SS : 0°55'43".				
G	1.4.0"	138.53.8"	137.39.8"	G	0.36.50"	1.32.30"	0.55.40"
	90.59.33	228.38.38	5		90.10.15	91.6.3	48
D	91.5.8	228.44.18	10	G	44.47.20	46.43.18	58
	0.57.0	138.36.15(**)	15		135.28.5	136.23.48	43
Réd.	-1'25",41	-29",53	Moy. 137.39.10	Réd.	-1'18",80	-1'23",29	Moy. 0.55.47
II. Observatoire SS-Invalides : 78°5'38".							
G	0.57.33"	79.3.55"	78.6.22"				
	90.44.45	168.51.5	20				
D	90.38.53	168.45.20	27				
	1.22.20	79.28.45(***)	25				
Réd.	-1'22",32	-2'8",16	Moy. 78.6.24				

Station de Montmartre.

22 septembre 1874. — Instrument placé (1) sur la terrasse du moulin de la Galette. Distance à l'axe de la pyramide, 6^m,543, mesurée sous une inclinaison de 11°36' (moyenne de huit observations croisées). J'ai été obligé, pour arriver à ces données, de prendre comme repères deux angles opposés A et B d'une moulure de la base (*Pl. II, fig. 2*). L'azimut de la direction du signal est donné : série (*), par 257°6'; série (**), 257°10'.

(1) Elle porte l'inscription : L'AN MDCCXXXVI CET OBÉLISQUE A ÉTÉ ÉLEVÉ PAR ORDRE DU ROI POUR SERVIR D'ALIGNEMENT A LA MÉRIDIENNE DE PARIS DU CÔTÉ DU NORD.

V. Panthéon-Invalides : 34° 35' 57".				VII. Panthéon-Monthéry : 18° 17' 53".			
G	0. 38'. 13"	35. 14'. 50"	34. 36'. 37"	G	0. 28'. 30"	18. 50'. 23"	18. 21'. 53"
	90. 22. 38	124. 59. 18	40		90. 41. 33	109. 3. 20	47
D	90. 16. 48	124. 53. 30	42	D	90. 35. 38	108. 57. 35	57
	0. 47. 55	35. 24. 33	38		0. 8. 5	18. 30. 3	58
Réd.	4' 41", 60	40", 10	Moy. 34. 36. 39	Réd.	4' 41", 60	40", 42	18. 21. 54
VI. Panthéon-Observatoire SS : 8° 42' 25".				VIII. Panthéon-Mont Valérien : 87° 56' 57".			
D	0. 47'. 55"	9. 31'. 20"	8. 43'. 25"	D	0. 8'. 13"	88. 10'. 8"	88. 1'. 55"
	90. 26. 5	99. 9. 33	28		0. 34. 13	88. 36. 18	2. 5
G	90. 31. 45	99. 15. 15	30	G	90. 30. 3	178. 31. 55	1. 52
	0. 28. 24	9. 11. 43 (*)	19		90. 35. 50	178. 37. 48	1. 58
Réd.	4' 41", 60	3' 40", 40	Moy. 8. 43. 26	Réd.	0. 32. 48	88. 34. 50 (**)	2. 2
					4' 41", 60	— 29", 32	Moy. 88. 1. 59

Stations de l'Observatoire.

19 septembre 1874. — Centre de station dans la cabane, au foyer de l'objectif de la lunette d'émission (voir n° 126).

IX. Panthéon-Monthéry : 159° 17' 36".				X. Panthéon-Pyramide : 32° 49' 21".			
G	1. 36'. 30"	160. 54'. 3"	159. 17'. 33"	D	0. 59'. 55"	33. 49'. 35"	32. 49'. 40"
	90. 37. 33	249. 55. 10	37		91. 0. 3	123. 49. 48	45
D	90. 31. 45	249. 49. 20	35	G	91. 6. 35	123. 56. 10	35
	0. 30. 58	159. 48. 38	40		1. 11. 25	34. 1. 10	45
Réd.	0", 00	0", 00	Moy. 159. 17. 36		0", 00	0", 00	Moy. 32. 49. 40

24 septembre 1874. — Instrument placé à 0^m,43 du signal septentrional SS et à 0^m,10 de l'axe du bâtiment, dans la direction du sud-sud-est (fig. 4). La direction de la pyramide de Montmartre donne exactement celle du nord.

XI. Pyramide-Panthéon : 33° 37' 34".				XIII. Mont Valérien-Panthéon : 99° 37' 4".			
G	0. 26'. 28"	34. 3'. 15"	33. 36'. 47"	D	0. 22'. 13"	99. 58'. 20"	99. 36'. 7"
	90. 22. 50	123. 59. 35	45		90. 27. 55	190. 3. 55	0
D	90. 17. 8	123. 53. 45	37	G	90. 22. 15	189. 58. 23	8
	0. 20. 3	33. 56. 50	47		0. 19. 53	99. 56. 0	7
Réd.	0", 36	50", 76	Moy. 33. 36. 44	Réd.	— 7", 19	50", 76	Moy. 99. 36. 6
XII. Invalides-Panthéon : 74' 21' 31".							
D	0. 46'. 28"	75. 6'. 55"	74. 20'. 27"				
	90. 30. 45	164. 51. 18	23				
G	90. 36. 13	164. 56. 40	27				
	0. 36. 8	74. 56. 38	30				
Réd.	— 13", 12	50", 76	Moy. 74. 20. 27				

XIII.

A. 39

8 décembre 1876. — Pour compléter la symétrie dans la réduction des distances au signal septentrional, j'ai relevé la direction de ce signal et d'une petite pièce de charpente située au-dessus du puits, le théodolite étant dans la même position que le 19 septembre 1874.

	XIV. Observatoire SS-Panthéon : $67^{\circ}20'$.				XV. Observatoire SD-Panthéon : $115^{\circ}41'$.		
G	$48^{\circ}26'$	$115^{\circ}46'$	$67^{\circ}20'$	G	$0^{\circ}5'$	$115^{\circ}46'$	$115^{\circ}41'$
	138.21	205.41	67.20		90.0	205.41	115.41
Réd.	0	0					

CALCUL DE LA DISTANCE OBSERVATOIRE SS-PANTHÉON.

1^o Triangle Observatoire SS-SV-Panthéon.

Ce n'est qu'un triangle de réduction pour ramener la distance du Panthéon au foyer de la lunette d'émission (déduite du triangle Observatoire SV-Panthéon-Montlhéry, triangle qui a servi à contrôler la distance de mes stations, voir n^o 126) à la distance Observatoire SS-Panthéon.

La distance SV-Panthéon, calculée d'après la donnée de la méridienne de 1790 empruntée à Delambre et les angles $O = 19^{\circ}37'38''$ et $IX = 159^{\circ}17'36''$, est égale à $1284^m,183$; si on la prend comme base d'un triangle de réduction avec les angles $IV = 0^{\circ}55'43''$ et $XIV = 67^{\circ}20'$, on en conclut : Observatoire SS-Panthéon, $1275,720$; comme vérification, le petit côté, distance des deux signaux SS, SV, calculé par le même triangle, égale $22^m,405$; relevé sur le plan, dont la *fig. 4* est la réduction à moitié, j'ai trouvé $22^m,35$.

2^o Triangle Panthéon-Pyramide-Observatoire SS.

Les trois angles de ce triangle ont été observés : $I = 137^{\circ}40'6''$, $VI = 8^{\circ}42'25''$, $XI = 33^{\circ}37'34''$; leur somme dépasse 180 degrés de 5 secondes. Au lieu de répartir l'erreur sur les trois angles, je l'ai fait porter tout entière sur l'angle VI, dont la réduction au signal est moins certaine.

La distance Observatoire SS-pyramide se déduit du nombre $2927^t,25 = 5705^m,32$ donnée dans la *Méridienne vérifiée*, page 125, comme distance entre la pyramide et le signal de Cassini et La Caille SM : il suffit de retrancher $31^m,78$, distance de ce signal SM au signal septentrional SS pour avoir le côté que j'ai adopté comme base. Le calcul donne, pour la distance Observatoire SS-Panthéon, $1275^m,173$.

3^o Triangle Invalides-Panthéon-Observatoire SS.

Le côté Invalides-Panthéon égale $1362^t,5 = 2686^m,3$ est emprunté à Delambre (*Base*

du système métrique, t. III, p. 415); on en déduit, en remplaçant les angles $\text{II} = 78^{\circ} 5' 38''$ et $\text{XII} = 74^{\circ} 21' 31''$, Observatoire SS-Panthéon, 1275^m, 384.

4° Triangle Observatoire SS-SD-Panthéon.

C'est un triangle de réduction : la distance du Panthéon à l'Observatoire, déduite par Delambre de données assez indirectes (*Base du système métrique*, t. II, p. 415), est égale à 660^t, 2 = 1286,754 : c'est la distance horizontale de l'axe du Panthéon au signal de l'observatoire placé sur le puits (ouverture traversant toutes les voûtes, jusqu'aux caves, au centre du bâtiment). J'ai mesuré la distance du centre de ce puits SD au signal SM de Cassini, j'ai trouvé 15^m, 10; retranchant cette quantité de la distance déjà calculée de SS à SM, 31^m, 78, il reste pour SD-SS égale 16^m, 68. On forme un triangle de réduction avec ces deux côtés et l'angle Panthéon-Pyramide observé du signal septentrional SS, c'est-à-dire $\text{XI} = 33^{\circ} 37' 34''$, car la ligne des deux signaux SD, SS coïncide avec l'axe du bâtiment ou la direction de la pyramide.

On en conclut : Observatoire SS-Panthéon, 1272,89.

Résumons toutes ces déterminations du côté Panthéon-Observatoire SS (signal septentrional) :

Distance Panthéon-Observatoire SS.

Base employée.

1275^m, 72. Distance Panthéon-Monthéry, méridienne 1790.

Valeurs de contrôle.

1275^m, 17. Distance Observatoire-pyramide, méridienne 1740.

1275^m, 38. Distance Panthéon-Invalides, méridienne 1790.

1272^m, 89. Calculs indirects de Delambre.

La concordance de la première valeur avec les deux suivantes est très-satisfaisante, mais il y a près de 3 mètres de différence avec celle obtenue indirectement par Delambre en vue du calcul de la différence de latitude entre l'Observatoire et le Panthéon. Delambre ne paraît pas, du reste, bien convaincu de la précision de cette distance, car il ajoute (t. II, p. 420) : « Il est bien démontré qu'il n'en peut résulter 0^o, 1 d'incertitude sur la latitude du Panthéon; c'est tout ce que l'on peut désirer. » Je puis donc laisser de côté cette valeur divergente et admettre que mon triangle de vérification (126) est exact : c'est donc un contrôle important de la distance des deux stations.

Distance de l'École Polytechnique au Mont Valérien.

J'ai profité de ces triangulations pour vérifier la distance des deux stations que j'avais employées dans mes premières expériences entre l'École Polytechnique et le mont Valé-

rien (nos 1 et 296). A cet effet, du pilier ouest de la terrasse de l'École Polytechnique, j'ai observé les directions de l'axe du Panthéon, de l'angle sud-est de la caserne C du mont Valérien, de la flèche des Invalides et de la pointe de la pyramide de Montmartre (voir *Pl. II, fig. 1*), avec un petit théodolite de Brüner à lunette excentrique, donnant les 10 secondes. Voici le détail des observations :

Station de l'École Polytechnique.

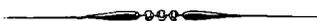
19 janvier 1875. — Instrument posé sur le centre du pilier qui est à l'extérieur de la cabane du belvédère.

XVI. Panthéon-Pyramide : 104° 0' 40".			XVIII. Mont Valérien-Invalides : 1° 16' 10".				
D	1.24.35"	105.26.33"	104. 1.58"	D	1.14.50"	2.30.50"	1.16. 0"
G	1. 9.48	105.29.10	103.59.22	G	0.57.33	2.13.40	7
D	90.56. 5	194.55.43	103.59.38	D	92.44.55	94. 1.15	20
G	91.11.23	195.13. 3	104. 1.40	G	93. 2.13	94.18.23	10
XVII. Panthéon-Mont Valérien : 42° 12' 31".							
D	91.11.18"	133.25. 0"	42.13.42"				
G	90.56.13	133. 7.38	11.25				
G	0.53. 3	43. 4.23	11.20				
D	1. 8.20	43.21.55	13.35				

D'après les données des premiers tableaux (angles III et VIII), j'ai calculé d'abord le triangle *Panthéon-pyramide-mont Valérien*, en prenant pour base la distance du Panthéon à la pyramide égale 4665^m,594, déduite elle-même du triangle *Panthéon-pyramide-Observatoire SS*, dont les trois angles ont été observés (triangle n° 2); on obtient :

Angles.	Côtés opposés.
Panthéon.....	III = 64.27.35"
Pyramide.....	VIII = 87.56.57
Mont Valérien.....	conclu = 27.35.28
	90 888 ^m ,89
	10 066,76
	4 665,59

Par la méthode des segments capables, et en employant les angles XVI et XVII, j'ai calculé la distance du pilier de l'École Polytechnique à l'angle sud-est de la caserne C du mont Valérien (voir *Journal de l'École Polytechnique*, XLIV^e cahier, p. 166) égale 10307^m,3; la réduction de cette distance à celle de mes deux stations n'est que de + 3^m,25; elle devient 10310,6; j'avais adopté D = 10310^m. La vérification est donc complète. Comme contrôle, j'ai calculé la distance du pilier à l'axe du Panthéon égale 327^m,75. Sur le plan de la ville de Paris, à l'échelle du $\frac{1}{5000}$, j'avais mesuré 326 mètres, à 1 ou 2 mètres près : il n'y a donc pas d'erreur matérielle dans le calcul.



APPENDICE II.

Remarques sur quelques critiques relatives aux présentes expériences.

A l'époque où j'ai présenté à l'Académie des Sciences le résumé de ces expériences et de ces mesures, il a paru, dans quelques journaux scientifiques et autres, quelques comptes rendus où les chroniqueurs signalèrent diverses objections ou sources d'erreur. Voici celles qu'ils paraissaient considérer comme devant entacher les résultats :

- 1° L'influence de la vapeur d'eau de l'atmosphère ;
- 2° Le retard causé par la réflexion sur le miroir de la station opposée.

Les études de Biot, les mesures très-précises exécutées en 1852 par M. Fizeau (*OEuvres complètes* d'Arago, t. XI, p. 724), et celles de M. Jamin (*Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LII, p. 171) ont démontré que la différence d'indice de réfraction entre l'air sec et l'air humide est d'un ordre absolument négligeable pour la réduction au vide de la vitesse de la lumière dans l'air.

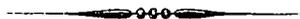
La deuxième objection n'est pas plus sérieuse que la première. Sans préjuger la valeur du temps nécessaire à la réflexion de la lumière sur une surface polie, il est facile de voir que, s'il y a quelque erreur de ce genre à craindre avec la méthode du miroir tournant, il n'y en a aucune avec la méthode de la roue dentée. En effet, comparons l'expérience dans les deux cas : dans le premier, on opère sur une petite distance d , avec des réflexions multiples au nombre de n ; dans le second, avec une distance considérable D et une seule réflexion; on peut remplacer le retard θ , dû à la réflexion, par la valeur réduite x en distance parcourue $V\theta = x$, V étant la vitesse vraie de la lumière, et reporter l'erreur sur l'espace parcouru, au lieu de le compter sur le temps. Cette erreur sera de nx sur d dans le premier cas, et de x sur D dans le second. Si l'on substitue $n = 12$ et $d = 40^m$, comme dans celles de Foucault, $D = 22910^m$, comme dans mes expériences, le rapport des erreurs est d'environ de 7000 à 1. Il faudrait donc qu'on trouvât une valeur absurde avec la méthode du miroir tournant pour que cette cause d'erreur commençât à devenir sensible avec la roue dentée. Par exemple, si l'on avait $x = 3^m, 33$, on trouverait une vitesse erronée de la moitié de sa valeur avec le miroir tournant : l'erreur serait seulement de $\frac{1}{7000}$ par l'autre méthode.

Enfin il me reste à parler d'un document, dans lequel le présent travail me paraît traité d'une manière bien peu favorable : c'est un Rapport relatif à quelques-uns de mes travaux scientifiques, publié dans le Compte rendu de la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences du 27 décembre 1875 (t. XXXI, p. 1317). Le rapporteur, M. Jamin, laisse entendre, de la façon la moins équivoque, que je n'ai guère eu d'autre mérite que de répéter des expériences bien connues, en profitant d'un heureux concours de circonstances. Je ne m'arrêterai pas à réfuter cette thèse : M. Jamin a été mon maître et je suis depuis bientôt dix ans son collègue à l'École Polytechnique. Je me bornerai donc à protester contre un bon nombre d'appréciations énoncées dans ce Rapport et me contenterai d'en citer textuellement la conclusion :

« ... Sans doute, elle (la Commission) a su apprécier l'art avec lequel MM. Cornu et Baille ont mesuré l'attraction de deux masses; mais elle ne peut oublier qu'ils reproduisaient simplement l'expérience de Cavendish, pour retrouver, en fin de compte, le résultat déjà connu. Nous en dirons autant de la mesure de la vitesse de la lumière.

» La méthode avait été imaginée par M. Fizeau, qui réussit à la mettre en exécution entre Suresnes et Montmartre, mais auquel ont manqué les ressources expérimentales qu'un heureux concours de circonstances a mis dans les mains de M. Cornu. Dans ces conditions, la Commission a dû se demander quelle était la part de l'inventeur des méthodes : elle domine tout; quelle est celle du constructeur : elle n'est pas négligeable, puisqu'il fournit les moyens d'exécution; enfin quelle est celle de M. Cornu?... »

Pour répondre à ces questions je m'en remets au lecteur. Si sévère qu'il soit pour les imperfections de mon travail, j'ose croire qu'il sera plus bienveillant et surtout plus équitable que le rapporteur dans la part qu'il voudra bien m'accorder.



LÉGENDE EXPLICATIVE DES PLANCHES.

PLANCHE I.

- Fig. 1.* — Description succincte de la méthode de la roue dentée (nos 2, 74-78).
- Fig. 2, 3, 4, 5.* — Analyse physique des extinctions et réapparitions (24 à 31).
- Fig. 6, 7.* — Représentation graphique de l'intensité lumineuse (29 à 32).
- Fig. 8.* — Obtention d'un rapport donné du plein au vide (32).
- Fig. 9, 10, 11.* — Influence des inégalités de largeur des dents (39, 40).
- Fig. 12 à 18.* — Note du n° 71.
- Fig. 16, 17.* — Étude des phases critiques (54 et 55).
- Fig. 18.* — Note du n° 71.
- Fig. 19, 20, 21.* — Analyse du retour des rayons (79 à 81).
- Fig. 22 à 28.* — Cas où le point lumineux de retour a un diamètre sensible (91 à 100).
- Fig. 29, 30, 31.* — Représentation géométrique des erreurs personnelles (113, 114 et 240).

PLANCHE II.

- Fig. 1.* — Plan au $\frac{1}{2000}$ des triangles mesurés pour la vérification de la distance des deux stations (125, 126 et Appendice I).
- Fig. 2.* — Plan au $\frac{1}{200}$ de la station de Montmartre (Appendice I), avec les directions visées : A, B arêtes inférieures de la base de la pyramide de Cassini et la Caille.
- Fig. 3.* — Station dans la lanterne du Panthéon, échelle $\frac{1}{200}$ (Appendice I). Les parties figurées en noir sont les murs ; les autres sont les fenêtres vitrées.
- Fig. 4.* — Plan au $\frac{1}{200}$ de la moitié orientale de la terrasse supérieure de l'Observatoire de Paris : sur l'axe du bâtiment, qui est dirigé suivant la méridienne, sont les emplacements des trois signaux

(n^{os} 122, 125 et Appendice I), et en particulier le signal septentrional auquel j'ai rapporté les mesures d'angle faites à l'Observatoire.

La cabane contenant les appareils pour la vitesse de la lumière y est figurée en plan : la lunette SO (128) est dirigée vers la tour de Montlhéry, c'est-à-dire parallèlement à la droite AB, figurant la ligne de visée des opérations de 1740. Dans l'intérieur de la cabane on voit la position de la lampe Drummond en L, des tables TT', le pilier B portant le coussinet avec les vis de rectification (fig. 8) (128); les fig. 7 et 10 donnent deux coupes verticales de la cabane. C représente un massif de cheminées et V une cage d'escalier vitrée (121).

Fig. 5. — Plan au $\frac{1}{2000}$ de la plate-forme de la tour de Montlhéry, orienté comme tous les plans de la même Planche : les lignes ponctuées représentent les contours des murs à un niveau inférieur, en particulier l'escalier de la tourelle (124) et le mur en ruine du bas de la tour où Delambre avait placé son signal (125).

AB est le tuyau de fonte dans lequel est logé le collimateur à réflexion (133); CD le petit mur en briques à jour qui protège l'ouverture du tuyau.

Fig. 6. — Fac-simile d'une portion de la Pl. X de la *Méridienne vérifiée*, représentant les triangles géodésiques qui relient l'Observatoire à Montlhéry et à la base Villejuif-Juvisy (123).

Fig. 7. — Coupe verticale de la cabane suivant l'axe de la lunette.

L'observateur est représenté au moment où il exécute une expérience, l'œil à l'oculaire, la main droite manœuvrant le frein du mécanisme de la roue, et la main gauche derrière l'appareil manœuvrant la clef électrique.

La lunette repose sur les deux piliers B, C, par l'intermédiaire des coussinets B', C' (fig. 8 et 9) (128). On aperçoit sur le pilier A, qui est creux (fig. 11), le mécanisme de la roue dentée, et en pointillé les chaînes et le poids moteur (139-143 et 178). Sur une table, entre les piliers A et B le cylindre enregistreur (145); derrière le pilier B, se trouvent, posés sur des planchettes convenables (153), le relai (151), le pendule battant la demi-seconde (152) et le trembleur subdiviseur (153).

On aurait pu représenter ces appareils sur la fig. 10, mais la petitesse de l'échelle aurait amené des confusions.

Fig. 8 et 9. — Coussinets en fonte B' et C' posés sur les piliers B et C pour soutenir la lunette : B' porte les trois vis de rectification de l'axe optique (128, 129).

Fig. 10. — Coupe verticale et transversale de la cabane passant par le foyer de la lunette : on voit le pilier A et sa partie creuse où sont logés les chaînes et les poids du mécanisme : le mécanisme est posé au-dessus, en avant de la lunette, qui se projette en raccourci suivant des cercles : les détails sont presque invisibles; toutefois on aperçoit, dirigé vers la lampe (lanterne Duboscq), le tube de l'oculaire éclaireur.

Fig. 11. — Projection horizontale du pilier A avec son évidement intérieur, ménagé pour chute du poids moteur du mécanisme.

Fig. 12. — Aspect de la tour de Montlhéry vue du Panthéon : l'aspect serait le même pris de l'Observatoire, si quelques arbres situés sur un côteau à mi-chemin ne cachaient pas le pied de la tour.

PLANCHE III.

(Les mêmes lettres indiquent les mêmes organes dans les trois figures.)

Fig. 1. — Perspective du mécanisme moteur de la roue dentée (139-143). Le mécanisme repose, par trois vis calantes, sur une plaque de fonte scellée sur le pilier A (*Pl. II, fig. 7 et 11*), par l'intermédiaire de disques de plomb, posés eux-mêmes sur une plaque de plomb couvrant celle de fonte, afin d'amortir les trépidations aux grandes vitesses.

L'observateur place son œil en O dans l'axe de la lunette dont la partie oculaire seule est représentée, manœuvre de la main droite le bouton Y qui gouverne le frein (142), et de la main gauche le manipulateur X, ou clef de Morse, pour la formation des signaux électriques (154, 178).

La source de lumière est à la gauche de l'observateur et arrive dans la direction du tube GFD de l'oculaire éclaireur.

Fig. 2. — Plan de l'oculaire éclaireur (130, 173-176) et coupe de la partie du mécanisme montrant la position B'B'' de la roue dentée. P est un simple contre-poids destiné à équilibrer le tube de l'éclaireur et son support coudé Q.

La ligne ponctuée représente la projection du socle du mécanisme, socle dont la forme n'est donnée qu'incomplètement dans les autres figures; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, ses trois vis calantes.

Fig. 3. — lame réfléchissante et transparente (130, 173) avec ses deux réglages: m' est le bouton de serrage du levier qui commande la rotation autour de l'axe vertical; m'' l'écrou de la vis qui fait basculer la lame autour de l'axe horizontal.

PLANCHE IV.

(Les mêmes lettres indiquent les mêmes organes dans toutes les figures.)

Fig. 1. — Projection horizontale de la partie inférieure du mécanisme de la roue dentée (139-141), la partie supérieure étant supposée enlevée.

Fig. 2. — Coupe verticale et longitudinale du mécanisme (139-143).

Fig. 3. — Coupe verticale transversale du mécanisme (139-143) passant par le plan de la roue J (*fig. 1 et 2*): la platine postérieure W'W' de la partie supérieure est vue derrière la roue dentée, ainsi que l'ouverture semi-annulaire, mieux visible dans la perspective (*Pl. III, fig. 1*), destinée au passage des rayons lumineux.

Fig. 4. — Détail du contact électrique destiné à l'enregistrement automatique de la loi du mouvement du mécanisme (141).

Fig. 5. — Détail du frein (142) manœuvré par une vis dont la tête dépasse à l'extérieur et est désignée par Y dans la perspective (*Pl. II, fig. 1*) de l'appareil.

PLANCHE V.

(Les mêmes lettres désignent les mêmes organes dans cette Planche et dans les détails relatifs à cet appareil, représentés *fig.* 1, 2 et 3 de la *Pl. VI*).

Perspective de l'appareil enregistreur (145, 148). Le cylindre a 0^m,50 de long sur 0^m,95 de circonférence, de sorte que l'appareil est représenté au quart environ de sa grandeur réelle.

Les deux manettes DD servent à l'observateur placé en arrière de l'appareil pour soulever le cylindre (150) lorsque les tracelets sont eux-mêmes relevés.

Les cinq bornes désignées par T (nos 4, 3, 2, 1) établissent les communications respectivement avec le fil de terre et les électro-aimants des tracelets de même nom (154).

Un fac-simile des quatre systèmes de signaux se trouve plus loin (*Pl. VI, fig.* 9).

PLANCHE VI.

[Pour les *fig.* 1, 2, 3, qui représentent les détails de diverses pièces de l'appareil enregistreur (*Pl. V*), les mêmes lettres correspondent aux mêmes organes.]

Fig. 1. — Disposition du levier à manette dans la position où le cylindre enregistreur est soulevé : Z cliquet de sûreté (150).

Fig. 2. — Élévation de la pièce mobile du chariot qui renferme les quatre électro-aimants, leurs tracelets et les pièces de rectification (148-149) : l'ordre des nos 1, 2, 3, 4 a été par mégarde renversé sur cette figure; il faut substituer l'ordre inverse pour être en concordance avec la *Pl. V* et l'ordre des signaux par rapport au sens du mouvement.

Fig. 3. — Coupe verticale du chariot par le plan médian (148-149). Même remarque que ci-dessus pour l'ordre des nos 1, 2, 3, 4.

Fig. 4, 5, 6, 7. — Théorie de la liaison synchronique des systèmes oscillants (162-171).

Fig. 8. — Élévation et coupe du microscope à grossissement variable pour le relevé micrométrique des signaux (186-189).

Fig. 9. — Fac-simile du tracé graphique relatif à une observation double : c'est l'observation n° 143 du tableau général (184-190); il est bien entendu que les traits noirs sur fond blanc de la figure correspondent, sur les feuilles de tracés graphiques, à des traits blancs sur fond noir.

Fig. 10. — Micromètre gravé sur verre placé à l'oculaire du microscope (189) et mû par une vis pour obtenir les très-petits déplacements nécessaires à la précision de la coïncidence.

Fig. 11. — Apparence vue dans le microscope à grossissement variable dans le relevé du signal désigné par c dans le fac-simile (*fig.* 9) (184) : les chiffres 8 et 9 sont renversés ainsi que la lettre c, mais ce renversement n'a aucun inconvénient pour le relevé micrométrique. Comme dans

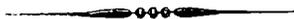
la réalité, les traits sont représentés en blanc sur fond noir; dans la *fig. 9*, représentant le fac-simile, c'était l'inverse de la réalité : les traits noirs représentaient les traits blancs.

PLANCHE VII.

Fig. 1 et 2. — Coupe verticale et élévation du pendule battant la demi-seconde (152). Échelle $\frac{2}{3}$. Les lettres se correspondent sur les deux figures.

Fig. 3. — Plan du trembleur-subdiviseur (153). Échelle $\frac{2}{3}$.

Fig. 4. — Élévation du relai battant la seconde transmise électriquement par la pendule (151). Échelle $\frac{2}{3}$.



Determination de la Vitesse de la Lumière, par M. A. Cornu.



Fig. 1



Fig. 7

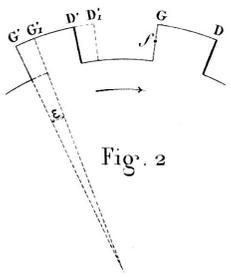


Fig. 2

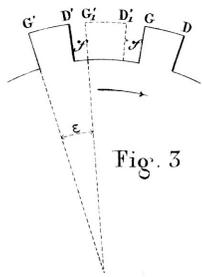


Fig. 3

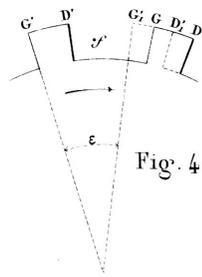


Fig. 4

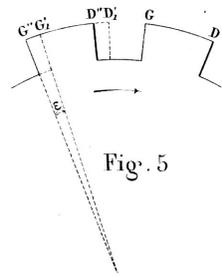


Fig. 5

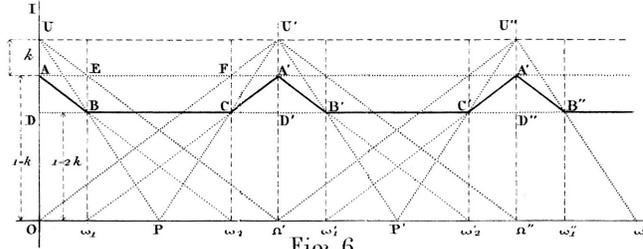


Fig. 6

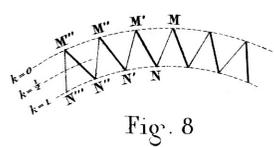
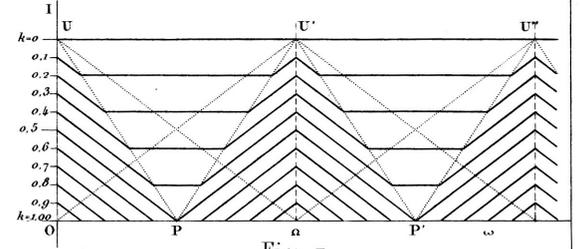


Fig. 8

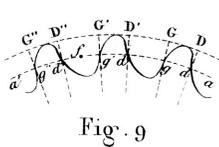


Fig. 9

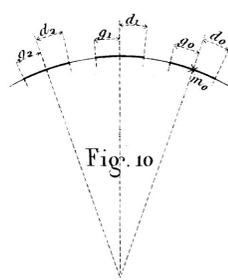


Fig. 10

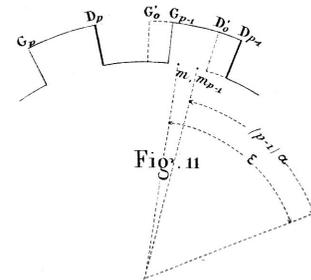


Fig. 11

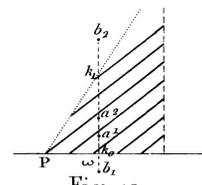


Fig. 12

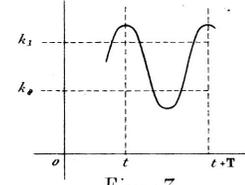


Fig. 13

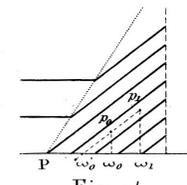


Fig. 14

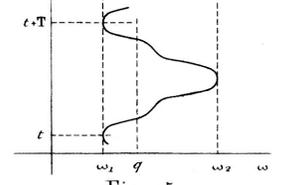


Fig. 15

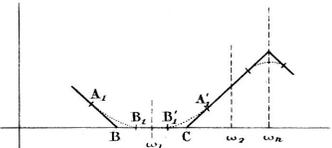


Fig. 16

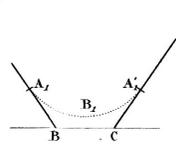


Fig. 17

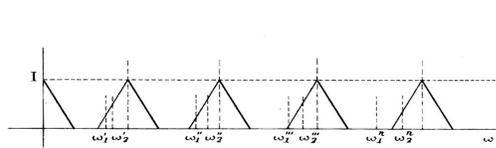


Fig. 18

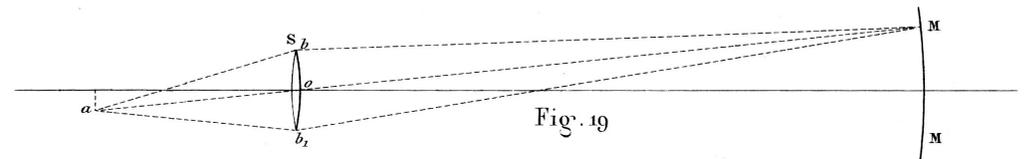


Fig. 19



Fig. 20

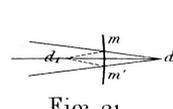


Fig. 21

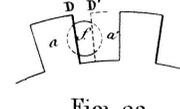


Fig. 22

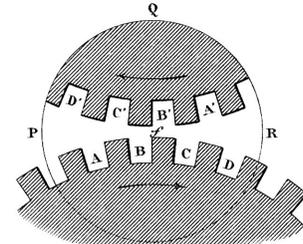


Fig. 25

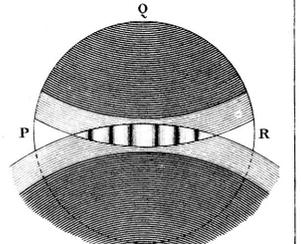


Fig. 24

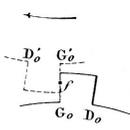


Fig. 25

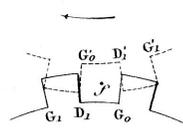


Fig. 26

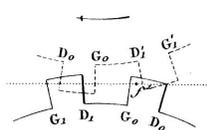


Fig. 27

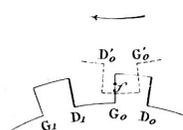


Fig. 28

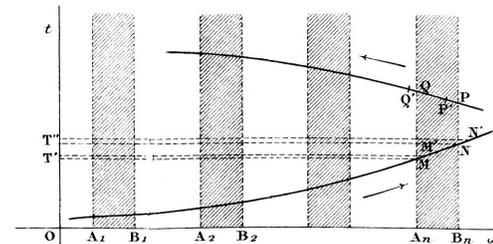


Fig. 29

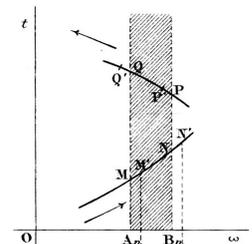


Fig. 30

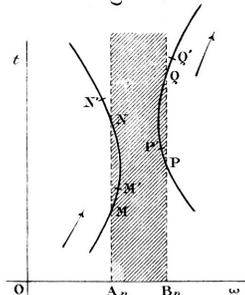
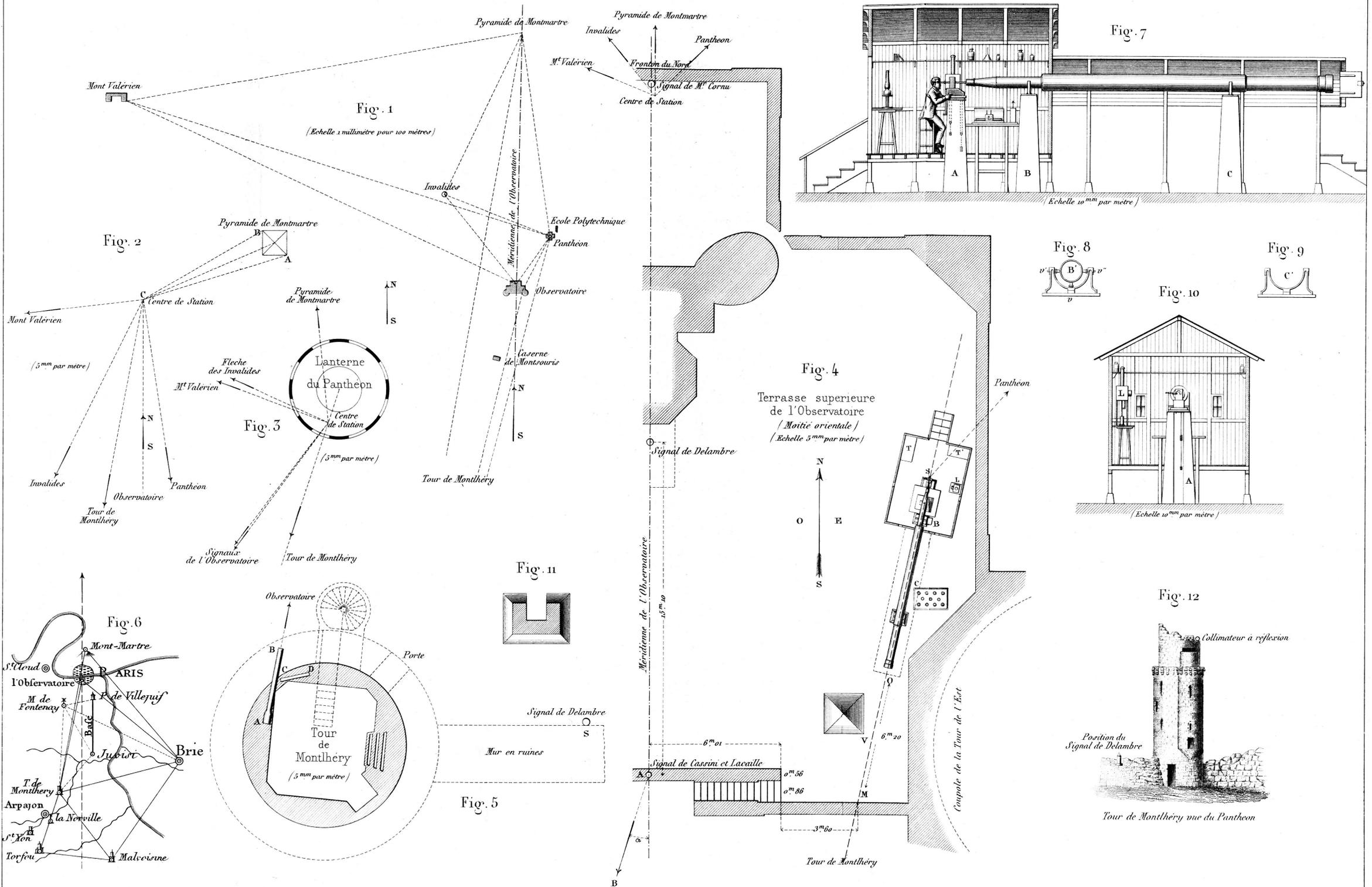


Fig. 31

Détermination de la Vitesse de la Lumière, par M. A. Cornu.



Détermination de la Vitesse de la Lumière; par M. A. Cornu.

Fig. 1

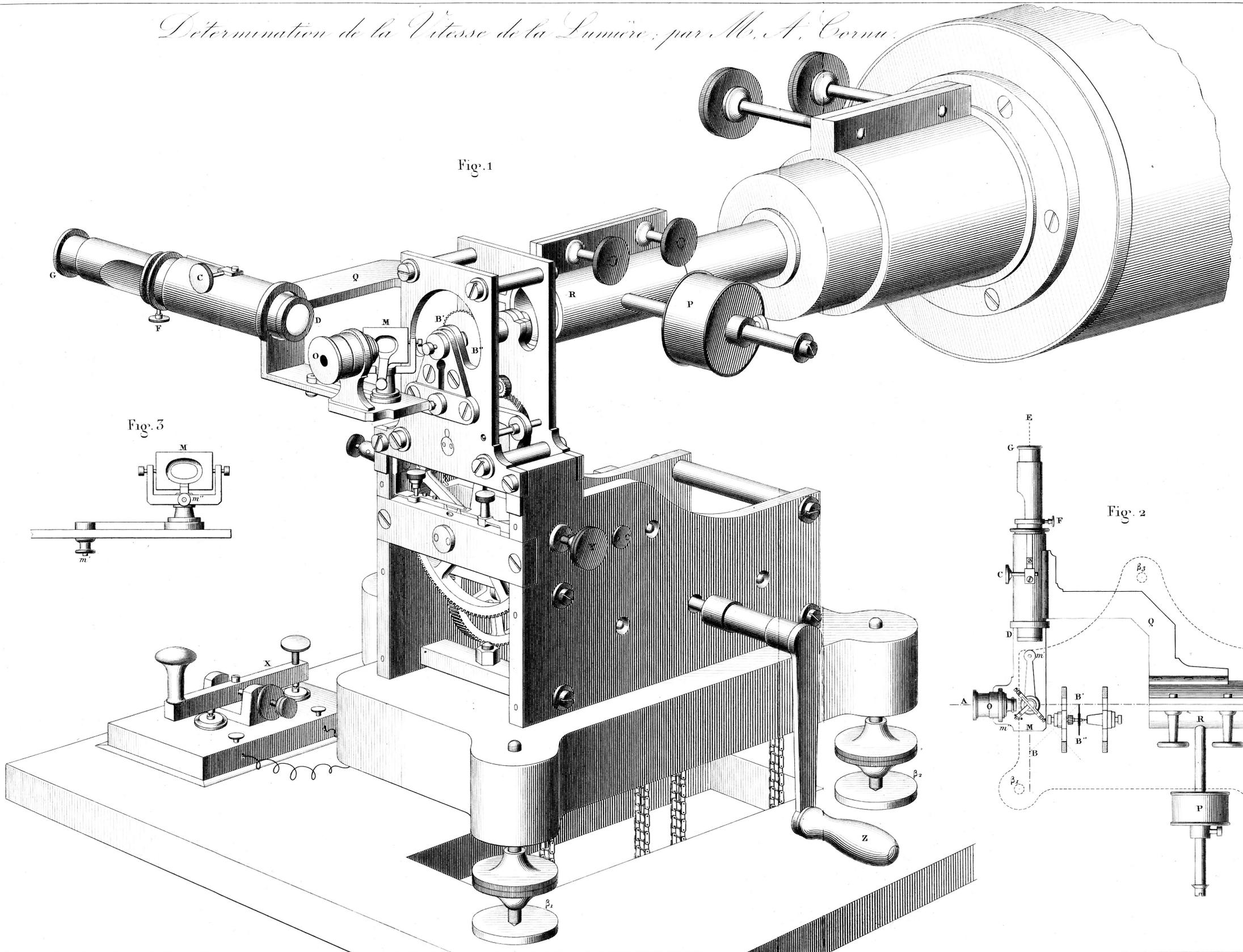


Fig. 3

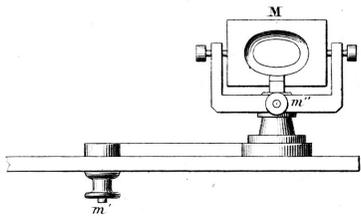
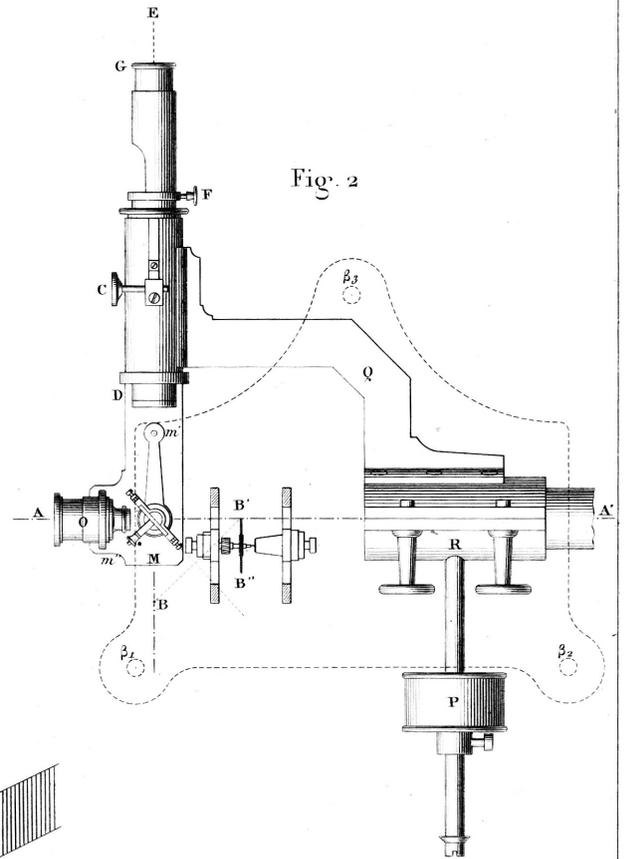
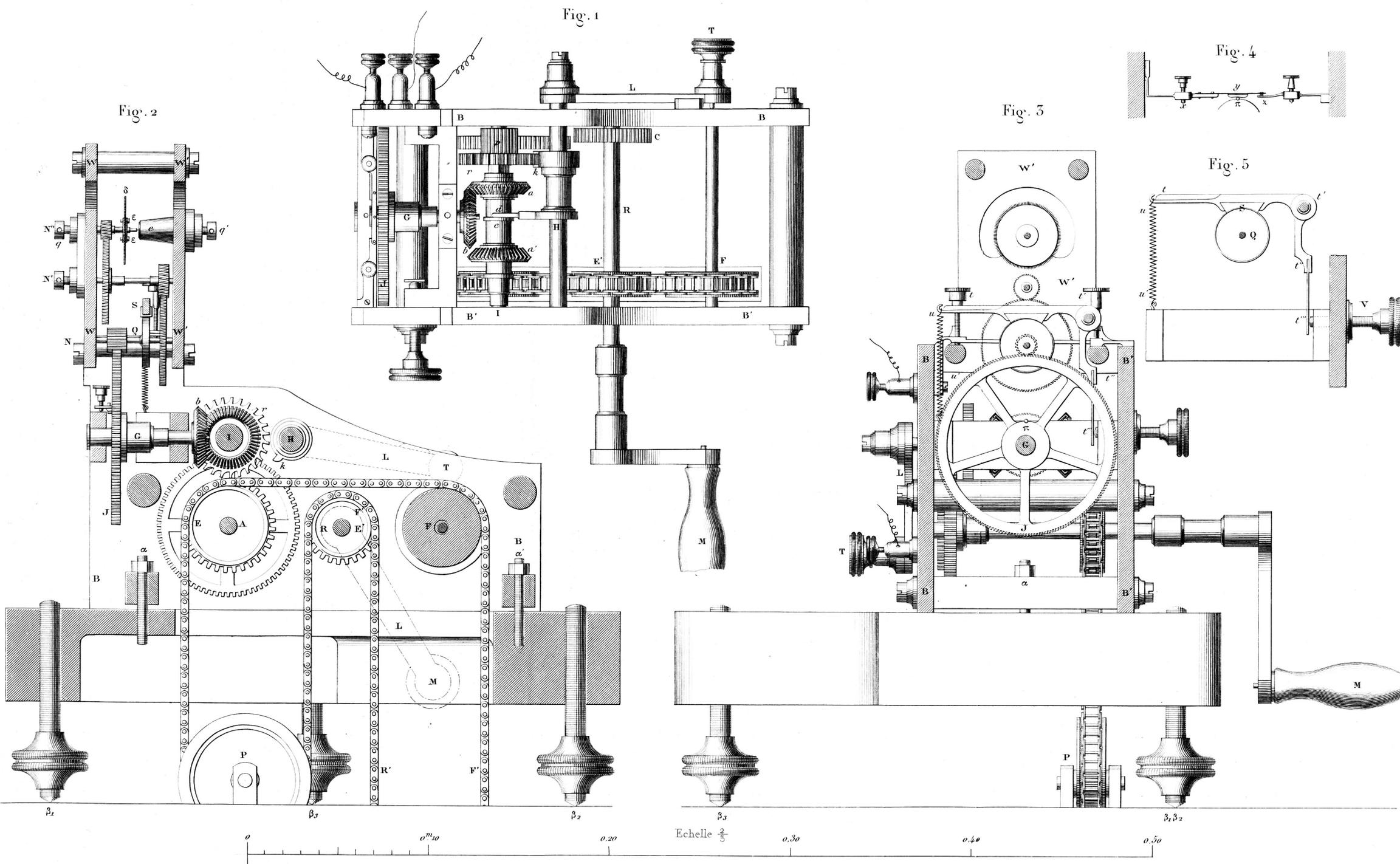


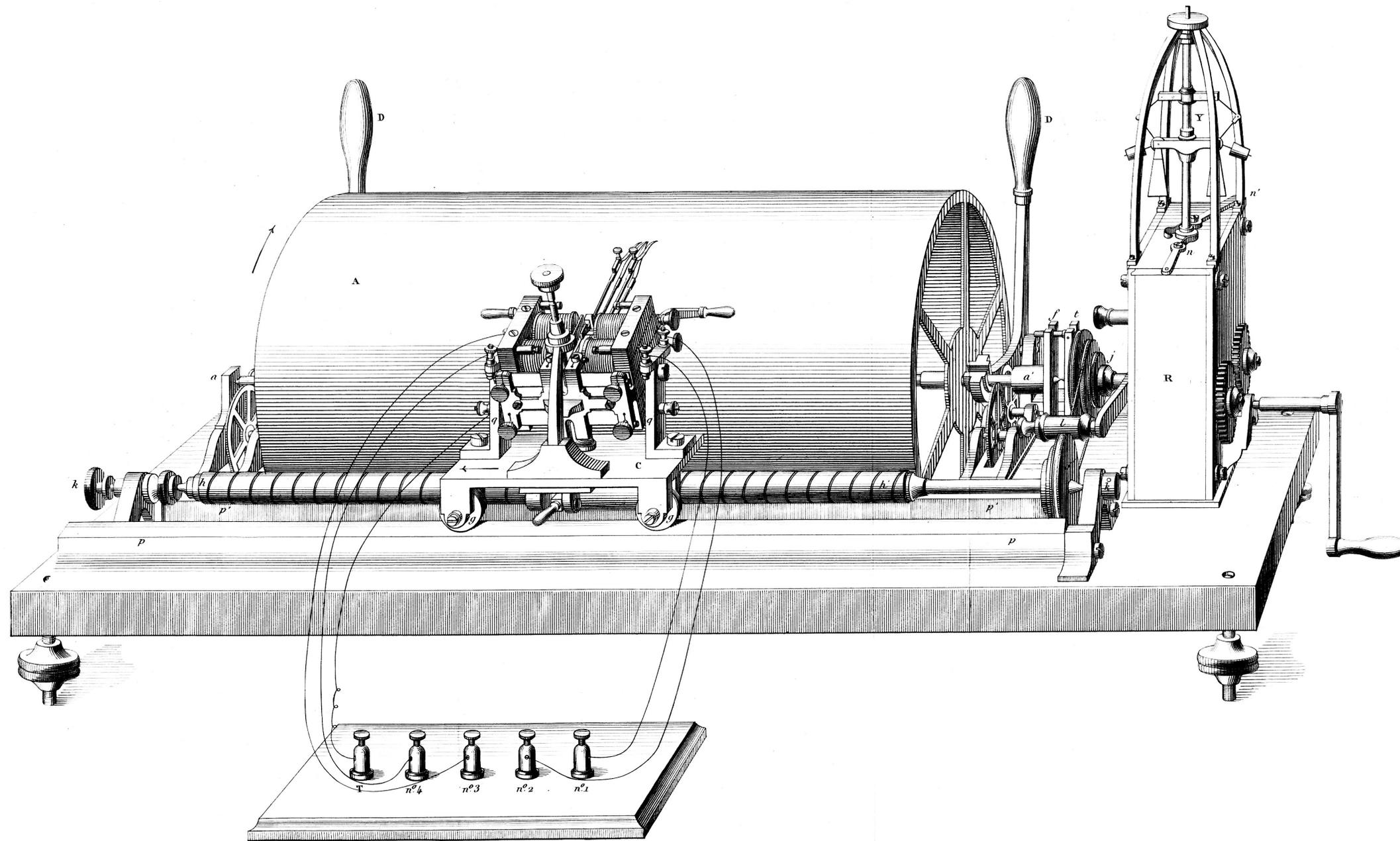
Fig. 2



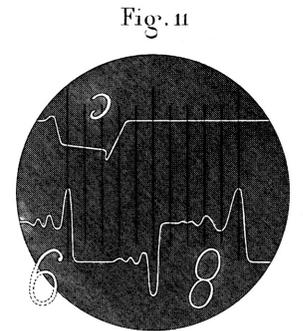
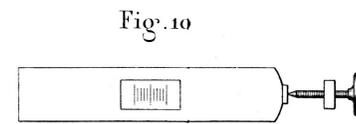
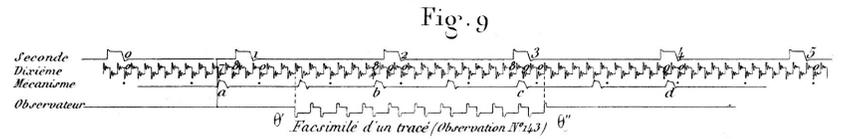
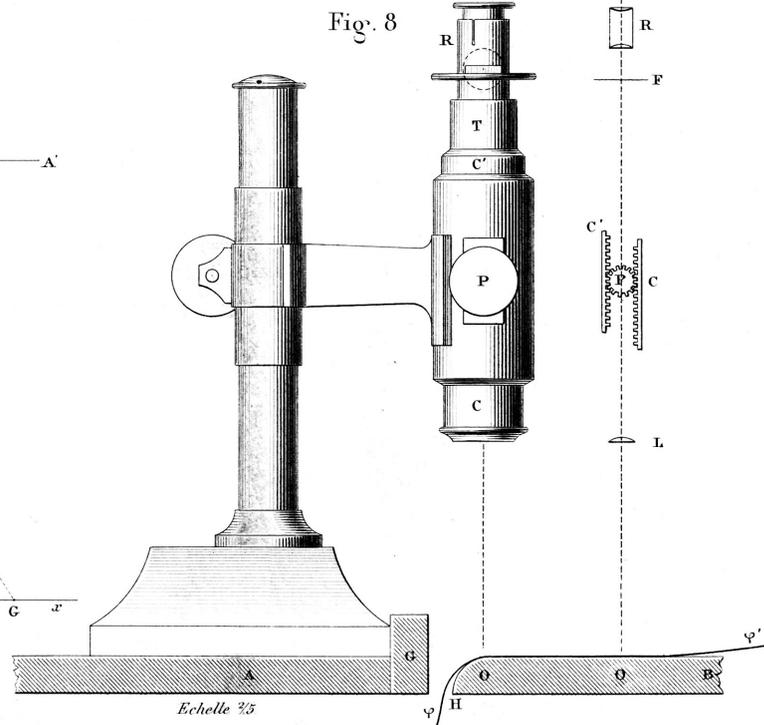
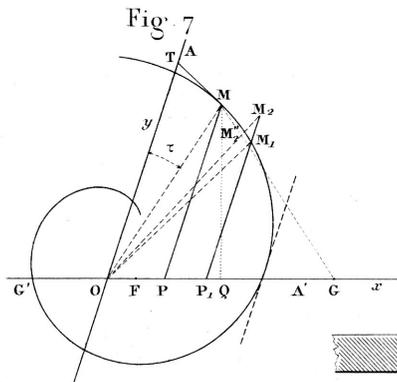
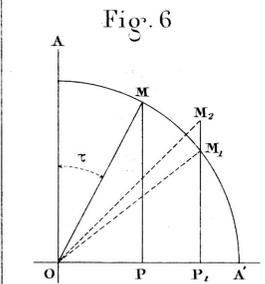
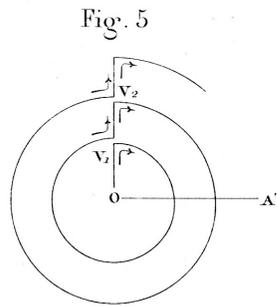
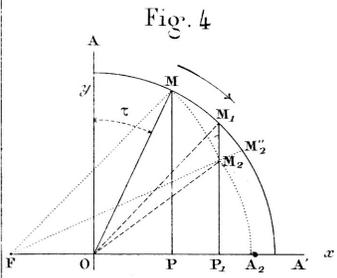
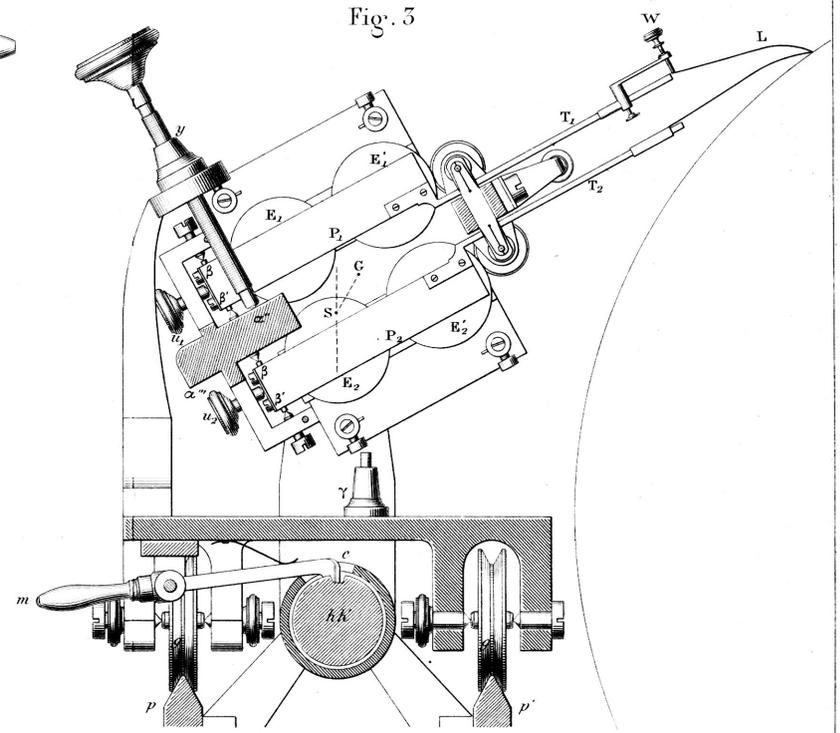
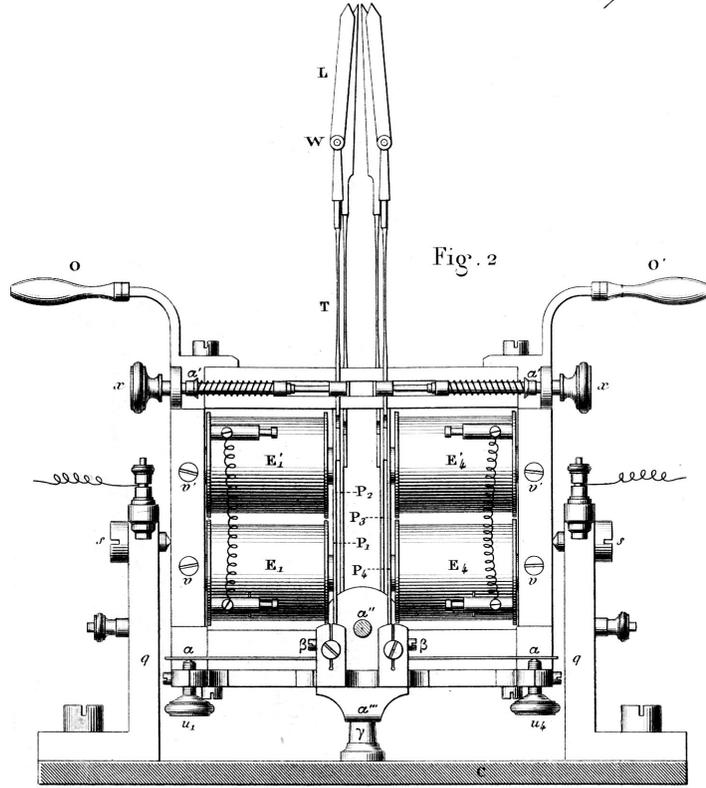
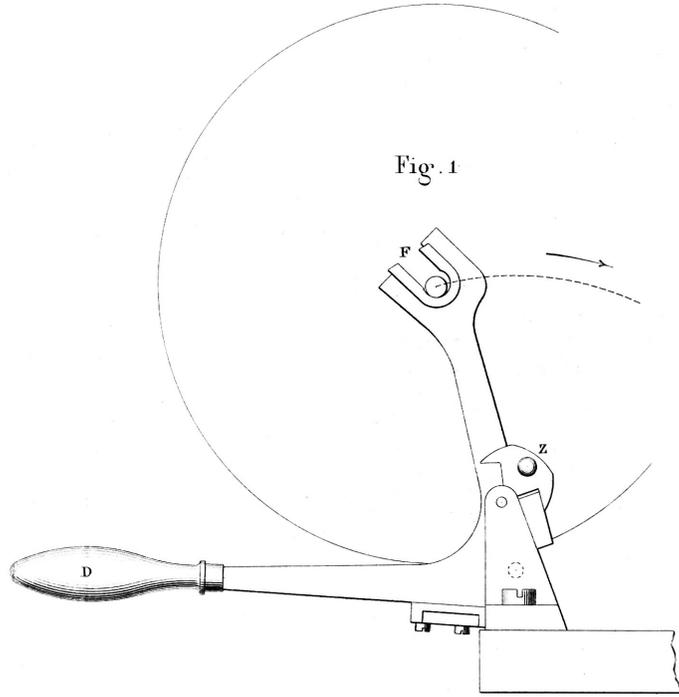
Détermination de la Vitesse de la Lumière, par M. A. Cornu



Détermination de la Vitesse de la Lumière, par M. A. Cornu



Determination de la Vitesse de la Lumière, par M. A. Cornu.



Détermination de la Vitesse de la Lumière, par M. A. Cornu.

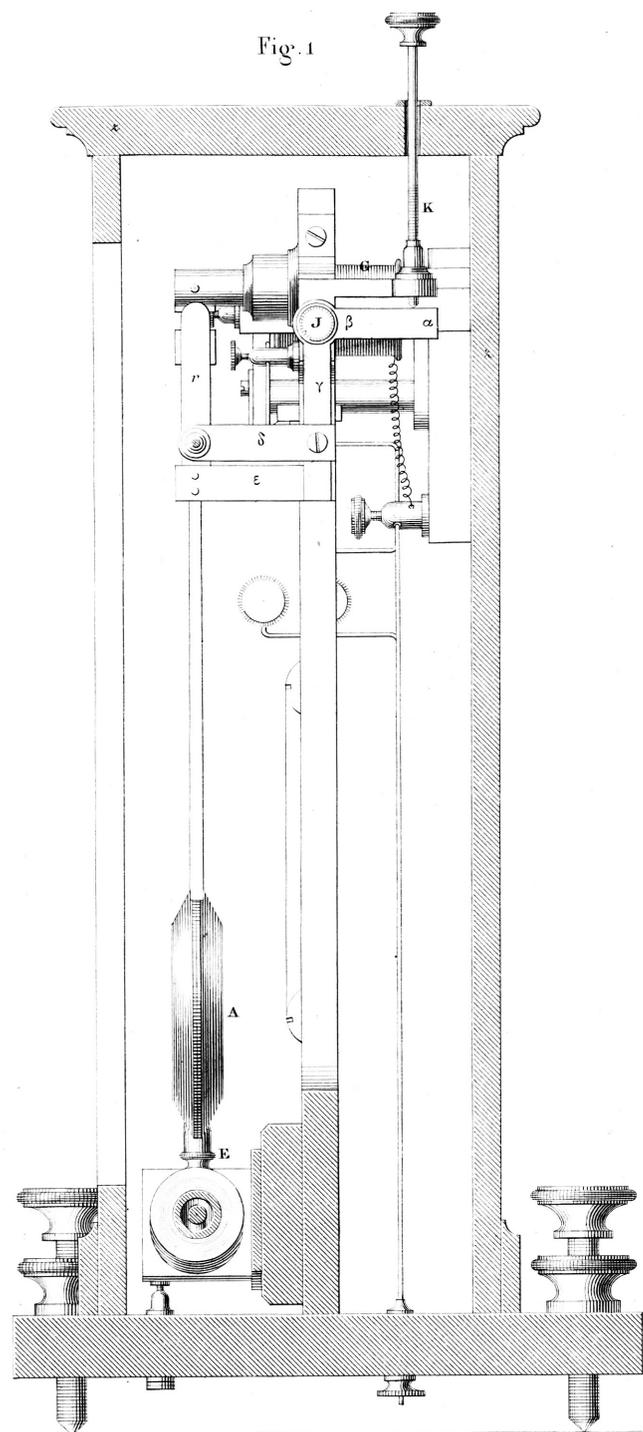


Fig. 1

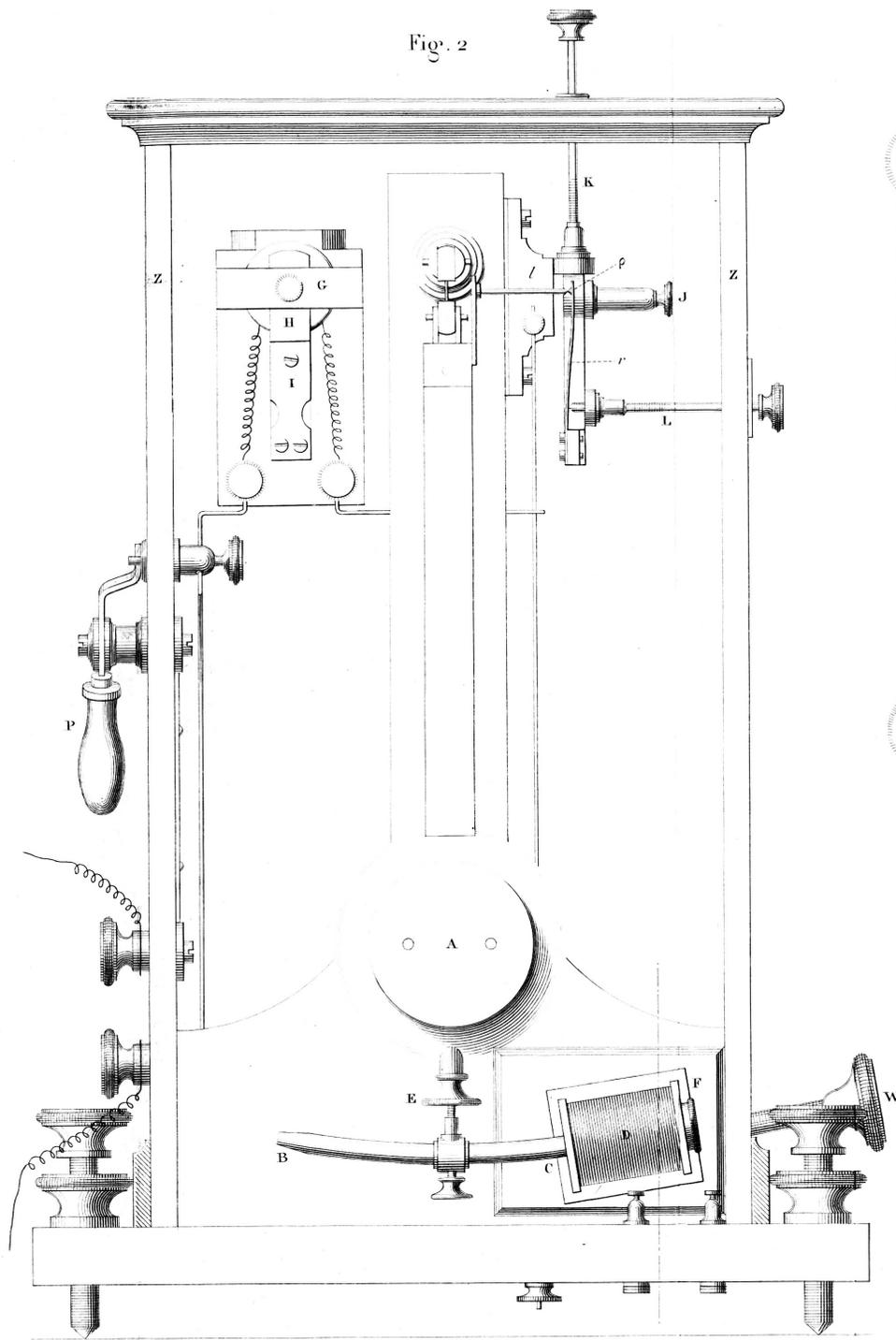


Fig. 2

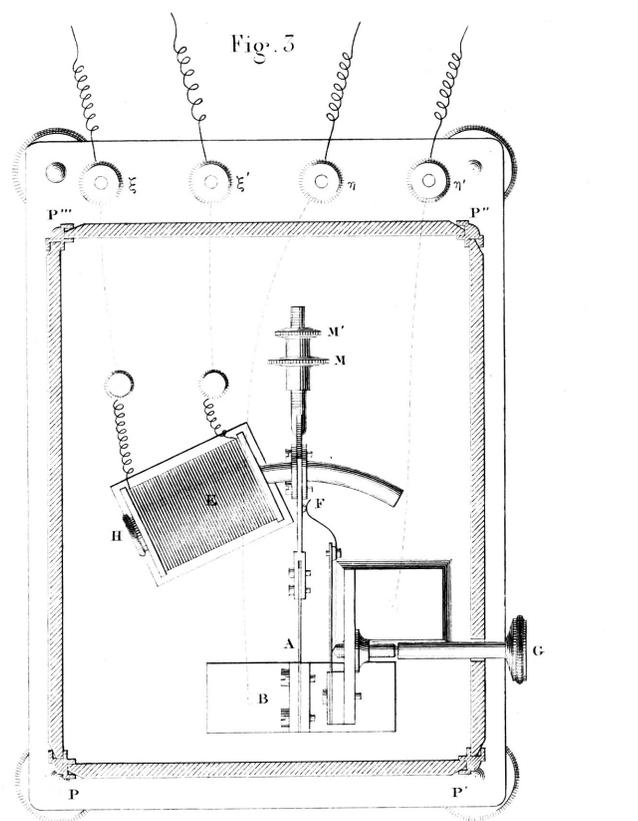


Fig. 3

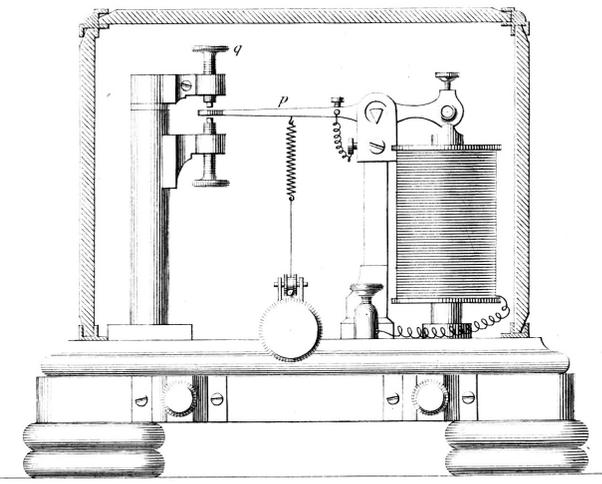


Fig. 4

