N° D'ORDRE.
269

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR ÉDOUARD VILLIÉ,

Ingénieur des Mines.

---

**1re THÈSE.** — SUR LA DÉTERMINATION DE CORPS AYANT UN POTENTIEL DONNÉ POUR LES POINTS QUI LEUR SONT EXTÉRIEURS.

**2e THÈSE.** — SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE HOMOGÈNE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION UNIFORME AUTOUR D'UN AXE FIXE.

---

**Soutenues, le 17 juin 1865, devant la Commission d'Examen.**

---

MM. CHASLES, *Président.*
PUISEUX, VERDET, *Examinateurs.*

PARIS

IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce,

Rue Racine, 26.

1865

# ACADÉMIE DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

| | | |
|---|---|---|
| DOYEN | MILNE-EDWARDS, professeur. | Zoologie, Anatomie, Physiologie. |
| PROFESSEURS HONORAIRES. | PONCELET. | |
| | LEFÉBURE DE FOURCY. | |
| PROFESSEURS. | DUMAS. | Chimie. |
| | DELAFOSSE. | Minéralogie. |
| | BALARD. | Chimie. |
| | CHASLES. | Géométrie supérieure. |
| | LE VERRIER. | Astronomie. |
| | DUHAMEL. | Algèbre supérieure. |
| | LAMÉ. | Calcul des probabilités, Physique mathématique. |
| | DELAUNAY. | Mécanique physique. |
| | C. BERNARD. | Physiologie générale. |
| | P. DESAINS. | Physique. |
| | LIOUVILLE. | Mécanique rationnelle. |
| | HÉBERT. | Géologie. |
| | PUISEUX. | Astronomie. |
| | DUCHARTRE. | Botanique. |
| | JAMIN. | Physique. |
| | SERRET. | Calcul différentiel et intégral. |
| | N.... | Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie. |
| AGRÉGÉS. | BERTRAND. | Sciences mathématiques. |
| | J. VIEILLE. | Sciences mathématiques. |
| | PÉLIGOT. | Sciences physiques. |
| SECRÉTAIRE | E. PREZ-REYNIER. | |

A MONSIEUR VERDOT,

CHEF D'INSTITUTION, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, ETC.,

*Témoignage d'affection et de reconnaissance.*

E. VILLIÉ.

# PREMIÈRE THÈSE.

**Sur la détermination de corps ayant un potentiel donné pour les points qui leur sont extérieurs.**

## INTRODUCTION.

Cette thèse m'a été suggérée par l'étude des remarquables mémoires de Georges Green, de M. Chasles et de Gauss sur la théorie mathématique de l'électricité. Voici l'analyse succincte de ce travail.

Il sera pour plus de clarté divisé en quatre parties.

Dans le chapitre Ier, j'énoncerai les théorèmes qui se trouvent dans les trois mémoires que j'ai cités, et qui ont quelque rapport avec l'étude que j'ai en vue. Je ne rappellerai les démonstrations que de ceux de ces théorèmes qui me seront utiles dans la suite.

J'y ajouterai quelques remarques fort simples qui seront des conséquences presque immédiates des théorèmes précédents, et je terminerai en recherchant avec M. Lamé la condition pour qu'une fonction de trois variables puisse, en l'égalant à une constante arbitraire, représenter des surfaces d'égal potentiel, autrement dit des surfaces de niveau, dues à l'attraction d'un corps inconnu. Comme la forme de la fonction qui représente le potentiel d'un corps change généralement lorsqu'on passe de l'extérieur à l'intérieur du corps, la fonction étudiée ne sera appelée à représenter que les surfaces de niveau auxquelles le corps est intérieur.

Le chapitre II est consacré à la recherche d'une série de solutions du problème qui fait le principal objet de ce travail; les corps que j'y obtiens sont tous limités par des surfaces de niveau.

En tête de ce chapitre je démontre que tous les corps répondant à la question ont même masse, même centre de gravité et mêmes axes principaux d'inertie.

Je recherche ensuite le potentiel des corps obtenus sur les points qui leur sont intérieurs.

Je démontre enfin qu'une surface quelconque étant donnée, on peut toujours la considérer comme une des surfaces extérieures de niveau, dues à l'attraction d'un corps dont le potentiel est, à un facteur constant près, déterminé pour les points extérieurs au corps, et j'applique ces considérations au cas où la surface donnée est un ellipsoïde quelconque.

Dans le troisième chapitre, je rappelle d'abord le principe énoncé par M. Thompson, de la transformation par rayons vecteurs réciproques ; j'en déduis un théorème proposé par M. Bertrand comme exercice dans son *Traité de calcul différentiel*, et je donne de ce théorème une démonstration directe, parce qu'elle me fournit une égalité que j'utilise plus loin.

Le principe des images me sert à trouver une nouvelle série de corps répondant au problème que je me suis proposé. J'obtiens ainsi des solutions en nombre infiniment plus considérable que précédemment, et pour employer un langage qui rend parfaitement compte de ce que je veux dire, le rapport du nombre des solutions précédemment trouvées au nombre des solutions que me fournit la théorie des images est représenté par $\frac{1}{\infty^2}$.

Je recherche ensuite la condition que doit remplir la fonction proposée pour que les corps que j'ai obtenus par la première méthode aient des surfaces extérieures semblables, et je démontre que dans deux cas où il semble que je doive en obtenir par la deuxième, le principe des images ne peut pas me donner de pareils corps.

Enfin, après avoir déterminé le potentiel des corps trouvés pour les points qui leurs sont intérieurs, je vérifie directement l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire ce potentiel, en m'appuyant sur la démonstration directe que j'ai donnée du théorème énoncé par M. Bertrand, et je termine par la recherche de corps répondant à la question et ayant une ou deux cavités ; dans ce dernier cas, ces cavités diffèrent essentiellement par la nature de l'attraction que le corps considéré exerce sur les points qui leur sont intérieurs.

Le chapitre IV est fort court ; il a pour but de résumer quelques théorèmes de calcul intégral qui sont la conséquence immédiate de ce qui précède.

## CHAPITRE PREMIER.

Je m'occuperai d'abord du plus ancien des trois mémoires que j'ai cités, celui de Green ; il date de 1828.

Voici comment Green débute.

1. — Théorème Ier. *Si l'on considère deux fonctions quelconques* U *et* V *de trois coordonnées* x, y, z, *et un corps limité, on aura, quelles que soient les fonctions* U *et* V, *pourvu qu'aucune d'elles ne devienne infinie dans l'intérieur du corps, l'identité*

$$(1)\qquad \iiint dx\,dy\,dz\,\mathrm{U}\left[\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{V}}{dz^2}\right]+\iint d\sigma\,\mathrm{U}\frac{d\mathrm{V}}{dn}=$$
$$=\iiint dx\,dy\,dz\,\mathrm{V}\left[\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}+\frac{d^2\mathrm{U}}{dy^2}+\frac{d^2\mathrm{U}}{dz^2}\right]+\iint d\sigma\,\mathrm{V}\frac{d\mathrm{U}}{dn}.$$

La 1re et la 3e intégrale n'ont pas besoin d'explication, elles s'étendent à tous les éléments du corps considéré ; la 2e et la 4e sont relatives à la surface. $d\sigma$ est l'élément de surface du corps et $dn$ la longueur infiniment petite, comptée sur la normale à l'intérieur ; $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$ n'est pas une dérivée, c'est un quotient.

Pour démontrer ce théorème, considérons l'expression

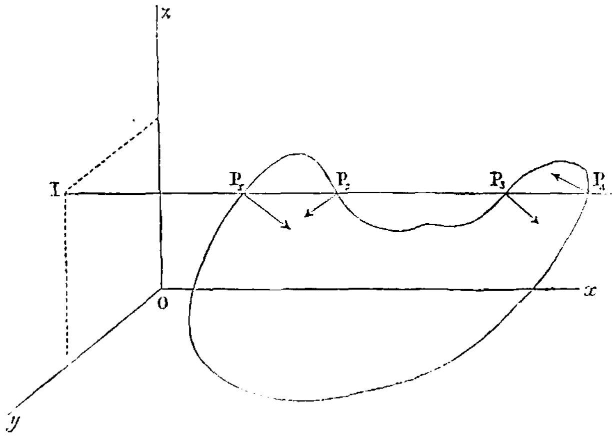
$$\mathrm{A}=\iiint dx\,dy\,dz\left[\frac{d\mathrm{U}}{dx}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{dx}+\frac{d\mathrm{U}}{dy}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{dy}+\frac{d\mathrm{U}}{dz}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right].$$

et proposons-nous de développer cette expression de telle sorte qu'elle nous conduise indistinctement à l'un ou à l'autre des deux membres de l'équation (1), ce qui prouvera leur égalité. On a

$$A = \iint \left[ U \frac{dV}{dx} - \int U \frac{d^2V}{dx^2} dx \right] dy\, dz + \iint \left[ U \frac{dV}{dy} - \int U \frac{d^2V}{dy^2} dy \right] dx\, dz$$
$$+ \iint \left[ U \frac{dV}{dz} - \int U \frac{d^2V}{dz^2} \right] dx\, dy.$$

La première des trois parties de A doit être prise comme suit :

$$\iint \left[ \left( U_2 \frac{dV_2}{dx} - U_1 \frac{dV_1}{dx} \right) + \left( U_4 \frac{dV_4}{dx} - U_3 \frac{dV_3}{dx} \right) \right] dy\, dz$$
$$- \iiint U \frac{d^2V}{dx^2} dx\, dy\, dz.$$




Or, si l'on représente par $\alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i$ les angles de la normale au point $P_i$ avec les axes coordonnés, on a

$$U_2 \frac{dV_2}{dx} dy\, dz = U_2 \frac{dV_2}{dx} d\sigma_2 (-\cos \alpha_2),$$

$$- U_1 \frac{dV_1}{dx} dy\, dz = - U_1 \frac{dV_1}{dx} d\sigma_1 (\cos \alpha_1).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Donc tous ces termes, quel qu'en soit le nombre, sont renfermés dans la formule

$$- \mathrm{U} d\sigma \frac{dV}{dx} \cos \alpha.$$

On en conclut

$$\mathrm{A} = - \iint \mathrm{U} d\sigma \left[ \frac{dV}{dx} \cos \alpha + \frac{dV}{dy} \cos \beta + \frac{dV}{dz} \cos \gamma \right] - \iiint \mathrm{U} \left[ \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right] \times$$
$$\times dx\, dy\, dz.$$

Or,

$$\frac{dV}{dx} \cos \alpha + \frac{dV}{dy} \cos \beta + \frac{dV}{dz} \cos \gamma = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{dz}{dn} = \frac{dV}{dn};$$

d'où se conclut le théorème énoncé.

2. — Cette démonstration repose sur ce principe qu'un résultat est indépendant de l'ordre des intégrations ; elle est donc en défaut dans le cas où l'une ou l'autre des quantités U et V devient infinie dans l'intérieur du corps. Voyons comment la formule doit être modifiée si U ne reste pas fini ; nous supposerons que U dans le voisinage d'un point P du corps tende vers $\frac{1}{r}$, $r$ étant la distance du point considéré au point critique P.

Green décrit autour de P une sphère de très-petit rayon ; si du corps on retranche cette sphère, la formule s'applique à la partie restante ; voyons donc ce que devient chaque terme de la formule (1) pour la sphère laissée de côté,

$$1^{\text{er}} \text{ terme} = \int_0^r 4\pi r^2 dr \cdot \frac{1}{r} \left[ \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} \right],$$

il est nul puisque $r$ entre en facteur dans son élément, on peut donc l'ajouter au $1^{\text{er}}$ membre.

$$2^{\text{e}} \text{ terme} = 4\pi r^2 \frac{1}{r} \frac{dV}{dn},$$

il tend donc vers zéro ; on peut alors l'ajouter au $1^{\text{er}}$ membre, il détruit ainsi la portion de

$$\iint d\sigma \mathrm{U} \frac{dV}{dn}$$

2

introduite par la surface de la sphère, car $dn$ est en sens contraire dans les deux cas.

Quant au 3e terme, il est aussi nul à cause de la nullité de l'élément

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}.$$

Enfin le 4e terme a pour valeur

$$4\pi r^2 V\frac{d\frac{1}{r}}{-dr}=4\pi V',$$

$V'$ étant ce que devient $V$ au point $P$; en l'ajoutant aux deux membres, il détruit dans le second la portion de

$$\iint d\sigma V\frac{dU}{dn}$$

introduite par la sphère, et l'on a en définitive la formule

$$(2)\quad \iiint dx\,dy\,dz\,U\left[\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right]+\iint d\sigma U\frac{dV}{dn}+4\pi V'=$$
$$=\iiint dx\,dy\,dz\,V\left[\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right]+\iint d\sigma V\frac{dU}{dn}.$$

3. — Green se pose alors le problème suivant :

PROBLÈME. *Étant donnée une surface, est-il possible de la recouvrir d'une couche ayant pour potentiel de son action, $V_1$ sur les points intérieurs, $V_2$ sur les points extérieurs? Dans le cas de l'affirmative, quelle doit être la densité de cette couche en chaque point? On suppose que pour les points de la surface $V_1=V_2$, que ces fonctions satisfont l'une et l'autre à l'équation*

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0,\qquad \text{et que } V_2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

*reste fini quand* x, y *ou* z *tendent ensemble ou séparément vers* $\infty$.

Ce problème, que Green a résolu le premier, a non-seulement en lui-même une très-grande importance, il montre encore l'indépendance des potentiels extérieur et intérieur, en y ajoutant seulement les conditions bien connues auxquelles ces potentiels doivent satisfaire.

Pour arriver à le résoudre, Green applique la formule (2) au volume limité par la surface proposée, en y faisant $V = V_1$ et $U = \frac{1}{r}$. $r$ étant la distance à un point intérieur arbitraire P, et pour plus de clarté, nous représenterons par $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ les valeurs de $V_1$ et $V_2$ à la surface du corps, en sorte que $\overline{V}_1 = \overline{V}_2$; o na alors :

$$\iint \frac{d\sigma}{r} \frac{d\overline{V}_1}{dn} + 4\pi V_1 = \iint \overline{V}_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma.$$

Faisons maintenant $V = V_2$ et $U = \frac{1}{r}$, puis intégrons à l'extérieur du corps jusqu'à l'infini, la distance $r$ étant toujours comptée à partir du même point P; le 1[er] terme de la formule (1) est zéro, le 2[e] est

$$\iint \frac{d\sigma}{r} \frac{d\overline{V}_2}{dn},$$

augmenté d'une expression analogue formée à la surface de la sphère décrite de P comme centre et dont le rayon R tend vers $\infty$, laquelle expression

$$\iint \frac{1}{R} \frac{dV_2}{-dR} d\Omega$$

est nulle; en effet, $d\omega$ étant l'élément de la sphère de rayon 1 correspondant à $d\Omega$, on a

$$-\frac{d\frac{1}{R}}{dR} d\Omega = d\omega,$$

et comme pour R infini le produit $V_2R$ est fini, il en résulte que C étant une constante

$$+\frac{dV_2}{dR} = C\frac{d\frac{1}{R}}{dR}$$

et que par suite l'intégrale considérée est nulle comme contenant $\frac{1}{R}$ en facteur dans son élément $\frac{C}{R} d\omega$.

En raisonnant de même pour le 2[e] membre, on a l'identité

$$\iint \frac{d\sigma}{r} \frac{d\overline{V}_2}{dn} = \iint \overline{V}_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma.$$

Ici $dn$ est à l'extérieur de la surface considérée, précédemment il était à l'intérieur, ajoutant donc les deux égalités obtenues, l'on a la formule

$$\iint \frac{d\sigma}{r}\left[\frac{d\overline{V}_1}{dn} + \frac{d\overline{V}_2}{dn}\right] + 4\pi V_1 = 0.$$

Si donc on met en chaque point de la surface une masse attirante de densité

$$(3) \quad \rho = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\overline{V}_1}{dn} + \frac{d\overline{V}_2}{dn}\right],$$

on aura

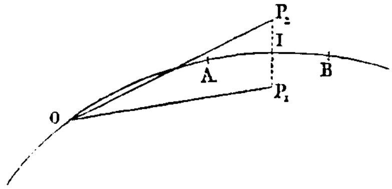
$$V_1 = \iint \frac{\rho d\sigma}{r},$$

et $V_1$ sera bien le potentiel de l'attraction de la couche attirante sur les points intérieurs.

Transportant P à l'extérieur du corps et opérant comme précédemment, on verrait encore qu'en recouvrant la surface d'une couche de densité donnée par (3), l'attraction de cette couche sur les points extérieurs à la surface a $V_2$ pour potentiel. La formule (3) montre donc que le problème proposé est possible et donne une solution de la question.

4. — Green prouve ensuite ce que Coulomb avait déjà démontré avant lui, que si le problème est possible, il ne peut avoir d'autre solution que celle que nous avons indiquée, et comme cette solution est bonne, il en conclut qu'elle est unique. A la démonstration de Green nous préférons celle de Laplace comme étant plus simple et peut-être plus rigoureuse; la voici :

Par hypothèse la composante normale de l'action de la surface sur les points infiniment voisins est pour les points intérieurs $\frac{dV_1}{dn}$, et pour les points extérieurs $\frac{dV_2}{dn}$, le $dn$ étant intérieur à la surface dans le 1[er] cas, extérieur dans le second, de sorte que si nous considérons deux tels points $P_1$ et $P_2$ situés sur la




même normale, la différence des actions normales de la couche sur ces points sera représentée par

$$\frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn}.$$

Cela posé, partageons la surface attirante en deux portions; l'une d'elles sera la surface AB infiniment voisine du point I, l'autre, le reste de cette surface, puis prenons AB comme infiniment petit du $1^{er}$ ordre, $P_2I$ et $P_1I$ comme infiniment petits du $2^e$ ordre; l'attraction d'un point O situé en dehors de la zone AB sur $P_1$ et $P_2$ sera la même puisque $OP_1$, $OP_2$ sont ou finis, ou du $1^{er}$ ordre, tandis que $P_1P_2$ est du second; la différence des actions de la surface sur $P_1$ et $P_2$ ne peut donc provenir que de la portion AB de cette surface sur laquelle on peut regarder la densité $\rho$ comme constante. Divisons alors cette surface par des plans passant par $P_1P_2$ en $m$ fuseaux de même angle, une surface de même densité que la $1^{re}$ et qui en sera distante d'un infiniment petit du $3^e$ ordre aura même action que AB sur les points $P_1$ et $P_2$ (on pourrait affirmer la même chose pour une surface infiniment voisine du second ordre de AB, et c'est celle-là que prend Green en substituant à AB son plan tangent). Si nous remplaçons l'action de ces $m$ fuseaux par celle des fuseaux correspondants de $m$ sphères, ces $m$ fuseaux de $m$ sphères pourront, si $m$ est infiniment grand, être infiniment voisins du $3^e$ ordre de la surface AB, et par suite leur action pourra remplacer celle de la surface AB. Il résulte aussi de ce qui précède qu'au lieu de limiter ces fuseaux par des normales au contour AB, on peut les considérer dans leur entier sans changer la différence des actions qu'ils exercent sur $P_1$ et $P_2$.

Cela posé, l'action d'un fuseau d'angle $\frac{4\pi}{m}$ d'une couche sphérique homogène de rayon R sur un point extérieur infiniment voisin est normale, et représentée par

$$\frac{\frac{4\pi}{m}R^2\rho}{R^2} = \frac{4\pi}{m}\rho,$$

et comme elle est nulle sur un point intérieur, la différence $\frac{4\pi}{m}\rho$ est indépendante du rayon de la sphère. La différence des actions des $m$ fuseaux sur $P_1$ et $P_2$ est donc $-4\pi\rho$, d'où l'égalité obligatoire

$$-4\pi\rho = \frac{dV_1}{dn} + \frac{dV_2}{dn},$$

d'où l'on conclut que cette solution, puisqu'elle est bonne, est unique.

La démonstration précédente pourrait être simplifiée, en considérant au lieu de ces $m$ fuseaux de sphères différentes, une sphère unique ayant son centre sur la normale en I et distante par suite d'un infiniment petit du second ordre de AB.

5. — Nous indiquerons encore un théorème dû à Green, parce que nous utiliserons pour un autre théorème, la démonstration qu'il en donne.

Théorème II. — *Lorsqu'il s'agit d'une surface attirante, il suffit de se donner le potentiel $\overline{V}$ de son action sur les points de la surface, pour que les potentiels des points extérieurs et intérieurs soient déterminés.*

Il en résulte que dans le problème précédent nous avons pris plus de données qu'il n'était nécessaire; seulement, à cause des conditions que nous leur avons imposées, ces données ne sauraient être contradictoires, puisque nous avons trouvé la solution de la question.

Ce théorème se démontre en prouvant que deux couches différentes de potentiels V et V' ne peuvent pas avoir même potentiel $\overline{V}$ pour les points de la surface. Posant en effet $V - V' = U$, U s'annule à la surface et satisfait à l'équation

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

d'où l'on déduit celle-ci :

$$\iiint dx\,dy\,dz\,U\left(\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right) = 0,$$

l'intégration portant sur les points intérieurs à la surface; cette équation se transforme en la suivante

$$\iiint\left[\overline{U}\frac{dU}{dx}-\int\left(\frac{dU}{dx}\right)^2dx\right]dy\,dz+\iiint\left[\overline{U}\frac{dU}{dy}-\int\left(\frac{dU}{dy}\right)^2dy\right]dx\,dz$$
$$+\iiint\left[\overline{U}\frac{dU}{dz}-\int\left(\frac{dU}{dz}\right)^2dz\right]dx\,dy=0,$$

ou comme $\overline{U}=0$

$$\iiint dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2+\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right]=0,$$

ce qui exige qu'on ait pour chacun des points auxquels s'étend l'intégration $U=C^{te}$ et comme $\overline{U}=0$, cette constante est nécessairement nulle.

Le même raisonnement appliqué à l'espace compris entre la surface et la sphère de rayon infiniment grand prouverait, à l'aide de considérations que nous avons eu occasion de développer dans la démonstration de la formule (3), que pour tous les points extérieurs on a également $U=0$ ou $V=V'$, ce qu'il fallait démontrer.

6. — Abandonnons maintenant le mémoire de Green qui contient encore bien d'autres résultats curieux, entre autres une très-remarquable et très-précise théorie de la bouteille de Leyde, pour passer à celui de M. Chasles.

En 1839, M. Chasles énonça les théorèmes de Green, sans les connaître, M. Sturm en donna des démonstrations; M. Chasles ne publia les siennes qu'en 1845 (*Connaissance des temps* 1845).

Voici les points saillants de ce mémoire; nous n'en démontrerons qu'un seul.

7. — Théorème III. *Si l'on considère un corps de forme quelconque attirant les points de l'espace, il en résulte des surfaces de niveau qui sont en chaque point normales à la direction de l'attraction.*

Chacune des surfaces de niveau est en effet définie par la constance du potentiel V, d'où l'on conclut que si l'on marche sur l'une de ces surfaces, on a

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=0,$$

ce qui démontre le théorème.

8. — Théorème IV. *Pour une surface fermée quelconque située en dehors d'un corps attirant, on a*

$$\int\frac{dV}{dn}d\sigma=0. \tag{4}$$

$\frac{dV}{dn}$ étant la composante normale à la surface considérée de l'attraction du corps.

9. — Théorème. V. *Pour une surface fermée quelconque, si* M *est la masse du corps attirant comprise dans la surface, on a*

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi M. \tag{5}$$

10. — Théorème VI. *Si l'on recouvre une surface de niveau d'une couche attirante de densité* $-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$, *cette couche n'attire pas les points qui lui sont intérieurs et attire les autres comme le corps lui-même, dans le cas où la surface ne coupe pas le corps.*

M. Chasles a démontré ce théorème en s'appuyant sur les précédents, mais il est une conséquence immédiate de l'équation (3) de Green. Il suffit de faire $V_1 = C^{te}$, cette constante devant par conséquent être le $\overline{V}$ de la surface donnée, et de prendre pour $V_2$ la valeur du potentiel de l'action du corps, pour les points extérieurs à la surface de niveau considérée. Or une couche qui n'attire pas les points qui lui sont intérieurs est une couche électrique, donc la couche électrique qui recouvre une surface de niveau, est celle dont la densité est en chaque point proportionnelle à l'attraction du corps, et elle agit sur les points extérieurs comme le corps lui-même.

Il est facile de voir à quel endroit la démonstration suppose que la surface de niveau ne coupe pas le corps; le problème qui nous a conduit à l'équation (3) a été résolu en supposant

$$\frac{d^2V_2}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dy^2} + \frac{d^2V_2}{dz^2} = 0,$$

équation qui ne serait plus vérifiée pour tous les points extérieurs à la surface, si celle-ci coupait le corps.

Green, dans son mémoire, n'a pas nettement indiqué le théorème qui précède, dont toute la gloire revient à M. Chasles.

11. — Remarque. Si l'on se propose de recouvrir une des surfaces de niveau extérieures dues à l'attraction d'un corps inconnu, d'une couche attirante ayant

pour potentiel V à la surface le potentiel même de l'action du corps, le problème n'ayant qu'une solution et la couche électrique en étant une, il faut absolument qu'on se soit donné la fonction $V_1$ constante et égale à $\overline{V}$, et que $V_2$ soit le potentiel de l'action du corps sur les points extérieurs à la surface de niveau considérée.

Nous énoncerons encore un autre théorème dû à M. Chasles, et dont le dernier n'est qu'un cas particulier; il se déduit du reste aussi facilement que le précédent des théorèmes de Green.

12. — Théorème VII. *Si une des surfaces de niveau coupant le corps qui lui a donné naissance est douée en chaque point d'une masse attractive de densité* $-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$, *elle attire les points qui lui sont extérieurs comme la portion du corps qui lui est intérieure, et son attraction sur les points intérieurs est égale et de signe contraire à celle de la partie extérieure du corps.*

M. Thompson a démontré ce théorème de la manière suivante :

Appelons $v_1$ et $v_2$ les potentiels des parties du corps intérieure et extérieure à la surface considérée

$$V = v_1 + v_2, \quad \text{soit} \quad \overline{V} = C$$

et appliquons la formule (2) de Green en y supposant

$$V_1 = C - v_2, \quad V_2 = v_1,$$

les conditions dans lesquelles Green se place pour résoudre le problème sont remplies, et l'on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\overline{v_1}}{dn} - \frac{d\overline{v_2}}{dn}\right),$$

mais $dn$ étant en sens inverse dans $v_1$ et $v_2$, on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{V}}{dn}, \tag{6}$$

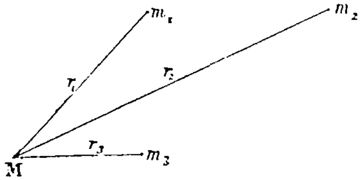
d'où l'on déduit le théorème énoncé.

13.—Indiquons maintenant quelques passages du mémoire de Gauss, traduit en 1842 (*Journal de M. Liouville*).

THÉORÈME VIII. *Soient deux systèmes de points matériels ayant pour potentiels le premier système* V, *le deuxième* v ; M *la masse d'un point du premier système ;* m *celle d'un point du second ; on a l'identité*

$$\Sigma M v = \Sigma m V, \tag{7}$$

*la première sommation s'étendant à tous les points du premier système, la deuxième à tous les points du second.*




En effet, on a

$$Mv = M\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots\right),$$

d'où

$$\sum Mv = \sum \frac{Mm}{r}.$$

On aurait de même

$$\sum mV = \sum \frac{Mm}{r},$$

d'où

$$\Sigma M v = \Sigma m V. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

14. — THÉORÈME IX. — *Le potentiel de l'action d'un corps attirant un point extérieur, est la moyenne des potentiels à la surface d'une sphère ne coupant pas le corps et ayant ce point comme centre.*

*Si la sphère coupe le corps, cette moyenne devient*

$$\frac{\int V d\sigma}{4\pi r^2} = V_e + \frac{M_i}{r}, \tag{8}$$

r *étant le rayon de la sphère,* V *le potentiel de l'action du corps à la surface de cette sphère,* $V_e$ *le potentiel de l'action de la portion du corps extérieure à la sphère sur le point considéré, et* $M_i$ *la partie de la masse du corps intérieure à la sphère.*

15. — THÉORÈME X. — *Si l'on a un corps attirant dont le potentiel est constant sur une surface fermée ne contenant aucune portion du corps, il est constant partout et par suite nul.*

16. — Théorème XI. — *Si le potentiel est nul en tous les points d'une surface fermée enveloppant le corps attirant, il l'est partout.*

Dans ces deux derniers cas, il résulte immédiatement de la seconde partie du théorème IX, que la masse du corps attirant est nulle.

Là se terminera l'exposition des mémoires que nous avons cités.

Les quelques remarques qui suivent se déduisent très-simplement de ce qui précède.

17. — Théorème XII. — *S'il n'existe qu'une surface sur laquelle le potentiel de l'action d'un corps est nul, elle coupe le corps ou est à l'infini.*

Car, d'après les théorèmes X et XI, si le corps lui était ou intérieur ou extérieur, le potentiel serait partout nul.

Un potentiel nul ailleurs qu'à l'infini, ne peut répondre qu'à un corps dont certaines parties attirent tandis que d'autres repoussent, mais la masse totale n'est pas pour cela nulle, tandis que si partout le potentiel est nul, la masse est nulle.

18. — Théorème XIII. — *Un corps attirant à surface extérieure convexe, et dont tous les points ont des masses de même signe, ne peut avoir de surface de niveau telle que le volume qu'elle limite soit extérieur au corps.*

Car s'il existe une telle surface, elle contient nécessairement à son intérieur une série d'autres surfaces de niveau ; la dernière des surfaces qu'elle contient, celle qui est à l'intérieur de toutes les autres et qui peut être soit un point, soit une ligne, soit une surface infiniment plate, est telle que pour ses points le potentiel de l'action du corps est maximum ou minimum, ce qui répond à une attraction nulle. Or la surface infiniment plate que nous considérons est comme la surface proposée extérieure au corps, et un corps dont tous les points ont des masses de même signe ne peut être sans action sur les points extérieurs.

Il est clair que ce théorème s'applique également bien aux corps creux, pourvu que l'on ne regarde pas comme extérieures les surfaces qui sont dans la cavité.

Le même théorème existe quand il s'agit de plusieurs corps ayant des masses de même signe, si l'on appelle extérieure aux corps une surface telle qu'elle n'est rencontrée par aucune des droites qu'on obtient en joignant deux points quelconques de deux corps arbitraires mais différents, et ces droites étant limitées aux points qu'elles unissent.

Enfin ce théorème s'applique au cas d'un seul corps concave, si l'on regarde comme lui appartenant la portion de l'espace nécessaire pour le rendre convexe.

19. — Théorème XIV. — *Si l'on recouvre une des surfaces de niveau d'un corps ne coupant pas ce corps, d'une couche attirante de densité*

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{V}}{dn},$$

*les masses de la couche et du corps sont les mêmes.*

Ce théorème, très-facile à prévoir par la considération des attractions égales du corps et de la couche sur un point suffisamment éloigné pour qu'on puisse considérer les attractions comme parallèles et proportionnelles aux masses des points attirants, peut se démontrer directement comme suit :

Appliquons le théorème VIII au corps et à la couche

$$\Sigma M v = \Sigma m V = \overline{V}\Sigma m;$$

or $v$ est aussi constant et égal à $\overline{V}$, donc $\Sigma M$ masse du corps $= \Sigma m$ masse de la couche.

Le théorème V de M. Chasles conduit immédiatement au même résultat.

Il en est de même du théorème IX de Gauss ; si en effet d'un point extérieur quelconque, on décrit une sphère ayant la surface de niveau à son intérieur, on aura :

1° Pour le corps

$$\int V d\sigma = 4\pi r M,$$

2° Pour la couche

$$\int v d\sigma = 4\pi r m,$$

et comme $v = V$ pour chaque point de la sphère, on en déduit

$$M = m.$$

20. — Théorème XV. — *Si deux corps ont une surface de niveau commune qui ne coupe aucun d'eux, il en est de même de toutes celles qui comprennent ces deux corps, et même des portions extérieures aux deux corps des surfaces de niveau qui les coupent.*

Soient, en effet, V et $v$ les potentiels des deux corps considérés sur les points extérieurs, et

$$\varphi(x.y.z) = v_0,$$

l'équation de la surface de niveau qui leur est commune, V est constant et égal à $V_0$ pour tous les points de cette surface; j'appelle alors A le rapport $\frac{V_0}{v_0}$, et je multiplie par A la masse de chaque point du corps de potentiel $v$; puis je pose

$$V - Av = U.$$

U est nul à l'infini et sur tous les points de la surface $v_0$. Appliquant alors la démonstration du théorème II de Green à tous les points de l'espace situés au delà de la surface $v_0$, ce qui est possible, puisque pour tous ces points

$$\Delta_2 U = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

on en déduit

$$U = 0, \qquad V = Av.$$

Cette relation ayant lieu pour tous les points de l'espace extérieurs à la surface $v_0$, a lieu pour tous les points extérieurs aux deux corps, puisque la forme des fonctions V et $v$ ne peut changer que quand on passe de l'extérieur à l'intérieur des corps considérés. De là résulte le théorème énoncé qui se déduirait tout aussi simplement du théorème XI de Gauss.

Remarque. — Deux corps qui ont une surface de niveau commune qui ne coupe aucun d'eux, ont sur tous les points de l'espace qui leur sont extérieurs, des potentiels dont le rapport est égal à une constante arbitraire.

21. — Problème. — *A quelle condition doit satisfaire l'équation*

$$\alpha = \varphi(x.y.z),$$

*pour que les surfaces qu'elle fournit par la variation de $\alpha$, puissent être considérées comme des surfaces de niveau dues à l'attraction d'un corps inconnu qu'elles ne coupent pas ?*

On démontrerait d'abord, très-simplement, que le potentiel V de l'action du corps doit être une fonction de $\alpha$ seulement,

$$V = f(\alpha),$$

et comme

$$\Delta_2 V = 0,$$

il en résulte

$$(9) \qquad \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = -\frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}$$

Le premier membre étant une fonction de $\alpha$, il doit en être de même du deuxième, c'est la condition cherchée. On peut la traduire analytiquement de la manière suivante:

Différentions l'expression

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}+\frac{d^2\alpha}{dz^2}}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2},$$

et remplaçons-y $dx$ par sa valeur tirée de

$$d\alpha = 0,$$

on devra avoir une identité, ce qui conduira à deux équations aux différentielles partielles du troisième ordre.

A ces conditions, il faudra toujours joindre la suivante:

Pour $x$, $y$, $z$, infinis ensemble ou séparément, la quantité

$$V\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

devra toujours être finie et constante. Le potentiel V pourra être obtenu, une fois la condition fondamentale vérifiée, par deux intégrations successives.

# CHAPITRE II.

22. — Passons au problème qui doit maintenant être le principal objet de notre étude.

**Rechercher des corps ayant sur les points extérieurs un potentiel donné.**

Si l'on se donnait la surface qui limite le corps, et les deux fonctions V et $v$ potentiels de l'action de ce corps sur les points extérieurs et sur les points intérieurs, le corps serait immédiatement déterminé, car sa densité $\rho$ en chaque point serait donnée par la formule

$$\Delta_2 v = -4\pi\rho.$$

Et ce serait aussi se donner trop de conditions, car $v$ et la surface qui limite le corps étant connus, le corps et par suite V en résultent.

Si l'on se donnait seulement V et $v$, les points de la surface seraient très-simplement déterminés, ils répondraient à l'équation

$$V = v,$$

et l'on aurait encore trop de conditions.

Nous laisserons de côté le cas où $v$ seul serait connu.

Enfin si au lieu de se donner V, on se donne simplement l'équation générale des surfaces de niveau comprenant le corps à leur intérieur

$$\varphi(x.y.z) = \alpha,$$

nous savons trouver les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction $\varphi$, et en déduire V; ce problème rentre donc immédiatement dans celui que nous nous sommes proposé.

23. — Théorème XVI. *Tous les corps qui répondent au problème que nous nous sommes proposé, même ceux dont tous les points n'ont pas des masses de*

*même signe, ont même masse, même centre de gravité et mêmes axes principaux d'inertie.*

L'identité des masses et celle des centres de gravité de corps attirant également un point extérieur quelconque était bien simple à prévoir : considérons un point suffisamment éloigné pour qu'on puisse regarder les actions des points des divers corps comme des forces parallèles et proportionnelles à leurs masses, ces actions auront pour chaque corps une résultante, toutes ces résultantes seront égales par hypothèse, et d'un autre côté proportionnelles aux masses des corps, d'où l'on conclut l'égalité de ces masses. Enfin comme toutes ces forces ont même point d'application et même direction, et que chacune d'elles passe par le centre de gravité du corps auquel elle répond, tous ces centres de gravité sont sur la droite joignant l'un quelconque d'entre eux au point considéré, lequel est dans une direction quelconque ; donc ces corps ont même centre de gravité.

Donnons de ces principes une démonstration qui nous conduira également à la dernière partie du théorème.

Décrivons une surface de niveau

$$V = V_1,$$

comprenant à son intérieur tous les corps ayant même potentiel V sur les points extérieurs, si nous la supposons recouverte d'une couche attirante de densité

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV_1}{dn},$$

il va résulter du théorème XIV l'égalité des masses de ces divers corps, puisque chacun d'eux a même masse que la couche. Prenons maintenant pour origine et axes coordonnés le centre de gravité et les axes principaux de cette couche, puis appliquons la formule (1) de Green à tous les points du volume que limite la surface $V = V_1$, en y faisant $U = x$ et prenant pour V le potentiel P de l'action de l'un des corps ; la densité $\delta$ de ce corps est déterminée en chaque point par l'équation

$$(10) \qquad \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} = -4\pi\delta,$$

et cette formule peut être regardée comme s'appliquant à tous les points de l'espace que limite la surface $V_1$ puisque pour tous les points en dehors du corps. $\delta = 0$. La formule citée nous donne

$$-4\pi \iiint x\,.\,\delta dx dy dz + \iint x \frac{d\overline{P}}{dn}\, d\sigma = \iint \overline{P}\, \frac{dx}{dn}\, d\sigma.$$

Or $\overline{P} = V_1$, et par suite du choix de l'origine

$$\iint x \frac{dV_1}{dn}\, d\sigma = 0,$$

il en est de même de

$$\iint \overline{P}\, \frac{dx}{dn}\, d\sigma = V_1 \iint \frac{dx}{dn}\, d\sigma,$$

car si l'on forme un cylindre parallèle à $ox$ et ayant pour base l'élément $d\sigma$, il détachera sur la surface $V_1$ un autre élément $d\sigma'$ tel que $\frac{dx'}{dn'}\, d\sigma'$ et $\frac{dx}{dn}\, d\sigma$ seront de signes contraires, et égaux en valeur absolue à la surface de la section droite du cylindre considéré ; les éléments de la surface $V_1$ pouvant ainsi se grouper deux à deux, on en déduit l'équation

$$\iiint x\,.\,\delta\, dx\, dy\, dz = 0.$$

qui, jointe à deux autres analogues obtenues en faisant successivement $U = y$, $U = z$, nous prouve que le centre de gravité de la couche $V_1$ est le même que celui de l'un quelconque des corps, d'où l'on conclut la seconde partie du théorème.

La troisième partie se démontre en faisant dans la même formule de Green $U = xy$ et $V = P$.

$$-4\pi \iiint xy\,.\,\delta\, dx\, dy\, dz + \iint xy \frac{dV_1}{dn}\, d\sigma = V_1 \iint \left( x \frac{dy}{dn} + y \frac{dx}{dn} \right) d\sigma_1.$$

Or, en nous servant du même cylindre que précédemment, on verrait que les deux expressions $\frac{dx}{dn}\, d\sigma$, $\frac{dx'}{dn'}\, d\sigma'$ qui sont égales et de signes contraires ont même $y$ ; donc

$$\iint y \frac{dx}{dn}\, d\sigma = 0.$$

Et de même

$$\iint x \frac{dy}{dn} d\sigma = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\iiint xy \,.\, \delta dx dy dz = 0,$$

en joignant à cette équation celles que l'on obtient en faisant successivement $U = xz$, $U = yz$, on conclut que les axes principaux d'inertie des corps coïncident.

Nous verrons plus loin que la coïncidence des axes d'inertie est loin d'entraîner l'égalité des moments d'inertie des corps autour de ces axes.

24. — Si l'on applique rigoureusement les mêmes démonstrations à l'espace compris entre deux couches

$$V = V_1, \quad V = V_2,$$

en prenant pour fonction V de la formule (1) le potentiel de l'action de la couche intérieure sur les points de l'espace, on en déduit les deux formules

$$\iint x \frac{dV_1}{dn} d\sigma_1 - \iint x \frac{dV_2}{dn} d\sigma_2 = 0,$$

$$\iint xy \frac{dV_1}{dn} d\sigma_1 - \iint xy \frac{dV_2}{dn} d\sigma_2 = 0,$$

équations qui nous montrent que les couches, constituées comme nous l'avons indiqué, partagent avec les corps cette propriété de communauté de centre de masse et d'axes principaux d'inertie.

Remarques. — Ces théorèmes s'appliquant tout aussi bien à la surface $V_0$, la dernière et la plus petite des surfaces V qu'aux autres, on en conclut que dans le cas très-fréquent, où celle-ci se réduira à un point, ce point sera le centre de gravité commun de tous les corps qui répondent à la question.

25. — Cela posé, l'une des surfaces

$$V = C^{te}$$

est intérieure à toutes les autres, elle est infiniment plate et peut se réduire soit à une ligne, soit à un point; elle répondra généralement à un maximum ou à un minimum algébrique de la fonction V; on aura donc en général, si $V_0$ est la valeur de V pour les points de cette surface,

$$(11) \qquad \frac{dV_0}{dx} = 0, \quad \frac{dV_0}{dy} = 0, \quad \frac{dV_0}{dz} = 0,$$

équations qui montrent que dans l'hypothèse actuelle, la surface $V_0$ sera beaucoup plus souvent un point qu'une ligne et surtout qu'une surface. Quoi qu'il en soit, l'une $V_0$ des surfaces V est intérieure à toutes les autres, et elle est extrêmement plate puisque les surfaces $V = C^{te}$ ne sauraient se couper ; c'est celle-là que nous appellerons la surface $V_0$.

Il résultera de ce qui va suivre que les équations (11), si elles ont une solution, n'en ont pas d'autre que la surface $V_0$, définie comme nous venons de le faire en dernier lieu, cette surface pouvant du reste se réduire soit à une ligne, soit à un point.

Soit maintenant $V = V_1$, ($V_1$ étant le rapport d'une masse donnée, à une longueur également donnée) l'équation d'une autre surface de niveau, si sur chaque élément $d\sigma$ de la surface $V_1$ nous répartissons une masse

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{dV_1}{dn}d\sigma,$$

nous aurons une couche attirante qui, d'après le théorème VI de M. Chasles aura V pour potentiel de son action sur les points extérieurs à cette couche. Supposons que l'on ait tracé entre $V_0$ et $V_1$ un nombre considérable K de surfaces de niveau répondant à des accroissements égaux $dV$ de V, de telle sorte que l'on ait

$$V_1 - V_0 = K dV,$$

et qu'en outre les équations (11) n'aient pas de solution comprise entre $V_0$ et $V_1$, ce qui veut tout simplement dire qu'on prendra $V_1$ assez rapproché de $V_0$ pour cela ; il en résultera que $dV$ conservera toujours le même signe, et c'est absolument nécessaire pour que l'on puisse affirmer que le nombre K des surfaces tracées entre $V_0$ et $V_1$ est égal à

$$\frac{V_1 - V_0}{dV};$$

Recouvrons maintenant chacune de ces surfaces d'une couche attractive de densité

$$\frac{1}{K}\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}\right),$$

chacune d'elles aura pour potentiel de son action sur les points extérieurs à $V_1$, la quantité $\frac{V}{K}$, et leur ensemble V. Pour que ces surfaces soient telles que la masse répartie sur l'une d'elles remplisse l'espace compris entre celle-là et la suivante, il faut prendre pour densité $\delta$ en un point quelconque, celle qui résulte de la formule

$$-\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}d\sigma = \delta\,.\,d\sigma\,dn\,,$$

d'où

$$\delta = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}\cdot\frac{1}{Kdn},$$

ou

(12)
$$\delta = \frac{1}{4\pi(V_0 - V_1)}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2,$$

densité essentiellement de même signe pour tous les points du corps ainsi formé. Et la densité sera en chaque point proportionnelle au quarré de la fonction qui représente l'attraction pour les points extérieurs.

26. — Si l'on prend des surfaces de niveau différentes pour limiter le corps, on a une série de solutions de la question qui nous occupe. Et si en particulier $V_1$ et $V_2$ sont deux surfaces de niveau limitant deux corps formés comme il a été dit, les densités d'un point quelconque commun à ces deux corps sont inversement proportionnelles aux différences $V_0 - V_1$, $V_0 - V_2$.

Si donc on appelle surfaces d'égale attraction, celles qui répondent à l'équation

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 = C^{te},$$

on en conclut que les surfaces d'égale attraction sont des surfaces d'égale densité pour les solutions que nous venons de former, et comme $\frac{dV}{dn}$ est la résultante de $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, on en conclut que ces surfaces ont pour équation

$$(13) \qquad \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = C^{te}.$$

Le premier membre est une fonction qui partage avec

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

la propriété de ne pas changer avec le système d'axes coordonnés. (Voir le remarquable ouvrage de M. Lamé sur les coordonnées curvilignes, première leçon.)

27. — Il résulte de ce qui précède que les équations

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0,$$

si elles ont une solution, n'en ont pas d'autre que la surface $V_0$. Si en effet un autre point de l'espace satisfaisait à ces équations, toute la surface de niveau sur laquelle il se trouve satisferait aussi à ces équations, et le corps $V_1$ intérieur à cette surface, serait sans action sur les points de celle-ci ; ce qui, en vertu du théorème V de M. Chasles, ne saurait avoir lieu puisque la masse de $V_1$ n'est pas nulle. La restriction que nous nous étions posée au commencement de ce chapitre, dans le choix de la surface $V_1$, n'a donc plus raison d'être.

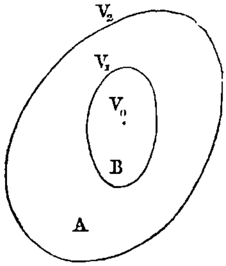
Partant de $V_0$ pour aller à l'infini, V va donc continuellement soit en croissant, soit en décroissant, et comme à l'infini il est nul, si $V_0$ est négatif les points des corps obtenus ont des masses négatives, autrement dit sont doués du pouvoir répulsif; si $V_0$ est positif, c'est le contraire qui arrive. Le premier cas ne différant du deuxième que par d'insignifiants changements dans les expressions à employer, celui-ci nous occupera seul. Ainsi donc $V_0 > 0$, V décroît à partir de $V_0$ jusqu'à l'infini où il devient nul.

28. — Si un point est intérieur au corps $V_1$, il n'est attiré que par la portion de corps limitée par la surface de niveau passant par le point en question. Le rapport des actions exercées par $V_1$ et $V_2$ sur A sera donc

$$\frac{V_0 - V_2}{V_0 - V},$$

puisque l'action de $V_1$ est $\frac{dV}{dn}$, et que celle de $V_2$ n'est que

$$\frac{V_1 - V}{V_1 - V_2} \frac{dV}{dn}.$$




L'action de $V_1$ sur B sera

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_1} \frac{dV}{dn},$$

et celle de $V_2$

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_2} \frac{dV}{dn};$$

leur rapport sera donc constant et égal au rapport des densités

$$\frac{V_0 - V_2}{V_0 - V_1},$$

ce qu'il était aisé de prévoir.

Les attractions des corps $V_1$ et $V_2$ ont donc un rapport égal à 1 pour les points extérieurs ; ce rapport varie de l'unité à $\frac{V_0 - V_2}{V_0 - V_1}$, pour les points extérieurs à l'un, intérieurs à l'autre, et il conserve cette dernière valeur pour les points intérieurs aux deux corps.

29. — Recherchons maintenant quelle est la fonction $v$ potentiel de l'action des corps précédemment trouvés sur les points qui leur sont intérieurs.

Décrivons comme précédemment entre $V_0$ et $V_1$, K surfaces de niveau, prenons un point quelconque de la $n^e$ à partir de $V_1$, soit V cette $n^e$ surface. La portion de $v$ provenant de la partie du corps comprise entre V et $V_1$ est représentée par

$$\frac{V + dV}{K} + \frac{V + 2dV}{K} + \ldots + \frac{V + ndV}{K} = \frac{nV}{K} + \frac{n(n+1)\,dV}{2K}.$$

Or

$$\frac{n}{K} = \frac{V - V_1^2}{V_0 - V_1}, \quad \lim (n+1)dV = \lim n dV = V_1 - V.$$

La somme précédente peut donc s'écrire

$$\frac{V - V_1}{V_0 - V_1}\left[V + \frac{V_1 - V}{2}\right] = \frac{V^2 - V_1^2}{2\,[V_0 - V_1]}.$$

Le potentiel de l'action de la portion du corps limitée par la surface V est

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_1} \cdot V;$$

on a donc

$$v = \frac{1}{2(V_0 - V_1)}\,[V^2 - V_1^2 + 2VV_0 - 2V^2],$$

$$(14) \qquad v = \frac{2VV_0 - V^2 - V_1^2}{2\,(V_0 - V_1)}.$$

On en conclut que les surfaces intérieures aux corps, fournies par l'équation $V = C^{te}$, sont aussi des surfaces de niveau, autrement dit que $v$ a la même valeur sur toute l'étendue de la même surface $V = C^{te}$.

Et aussi que les surfaces d'égal $\frac{dv}{dn}$, c'est-à-dire d'égale attraction du corps sur les points de son intérieur, sont des surface d'égal $\frac{dV}{dn}$, c'est-à-dire d'égale densité.

Il est clair que nous ne pouvons affirmer cela que pour les corps que nous venons d'obtenir.

Vérifions dans le cas actuel la formule fondamentale

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = -\,4\pi\delta.$$

On a

$$\frac{dv}{dx} = \frac{V_0 - V}{V_0 - V_1}\,\frac{dV}{dx}.$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{(V_0 - V)\,\frac{d^2V}{dx^2} - \left(\frac{dV}{dx}\right)^2}{V_0 - V_1},$$

et par suite

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-\frac{1}{V_0-V_1}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2=-4\pi\delta.$$

30. — THÉORÈME XVII. *Une surface quelconque étant donnée, on peut toujours la considérer comme une des surfaces de niveau ne coupant pas le corps inconnu à l'attraction duquel elles sont dues. Le potentiel de ce corps est à un facteur constant près, déterminé sur les points qui lui sont extérieurs.*

Ce théorème n'est en quelque sorte, qu'un corrolaire du théorème II de Georges Green. Si en effet, d'après ce théorème, on adopte pour $\overline{V}$ potentiel de l'action du corps sur les points de la surface donnée, une constante arbitraire, la fonction V potentiel de l'action d'une couche attirante recouvrant la surface donnée et ayant même action que le corps sur les points extérieurs, sera complétement déterminée. De plus, il est clair que si l'on multiplie $\overline{V}$ par un facteur constant arbitraire, V sera multiplié par le même nombre. D'où résulte le théorème énoncé.

Traduit en un théorème sur l'électricité, il montre qu'une masse électrique étant donnée, il est toujours possible de la répartir sur une surface donnée quelconque, de manière à ce qu'elle soit en équilibre sous sa seule action ; et qu'en outre, son action sur les points extérieurs est complétement déterminée à un facteur constant près, facteur qui n'est autre que la masse que l'on s'est donnée arbitrairement.

31. — Le problème qui consiste à rechercher cette fonction V est facile à résoudre, dans le cas où l'on sait trouver qu'elle doit être en chaque point la densité $\rho$ de la couche devant recouvrir la surface, pour que cette couche soit sans action sur un point intérieur. Ces quantités sont liées en effet par la relation très-simple

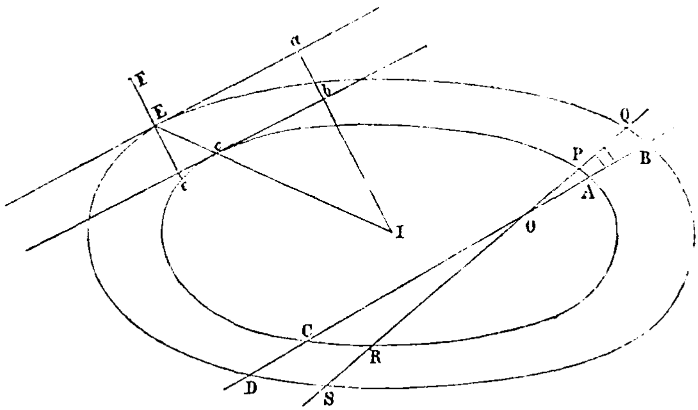
$$\frac{dV}{dn}=-4\pi\rho.$$

32. — Appliquons ces considérations à la résolution du problème suivant :

*Un ellipsoïde quelconque étant donné, si on le regarde comme une des surfaces de niveau dues à l'attraction d'un corps inconnu complétement intérieur, quel sera le potentiel V de l'action de ce corps sur les points extérieurs? Trouver des corps répondant à la question.*

33.— Pour résoudre ce problème, montrons d'abord que la couche attirante homogène, comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, est sans action sur les points de son intérieur.

Si, en effet, autour d'un point intérieur quelconque O on trace une série de




droites, les portions telles que PQ, RS d'une même droite seront égales; le plan diamétral conjugué de SQ est en effet le même pour l'un et l'autre ellipsoïde.

Si donc on appelle $d\omega$ l'élément d'une sphère de rayon 1 et ayant O comme centre, détaché par un cône ayant O pour sommet, l'action de ABPQ sera représentée par

$$\int_{oP}^{oQ} \frac{R^2 d\omega dR}{R^2} = PQ \,.\, d\omega,$$

elle sera donc détruite par celle de CDRS.

34. — La quantité $\frac{dV}{dn}$ qui, à un facteur constant près, représente la densité de la couche recouvrant la surface de niveau, et qui, sans agir sur les points intérieurs, attire les points extérieurs comme le corps lui-même, est donc proportionnelle à la portion de normale comprise entre deux ellipsoïdes semblables infiniment voisins. Or cette portion E$e$ de normale est, à un infiniment petit du second ordre près, égale à $ab$, distance de deux plans tangents aux deux ellipsoïdes et parallèles. Il en résulte que $\frac{dV}{dn}$ est proportionnel à la distance I$a = p$ du centre I de l'ellipsoïde au plan tangent en E.

35. — Cela posé, soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{15}$$

l'équation de l'ellipsoïde proposé.

Cherchons celle de la surface de niveau infiniment voisine $V + dV$, soit F le point de cette surface situé sur la normale de E. On a, C étant une constante,

$$\frac{dV}{dn} = Cp,$$

d'où

$$pdn = K,$$

quantité constante.

Appelons $x$, $y$, $z$, les coordonnées de E, $x'$, $y'$, $z'$, celles de F, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles de la normale $EF = dn$.

On a les équations

$$x' - x = dn \cos\alpha, \qquad y' - y = dn \cos\beta, \qquad z' - z = dn \cos\gamma,$$

et aussi

$$\cos\alpha = \frac{px}{a^2}, \qquad \cos\beta = \frac{py}{b^2}, \qquad \cos\gamma = \frac{pz}{c^2}.$$

On en tire

$$x' - x = \frac{Kx}{a^2}, \qquad y' - y = \frac{Ky}{b^2}, \qquad z' - z = \frac{Kz}{c^2},$$

d'où

$$x = \frac{x'}{1 + \frac{K}{a^2}}, \qquad y = \frac{y'}{1 + \frac{K}{b^2}}, \qquad z = \frac{z'}{1 + \frac{K}{c^2}}.$$

La surface de niveau infiniment voisine a donc pour équation

$$\frac{x'^2}{a^2\left(1 + \frac{K}{a^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{b^2\left(1 + \frac{K}{b^2}\right)^2} + \frac{z'^2}{c^2\left(1 + \frac{K}{c^2}\right)^2} = 1.$$

ou comme K est infiniment petit,

$$\frac{x'^2}{a^2 + 2K} + \frac{y'^2}{b^2 + 2K} + \frac{z'^2}{c^2 + 2K} = 1;$$

c'est un ellipsoïde homofocal avec le précédent.

Supposons $a > b > c$, si l'on pose $a^2 - b^2 = f^2$, $a^2 - c^2 = g^2$, on aura

$$f < g,$$

et l'équation générale cherchée des surfaces de niveau comprenant le corps à leur intérieur sera la série des ellipsoïdes homofocaux.

$$\frac{x'^2}{\lambda^2} + \frac{y'^2}{\lambda^2 - f^2} + \frac{z'^2}{\lambda^2 - g^2} = 1. \tag{16}$$

Ces surfaces étant connues, on pourrait en déduire le potentiel V cherché d'après la formule (9) établie précédemment. On trouverait ainsi V avec un facteur constant arbitraire, la constante introduite par la seconde intégration étant déterminée par la condition de V nul pour les points situés à l'infini. Il est peut-être plus simple de le rechercher directement comme suit.

36. — La quantité C qui est constante pour un même ellipsoïde varie d'un ellipsoïde à l'autre, mais elle est déterminée sur chacun d'eux par la formule

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi M,$$

M étant la masse arbitraire attribuée au corps inconnu; on a donc

$$C \int p d\sigma = -4\pi M.$$

Or soient $\delta a$ et $\delta p$ les accroissements de $a$ et $p$ lorsqu'on passe d'un ellipsoïde $a$, $b$, $c$ à l'ellipsoïde infiniment voisin semblable, on a

$$C \int p d\sigma = \frac{Ca}{\delta a} \int \delta p d\sigma,$$

et $\int \delta p d\sigma$ est le volume compris entre ces deux ellipsoïdes semblables, donc

$$\int \delta p d\sigma = \frac{4}{3} \pi abc \left[ \left(1 + \frac{\delta a}{a}\right)^3 - 1 \right] = 4\pi bc\delta a,$$

d'où

$$4\pi abc \,.\, C = -4\pi M,$$

$$C = -\frac{M}{abc}.$$

Il en résulte

$$dV = -\frac{M}{abc}\, pdn.$$

Et comme lorsqu'on passe d'une surface de niveau à l'autre $dV$ est constant, il en est de même de $pdn$,

$$pdn = ada,$$

donc

$$dV = -M\,\frac{da}{bc},$$

$$(17)\qquad dV = -M\,\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - f^2}\sqrt{\lambda^2 - g^2}}.$$

La fonction V est donc une fonction elliptique. Il est très-aisé de lui donner la forme habituelle de ces fonctions.

Posons

$$\lambda = \frac{g}{\sin\varphi},$$

d'où

$$d\lambda = -\frac{g\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$dV = M\,\frac{g\cos\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{\left(\frac{g^2}{\sin^2\varphi} - f^2\right)\left(\frac{g^2}{\sin^2\varphi} - g^2\right)}} = M\,\frac{d\varphi}{\sqrt{g^2 - f^2\sin^2\varphi}}.$$

Posons enfin $\frac{f^2}{g^2} = e^2$, on a

$$dV = \frac{M}{g}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}};$$

c'est bien la fonction elliptique sous sa forme habituelle.

37. — Il résulte de ce que nous avons dit, qu'on pourra former une infinité d'ellipsoïdes ayant V pour potentiel sur les points extérieurs, ayant autrement dit pour surfaces extérieures de niveau des ellipsoïdes homofocaux.

Si $V = V_1$ est l'ellipsoïde qui limite l'un d'eux, sa densité $\delta$ sera en chaque point donnée par la formule

$$\delta = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(V_0 - V_1)} \left(\frac{dV}{dn}\right)^2,$$

la surface $V_0$ ne sera autre que l'ellipse

$$\frac{x^2}{g^2} + \frac{y^2}{g^2 - f^2} = 1. \tag{18}$$

Un ellipsoïde creux compris entre les surfaces

$$V = V_1, \qquad V = V_2,$$

et ayant en chaque point pour densité

$$\delta = \frac{1}{4\pi(V_1 - V_2)} \left(\frac{dV}{dn}\right)^2,$$

répondra également bien à la question.

Dans un cas comme dans l'autre, la densité sera proportionnelle à $\left(\frac{dV}{dn}\right)^2$ ou à $\frac{p^2}{a^2b^2c^2}$. Elle est donc, pour les divers points d'un même ellipsoïde, proportionnelle au quarré de la distance du centre au plan tangent à cet ellipsoïde au point considéré.

38. — Ici $V_0$ ne répond nullement à un maximum de V. On trouve, en effet, que la densité des points situés dans l'intérieur de l'ellipse $V_0$ n'est pas nulle, elle est donnée par la formule

$$\frac{1}{4\pi(V_0 - V_1)} \frac{M^2}{g^2(g^2 - f^2)} \lim. \left(\frac{p}{c}\right)^2, \quad \text{pour } c = 0,$$

laquelle limite varie de l'unité à l'infini. La densité des points de la surface $V_0$ va donc en croissant à partir du centre, pour devenir infinie sur les points du contour

$$\frac{x^2}{g^2} + \frac{y^2}{g^2 - f^2} = 1.$$

On évite cette difficulté en prenant comme solution les ellipsoïdes creux.

39. — Cherchons à tracer sur un ellipsoïde compris entre $V_1$ et $V_2$, et homofocal avec ceux-là, les lignes d'égale densité du corps précédemment déterminé. Ces lignes seront, du reste, communes à tous les corps que nous avons trouvés. Elles répondent aux plans tangents également distants du centre, autrement dit à l'équation

$$r^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=1. \tag{19}$$

C'est celle d'une série d'ellipsoïdes semblables, ayant leurs axes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ disposés dans le même ordre de grandeur que ceux de l'ellipsoïde sur lequel elles tracent les lignes d'égale densité

$$\alpha=\frac{a^2}{r},\quad \beta=\frac{b^2}{r},\quad \gamma=\frac{c^2}{r}.$$

Les axes de ces ellipsoïdes sont proportionnels aux quarrés de ceux qui leur correspondent dans l'ellipsoïde donné.

Il en résulte que pour que l'un de ces ellipsoïdes donne des lignes d'égale densité, il faut que

$$\alpha > a,$$

autrement dit que

$$r < a;$$

ce qu'il était bien facile de prévoir.

Sur un même ellipsoïde, la densité est maximum au sommet du grand axe, minimum à celui du petit.

Et pour les divers points d'un même axe, elle est en raison inverse du quarré du produit des autres axes de l'ellipsoïde dont le point que l'on considère est un sommet.

Enfin, il est à remarquer que les corps que l'on obtient ainsi sont symétriques par rapport aux plans coordonnés, non-seulement quant aux surfaces qui les limitent, mais encore relativement aux densités.

# CHAPITRE III.

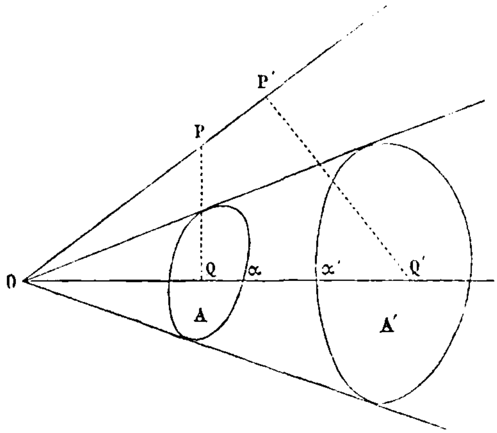
---

40. — Le principe de la transformation par rayons vecteurs réciproques peut nous donner une foule de solutions de la question qui nous occupe. solutions très-faciles à déduire de celles qui précèdent. Rappelons ce principe :

Un point P′ est dit l'image de P quand étant situé sur le même rayon vecteur que P, son rayon vecteur est lié à celui de P par la relation

$$\mathrm{OP}\,.\,\mathrm{OP}' = a^2.$$

Un corps A′ est dit l'image de A quand ses points géométriques sont les




images de ceux de A, et quand les masses $m$ et $m'$ de deux points correspondants sont liées par la relation

$$m' = m\,\frac{a}{\mathrm{OQ}}.$$

Le potentiel V de l'action de A sur P est lié par une relation très-simple avec celui V′ de l'action de A′ sur P′. Les potentiels de Q sur P et de Q′ sur P′ ont, en effet, pour rapport

$$\frac{\dfrac{m}{\mathrm{PQ}}}{\dfrac{m'}{\mathrm{P'Q'}}} = \frac{m}{m'}\,\frac{\mathrm{P'Q'}}{\mathrm{PQ}} = \frac{m}{m'}\,\frac{\sqrt{\mathrm{OQ'}.\mathrm{OP'}}}{\sqrt{\mathrm{OQ}\,.\,\mathrm{OP}}} = \frac{m}{m'}\,\frac{a^2}{\mathrm{OQ}\,.\,\mathrm{OP}} \qquad \frac{a}{\mathrm{OP}}.$$

Ce rapport est indépendant de la position du point Q; la même relation subsiste donc entre V et V′, et l'on a

$$\frac{V}{V'} = \frac{a}{OP} = \frac{OP'}{a}. \tag{20}$$

41. — Il résulte immédiatement de cette équation un théorème énoncé par M. Bertrand dans son *Traité de calcul différentiel*, chapitre VI, 8ᵉ Exercice. Appelons $x$, $y$, $z$, les coordonnées de P, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ celles de P′, on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OP^2}{a^2},$$

d'où

$$\alpha = \frac{a^2 x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \beta = \frac{a^2 y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \gamma = \frac{a^2 z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Posons maintenant

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{a^2} = \frac{a^2}{x^2+y^2+z^2},$$

on aura

$$V' = \frac{V}{\rho}.$$

Or, si P est extérieur au corps A, P′ est extérieur à A′, autrement dit l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

entraîne

$$\frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\gamma^2} = 0.$$

(Pour passer de ce théorème à celui qu'indique M. Bertrand, il suffit de faire $a = 1$.)

42. — Nous donnerons de ce théorème une démonstration directe, parce que dans le cas où les quantités précédentes ne sont pas nulles, il existe entre elles une relation dont nous aurons besoin plus loin.

On a d'abord

$$\frac{d^2 \frac{V}{\rho}}{d\alpha^2} = \frac{1}{\rho}\frac{d^2V}{d\alpha^2} + 2\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\alpha}.\frac{dV}{d\alpha} + V\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\alpha^2}.$$

Or on a

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\gamma^2} = 0,$$

donc

$$\frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\gamma^2} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2}\right) - \frac{2}{a^2\rho^3}\left(\alpha\frac{dV}{d\alpha} + \beta\frac{dV}{d\beta} + \gamma\frac{dV}{d\gamma}\right).$$

Posons

$$\rho = \frac{1}{r},$$

d'où

$$\alpha = \frac{x}{r^2},$$

$$d\alpha = \frac{1}{a^2}\frac{(x^2+y^2+z^2)dx - 2x(xdx+ydy+zdz)}{r^4},$$

$$d\alpha = \frac{1}{a^2}\frac{(y^2+z^2-x^2)dx - 2xydy - 2xzdz}{r^4},$$

$$d\beta = \frac{1}{a^2}\frac{-2xydx + (x^2+z^2-y^2)dy - 2yzdz}{r^4},$$

$$d\gamma = \frac{1}{a^2}\frac{-2xzdx - 2yzdy + (x^2+y^2-z^2)dz}{r^4},$$

Et par suite

$$d^2\alpha = \frac{2}{a^4}\frac{-(x^2+y^2+z^2)xdx^2 - 2(y^2+z^2-x^2)xdx^2 + \ldots}{r^6},$$

$$d^2\beta = \frac{2}{a^4}\frac{-(x^2+y^2+z^2)ydx^2 + 4x^2ydx^2 + \ldots\ldots}{r^6},$$

$$d^2\gamma = \frac{2}{a^4}\frac{-(x^2+y^2+z^2)zdx^2 + 4x^2zdx^2 + \ldots\ldots}{r^6}.$$

Et comme

$$d^2V = \frac{d^2V}{d\alpha^2}d\alpha^2 + \frac{d^2V}{d\beta^2}d\beta^2 + \frac{d^2V}{d\gamma^2}d\gamma^2 + 2\frac{d^2V}{d\alpha d\beta}d\alpha d\beta + 2\frac{d^2V}{d\alpha d\gamma}d\alpha d\gamma + 2\frac{d^2V}{d\beta d\gamma}d\beta d\gamma$$
$$+ \frac{dV}{d\alpha}d^2\alpha + \frac{dV}{d\beta}d^2\beta + \frac{dV}{d\gamma}d^2\gamma,$$

6

on en déduit

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{1}{a^4}\left[\begin{array}{l}\frac{(y^2+z^2-x^2)^2}{r^8}\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{4x^2y^2}{r^8}\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{4x^2z^2}{r^8}\frac{d^2V}{d\gamma^2}-4\frac{xy(y^2+z^2-x^2)}{r^8}\frac{d^2V}{d\alpha d\beta}\\ -4\frac{xz(y^2+z^2-x^2)}{r^8}\frac{d^2V}{d\alpha d\gamma}+8\frac{x^2yz}{r^8}\frac{d^2V}{d\beta d\gamma}-2\frac{\alpha}{r^4}(3y^2+3z^2-x^2)\frac{dV}{d\alpha}\\ -2\frac{\beta}{r^4}(y^2+z^2-3x^2)\frac{dV}{d\beta}-2\frac{\gamma}{r^4}(y^2+z^2-3x^2)\frac{dV}{d\gamma}.\end{array}\right]$$

Faisant la somme des expressions analogues, on a, après des réductions qui s'aperçoivent presque immédiatement,

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{1}{a^4}\left[\frac{a^4}{r^4}\left(\frac{d^2V}{d\alpha^2}+\frac{d^2V}{d\beta^2}+\frac{d^2V}{d\gamma^2}\right)-\frac{2a^2}{r^2}\left(\alpha\frac{dV}{d\alpha}+\beta\frac{dV}{d\beta}+\gamma\frac{dV}{d\gamma}\right)\right],$$

ou

$$(21)\quad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\rho^4\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)-\frac{2\rho^2}{a^2}\left(\alpha\frac{dV}{d\alpha}+\beta\frac{dV}{d\beta}+\gamma\frac{dV}{d\gamma}\right),$$

ou encore

$$(22)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\rho^5\left(\frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\alpha^2}+\frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\beta^2}+\frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\gamma^2}\right),$$

équation qui conduit immédiatement au théorème de M. Bertrand et qui en fournit un plus général.

43. — Appliquons actuellement le théorème de la transformation par rayons vecteurs réciproques, au corps creux compris entre deux ellipsoïdes homofocaux, dont nous nous sommes occupé à la fin du chapitre précédent. Nous prendrons le centre commun de ces ellipsoïdes pour centre de transformation, et nous appellerons K la ligne appelée $a$ précédemment, pour éviter toute confusion.

Les images des ellipsoïdes compris entre $V_1$ et $V_2$, seront des surfaces ayant pour équation

$$(23)\qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}{K^4};$$

Ce sont des surfaces du quatrième degré admettant les plans coordonnés comme plans de symétrie; elles ont toutes leurs axes disposés de la même manière, et les grands axes de ces surfaces répondent aux petits des ellipsoïdes et inversement. Elles jouissent de cette propriété, bien facile à prévoir du reste, qu'elles peuvent être engendrées par le mouvement d'une ligne du quatrième degré intersection de l'ellipsoïde

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=\frac{K^4}{r^4},$$

semblable à l'ellipsoïde primitif, et dans lequel $r$ est arbitraire, avec la sphère

$$x'^2+y'^2+z'^2=r^2,$$

cette ligne se projetant sur les plans coordonnés suivant des courbes du second degré.

44. — Pour achever de définir ce nouveau corps, cherchons quelle devra être sa densité au point $x'$, $y'$, $z'$.

Les masses $m$ et $m'$ de deux points correspondants, sont liées par la relation

$$m'=m\,\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{K}.$$

Mais si $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ sont les volumes d'éléments correspondants, on a

$$m=\varepsilon\delta, \qquad m'=\varepsilon'\delta',$$

et la relation qui lie les densités est la suivante:

$$\delta'=\delta\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\,\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{K}.$$

Prenons des coordonnées polaires, on aura

$$\varepsilon=\rho^2 d\rho\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$
$$\varepsilon'=\rho'^2 d\rho'\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{\rho^2 d\rho}{\rho'^2 d\rho'},$$

et comme

$$\rho\rho' = K^2,$$

on a en valeur absolue

$$\frac{d\rho}{d\rho'} = \frac{\rho}{\rho'},$$

donc

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\rho^3}{\rho'^3} = \frac{K^6}{\rho'^6}.$$

Et par suite

(24) $$\delta' = \delta \frac{K^5}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Et comme dans le cas qui nous occupe

(25) $$\delta = \frac{M^2}{4\pi(V_1 - V_2)} \frac{p^2}{a^2 b^2 c^2},$$

on a

$$\delta' = \frac{M^2 K^5}{4\pi(V_1 - V_2)} \frac{p^2}{a^2 b^2 c^2} \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Appelons $a'$, $b'$, $c'$, les axes de la surface du quatrième degré passant par $x'$, $y'$, $z'$, et $p'$ la distance du centre au plan tangent à ce point ; on a

$$\frac{1}{a^2 b^2 c^2} = \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{K^{12}},$$

et

$$\frac{p}{p'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{K^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

d'où

(26) $$\delta' = \frac{M^2}{4\pi(V_1 - V_2) K^3} \frac{p'^2 a'^2 b'^2 c'^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{9}{2}}}.$$

Pour les divers points d'une même surface, la densité est donc proportionnelle au quarré de la distance au centre du plan tangent au point considéré, et en raison inverse de la neuvième puissance du rayon vecteur de ce point.

Cette formule nous montre encore que la symétrie des volumes par rapport aux trois plans coordonnés n'est pas la seule, les corps obtenus sont tels que, pour l'un quelconque d'entre eux, les points symétriques ont des densités égales.

45. — Étudions plus particulièrement les densités des points situés sur les axes coordonnés, en nous attachant seulement à la quantité variable dans cette densité

$$\delta' = A \frac{p'^2 a'^2 b'^2 c'^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{9}{2}}}.$$

1° Pour l'axe des $z$, on a

$$\delta' = A \frac{a'^2 b'^2}{c'^5} = \frac{A}{K^2} \frac{c^5}{(c^2 + g^2)(c^2 + h^2)},$$

en posant

$$h^2 = g^2 - f^2.$$

Quand $c$ croît la densité croît aussi, autrement dit quand $c'$ croît $\delta'$ va en décroissant.

2° Pour les points de l'axe des $y$, on a

$$\delta' = \frac{A}{K^2} \frac{b^5}{(b^2 + f^2)(b^2 - h^2)}.$$

Or la valeur minimum de $b$ est

$$b = h;$$

donc quand $b$ croît, $\delta'$ commence par décroître puisqu'elle part de l'infini pour $b=h$. Les valeurs minimum ou maximum de $\delta'$ répondent aux valeurs de $b$ données par l'équation

$$b^4 - 3b^2(h^2 - f^2) - 5f^2 h^2 = 0,$$

une seule des deux valeurs de $b^2$ fournies par cette équation est positive ; elle donne pour $b$ les valeurs suivantes

$$(27) \qquad b = \pm \sqrt{\frac{3(h^2 - f^2) + \sqrt{9(h^4 + f^4) + 2h^2 f^2}}{2}}.$$

Ainsi, si la valeur extrême de $b'$ est supérieure à

$$\sqrt{\frac{2K^4}{3(h^2-f^2)+\sqrt{9(h^4+f^4)+2h^2f^2}}},$$

la densité $\delta'$ décroît, quand $b'$ décroît jusqu'à la valeur précédente; à partir de ce point, $b'$ continuant à décroître, $\delta'$ va en croissant. Encore faut-il, pour que ce que nous venons de dire soit exact, que la valeur trouvée précédemment pour $b'^2$ soit supérieure à $h^2$, sans quoi $b'$ ne saurait passer par la valeur correspondante; or je dis que cela a toujours lieu, autrement dit que l'inégalité

$$3(h^2-f^2)+\sqrt{9(h^4+f^4)+2h^2f^2}>2h^2,$$

est toujours vérifiée. Elle l'est d'abord dans le cas de

$$h^2-3f^2>0, \qquad \text{ou} \qquad g^2>4f^2,$$

et dans le cas contraire elle revient à

$$9(h^4+f^4)+2h^2f^2>(3f^2-h^2)^2,$$

ou

$$8h^2(h^2+f^2)>0,$$

inégalité qui est toujours vraie.

S'il s'agit de l'ellipsoïde planétaire

$$a=b, \qquad f=0, \qquad h=g,$$

et la valeur de $b'$ qui rend la densité minimum est

$$\frac{K^2}{g}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Pour l'ellipsoïde ovaire

$$b=c, \qquad f=g, \qquad h=0,$$

et la valeur de $b'$ qui rend la densité minimum est infinie, $\delta'$ va donc en croissant quand $b'$ décroît, ce que du reste la formule

$$\delta' = \frac{A}{K^2} \frac{b^3}{b^2 + f^2},$$

qui s'applique au cas actuel, montre immédiatement

3° Étudions enfin la densité des points de l'axe des $x$.

Elle est donnée par la formule

$$\delta' = \frac{A}{K^2} \frac{a^5}{(a^2 - f^2)(a^2 - g^2)};$$

la valeur minimum de $a$ est $g$, donc quand $a$ croît, c'est-à-dire si $a'$ décroît $\delta'$ qui part de l'infini commence par décroître, si toutefois la valeur de $a'$ qui rend $\delta'$ minimum fournit un point du corps, ce qui dépend uniquement du rapprochement plus ou moins grand de l'ellipsoïde $V_1$, de l'ellipse $V_0$.

Les valeurs de $a$ qui rendent $\delta'$ minimum ou maximum sont fournies par l'équation

$$a^4 - 3a^2(f^2 + g^2) + 5f^2g^2 = 0.$$

Les racines en $a^2$ de cette équation sont réelles et positives.

Elles donnent

$$a = \sqrt{\frac{3(f^2 + g^2) \pm \sqrt{9(f^4 + g^4) - 2f^2g^2}}{2}},$$

$\delta'$ est donc minimum pour

$$a' = \sqrt{\frac{2K^4}{3(f^2 + g^2) - \sqrt{9(f^4 + g^4) - 2f^2g^2}}},$$

après quoi $a'$ continuant à décroître, $\delta'$ croît jusqu'à ce que

$$(28) \qquad a' = \sqrt{\frac{2K^4}{3(f^2 + g^2) + \sqrt{9(f^4 + g^4) - 2f^2g^2}}}.$$

et alors $\delta'$ atteint sa valeur maximum, $a'$ décroissant encore $\delta'$ décroît également. Cette seconde valeur rend, au contraire, $\delta'$ minimum si la 1<sup>re</sup> correspond à une valeur de $a$ inférieure à $g$.

Or il est a remarquer que la 1re valeur de $a'$ fournira toujours un point en dehors du corps ; elle répond en effet à

$$a^2 = \frac{3(f^2+g^2)-\sqrt{9(f^4+g^4)-2f^2g^2}}{2},$$

quantité inférieure à la valeur minimum $g^2$ de $a^2$

Si nous posons en effet

$$3(f^2+g^2)-\sqrt{9(f^4+g^4)-2f^2g^2} < 2g^2,$$

on trouve que cette inégalité revient à la suivante

$$8g^2h^2 > 0,$$

ce qui est exact, tandis qu'à la 2e valeur de $a'$ répond une valeur de $a$ toujours supérieure à $g^2$; si donc ce second point est dans le corps considéré, la densité décroîtra quand $a'$ décroîtra de $a'_1$ à la 2e des valeurs précédentes pour aller ensuite en croissant jusqu'à $a'=a'_2$.

Il se passe donc pour l'axe des $x$, ce qui se passait sur l'axe des $y$, sur lequel nous avons déterminé un point de densité minimum.

Pour l'ellipsoïde planétaire, la valeur précédente de $a'$ devient

$$\frac{K^2}{g}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé précédemment pour l'axe des $y$.

Enfin, dans le cas de l'ellipsoïde ovaire, la 2e valeur de $a'$ est

$$\frac{K^2}{f};$$

seulement elle ne correspond plus à un minimum de $\delta'$, mais bien à un maximum, puisqu'elle donne $\delta'=\infty$.

Dans ce dernier cas la densité va donc continuellement en croissant quand $a'$ croît de $a'_2$ à $a'_1$. Il se passe précisément l'inverse pour les rayons équatoriaux.

46. — Il nous reste encore à signaler un fait assez intéressant. Le corps

creux compris entre les deux ellipsoïdes $V_1$ et $V_2$ a, sur les points de son intérieur un potentiel constant, celui $V'$ de son transformé sur les points qui lui sont extérieurs est donc en raison inverse de la distance du point considéré au centre

$$V' = \frac{KV}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}};$$

autrement dit, ce nouveau corps creux attire les points extérieurs comme le ferait une masse KV concentrée en son centre. Rien d'aussi simple ne se présente pour les points placés dans sa cavité, puisque ceux-ci sont les correspondants des points extérieurs à l'ellipsoïde.

47. — Revenons maintenant à l'objet principal de notre étude.

*Trouver des corps ayant sur les points qui leur sont extérieurs un potentiel donné.*

Et voyons comment la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques peut nous fournir de nouvelles solutions de cette question.

Je prends *à priori* un point quelconque O pour centre des transformations, et j'appelle V la valeur du potentiel donné, O étant l'origine des coordonnées et les axes coordonnés étant parallèles aux axes primitifs. Je prends également le paramètre $a$ arbitraire, et je cherche à former les images A' des corps A répondant à la question ; ils ont pour potentiel sur un point extérieur $x'$, $y'$, $z'$, image de $x$, $y$, $z$

$$V' = V \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a} = V \frac{a}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Soit

$$V = F(x, y, z),$$

cherchons à déterminer

$$V' = \varphi(x', y', z'),$$

$$(29) \qquad V' = \frac{a}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} F\left(\frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a^2 z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right).$$

V' est donc connu, et par la méthode précédemment indiquée nous pourrons former un corps A' terminé par la surface

$$V' = V'_1 = C''$$

et ayant V′ pour potentiel de son action sur un point extérieur $x'$, $y'$, $z'$. Prenant l'image A de A′, ce corps aura V pour potentiel de son action sur les points extérieurs $x$, $y$, $z$.

48. — On pourrait craindre que cette méthode ne fasse retomber sur l'une des solutions précédemment indiquées; il n'en est rien, et pour s'en convaincre il suffit de rechercher quelle est la surface qui limite leur nouveau corps A, autrement dit quelle est l'image de la surface

$$V' = V'_1.$$

La valeur de V pour les points de cette surface est donnée par l'équation

$$V = \frac{V'_1}{a} \cdot O\alpha'.$$

Comme $\frac{V'_1}{a}$ est constant et que $O\alpha'$ ne l'est pas, V n'est pas constant pour les points de la surface qui limite le corps, ce qui montre que la solution obtenue est nouvelle.

De là une très-nombreuse série de solutions. En effet, pour O et $a$ arbitraires on a une série de corps A obtenus en prenant successivement pour limiter A′, les surfaces

$$V' = C^{te}.$$

Faisant varier $a$ on a pour chacune des valeurs de cette quantité une série de surfaces; et enfin O occupant successivement tous les points de l'espace, on multiplie encore à l'infini le nombre des solutions de la question.

49. — Pour achever de résoudre le problème, il faut encore déterminer la densité $\delta$ du corps A au point $x$, $y$, $z$.

Or nous avons trouvé (24)

$$\delta = \delta' \frac{a^5}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Et comme

$$= \frac{1}{4\pi(V'_0 - V'_1)} \left(\frac{dV'}{dn'}\right)^2.$$

il en résulte

$$(30) \qquad \delta = \frac{1}{4\pi(V'_0 - V'_1)} \left(\frac{dV'}{dn'}\right)^2 \frac{a^5}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Enfin, pour dégager la solution de ce problème de ses intermédiaires, il convient d'exprimer $\delta$ en fonction de $x$, $y$, $z$; $V_1'$ et $V_0'$ sont deux constantes dont l'une $V_1'$ est tout à fait arbitraire. La surface qui limite le corps A a pour équation

$$(31) \qquad \frac{V\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a} = V'_1,$$

et $\delta'$ étant déterminé en fonction de $x$, $y$, $z$, le problème sera complétement résolu. Or on a

$$\left(\frac{dV'}{dn'}\right)^2 = \left(\frac{dV'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dV'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dV'}{dz'}\right)^2,$$

$$V' = \frac{aV}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Et

$$\frac{dV'}{dx'} = a\left[\frac{-x'V}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\left(\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dx'} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dy'} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{dz'}\right)\right].$$

de plus

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{y^2+z^2-x^2}{a^2},$$

$$\frac{dy}{dx'} = -2\frac{xy}{a^2},$$

$$\frac{dz}{dx'} = -2\frac{xz}{a^2};$$

on a donc

$$(32) \qquad \frac{dV'}{dx'} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a^3}\left[-Vx + (y^2+z^2-x^2)\frac{dV}{dx} - 2xy\frac{dV}{dy} - 2xz\frac{dV}{dz}\right].$$

Il y a quelques simplifications dans la somme des quarrés de

$$\frac{dV'}{dx'}, \qquad \frac{dV'}{dy'}, \qquad \frac{dV'}{dz'}.$$

Ainsi le coefficient de $V^2$ sera $\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{a^6}$, ce sera aussi celui de $2xV\frac{dV}{dx}$.

Le coefficient de $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ sera

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^6}\left[(y^2+z^2-x^2)^2+4x^2y^2+4x^2z^2\right]=\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{a^6},$$

ceux de $\left(\frac{dV}{dy}\right)^2$ et de $\left(\frac{dV}{dz}\right)^2$, seront par conséquent les mêmes.

Enfin celui de $\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dV}{dy}$ sera

$$4\frac{x^2+y^2+z^2}{a^6}\left[-xy(y^2+z^2-x^2)-xy(x^2+z^2-y^2)+2xyz^2\right]=0.$$

En sorte que nous aurons

$$(33)\quad \delta=\frac{1}{4\pi(V'_0-V'_1)}\frac{1}{a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left\{2V\left[\frac{V}{2}+x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}+z\frac{dV}{dz}\right]\right.$$
$$\left.+(x^2+y^2+z^2)\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]\right\}.$$

La nouvelle série de solutions fournies par la transformation par rayons vecteurs réciproques, est ainsi complétement déterminée.

50. Remarque. — Il résulte de l'équation (30) qui donne $\delta$, que si pour une même position de O et la même valeur du paramètre $a$, un point $\beta'$ fait partie de deux corps ayant $V'$ pour potentiel extérieur, $\beta$ image de $\beta'$ répondra aussi à deux corps ayant V pour potentiel extérieur, et le rapport des densités en $\beta$ sera égal au rapport des densités en $\beta'$, et par suite le même pour tous les points communs aux deux corps obtenus ayant V pour potentiel extérieur.

51. — Occupons-nous maintenant de rechercher s'il est possible, à l'aide de

la première des deux méthodes précédentes, d'obtenir des corps semblables quant aux surfaces qui les limitent.

Si d'abord les surfaces $V = C^{te}$ sont semblables, les corps obtenus par la première méthode seront semblables non-seulement quant à leurs surfaces extérieures, mais encore quant aux densités des points homologues. Supposons l'origine transportée au centre de similitude, et soit $V = F(x, y, z)$. On doit, dans l'hypothèse actuelle, pouvoir identifier quel que soit K, les équations

$$V = F(Kx', Ky', Kz'),$$
$$V' = F(x', y', z'),$$

dans lesquelles V et V' sont des constantes. Cette identification suppose l'homogénéité de V. Or si un potentiel V est homogène, il est de degré $-1$, car multiplié par $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, il doit donner pour $r$ infini un produit fini. Donc, dans le cas actuel, on aura $V_1 = VK$, K étant le rapport de similitude

$$K = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Les solutions obtenues à l'aide de la première méthode ne peuvent fournir de corps semblables que dans le cas indiqué, et nous verrons plus loin que V est dans ce cas de la forme $\frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

52. — Quant à la deuxième méthode, nous ne rechercherons pas d'une manière générale si elle peut donner des corps semblables, mais nous étudierons deux cas particuliers, dans lesquels il semble qu'elle doive en donner.

53.—Si tout d'abord, pour une même position de O et une même valeur de $a$, les surfaces V' sont semblables et ont O pour centre de similitude, il en est de même des surfaces qui limitent nos corps, le rapport de similitude de deux de ces surfaces étant l'inverse de celui des surfaces V' correspondantes. Pour que cela ait lieu, il faut pouvoir identifier les équations

$$V' = \frac{a}{K\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} F\left[\frac{a^2x'}{K(x'^2 + y'^2 + z'^2)}, \frac{a^2y'}{K(x'^2 + y'^2 + z'^2)}, \frac{a^2z'}{K(x'^2 + y'^2 + z'^2)}\right],$$
$$V'_1 = \frac{a}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} F\left[\frac{a^2x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a^2y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a^2z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right],$$

ce qui nécessite que la fonction F soit homogène, et comme dans ce cas elle est de degré $-1$, $V'$ serait indépendant de K, $V' = V'_1$ ; autrement dit le potentiel $V'_1$ serait constant, et alors la méthode déduite de la théorie des images, ne peut nous donner aucune solution.

54. — Enfin, pour une même position de O, on conçoit qu'il soit possible d'obtenir des corps ayant des surfaces extérieures semblables et ayant O pour centre de similitude. Il suffit que l'une des surfaces $V'_1$, répondant au paramètre $a_1$, puisse coïncider avec l'une des surfaces $V'$ de paramètre fixe $a$, et cela, quel que soit $a_1$, la coïncidence ayant lieu toujours avec la même surface $V'$ de paramètre $a$. Or nous avons vu que si deux corps de potentiel extérieurs $V'$ et $V'_1$ ont une surface de niveau commune, il en est de même de toutes les autres, et que ces potentiels ont pour un même point extérieur quelconque un rapport constant ; comme

$$V' = \frac{a}{\sqrt{x'^2 + y'^2 = z'^2}} F\left(\frac{a^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a^2 y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a^2 z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right),$$

$$V'_1 = \frac{a_1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} F\left(\frac{a_1^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a_1^2 y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \frac{a_1^2 z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right),$$

il faut, pour que leur rapport soit indépendant de $x'$, $y'$, $z'$, que F soit homogène. Et nous avons vu que l'homogénéité de F ne permettait pas l'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques, puisque cette homogénéité conduit à la constance du potentiel $V'$.

55. — Il résulte encore de ce qui précède, que si V est homogène, il est de la forme $\frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, car multiplié par $\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}$, il doit donner $V'$, c'est-à-dire une quantité constante.

On pourrait se figurer que dans ce cas $V'$, potentiel de l'action d'un corps sur les points extérieurs, ne peut être constant sans être nul ; il n'en est rien, et il est facile de voir pourquoi. L'origine, qui est le centre de gravité de tous les corps ayant $\frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ pour potentiel, est à l'intérieur de ces corps ou dans eur cavité, quand ils en ont une, sans quoi en ce point le potentiel de l'action du corps résulterait de la formule $\frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ et serait infini, ce qui ne peut être. Il en résulte que le corps ayant pour potentiel V′, a une cavité image de la surface extérieure du corps de potentiel V, et que les points de cette cavité sont les images des points extérieurs au corps primitif. Le résultat auquel nous sommes parvenus précédemment veut donc simplement dire que le deuxième corps, image de celui de potentiel V, a sur les points de sa cavité un potentiel constant, ce qui évidemment n'entraîne point sa nullité.

56.— Recherchons maintenant le potentiel $v$ des corps obtenus par la théorie des images sur les points de leur intérieur. On a toujours

$$v = v' \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Or

$$v' = \frac{2V'V'_0 - V'^2 - V'^2_1}{2(V'_0 - V'_1)}.$$

et l'on a pour déterminer V′ la relation

$$V' = \frac{V\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a};$$

on aura donc en définitive pour calculer $v$ la formule

$$(34) \qquad v = \frac{2VV'_0 - \frac{V^2}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{aV'^2_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{2(V'_0 - V'_1)}.$$

Vérifions la formule fondamentale

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = -4\pi\delta.$$

Nous avons précédemment démontré la formule

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \rho^5\left(\frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{V}{\rho}}{d\gamma^2}\right),$$

V étant une fonction quelconque de $x$, $y$, $z$; appliquons cette équation à la fonction $v$, on a

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{a^5}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{d^2v'}{dx'^2}+\frac{d^2v'}{dy'^2}+\frac{d^2v'}{dz'^2}\right)$$
$$=-4\pi\delta.$$

C. Q. F. D.

---

# CORPS CREUX.

57. — Si l'on veut former un corps creux ayant V pour potentiel extérieur, et compris entre les surfaces de niveau $V_1$ et $V_2$, il faudra lui donner en chaque point une densité

$$\delta=\frac{1}{4\pi(V_1-V_2)}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2.$$

Le potentiel $v$ des points du corps est

$$v=\frac{2VV_1-V^2-V^2_2}{2(V_1-V_2)}.$$

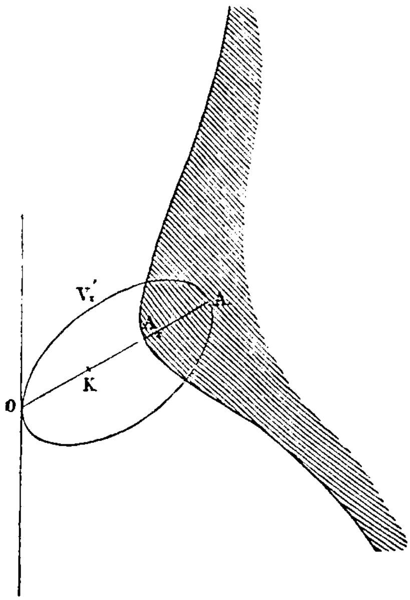
Quant aux points de la cavité, leur potentiel est constant, et s'obtient en faisant $V=V_1$ dans la formule précédente

$$V_c=\frac{V_1+V_2}{2}.$$

58. — Passons maintenant aux corps que peut nous fournir la deuxième méthode.

Supposons d'abord plein le corps de potentiel V', et limitons-le par une surface $V'_1$ passant par l'origine. La surface image de $V'_1$, sera asymptotique à la direction du plan tangent en O à la surface $V'_1$, et le corps remplira tout l'espace limité par cette surface et situé de l'autre côté du point O.

Soit OA une normale à la surface $V'_1$ et issue de O, le plan tangent en $A_1$



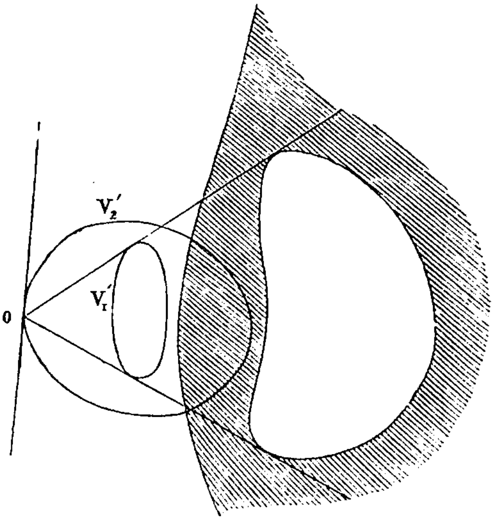

sera normal à $OA_1$, et si le rayon de courbure de la section normale que l'on considère est en A supérieur à la moitié de OA, le centre de courbure de la section normale correspondante de la surface qui limite le corps ne sera pas dans le corps, et inversement, il sera dans le corps si le rayon de courbure en question est inférieur à $\frac{OA}{2}$. Si OA est un rayon vecteur minimum, le centre de courbure de la section n'est pas dans le corps. Si c'est un maximum, le rayon de courbure ne pourra pas être entre K et $A_1$, K étant le milieu de $OA_1$.

Enfin, il est à remarquer que les points situés à l'infini ont une densité nulle, ce qui doit être pour que la masse soit finie. Non-seulement la densité est nulle, mais il en est encore de même de la masse de l'ensemble de ces points, car le facteur $\frac{1}{r^5}$ figure dans la densité de chacun d'eux.

Si $V'_1$ comprend O, on aura un corps remplissant tout l'espace à l'exception d'une certaine cavité, image de la surface $V'_1$, et le potentiel de l'action de ce corps sera V sur les points de cette cavité, puisqu'elle est l'image de tout l'espace extérieur à la surface $V'_1$.

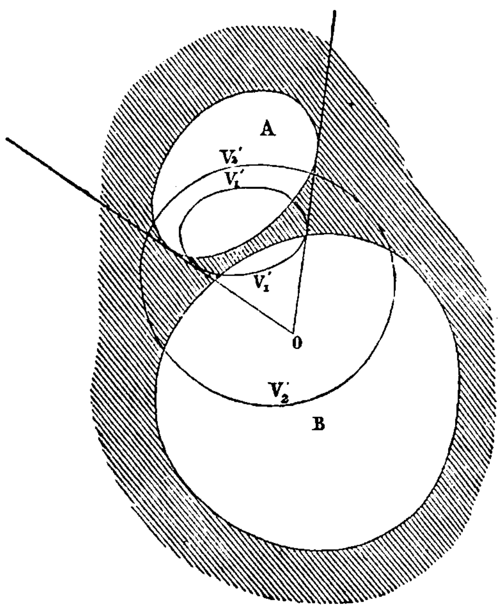
Considérons maintenant le cas où le corps de potentiel V' est creux lui-même.

et compris entre les deux surfaces $V'=V'_1$, $V'=V'_2$; prenons d'abord $V'_2$




ne comprenant pas O, nous obtiendrons un corps creux ayant V pour potentiel extérieur, et ayant un potentiel intérieur $\dfrac{(V'_2+V'_1)a}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Il attire donc les points de sa cavité comme le ferait une masse $\dfrac{(V'_1+V'_2)a}{2}$ concentrée en O.

Si maintenant la surface $V'_2$ passe par 0, on obtient le corps représenté; il



attire encore les points de sa cavité comme le ferait une masse $\frac{a}{2}$ $(V'_1 + V'_2)$ placée en O.

Si les surfaces $V'_1$ et $V'_2$ comprennnent O, on obtient un corps remplissant tout l'espace, sauf deux cavités A et B. Ces cavités, entièrement distinctes, diffèrent par la nature de l'attraction du corps sur les points de leur intérieur. C'est ainsi que le potentiel de l'action du corps sur les points de B est V, tandis qu'il est $(V'_1 + V'_2)a \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ sur les points de A.

Dans le cas où $V'_1$ passe par O, on obtient un corps analogue à l'avant-dernier; seulement son potentiel extérieur est $(V'_1 + V'_2)a \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, tandis qu'il est V sur les points de la cavité.

Enfin, dans le cas où $V'_1$ comprend O, on obtient un nouveau corps creux compris entre deux surfaces limitées, et c'est sur les points de sa cavité qu'il a V pour potentiel.

59. — Nous terminerons ce chapitre en appelant l'attention sur ce fait, que si les axes principaux d'inertie de toutes les solutions du problème que nous nous sommes proposé, coïncident en direction, ils n'ont rien de commun en grandeur; car si l'on prend comme solutions deux corps creux, tels que le rayon intérieur minimum de l'un soit supérieur au rayon extérieur maximum de l'autre, le centre de gravité étant pris comme origine, comme ces corps ont même masse, il est clair qu'on ne saurait avoir

$$\Sigma mr^2 = \Sigma Mr^2,$$

égalité qui serait la conséquence obligée de l'égalité des axes principaux.

---

## CHAPITRE IV.

60. — Il résulte de ce qui précède, que si V est une fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = 0,$$

et $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque d'un corps, on a

$$(35)\qquad \iiint \frac{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2}{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2}}\,dx\,dy\,dz=\left\{\begin{array}{l}4\pi(V_1-V_2).V,\\ 2\pi(2VV_1-V^2-V_1^2),\\ 2\pi(V_1^2-V_2^2),\end{array}\right.$$

les intégrations ayant lieu entre les surfaces de niveau $V_1$ et $V_2$, et la 1^re égalité se rapportant au cas où $\alpha, \beta, \gamma$ est un point extérieur à $V_2$, la 2^e au cas où ce point est entre $V_1$ et $V_2$ et la 3^e à celui où il est intérieur à $V_1$.

61. — La seconde série de solutions nous fournit des égalités analogues

$$(36)\qquad \begin{array}{l}\displaystyle\iiint\left\{\frac{V^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}Sx^2(y^2+z^2-x^2)^2\right.\\ \displaystyle+\frac{2V}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}Sx(y^2+z^2-x^2)\left[(y^2+z^2+x^2)\frac{dV}{dx}-2xy\frac{dV}{dy}-2xz\frac{dV}{dz}\right]\\ \displaystyle\left.+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]\right\}\times\\ \displaystyle\times\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}.\end{array}\left\}\begin{array}{l}4\pi a(V'_1-V'_2)V,\\ \displaystyle=2\pi\left[2aVV'_1-V^2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}+\frac{a^2V'^2_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right]\\ \displaystyle 2\pi a^2\frac{V'_1-V'_2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.\end{array}\right.$$

Les intégrations ayant lieu entre les surfaces

$$V\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=aV'_1,$$
$$V\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=aV'_2,$$

les égalités étant entendues comme précédemment, en remarquant que nous appelons points extérieurs, points du corps, points intérieurs ceux qui correspondent aux points extérieurs, aux points appartenant et aux points intérieurs au volume compris entre les surfaces $V'_1$ et $V'_2$, lors même que la position du point O aurait inversé l'ordre de ces points.

On voit que partout où figure $a$ dans les seconds membres de l'équation (36), se trouve en facteur $V'_1$ ou $V'_2$ avec le même exposant, ce qui nous montre que ce second membre est indépendant de $a$. Il n'en pouvait être autrement, puisque le 1^er est indépendant de ce paramètre.

62. — Si nous supposons que la surface $V_0$ se réduise à un point, ce point sera, comme nous l'avons vu, le centre commun de gravité de tous les corps ayant V pour potentiel extérieur. Il en résulte que si on le prend pour origine,

que dans les équations (35) et (36) on remplace dans les premiers membres

$$\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}},$$

successsivement par $x$, $y$, $z$, et qu'on égale les seconds nombres à zéro, on aura six nouvelles intégrales définies.

63. — Si dans la première série de solutions, nous faisons $V_1 = V_0$ et $V_2 = 0$, autrement dit, si nous transportons $V_2$ à l'infini, nous aurons la formule

$$(37) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}\, dx\,dy\,dz = 2\pi V(2V_0 - V),$$

et si l'origine O correspond au point $V_0$

$$(38) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] \left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} dx\,dy\,dz = 0.$$

64. — Enfin, il est évident que l'identité des masses, et celles des directions des axes principaux d'inertie des corps précédents, nous permettent de ramener les intégrales correspondantes relatives à des volumes, à des intégrales étendues seulement aux divers points d'une surface.

*Vu et approuvé,*

Le 24 mai 1865,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

*Vu*

*et permis d'imprimer,*

Le 24 mai 1865,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

# DEUXIÈME THÈSE.

**Sur l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.**

1. — Le problème que nous avons en vue est celui-ci :

*Étudier les figures d'équilibre d'une masse fluide homogène, soumise à l'action de ses propres molécules, et tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe fixe.*

Le principal objet de cette thèse est de résumer les remarquables travaux de Maclaurin, Jacobi, Meyer et M. Liouville sur cette importante question. Je termine ce travail par une recherche qui m'est personnelle, c'est celle de l'équation aux différentielles partielles qui lie la pression à la densité dans une masse fluide en équilibre, animée d'un mouvement de translation quelconque, d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à cette masse, et soumise à l'action de ses propres molécules, d'un noyau solide qu'elle enveloppe et par rapport auquel elle est fixe, enfin de corps extérieurs animés de mouvements quelconques, mais se combinant toutefois de manière à permettre l'équilibre. L'équation à laquelle j'arrive me montre qu'il est nécessaire pour l'équilibre, que le mouvement de rotation de la masse fluide soit uniforme.

2. — Abordons donc le problème qui doit nous occuper en premier lieu : l'étude des figures ellipsoïdales, soit de révolution, soit à trois axes inégaux, qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe. Pour les planètes il n'y a point d'axe fixe, mais un axe instantané de rotation, qui coïncide sensiblement dans ses diverses positions avec l'un des axes principaux d'inertie du centre

de gravité. Dans le cas de la Terre, l'angle de cet axe avec l'axe du plus grand moment d'inertie est de ceux qui échappent à nos mesures. Quoi qu'il en soit, si l'on suppose cet axe fixe, l'équilibre exige que la résultante des forces extérieures qui sollicitent les molécules de la surface soit normale à cette surface. Et comme il ne s'agit ici que d'un équilibre relatif, on doit regarder les forces centrifuges comme des forces extérieures. Soient donc $\mu$ la masse du point attiré, $f$ le coefficient d'attraction universelle, $f\mu X$, $f\mu Y$, $f\mu Z$, les composantes de l'attraction parallèles à trois axes rectangulaires entraînés avec la masse; les composantes de la force centrifuge seront en appelant $g$ le quarré de la vitesse angulaire de rotation, $x$, $y$, $z$, les coordonnées du point $\mu$ : $o$, $g\mu y$, $g\mu z$, si l'on a pris l'axe de rotation pour axe des $x$; d'où l'équation nécessaire et suffisante

$$(1) \qquad fX\,dx + (fY + gy)dy + (fZ + gz)dz = 0;$$

elle montre que les figures d'équilibre dépendent de X, Y et Z, et réciproquement ces composantes de l'attraction dépendent de la figure de la masse. Maclaurin a établi la possibilité de l'équilibre, en adoptant pour limiter la masse un ellipsoïde de révolution convenablement choisi. On peut énoncer son théorème en disant que:

3. — *Pour toute valeur de* g *inférieure à une certaine valeur* g', *il y a comme figures d'équilibre deux ellipsoïdes de révolution.*

Pour le démontrer, prenons de suite l'ellipsoïde à trois axes inégaux,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

ou

$$(2) \qquad \frac{xdx}{\alpha^2} + \frac{ydy}{\beta^2} + \frac{zdz}{\gamma^2} = 1,$$

et montrons que l'équation (1) peut être satisfaite sous certaines conditions, en adoptant cet ellipsoïde comme figure d'équilibre de la masse fluide. On sait qu'en appelant A, B, C trois quantités indépendantes de $x$, $y$, $z$, on a dans le cas de l'ellipsoïde

$$(3) \qquad X = -Ax, \quad Y = -By, \quad Z = -Cz.$$

et qu'en posant pour abréger

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}=\lambda^2, \qquad \frac{\gamma^2-\alpha^2}{\alpha^2}=\lambda'^2,$$

$$M=\frac{4}{3}\pi\delta\,.\,\alpha\beta\gamma,$$

$$\Delta=\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)},$$

$\delta$ étant la densité, on a

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} A&=\frac{3M}{\alpha^3}\int_0^1\frac{u^2du}{\Delta},\\ B&=\frac{3M}{\alpha^3}\int_0^1\frac{u^2du}{(1+\lambda^2u^2)\Delta},\\ C&=\frac{3M}{\alpha^3}\int_0^1\frac{u^2du}{(1+\lambda'^2u^2)\Delta}.\end{aligned}\right.$$

Portant dans (1), on trouve

$$(1\ bis)\qquad fAxdx+(fB-g)ydy+(fC-g)zdz=0.$$

Cette équation est de même forme que l'équation (2) de l'ellipsoïde ; identifions donc (1 *bis*) avec (2) ou (2 *bis*),

$$(2\ bis)\qquad xdx+\frac{ydy}{1+\lambda^2}+\frac{zdz}{1+\lambda'^2}=0,$$

nous aurons

$$(5)\qquad fA=\frac{fB-g}{\dfrac{1}{1+\lambda^2}}=\frac{fC-g}{\dfrac{1}{1+\lambda'^2}}.$$

Nous n'avons donc que deux équations de condition entre trois indéterminées $\lambda$, $\lambda'$ et $g$.

Les équations (5) peuvent s'écrire

$$fA=\frac{fB-g}{\dfrac{1}{1+\lambda^2}}=\frac{fC-g}{\dfrac{1}{1+\lambda'^2}}=\frac{f(B-C)}{\dfrac{\lambda'^2-\lambda^2}{(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)}},$$

ou

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}(\lambda'^2-\lambda^2)A&=(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)(B-C),\\ (\lambda'^2-\lambda^2)g&=f[(1+\lambda'^2)C-(1+\lambda^2)B].\end{aligned}\right.$$

4. — L'ellipsoïde de révolution satisfait à la question ; si l'on fait, en effet, $\lambda' = \lambda$, ce qui entraîne $C = B$, la première des équations (6) est satisfaite, et la deuxième, qui donnerait $g$ pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux, se réduit aussi à une identité; dans le cas qui nous occupe, $g$ est donné par

$$g = f\left[B - \frac{A}{1+\lambda^2}\right]. \tag{6 bis}$$

Remplaçons A et B par leurs valeurs dans (6 *bis*), $\lambda' = \lambda$ ;

$$A = \frac{3M}{\alpha^3}\,\frac{\lambda - \text{arc tg.}\,\lambda}{\lambda^3} = 4\pi\delta\,\frac{(1+\lambda^2)(\lambda - \text{arc tg.}\,\lambda)}{\lambda^3},$$

$$B = C = 2\pi\delta\,\frac{(1+\lambda^2)\,\text{arc tg.}\,\lambda - \lambda}{\lambda^3},$$

on a

$$g = 2\pi f\delta\,\frac{(3+\lambda^2)\,\text{arc tg.}\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3}, \tag{7}$$

équation qui détermine la vitesse angulaire de rotation

$$\omega = \sqrt{g},$$

qui convient pour l'équilibre d'un ellipsoïde donné de révolution, fluide et homogène.

5. — On ne voit pas bien l'homogénéité de l'équation (7) en lui laissant cette forme. Appelons $S + T$ la somme des masses du Soleil et de la Terre, $a$ le demi grand axe de l'orbite elliptique de la Terre, $n$ le moyen mouvement de cette planète, on a

$$f(S+T) = n^2a^3,$$

d'où

$$f = \frac{n^2a^3}{S+T};$$

(7) peut donc s'écrire

$$\frac{g}{2\pi\delta f} = \frac{\omega^2.(S+T)}{n^2.2\pi\delta a^3} = \frac{(3+\lambda^2)\,\text{arc tg.}\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3},$$

et sous cette forme, on voit bien que les deux membres sont homogènes et de degré zéro.

6. — Passons maintenant à la discussion de l'équation (7).

Posons pour simplifier

$$\frac{g}{2\pi\delta f} = q,$$

$q$ étant un nombre que nous supposerons connu, car maintenant nous admettrons que $g$ est donné,

$$q = \frac{(3+\lambda^2)\,\text{arc tg}\,.\,\lambda - 3\lambda}{\lambda^3},$$

d'où l'équation en $\lambda$

$$(8) \qquad \varphi(\lambda) = \frac{q\lambda^3 + 3\lambda}{3+\lambda^2} - \text{arc tg}.\ \lambda = 0.$$

Laissons de côté la solution $\lambda = 0$ qui n'a pas d'intérêt, et cherchons un ellipsoïde aplati répondant à la question; différentions (8),

$$(9) \qquad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \lambda^2 \frac{q\lambda^4 + (10q-4)\lambda^2 + 9q}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)^2},$$

$q$ est essentiellement positif, et les racines de l'équation en $\lambda^2$,

$$(10) \qquad q\lambda^4 + (10q-4)\lambda^2 + 9q = 0,$$

sont de même signe; donc si elles sont imaginaires, ou réelles et égales, ou négatives, $\frac{d\varphi}{d\lambda}$ est toujours positif et $\varphi$ croît quand $\lambda^2$ croît à partir de zéro ($\lambda^2 < 0$ répondrait à un ellipsoïde allongé); or $\varphi = 0$ pour $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda$ croissant, $\varphi$ ne pourra s'annuler, et la figure elliptique aplatie sera impossible. Pour qu'elle soit possible, il faut donc que les deux racines de (10) soient positives, ce qui exige $q < \frac{2}{5}$, et qu'en outre elle soient réelles; cette dernière condition peut s'écrire :

$$(5q-4)^2 > 9q^2,$$

ou

$$(1-q)(1-4q) > 0,$$

Or $1 - q > 0$, donc il faut que $q < \frac{1}{4}$, condition qui entraîne l'autre $q < \frac{2}{5}$.

7. — La condition nécessaire $q < \frac{1}{4}$ n'est pas suffisante; en effet, pour que $\varphi$ puisse s'annuler, il faut que son minimum soit négatif. Appelons $q'$ la valeur qu'il faut donner à $q$ pour que ce minimum soit nul, et $\varphi'$ la valeur de $\varphi$ quand $q = q'$, nous aurons alors

$$\varphi = \varphi' + \frac{(q - q')\lambda^3}{3 + \lambda^2}.$$

Or le minimum de $\varphi'$ est zéro,

$$\varphi' \geqq 0;$$

donc, si $q > q'$, $\varphi$ sera la somme de deux quantités positives et par suite positif, $q$ ne doit donc pas dépasser $q'$ pour que $\varphi$ puisse s'annuler. Supposons $q < q'$, je dis qu'alors $\varphi$ s'annulera deux fois. Si l'on donne, en effet, à $\lambda$ une valeur infiniment petite positive, $\frac{d\varphi}{d\lambda} > 0$, donc $\varphi$ est positif pour une valeur de $\lambda$ un peu supérieure à zéro. Soit $\lambda'$ la valeur de $\lambda$ qui donne $\varphi' = 0$, $\varphi$ est alors négatif, et comme il redevient positif pour $\lambda = +\infty$, il en résulte qu'il y a deux ellipsoïdes répondant à la question.

La condition nécessaire et suffisante est donc $q < q'$.

8. — Il nous reste à calculer $q'$. On a pour déterminer $q'$ et $\lambda'$ les deux équations

$$\varphi' = 0; \qquad \frac{d\varphi'}{d\lambda} = 0.$$

De (10) on tire

$$q' = \frac{4\lambda^3}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)}, \tag{11}$$

et de (8)

$$\frac{7\lambda^3 + 9\lambda}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)} - \text{arc tg. } \lambda = 0. \tag{12}$$

Je dis que cette dernière équation n'a qu'une seule racine $\lambda'$ réelle et positive; pour le montrer, je la différentie, j'ai

$$\frac{d\varphi'}{d\lambda} = \frac{-8\lambda^4(\lambda^2 - 3)}{(1+\lambda^2)^2(9+\lambda^2)^2}; \tag{13}$$

il en résulte que $\lambda$ croissant de 0 à $\sqrt{3}$, $\varphi'$ croît de zéro à $\Phi'$, et $\lambda$ continuant à croître de $\sqrt{3}$ à $+\infty$, $\varphi'$ décroît de $\Phi'$ à $-\frac{\pi}{2}$, donc il n'y a qu'une racine positive $\lambda'$ plus grande que $\sqrt{3}$.

$$\lambda' = 2,5292,$$

qui donne

$$q' = 0,224671.$$

Donc pour toute valeur de $q$ inférieure à cette valeur $q'$, il y a deux ellipsoïdes possibles répondant à deux valeurs de $\lambda$, l'une inférieure, l'autre supérieure à $\lambda'$.

9. — Avec un ellipsoïde allongé, $\lambda$ est imaginaire et il est facile de voir que l'équilibre n'est pas possible ; j'intègre en effet l'équation (9), j'obtiens

$$\text{(8 } bis\text{)} \qquad \varphi = \int_0^{\lambda'} \lambda^2 \frac{q\lambda^4 + (10q - 4)\lambda^2 + 9q}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)^2} d\lambda ;$$

j'y remplace $\lambda$ par $\lambda\sqrt{-1}$, j'ai

$$\text{(8 } ter\text{)} \qquad \varphi = \sqrt{-1} \int_0^{\lambda'} \frac{q(1-\lambda^2)(9-\lambda^2) + 6\lambda^2}{(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)^2} \lambda^2 d\lambda,$$

et l'équation en $\lambda$ est

$$\int_0^{\lambda'} \frac{q(1-\lambda^2)(9-\lambda^2) + 6\lambda^2}{(1-\lambda^2)(3-\lambda^2)^2} \lambda^2 d\lambda = 0 ;$$

or je ne puis admettre $\lambda^2 > 1$, car j'aurais un hyperboloïde ; tous les éléments de l'intégrale étant positifs, celle-ci ne peut s'annuler, et l'équilibre est impossible pour l'ellipsoïde allongé.

10. — Prenons maintenant le cas général d'un ellipsoïde à trois axes inégaux ; les deux équations (6) conviennent à ce cas et peuvent s'écrire en les divisant par $\lambda'^2 - \lambda^2$.

$$(14) \qquad (1+\lambda^2)(1+\lambda'^2) \int_0^1 \frac{u^4 du}{\Delta^3} - \int_0^1 \frac{u^2 du}{\Delta} = 0,$$

$$(15) \qquad g = 4\pi\delta f \sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+\lambda'^2} \int_0^1 \frac{(1-u^2)u^2 du}{\Delta^3}.$$

Telles sont les deux équations nécessaires pour le théorème de Jacobi; (14) est à deux inconnues $\lambda$ et $\lambda'$, elle est très-compliquée, mais détermine $\lambda'$ en fonction de $\lambda$; donc si prenant *à priori* $\lambda$, $\lambda'$ est convenablement choisi, l'équilibre est possible, avec une vitesse angulaire que donne l'équation (15).

On peut remarquer que dans toutes ces équations $\alpha$ ne figure point, c'est qu'en effet une fois $\lambda$ et $\lambda'$ déterminés, $\alpha$ est déterminé lui-même par la connaissance du volume de la masse fluide considérée.

11. — Nous traiterons actuellement cette question :

*Quel est l'ellipsoïde à trois axes inégaux, qui convient à l'équilibre d'une masse fluide homogène tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire de rotation donnée?*

Autrement dit, chercher des valeurs de $\lambda$ et $\lambda'$ satisfaisant aux équations (14) et (15), dans lesquelles $g$ est connu.

La discussion de ces deux équations a été faite pour la première fois par Meyer de Kœnigsberg; en 1846 elle a été reprise par M. Liouville. Nous reproduirons ici le travail de Meyer simplifié par M. Liouville.

Changeons de variable en posant

$$s = \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad t = \frac{1}{1+\lambda'^2};$$

$\lambda^2$ et $\lambda'^2$ devant rester compris entre les limites $-1$ et $+\infty$, les nouvelles variables ne peuvent varier qu'entre $+\infty$ et 0.

Posons encore

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

$\Delta$ exprimé en fonction de ces nouvelles variables, devient

$$\Delta = \frac{\sqrt{(sx+1)(tx+1)}}{\sqrt{st}\,(x+1)},$$

ou

$$\Delta = \frac{\sqrt{(x+1)(sx+1)(tx+1)}}{\sqrt{st}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R}{\sqrt{st}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}};$$

en posant

$$R = \sqrt{(x+1)(sx+1)(tx+1)}.$$

A l'aide de ces notations, (14) devient

$$(14') \qquad \int_0^\infty \frac{(1+x)dx}{R^3} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)R} = 0,$$

ou

$$(14\ bis) \qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{xdx}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2dx}{R^3} = 0,$$

et (15)

$$(15\ bis) \qquad q = st\int_0^\infty \frac{xdx}{(sx+1)(tx+1)R}.$$

Il nous faut donc rechercher maintenant si $q$ étant donné, on peut tirer de (14 *bis*) et (15 *bis*), des valeurs convenables de $s$ et $t$.

L'équation (14 *bis*) nous montre d'abord que l'on doit avoir

$$s+t<1,$$

et par suite que $s$ et $t$ doivent être séparément inférieurs à l'unité. On pourrait cependant avoir $s+t=1$, mais il en résulterait $s=0$ ou $t=0$.

12. — Cela posé, occupons-nous seulement de l'équation (14 *bis*), et montrons qu'à une valeur de $s$ plus petite qu'une certaine limite, correspond toujours une valeur de $t$ plus grande que cette limite.

Représentons (14 *bis*) par

$$(14\ ter) \qquad \varphi(s, t) = 0,$$

$\varphi$ est une fonction symétrique de $s$ et de $t$, et

$$\frac{dR}{ds} = \frac{x(x+1)(tx+1)}{2R};$$

on a donc en différentiant (14') par rapport à $s$,

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{x(x+1)(tx+1)}{R^5}(1+x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(x+1)(tx+1)}{R^3}\frac{dx}{1+x},$$

ou, en réduisant les intégrales en une seule,

$$(16) \qquad \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x(x+1)(tx+1)}{R^5}[2+(3-s-t)x - stx^2]\,dx;$$

montrons que $\frac{d\varphi}{ds}$ est toujours négatif; pour y arriver remarquons que le facteur entre crochets est symétrique en $s$ et $t$, et qu'en le multipliant par $tx + 1$, nous aurons une expression de la forme $A + Bt$, A et B étant symétriques. Posons

$$(17)\quad \begin{cases} 2A_0 = \int_0^\infty \frac{x(x+1)}{R^5}[2+(3-s-t)x-stx^2]\,dx, \\ 2A_1 = \int_0^\infty \frac{x^2(x+1)}{R^5}[2+(3-s-t)x-stx^2]\,dx, \end{cases}$$

nous aurons

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = -A_0 - A_1 t, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -A_0 - A_1 s. \end{cases}$$

Si $A_0$ et $A_1$ étaient positifs, il serait démontré que $\frac{d\varphi}{ds}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ seraient négatifs pour toutes valeurs positives de $s$ et $t$. Nous allons montrer seulement que

$$2A_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad 2A_0 + 3A_1 > 0,$$

et cela nous suffira pour prouver que

$$\frac{d\varphi}{ds} < 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi}{dt} < 0$$

pour toutes valeurs de $s$ et $t$ telles que $s + t < 1$.

Les équations (18) peuvent en effet s'écrire

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = -A_0\left(1 - \frac{2}{3}t\right) - \frac{t}{3}(2A_0 + 3A_1), \\ \frac{d\varphi}{dt} = -A_0\left(1 - \frac{2}{3}s\right) - \frac{s}{3}(2A_0 + 3A_1). \end{cases}$$

Cherchons donc à démontrer que

$$2A_0 > 0; \qquad 2A_0 + 3A_1 > 0,$$

remarquons pour cela qu'on a l'identité

$$d\,\frac{x^2(x+1)}{R^3} = \left[2 + \frac{3+s+t}{2}x - stx^2 - \frac{3}{2}stx^3\right]\frac{x(x+1)\,dx}{R^5}.$$

Intégrons de 0 à $+\infty$, le premier membre s'annule; on a donc identiquement.

$$(20)\qquad 0=\int_0^{\infty}\frac{x(x+1)}{R^5}\left(2+\frac{3+s+t}{2}x-stx^2-\frac{3}{2}stx^3\right)dx.$$

Retranchons cette équation de la première des équations (17), il nous reste

$$(21)\qquad 2A_0=\frac{3}{2}\int_0^{\infty}\frac{x^2(x+1)}{R^5}(1-s-t+stx^2)\,dx;$$

l'élément différentiel est toujours positif, donc $A_0$ est toujours positif.

Enfin, multiplions par $\frac{3}{2}$ la deuxième équation (17) et ajoutons-la à (21), il vient

$$(22)\qquad 2A_0+3A_1=\frac{3}{2}(3-s-t)\int_0^{\infty}\frac{x^2(x+1)^2}{R^5}dx;$$

l'élément différentiel est encore positif, donc

$$2A_0+3A_1>0.$$

Il résulte de ce qui précède et des équations (19) que $\frac{d\varphi}{ds}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ sont négatifs. Reprenons alors l'équation (4 *ter*),

$$\varphi(s,t)=0,$$

et donnons à $t$ une valeur $t_0$ comprise entre 0 et 1, de sorte que l'on n'ait plus que l'équation à une inconnue

$$\varphi(s,t_0)=0.$$

Si l'on fait $\qquad s=0,\quad \varphi(0,t_0)>0;$

$$s=1,\quad \varphi(1,t_0)<0.$$

Donc, quelle que soit la valeur $t_0$ donnée à $t$ entre 0 et 1, $\varphi$ s'annule quand $s$ varie de 0 à 1 et ne s'annule qu'une fois puisque $\frac{d\varphi}{ds}$ est toujours négatif.

Soient $s_0$ et $t_0$ deux valeurs correspondantes,

$$\varphi(s_0, t_0) = 0;$$

Si $s$ seul croît sans que $t$ change de valeur, la fonction $\varphi$ devient négative, donc pour la ramener à 0, il faut faire décroître $t$; $s$ est donc une fonction décroissante de $t$.

Or nous pouvons toujours imaginer $s > t$, et alors $s$ ne peut s'abaisser au-dessous d'une certaine limite, soit $\sigma$ le minimum de $s$, c'est aussi le maximum de $t$; donc si $s$ est devenue égal à $t$, la valeur commune est $\sigma$.

**13.** — Revenons aux équations en $\lambda$ et $\lambda'$; pour $s = t = \sigma$, on a

$$\lambda = \lambda'.$$

Introduisons cette hypothèse dans l'équation (14), il vient

$$\int_0^1 \frac{(1+\lambda^2)^2 u^4 du}{(1+\lambda^2 u^2)^3} - \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)} = 0,$$

ou

$$\int_0^1 \frac{(1-u^2)(1-\lambda^4 u^2) u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^3} = 0. \tag{23}$$

Nous pouvons effectuer l'intégration en posant

$$u = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}.\theta,$$

$$du = \frac{1}{\lambda} \frac{d\theta}{\cos^2\theta};$$

(23) devient alors

$$\int_0^{\operatorname{arc\,tg}.\lambda} \operatorname{tg}^2.\theta d\theta - \frac{(\lambda^2+1)^2}{\lambda^2} \int_0^{\operatorname{arc\,tg}\lambda} \sin^4\theta . d\theta = 0, \tag{23 bis}$$

et l'on a

$$\int_0^{\operatorname{arc\,tg}.\lambda} \operatorname{tg}^2\theta . d\theta = \lambda - \operatorname{arc\,tg}.\lambda,$$

$$\int \sin^4\theta . d\theta = -\frac{1}{4}\sin^3\theta\cos\theta - \frac{3}{8}\sin\theta\cos\theta + \frac{3}{8}\theta,$$

$$\int_0^{\operatorname{arc\,tg}\lambda} \sin^4\theta . d\theta = \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}.\lambda - \frac{\lambda(5\lambda^2+3)}{8(1+\lambda^2)^2};$$

et (23 *bis*) devient

$$\text{(23 ter)} \qquad \operatorname{arc\,tg} \lambda - \frac{13\lambda^3 + 3\lambda}{3\lambda^4 + 14\lambda^2 + 3} = 0,$$

ou

$$\psi(\lambda) = 0,$$

d'où

$$\text{(24)} \qquad \frac{d\psi}{d\lambda} = \frac{16\lambda^4(3\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 + 1)(3\lambda^4 + 14\lambda^2 + 3)^2}.$$

Comme $s$ et $t$ ne peuvent varier qu'entre 0 et 1, $\lambda$ varie de 0 à $\infty$, et $\lambda$ croissant à partir de 0, $\frac{d\psi}{d\lambda}$ est négatif, donc $\varepsilon$ étant une quantité très-petite, on a, puisque

$$\psi(0) = 0,$$

$$\psi(0 + \varepsilon) = - \quad ;$$

et en outre

$$\psi(+1) = \frac{1}{4}(\pi - 3,2) = - \quad ,$$

$$\psi(\infty) = \frac{\pi}{2} = + \quad .$$

Il y a donc une racine supérieure à l'unité et unique, puisque $\lambda$ croissant à partir de 1, $\frac{d\psi}{d\lambda}$ reste constamment positif. Cette racine unique est comprise entre 1 et 2, car

$$\psi(2) = \operatorname{arc\,tg} 2 - \frac{110}{107} = + \quad ,$$

elle est

$$\lambda = 1,15,$$

ce qui nous donne

$$\sigma = 0,43.$$

Ainsi, en résumé, dans l'équation (14 *bis*) à chaque valeur de $t$ inférieure à 0,43 correspond une seule valeur de $s$ plus grande que 0,43.

**14.** — Passons à l'étude de l'équation (15 *bis*) qui donne $q$ ; elle peut s'écrire

$$q = st \int_0^\infty \frac{x(x+1)dx}{R^3};$$

on en déduit

$$\frac{dq}{ds} = t\int_0^\infty \frac{x(x+1)dx}{R^3} - \frac{3}{2}st\int_0^\infty \frac{x^2(x+1)^2(tx+1)}{R^5}dx,$$

$$\frac{dq}{ds} = t\int_0^\infty \frac{x(x+1)^2(tx+1)(1-\frac{1}{2}sx)}{R^5}dx.$$

Le coefficient de $t$ n'est pas symétrique en $t$ et $s$; j'effectue le produit

$$(tx+1)\left(1-\frac{1}{2}sx\right) = 1 + \left(t - \frac{1}{2}s\right)x - \frac{1}{2}stx^2,$$

$$\frac{dq}{ds} = t\int_0^\infty \frac{x(x+1)^2[1+(t-\frac{1}{2}s)x - \frac{1}{2}stx^2]}{R^5}dx.$$

Posons

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} B_0 &= \int_0^\infty \frac{x(x+1)^2}{R^5}\left[1-\frac{1}{2}stx^2\right]dx, \\ B_1 &= \int_0^\infty \frac{x^2(x+1)^2}{R^5}dx, \end{aligned}\right.$$

on en déduit

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dq}{ds} &= tB_0 + t\left(t-\frac{1}{2}s\right)B_1, \\ \frac{dq}{dt} &= sB_0 + s\left(s-\frac{1}{2}t\right)B_1, \end{aligned}\right.$$

On voit immédiatement que l'intégrale $B_1$ est positive; je dis qu'il en est de même de $B_0$, et pour le démontrer je fais usage de (20); de $B_0$ je retranche la moitié du second membre de (20), il vient

$$(25\ bis)\qquad B_0 = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^2(x+1)}{R^5}[1-s-t+stx^2]dx.$$

Dans cette nouvelle valeur de $B_0$ tous les éléments sont positifs, et en résumé $B_0$ et $B_1$ sont positifs.

Remarquons maintenant que $q$ étant une fonction de $s$ et $t$, et $s$ une fonction déterminée de $t$ qui n'est susceptible que d'une seule valeur, $q$ est une fonction de $t$ que nous prendrons comme variable indépendante.

Voyons comment varie $q$,

$$dq = \frac{dq}{ds}ds + \frac{dq}{dt}dt.$$

et $ds$ nous est fourni par l'équation

$$0 = \frac{d\varphi}{ds} ds + \frac{d\varphi}{dt} dt ;$$

on en déduit

$$dq = \frac{\dfrac{dq}{dt} \cdot \dfrac{d\varphi}{ds} - \dfrac{dq}{ds} \cdot \dfrac{d\varphi}{dt}}{\dfrac{d\varphi}{ds}} dt.$$

effectuons à l'aide de (18) et (26)

$$\frac{dq}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{ds} - \frac{dq}{ds} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -(s-t)\left[A_0 B_0 + (s+t) A_0 B_1 + \frac{3}{2} st A_1 B_1\right].$$

Les deux premiers termes du crochet sont positifs, mais nous ne savons rien sur le dernier; pour l'étudier, j'y remplace $3A_1$ par $(2A_0 + 3A_1) - 2A_0$, on a alors

$$\frac{dq}{dt} \frac{d\varphi}{ds} - \frac{dq}{ds} \frac{d\varphi}{dt} = -(s-t)\left[A_0 B_0 + \frac{1}{2} st (2A_0 + 3A_1) B_1 + (s+t-st) A_0 B_1\right],$$

forme sous laquelle on voit que le crochet est positif, on a donc

$$(27) \qquad dq = (s-t) \frac{A_0 B_0 + \frac{1}{2} st (2A_0 + 3A_1) B_1 + (s+t-st) A_0 B_1}{A_0 + A_1 t} dt.$$

équation qui nous montre que $q$ est une fonction constamment croissante de $t$. Cela posé reportons-nous à (15 *bis*), $t=0$ donne $q=0$, donc si $t$ croît de 0 à sa limite supérieure $\sigma$, $q$ croîtra de 0 à une certaine limite $q'$ laquelle correspond à $t=s=\sigma$. Calculons $q'$, on pourrait pour cela se servir de (15 *bis*) en y faisant $s=t=0,43$ ; il vaut mieux recourir à (15) en y faisant $\lambda'=\lambda$, on a alors

$$q' = 2(1+\lambda^2) \int_0^1 \frac{(1-u^2) u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^3}.$$

je pose comme précédemment

$$u = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg}. \theta,$$

$$q' = \frac{2(1+\lambda^2)}{\lambda^3} \int_0^{\operatorname{arc tg} \lambda} \sin^2\theta \, d\theta - \frac{2(1+\lambda^2)^2}{\lambda^5} \int_0^{\operatorname{arc tg} \lambda} \sin^4\theta \, d\theta.$$

la 1^re^ intégrale est

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}.\lambda,$$

et la 2^e^

$$\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}\lambda-\frac{\lambda(5\lambda^2+3)}{8(1+\lambda^2)^2}.$$

On a donc

$$(28)\qquad q'=\frac{3}{4}\frac{3\lambda^2+1}{\lambda^4}+\frac{(1+\lambda^2)(\lambda^2-3)}{4\lambda^5}\operatorname{arc\,tg}.\lambda,$$

$\lambda$ étant déterminé par l'équation

$$\frac{1}{1+\lambda^2}=0{,}43,$$

et arc *tg*. $\lambda$ pouvant être chassé de (28) à l'aide de (23 *ter*).

A chaque valeur de $q$ comprise entre 0 et $q'$ correspond une valeur unique de $t$ et à chaque valeur de $t$ inférieure à $\sigma$ correspond une valeur unique de $s$ supérieure à la même limite $\sigma$; si $q > q'$, l'équilibre est impossible avec un ellipsoïde à trois axes inégaux.

16. — Revenons au cas particulier de l'ellipsoïde de révolution, et cherchons à comparer les résultats auxquels conduisent les formules précédentes, avec les données expérimentales ou déduites d'autres théories.

Ainsi $\lambda'=\lambda$ et l'équilibre a lieu si l'on a entre $q$ et $\lambda$ la relation (8)

$$\frac{q\lambda^3+3\lambda}{3+\lambda^2}-\operatorname{arc\,tg}.\lambda=0.$$

Soit $p$ la pesanteur en un point quelconque de la surface, $p$ résulte de l'attraction et de la force centrifuge, et l'on a en conservant les notations précédentes,

$$p=\sqrt{f^2A^2x^2+(fB-g)^2y^2+(fC-g)z^2}.$$

Dans le cas qui nous occupe C=B, et

$$fA=(fB-g)(1+\lambda^2);$$

donc

$$p = fA\sqrt{x^2 + \frac{y^2+z^2}{(1+\lambda^2)^2}},$$

ou

$$p = fA\sqrt{\frac{\alpha^2 + \lambda^2 x^2}{1+\lambda^2}},$$

puisque l'ellipsoïde a pour équation

$$\frac{y^2+z^2}{1+\lambda^2} = \alpha^2 - x^2.$$

Soit $p_0$ la pesanteur au pôle, $p_1$ à l'équateur.

$$p_0 = fA\alpha,$$

$$p_1 = \frac{fA\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

d'où

$$\frac{p_0}{p_1} = \sqrt{1+\lambda^2}.$$

17. — On arrive à un résultat intéressant, en introduisant dans la formule qui donne $p$, la longueur $t$ de la normale à la surface comprise entre cette surface et l'axe de rotation,

$$t = \sqrt{y^2 + (1+\lambda^2)^2 x^2} = \sqrt{1+\lambda^2}\,\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2 x^2}.$$

On en déduit

$$p = \frac{fAt}{1+\lambda^2},$$

$p$ est proportionnel à la longueur $t$ de la normale.

Enfin la pesanteur étant connue en un point de la surface est connue tout le long du rayon; elle est, pour deux points situés sur un même rayon, proportionnelle à leur distance au centre, puisque ses composantes sont proportionnelles à $x$, $y$ et $z$ coordonnées du point de la masse que l'on considère.

18. — Il est encore préférable d'introduire à la place de $t$, dans l'expression de la pesanteur, la latitude $\psi$

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{y}{(1+\lambda^2)x},$$

d'où

$$y = (1 + \lambda^2) x \operatorname{cotg} \psi,$$

$$x^2 = \frac{\alpha^2 \sin^2 \psi}{1 + \lambda^2 \cos^2 \psi};$$

$$t = \frac{\alpha(1 + \lambda^2)}{\sqrt{1 + \lambda^2 \cos^2 \psi}},$$

d'où enfin

$$p = \frac{f A \alpha}{\sqrt{1 + \lambda^2 \cos^2 \psi}},$$

et si dans cette expression, nous remplaçons A par sa valeur, nous aurons

$$(29) \qquad p = 4\pi\delta f \alpha \frac{(1 + \lambda^2)(\lambda - \operatorname{arc} \operatorname{tg}.\lambda)}{\lambda^3 \sqrt{1 + \lambda^2 \cos^2 \psi}}.$$

19. — Nous allons déduire de cette formule *des comparaisons de la théorie, avec les observations faites à la surface de la Terre.* Remplaçons dans (29) $2\pi\delta f$ par $\frac{g}{q}$, il vient

$$p = 2\alpha . \frac{g}{q} \frac{(1 + \lambda^2)(\lambda - \operatorname{arc} \operatorname{tg} . \lambda)}{\lambda^3 \sqrt{1 + \lambda^2 \cos^2 \psi}}$$

d'où

$$(30) \qquad q = \frac{2\alpha g}{p} \frac{(1 + \lambda^2)(\lambda - \operatorname{arc} \operatorname{tg} . \lambda)}{\lambda^3 \sqrt{1 + \lambda^2 \cos^2 \psi}}.$$

Or soient $l$ la longueur d'un pendule et T' la durée de l'oscillation de ce pendule au point dont la latitude est $\psi$,

$$T' = \pi \sqrt{\frac{l}{p}}, \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{\pi^2 l}{T'^2},$$

$p$ étant ce que l'on appelle ordinairement $g$. Soit T la durée en secondes de la révolution de notre masse fluide,

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

donc

$$\frac{2g}{p} = \frac{8}{l} \cdot \frac{T'^2}{T^2},$$

et par suite

$$q = \frac{8\alpha}{l} \frac{T'^2}{T^2} \frac{(1+\lambda^2)(\lambda - \operatorname{arc\,tg}.\lambda)}{\lambda^3\sqrt{1+\lambda^2\cos\psi}}, \tag{31}$$

formule qui se présente sous une forme homogène. Si l'on suppose connu le demi-axe polaire $\alpha$, tout est connu dans (31), sauf $q$ et $\lambda$ ; si donc nous joignons à cette équation

$$\frac{q\lambda^3 + 3\lambda}{\lambda^2 + 3} - \operatorname{arc\,tg}.\lambda = 0, \tag{8}$$

nous pourrons déterminer $\lambda$, c'est-à-dire l'aplatissement du sphéroïde et $q$.

20. — Pour avoir $\alpha$, je désignerai par $c$ un petit arc de méridien mesuré et connu de 1 grade pour conserver les chiffres de la Mécanique céleste ; on peut le confondre avec l'arc de 1 grade du cercle osculateur en ce point.

$$c = \frac{2\pi}{400} \cdot \frac{\alpha(1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

J'en tire $\alpha$ et j'en déduis en remplaçant dans (31)

$$q = \frac{1600.c}{\pi l} \cdot \frac{T'^2}{T^2} \frac{(\lambda - \operatorname{arctg}\lambda)(1+\lambda^2\cos^2\psi)}{\lambda^3}, \tag{31 bis}$$

équation que je joins à

$$q = 1 - (\lambda^2 + 3)\frac{\lambda - \operatorname{arc\,tg}\lambda}{\lambda^3}. \tag{8 bis}$$

Pour la Terre $\lambda$ est très-petit ; développons alors en série le second membre de (8 *bis*)

$$\frac{\lambda - \operatorname{arc\,tg}\lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{3} - \frac{\lambda^2}{5} + \frac{\lambda^4}{7} - \frac{\lambda^6}{9} + \ldots\ldots,$$

d'où

$$q = \frac{4}{15}\lambda^2 - \frac{8}{35}\lambda^4 + \ldots\ldots$$

Je néglige les puissances de $\lambda$ supérieures à 4,

$$q^2 = \frac{16}{\overline{15}^2}\lambda^4, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda^4 = \frac{\overline{15}^2}{16} q^2,$$

$$q = \frac{4}{15}\lambda^2 - \frac{8}{35} \cdot \frac{\overline{15}^2}{16} q^2,$$

d'où pour $\lambda^2$,

$$\lambda^2 = \frac{15}{4} q + \frac{675}{56} q^2. \tag{32}$$

Je prends (31 *bis*) et j'y remplace $\lambda^2$ par sa valeur

$$q = \frac{1600 \,.\, c}{\pi l} \frac{T'^2}{T^2} \left[ \frac{1}{3} + \left( \frac{\cos^2\psi}{3} - \frac{1}{5} \right) \lambda^2 - \left( \frac{\cos^2\psi}{5} - \frac{1}{7} \right) \lambda^4 \,\ldots\ldots \right],$$

$$q = \frac{1600 \,.\, c}{\pi l} \cdot \frac{T'^2}{T^2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{5\cos^2\psi - 3}{4} q + \frac{45(3\cos^2\psi - 1)}{112} \cdot q^2 \right],$$

$$q = \xi \left( \frac{1}{3} + aq + bq^2 \right),$$

ou

$$\xi b q^2 + (a\xi - 1) q + \frac{1}{3} \xi = 0,$$

$$q = \frac{\frac{1}{3}\xi}{1 - a\xi} + \frac{1 - a\zeta}{b\xi} \, \frac{\frac{1}{9}\xi^2}{(1 + a\xi)^2};$$

négligeant le deuxième terme qui contient en facteur le cube de $\xi$, quantité très-petite à cause du facteur $\frac{T'^2}{T^2}$ que contient $\xi$, on a

$$q = \frac{1}{3} \xi (1 + a\xi + a^2\xi^2 + \ldots\ldots),$$

et en continuant à négliger les troisièmes puissances de $\xi$,

$$q = \frac{1600 \,.\, c}{3\pi l} \frac{T'^2}{T^2} - \frac{9 - 15\cos^2\psi}{4} \left( \frac{1600 \,.\, c}{3\pi l} \cdot \frac{T'^2}{T^2} \right)^2. \tag{33}$$

Je prends

$$\psi = 50 \text{ grades} = 45^\circ, \qquad \cos^2\psi = \frac{1}{2}.$$

$$q = \frac{1600 \,.\, c}{3\pi l} \frac{T'^2}{T^2} - \frac{3}{8} \left( \frac{1600 \,.\, c}{3\pi l} \cdot \frac{T'^2}{T^2} \right)^2. \tag{33 bis}$$

Prenons le jour moyen pour unité de temps,

$$T = 0{,}99727.$$

si

$$T' = 1 \text{ seconde}, \qquad l = 0^{m},741\,608,$$
$$c = 10.000^{m},$$

on déduit alors de (33 *bis*)

$$q = 0,00229971,$$

et de (32)

$$\lambda^2 = 0,00868767.$$

Or on a

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1+\lambda^2} = \frac{231,7}{238,7},$$

d'où, pour l'aplatissement,

$$\frac{\beta - \alpha}{\beta} = \frac{1}{231.7}.$$

Cet aplatissement est trop fort; il est, suivant Bessel, $\frac{1}{299,19}$; la précession des équinoxes donne pour la même quantité $\frac{1}{306}$. Notre théorie nous donne donc en réalité, une valeur un peu trop forte pour l'aplatissement.

**21.** Revenons à l'équation (8), et rappelons les conséquences que nous avons tirées de la discussion de cette équation. Si $q$ est inférieur à

$$q' = 0,224671,$$

qui correspond à

$$\lambda' = 2,5292,$$

il y a deux figures elliptiques d'équilibre, répondant à deux racines réelles $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de l'équation (8); l'une de ces racines est inférieure, l'autre supérieure à $\lambda'$. En résolvant (8) au moyen des séries, nous ne pouvions avoir que la plus petite racine de cette équation, et il est facile de voir que si $q$ est très-petit, (8) a une très-grande racine en $\lambda$. Posons en effet

$$\lambda = \frac{x}{q},$$

on a pour (8)

$$\frac{x^3 + 3qx}{x^2 + 3q^2} - \text{arc tg.}\,\frac{x}{q} = 0.$$

Si

$$q=0, \qquad x=\frac{\pi}{2},$$

et si la valeur correspondante de $\lambda$ est $\lambda=\frac{\pi}{2q}$, quantité très-grande si $q$ est très-petit. Cherchons cette grande racine dans l'hypothèse de $q$ très-petit :

$$\text{arc tg.}\,\lambda=\frac{\pi}{2}-\text{arc tg.}\,\frac{1}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{3\lambda^3}-\frac{1}{5\lambda^5}+\cdots\cdots$$

Comme $\lambda$ diffère peu de $\frac{\pi}{2q}$, je le remplace par $\frac{\pi}{2q}+z$ :

$$\text{arc tg.}\,\lambda=\frac{\pi}{2}-\frac{2q}{\pi}\left(1+\frac{2qz}{\pi}\right)^{-1}+\frac{8q^3}{3\pi^3}\left(1+\frac{2qz}{\pi}\right)^{-3}-\cdots\cdots,$$

(8) devient alors, en chassant le dénominateur $\lambda^2+3$,

$$\frac{\pi^3}{8}+\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi^2}{4}z\right)q+\left(\frac{3\pi}{2}z^2+3z\right)q^2+z^3q^3=$$

$$=\left[\frac{\pi^2}{4}+\pi zq+(z^2+3)q^2\right]\left[\frac{\pi}{2}-\frac{2q}{\pi}\left(1+\frac{2qz}{\pi}+\text{etc.}\right)+\frac{8q^3}{\pi^3}\left(1-\frac{6qz}{\pi}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots\right].$$

Telle est l'équation en $z$, elle peut s'écrire en la divisant par $q$,

$$0=\left(2\pi+\frac{\pi^2}{4}\right)z+q\left[\frac{\pi}{2}(2z^2-3)+4z\right]+\text{etc.}$$

équation qu'il faut résoudre par rapport à $z$, $q$ étant très-petit. Je me contente de

$$z=A+Bq,$$

et je substitue dans l'équation précédente; en négligeant les puissances de $q$ supérieures à l'unité, j'obtiens

$$A=-\frac{8}{\pi}, \qquad B=\frac{6}{\pi}\left(1-\frac{64}{3\pi^2}\right).$$

La grande racine est donc

$$\lambda=\frac{\pi}{2q}-\frac{8}{\pi}+\frac{6q}{\pi}\left(1-\frac{64}{3\pi^2}\right)+\cdots\cdots$$

Supposons que $q$ ait la valeur qui convient au cas de la Terre.

$$q = 0{,}00229971,$$

$$\lambda = 1{,}570790 \frac{1}{q} - 2{,}546479 - 2{,}218327\,q.$$

$$\lambda = 680{,}49,$$

c'est aussi très-sensiblement $\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{\beta}{\alpha}$; la seconde figure d'équilibre est donc celle d'un sphéroïde très-aplati, dans lequel le rapport des deux axes est celui de 680 à 1.

22. — Occupons-nous maintenant de l'étude des surfaces limites.

Nous avons posé

$$q = \frac{g}{2\pi\delta f}, \qquad q' = \frac{g'}{2\pi\delta f},$$

d'où, s'il s'agit du même fluide,

$$\frac{q}{q'} = \frac{g}{g'} = \frac{T'^2}{T^2}, \qquad T' = T\sqrt{\frac{q}{q'}},$$

T et T′ étant les durées des rotations des deux masses.

Prenons pour $q$ la valeur qui correspond à la Terre,

$$q = 0{,}00229971,$$

et pour $q'$, la valeur-limite au delà de laquelle on ne peut trouver d'ellipsoïde de révolution convenant à l'équilibre de la masse fluide,

$$q' = 0{,}224671,$$

la valeur T′ correspondante est

$$T' = 0{,}99727\sqrt{\frac{q}{q'}} = 0{,}10090.$$

Donc : *Une masse fluide homogène, de densité égale à la densité moyenne de la Terre, ne peut être en équilibre avec une figure elliptique de révolution, si la durée de sa rotation est inférieure à* $0^j{,}10090$. *Si au contraire elle la sur-*

*passe, il y a deux figures elliptiques de révolution d'équilibre, l'une et l'autre possibles, et il n'y en a pas davantage.*

**23.** — Si les masses fluides avaient des densités différentes, on aurait pour les comparer la formule

$$T' = T\sqrt{\frac{q}{q'}}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}}.$$

Et si l'on considère le cas du Soleil, par exemple $\delta' = \frac{\delta}{4}$ environ, la limite inférieure $0^j,10090$ se change dans le cas d'une masse fluide homogène de densité égale à la densité moyenne du soleil, en $0^j,20180$.

24. — Pour qu'en substituant dans la formule qui précède, les valeurs de $q$ et $q'$ convenant au cas de la Terre et au cas limite, on ait

$$T = T',$$

il faut environ

$$\delta' = \frac{\delta}{98}.$$

Donc : *Si la densité de la Terre devenait la 98e partie de ce qu'elle est, sa figure serait la limite des figures compatibles avec la durée de sa rotation.*

Pour Jupiter,

$$\delta' = \frac{\delta}{5}, \quad T = 0^j,41377,$$

la figure elliptique d'équilibre est possible.

25. — On aurait pu croire que lorsque l'équilibre cesse d'être possible avec une figure elliptique de révolution, c'est que le fluide tend à se dissiper. Il n'en est rien, car si cela était, la pesanteur deviendrait nulle ou négative ; or nous avons vu que le rapport

$$\frac{p_0}{p_1} = \sqrt{1+\lambda^2},$$

et dans le cas-limite,

$$\frac{p_0}{p_1} = 2,7197 ;$$

donc la pesanteur à l'équateur n'est pas trois fois plus grande qu'au pôle, où la force centrifuge est nulle.

26. — Laplace a indiqué un complément que M. Liouville a traité. Il consiste à choisir pour donnée le moment de rotation au lieu de la vitesse angulaire $\sqrt{g}$.

Voyons comment on peut calculer le moment de rotation d'un ellipsoïde homogène, à trois axes inégaux, et tournant d'un mouvement uniforme autour de l'un de ses axes, $ox$, par exemple.

La somme des moments des quantités de mouvement autour d'un axe, des divers points d'un corps, constitue le moment de rotation total $\mu$ de corps, autour du même axe donc;

$$\mu = \frac{1}{dt} \sum (ydz - zdy)dm,$$

s'il s'agit de l'axe des $x$. Or $ydz - zdy$ est le double de l'aire décrite par la projection du rayon vecteur sur le plan des $yz$, donc $\mu dt$ mesure la somme des produits des masses des molécules par les doubles des aires décrites par les projections des rayons vecteurs sur le plan des $yz$; il en résulte que si $d\omega$ est l'angle dont le méridien d'une molécule a tourné pendant le temps $dt$, on a

$$\mu dt = \Sigma(y^2 + z^2)d\omega\, dm = d\omega\Sigma(y^2 + z^2)dm,$$

$$\mu = \sqrt{g}\,\Sigma(y^2 + z^2)dm.$$

Le moment de rotation cherché est donc le produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie de la masse autour de l'axe de rotation.

27. — Dans le cas qui nous occupe, on a, si $\delta$ est la densité de notre ellipsoïde,

$$\frac{\mu}{\sqrt{g}} = \delta\iiint(y^2 + z^2)dx\,dy\,dz,$$

et l'intégrale doit être étendue aux points

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} \overline{\overline{<}}\, 1.$$

Posons

$$Z = \iiint z^2 dx\,dy\,dz,$$

$$Z = 8\alpha\int_0^\gamma z^2 dz\int_0^\beta\sqrt{1 - \frac{z^2}{\gamma^2}}\,dy\sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2}},$$

ou, en remplaçant $y$ et $z$ par les variables $t$ et $u$ définies par les équations

$$y = \beta t \sqrt{1 - \frac{z^2}{\gamma^2}}, \qquad dy = \beta dt \sqrt{1 - \frac{z^2}{\gamma^2}},$$

$$z = \gamma u,$$

$$Z = 8\alpha\beta\gamma^3 \int_0^1 u^2(1 - u^2) du \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt,$$

$$Z = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma . \frac{\gamma^2}{5} = \frac{M}{\delta} . \frac{\gamma^2}{5},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\mu}{\sqrt{g}} = M \frac{\beta^2 + \gamma^2}{5},$$

(34) $$\mu = M \sqrt{g} \frac{\beta^2 + \gamma^2}{5},$$

d'où à cause de

$$\beta^2 = \alpha^2(1 + \lambda^2), \qquad \gamma^2 = \alpha^2(1 + \lambda'^2),$$

(35) $$\sqrt{g} = \frac{5\mu}{2M . \alpha^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2}\right)}.$$

Il nous faut chasser $\alpha$ de cette expression, à l'aide de l'équation

$$\frac{4}{3}\pi\alpha^3 \sqrt{1 + \lambda^2} \sqrt{1 + \lambda'^2} = \frac{M}{\delta},$$

ou

(36) $$\alpha^3 = \frac{3M}{4\pi\delta \sqrt{1 + \lambda^2} \sqrt{1 + \lambda'^2}}.$$

Passant immédiatement à la valeur de $q$ exprimée en fonction de $\mu$, on a

(37) $$q = \frac{25\mu^2 \left(\frac{4}{3}\pi\delta\right)^{\frac{1}{3}}}{6fM^{\frac{10}{3}}} \frac{(1 + \lambda^2)^{\frac{2}{3}} (1 + \lambda'^2)^{\frac{2}{3}}}{\left(1 + \frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2}\right)^2}.$$

Ainsi, si l'on prend $\mu$ au lieu de $g$ pour donnée, le premier facteur est une quantité connue K,

$$K = \frac{25\mu^2\left(\frac{4}{3}\pi\delta\right)^{\frac{1}{3}}}{6fM^{\frac{10}{3}}};$$

donc

$$q = K\,\frac{(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}(1+\lambda'^2)^{\frac{2}{3}}}{\left(1+\frac{\lambda^2+\lambda'^2}{2}\right)^2}.$$

équation qui nous permet de substituer dans toutes nos formules la nouvelle donnée K à l'ancienne $q$.

28. — Avant de montrer pourquoi il convient de choisir $\mu$ pour donnée, nous établirons le principe suivant :

Si un corps homogène symétrique par rapport aux trois plans coordonnés, tourne autour de l'un des axes coordonnés, le plan du maximum des aires est perpendiculaire à cet axe.

Si, en effet, l'axe de rotation étant $ox$, A, B, C sont les moments de rotation autour des axes $ox$, $oy$, $oz$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus des angles qu'une droite quelconque fait avec les mêmes axes, on a pour le moment de rotation autour de cette droite

$$S = A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

Or

$$B = \frac{1}{dt}\sum(xdz - zdx)dm = \sqrt{g}\sum xy\,dm,$$

quantité nulle à cause de la symétrie du corps par rapport au plan $yz$, pour la même raison

$$C = \sqrt{g}\sum xz\,dm = 0.$$

On en conclut

$$S = A\alpha,$$

équation qui conduit immédiatement au résultat annoncé.

29. — Cela posé, voyons pourquoi $\mu$ doit être pris comme donnée. Prenons les choses à l'origine, et supposons une masse fluide agitée d'une manière quelconque, et dans laquelle les molécules agissent d'une façon quelconque

12

les unes sur les autres; si toutes les actions sont intérieures, le plan du maximum des aires ne variera pas, et il en sera de même du moment de rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Donc lorsque après cette agitation, la masse fluide prendra un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, cet axe sera, d'après ce que nous avons établi, perpendiculaire au plan invariable; et ce que nous avons appelé $\mu$ est une quantité qui est restée constamment la même, dont la valeur était définie avant que l'équilibre ne fût établi. Ce n'est donc plus la vitesse de rotation qu'il faut regarder comme donnée, mais ce moment qui existait à l'origine des choses.

30. — La discussion des équations conduit, dans le cas de $\mu$ donné, à des résultats tout différents pour les ellipsoïdes de révolution.

Si pour ces ellipsoïdes on remplace dans (8) $q$ par sa valeur en fonction de $\mu$ ou de K, on obtient

$$(38) \qquad \frac{K\lambda^3(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}+3\lambda}{3+\lambda^2} - \text{arc tang}\,\lambda = \psi(\lambda) = 0.$$

Si l'on forme

$$\frac{1}{\lambda^2}\frac{d\psi}{d\lambda} = K\,\frac{-\frac{1}{3}\lambda^4 - \frac{4}{K_1}(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}\lambda^2 + 6\lambda^2 + 9}{(1+\lambda^2)^{\frac{5}{3}}(3+\lambda^2)^2},$$

on a un résultat positif pour $\lambda = 0$, et négatif pour $\lambda = +\infty$; donc $\frac{d\psi}{d\lambda}$ changeant de signe quand $\lambda$ passe de 0 à l'infini, il y a une racine positive $\lambda''$ de

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0.$$

On voit aussi que $\lambda > \lambda''$ rendra le numérateur de $\frac{d\psi}{d\lambda}$ négatif, et au contraire $\lambda < \lambda''$ le rendra positif; donc $\frac{d\psi}{d\lambda} = 0$ a une et une seule racine positive.

Revenons à $\psi$; si l'on fait $\lambda$ très-petit, $\psi(\lambda)$ est positif, et pour $\lambda = \infty$, $\psi(\lambda) = -\frac{\pi}{2}$; il y a donc un nombre impair de racines positives de l'équation $\psi(\lambda) = 0$, et il ne peut y en avoir qu'une d'après ce que nous avons vu sur $\frac{d\psi}{d\lambda}$, tandis que dans le cas de $q$ donné l'équation en $\lambda$ avait deux racines positives.

31. — Passons aux ellipsoïdes à trois axes inégaux, l'équation

$$(1 - s - t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{R^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2dx}{R^3} = 0$$

subsiste, il en est donc de même de tous les résultats que nous en avons déduits. L'équation

$$q = st\int_0^\infty \frac{x(x+1)dx}{R^3}$$

devient

(39)
$$4K = \frac{(s+t)^2}{(st)^{\frac{1}{3}}}\int_0^\infty \frac{x(x+1)dx}{R^3}.$$

Et comme $s$ est une fonction de $t$, $t$ est une fonction de la donnée K déterminée par l'équation (39).

---

## Équation aux différentielles partielles qui lie la pression à la densité dans un fluide en équilibre.

32. — Nous considérons le cas d'un corps solide entouré d'une masse fluide en équilibre, c'est-à-dire en repos par rapport à ce corps ; ce système est animé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation quelconques, seulement l'axe de rotation occupe dans le corps une position invariable, et l'équilibre a lieu sous l'influence des actions du corps, de la masse fluide, et de corps extérieurs animés de mouvements soumis à la seule condition de se combiner de manière à permettre l'équilibre rigoureux de la masse fluide, soit liquide, soit gazeuze.

Les conditions étant ainsi déterminées, il y a pour un point quelconque de la masse fluide, équilibre entre les forces suivantes :

1° L'attraction du corps solide qu'entoure la masse fluide ;

2° L'attraction de cette masse sur le point considéré de son intérieur :

3° L'attraction des corps extérieurs ;

4° Les forces d'inertie tangentielle et centrifuge, auxquelles donne lieu la vitesse variable de translation de la masse fluide ;

5° La force centrifuge et la force d'inertie tangentielle provenant de la vitesse angulaire de rotation supposée variable, de l'ensemble du corps et de la masse fluide;

6° La pression P de la masse fluide, fonction seulement de la position du point que l'on considère.

33. — Adoptons les notations suivantes :

Prenons pour axes coordonnés trois axes rectangulaires, fixes relativement à la masse fluide considérée, l'axe des $x$ étant l'axe de rotation, et soient $v_x$, $v_y$ et $v_z$ les composantes, à la fin du temps $t$ à laquelle nous nous plaçons, de la vitesse $v$ de translation du corps et de la masse fluide, $\rho$ le rayon de courbure variable de la trajectoire d'un point quelconque de l'axe de rotation, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles de ce rayon avec les axes coordonnés. Soient enfin $\omega$ la vitesse angulaire de rotation du système, $p$ le produit du potentiel de l'action du corps considéré sur les points extérieurs, par le coefficient $f$ de l'attraction universelle, $p'$ le produit du potentiel de l'action de la masse fluide sur les points de son extérieur par le même facteur $f$, et $\delta$ la densité de la masse fluide au point $x, z, y$, enfin $p_1$, $p_2$, $p_3$, etc. les produits par $f$ des potentiels des actions des corps extérieurs $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc.; ces dernières quantités sont des fonctions du temps.

Il résulte de ce qui précède que l'équilibre nécessite, entre autres, les trois équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \delta\left(\frac{dp}{dx} + \frac{dp'}{dx} + \sum \frac{dp_n}{dx} - \frac{dv_x}{dt} - \frac{v^2}{\rho}\cos\alpha\right), \\ \frac{dP}{dy} &= \delta\left(\frac{dp}{dy} + \frac{dp'}{dy} + \sum \frac{dp_n}{dy} - \frac{dv_y}{dt} - \frac{v^2}{\rho}\cos\beta + z\frac{d\omega}{dt} + y\omega^2\right), \\ \frac{dP}{dz} &= \delta\left(\frac{dp}{dz} + \frac{dp'}{dz} + \sum \frac{dp_n}{dz} - \frac{dv_z}{dt} - \frac{v^2}{\rho}\cos\gamma - y\frac{d\omega}{dt} + z\omega^2\right). \end{aligned}\right.$$

Après les avoir divisées par $\delta$, dérivons-les respectivement par rapport à $x$, $y$ et $z$; il vient

$$\frac{1}{\delta}\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}\frac{dP}{dx}\cdot\frac{d\delta}{dx} = \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p'}{dx^2} + \sum\frac{d^2p_n}{dx^2},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2P}{dy^2} - \frac{1}{\delta^2}\frac{dP}{dy}\cdot\frac{d\delta}{dy} = \frac{d^2p}{dy^2} + \frac{d^2p'}{dy^2} + \sum\frac{d^2p_n}{dy^2} + \omega^2,$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{d^2P}{dz^2} - \frac{1}{\delta^2}\frac{dP}{dz}\cdot\frac{d\delta}{dz} = \frac{d^2p}{dz^2} + \frac{d^2p'}{dz^2} + \sum\frac{d^2p_n}{dz^2} + \omega^2.$$

Posons pour abréger, $\varphi$ étant une fonction de $x$, $y$, $z$,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\Delta_2\varphi,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=(\Delta_1\varphi)^2,$$

nous aurons, en ajoutant les trois équations précédentes, et tenant compte des relations bien connues

$$\Delta_2 p=0,\qquad \Delta_2 p_n=0,$$

$$\Delta_2 p=-4\pi f\delta,$$

l'équation

$$(2)\qquad \delta\Delta_2 P-\left(\frac{dP}{dx}\cdot\frac{d\delta}{dx}+\frac{dP}{dy}\cdot\frac{d\delta}{dy}+\frac{dP}{dz}\cdot\frac{d\delta}{dz}\right)+4\pi f\delta^3-2\omega^2\delta^2=0.$$

Telle est l'équation cherchée ; elle nous montre immédiatement que $\omega$ est une constante : c'est, en effet, dans cette équation la seule quantité qui puisse être fonction du temps. Aussi, admettant qu'on pût disposer à son gré de toutes les autres conditions, l'équilibre ne pourra jamais avoir lieu si la vitesse angulaire de rotation du système n'est pas constante.

34. — Voyons ce que devient l'équation (2) dans le cas d'une masse gazeuse. On admet que la loi qui lie la pression à la densité est la suivante

$$(3)\qquad \delta=\frac{P}{K},$$

K étant une constante ; on déduit

$$(4)\qquad K^2P\Delta_2P-K^2(\Delta_1P)^2+4\pi fP^3-2K\omega^2P^2=0.$$

C'est une équation aux différentielles partielles du même genre que l'équation à laquelle satisfait le potentiel de l'action d'un corps sur les points extérieurs, en ce sens que la seule fonction des trois coordonnées qui y figure est P.

35. — S'il s'agit d'une masse liquide, et qu'on suppose d'abord ce liquide incompressible, c'est-à-dire de densité constante, l'équation (2) devient

$$(5)\qquad \Delta_2P=2\delta(\omega^2-2\pi f\delta),$$

équation plus simple, mais du même genre que la précédente.

C'est aussi l'équation à laquelle satisferait le potentiel de l'action de la masse fluide considérée sur les points de son intérieur, si celle-ci avait pour densité constante

$$\delta_1 = f\delta^2 - \frac{\delta\omega^2}{2\pi}.$$

36. — Enfin on peut encore supposer le liquide compressible et admettre pour relation qui lie la pression à la densité

$$(6) \qquad \delta = \frac{\delta_0}{1 + KP_0}(1 + KP) = \frac{1 + KP}{a},$$

autrement dit supposer la dilatation proportionnelle à la pression ; (2) devient dans ce cas

$$(7) \qquad a^2(1 + KP)\Delta_2 P - a^2 K(\Delta_1 P)^2 + 4\pi f(1 + KP)^3 - 2\omega^2 a(1 + KP)^2 = 0,$$

ou en posant

$$1 + KP = KP_1,$$

$$(8) \qquad a^2 P_1 \Delta_2 P_1 - a^2(\Delta_1 P_1)^2 + 4\pi f K^2 P^3_1 - 2\omega^2 a K P^2_1 = 0,$$

équation qui a beaucoup d'analogie avec l'équation (4) qui caractérise les masse gazeuzes.

De toutes ces équations, (2) est la seule qui soit à l'abri de toute hypothèse sur la constitution de la masse fluide considérée.

*Vu et approuvé,*

Le 24 mai 1865,

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

*Vu*

*et permis d'imprimer,*

Le 24 mai 1865,

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET C^ie, RUE RACINE, 26.