H. F. 11 f. 166. (VI, 3)

N° D'ORDRE
207.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. SAINT LOUP.

1re **THÈSE D'ASTRONOMIE. — Sur une nouvelle méthode pour le calcul des Perturbations du mouvement des planètes.**

2e **THÈSE DE GÉOMÉTRIE. — Sur les propriétés des Lignes géodésiques.**

Soutenues le 17 Août 1857 devant la Commission d'examen.

MM. LEFÉBURE DE FOURCY, *Président.*
CHASLES,
PUISEUX, } *Examinateurs.*

BIUS JUSSIEU
THESES
PARIS

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1857.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.

PROFESSEURS HONORAIRES.

BIOT.
PONCELET.

PROFESSEURS

DUMAS	Chimie.
DESPRETZ	Physique.
DELAFOSSE	Minéralogie.
BALARD	Chimie.
LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
CHASLES	Géométrie supérieure.
LE VERRIER	Astronomie physique.
DUHAMEL	Algèbre supérieure.
N.	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
DELAUNAY	Mécanique physique.
PAYER	Botanique.
C. BERNARD	Physiologie générale.
P. DESAINS	Physique.
N.	Géologie.
N.	Mécanique.

AGRÉGÉS

BERTRAND	Sciences mathématiques.
J. VIEILLE	
MASSON	Sciences physiques.
PELIGOT	
DUCHARTRE	Sciences naturelles.

SECRÉTAIRE E. PREZ-REYNIER.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

Le but que je me suis proposé est d'exposer une méthode nouvelle pour le calcul des perturbations du mouvement des planètes. J'ai pris pour base de mon travail la traduction anglaise qu'a donnée M. Airy dans le *Nautical Almanac* pour 1856 du Mémoire d'Encke, publié sur ce sujet dans les *Astronomische Nachrichten*, nos 791, 792. J'ai établi la formule fondamentale qui sert de base au calcul. La marche que j'ai suivie pour y arriver diffère de celle d'Encke exposée, dans les *Berliner Astronomische Jahrbuch* pour 1837, sous le titre *Uber Mechanische Quadratur*. J'ai montré ensuite par une application comment la formule trouvée pouvait servir à résoudre une équation différentielle du premier ou du second ordre ne renfermant qu'un seul coefficient différentiel; le calcul est alors tout à fait analogue à celui que l'on effectue pour résoudre une équation numérique par la méthode des différences. J'ai expliqué ensuite en détail l'application au calcul des perturbations planétaires et donné les formules nécessaires pour effectuer tous les calculs.

I.

Une fonction de x n'étant connue que par les valeurs particulières qu'elle prend pour des valeurs données de la variable, proposons-nous de trouver entre certaines limites

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int\int f(x)\,dx^2$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour résoudre ce problème, nous avons à établir quelques formules et quelques notations.

Considérons une fonction algébrique de degré déterminé m

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m;$$

donnons à x les valeurs

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \ldots$$

en progression arithmétique, et soient

$$y_n, \quad y_{n+1}, \quad y_{n+2}, \ldots$$

les valeurs correspondantes de y.

On a par la définition connue des différences

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \sum_1^m \alpha_k [(n+1)^k - n^k],$$

$$\Delta y_{n+1} = \sum_1^m \alpha_k [(n+2)^k - (n+1)^k];$$

d'où

$$\Delta^2 y_n, \quad \Delta^2 y_{n+1}, \ldots,$$

et généralement

$$\Delta^p y_n = \sum_{k=p}^{k=m} \alpha_k \left[\begin{array}{l} (n+p)^k - p(n+p-1)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}(n+p-2)^k \\ \qquad - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(n+p-3)^k + \ldots \end{array} \right].$$

Si dans cette formule on donne à n une valeur, puis qu'on fasse successivement

$$p = 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad m,$$

on aura les différences successives de la fonction relatives à la valeur n : si ces différences sont connues et que les coefficients α soient inconnus, on aura ainsi m équations pour déterminer les m coefficients α.

Nous allons employer un système d'équations particulier à la détermination de ces quantités. Pour définir aisément le choix de ce système, chan-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

geons de notation et posons

$$\Delta y_n = f(n+1) - f(n) = f'\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

l'argument sous le signe f' étant la demi-somme des arguments placés sous le signe f dans le premier membre. Il est aisé de voir que la généralisation de cette notation donne

$$\Delta y_n = f'\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \Delta^2 y_n = f''(n+1), \quad \Delta^3 y_n = f'''\left(n + \frac{1}{2}\right),$$
$$\Delta y_{n+1} = f'\left(n + \frac{3}{2}\right), \quad \Delta^2 y_{n+1} = f''(n+2), \quad \Delta^3 y_{n+1} = f'''\left(n + \frac{5}{2}\right), \ldots,$$

et généralement

$$\Delta^p y_n = f^p\left(n + \frac{p}{2}\right).$$

Or nous choisirons les équations qui nous serviront à calculer les α de façon que l'argument $\left(n + \frac{p}{2}\right)$ soit toujours

$$n, \quad n + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad n - \frac{1}{2} :$$

cela est facile, car p étant donné, s'il est pair on prendra

$$\Delta^p y_{n - \frac{p}{2}} = f^p(n),$$

s'il est impair on prendra

$$\Delta^p y_{n - \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}} = f^p\left(n \pm \frac{1}{2}\right),$$

et, afin que le calcul des α soit plus symétrique, nous combinerons par addition les deux équations où entrent

$$f^p\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad f^p\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

D'après cela, les différences à former sont

$$\Delta y_{-1}, \Delta y_0, \qquad \Delta^2 y_{-1}, \qquad \Delta^3 y_{-2}, \Delta^3 y_{-1}, \qquad \Delta^4 y_{-2},$$
$$\Delta^5 y_{-3}, \Delta^5 y_{-2}, \qquad \Delta^6 y_{-3}, \ldots;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mais le nombre de ces différences peut être réduit, car on a

$$\Delta^p y_{-n} = \sum_{k=p}^{k=m} \alpha_k \left[\begin{array}{l} (p-n)^k - p(p-n-1)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-n-2)^k - \dots \\ \quad + p(1-n)^k - (-n)^k \end{array} \right],$$

$$\Delta^p y_{n-p} = \sum_{k=p}^{k=m} \alpha_k [n^k - p(n-1)^k - \dots + p(n-p+1)^k - (n-p)^k].$$

Si k est pair, on voit que les termes sont deux à deux égaux et de signes contraires. Si k est impair, ils sont égaux et de même signe ; donc le coefficient de α_p est le même en valeur absolue dans $\Delta^p y_{-n}$ et $\Delta^p y_{n-p}$, c'est-à-dire dans deux différences de même ordre relatives à des valeurs de y dont les indices forment une somme égale à l'ordre de la différence changé de signe. Il suffira donc de former

$$\Delta y_{-1}, \quad \Delta^3 y_{-2}, \quad \Delta^5 y_{-3}, \dots, \quad \Delta^{p-1} y_{-\frac{p}{2}},$$

$$\Delta^2 y_{-1}, \quad \Delta^4 y_{-2}, \quad \Delta^6 y_{-3}, \dots, \quad \Delta^p y_{-\frac{p}{2}}.$$

Or on a, en n'élevant à la puissance k que les nombres positifs et k étant pair,

$$\Delta^p y_{-\frac{p}{2}} = 2 \sum_{k=p}^{k=m} \alpha_k \left[\left(\frac{p}{2}\right)^k - p\left(\frac{p}{2}-1\right)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}\left(\frac{p}{2}-2\right)^k, \dots \right];$$

on a aussi

$$\Delta^{p-1} y_{-\frac{p}{2}} = \sum_{k=p-1}^{k=m} \alpha_k \left[\begin{array}{l} \left(\frac{p}{2}-1\right)^k - (p-1)\left(\frac{p}{2}-2\right)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}\left(\frac{p}{2}-3\right)^k, \dots \\ \quad + (p-1)\left(1-\frac{p}{2}\right)^k - \left(-\frac{p}{2}\right)^k \end{array} \right],$$

où k ne doit recevoir que des valeurs impaires, puisque les termes résultant des valeurs paires de k se détruiraient par l'addition avec $\Delta^{p-1} y_{1-\frac{p}{2}}$, en sorte que les équations qui donnent les α peuvent s'écrire en employant

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

la nouvelle notation

$$\frac{1}{2}f^{p}(0)=\sum_{k=p}^{k=m}\alpha_k\left[\left(\frac{p}{2}\right)^k-p\left(\frac{p}{2}-1\right)^k+\frac{p(p-1)}{1.2}\left(\frac{p}{2}-2\right)^k-\dots\right],$$

$$\frac{1}{2}f^{p-1}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=p-1}^{k=m}\alpha_k\left[\begin{array}{l}\left(\frac{p}{2}-1\right)^k-(p-1)\left(\frac{p}{2}-2\right)^k+\dots\\ \quad+(p-1)\left(1-\frac{p}{2}\right)^k-\left(-\frac{p}{2}\right)^k\end{array}\right].$$

Dans la première, k est pair et l'on n'élève à la puissance k que les nombres pairs; dans la seconde, k est impair.

On aura donc deux groupes d'équations, les unes déterminant les α à indices pairs, les autres les α à indices impairs.

Si l'on développe les deux équations ci-dessus, on a les systèmes suivants :

$$\alpha_0=f(0),$$

$$\sum_{k=2}^{k=m}\alpha_k=\frac{1}{2}f''(0),$$

$$\sum_{k=4}^{k=m}\alpha_k(2^k-4)=\frac{1}{2}f^{\text{iv}}(0),$$

$$\sum_{k=6}^{k=m}\alpha_k\left(3^k-6.2^k+\frac{6.5}{1.2}\right)=\frac{1}{2}f^{\text{vi}}(0),$$

$$\sum_{k=8}^{k=m}\alpha_k\left(4^k-8.3^k+\frac{8.7}{1.2}2^k-\frac{8.7.6}{1.2.3}\right)=\frac{1}{2}f^{\text{viii}}(0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\sum_{k=1}^{k=m}\alpha_k=\frac{1}{2}f'\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{k=3}^{k=m}\alpha_k(2^k-2)=\frac{1}{2}f'''\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f'''\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\sum_{k=5}^{k=m}\alpha_k(3^k-4.2^k+5)=\frac{1}{2}f^{\text{v}}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^{\text{v}}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et en effectuant complétement le développement,

$$(a)\quad \begin{cases} \alpha_0 = f(0), \\ \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \ldots = \frac{1}{2} f''(0), \\ a\alpha_4 + b\alpha_6 + c\alpha_8 + \ldots = \frac{1}{2} f^{iv}(0), \\ b'\alpha_6 + c'\alpha_8 + \ldots = \frac{1}{2} f^{vi}(0), \\ c''\alpha_8 + \ldots = \frac{1}{2} f^{viii}(0), \end{cases}$$

$$(a_1)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \ldots = \frac{1}{2} f'\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right), \\ a_1\alpha_3 + b_1\alpha_5 + c_1\alpha_7 + \ldots = \frac{1}{2} f'''\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f'''\left(\frac{1}{2}\right), \\ b'_1\alpha_5 + c'_1\alpha_7 + \ldots = \frac{1}{2} f^{v}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^{v}\left(\frac{1}{2}\right), \\ c''_1\alpha_7 + \ldots = \frac{1}{2} f^{vii}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^{vii}\left(\frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

et pour les coefficients,

$$\begin{aligned} a &= 12, \quad b = 60, \quad c = 252, \ldots, \\ b' &= 360, \quad c' = 5040, \ldots, \\ c'' &= 20170, \ldots, \\ a_1 &= 6, \quad b_1 = 30, \quad c_1 = 126, \ldots, \\ b'_1 &= 120, \quad c'_1 = 1680, \ldots, \\ c''_1 &= 5110, \ldots. \end{aligned}$$

Si nous considérons les équations (a), nous voyons que $f^{2\mu}(0)$ n'entre pas dans la valeur de α dont l'indice soit supérieur à 2μ, il ne s'introduit donc qu'au moment où l'on calcule $\alpha_{2\mu}$; il suit de là que si l'on substitue dans la fonction y la valeur de ces coefficients, $f^{2\mu}(0)$ ne se trouvera que dans un nombre déterminé de termes, et *son multiplicateur sera par suite indépendant du degré m de la fonction.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

II.

Ces préliminaires établis, il est aisé de résoudre la question primitivement posée.

Supposons que l'on connaisse les valeurs d'une fonction pour une suite de valeurs de la variable en progression arithmétique.

Soient

$$\ldots, a + \overline{n-1}\,\omega, \quad a + n\omega, \quad a + \overline{n+1}\,\omega, \quad a + \overline{n+2}\,\omega, \ldots,$$

les valeurs de la variable x,

$$\ldots, f(a + \overline{n-1}\,\omega), \quad f(a + n\omega), \ldots,$$

celles de la fonction. Changeons de variable et posons

$$x - (a + n\omega) = v \quad \text{ou} \quad \frac{x-a}{\omega} + n = \frac{v}{\omega}.$$

Soit alors

$$V = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{v}{\omega}\right) + \alpha_2 \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{v}{\omega}\right)^3 + \ldots$$

une fonction représentant exactement les diverses valeurs de la fonction f pour les valeurs données de x ou, ce qui revient au même, pour les valeurs de $\frac{v}{\omega}$:

$$-1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots,$$

qui sont la série naturelle des nombres entiers. V représentera, avec une grande approximation, la valeur de f pour des valeurs de $\frac{v}{\omega}$ comprises entre celles qui sont données, par exemple pour les valeurs de $\frac{v}{\omega}$ comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ ou pour celles de x comprises entre $a + \overline{n-\frac{1}{2}}\,\omega$ et $a + \overline{n+\frac{1}{2}}\,\omega$. Par suite, si nous cherchons entre ces limites la valeur de $\int f(x)\,dx$, elle pourra être représentée par

$$\int V\,dv = \omega \left[\alpha_0 \frac{v}{\omega} + \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{3}\left(\frac{v}{\omega}\right)^3 + \frac{\alpha_3}{4}\left(\frac{v}{\omega}\right)^4 + \ldots\right],$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et, en prenant les limites,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} V\,d\nu = \int_{a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx = \omega\left[\alpha_0 + \alpha_2\frac{1}{3.2^2} + \alpha_4\frac{1}{5.2^4} + \alpha_6\frac{1}{7.2^6} + \dots\right].$$

Il faut maintenant déterminer α_0, α_2, α_4.... Nous avons pour cela les équations (a) où nous remplacerons o par $a + n\omega$ sous le signe f, si, au lieude ν, nous prenons x pour variable, puisque pour $\nu = 0$, $x = a + n\omega$,

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_0 &= f(a+n\omega),\\ \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \dots &= \tfrac{1}{1} f''(a+n\omega),\\ 12\,\alpha_4 + 60\,\alpha_6 + 252\,\alpha_8 + \dots &= \tfrac{1}{2} f^{IV}(a+n\omega),\\ 360\,\alpha_6 + 5040\,\alpha_8 + \dots &= \tfrac{1}{2} f^{VI}(a+n\omega),\\ 20170\,\alpha_8 + \dots &= \tfrac{1}{2} f^{VIII}(a+n\omega). \end{aligned}\right.$$

Multiplions par λ, μ, ν, ..., et ajoutons, il vient

$$\begin{aligned} &\alpha_0 + \lambda\alpha_2 + (\lambda + 12\mu)\alpha_4 + (\lambda + 60\mu + 360\nu)\alpha_6\\ &\quad + (\lambda + 252\mu + 5040\nu + 20170\rho)\alpha_8 + \dots\\ &= f + \frac{\lambda}{2} f'' + \frac{\mu}{2} f^{IV} + \frac{\nu}{2} f^{VI} + \dots. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\lambda = \frac{1}{3.2^2},\quad \lambda + 12\mu = \frac{1}{5.2^4},\quad \lambda + 60\mu + 360\nu = \frac{1}{7.2^6}, \dots,$$

le premier membre sera $\frac{1}{\omega}\int_{a+n-\frac{1}{2}\omega}^{a+n+\frac{1}{2}\omega} f(x)\,dx$, et, en substituant dans le second les valeurs de λ, μ, ν, ..., on aura l'intégrale cherchée : or on tire des équations précédentes

$$\lambda = \frac{1}{12},\quad \mu = -\frac{17}{2880},\quad \nu = \frac{367}{483840}, \dots,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$\int_{a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega} f(x)dx = \omega\left[\begin{array}{c} f(a+n\omega)+\frac{1}{24}f''(a+n\omega)-\frac{17}{5760}f^{IV}(a+n\omega) \\ +\frac{367}{967680}f^{VI}(a+n\omega)\ldots \end{array}\right]$$

et le calcul peut être poussé aisément aussi loin que l'on veut.

De cette formule, nous allons déduire celle que nous nous proposons de trouver; mais auparavant cherchons encore

$$\int_{a+n\omega}^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx$$

ou

$$\int_0^{\frac{1}{2}} V\,dv = \frac{\omega}{2}\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{2.2}+\frac{\alpha_2}{3.2^2}+\frac{\alpha_3}{4.2^3}+\frac{\alpha_4}{5.2^4}\cdots\right).$$

Aux équations (A) il faudra joindre les équations (a_1) dans lesquelles, en égard au changement de variable, il faut remplacer $-\frac{1}{2}$ par $a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega$ et $\frac{1}{2}$ par $a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega$, en sorte qu'elles deviennent

$$(A_1)\quad\left\{\begin{array}{l} \alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_7+\ldots=\frac{1}{2}f'\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right)+\frac{1}{2}f'\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right), \\ 6\alpha_3+30\alpha_5+126\alpha_7+\ldots=\frac{1}{2}f'''\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right)+\frac{1}{2}f'''\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right), \\ 120\alpha_5+1680\alpha_7+\ldots=\frac{1}{2}f^{V}\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right)+\frac{1}{2}f^{V}\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right), \\ 5110\alpha_7+\ldots=\frac{1}{2}f^{VII}\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right)+\frac{1}{2}f^{VII}\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right). \end{array}\right.$$

Pour abréger, nous désignerons quelquefois $f\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right)$ par $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, ou même simplement par f quand on pourra le faire sans ambiguïté.

Multiplions les équations (A_1) par λ', μ', ν',..., et ajoutons avec les équations (A) multipliées comme précédemment par λ, μ, ν,..., nous aurons

$$\alpha_0+\lambda'\alpha_1+\lambda\alpha_2+(\lambda'+6\mu')\alpha_3(\lambda+12\mu)\alpha_4+\ldots=f+\frac{\lambda}{1}f''+\frac{\mu}{2}f^{IV}+\ldots$$
$$+\frac{\lambda'}{2}\left[f'\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{\mu'}{2}\left[f'''\left(\frac{1}{2}\right)+f'''\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\ldots$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous poserons

$$\lambda' = \frac{1}{2.2}, \quad \lambda' + 6\mu' = \frac{1}{4.2^3}, \quad \lambda' + 30\mu' + 120\nu' = \frac{1}{6.2^5}, \ldots,$$
$$\lambda = \frac{1}{3.2^2}, \quad \lambda + 12\mu = \frac{1}{5.2^4}, \quad \lambda + 60\mu + 360\nu = \frac{1}{7.2^6}, \ldots$$

Les valeurs de λ, μ, ν seront donc les mêmes que précédemment, et l'on aura

$$\lambda' = \frac{1}{4}, \quad \mu' = -\frac{7}{192}, \quad \nu' = \frac{133}{23040},$$

en sorte que l'intégrale cherchée sera

$$\int_{a+n\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega} = \omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} f(a+n\omega) + \frac{1}{16} f'\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right) + \frac{1}{16} f'\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right) \\ + \frac{1}{48} f''(a+n\omega) - \frac{7}{768} f'''\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right) - \frac{7}{768} f'''\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right) \\ - \frac{17}{11520} f^{IV}(a+n\omega) \ldots \end{array} \right\}$$

Revenons maintenant à l'intégrale trouvée plus haut.

Si l'on veut avoir la valeur de $\int f(x)dx$ entre $a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega$ et $a+\overline{n+\frac{3}{2}}\omega$, entre $a+\overline{n+\frac{3}{2}}\omega$ et $a+\left(n+\frac{5}{2}\right)\omega, \ldots$, il suffit de faire croître chaque fois n d'une unité dans cette formule ; faisons-le varier de 1 à i, nous aurons une série d'intégrales entre des limites qui différeront de ω, et en faisant leur somme il viendra

$$\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)dx = \omega \left\{ \begin{array}{l|l|l} f(a+\omega) + \frac{1}{24} & f''(a+\omega) - \frac{17}{5760} & f^{IV}(a+\omega) + \alpha \ldots \\ + f(a+2\omega) & + f''(a+2\omega) & + f^{IV}(a+2\omega) \\ + f(a+3\omega) & + f''(a+3\omega) & + f^{IV}(a+3\omega) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ + f(a+i\omega) & + f''(a+i\omega) & + f^{IV}(a+i\omega) \end{array} \right\}$$

Posons généralement

$$f^p\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega\right) - f^p\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right) = f^{p+1}(a+n\omega),$$

l'indice p étant quelconque positif ou négatif (nous le placerons à gauche du signe f dans ce dernier cas). Si dans cette égalité nous donnons à p les

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeurs $-1, 1, 2, 3, \ldots$, et que pour chaque valeur de p nous ajoutions les égalités correspondantes aux valeurs $1, 2, 3, \ldots, i$ de n, nous aurons précisément les sommes qui figurent dans la parenthèse, et l'expression de l'intégrale se changera en la suivante :

$$\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)dx = \omega \left\{ \begin{array}{l} 'f\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) - 'f\left(a+\frac{1}{2}\omega\right) \\ +\frac{1}{24}\left[f'\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) - f'\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)\right] \\ -\frac{17}{5760}\left[f'''\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) - f'''\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)\right]\cdots \end{array} \right\}$$

$'f\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)$, le premier nombre de la série formée par l'addition de $f(a+\omega)$, $f(a+2\omega), \ldots$, étant tout à fait arbitraire, on peut le choisir de façon que la partie du second nombre indépendante de i soit nulle, c'est-à-dire poser

$$'f\left(a+\frac{1}{2}\omega\right) = -\frac{1}{24}f'\left(a+\frac{1}{2}\omega\right) + \frac{17}{5760}f'''\left(a+\frac{1}{2}\omega\right) - \ldots,$$

et il reste simplement

$$\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)dx = \omega \left\{ \begin{array}{l} 'f\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) + \frac{1}{24}f'\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) \\ -\frac{17}{5760}f'''\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) + \frac{367}{967680}f^{v}\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right)\cdots \end{array} \right\}$$

Si on veut avoir $\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx$, il faut évidemment diminuer l'intégrale précédente de $\int_{a+i\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx$ ou de $\int_{i}^{\frac{1}{2}} V\,dv$ où l'on fera $n = i$: or nous avons calculé cette intégrale; faisant la soustraction indiquée en tenant compte des relations

$$'f\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) - 'f\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\omega\right) = f\left(a+i\omega\right)\ldots,$$

il vient

$$\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx = \omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}'f\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) + \frac{1}{2}'f\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\omega\right) - \frac{1}{24}f'\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) \\ -\frac{1}{24}f'\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\omega\right) + \frac{11}{1440}f'''\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right) \\ +\frac{11}{1440}f'''\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\omega\right) - \frac{191}{120960}f^{v}\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega\right)\cdots \end{array} \right\}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

III.

Pour trouver la valeur de $\int\int f(x)\,dx^2$ entre les mêmes limites, nous nous servirons du calcul fait pour trouver $\int f(x)\,dx$.

Pour intégrer une seconde fois il faut laisser indéterminée la seconde limite, dans la première intégration : on peut écrire

$$\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx = \int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx + \int_{a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega}^{x} f(x)\,dx,$$

x devant recevoir la valeur $a+\overline{n+\frac{1}{2}}$. Dans le second terme du deuxième membre, prenons pour variable v au lieu de x, il faudra intégrer une première fois de $v=-\frac{1}{2}$ à v, et l'on aura

$$\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\omega} = \omega\left[f\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\omega\right)+\frac{1}{24}f'-\frac{17}{5760}f'''\ldots\right]$$

$$+\omega\left[\alpha_0\frac{v}{\omega}+\frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{v}{\omega}\right)^2+\frac{1}{3}\alpha_2\left(\frac{v}{\omega}\right)^3+\ldots\right]_{-\frac{1}{2}}^{v}$$

$$=\omega\left[f+\frac{1}{24}f'-\frac{17}{5760}f'''\ldots\right]+\omega\left[\frac{\alpha_0}{2}-\frac{\alpha_1}{2.2^2}+\frac{\alpha_2}{3.2^3}-\frac{\alpha_3}{4.2^4}\cdots\right]$$

$$+\omega\left[\alpha_0\frac{v}{\omega}+\frac{1}{2}\alpha_1\left(\frac{v}{\omega}\right)^2+\ldots\right].$$

Telle est l'expression à intégrer une seconde fois de $v=-\frac{1}{2}$ à $v=\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\omega^2\left(f+\frac{1}{24}f'-\frac{17}{5760}f'''\ldots\right)$$

$$+\omega^2\left(\frac{\alpha_0}{2}-\frac{\alpha_1}{3.2^3}+\frac{\alpha_2}{3.2^3}-\frac{\alpha_3}{5.2^4}+\frac{\alpha_4}{5.2^5}-\frac{\alpha_7}{7.2^6}+\ldots\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Exprimons maintenant la seconde parenthèse au moyen des f. Nous avons pour cela les équations (A) et (A_1), savoir :

$$\frac{1}{2}\alpha^0 = \frac{1}{2}f(a+n\omega),$$

$$\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\alpha_8+\ldots = \frac{1}{2}f'',$$

$$12\alpha_4+60\alpha_6+252\alpha_8+\ldots = \frac{1}{2}f^{IV},$$

$$360\alpha_6+5040\alpha_8+\ldots = \frac{1}{2}f^{VI},$$

$$20170\alpha_8+\ldots = \frac{1}{2}f^{VIII},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\alpha_7+\ldots = \frac{1}{2}f'\left(a+\overline{n-\frac{1}{2}}\,\omega\right)+\frac{1}{2}f'\left(a+\overline{n+\frac{1}{2}}\,\omega\right),$$

$$6\alpha_3+30\alpha_5+126\alpha_7+\ldots = \frac{1}{2}f'''\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f'''\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$120\alpha_5+1680\alpha_7+\ldots = \frac{1}{2}f^{V}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^{V}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$5110\alpha_7+\ldots = \frac{1}{2}f^{VII}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^{VII}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions les premières par λ, μ, ν, ..., les secondes par λ', μ', ν', ..., et ajoutons, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_0}{2}+\lambda'\alpha_1+\lambda\alpha_2+(\lambda'+6\mu')\alpha_3+(\lambda+12\mu)\alpha_4+(\lambda'+30\mu'+120\nu')\alpha_5\\ +(\lambda+60\mu+360\nu)\alpha_6+\ldots\\ =\frac{1}{2}f+\frac{\lambda'}{2}\left[f'\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{\lambda}{2}f''+\mu'\left[f'''\left(\frac{1}{2}\right)+f'''\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\\ +\mu f^{IV}+\ldots.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\lambda' = -\frac{1}{3.2^2}, \qquad \lambda'+6\mu' = -\frac{1}{5.2^4}, \qquad \lambda'+30\mu'+120\nu' = -\frac{1}{7.2^6},\ldots,$$

$$\lambda = \frac{1}{3.2^2}, \qquad \lambda+12\mu = \frac{1}{5.2^5}, \qquad \lambda+60\mu+360\nu = \frac{1}{7.2^7},\ldots,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

le premier membre sera précisément la parenthèse à évaluer. Or on en tire

$$\lambda' = -\frac{1}{12}, \qquad \mu' = \frac{17}{1440}, \qquad \nu' = -\frac{367}{161280}, \cdots,$$

$$\lambda = \frac{1}{24}, \qquad \mu = -\frac{17}{5760}, \qquad \nu = \frac{367}{967680}, \cdots;$$

en sorte que la parenthèse devient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} f(a+n\omega) + \tfrac{1}{48} f''(a+n\omega) - \tfrac{17}{11520} f^{IV}(a+n\omega) \\
&\qquad + \tfrac{367}{967680} f^{VI}(a+n\omega) \cdots \\
&- \tfrac{1}{24}\left[f'\left(a+\overline{n-\tfrac{1}{2}}\,\omega\right) + f'\left(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\,\omega\right)\right] \\
&+ \tfrac{17}{2880}\left[f'''\left(a+\overline{n-\tfrac{1}{2}}\,\omega\right) + f'''\left(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\,\omega\right)\right] \\
&- \tfrac{367}{322560}\left[f^{V}\left(a+\overline{n-\tfrac{1}{2}}\,\omega\right) + f^{V}\left(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\,\omega\right)\right] + \cdots.
\end{aligned}$$

Remplaçant les fonctions $f^p(a+n\omega)$ d'après la relation

$$f^{p-1}\left(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\,\omega\right) - f^{p-1}\left(a+\overline{n+\tfrac{1}{2}}\,\omega\right) = f^p(a+n\omega),$$

on a

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} f\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{3}{48} f'\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{1}{48} f'\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{85}{11520} f'''\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\
&\qquad + \tfrac{51}{11520} f'''\left(\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{7.367}{1935360} f^{V}\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{5.367}{967680} f^{V}\left(\tfrac{1}{2}\right) \cdots;
\end{aligned}$$

réduisant avec la première parenthèse, on obtient

$$\int_{a+\overline{n-\frac{1}{2}}\,\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\,\omega} dx \int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{n+\frac{1}{2}}\,\omega} f(x)\,dx$$

$$= \omega^2 \left\{ \begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] - \tfrac{1}{48}\left[f'\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] \\
&+ \tfrac{17}{3840}\left[f'''\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'''\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] \\
&- \tfrac{367}{387072}\left[f^{V}\left(\tfrac{1}{2}\right) + f^{V}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right] + \cdots
\end{aligned} \right\}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu — UPMC

faisons $n = 1, 2, 3, \ldots, i$ et ajoutons, nous aurons l'intégrale de $a + \frac{1}{2}\omega$ à $a + \overline{i+\frac{1}{2}}\omega$, ce qui donne

$$\omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}{}''f(a+i\omega) + \frac{1}{2}f''(a+\overline{i+1}\,\omega) - \frac{1}{48}f(a+i\omega) \\ -\frac{1}{48}f(a+\overline{i+1}\,\omega) + \frac{17}{3840}f''(a+i\omega) + \frac{17}{3840}f''(a+\overline{i+1}\,\omega) \\ -\frac{367}{387072}f^{IV}(a+i\omega) - \frac{367}{387072}f^{IV}(a+\overline{i+1}\,\omega)\ldots \end{array} \right.$$

$$-\omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}{}''f(a) + \frac{1}{2}{}''f(a+\omega) - \frac{1}{48}f(a) - \frac{1}{48}f(a+\omega) \\ +\frac{17}{3840}f''(a) + \frac{17}{3840}f''(a+\omega) - \frac{367}{387072}f''(a)\ldots \end{array} \right.$$

$''f(a)$, premier terme de la série, étant arbitraire, on peut le choisir de façon à annuler la seconde parenthèse et alors il reste

$$\int\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx^2 = \omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}[{}''f(a+i\omega) + {}''f(a+\overline{i+1}\,\omega)] \\ -\frac{1}{48}[f(a+i\omega) + f(a+\overline{i+1}\,\omega)] \\ +\frac{17}{3840}[f''(a+i\omega)f''(a+\overline{i+1}\,\omega)] \\ -\frac{367}{387072}[f^{IV}(a+i\omega) + f^{IV}(a+\overline{i+1}\,\omega)] + \ldots \end{array} \right.$$

Si l'on remarque que

$$''f(a+\omega) - {}''f(a) = 'f\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right)$$

et qu'on a posé précédemment

$$'f\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right) = -\frac{1}{24}f'\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right) + \frac{17}{5760}f'''\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right) - \frac{367}{967680}f^{V}\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right)\cdots,$$

l'équation en vertu de laquelle la seconde parenthèse est nulle devient

$$\begin{aligned} 0 = {}''f(a) &- \tfrac{1}{48}f(a) - \tfrac{1}{48}f'\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right) - \tfrac{1}{48}f(a+\omega) \\ &+ \frac{17}{11520}\left[3f''(a) + f'''\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right) + 3f''(a+\omega)\right] \\ &- \frac{367}{1935360}\left[5f^{IV}(a) + f^{V}\left(a+\tfrac{1}{2}\omega\right) + 5f^{IV}(a+\omega)\right] + \ldots. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$''f(a) = -\frac{1}{24} f(a+\omega) - \frac{17}{5760}[f''(a) + 2f''(a+\omega)]$$
$$+ \frac{367}{967680}[2f^{IV}(a) + 3f^{IV}(a+\omega)]\ldots.$$

Si au lieu de la dernière limite on veut prendre $a + i\omega$, il faut évidemment retrancher de l'expression trouvée

$$\int\int_{a+i\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(a)\,dx^2$$

ce que l'on calculerait comme précédemment; on trouve ainsi pour la correction

$$\omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\,'f\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\,\omega\right) + \frac{3}{8} f(a+i\omega) - \frac{1}{48} f'\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\omega\right) \\ + \frac{5}{384} f''(a+i\omega) + \frac{17}{11520} f'''\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\,\omega\right) \\ + \frac{34}{11520} f'''\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\omega\right) - \frac{43}{46080} f^{IV}(a+i\omega)\ldots \end{array} \right\}$$

et par suite pour l'intégrale

$$\int\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx^2 = \omega^2 \left[\begin{array}{c} ''f(a+i\omega) + \frac{1}{12} f(a+i\omega) - \frac{1}{240} f''(a+i\omega) \\ + \frac{31}{60480} f^{IV}(a+i\omega)\ldots \end{array} \right]$$

En résumé, si on se borne aux premiers termes qui sont en général suffisants eu égard à la petitesse des différences qui suivent et des coefficients qui les multiplient, nous avons les quatre formules suivantes :

$$(m)\quad \int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx = \omega \left\{ 'f\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\omega\right) + \frac{1}{24} f'\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\omega\right) \right\} \text{ avec } 'f\left(a+\frac{1}{2}\omega\right) = -\frac{1}{24} f'\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)$$

$$(n)\quad \int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx = \omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\,'f\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\omega\right) + \frac{1}{2}\,'f\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\,\omega\right) \\ -\frac{1}{24} f'\left(a+\overline{i+\frac{1}{2}}\,\omega\right) - \frac{1}{24} f'\left(a+\overline{i-\frac{1}{2}}\,\omega\right) \end{array} \right\} \text{ avec la même condition,}$$

$$(M)\quad \int\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+\overline{i+\frac{1}{2}}\omega} f(x)\,dx^2 = \omega^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\,''f(a+i\omega) + \frac{1}{2} f''(a+\overline{i+1}\,\omega) \\ -\frac{1}{48} f(a+i\omega) - \frac{1}{48} f(a+\overline{i+1}\,\omega) \end{array} \right\} \text{ avec } ''f(a) = \frac{1}{24} f(a+\omega),$$

$$(N)\quad \int\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+i\omega} f(x)\,dx^2 = \omega^2 \left\{ ''f(a+i\omega) + \frac{1}{12} f(a+i\omega) \right\} \text{ avec la même condition.}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

IV.

Remarquons que dans la formation de $''f(a+i\omega)$, il n'est pas besoin de connaître $f(a+n\omega)$ au delà de $f(a+\overline{i-1}\,\omega)$, car

$$''f(a+i\omega) = ''f(a+\overline{i-1}\,\omega) + 'f\left(a+\overline{i-\tfrac{1}{2}}\,\omega\right)$$
$$= ''f(a+\overline{i-1}\,\omega) + 'f\left(a+\overline{i-\tfrac{3}{2}}\,\omega\right) + f(a+\overline{i-1}\,\omega),$$

en sorte que si les valeurs de la fonction sont connues pour des valeurs a, $a+\omega$, $a+2\omega,\ldots,$ $a+\overline{i-1}\,\omega$ de x, la double intégration donnera la valeur approchée de l'intégrale pour la valeur $a+i\omega$ de la variable, en négligeant $\frac{1}{12}f(a+i\omega)$, ou mieux en mettant pour $f(a+i\omega)$ une valeur approchée.

De là résulte un moyen de résoudre l'équation différentielle, c'est-à-dire de connaître la valeur de la fonction y pour des valeurs de la variable x en progression arithmétique. Car soit une équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \varphi(x, y) = 0,$$

on en tire

$$y = \int\int \varphi(x, y)\, dx^2.$$

Supposons que l'on connaisse les premières valeurs de y pour des valeurs de x en progression arithmétique jusqu'à $x=\gamma$, on pourra calculer la valeur approchée de l'intégrale, c'est-à-dire y pour la valeur suivante de x ou pour $x=\delta$; substituant cette valeur de y dans la fonction sous le signe $\int\int$, on connaîtra la valeur de cette fonction pour $x=\delta$. Un calcul tout semblable servira à évaluer la fonction pour $x=\varepsilon$; on pourra donc de proche en proche calculer la valeur de y pour une série aussi longue que l'on voudra de valeurs de x en progression arithmétique, et l'équation différentielle sera résolue.

On trouvera par des tâtonnements les trois premières valeurs de y nécessaires pour l'application des formules. Quant au degré de l'approximation obtenue dans les calculs, il pourra, par des substitutions successives, être aussi grand que l'on voudra eu égard au nombre de termes employés dans l'évaluation de l'intégrale.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

La simplicité des calculs sera mise en évidence par l'exemple suivant, et on verra que la résolution de l'équation proposée sera ramenée à la formation d'un tableau tout à fait analogue à ceux que l'on construit pour la résolution des équations numériques, par la méthode des différences.

Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 0{,}04\,y - 0{,}28 = 0,$$

on en tire

$$y = \int\int (0{,}28 - 0{,}04\,y)\,dx^2.$$

Supposons que, pour $x = 0$, y et $\frac{dy}{dx}$ soient nuls, ce qui signifie géométriquement que la solution $y = F(x)$ de l'équation est représentée par une courbe tangente à l'axe des x à l'origine.

Prenons $\omega = 1$, il résultera de l'hypothèse précédente que, pour $x = \pm \frac{1}{2}$, y sera très-petit; négligeons-le, soit $-\frac{1}{2}$ la valeur initiale a de x, on aura

$$f(a) = f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0{,}28,$$
$$f(a+\omega) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0{,}28,$$

par suite

$$f'\left(a + \frac{\omega}{2}\right) = 0;$$

et comme

$$''f\left(a + \tfrac{1}{2}\omega\right) = -\tfrac{1}{24} f'\left(a + \tfrac{1}{2}\omega\right),$$

on a

$$f'\left(a + \tfrac{1}{2}\omega\right) = 0,$$
$$''f(a) = \tfrac{1}{24} f'(a+\omega), \qquad ''f(a) = \frac{0{,}28}{24} = 0{,}0117.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous avons donc le tableau suivant :

ARGUMENT.	x	f	$'f$	$''f$
a	$-0,5$			$0,0117$
		$0,28$	$0,00$	
$a+\omega$	$0,5$			$0,0117$
		$0,28$	$0,28$	
$a+2\omega$	$1,5$			$0,2917$

(Les nombres non soulignés résultent des relations qui lient $'f$ et f, $''f$ et $'f$. Nous ne connaissons pas la valeur de la fonction f pour $x = a + 2\omega$, parce que la valeur correspondante de y n'est pas connue; mais si nous prenons pour f une valeur approchée qui sera évidemment 0,28, par suite des hypothèses initiales nous pourrons calculer y par la formule

$$y = \omega^2 \left[''f(a+2\omega) + \frac{1}{12} f(a+2\omega) \right],$$

ce qui donne

$$y = 0,2917 + \frac{0,28}{12} = 0,3150.$$

En admettant la forme parabolique de la courbe $y = \varphi(x)$, solution de l'équation différentielle, et connaissant la valeur de y pour $x = 1,5$, on peut en conclure sa valeur pour $x = 0,5$ en la regardant comme proportionnelle au carré de x, en sorte que pour $x = \pm 0,5$,

$$y = \frac{0,3150}{9} = 0,0350.$$

Par suite, les trois premières valeurs corrigées de la fonction f sont

$$0,28 - 0,04 \times 0,035, \quad 0,28 - 0,04 \times 0,035, \quad 0,28 - 0,04 \times 0,315$$

ou

$$0,2786, \quad 0,2786, \quad 0,2674,$$

et on peut former le tableau suivant, en admettant que pour $x = -1,5$ la

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

valeur de y est sensiblement la même que pour $x - 1{,}5$:

ARGUMENT.	x	f	f'	f''	f'''
a	$-0{,}5$	0,2786		$-0{,}0112$	
			0,0000		0,0000
$a+\omega$	0,5	0,2786		$-0{,}0112$	
			$-0{,}0112$		
$a+2\omega$	0,5	0,2674			

Nous avons maintenant trois valeurs de f fort approchées. La première à trouver est

$$f(a+3\omega);$$

pour cela, il faut d'abord calculer y :

$$y = {}''f(a+3\omega) + \tfrac{1}{12}\,{}''f(a+3\omega),$$
$$= {}''f(a+3\omega) + f'(a+2\omega) + f'\left(a+\tfrac{3}{2}\omega\right) + \tfrac{1}{12}\,f(a+3\omega).$$

Les trois premiers termes sont connus; mettons pour $f(a+3\omega)$ une valeur approchée. Nous l'obtiendrons en regardant la différence seconde comme n'ayant pas changé; ce qui donne

$$0{,}245,$$

par suite

$$y = 0{,}8364 + \tfrac{1}{12}\,0{,}245 = 0{,}8364 + 0{,}0205 + 0{,}8569;$$

d'où

$$0{,}04\,.\,y = 0{,}0343,$$

et

$$0{,}28 - 0{,}04\,y = 0{,}2457,$$

valeur cherchée de f' pour $x = 2{,}5$

On en tire, pour le calcul suivant, la valeur de

$${}''f(a+4\omega) = 1{,}6282,$$

et ainsi de suite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les opérations à faire sont donc les suivantes : former la fonction

$$''f(a+i\omega) = ''f(a+\overline{i-1}\,\omega) + 'f\left(a+\overline{i-\tfrac{1}{2}}\,\omega\right) + f(a+\overline{i-1}\,\omega);$$

trouver une valeur approchée de

$$f(a+i\omega),$$

à l'aide des trois dernières; former

$$\tfrac{1}{12} f(a+i\omega);$$

former

$$''f(a+i\omega) + \tfrac{1}{12} f(a+i\omega) \quad \text{ou} \quad y;$$

former

$$0{,}04y, \quad 0{,}28 - 0{,}04y,$$

ou la véritable valeur de f pour $x = a + i\omega$.

Voici le tableau des calculs :

ARGUMENT.	x	$''f$	$'f$	f	f'	f''	f app.	$\frac{1}{12}f$ app.	y	$0{,}04y$
a	$-0{,}05$	0,0117		0,2786		$-0{,}0112$				
			0,0000		0,0000					
$a+\omega$	$+0{,}5$	0,0117		0,2786		$-0{,}0111$				
			0,2786		$-0{,}0111$					
$a+2\omega$	1,5	0,2903		0,2675		H	0,28	0,233	0,3126	0,125
			I		G					
$a+3\omega$	2,5	A		F		H′	B	C	D	E
			I′		G′					
$a+4\omega$	3,5	A′		F′			B′	C′	D′	E′

On a écrit les nombres déjà obtenus, et les lettres indiquent l'ordre des opérations à faire pour continuer le tableau. Ces opérations sont définies par des formules très-simples, car nommons A′, B′, C′, . . . , la nouvelle

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

série de nombres, il est aisé de voir que

$$A' = A + I + F, \quad C' = \frac{1}{12} B', \quad E' = 0{,}04\, D', \quad G' = F' - F, \quad I' = I + F,$$
$$B' = F + G + H, \quad D' = A' + C', \quad F' = 0{,}28 - E', \quad H' = G' - G.$$

D'après cela, on trouvera à l'aide des nombres déjà connus,

$$A = 0{,}8364, \quad C = 0{,}0205, \quad E = 0{,}0343, \quad G = -0{,}0218, \quad I = 0{,}5461,$$
$$B = 0{,}245, \quad D = 0{,}8569, \quad F = 0{,}2457, \quad H = -0{,}0107.$$

Suit un tableau plus développé du calcul :

ARGUMENT.	x	$''f$	$'f$	f	f'	f''	f app.	$\frac{1}{12} f$ app.	y	$0{,}04\,y$
a	$-0{,}5$	0,0117								
$a+\omega$	0,5	0,0117		0,2786		−0,0111		0,0232	0,0349	0,0139
			0,2786		−0,0111					
$a+2\omega$	1,5	0,2903		0,2675		−0,0107	0,267	0,0223	0,3126	0,1250
			0,5461		−0,0218					
$a+3\omega$	2,5	0,8364		0,2457		−0,0097	0,246	0,0205	0,8569	0,3427
			0,7958		−0,0315					
$a+4\omega$	3,5	1,6282		0,2142		−0,0086	0,214	0,0178	1,6460	0,6584
			1,0060		−0,0401					
$a+5\omega$	4,5	2,6342		0,1741		−0,0070	0,174	0,0145	2,6487	1,0594
			1,1801		−0,0471					
$a+6\omega$	5,5	3,8143		0,1270		−0,0050	0,127	0,106	3,8249	1,5299
			1,3071		−0,0521					
$a+7\omega$	6,5	5,1214		0,0749		−0,0030	0,075	0,0063	5,1277	2,0510
			1,3820		−0,0551					
$a+8\omega$	7,5	6,5034		0,0198		−0,0008	0,020	0,0017	6,5051	2,6020
			1,4018		−0,0559					
$a+9\omega$	8,5	7,9052		−0,0361		+0,0015	−0,037	−0,0031	7,9021	3,1608
			1,3657		−0,0544					
$a+10\omega$	9,5	9,2709		−0,0905			−0,092	−0,0077	9,2632	3,7052

L'exactitude de ces résultats peut être aisément vérifiée par le calcul direct de l'intégrale. Dans le calcul actuel on a, en effet,

$$y = 14 \sin^2 \frac{x}{12},$$

et pour

$x = 0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5,\ 4{,}5,\ 5{,}5,\ 6{,}5,\ 7{,}5,\ 8{,}5,\ 9{,}5,$
$y = 0{,}0350,\ 0{,}3127,\ 0{,}8569,\ 1{,}6461,\ 2{,}6487,\ 3{,}8248,\ 5{,}1275,\ 6{,}5048,\ 7{,}9019,\ 9{,}2630.$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

V.

Nous allons voir plus particulièrement l'application que l'on peut faire de la méthode des quadratures du calcul des intégrales des équations du mouvement d'une planète soumise à l'action des forces perturbatrices.

Considérons deux corps partant du même point avec la même vitesse et dans la même direction; supposons que l'un d'eux continue son mouvement elliptique tandis que le mouvement de l'autre est troublé par l'action de diverses forces.

Soient à une époque quelconque t, r_0, x_0, y_0, z_0 le rayon vecteur et les coordonnées de la planète dans son mouvement elliptique; r, x, y, z, les coordonnées de la planète troublée à la même époque. Nous savons que les équations du mouvement elliptique sont

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \frac{\mu x_0}{r_0^3} = 0, \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} + \frac{\mu y_0}{r_0^3} = 0, \quad \frac{d^2z_0}{dt^2} + \frac{\mu z_0}{r_0^3} = 0,$$

μ étant la somme des masses du Soleil et de la planète. Dans les intégrales de ces équations entrent six constantes invariables a, e, ε, φ, θ, ϖ.

Le mouvement de la planète troublée est donné par le système

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \sum m' \left(\frac{x' - x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \sum m' \left(\frac{y' - y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \sum m' \left(\frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right),$$

et leurs intégrales sont de même forme que celles du mouvement elliptique où les constantes sont regardées comme fonctions du temps.

Nous supposerons que l'action perturbatrice est due à une seule planète, et c'est à ce dernier système d'équations que nous nous proposons d'appliquer la méthode d'intégration précédemment exposée.

Posons

$$x - x_0 = \xi, \quad y - y_0 = \eta, \quad z - z_0 = \zeta.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il vient, en retranchant membre à membre les équations précédentes,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) - \mu\left(\frac{x}{\gamma^3} - \frac{x_0}{r_0^3}\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) - \mu\left(\frac{y}{\gamma^3} - \frac{y_0}{r_0^3}\right),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) - \mu\left(\frac{z}{\gamma^3} - \frac{z_0}{r_0^3}\right).$$

Si l'on fait

$$\delta r = \frac{x_0}{r_0}\xi + \frac{y_0}{r_0}\eta + \frac{z_0}{r_0}\zeta,$$

et qu'on néglige les petits termes, eu égard à la petitesse de ξ, η, ζ, on pourra écrire

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + \frac{\mu}{\gamma_0^3}\left(3\frac{x_0}{r_0}\delta r - \xi\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + \frac{\mu}{\gamma_0^3}\left(3\frac{y_0}{r_0}\delta r - \eta\right),$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + \frac{\mu}{\gamma_0^3}\left(3\frac{z_0}{r_0}\delta r - \zeta\right),$$

et en intégrant

$$\zeta = \int\int\left[m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + \frac{\mu}{\gamma_0^3}\left(3\frac{x_0}{r_0}\delta r - \xi\right)\right]dt^2,$$
$$\eta = \int\int\left[m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + \frac{\mu}{\gamma_0^3}\left(3\frac{y_0}{r_0}\delta r - \eta\right)\right]dt^2,$$
$$\zeta = \int\int\left[m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + \frac{\mu}{\gamma^3}\left(3\frac{z_0}{r_0}\delta r - \zeta\right)\right]dt^2.$$

M. Encke a appliqué cette méthode au calcul des perturbations de Vesta par Jupiter du 11 septembre 1853,0^h, au 21 mai 1854,0^h, temps moyen de Paris.

Pour indiquer d'une manière plus précise la marche du calcul, je reprends sommairement l'application de M. Encke.

Les éléments du mouvement elliptique étant connus pour l'époque initiale 11 septembre, que je désignerai par $t_0 + \frac{1}{2}\tau$, calculons au moyen de

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ces éléments pour des époques distantes de 42 jours, valeur choisie de l'intervalle τ à partir de l'époque t_0, c'est-à-dire pour

t_0,	$t_0 + \tau$,	$t_0 + 2\tau$,	$t_0 + 3\tau$,
21 août,	2 octobre,	13 novembre,	25 décembre,

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 de la planète Vesta,

Les coordonnées x', y', z' de Jupiter,

Le rayon vecteur r_0 de Vesta,

La distance ρ de Vesta et de Jupiter.

Ce calcul fait, exprimons en nombres les coefficients qui existent dans les équations à intégrer; si l'on évalue μ en secondes de l'orbite terrestre dont le rayon est pris pour unité, et si l'on multiplie par $\omega = 42^2 = 1764$, pour éviter la multiplication postérieure, on a

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 102'',1591\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + \frac{0,522}{r_0^3}\left(3\frac{x_0}{r_0}\delta r - \xi\right);$$

les équations qui donnent η et ζ ont, comme on sait, les mêmes coefficients.

Négligeant le dernier terme, calculons à l'aide de ces données une série de valeurs approchées de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ pour les mêmes époques.

De là une série de valeurs approchées de ξ qui servent à calculer le second terme, et par suite une nouvelle série de valeurs de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ que l'on peut regarder comme exactes et qui servent de point de départ pour le calcul définitif de ξ.

Il est clair que le calcul de η et de ζ doit être conduit parallèlement à celui de ξ, puisque l'évaluation du dernier terme dans chaque équation en dépend par la relation

$$\delta r = \frac{x_0}{r_0}\xi + \frac{y_0}{r_0}\eta + \frac{z_0}{r_0}\zeta.$$

Les quatre formules que nous avons données pourront être employées au calcul; le choix dépendra des limites de l'intégration : (n) et (N) s'appliqueront au calcul de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, ξ, η, ζ pour les époques $t + i\tau$; (m) et (M) s'appliqueront au même calcul pour les époques $t + \left(i + \frac{1}{2}\right)\tau$.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Les relations simples

$$x = x_0 + \xi, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}, \ldots,$$

feront connaître, en mettant pour ξ et $\frac{d\xi}{dt}$ leurs valeurs à l'époque extrême 21 mai 1854, les valeurs des coordonnées et les composantes de la vitesse de la planète dans son orbite à cette époque.

De ces nouvelles données on tirera la valeur des éléments a, e, ε, φ, θ, ϖ. Ce calcul, ainsi que celui qui donne les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, x', y'. z',..., peut se faire à l'aide des formules connues.

M. Encke a transformé ces formules d'une manière commode; voici celles qu'il a données et leur démonstration qui n'offre du reste aucune difficulté.

VI.

On sait que l'intégration des équations du mouvement elliptique d'une planète

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = 0,$$

conduit aux résultats suivants :

$$u - e \sin u = nt + \varepsilon - \varpi,$$

$$r = a(1 - e \cos u),$$

$$\operatorname{tang} \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} u,$$

a désignant le grand axe de l'orbite elliptique de la planète, e l'excentricité, u l'anomalie excentrique, w l'anomalie vraie ou l'angle du rayon vecteur focal avec le périhélie, n la vitesse moyenne de la planète dans son orbite $= \frac{2\pi}{T}$, ϖ la longitude du périhélie, ε la longitude moyenne de l'époque, c'est-à-dire la longitude moyenne de la planète à l'époque zéro.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Prenons le plan de l'écliptique pour celui des xy, la ligne des équinoxes $O\Upsilon$ pour axe des x et l'axe des z dirigé vers la région boréale du ciel; désignons par $v = \varpi + w$ la longitude de la planète M, soit ON la ligne des nœuds et

$$N\Upsilon = \theta, \quad MN = v - \theta\Upsilon, \quad MN\Upsilon = \pi - \varphi,$$

$$x = r\cos(v-\theta)\cos\theta - r\sin(v-\theta)\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\cos(v-\theta)\sin\theta + r\sin(v-\theta)\cos\theta\cos\varphi,$$
$$z = r\sin(v-\theta)\sin\varphi,$$

et trois autres équations qu'on obtient en les différentiant par rapport au temps.

Or nous avons deux problèmes à résoudre.

1°. Supposons donnés les éléments elliptiques, et cherchons les coordonnées rectangulaires de la planète, et leurs dérivées par rapport au temps.

Pour calculer x, y, z, posons

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos\theta = \sin\alpha\sin A, & \sin\theta = \sin\beta\sin B, \\ \sin\theta\cos\varphi = -\sin\alpha\cos A, & \cos\theta\cos\varphi = \sin\beta\cos B, \end{cases}$$

et les valeurs de x, y, z deviennent

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= r\sin\alpha(A + v - \theta), \\ y &= r\sin\beta(B + v - \theta), \\ z &= r\sin\varphi\sin(v-\theta). \end{aligned}$$

Nous tirons de là

$$\frac{dx}{dt} = \sin\alpha\left[\frac{dr}{dt}\sin(A + v - \theta) + r\cos(A + v - \theta)\frac{dv}{dt}\right].$$

Or, d'après les intégrales du mouvement elliptique,

$$r = a(1 - e\cos u), \quad \frac{dr}{dt} = \frac{nae\sin u}{1 - e\cos u}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{n\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = \frac{na\sin\alpha}{1-e\cos u}\left\{\begin{aligned} &\cos A\left[e\sin u\sin(v-\theta) + \sqrt{1-e^2}\cos(v-\theta)\right] \\ &+\sin A\left[e\sin u\cos(v-\theta) - \sqrt{1-e^2}\sin(v-\theta)\right] \end{aligned}\right\},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et comme

$$\sin u = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(v-\varpi)}{1-e\cos(v-\varpi)}, \quad 1-e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos(v-\varpi)},$$

il vient, en substituant,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{na\sin\alpha}{\sqrt{1-e^2}}\{\cos A[e\cos(\varpi-\theta)+\cos(v-\theta)] - \sin A[e\sin(\varpi-\theta)+\sin(v-\theta)]\}.$$

Posons

$$(3)\quad \begin{cases} e\sin(\varpi-\theta)+\sin(v-\theta) = \dfrac{C\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{\mu}}\sin U, \\ e\cos(\varpi-\theta)+\sin(v-\theta) = \dfrac{C\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{\mu}}\cos U; \end{cases}$$

eu égard à la relation $\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} = n$, on aura

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = C\sin\alpha\cos(A+U). \\ \text{Un calcul semblable donne} \\ \dfrac{dy}{dt} = C\sin\beta\cos(B+U), \\ \dfrac{dz}{dt} = C\sin\varphi\cos U. \end{cases}$$

On voit que les équations (2) et (4) résolvent complétement la question, les indéterminées α, A, β, B, C, U, étant connues par les relations (1) et (3).

2°. Étant donnés les coordonnées rectangulaires et leurs coefficients différentiels, trouver les éléments de l'orbite.

Le principe des aires donne

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos\varphi,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c' = -\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos\theta\sin\varphi,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c'' = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\sin\theta\sin\varphi,$$

équations qui déterminent $\sqrt{\mu a(1-e^2)}$, φ et θ.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit V la vitesse de la planète dans son orbite, δ l'angle du chemin parcouru avec le rayon vecteur, on sait que

$$V r \sin\delta = \sqrt{\mu a (1 - e^2)},$$
$$V r \cos\delta = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

d'où l'on tirera V r *et* δ.

Pour trouver r et v, nous avons la relation

$$r \sin(v - \theta) = \frac{z}{\sin\varphi},$$

et cette autre, facile à établir,

$$r \cos(v - \theta) = x\cos\theta + y\sin\theta.$$

En effet,

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r\sin\alpha\cos\theta\sin(A + v - \theta) + r\sin\beta\sin\theta\sin(B + v - \theta),$$

et en développant

$$\sin(A + \overline{v - \theta}), \quad \sin(B + \overline{v - \theta}),$$

et tenant compte des relations établies pour calculer x, y, z, le second membre se réduit simplement à $r\cos(v - \theta)$.

On trouvera ainsi r *et* v, *par suite* V, *puisque* V r *est connu.*

Il reste à calculer a, e, ϖ et ζ.

On aura a *par la formule*

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Pour trouver e et ϖ, prenons la relation

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{r}{\frac{dr}{dv}} = \frac{r}{\frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{dv}};$$

ces deux dérivées sont données par les équations du mouvement elliptique,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et en substituant leur valeur, on a

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sin u}.$$

Si dans cette équation on remplace u en r, on en tirera e,

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{r(2a-r)-a^2(1-e^2)}}, \quad \text{ou} \quad \sin^2\vartheta = \frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)}.$$

Si on y remplace u en fonction de $v-\varpi$, on aura ϖ. M. Encke a mis les équations qui donnent e, ϖ sous la forme

$$2ae\sin(v-\varpi) = -r\sin(v-\vartheta) - (2a - r\sin(2\vartheta + v - \vartheta),$$
$$2ae\cos(v-\varpi) = -r\cos(v-\vartheta) - (2a - r\cos(2\vartheta + v - \vartheta).$$

Il est très-aisé d'en tirer la valeur de $1-e^2$ donnée ci-dessus, ce qui vérifie ces formules.

Enfin ζ sera connu par les deux équations

$$\zeta = u = e\sin u \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}(v-\varpi).$$

On pourra donc connaître à une époque quelconque les valeurs des éléments ou construire des Tables des quantités nécessaires pour les calculer à un moment donné.

M. Encke a vérifié l'application de la méthode précédente en effectuant aussi son calcul par celle de la variation des constantes, et les résultats qu'il a obtenus, en n'employant à ce travail qu'un temps moitié moindre, s'accordent avec les premiers autant qu'on peut le désirer, en sorte que la simplicité et la brièveté des opérations établissent suffisamment l'avantage du nouveau procédé.

Vu et approuvé,
Le 31 juillet 1857,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 31 juillet 1857,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

THÈSE DE GÉOMÉTRIE.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES LIGNES GÉODÉSIQUES.

Gauss, dans ses *Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes*, a donné un grand nombre de propriétés remarquables de la ligne géodésique tracée sur une surface quelconque. Divers géomètres ont depuis étudié le même sujet et sont arrivés, par des méthodes différentes, aux beaux résultats donnés par Gauss (*). Mais les travaux les plus nombreux se rapportent aux lignes géodésiques des surfaces du second degré et de l'ellipsoïde en particulier. MM. Chasles, Liouville, Michael Roberts, Hart, Jacobi, Joachimsthal, ont publié divers Mémoires sur ce sujet, et les résultats auxquels ils sont parvenus sont très-variés, tant par la nature des propriétés trouvées, que par la méthode employée pour les démontrer. On peut, en prenant un point de départ unique, arriver par des transformations convenables à ces divers théorèmes.

Le but que je me suis proposé est de coordonner les travaux qui ont été faits sur les lignes géodésiques et non de reproduire avec ordre toutes les démonstrations qui ont pu être données de leurs diverses propriétés afin d'écarter des méthodes d'investigation trop différentes, quoique fort élégantes prises isolément. Je me suis attaché surtout à exposer les propriétés susceptibles d'une traduction géométrique, me bornant à citer le petit nombre de celles qui ne sont pas dans ce cas.

Mon travail sera divisé en deux parties.

Dans la première, j'examinerai l'équation générale de la ligne géodésique sur une surface, les simplifications dont elle est susceptible selon le choix des coordonnnées et les propriétés dont jouissent certaines fonctions de ces coordonnées ; j'en ferai l'application à quelques surfaces.

Dans la seconde, je m'occuperai spécialement des propriétés géométriques des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré.

(*) M. Bertrand a ajouté de très-beaux développements au Mémoire de Gauss qu'il a exposé au Collége de France en 1855. Je n'en parlerai pas parce qu'ils ont déjà fait l'objet d'études particulières.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Equation générale de la ligne géodésique. — Étant donnée une surface quelconque, concevons une autre surface dépendant d'un paramètre arbitraire p; elle déterminera sur la première une certaine ligne que je désignerai par (p) et dont je représenterai l'équation par $p =$ constante. Concevons une autre série de surfaces dépendant d'un paramètre q; deux surfaces $p =$ constante, $q =$ constante détermineront sur la surface donnée deux lignes (p) et (q), et, par conséquent, un point dont les coordonnées seront p et q. Un élément de (p) sera représenté par $\sqrt{G}\,dq$, G étant une certaine fonction de p et de q, $\sqrt{E}\,dp$ sera un élément de (q), et l'élément d'une ligne quelconque tracée sur la surface aura pour expression

$$ds = \sqrt{E\,dp^2 + G\,dq^2 + 2F\,dp\,dq}.$$

Appliquons la méthode des variations à la recherche du minimum de s; on a

$$2ds\,\delta ds = \left(\frac{dE}{dp}\,dp^2 + \frac{dG}{dp}\,dq^2 + \frac{2\,dF}{dp}\,dp\,dq\right)\delta p + (2E\,dp + 2F\,dq)\,d\delta p.$$

Il faut égaler à zéro $\delta \int ds$; en intégrant par parties, il vient

$$\delta \int ds = \frac{E\,dp + F\,dq}{ds}\,\delta p + \int \frac{\delta p}{2\,ds}\left(\frac{dE}{dp}\,dp^2 + \frac{dG}{dp}\,dq^2 + \frac{2dF}{dp}\,dp\,dq\right) - d\frac{E\,dp + F\,dq}{ds}\,\delta p,$$

et conséquemment la condition

$$\frac{dE}{dp}\,dp^2 + \frac{2\,dF}{dp}\,dp\,dq + \frac{dG}{dp}\,dq^2 - 2\,ds\,d\frac{E\,dp + F\,dq}{ds} = 0.$$

Soit i l'angle de la ligne géodésique avec (q); projetons sur (q) les deux autres côtés du triangle infinitésimal, il vient, en multipliant par $\sqrt{E}$,

$$ds\sqrt{E}\cos i = E\,dp + F\,dq$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et

$$d\,\frac{\mathrm{E}\,dp + \mathrm{F}\,dq}{ds}\,\frac{d\mathrm{E}}{2\sqrt{\mathrm{E}}}\cos i - \sqrt{\mathrm{E}}\sin i\,di.$$

Eliminant $\sin i$ et $\cos i$, on a

$$(g) \qquad \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,di = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dq}\,dp - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\,dq + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\,d\mathrm{E} - \frac{d\mathrm{F}}{dp}\,dp,$$

équation générale de la ligne géodésique.

Nous y joindrons la relation

$$(g) \qquad \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\cot i = \mathrm{E}\frac{dp}{dq} + \mathrm{F}$$

qui permettra d'en éliminer l'angle i.

II.

Cas particuliers. — Nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur le système des lignes (p) et (q); nous allons voir maintenant les simplifications qu'apporte dans l'équation générale un choix convenable de coordonnées.

Trajectoires orthogonales. — Choisissons en premier lieu deux systèmes de trajectoires orthogonales, les lignes (p) et (q) se coupent partout à angle droit, il faut faire $\mathrm{F} = 0$ dans les équations (g) qui deviennent

$$(1) \qquad \begin{cases} \sqrt{\mathrm{EG}}\,di = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dq}\,dp - \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\,dq, \\ \operatorname{tang} i = \dfrac{\sqrt{\mathrm{G}}\,dq}{\sqrt{\mathrm{E}}\,dp}, \end{cases}$$

où, en introduisant l'angle i dans l'équation de la ligne géodésique,

$$\sin i\cos i\,di = \frac{\cos^2 i}{\mathrm{E}}\frac{d\mathrm{E}}{dq}\,dq - \frac{\sin^2 i}{\mathrm{G}}\frac{d\mathrm{G}}{dp}\,dp.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous pouvons particulariser encore davantage. M. Liouville a fait voir fort simplement par la décomposition en deux facteurs imaginaires de l'expression de ds^2 qu'il est possible de choisir un système de coordonnées telles, que E soit égal à G en chaque point ; on a alors

$$(2) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\,(dp^2 + dq^2),$$

et pour la ligne géodésique

$$(3) \qquad di = \frac{1}{2\mathrm{E}}\left(\frac{d\mathrm{E}}{dq}\,dp - \frac{d\mathrm{E}}{dp}\,dq\right), \qquad \operatorname{tang} i = \frac{dq}{dp}.$$

On voit que si dp et dq sont constants, la surface est divisée en rectangles semblables par les deux systèmes (p) et (q).

Lorsque E est de la forme

$$\varphi(p) + \mathrm{F}(q),$$

l'équation s'intègre; car, en mettant pour E cette valeur dans

$$\sin i \cos i\, di = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\cos^2 i \frac{d\mathrm{E}}{dq}\,dq - \sin^2 i \frac{d\mathrm{E}}{dp}\,dp\right),$$

les variables se séparent et on a

$$(4) \qquad \varphi(p)\sin^2 i - \mathrm{F}(q)\cos^2 i = \text{constante}.$$

Lorsque les lignes (p) et (q) sont des lignes de courbure de la surface, l'expression de ds^2 se trouve aisément.

En effet, x, y, z étant des fonctions de p et q, on a trois équations de la forme

$$dx = \frac{dx}{dp}\,dp + \frac{dx}{dq}\,dq,$$

et, par suite,

$$ds^2 = \left[\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \frac{dz}{dp}\right)^2\Big]\,dp^2 + \left[\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \frac{dy}{dq}\right)^2 + \frac{dz}{dq}\Big)^2\Big]\,dq^2.$$

Projetons sur les trois axes de coordonnées un élément ds de (q); on a, en

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en posant

$$\sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2+\left(\frac{dp}{dz}\right)^2}=\varepsilon,$$

$$\frac{dx}{dp}\,dp=\frac{ds}{\varepsilon}\,\frac{dp}{dx},\qquad \frac{dy}{dp}\,dp=\frac{ds}{\varepsilon}\,\frac{dp}{dy},\qquad \frac{dz}{dp}\,dp=\frac{ds}{\varepsilon}\,\frac{dp}{dz}.$$

Multiplions les deux membres respectivement par dx, dy, dz, ajoutons et remarquons que

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2,\qquad dp=\frac{dp}{dx}\,dx+\frac{dp}{dy}\,dy+\frac{dp}{dz}\,dz;$$

il vient

$$ds=\frac{dp}{\varepsilon},$$

d'où

$$\frac{dx}{dp}=\frac{1}{\varepsilon^2}\,\frac{dp}{dx},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+\left(\frac{dy}{dp}\right)^2+\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\,;$$

on aurait de même

$$\left(\frac{dx}{dq}\right)^2+\left(\frac{dy}{dq}\right)^2+\left(\frac{dz}{dq}\right)^2=\frac{1}{\gamma^2},$$

d'où

$$ds^2=\frac{1}{\varepsilon^2}\,dp^2+\frac{1}{\gamma^2}\,dq^3.$$

Enfin, on peut faire tel choix de coordonnées que l'un des coefficients E ou G soit égal à 1. Il faut pour cela que l'expression de l'élément de (q) compris entre deux lignes (p) dont les paramètres diffèrent de dp soit indépendante de q ; on a alors

$$\mathrm{E}\,dp^2=\varphi(p)\,dp^2=d\rho^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

$d\rho$ désignant l'élément de (q), en sorte que deux trajectoires (p) sont partout également distantes, et l'expression de ds^2 prend la forme

$$ds^2 = d\rho^2 + P^2 d\omega^2, \tag{5}$$

ρ et ω étant les paramètres qui remplacent p et q, P une fonction qui dépend de la nature de la surface et dont nous verrons des propriétés importantes.

La condition précédente est remplie quand on prend pour système de trajectoires orthogonales des lignes géodésiques issues d'un même point et leurs trajectoires orthogonales. En effet, si nous considérons une de ces trajectoires (ρ), chacune des lignes géodésiques (ω) mesure la plus courte distance du point à la trajectoire; toutes ces distances seront donc égales, et deux trajectoires (ρ) consécutives seront également distantes; le choix de ces coordonnées donnera donc pour l'élément linéaire tracé sur la surface l'expression ci-dessus.

Il résulte de là que :

I. *Si d'un point pris sur une surface on mène diverses lignes géodésiques et qu'on prenne sur ces lignes des longueurs égales, le lieu des extrémités est une trajectoire orthogonale du premier système.*

On en conclut aussi que :

II. *Si un fil appliqué sur une surface se déroule en restant constamment tangent à une courbe tracée sur la surface, un point du fil décrit une trajectoire orthogonale des lignes géodésiques tangentes à cette courbe, et cette trajectoire est une développante de la courbe.*

Le système de coordonnées dont nous venons de parler n'est pas le seul qui remplisse la condition exigée; il suffit, en effet, que les courbes (ρ) soient également distantes; or si nous menons une série de lignes géodésiques normales a l'une d'elles, ces lignes envelopperont une certaine courbe dont (ρ) sera une développante, une autre développante (ρ') déterminera sur les lignes géodésiques normales à (ρ) des longueurs toutes égales comprises entre (ρ) et (ρ'). Ces deux systèmes de trajectoires jouiront donc de la propriété énoncée.

Dans ce système de coordonnées, l'équation de la ligne géodésique prend une forme très-simple

$$di = -\frac{dP}{d\rho} d\omega. \tag{6}$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si nous y joignons la relation

$$\operatorname{tang} i = \mathrm{P}\frac{d\omega}{d\rho},$$

nous aurons, par l'élimination de $d\omega$,

$$\frac{di}{\operatorname{tang} i} + \frac{\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}d\rho}{\mathrm{P}} = 0.$$

Si P est indépendant de ω, l'intégration peut s'effectuer, et on a

$$\mathrm{P}\sin i = \text{constante},$$

équation entre ρ et i; sinon il faudrait exprimer ω au moyen de ρ, et la résolution de l'équation serait ramenée à une quadrature; mais cette première question sera en général plus difficile à résoudre.

Trajectoires quelconques. — Lorsque les lignes (p) et (q) ne se coupent pas à angle droit, certaines hypothèses peuvent encore simplifier l'équation des lignes géodésiques.

En premier lieu, on peut supposer E ou G égal à 1, il suffit de prendre pour l'un des systèmes des lignes quelconques sur lesquelles on comptera, à partir d'une courbe fixe (q), des longueurs constantes; on pourra, si l'on veut, prendre des lignes issues d'un même point. Si l'on appelle ρ et ω les paramètres de ce système, on aura

$$ds^2 = d\rho^2 + \mathrm{P}^2 d\omega^2 - 2\,\mathrm{P}\cos\mathrm{V}\,d\omega\,d\rho, \tag{8}$$

V étant l'angle en un point quelconque des deux lignes (ω), (ρ) qui y passent, en sorte que

$$\mathrm{P}\sin\mathrm{V}\,di = -\,\mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{d\rho}d\omega + \frac{d\mathrm{P}\cos\mathrm{V}}{d\rho}d\rho \tag{9}$$

sera l'équation des lignes géodésiques. Si l'on y joint la relation donnée par la seconde des équations (g)

$$\mathrm{P}\sin\mathrm{V}\cot i = \frac{d\rho}{d\omega} - \mathrm{P}\cos\mathrm{V} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin(\mathrm{V}+i)}{\sin i} = \frac{d\rho}{\mathrm{P}\,d\omega},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

il vient aisément

$$\frac{di + \frac{dV}{d\rho}\,d\rho}{\cot(V+i)} = \frac{\frac{dP}{d\rho}\,d\rho}{P}. \tag{10}$$

On ne pourra intégrer immédiatement que si P et V sont indépendants de ω, auquel cas on aurait la relation simple

$$P\cos(V+i) = \text{constante}. \tag{11}$$

Si p et q étaient tous deux comptés sur les lignes (p), (q), à l'hypothèse $E = 1$ on pourrait joindre $G = 1$, et alors on aurait en général

$$\frac{di + \frac{dV}{d\rho}\,d\rho}{\cot(V+i)} = 0,$$

et si V est indépendant de ω,

$$i + V = \text{constante}.$$

L'hypothèse de $E = 1$ et $G = 1$ sera permise s'il s'agit, par exemple, de la surface engendrée par une courbe mobile animée d'un mouvement de translation.

Il est aisé de voir que cette surface est décomposable en parallélogrammes ayant tous leurs côtés égaux. Car, dans son mouvement élémentaire, tous les points de la courbe mobile décrivent des droites égales et parallèles ; si donc on la suppose partagée en éléments égaux, elle aura engendré une petite bande composée de parallélogrammes tous égaux.

Soit OM la courbe mobile, ON la trajectoire d'un de ses points ; un point m sera défini par les deux distances $m\mathrm{M}$, $m\mathrm{N}$ que nous pourrons prendre pour représenter les paramètres p et q ; car tout le long de $\mathrm{M}m$ q est constant, de même p a la même valeur pour tout point de $\mathrm{N}n$. On a donc

$$ds^2 = dp^2 + dq^2 - 2\,dp\,dq\cos V.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

III.

Applications. — La facilité avec laquelle l'équation de la ligne géodésique sur une surface donnée se tire de l'expression d'un élément linéaire tracé sur cette surface, quand on choisit convenablement le système des coordonnées, permet de trouver de nombreuses propriétés de cette ligne.

Appliquons successivement à divers exemples les équations générales.

Surfaces du second degré. — Prenons, pour déterminer un point de la surface, les deux lignes de courbure qui y passent. On sait que trois surfaces homofocales du second degré ont la propriété de se couper suivant leurs lignes de courbure. Soient ρ, μ, ν les demi grands axes des trois surfaces, ρ étant le demi grand axe de l'ellipsoïde sur lequel nous allons chercher la ligne géodésique. On a les équations

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, & c < \rho > b, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1, & c > \mu > b, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1, & c > \nu < b. \end{cases}$$

On en tire aisément les valeurs des coordonnées en fonction de ρ, μ, ν. μ, ν étant seules regardées comme variables et remplaçant les coordonnées p et q; par suite, on obtient pour l'expression d'un élément linéaire,

$$(13)\qquad ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{\rho^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\,d\mu^2 + \frac{\rho^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\,d\nu^2\right]$$

L'expression de ds^2 peut être considérée comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux premières formes données précédemment. La seconde des équations (1) ou l'équation (4) nous conduit aisément à la relation bien connue, sur laquelle nous reviendrons plus loin,

$$\mu^2 \sin^2 i + \nu^2 \cos^2 i = \text{constante}.$$

Conoïdes. — Considérons la surface engendrée par une droite qui, s'appuyant sur une autre droite fixe et sur une courbe fixe, se meut en restant parallèle à un plan donné perpendiculaire à la directrice rectiligne.

Prenons pour coordonnées la distance ρ d'un point à la directrice recti-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ligne et l'angle ω d'un plan mobile passant par la génératrice et la directrice avec un plan fixe passant par cette dernière droite, on aura

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + dz^2,$$

l'équation du conoïde étant $z = \varphi(\omega)$, et la coordonnée z comptée parallèlement à la directrice, en sorte que

$$ds^2 = d\rho^2 + [\varphi'(\omega)^2 + \rho^2]\, d\omega^2.$$

Dans le cas actuel, la fonction P est essentiellement dépendante de ω, à moins que $\varphi'(\omega) = ma$ quantité constante, ou $z = ma\omega$, ce qui donne pour directrice une hélice, et on a

$$\frac{di}{\operatorname{tang} i} + \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2 a^2}} = 0, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 + m^2 a^2}\, \sin i = \text{constante},$$

ce qui, pour chaque valeur de ρ, définit la direction de la ligne géodésique pour une valeur donnée de la constante.

On peut aisément en tirer l'équation de la projection de la ligne géodésique sur le plan directeur.

En effet, si nous nommons i' la projection de l'angle i et α l'inclinaison du plan tangent au point considéré, on a

$$\operatorname{tang} i' = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{ma}{\rho}, \quad \operatorname{tang} i' = \operatorname{tang} i \cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \operatorname{tang} i\, \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m^2 a^2}}, \qquad \sin i = \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2 a^2}\, d\omega}{\sqrt{(\rho^2 + m^2 a^2)\, d\omega^2 + d\rho^2}};$$

l'équation de la ligne géodésique devient

$$\frac{(\rho^2 + m^2 a^2)^2\, d\omega^2}{(\rho^2 + m^2 a^2)\, d\omega^2 + d\rho^2} = C^2, \quad d\omega = \frac{C\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 + m^2 a^2)}\sqrt{\rho^2 + m^2 a^2 - C^2}}$$

Posons

$$\rho = ma \operatorname{tang} u,$$

il vient

$$d\omega = \frac{du}{\sqrt{\sin^2 u + \dfrac{m^2 a^2}{C^2} - 1}} = \frac{du}{\sqrt{\sin^2 u + C'}}, \qquad C' = \frac{m^2 a^2}{C^2} - 1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

C′ peut être positif, négatif ou nul : de là trois intégrales différentes, et, par conséquent, trois genres de courbes différents.

Nommons ρ_0 le rayon de l'hélice à laquelle une ligne géodésique est tangente,

$$C = \sqrt{\rho_0^2 + m^2 a^2}, \quad C' = \frac{m^2 a^2}{\rho_0^2 + m^2 a^2} - 1 ;$$

selon que C′ sera négatif, nul ou positif, la ligne géodésique touchera une hélice dont le rayon aura une valeur réelle, nulle ou imaginaire.

Dans ces différents cas, l'équation intégrée change de forme.

En effet, si C′ est nul, on a simplement

$$d\omega = \frac{du}{\sin u}, \quad \omega = \log K \tang \frac{1}{2} u ;$$

mais de $\tang u = \rho$ on tire

$$\tang \frac{1}{2} u = \frac{\sqrt{1 + \rho^2} - 1}{\rho},$$

d'où

$$e^{\omega} = K \frac{\sqrt{1 + \rho^2} - 1}{\rho} :$$

résolvant par rapport à ρ, et posant

$$e^h = K,$$

on a

$$\rho = 2 \frac{1}{e^{-(\omega - h)} - e^{+(\omega - h)}}.$$

Si C′ est positif, on peut poser

$$C' = \cot^2 \alpha,$$

et, en remplaçant u par $\frac{\pi}{2} - u$, on a

$$\omega = A \pm \sin \alpha \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 u}}, \qquad \rho = \frac{1}{\tang u}.$$

Enfin, si C′ est négatif, comme il doit être plus petit que 1 afin que le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu — UPMC

radical soit réel, on posera

$$C' = \cos^2\beta;$$

si alors on change de variable u en posant

$$\cos u = \sin\beta \sin v,$$

il vient

$$\omega = B \pm \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - \sin^2\beta \sin^2 v}}, \qquad \rho = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\beta \sin^2 v}}{\sin\beta \sin v}.$$

Sans entrer dans la discussion de ces courbes, remarquons qu'elles ont toutes des asymptotes, ainsi que cela résulte de leur équation commune entre ρ et i.

Surfaces de révolution. — Dans les surfaces de révolution, la fonction P est évidemment égale à la distance du point considéré à l'axe de la surface. Nommons r cette distance, on aura

$$r \sin i = C$$

pour l'équation de la ligne géodésique ; donc :

III. *Le produit de la distance d'un point de la surface à l'axe par le sinus de l'inclinaison de la ligne géodésique sur le méridien est constant.*

Cette propriété se vérifie aisément sur les surfaces où la ligne géodésique est connue, comme la sphère, le cylindre, le cône, etc.

La valeur de la constante est évidemment le rayon du parallèle auquel la ligne est tangente, car, pour $i = \frac{\pi}{2}$, $r = C$, C est donc la valeur minimum que puisse avoir r. En d'autres termes, une ligne géodésique tangente à un parallèle est toujours dirigée du côté de ce parallèle où la distance r croît. Et on voit que les lignes géodésiques définies par une valeur de C moindre que la valeur minimum de r ne sont tangentes à aucun parallèle.

Une ligne géodésique ne peut être tangente à un parallèle décrit par un point du méridien où la tangente à cette courbe serait parallèle à l'axe de rotation, car dans les environs de ce cercle de gorge la surface est cylindrique et la ligne géodesique est la section droite.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nommons φ l'angle de r avec une direction fixe perpendiculaire à l'axe de révolution; on a

$$\sin i = \frac{r d\varphi}{ds},$$

par conséquent

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C:$$

d'ailleurs, $h = f(r)$ étant l'équation du méridien,

$$ds^2 = dh^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

d'où

$$d\varphi = C \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2}{r^2 - C^2}} \frac{dr}{r}, \qquad ds = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2}{r^2 - C^2}} r dr,$$

équations qui déterminent s et φ en fonction de r quand on donne $\frac{dh}{dr}$.

L'équation

$$\frac{r^2 d\varphi}{ds} = C$$

peut s'interpréter encore différemment; car nommons A l'aire décrite par la projection du rayon vecteur sur le plan d'un parallèle,

$$r^2 d\varphi = 2 dA,$$

d'où

$$dA = \frac{C}{2} ds, \qquad s - s_0 = \frac{2}{C} (A - A_0);$$

donc :

IV. *La longueur d'une ligne géodésique est proportionnelle à la projection sur le plan d'un parallèle de l'aire décrite par le rayon vecteur.*

Considérons deux méridiens voisins et la ligne géodésique qui les coupe; menons les tangentes aux méridiens aux points d'intersection : ces deux droites font un angle di; soit t la longueur de la tangente, on a, en nom-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

mant β son inclinaison sur l'axe,

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi = -\frac{1}{2} t^2 di \sin\beta ;$$

or

$$r = t \sin\beta,$$

d'où

$$di + d\varphi \sin\beta = 0 ;$$

c'est précisément l'équation de Gauss.

Dans le cas d'un cône, β est constant; d'où

$$i + \varphi \sin\beta = \text{constante};$$

ce qui est évident en développant le cône.

Surfaces engendrées par une courbe animée d'un mouvement hélicoïdal. — Imaginons qu'une courbe quelconque tourne autour d'une droite de façon que chacun de ses points décrive une hélice ayant cette droite pour axe, elle engendrera une certaine surface.

Coupons cette surface par un plan méridien, nous aurons une courbe plane que nous pourrons prendre pour génératrice. Si nous déterminons la position d'un point par sa distance r à l'axe de rotation et par l'angle φ du rayon vecteur normal à l'axe avec un plan méridien fixe, (r) sera une hélice de rayon r, (φ) sera un méridien. Nommons dg l'élément de la génératrice plane, α l'angle de (r) avec un plan perpendiculaire à l'axe, V l'angle de (r) et (φ); nous aurons

$$ds^2 = dg^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2 r d\varphi dg}{\cos\alpha} \cos V,$$

r est évidemment une fonction de g; d'ailleurs α est indépendant de φ ainsi que V, et ces quantités ne sont fonctions que de r ou g. Conséquemment, l'équation (11) s'applique ici; d'où

$$\frac{r \cos(i + V)}{\cos\alpha} = C.$$

Mais remarquons que $i + V$ est le supplément de l'angle de la ligne géodésique avec (r), désignons désormais par i ce dernier angle; on aura, au lieu

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'équation précédente,

$$\frac{r\cos i}{\cos\alpha} = C.$$

Soient m la tangente de l'inclinaison de l'hélice directrice et a son rayon; il est clair que l'on a

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{ma}{r},$$

en sorte que l'équation précédente devient

$$\sqrt{m^2a^2 + r^2}\cos i = C.$$

On voit qu'elle est toute semblable à celle qui a été trouvée dans le cas des surfaces de révolution.

Prenons comme exemple le cas où la génératrice plane est une ligne droite rencontrant l'axe.

Soient β l'angle de la génératrice avec un plan perpendiculaire à l'axe, a et m le rayon et la tangente de l'inclinaison de l'hélice directrice.

Par un triangle rectangle facile à construire, on a

$$\cos V = \sin\beta\sin\alpha;$$

soit ϖ l'inclinaison du plan tangent, on a aussi aisément

$$\text{tang}^2\varpi = \text{tang}^2\beta + \text{tang}^2\alpha;$$

et puisque $\text{tang}\,\alpha = \frac{ma}{r}$, on tire de ces relations en fonction de r.

$$\cos V = \frac{ma\sin\beta}{\sqrt{r^2 + m^2a^2}}, \qquad \cos\varpi = \frac{r\cos\beta}{\sqrt{r^2 + m^2a^2}}.$$

L'équation de la ligne géodésique comparée à la valeur de cos V montre que

$$\frac{\cos i}{\cos V} = \frac{C}{ma\sin\beta};$$

donc ce rapport est constant tout le long d'une ligne géodésique.

Pour avoir l'équation de la projection de la ligne géodésique, exprimons l'angle i au moyen de sa projection i'.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Il est aisé de voir sur la figure qu'on a deux triangles sphériques au moyen desquels on arrivera à cette expression par l'élimination d'un angle qui leur est commun. Ces deux triangles donnent

$$\cos \varpi = \sin \mathrm{H} \cos \alpha,$$
$$\cot i \cos \alpha = \sin \alpha \cos \mathrm{H} + \sin \mathrm{H} \cot i',$$

d'où

$$\cot i = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \varpi} + \frac{\cos \varpi}{\cos^2 \alpha} \cot i';$$

remplaçons i par $\mathrm{I} - \frac{\pi}{2}$, et remarquons que

$$\cot i' = \operatorname{tang} \mathrm{I} = \frac{r d\varphi}{dr};$$

enfin éliminons α et ϖ d'après les relations précédentes, il vient

$$\cot i = \frac{ma \sin \beta + r\sqrt{m^2 a^2 + r^2} \cdot \frac{d\varphi}{dr} \cos \beta}{r},$$

et l'équation de la ligne géodésique

$$\sqrt{r^2 + m^2 a^2} \cos i = \mathrm{C}$$

donne

$$\varphi = \frac{\mathrm{C}}{\cos \beta} \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + m^2 a^2}\sqrt{r^2 + m^2 a^2 - \mathrm{C}^2}} - ma \operatorname{tang} \beta \int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 + m^2 a^2}}.$$

Comme vérification, cette valeur de φ doit se réduire à celle qu'on a trouvée dans le cas du cône quand on fait $m = 0$, et à celle donnée pour l'hélicoïde gauche à plan directeur quand on fait $\beta = 0$; et en effet on trouve dans le premier cas

$$\varphi = \frac{\mathrm{C}}{\cos \beta} \int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - \mathrm{C}^2}},$$

et dans le second

$$\varphi = \mathrm{C} \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + m^2 a^2}\sqrt{r^2 + m^2 a^2 - \mathrm{C}^2}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Posons $r = ma \operatorname{tang} u$, et il vient, en faisant $\frac{m^2 a^2}{C^2} - 1 = C'$,

$$\varphi = \frac{ma}{\cos\beta} \int \frac{du}{\sqrt{\sin^2 u + C'}} - \operatorname{tang}\beta \int \frac{du}{\sin u},$$

équation analogue à celle qui a été discutée sommairement plus haut.

Surfaces developpables. — Si nous prenons une surface développable quelconque et si nous l'étendons sur un plan, son arête de rebroussement formera une certaine courbe à laquelle toutes les génératrices resteront tangentes. Traçons une ligne droite quelconque à travers les génératrices: si nous rendons à l'arête de rebroussement sa position primitive, la ligne tracée sera une ligne géodésique sur la surface reconstruite, et elle jouira de cette propriété sur toutes les surfaces en nombre infini que l'on peut construire avec l'arête de rebroussement donnée, leur caractère commun consistant uniquement en ce que l'angle de contingence de cette arête reste le même en un point déterminé, quelle que soit sa torsion.

On peut construire avec les mêmes données d'autres surfaces qui n'ont pas la même arête de rebroussement, et dont les tangentes en cette arête ne sont plus des génératrices rectilignes.

C'est ainsi, par exemple, qu'en développant sur un cône un hélicoïde développable, les génératrices forment un système de lignes géodésiques tangentes à une courbe sphérique tracée sur la surface du cône, et qui n'est évidemment autre que l'arête de rebroussement primitive.

Prenons une surface développable quelconque; soient ABC... son arête de rebroussement, $A_1 B_1 C_1 \ldots$ une ligne géodésique, $A_2 B_2 C_2 \ldots$ une développante de l'arête de rebroussement, $d\varepsilon, d\Omega, d\varepsilon_1, d\Omega_1 \ldots$, les angles de contingence et de torsion de ces courbes. Nommons i l'angle de la ligne géodésique en un de ses points avec la développante qui y passe, il est aisé de voir qu'on a les relations suivantes :

$$d\varepsilon_1 = d\Omega \cos i, \quad d\varepsilon_2 = d\Omega,$$
$$d\Omega_1 = d\Omega \sin i, \quad d\Omega_2 = d\varepsilon = -di,$$

dont les deux premières font connaître les angles de contingence et de torsion de la ligne géodésique quand on connaît sa direction et la torsion de l'arête de rebroussement au point situé sur la génératrice correspondante. Soient

$$AB = ds, \quad A_1 B_1 = ds_1,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

g la longueur de la tangente à l'arête de rebroussement terminée à la ligne géodésique

$$gdi + \cos i\, ds_1 = 0,$$
$$ds_1 - dg - ds_1 \sin i = 0;$$

éliminant ds_1 et remarquant que $ds = -\rho\, di$, on a

$$\frac{dg}{di} - g\,tgi + \rho = 0;$$

ρ rayon de courbure de l'arête de rebroussement peut être considéré comme une fonction de ε, ou de i. En intégrant, il vient

$$g = e^{\int \tang i\, di}\left(C - \int \rho\, e^{-\int \tang i\, di} di\right),$$

ou

$$g\cos i + \int \rho \cos i\, di = C.$$

L'interprétation géométrique de cette équation est évidente; la constante C n'est autre chose que la longueur de la génératrice de la surface perpendiculaire à la ligne géodésique, en sorte que toutes les lignes géodésiques pour lesquelles la constante est la même enveloppent une courbe jouissant de la propriété suivante.

V. *La surface étant développée sur un plan et* ABC... *étant son arête de rebroussement, soit abc... la développée de cette arête, menons des normales à la développée, et prenons sur ces normales des longueurs constantes et égales à* C, *le lieu des extrémités sera précisément l'enveloppe des lignes géodésiques*

$$g\cos i + \int \rho \cos i\, di = C.$$

Ce lieu est donc une développante A'B'C' *de la seconde développée a'b'c'... de la courbe.*

Les lignes de courbure d'une surface développable étant ses génératrices et les développantes de l'arête de rebroussement qui sont leurs trajectoires orthogonales, on voit que l'enveloppe d'un système de lignes géodésiques

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

est une développante de la troisième développée d'une ligne de courbure de la surface.

Comme on peut, en général, mener parallèlement à une direction donnée une tangente à l'arête de rebroussement aplanie, on voit que :

VI. *Toute ligne géodésique tracée sur une surface développable a une asymptote rectiligne qui est une génératrice de la surface.*

Les tangentes à l'arête de rebroussement d'une surface développable forment deux nappes distinctes, et la génératrice de l'une des nappes se prolonge suivant une ligne géodésique sur la même nappe; le système de ces lignes géodésiques enveloppe donc l'arête de rebroussement, mais leur équation ne correspond pas à une même valeur de la constante. Il faudrait, en effet, pour que cela eût lieu, que l'arête de rebroussement coïncidât avec une développante de sa seconde développée; il est aisé de trouver dans quel cas cette condition sera remplie.

Car soit

$$s = \varphi(i)$$

l'équation de l'arête de rebroussement, son rayon de courbure sera

$$\rho = \varphi'(i),$$

et le rayon de courbure de sa développée

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{di} = \varphi''(i);$$

on devra donc avoir

$$\varphi''(i) + k = \varphi'\left(i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Or cette relation ne peut avoir lieu, quel que soit i, qu'autant que

$$\varphi'\left(i + \frac{\pi}{2}\right) = k,$$

quel que soit i; d'où

$$\rho = k;$$

donc l'arête de rebroussement est un cercle quand la surface est développée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

sur un plan; celle-ci est donc un hélicoïde développable. C'est ce qu'on peut vérifier directement, car si le cercle O est l'arête de rebroussement de la surface développée, et si $A, B, C, \ldots$ est une ligne géodésique, on voit aisément qu'en posant

$$OP = C, \quad AA_1 = g, \quad OA = a,$$

on a

$$g \cos i = C' - a \sin i,$$

équation qui coïncide avec l'équation générale des lignes géodésiques quand on y fait

$$\rho = a,$$

et on voit bien que la constante C est le rayon d'un cercle ayant son centre en O et auquel sont tangentes toutes les lignes géodésiques pour lesquelles C est constant. En particulier, si $C = a$, l'enveloppe coïncide avec l'arête de rebroussement.

Il est aisé de déduire de l'équation précédente celle de la projection de la ligne géodésique sur un plan perpendiculaire à l'axe. Nommons β l'inclinaison de la génératrice sur ce plan, i la projection de l'angle i; si on remarque que β est aussi l'inclinaison du plan tangent à la surface, on voit que

$$\operatorname{tang} i' = \operatorname{tang} i \cos \beta.$$

Soient r le rayon vecteur de la projection, φ l'angle de sa direction avec une direction fixe, V l'angle de la tangente à la courbe projetée avec le rayon vecteur, on a

$$\sqrt{r^2 - a^2} = g \cos \beta, \quad \operatorname{tang}(V - i') = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}, \quad \operatorname{tang} V = \frac{r d\varphi}{dr} = r\varphi',$$

on tire de là

$$\frac{\sqrt{r^2 - a^2} + a \operatorname{tang} i'}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 i' + \cos^2 \beta}} = C, \quad \operatorname{tang} i = \frac{ar\varphi' - \sqrt{r^2 - a^2}}{a + r\sqrt{r^2 - a^2}\varphi'}.$$

Éliminons $\operatorname{tang} i'$, il vient en posant $C \cos \beta = c$ et $\operatorname{tang} \beta = m$,

$$\left[r^2(r^2 - c^2) - m^2 a^2 c^2\right] r^2 \varphi'^2 + 2am^2 c^2 \sqrt{r^2 - a^2}\, r\varphi' - c^2\left[r^2 + (r^2 - a^2)m^2\right] = 0,$$

d'où

$$\varphi = am^2 c^2 \int \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2(r^2 - c^2) - m^2 a^2 c^2} \frac{dr}{r} \pm c \int \frac{\sqrt{(r^2 - c^2)(1 + m^2) - a^2 m^2}}{r^2(r^2 - c^2) - m^2 a^2 c^2} r dr,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ce qui peut s'intégrer, en sorte qu'on obtient l'équation de la projection de la courbe en quantités finies.

Les lignes géodésiques sur les surfaces développables peuvent être considérées sous un autre point de vue. On sait, en effet, que la série des plans normaux à une courbe à double courbure enveloppe une surface sur laquelle se trouvent toutes les développées de la courbe à double courbure, et que ces développées sont des lignes géodésiques sur la surface polaire. Leur caractère particulier est de passer toutes par un même point, qui est le point où la courbe donnée rencontre le plan tangent à la surface sur lequel on effectue le développement. Ce point a évidemment une position invariable relativement à l'arête de rebroussement développée; le lieu de ses projections sur les diverses génératrices de la surface est le lieu des centres de courbure de la courbe donnée; donc :

VII. *Lorsque diverses lignes géodésiques passent par un même point, les constantes qui les caractérisent ne sont autre chose que les segments des génératrices compris entre l'arête de rebroussement et le lieu des centres de courbure de la courbe dont elles sont les développées.*

Du reste, l'équation du lieu n'est évidemment autre que celle d'une ligne géodésique où C est regardé comme la variable et g comme une constante, i étant alors l'angle de la ligne géodésique issue du point donné avec une perpendiculaire à la tangente même par ce point à l'arête de rebroussement; l'équation d'une ligne géodésique peut donc s'écrire

$$g\cos i + \int \rho \cos i\, di = \mathrm{C}\cos\omega + \int_0^{\omega} \rho\cos\omega\, d\omega.$$

En coordonnées polaires, on aurait pour le lieu en question, en comptant l'angle ω avec (G),

$$r = \mathrm{C}\cos\omega + \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\omega\, d\omega.$$

En particulier, si l'arête de rebroussement développée est un cercle,

$$r = \mathrm{C}\cos\omega + a(1 - \sin\omega),$$

courbe dont la définition géométrique est facile.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'angle de torsion de l'arête de rebroussement de la surface polaire étant égal à l'angle de contingence de la développante, on voit que la courbure de la ligne géodésique tracée sur la surface polaire lui est liée par les relations

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon' \cos i,$$
$$d\Omega_1 = d\varepsilon' \sin i.$$

Laissons de côté les généralités pour nous occuper d'un genre particulier de surfaces développables, les surfaces coniques. L'arête de rebroussement étant un point, nous voyons, d'après le théorème (V), que sur un cône :

La constante qui entre dans l'équation d'une ligne géodésique est égale à la longueur de la génératrice menée du sommet du cône, normale à cette ligne. Les lignes géodésiques correspondant à une même constante sont donc toutes tangentes à une courbe sphérique, et le développement du cône montre que toutes les tangentes touchent la sphère de rayon C, ou, ce qui est la même chose,

VIII. *Les plans osculateurs à une ligne géodésique tracée sur un cône enveloppent une sphère ayant pour centre le sommet du cône.*

Il est aisé de voir ainsi que :

Un point quelconque de l'une de ces tangentes décrit une courbe sphérique et fait un angle constant avec le rayon mené au point décrivant.

L'élément de la courbe décrite est perpendiculaire au plan tangent au cône au point correspondant.

La réciproque du théorème (VIII) est évidente :

IX. *Si un plan mobile enveloppe une sphère, l'arête de rebroussement de la surface développable qu'il engendre est une ligne géodésique sur une surface conique ayant pour sommet le centre de la sphère et l'arête de rebroussement pour directrice.*

Car les intersections successives de ces plans sont normales à la courbe de contact. L'arête de rebroussement est donc une développée de cette courbe, et conséquemment une ligne droite dans le développement du cône, qui est la surface polaire de la courbe sphérique.

L'équation générale des lignes géodésiques se réduit à

$$g \cos i = C, \quad \text{ou} \quad r \cos i = C \sin \beta,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en nommant r la distance du point considéré à une droite passant par le sommet du cône et β l'angle de la génératrice avec cette droite.

Si le cône est de révolution autour de la droite, β est une constante, et l'on a l'équation déjà trouvée dans ce cas.

Il est à peine nécessaire de parler des cylindres sur lesquels la seule propriété géométrique remarquable de la ligne géodésique est de faire un angle constant avec la génératrice. Cette propriété, évidente à priori, est renfermée dans l'équation générale, car g est infini, et l'équation se réduit à

$$\cos i = C \qquad \text{ou} \qquad i = C.$$

La relation

$$d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 \cos i \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} \cos i$$

montre que, dans le cas du cône, le rayon de courbure de la ligne géodésique en un point est

$$\rho_1 = \frac{\rho g}{C},$$

ρ désignant le rayon de courbure de la ligne de courbure du cône au point considéré. Si le cône est de révolution

$$\rho_1 = \frac{\rho r}{C} = \frac{r^2}{C};$$

donc :

Dans un cône de révolution, le rayon de courbure d'une ligne géodésique en un point est proportionnel au carré de la distance à l'axe.

Dans le cas de surfaces cylindriques, i est constant ; donc :

Le rayon de courbure d'une ligne géodésique tracée sur un cylindre est proportionnel au rayon de courbure de la section droite.

IV.

Des diverses expressions de ds^2 que nous avons considérées, celle que donne la formule (5) est la plus importante à cause de la propriété très-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

remarquable de la fonction P définie par l'équation (5). Cette propriété, signalée par Gauss, qui l'a démontrée en partant d'une expression particulière de la courbure d'une surface en un point, consiste en ce que la fonction P satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = 0,$$

R, R′ étant les rayons de courbure principaux de la surface au point (ω, ρ). Je choisirai la démonstration de M. Hart, qui est simple et directe (*).

Soient OA, OB deux lignes géodésiques égales faisant entre elles un angle $d\omega$. Supposons AB normal à ces deux lignes, et, par conséquent, la plus courte distance des deux tangentes Aa', Bb'. On aura

$$\frac{dP}{d\rho} = 0.$$

Cherchons $\frac{d^2 P}{d\rho^2}$, donnons à ρ un accroissement $\delta\rho$, et soit P l'accroissement correspondant de P; on a, en négligeant les puissances de δP supérieures à la seconde,

$$\delta P = \frac{1}{2}\frac{d^2 P}{d\rho^2}\delta\rho^2.$$

Soient

$$Aa' = Bb' = \delta\rho, \qquad a'b' = P' d\omega$$

et $d\theta$ l'angle de Aa' avec Bb',

$$\overline{a'b'}^2 = \overline{AB}^2 + d\theta^2 \delta\rho^2,$$

ou

$$P'^2 - P^2 = \frac{d\theta^2}{d\omega^2}\delta\rho^2,$$

$$P' - P = \frac{1}{2}\frac{d\theta^2}{d\omega^2}\frac{\delta\rho^2}{P}.$$

(*) *Journal de Cambridge*, 1848-49, page 80.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soit $a'b'ab$ un plan normal passant par $a'b'$,

$$ab = (P + \delta P)\, d\omega;$$

soit r le rayon de courbure de cet arc, on a, par des triangles semblables,

$$\frac{P' - (P + \delta P)}{P} = \frac{aa'}{r};$$

d'où

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{1}{2}\frac{d\theta^2}{P^2 d\omega^2}\delta\rho^2 - \frac{aa'}{r}.$$

Soit r' le rayon de courbure de OA,

$$aa' = \frac{\delta\rho^2}{2r'};$$

d'où

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} = P\left(\frac{d\theta^2}{P^2 d\omega^2} - \frac{1}{rr'}\right).$$

Or si C est le point de contact de l'indicatrice en A avec OB, la tangente en C sera parallèle à Aa'; d'où

$$d\theta = \frac{BC}{r'} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta^2}{P^2 d\omega^2} = \frac{1}{r^2 \operatorname{tang}^2 ACB}.$$

Or $\frac{1}{rr'} - \frac{1}{r'^2 \operatorname{tang}^2 ACB}$ est précisément égal à $\frac{1}{RR'}$; en effet, ACB est l'angle de deux diamètres conjugués de l'indicatrice, et l'élimination de cet angle fait voir que l'égalité ci-dessus est une autre expression de ce théorème : Dans une ellipse la somme des carrés des inverses de deux diamètres rectangulaires est constante.

Le théorème de Gauss est donc démontré, et l'on a

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = \text{constante}.$$

On tire de là une conséquence trop simple pour être omise et qui consiste en ceci :

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

L'aire sphérique correspondante à un triangle formé par trois lignes géodésiques sur une surface quelconque est égale à l'excès de la somme de ses trois angles sur deux droites.

En effet, décomposons le triangle donné ABC en secteurs infiniment petits et ceux-ci en éléments; soit *mnpq* l'un d'eux; sa courbure est

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}.$$

L'aire sphérique correspondante, qui n'est autre chose que la courbure de l'unité de surface multipliée par l'aire de l'élément, sera

$$-\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2}P\,d\omega\,d\rho,$$

la courbure du secteur élémentaire sera donc

$$-\int_0^{\rho}\frac{d^2P}{d\rho^2}d\omega\,d\rho = d\omega\left(C - \frac{dP}{d\rho}\right).$$

$C = \lim\frac{dP}{d\rho}$ pour $\rho = 0$, c'est-à-dire 1, d'où, pour la courbure de ABC,

$$\int_0^{A} d\omega\left(1 - \frac{dP}{d\rho}\right) = \int_0^{A} d\omega - \int_0^{A}\frac{dP}{d\rho}d\omega.$$

Or on a

$$di = -\frac{dP}{d\rho}d\omega,$$

d'où

$$\text{courbure de ABC} = A + \int_0^{A} di = A + C - (\pi - B) = A + B + C - \pi.$$

Le théorème de Gauss a servi à M. Ossian Bonnet à démontrer une propriété importante de la ligne géodésique dépendant de la forme de la surface sur laquelle elle est tracée. Cette propriété résulte du théorème suivant énoncé par Jacobi sans démonstration :

Etant donnée une ligne géodésique AM *issue du point* A, *si* A' *est le point où cette ligne est rencontrée par une ligne géodésique infiniment voisine et*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

issue aussi du point A, *la ligne* AM *sera toujours minima entre le point* A *et le point* A′ *et cessera d'être minima au delà du point* A′.

M. Bonnet, après avoir démontré cette proposition, en tire cette conséquence remarquable :

Sur une surface à courbures opposées une ligne géodésique est minima dans toute son étendue.

Pour le démontrer, considérons sur une surface deux lignes géodésiques infiniment voisines issues d'un même point; soit $d\omega$ l'angle de ces deux lignes, leur distance est $P\,d\omega$. P étant une fonction de ρ le long de cette ligne, cette distance croîtra ou décroîtra selon que $\frac{dP}{d\rho}$ sera positif ou négatif.

Or je dis que sur une surface à courbures opposées $\frac{dP}{d\rho}$ reste constamment positif. En effet, nous savons que

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{P}{RR'} = 0;$$

Quand on passe du point ρ au point $\rho + d\rho$, RR′ peut être considéré comme constant. Soit

$$RR' = -a^2,$$

on a

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} - \frac{P}{a^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{a}{2}\left(e_1^2 - e^{-\frac{2}{a}}\right),$$

en tenant compte des conditions

$$P = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{d\rho} = 1 \quad \text{pour} \quad \rho = 0;$$

et on voit que

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\rho}{a}} + e^{-\frac{\rho}{a}}\right)$$

reste constamment positif quel que soit ρ, en sorte que deux lignes géode-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

siques issues du même point ne peuvent se rencontrer de nouveau, d'où résulte la proposition énoncée.

Si, au contraire, RR' est positif, l'intégration donne

$$P = a \sin \frac{\rho}{a}, \quad \frac{dP}{d\rho} = \cos \frac{\rho}{a}.$$

On voit que $\frac{dP}{d\rho}$ peut devenir négatif, par suite la distance $P d\omega$ décroître. Quand ρ atteint la valeur πa, $\frac{dP}{d\rho} = 0$ et $P = 0$, les deux courbes peuvent se rencontrer. Si a^2 est la plus grande valeur du produit RR' dans toute l'étendue de la surface, on voit que la valeur de ρ qui annule P sera inférieure à πa, en sorte qu'une ligne géodésique ne pourra être un ligne minima dans une étendue supérieure à πa.

Les propriétés que nous avons signalées jusqu'ici appartiennent à la ligne géodésique considérée isolément. Nous allons voir maintenant qu'un système de lignes géodésiques tracées sur une surface jouit d'une propriété toute particulière relativement aux tangentes que l'on peut mener aux lignes qui le composent. Voici en quoi elle consiste :

Si des droites sont tangentes à une série de courbes tracées sur une surface, pour qu'il existe des surfaces qui coupent à angle droit ces tangentes, il faut que la série de ces courbes soit formée de lignes géodésiques.

Il est aisé de voir d'abord qu'il existe une condition à laquelle les droites données doivent satisfaire pour admettre une trajectoire orthogonale. Soient en effet x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface par lequel on mène une droite dont la direction est liée aux coordonnées par une certaine loi, X, Y, Z les cosinus des angles de cette droite avec les axes, x', y', z' les coordonnées du point où elle est rencontrée par la trajectoire orthogonale ; on a, en désignant par l la distance des deux points,

$$x' = x + l\,X,$$
$$y' = y + l\,Y,$$
$$z' = z + l\,Z,$$

d'où

$$dx' = dx + l\,dX + X\,dl,$$
$$dy' = dy + l\,dY + Y\,dl,$$
$$dz' = dz + l\,dZ + Z\,dl;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

multiplions par X, Y, Z et ajoutons, il vient

$$X\,dx' + Y\,dy' + Z\,dz' = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dl\,(X^2 + Y^2 + Z^2) + l\,(X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ);$$

or le premier membre est nul puisque la surface coupe orthogonalement la droite au point $x'\,y'\,z'$, et $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, ce qui réduit l'équation à

$$dl = -\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

donc X, Y, Z doivent être des fonctions de x, y, z telles, que le second membre soit une différentielle exacte.

Nous allons démontrer maintenant que les tangentes à une série de lignes géodésiques tangentes à une surface jouissent de la propriété de pouvoir être coupées orthogonalement par une surface.

Soient GA, G'A' deux lignes géodésiques $p = \text{const.}$, $p + dp = \text{const.}$, MM', AA' les éléments compris entre ces lignes de deux trajectoires orthogonales; menons en M et M' les deux tangentes MT, M'T'; prenons

$$MT = MA, \quad M'T' = M'A',$$

l'arc TA sera une développante de MA, et T'A' une développante de M'A'. Pour démontrer que la surface AA'TT' jouit de la propriété énoncée, il suffit de faire voir que MT est normal à TT'. En effet, les angles des tangentes avec MM' sont droits, donc MTT'M' est un rectangle, car MT, M'T' sont sensiblement dans le même plan, donc les angles en T et T' sont droits, et la proposition ci-dessus en est la suite.

Il reste à faire voir que les lignes géodésiques sont les seules dont les tangentes admettent une surface trajectoire orthogonale. Or nous avons trouvé que la condition nécessaire est que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit une différentielle exacte; mais, d'après l'équation de la surface,

$$dz = p\,dx + p\,dy,$$

en sorte que le trinôme devient

$$(X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy,$$

et pour que cette expression soit une différentielle exacte, il faut que l'on ait

$$\frac{d\,(X + pZ)}{dy} = \frac{d\,(Y + qZ)}{dx}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette relation exprime précisément que le plan osculateur en chaque point de la surface à laquelle on mène des tangentes est normal à cette surface.

En effet, la condition précédente peut se développer comme il suit :

$$\left(\frac{d\mathrm{X}}{ds} + p\frac{d\mathrm{Z}}{ds}\right)\frac{ds}{dy} + \mathrm{Z}\frac{dp}{dy} = \left(\frac{d\mathrm{Y}}{ds} + q\frac{d\mathrm{Z}}{ds}\right)\frac{ds}{dx} + \mathrm{Z}\frac{dq}{dx};$$

et comme

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

il reste

$$\left(\frac{d\mathrm{X}}{ds} + p\frac{d\mathrm{Z}}{ds}\right)\frac{ds}{dy} = \left(\frac{d\mathrm{Y}}{ds} + q\frac{d\mathrm{Z}}{ds}\right)\frac{ds}{dx}.$$

Or cette équation doit être satisfaite pour tout point pris sur la courbe, et par lequel on mène une tangente, c'est-à-dire quels que soient $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$: donc les multiplicateurs de ces quantités sont nuls, ce qui donne

$$\frac{\frac{d\mathrm{X}}{ds}}{p} = \frac{\frac{d\mathrm{Y}}{ds}}{q} = \frac{\frac{d\mathrm{Z}}{ds}}{1},$$

ou si

$$z = \mathrm{F}(x, y, z) = 0$$

est l'équation de la surface,

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{d\mathrm{F}}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{d\mathrm{F}}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{d\mathrm{F}}{dz}},$$

équation différentielle de la ligne géodésique. La proposition est donc démontrée.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

DEUXIÈME PARTIE.

Des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré.

Nous avons vu, comme application de l'équation générale des lignes géodésiques, que, sur une surface à centre du second degré, l'équation de la ligne géodésique est

$$\mu^2 \sin^2 i + \nu^2 \cos^2 i = \alpha^2.$$

Nous allons arriver directement à ce résultat et en déduire les propriétés géométriques intéressantes de cette sorte de ligne.

Partons de la définition même de la ligne géodésique, savoir qu'elle est la plus courte entre deux points donnés de toutes les lignes que l'on peut tracer sur la surface. L'équation qui exprime cette condition est, en employant les coordonnées ordinaires,

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{d\mathrm{F}}{dx}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{d\mathrm{F}}{dy}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{d\mathrm{F}}{dz}}.$$

Elle devient, en l'appliquant à une surface à centre du second degré,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h,$$

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\frac{x}{a^2}} = \frac{d\frac{dy}{ds}}{\frac{y}{b^2}} = \frac{d\frac{dz}{ds}}{\frac{z}{c^2}}.$$

Pour intégrer cette équation, nous emploierons l'artifice suivant :

Multiplions haut et bas par $\frac{dx}{a^2}$, $\frac{dy}{b^2}$, $\frac{dz}{c^2}$, puis par $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$; ajoutons chaque fois terme à terme, et égalons les deux expressions, on a

$$\frac{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} + \frac{d\frac{1}{ds^2}\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right)}{\frac{1}{ds^2}\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right)} = 0;$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

intégrant, il vient

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{C(dx^2+dy^2+dz^2)}{\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}}, \tag{1}$$

intégrale première de l'équation d'une ligne géodésique sur une surface à centre du second degré.

Le même artifice donne, dans le cas d'un paraboloïde $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p'}-2x=0$,

$$\frac{y^2}{p^2}+\frac{z^2}{p'^2}+1=C\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dy^2}{p}+\frac{dz^2}{p'}}.$$

Ces équations ne peuvent en général s'intégrer, à moins que la surface ne soit de révolution, auquel cas l'intégration est ramenée aux quadratures sans employer d'autres coordonnées; nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

L'étude des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde est celle que nous avons plus particulièrement en vue; nous supposerons donc a^2, b^2, c^2 positifs et $h=1$.

L'intégrale première (1) est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable donnée par M. Joachimsthal (*). En effet, la distance du centre de la surface au plan tangent au point xyz est

$$P=\frac{x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dx}}{\sqrt{\frac{df}{dx^2}+\left(\frac{df}{dy^2}\right)^2+\left(\frac{df}{dz^2}\right)}},$$

et dans le cas actuel

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

D'autre part, la longueur du demi-diamètre de la surface parallèle à la tangente à la ligne géodésique au point xyz est

$$D=\sqrt{\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}}},$$

(*) *Journal de Crelle*, tome XXVI, page 155.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$PD = \frac{1}{\sqrt{C}};$$

donc :

1. *Étant tracée une ligne géodésique sur une surface du second degré, si l'on mène du centre une perpendiculaire au plan tangent à la surface en un point de cette ligne et un diamètre parallèle à sa tangente au même point, le rectangle fait sur la perpendiculaire et le diamètre est constant.*

Pour un point quelconque, le produit PD peut s'évaluer à l'aide d'autres variables, et de là va résulter une nouvelle expression de l'intégrale première de l'équation des lignes géodésiques.

Nommons a', b' les demi-axes principaux de la section déterminée dans l'ellipsoïde par un plan parallèle au plan tangent mené par le centre de la surface; soit φ l'angle du diamètre D parallèle à la tangente à la ligne géodésique au point de contact, avec le grand axe de la section : on a en coordonnées polaires D, φ, l'équation

$$D = \frac{a'b'}{\sqrt{a'^2 \sin^2\varphi + b'^2 \cos^2\varphi}},$$

d'où

$$PD = \frac{a'b'P}{\sqrt{a'^2 \sin^2\varphi + b'^2 \cos^2\varphi}} = \frac{abc}{\sqrt{a'^2 \sin^2\varphi + b'^2 \cos^2\varphi}}.$$

Le numérateur de PD étant constant, on en conclut

$$a'^2 \sin^2\varphi + b'^2 \cos\varphi = \text{constante}.$$

a', b', φ ont la signification connue; on peut dire aussi que a', b' sont les demi-diamètres de l'ellipsoïde parallèles aux lignes de courbure qui se croisent en M, puisque ces diamètres sont parallèles aux axes de l'indicatrice en M, et que φ est l'angle de la ligne géodésique avec la ligne de courbure dont la tangente est parallèle à l'axe a'.

Soient ρ le demi grand axe de l'ellipsoïde, μ et ν les paramètres des lignes de courbure qui passent en M, c'est-à-dire les demi grands axes des hyperboloïdes homofocaux qui passent en ce point, exprimons a' et b' au moyen de ρ, μ, ν, nous trouvons, ainsi que M. Chasles l'a fait voir très-sim-

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

plement (*),

$$a'^2 = \rho^2 - \mu^2, \qquad b'^2 = \rho^2 - \nu^2,$$

et l'équation précédente devient

$$\mu^2 \sin^2\varphi + \nu^2 \cos^2\varphi = \rho^2 + \text{const.} = C', \tag{3}$$

équation donnée par M. Liouville (**). L'angle φ n'est autre chose que l'angle désigné ordinairement par i. Elle renferme évidemment l'équation des lignes de courbure, car pour

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

elle donne

$$\nu = \text{constante} \quad \text{et} \quad \mu = \text{constante}.$$

Déterminons la constante. Pour cela, soit MM' une droite tangente aux deux surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{x'^2}{\mu^2} + \frac{y'^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z'^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \qquad b < \mu < c,$$

on aura les relations

$$\frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\rho^2 - b^2} + \frac{zz'}{\rho^2 - c^2} = 1,$$
$$\frac{xx'}{\rho^2} + \frac{yy'}{\mu^2 - b^2} + \frac{zz'}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

d'où, en retranchant,

$$\frac{xx'}{\rho^2\mu^2} + \frac{yy'}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} + \frac{zz'}{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)} = 0.$$

Cette dernière équation exprime que les plans tangents en M et M' aux deux surfaces sont rectangulaires.

(*) Journal de Liouville, tome XI, page 117.

(**) Journal de Liouville, tome IX, page 404.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Supposons que MM′ soit tangente en M à une ligne géodésique tracée sur la surface ρ et soit NN′ la tangente en un point voisin de M, ces deux tangentes sont dans le plan osculateur de la courbe, lequel est normal à la surface ρ; donc elles sont dans le plan tangent à μ en M′; donc NN′ est encore tangent à la surface μ; donc :

II. *Toutes les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tangentes à une surface homofocale.*

Il est clair que chaque ligne géodésique est tangente à la ligne de courbure suivant laquelle les deux surfaces se coupent; soit P le point de contact, en ce point $i = \frac{\pi}{2}$, d'où $\mu^2 = C' = \alpha^2$, en désignant par α cette valeur particulière de μ. Ainsi,

III. *La constante est égale au demi-axe majeur de la surface homofocale que touchent les tangentes à une ligne géodésique.*

La propriété géométrique énoncée dans le théorème II donne le moyen de construire en chaque point la direction des lignes géodésiques qui vont rencontrer une ligne de courbure donnée. Cette direction sera en effet celles des tangentes menées à la courbe d'intersection de la surface homofocale contenant la ligne de courbure donnée par le plan tangent à la première surface au point considéré.

S'il s'agit d'une ligne de courbure (μ), il n'y a de solution que si le point est en dehors de cette ligne; la section pourra être une ellipse, une parabole ou une hyperbole; dans tous les cas on pourra mener deux tangentes et on aura sur l'ellipsoïde deux régions distinctes en ce que pour l'une le plan tangent coupera l'hyperboloïde suivant une ellipse et pour l'autre suivant une hyperbole. Ces deux régions seront séparées par une ligne déterminée sur l'ellipsoïde par la surface

$$\frac{\mu^2}{\rho^4} x^2 + \frac{\mu^2 - b^2}{(\rho^2 - b^2)^2} y^2 + \frac{(\mu^2 - c^2)}{(\rho^2 - c^2)^2} z^2 = 1,$$

pour chaque point de laquelle la section sera une parabole.

Quand le point donné sera dans le plan des xy, les tangentes seront évidemment parallèles aux génératrices du cône asymptote de l'hyperboloïde, situées dans un plan passant par l'axe de la surface et parallèle à la tangente à la section principale de l'ellipsoïde au point donné.

Si la ligne de courbure est $\mu = b$, l'hyperboloïde homofocal se réduit à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

une hyperbole passant par les ombilics de l'ellipsoïde; on en conclut que

IV. *Les tangentes aux lignes géodésiques qui passent par les ombilics rencontrent toutes le plan des ombilics en un point de l'hyperbole focale.*

On voit d'après ce qui précède que

$$PD = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}},$$

en sorte que la constante désignée par C est

$$\frac{\rho^2 - \alpha^2}{\rho^2(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

En particulier si une ligne géodésique passe par un ombilic, $\alpha = b$ et $PD = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Puisque le produit PD a la même valeur pour toute ligne géodésique tangente à une ligne de courbure donnée, le lieu des points de contact sur la seconde surface, des tangentes à une ligne géodésique tracée sur la première admet la même équation, D étant parallèle à la tangente commune aux deux surfaces et non à la tangente au lieu des conctacts.

II.

L'équation $\mu^2 \sin^2 c + r^2 \cos^2 c = \alpha^2$ donnant pour tang i deux valeurs $\pm\sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{\mu^2 - \alpha^2}}$ égales et de signes contraires, on voit que les quatre lignes géodésiques que l'on peut mener tangentiellement aux deux lignes de courbure (μ) sont deux à deux dans le prolongement l'une de l'autre. On en conclut aussi que

V. *Les deux lignes géodésiques issues d'un même point et tangentes à une même ligne de courbure font des angles égaux avec chacune des lignes de courbure qui se croisent en ce point.*

En particulier, si $\alpha = b$, les deux lignes géodésiques passent chacune par deux ombilics opposés et le théorème précédent subsiste.

Il résulte encore du théorème V que les rayons de courbure des deux lignes géodésiques issues d'un même point et tangentes à une même ligne de courbure sont égaux en ce point.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette proposition peut être considérée comme une conséquence du théorème suivant :

VI. *Si l'on désigne par* $(r', {}'r)\,(r'', {}''r)\,(r''', {}'''r)$ *les rayons de courbure aux extrémités des trois côtés d'un triangle formé par des lignes géodésiques sur une surface du second degré, on a*

$$r'\,r''\,r''' = {}'r\,{}''r\,{}'''r;$$

car si deux des sommets sont des ombilics,

$$r' = {}'r, \qquad r'' = {}''r, \qquad \text{d'où} \qquad r''' = {}'''r.$$

Le résultat précédent se déduit aisément de l'expression connue du rayon de courbure d'une section normale en un point d'une surface du second degré

$$r = \frac{D^2}{P} = \frac{1}{CP^3} = \frac{1}{C}\left(\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z}{(\rho^2 - c^2)^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

Or C ne change pas le long d'une ligne géodésique, on en conclut la relation ci-dessus.

Joignons les divers points d'une ligne géodésique quelconque à un ombilic, il est aisé de conclure du théorème précédent que

VII. *Le rapport des rayons de courbure de la ligne géodésique en un de ses points au rayon de courbure en ce point du rayon vecteur géodésique est constant.*

Sur une surface de révolution le même théorème s'applique, les rayons vecteurs géodésiques étant devenus des méridiens.

Si l'on prend le rapport des rayons de courbure d'une ligne géodésique en deux de ses points, on a

$$\frac{{}'r}{r'} = \frac{\dfrac{1}{P^3}}{\dfrac{1}{P'^3}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\dfrac{1}{{}'r}}{\dfrac{1}{r'}} = \frac{P^3}{P'^3};$$

donc :

VIII. *Le rapport des courbures d'une ligne géodésique en deux de ses points est égal au rapport des cubes des perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents en ces points.*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Donc :

La courbe de contact déterminée sur l'ellipsoïde par un plan tangent à cette surface et à une sphère concentrique coupe un système de lignes géodésiques en des points où les rayons de courbure de ces lignes sont égaux.

Menons d'un point pris sur la surface des lignes géodésiques tangentes à deux lignes de courbure données, on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{r}{r'} = \frac{C'}{C} = \frac{\rho^2 - \alpha'^2}{\rho^2 - \alpha^2};$$

donc :

IX. *Le rapport des rayons de courbure en un point de deux lignes géodésiques issues de ce point et tangentes à deux lignes de courbure données est constant.*

Supposons que l'une des deux lignes de courbure données soit la section de la surface dans le plan des xy et que l'autre se réduise à la ligne des ombilics, prenons le point donné sur la première de ces lignes, et nous aurons cette conséquence :

Si d'un point d'une section principale on mène une ligne géodésique à un ombilic, le rapport des rayons de courbure de ces deux lignes en ce point est constant.

Le rapport des rayons de courbure étant le même que celui des carrés des diamètres de l'indicatrice qui leur correspondent, on a ce théorème de géométrie :

Étant donné un ellipsoïde, si dans une section principale perpendiculaire au plan des ombilics on mène un diamètre et par ce diamètre un plan perpendiculaire à la section, il détermine sur le cône asymptote de la surface homofocale une génératrice; le rapport de la longueur de cette droite terminée à l'ellipsoïde à celle du diamètre est constant, quelle que soit la direction du diamètre dans la section.

Si l'on considère deux lignes géodésiques issues du même point, se coupant à angle droit et tangentes à deux lignes de courbure données, leurs équations sont

$$\mu^2 \sin^2 c + \nu^2 \cos^2 c = \alpha^2,$$
$$\mu^2 \cos^2 c + \nu^2 \sin^2 i = \alpha'^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$\mu^2 + \nu^2 = \alpha^2 + \alpha'^2$$

pour le lieu des sommets des angles droits formés par deux lignes géodésiques et circonscrits à deux lignes de courbures données; on voit que ce lieu est une sphéro-conique, car la fonction

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + \mu^2 - b^2 + \nu^2 - c^2$$

est constante en même temps que $\mu^2 + \nu^2$.

En particulier, si $\alpha^2 = \alpha'^2$, les deux lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure; si $\alpha^2 = b^2 = \alpha'^2$, les deux lignes géodésiques passent par un ombilic.

Tous ces cas particuliers sont compris dans l'énoncé suivant :

X. *Le lieu des points d'où l'on peut mener deux lignes géodésiques orthogonales tangentes à deux lignes de courbure données, est une sphéro-conique.*

XI. *La somme des distances géodésiques d'un point situé sur une ligne de courbure donnée aux deux ombilics qu'elle comprend est la même, quelle que soit la position du point sur la ligne de courbure.*

Car soient OO′ deux ombilics voisins et MM′ une ligne de courbure, nommons s et s' les distances OM, O′M, on a

$$ds = -\,\mathrm{MM'}\cos i,$$
$$ds' = -\,\mathrm{MM'}\cos i,$$

d'ou

$$ds + ds' = 0, \qquad s + s' = \text{constante};$$

donc :

Si l'on fixe à deux ombilics voisins les extrémités d'un fil, un stylet tendant le fil sur la surface décrit une ligne de courbure.

Nous savons que OM prolongé passe en O″, et on démontrerait de la même manière que $s'' - s' =$ constante; d'où il suit que $s'' + s'$ est constant; ce fait est, du reste, une conséquence de ce qu'une ligne géodésique qui passe par un ombilic, passe aussi par l'ombilic opposé. Prolongeons le

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

rayon vecteur OM d'une quantité égale à O'M, le lieu des points ains obtenus est une trajectoire orthogonale des lignes géodésiques issues de l'ombilic O. Cette trajectoire joue ici le même rôle que le cercle directeur dans l'ellipse, et on peut dire que :

XII. *Une ligne de courbure est le lieu des points également distants d'un point fixe, l'ombilic* O, *et d'une trajectoire orthogonale des lignes géodésiques issues de l'autre ombilic* O'.

L'analogie des théorèmes qui précèdent avec les propriétés bien connues de l'ellipse est évidente; les ombilics jouent le rôle des foyers, les arcs géodésiques issus des ombilics sont des rayons vecteurs, la ligne de courbure est l'ellipse, les tangentes aux lignes de courbure sont les tangentes à l'ellipse, une trajectoire orthogonale des lignes géodésiques issues d'un ombilic est un cercle directeur.

Le mode de description des lignes de courbure résultant du théorème X n'est pas le plus général; il est aisé de voir que :

XIII. *Si un fil de longueur constante entoure partiellement une ligne de courbure, puis s'applique sur la surface par sa portion restante, le stylet qui le tend décrit sur la surface une ligne de courbure.*

En effet, soient $TM = s$, $TT' = d\sigma$ et MM' une ligne de courbure, on a

$$ds = MM' \cos i - d\sigma,$$

de même

$$ds' = - MM' \cos i + d\sigma',$$

d'où

$$s + s' = \sigma' - \sigma + \text{constante}.$$

Or $\sigma' - \sigma$ est l'arc TS.

Ajoutons TNST aux deux membres de l'égalité, il vient

$$s + s' + TNS = \text{constante},$$

d'où résulte la proposition énoncée.

Enfin M. Chasles est allé plus loin encore, et il a montré que :

XIV. *Si un fil de longueur constante est fixé par ses deux extrémités*

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

en deux points d'une surface du second degré, et qu'un stylet, tenant le fil constamment tendu, glisse sur une surface homofocale, le stylet décrit une ligne de courbure de cette surface.

La démonstration de M. Chasles (*) peut se résumer en disant que les deux positions du fil formant chacune des lignes géodésiques sur une certaine surface composée, font des angles égaux avec les lignes que décrit le stylet sur cette surface; nous savons d'autre part que les tangentes à ces lignes géodésiques, à leur point d'intersection, touchent la surface sur laquelle le fil est fixé, et, par suite, font des angles égaux avec les lignes de courbure de la seconde surface au point de contact, d'où il résulte que la ligne de courbure coïncide avec la ligne décrite par le stylet.

En particulier, l'hyperboloïde homofocale de l'ellipsoïde peut se réduire à une hyperbole dans le plan des ombilics; donc :

XV. *Si un fil est fixé en deux points de l'hyperbole focale, le stylet qui le tend décrit une ligne de courbure de l'ellipsoïde, et la ligne géodésique formée passe par un ombilic.*

Fixons un fil en un point de l'hyperbole focale; ce fil étant tendu sur l'ellipsoïde, son extrémité décrira une trajectoire orthogonale des lignes géodésiques qui passent par l'ombilic correspondant à la branche d'hyperbole sur laquelle se trouve le point fixe. Mais cette même trajectoire est également décrite par un point d'un fil fixé à l'ombilic et avec lequel le premier a toute sa partie curviligne commune; donc :

XVI. *Si on mène, d'un point pris sur l'hyperbole focale, diverses tangentes à l'ellipsoïde, la différence entre la tangente et l'arc géodésique mené à l'ombilic, à partir du point de contact, est constante.*

La section des ombilics étant une ligne géodésique, la différence en question peut se construire aisément au moyen de cette ligne, et elle est égale à PM, P étant un point pris sur l'hyperbole focale, PT une tangente à l'ellipse sur laquelle on a pris TM égal à l'arc TO, en sorte que OM est la développante de l'ellipse. Menons la tangente PT', et soit PM' = PM, le point M' appartiendra à la développante OM'. On voit donc que :

L'arc d'hyperbole focale est le lieu des points également distants des deux développantes de l'ellipse, ayant l'ombilic O *pour origine.*

(*) Journal de Liouville, tome XI, page 16.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Puisque le cône circonscrit à l'ellipsoïde, ayant le point P pour sommet, est un cône de révolution, on voit que le lieu des points M obtenus en rabattant une ligne géodésique quelconque terminée en O sur la tangente issue de P, est un cercle. Le lieu serait encore un cercle, si on terminait les lignes géodésiques à une de leurs trajectoires orthogonales.

III.

Les théorèmes précédents vont nous permettre de trouver une propriété remarquable des lignes géodésiques issues de deux ombilics voisins et se coupant sur une ligne de courbure donnée. Cette propriété résulte de l'expression de la fonction P qui entre dans la valeur de l'élément linéaire tracé sur une surface. Nous avons vu, en effet, que, en prenant pour système de coordonnées les lignes géodésiques issues d'un point et leurs trajectoires orthogonales, on a

$$ds^2 = d\rho^2 + \mathrm{P}^2\, d\omega^2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\mathrm{P}}{d\rho^2} + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{RR}'} = 0.$$

Fixons la portion d'un point sur l'ellipsoïde par l'angle ω que fait sur le plan des ombilics la direction d'une ligne géodésique menée d'un ombilic à ce point, et par sa distance ρ à l'origine des arcs géodésiques. Cherchons dans ces hypothèses la valeur de P.

Soient OT une ligne géodésique issue de l'ombilic O, TS et TN la tangente et la normale à cette ligne ; nous savons que le point S est sur l'hyperbole focale et que N est sur la tangente en S à cette hyperbole. Soient

$$\mathrm{NT} = n, \quad \mathrm{ST} = t, \quad \mathrm{TSN} = \alpha;$$

on a

$$\operatorname{tang}\alpha = n \quad \text{et} \quad n = \frac{b^2}{p},$$

p étant la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en T, d'où

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{b^2}{pt};$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'autre part, $d\varepsilon$ désignant l'angle de contingence de OT en T, on a

$$t d\varepsilon = (dt - d\rho) \operatorname{tang} \alpha.$$

Soit γ le rayon de courbure de OT en ce point,

$$d\varepsilon = \frac{d\rho}{\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{D^2}{p},$$

D étant le demi-diametre de la surface parallèle à TS; enfin

$$pD = ac,$$

d'où

$$d(t - \rho) = \frac{p^4 t^2}{a^2 b^2 c^2} a\rho = \frac{t^2 d\rho}{RR'};$$

donc

$$\frac{dt}{d\rho} = 1 + \frac{t^2}{RR'}.$$

Soit y la distance du point T au plan des ombilics $\frac{dy}{d\rho} = \frac{y}{t}$: donc

$$\frac{d^2 y}{d\rho^2} + \frac{y}{RR'} = 0.$$

Comparant cette équation a celle à laquelle satisfait P, on voit que

$$P = y\varphi(\omega),$$

et comme dans le voisinage de l'ombilic la surface est sphérique,

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad P = \frac{y}{\sin\omega}.$$

Joignons le point T à l'ombilic voisin O', on aurait de même, en considérant ce point comme appartenant à l'arc O'T,

$$P' = \frac{y}{\sin\omega'},$$

d'où l'on tire dans le triangle géodésique OTO' cette relation remarquable

$$P \sin\omega = P' \sin\omega'.$$

Soit OM une ligne géodésique, menons en O la tangente à OM; elle fait avec OT un angle ω Soit $NQ = y$, on a

$$y = ON \sin\omega.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

d'où

$$P = ON.$$

P n'est donc autre chose que la portion de la tangente en O à la ligne géodésique comprise entre le point O et un plan mené par M parallèlement à celui des ombilics. Plus simplement :

XVII. P *est égal à la longueur de la parallèle menée par le point donné jusqu'au plan des ombilics à la tangente à l'ombilic à la ligne géodésique considérée.* Donc :

La valeur de P *est la même pour tous les arcs géodésiques terminés à la section de l'ellipsoïde par un cylindre droit ayant pour base un cercle dont le centre est à l'ombilic et situé dans le plan tangent en ce point.*

Menons l'ordonnée TU, et TR parallèle à la tangente en O à l'arc OT, posons $TU = y$, $TR = P$, et soit

$$STR = \delta, \quad STU = \beta, \quad RTU = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad TU = \upsilon,$$

angle de la projection de TS sur le plan des ombilics avec la tangente en O à la section principale. On a

$$\cos\delta = \cos\beta \sin\omega + \sin\beta \cos\omega \cos\upsilon,$$

si le point T est à l'extrémité de l'arc moyen de l'ellipsoïde $\beta = 90^\circ$, et il vient

$$\cos\delta = \cos\omega \cos\upsilon.$$

~~Mais~~ δ ne est pas aussi de 90 degrés ; ~~donc, puisque cos υ n'est pas nul~~,

$$\cos\omega = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2},$$

donc l'arc géodésique mené du sommet de l'axe moyen à l'ombilic rencontre le plan des ombilics sous un angle droit.

Joignons à la valeur de P, $P = \frac{y}{\sin\omega}$, les relations connues

$$P\,d\omega = \operatorname{tang} i\, d\rho, \quad P'\,d\omega' = \operatorname{tang} i\, d\rho', \quad d\rho + d\rho' = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et il vient

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} + \frac{d\omega'}{\sin\omega'} = 0,$$

ou

XVIII. $$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2} = \text{const. tout le long de } (\mu).$$

On aurait de même

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2}} = \text{const. tout le long de } (\nu),$$

théorèmes qu'il est aisé d'énoncer en langage ordinaire.

On peut tirer de cette propriété divers corollaires.

Faisons tourner autour du point O une ligne géodésique terminée à deux lignes de courbure différentes, et joignons les extrémités à l'ombilic voisin O′; on a, d'après ce qui précède,

$$\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2} = C,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_2}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega''}{2} = C'.$$

Multiplions membre à membre, eu égard à

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_2}{2} = 1,$$

qui exprime que ω_1 et ω_2 sont supplémentaires, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega''}{2} = CC'.$$

Considérons trois lignes de courbure

$$\mu = c, \quad \mu = c', \quad \mu = c'',$$

et deux lignes géodésiques, l'une passant en O et terminée en C et C′, l'autre passant en O′ et terminée en C′ et C″; joignons OC″ et O′C. Du mouvement

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

de l'un de ces points résulte le mouvement de tous les autres ; il est aisé de voir que C''', intersection de O'C et de OC'', décrira une ligne de courbure. On a en effet, en nommant C, C' et C'' les constantes qui caractérisent un produit des tangentes le long des lignes C, C', C'', et posant $C'O'O = \omega_1$, $CO'O = \omega_2$, $C''OO' = \omega_3$, $C'OO' = \omega_4$,

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_2}{2} = C.C',$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_3}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_4}{2} = C'.C'',$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_1}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_4}{2} = C,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\frac{\omega_2}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega_3}{2} = C.C'.C''.$$

Le théorème aurait lieu encore si l'on ne considérait que deux ou une ligne de courbure au lieu de trois.

Remarquons que la dernière relation ne changerait pas si le point commun aux deux lignes géodésiques primitives était C ou C'', en sorte que les deux autres points d'intersection obtenus dans ces derniers cas décrivent la même ligne de courbure que le point C'''.

Imaginons qu'une bille partie d'un ombilic suive une ligne géodésique et se réfléchisse sur l'une des trois lignes C, C', C'' ; elle passera alternativement par chacun des ombilics O, O', *et tous les divers points d'intersection tels que* C''' *seront sur la même ligne de courbure*.

La même propriété subsisterait s'il n'y avait qu'une seule ligne de courbure $\mu = C$, et s'il y en avait deux, elle n'aurait lieu qu'autant que la bille ne se réfléchirait pas deux fois de suite sur la même ligne de courbure, car le produit $C.C'.C''$ peut devenir $C^2.C'$ ou $C.C'^2$.

Les propriétés de la ligne géodésique exposées jusqu'ici sont les plus simples et les plus propres à la faire connaître ; elles nous donnent le moyen de la décrire mécaniquement, ainsi que ses trajectoires orthogonales et les lignes de courbure de la surface. On peut étudier cette ligne sous un autre point de vue, en cherchant à la représenter par des équations d'une forme plus ou moins élégante, équations qui sont peu susceptibles d'être interprétées géométriquement. Nous passerons rapidement sur cette partie.

Nous avons vu, en commençant, la ligne géodésique donnée par deux équations renfermant les paramètres p et q et l'angle i de la direction de cette ligne en chaque point avec la ligne (q) qui y passe, en sorte que l'élimination de l'angle i donne son équation au moyen des coordonnées p et q.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Dans le cas des surfaces du second degré, nous avons trouvé

$$\tang^2 i = \frac{\alpha^2 - \nu^2}{\mu^2 - \alpha^2}.$$

On peut avoir une autre expression de cette tangente en remarquant qu'elle est le quotient des éléments des lignes de courbure à partir du point (μ, ν), ce qui donne

$$\frac{\alpha^2 - \nu^2}{\mu^2 - \alpha^2} = \frac{\dfrac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\, d\nu^2}{\dfrac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\, d\mu^2},$$

d'où

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - \alpha^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} \pm \int \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}\, d\nu}{\sqrt{(\alpha^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)}} = \beta,$$

équation de la ligne géodésique en fonction des paramètres μ et ν. Jacobi en a donné une tout à fait semblable (*) et qui se déduit de l'intégrale première trouvée plus haut

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \mathrm{C}\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\dfrac{dx^2}{a} + \dfrac{dy^2}{b} + \dfrac{dz^2}{c}},$$

en posant

$$x = \sqrt{\frac{a}{c - a}}\,\sin\varphi\,\sqrt{c\sin^2\psi + b\cos^2\psi - a},$$

$$y = \sqrt{b\sin\psi\cos\varphi},$$

$$z = \sqrt{\frac{a}{c - a}}\,\sqrt{c - b\sin^2\varphi - a\cos^2\varphi}.$$

On trouve ainsi

$$\int \frac{(a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi}{(\mathrm{C} - b\sin^2\varphi - a\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,(abc\,\mathrm{C} - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$- \int \frac{(\mathrm{C}\sin^2\psi + b\cos^2\psi)^{\frac{1}{2}}\, d\psi}{(\mathrm{C}\sin^2\psi + b\cos^2\psi - a)^{\frac{1}{2}}\,(\mathrm{C}\sin^2\psi + b\cos^2\psi - abc\,\mathrm{C})^{\frac{1}{2}}} = \beta.$$

(*) Journal de Liouville, tome IX, page 405.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Quand la ligne géodésique passe par un ombilic, la constante α^2 de l'équation en μ et ν prend la valeur b^2, et l'on a

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2-\mu^2}}{\mu^2-b^2\sqrt{c^2-\mu^2}}\,d\mu \pm \int \frac{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}{b^2-\nu^2\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\nu = \beta,$$

β étant une fonction qui dépend de la direction de la ligne géodésique à l'ombilic.

L'élément de la ligne géodésique est

$$ds = \sqrt{\mu^2-\nu^2}\sqrt{\frac{(\rho'-\mu^2)\,d\mu^2}{(\mu^2b^2)(c^2-\mu^2)} + \frac{(\rho'-\nu^2)\,d\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}};$$

mais eu égard à la relation entre μ et ν trouvée plus haut, on peut écrire

$$ds = \mu^2\sqrt{\frac{\rho^2-\mu^2}{(\mu^2-\alpha^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}}\,d\mu \pm \nu^2\sqrt{\frac{\rho^2-\nu^2}{(\alpha^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}\,d\nu.$$

Si $\alpha^2 = b^2$,

$$ds = \frac{\mu^2}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{\rho^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\,d\mu \pm \frac{\nu^2}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{\rho^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}\,d\nu,$$

et en tenant compte de l'équation de la ligne géodésique

$$\frac{b^2\sqrt{\rho^2-\mu^2}}{(\mu^2-b^2)\sqrt{c^2-\mu^2}}\,d\mu \pm \frac{b^2}{b^2-\nu^2}\frac{\sqrt{\rho^2-\nu^2}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\nu = 0,$$

on a, en retranchant,

$$s = \int\sqrt{\frac{\rho^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\,d\mu \mp \int\sqrt{\frac{\rho^2-s^2}{c^2-\nu^2}}\,d\nu,$$

les signes supérieurs devant être pris ensemble.

M. Hart a déduit aussi de la valeur de la fonction P une nouvelle forme de l'équation des lignes géodésiques issues d'un ombilic, en établissant la relation qui lie l'angle θ de son plan osculateur avec le plan des ombilics et l'angle α de sa tangente avec la tangente à l'hyperbole focale au point où elle la rencontre.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Nous avons vu que

$$P = \frac{y}{\sin \omega} ;$$

or

$$\frac{y d\theta}{\sin \theta}$$

est la distance de deux arêtes consécutives de cône de révolution circonscrit à l'ellipsoïde; donc le long de la courbe de contact

$$P d\omega = \frac{y d\theta}{\sin \theta},$$

d'où

$$\frac{d\omega}{\sin \omega} = \frac{d\theta}{\sin \theta}, \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta = K \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega.$$

K est évidemment une fonction de α demi-angle du cône; en sorte que, si on le considère comme constant, l'équation précédente est celle de la courbe de contact. On peut en tirer la conséquence suivante.

Menons du même point une ligne géodésique à l'ombilic voisin, on aura

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta' = K' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega',$$

et en multipliant,

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta}{K} \cdot \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta'}{K'} = C,$$

relation qui lie θ, θ', α, α' le long d'une ligne de courbure (μ). Mais remarquons que l'équation

$$\frac{d\omega'}{\sin \omega'} = \frac{d\theta'}{\sin \theta'}$$

donne

$$\frac{d\omega'}{\sin \omega} + \frac{d\omega'}{\sin \omega'} = \frac{d\theta}{\sin \theta} + \frac{d\theta'}{\sin \theta'}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Or tout le long de (μ) le premier membre est nul ; donc

XIX. $$\tang \frac{1}{2}\theta \tang \frac{1}{2}\theta' = C',$$

théorème analogue au précédent, et

$$KK' = C''.$$

Les trois constantes C, C', C'' sont des fonctions de μ.

Reprenons l'équation

$$\tang \frac{1}{2}\theta = K \tang \frac{1}{2}\omega.$$

Si, pour avoir K, on le différentie par rapport à α, on a

$$\frac{1}{K}\frac{dK}{d\alpha} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\alpha}.$$

La valeur de K en fonction de α dépend donc de $\frac{d\theta}{d\alpha}$; pour en simplifier la recherche, on peut s'appuyer sur ce qu'elle est indépendante de θ pour donner à cette variable une valeur particulière. Sans entrer dans le détail du calcul, soit

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \varphi(\alpha),$$

on aura

$$\tang \frac{1}{2}\theta = e^{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha} \tang \frac{1}{2}\omega$$

et

$$\varphi(\alpha) = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{(\rho^2 \tang^2\alpha + \rho^2 - b^2)\left[(\rho^2 - c^2)\tang^2\alpha + \rho^2 - b^2\right]}}.$$

L'intégrale ne changeant pas de signe entre les limites $\pm\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire en passant d'un ombilic à un autre, si l'on nomme ω, ω' les valeurs de α à

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

ces deux limites, on a

XX. $$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega' = m \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega,$$

m étant un nombre constant différent de 1. Si α varie de $-\frac{1}{2}\pi$ à $-\frac{3\pi}{2}$, l'intégrale conserve le même signe, la ligne géodésique retourne à l'ombilic, et l'on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega'' = m \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega' = m^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega;$$

de sorte qu'au bout de p révolutions, on a m^{2p} pour le rapport des tangentes des demi-angles.

IV.

Les propriétés précédentes établies dans le cas des surfaces à centre subsistent encore dans le cas des surfaces dépourvues de centre; cela résulte de ce que ces dernières peuvent être considérées comme cas particuliers des premières. Cependant, comme l'équation fondamentale

$$PD = \text{constante}$$

ne peut plus avoir de sens dans le cas actuel puisque le centre est à l'infini, il est bon d'établir directement l'équation des lignes géodésiques sur les paraboloïdes.

Considérons les trois surfaces homofocales du deuxième degré, fixons leurs sommets situés sur l'axe des x à gauche de l'origine et transportons l'origine en ces points pour chacune des surfaces.

L'ellipsoïde devient

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} - \frac{2x}{\rho} = 0.$$

Multiplions par ρ et posons

$$\lim \frac{\rho}{\rho^2 - b^2} = \frac{1}{r}, \quad \lim \frac{\rho}{\rho^2 - c^2} = \frac{1}{r'},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et il vient

$$\frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r'} - 2x = 0.$$

Les deux autres surfaces prennent des formes analogues. Mais si l'on prend ensuite pour origine commune le sommet de l'ellipsoïde, on a pour ces dernières

$$\frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{m'} - 2(x-h) = 0, \quad \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{n'} + 2(x-k) = 0.$$

Les sections principales des surfaces ayant mêmes foyers, il faut que

$$\frac{r}{2} = h + \frac{m}{2}, \quad \frac{r'}{2} = h - \frac{m'}{2}, \quad \frac{r}{2} = k - \frac{m}{2}, \quad \frac{r'}{2} = k - \frac{n'}{2},$$

de sorte que si l'on prend h et k pour paramètres arbitraires, on a les trois surfaces

$$\frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r'} - 2x = 0, \qquad r' < r \quad \text{paraboloïde elliptique;}$$

$$\frac{y^2}{2h-r} + \frac{z^2}{2h-r'} + 2(x-h) = 0, \quad \frac{r}{2} > h > \frac{r'}{2} \quad \text{paraboloïde hyperbolique;}$$

$$\frac{y^2}{2k-r} + \frac{z^2}{2k-r'} + 2(x-k) = 0, \quad \frac{r}{2} < k > \frac{r'}{2} \quad \text{paraboloïde elliptique.}$$

Si l'on exprime x, y, z au moyen des nouvelles variables h et k, on a

$$z^2 = \frac{r'(2k-r')(2h-r')}{r-r'}, \quad y^2 = \frac{r(2k-r)(2h-r)}{r'-r}, \quad x = h + k - \frac{r+r'}{2};$$

on tire de là dx, dy, dz, et, par suite,

$$ds^2 = 4(k-h)\left[\frac{h\,dh^2}{(2h-r')(r-2h)} + \frac{k\,dk^2}{(2k-r')(2k-r)}\right],$$

et appliquant l'équation générale des lignes géodésiques comme on l'a fait

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

dans le cas de l'ellipsoïde, il vient, en intégrant,

$$h \sin^2 i + k \cos^2 i = \text{constante}.$$

L'équation est donc de même forme que dans le cas des surfaces à centre. La constante est égale à la valeur particulière de h qui définit la ligne de courbure (h) à laquelle la ligne géodésique est tangente, et les propriétés des lignes géodésiques sur les surfaces à centre s'appliquent encore ici ou avec de légers changements.

V.

Surfaces de révolution.

Les propriétés de la ligne géodésique sur une surface du second degré subsistent évidemment quel que soit le rapport des axes; elles appartiennent donc aussi aux surfaces de révolution. Ainsi l'intégrale première

$$\text{PD} = \text{constante}$$

demeure la même, et on voit clairement qu'elle appartient aux lignes de courbure : toutefois, les propriétés les plus nombreuses, celles qui dépendent des ombilics, s'évanouissent parce qu'elles sont évidentes d'elles-mêmes, et parce que dès lors elles ne présentent plus d'intérêt, puisqu'elles résultent immédiatement de la génération de la surface. Mais aussi quelques propriétés nouvelles apparaissent ; elles dépendent évidemment de l'équation générale de la ligne géodésique sur les surfaces de révolution

$$r = \sin i = \text{C}.$$

Ainsi on a cette propriété commune :

XXI. *Sur une surface du second degré de révolution autour de l'axe focal, la ligne géodésique peut être considérée comme engendrée par une droite issue de l'un des foyers autour duquel elle tourne, de façon que l'angle du plan tangent au cône décrit et du plan tangent à la surface reste constant.*

Soient en effet M un point pris sur une surface de révolution, MO le rayon

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

du parallèle qui passe par ce point, MP sa tangente, MR le prolongement du rayon vecteur FM, issu du point fixe F situé sur l'axe, et MG la tangente à une ligne géodésique en M; le triangle sphérique GPR donne, l'angle PMR étant droit,

$$o = \cos\widehat{GR}\cos\widehat{GP} + \sin\widehat{GR}\sin\widehat{GP}\cos\widehat{MG};$$

soit Mm la tangente au méridien, le triangle mGR donne aussi

$$\cos GR = \cos\widehat{mG}\cos\widehat{mR}.$$

Or

$$mG = i, \quad GP = \frac{\pi}{2} - i;$$

soit

$$MG = \varpi \quad \text{et} \quad mR = V,$$

ϖ étant l'angle des deux plans tangents au cône et à la surface, V l'angle de la tangente au méridien avec la direction du rayon vecteur FM. On tire de là

$$\cos\varpi = -\frac{1}{\operatorname{tang} GR \cot i},$$

$$\cos GR = \cos i \cos V, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\varpi = \frac{\operatorname{tang} V}{\sin i}.$$

Si ϖ est constant, on aura pour déterminer la forme du méridien, en posant FM $= \rho$, OFM $= \omega$, l'équation

$$\frac{\rho\frac{d\omega}{d\rho}}{\frac{C}{\rho\sin\omega}} = m,$$

eu égard à l'équation générale

$$r\sin i = \rho\sin\omega\sin i = C,$$

ou

$$\frac{m d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{C}\sin\omega\, d\omega, \quad \rho = \frac{m}{m' + \frac{1}{C}\cos\omega},$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

équation d'une courbe du second degré. On voit par là que les courbes du second degré sont les seules qui jouissent de la propriété énoncée.

Sans revenir sur les propriétés des surfaces de révolution communes avec les surfaces du second degré quelconques, je passe à l'examen des intégrales qui donnent la longueur d'une ligne géodésique dans le cas particulier qui nous occupe, et comme ces intégrales changent avec la nature de la surface, je les prendrai successivement.

Nous avons vu qu'on a la relation

$$r d\varphi = C ds.$$

Soit

$$h = f(r)$$

l'équation d'un méridien

$$ds = dr \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dr}\right)^2},$$

d'où

$$d\varphi = C \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2}{r^2 - C^2}} \frac{dr}{r} \quad \text{et} \quad ds = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2}{r^2 - C^2}}\, r dr.$$

Ce qui ramène aux quadratures la recherche de la ligne géodésique et sa rectification.

Ellipsoïde. — Soit

$$h = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - r^2},$$

a et b sont les demi-axes de l'ellipse méridienne, et en supposant $a > b$, nous aurons un ellipsoïde aplati; on a alors

$$d\varphi = \frac{C}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) r^2}{(r^2 - C^2)(a^2 - r^2)}} \frac{dr}{r}.$$

Pour ramener l'intégrale aux fonctions elliptiques, posons

$$a^2 - r^2 = a^2 \lambda^2 \cos^2 \omega.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

λ étant un facteur indéterminé, ou

$$r^2 = a^2 (1 - \lambda^2 \cos^2 \omega),$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = \frac{a^2 \lambda^2 \sin \omega \cos \omega \, d\omega}{a^2 (1 - \lambda^2 \cos^2 \omega)},$$

et

$$d\varphi = \frac{C}{a} \sqrt{\frac{a^4 - a^2 (a^2 - b^2)(1 - \lambda^2 \cos^2 \omega)}{(a^2 - C^2 - a^2 \lambda^2 \cos^2 \omega) a^2 \lambda^2 \cos^2 \omega}} \cdot \frac{a^2 \lambda^2 \sin \omega \cos \omega}{a^2 (1 - \lambda^2 \cos^2 \omega)} d\omega.$$

Si on prend $a^2 \lambda^2 = a^2 - C^2$,

$$d\varphi = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) c^2}}{ac} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}}{1 + n \sin^2 \omega} d\omega;$$

en posant

$$k^2 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - C^2)}{a^4 - (a^2 - b^2) C^2}, \quad n = \frac{a^2 - C^2}{C^2},$$

et d'après la relation $ds = \frac{r^2 d\varphi}{C}$,

$$ds = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) C^2}}{a} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} \, d\omega = \sqrt{c^2 - \frac{c^2 C^2}{a^2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega} \, d\omega.$$

Or si a' et b' sont les demi-axes d'une ellipse, la longueur d'un arc de la courbe compté du sommet du petit axe est

$$s' = a' \int_0^{\omega} \sqrt{1 - \frac{a'^2 - b'^2}{a'^2} \sin^2 \omega} \, d\omega,$$

et en identifiant avec la valeur de s,

$$a' = \sqrt{a^2 - \frac{c^2 C^2}{a^2}}, \quad 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = \frac{c^2 - \frac{c^2 C^2}{a^2}}{a^2 - \frac{c^2 C^2}{a^2}},$$

d'où

$$b' = b.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Si nous comptons l'arc de la ligne géodésique à partir de son point de contact avec le parallèle $r = C$, l'intégration relative à r doit être faite entre les limites C et r, et, par suite, de o à ω avec la nouvelle variable, en sorte que

$$s = \sqrt{a^2 - \frac{c^2 C^2}{a^2}} \int_0^{\omega} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \omega}\, d\omega.$$

On voit donc que la limite ω ayant la même valeur dans les deux intégrales précédentes,

La longueur d'une ligne géodésique sur l'ellipsoïde comptée à partir de son point de contact avec un parallèle (C), *est égale à la longueur d'un arc d'ellipse ayant même petit axe que l'ellipsoïde, et pour grand axe*

$$\sqrt{a^2 - \frac{c^2 C^2}{a^2}}.$$

Nous verrons tout à l'heure la relation qui lie les coordonnées des extrémités de ces arcs.

Si dans les intégrales nous prenons $\omega = \frac{\pi}{2}$ pour limite supérieure, nous en concluons que :

La longueur d'une ligne géodésique entre l'équateur et le parallèle auquel elle est tangente, est égale au quart de l'ellipse (a', b).

Elle n'est pas constante, puisque a' dépend de C.

Soit γ l'amplitude correspondant à

$$r = C, \quad \text{ou} \quad C = a \sin \gamma ;$$

on aura

$$a' = \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \gamma} = \sqrt{b^2 + c^2 \cos^2 \gamma},$$

valeur facile à construire.

Nous avons posé

$$a^2 - r^2 = (a^2 - C^2) \cos^2 \omega,$$

ou

$$r^2 = a^2 (1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \omega).$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Soient r' et ω les coordonnées de l'extrémité M, de l'arc d'ellipse égal à CM, $r' = a' \sin\omega$; égalant les valeurs de $\sin\omega$, il vient

$$\frac{a^2 - r^2}{a^2} = \frac{a'^2 - r'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{h'} = \cos\gamma = \text{constante, donc :}$$

Le rapport des distances au plan de l'équateur des extrémités de deux arcs égaux, l'un appartenant à l'ellipse (a', b), l'autre à la ligne géodésique, est constant.

L'équation $r \sin i = C$ montre que, pour $r = a$, c'est-à-dire pour le point de la ligne géodésique situé sur l'équateur,

$$\sin i = \frac{C}{a} = \sin\gamma, \quad \text{donc} \quad i = \gamma.$$

Ainsi, étant donné en un point de l'équateur la direction d'une ligne géodésique, on trouvera immédiatement le rayon du parallèle auquel elle est tangente.

La détermination du point de contact avec le parallèle n'est pas aussi facile; elle dépend, en effet, de la valeur de φ, savoir :

$$\varphi = \frac{a'}{a \sin\gamma} \int_0^{\omega} \frac{\sqrt{1 - K^2 \sin^2\omega}}{1 + n \sin^2\omega} \, d\omega.$$

Pour avoir la valeur de φ correspondante au point de rencontre de la ligne géodésique avec l'équateur, il faut intégrer, par rapport à r, de C à a, et, conséquemment, de o à $\frac{\pi}{2}$ par rapport à ω, d'où

$$\Phi = \frac{a'}{a \sin\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - K' \sin^2\omega}}{1 + n \sin^2\omega} < \frac{a'}{a \sin\gamma} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1 + n \sin^2\omega} = \frac{a'}{a} \frac{\pi}{2}.$$

quantité moindre que $\frac{\pi}{2}$; d'ailleurs, si on change ω en $\pi - \omega$, l'élément sous le signe $\int$ ne fait que changer de signe, les limites deviennent π et $\frac{\pi}{2}$, la ligne géodésique est donc symétrique par rapport au point où elle rencontre l'équateur; mais les points de contact avec (C) ne sont pas à 180° l'un de l'autre, et leur distance angulaire dépend de γ, en sorte qu'en général la ligne géodésique fera un nombre infini de spires, et les intersections de ces lignes formeront de petits losanges sur la surface.

Considérons maintenant le cas d'un ellipsoïde allongé. Il suffit, pour avoir la valeur de $d\varphi$ qui convient à cette hypothèse, de changer a en b

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et b en a en conservant la relation $a > b$; on a alors

$$d\varphi = \frac{C}{b}\sqrt{\frac{b^4+(a^2-b^2)r^2}{(r^2-C^2)(b^2-r^2)}}\frac{dr}{r}.$$

Posant

$$b^2 - r^2 = b^2\lambda^2\sin^2\omega$$

et prenant

$$\lambda^2 = b^2 - C^2,$$

on a

$$d\varphi = -\frac{aC}{b^2}\frac{\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}}{1+n'\sin^2\omega}d\omega, \quad K'^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2+C^2)}{a^2b^2}, \quad n' = \frac{b^2-C^2}{b^2};$$

par suite,

$$ds = -a\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega.$$

Or aux limites C et r relatives à r, correspondent $\frac{\pi}{2}$ et ω pour ω, en sorte que

$$s = -a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega;$$

mais $a\int_0^{\omega}\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega$ est l'arc compté à partir du sommet du petit axe d'une ellipse ayant pour demi-axes $a' = a$, $b' = \sqrt{b^2 - \frac{c^2C^2}{b^2}}$, si S désigne le quart de cette ellipse,

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega = S - a\int_0^{\omega}\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega,$$

d'où

$$s = S - a\int_0^{\omega}\sqrt{1-K'^2\sin^2\omega}\,d\omega.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et l'on voit que :

La longueur d'un arc géodésique entre l'équateur et son point de contact avec un parallèle est égale au quart de l'ellipse (a, b').

Soit γ l'amplitude correspondante à $r = C$, $C = b\cos\gamma$, $b = \sqrt{b^2 - c^2\cos\gamma}$, $r = b^2(1 - \sin^2\gamma\sin^2\omega)$; les coordonnées de l'extrémité de l'arc d'ellipse (a, b') égal à CM sont r' et ω, et on a

$$r' = b'\cos\omega \qquad \text{d'où} \qquad \frac{r^2}{b^2} = 1 - \sin^2\gamma\left(1 - \frac{r'^2}{b'^2}\right)$$

ou bien

$$\frac{b^2 - r^2}{b^2} = \frac{b'^2 - r'^2}{b'^2}\sin^2\gamma \qquad \text{ou} \qquad \frac{h}{h'} = \sin\gamma,$$

relation déjà énoncée dans le cas précédent et qui lie les coordonnées extrêmes d'un arc d'ellipse et d'un arc de ligne géodésique, comptés comme il a été dit.

L'équation $r\cos i = C$ donne, pour $r = b$, $\cos i = \frac{C}{b} = \cos\gamma$,

$$i = \gamma.$$

Aussi dans le cas de l'ellipsoïde allongé, on a des théorèmes analogues à ceux qu'on a trouvés pour l'ellipsoïde aplati.

Hyperboloïde de révolution. — Nous avons encore ici deux cas à distinguer, suivant que la surface est de révolution autour de son axe imaginaire ou autour de son axe réel.

Considérons d'abord le premier cas, celui de l'hyperboloïde à une nappe: l'équation du méridien est

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1,$$

en sorte que

$$d\varphi = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)r^2 - a^4}{(r^2 - a^2)(r^2 - C^2)}}.$$

Posons

$$r^2 - C^2 = (r^2 - a^2)\sin^2\omega,$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

et il vient

$$d\varphi = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)C^2-a^4}}{aC}\int_0^{\omega}\frac{\sqrt{1-K^2\sin^2\omega}}{1-n\sin^2\omega}\,d\omega,$$

en posant

$$n=\frac{a^2}{C^2},\quad K^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)C^2-a^4},$$

K et n sont tous deux <1, puisque $C>a$.

La même transformation donne

$$s=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)C^2-a^4}}{a}\int_0^{\omega}\frac{\sqrt{1-K^2\sin^2\omega}}{1-\sin^2\omega}\,d\omega.$$

La valeur de s en r nous montre que r est toujours $>C$; il suit de là que :

Une ligne géodésique tangente à un parallèle se dirige toujours du côté opposé au centre de la surface. C'est le contraire de ce qui arrive dans l'ellipse; il n'y a donc pas lieu de chercher le point où elle rencontre l'équateur.

Une ligne géodésique qui rencontre l'équateur ne peut donc être tangente à un parallèle de la surface; si elle est tangente à l'équateur, elle se confond avec lui. Car on voit que si $C=a$, $s=a\varphi$.

La transformation de la valeur de s en deux intégrales dont l'une est un arc d'hyperbole, et dont l'autre peut s'exprimer par deux arcs d'ellipse, n'étant pas de nature à donner les résultats simples trouvés pour l'ellipsoïde, il est inutile de s'y arrêter.

La propriété générale des lignes géodésiques nous donne aisément l'expression de l'angle sous lequel une ligne géodésique rencontre les génératrices de la surface. Ces deux lignes ont en effet pour équations

$$r\cos i = C,\quad r\cos i' = a\cos\alpha,$$

α étant l'angle de la génératrice avec le plan de l'équation

$$\cos(i-i') = \frac{aC\cos\alpha}{r^2}+\sqrt{1-\frac{C^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{a^2\cos^2\alpha}{r^2}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Pour $r = C$,

$$\cos(i - i) = \frac{a \cos \alpha}{C},$$

et quand $r = \infty$,

$$\cos(i - i) = 1, \quad i = i' = \frac{\pi}{2}.$$

Soit Φ l'angle décrit par le rayon vecteur entre ces deux limites, on a

$$\Phi = \frac{b}{KC} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \omega}\, d\omega}{1 - n \sin^2 \omega} < \frac{b}{KC} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{1 - n \sin^2 \omega} < \frac{b}{CK\sqrt{1-n}} \frac{\pi}{2};$$

d'où l'on voit que la valeur de Φ n'est pas nécessairement inférieure à $\frac{\pi}{2}$, et dépend de n ou du rapport $\frac{a^2}{C^2}$, et C croissant, Φ a pour limite $\frac{c}{a}\frac{\pi}{2}$, quantité supérieure à $\frac{\pi}{2}$; d'ailleurs, pour $C = a$,

$$K = 1 \quad \text{et} \quad n = 1,$$

d'où

$$\Phi = \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\cos \omega} = \infty.$$

Ainsi Φ, qui est évidemment une fonction constamment décroissante quand C prend des valeurs croissantes, diminue depuis l'infini jusqu'à $\frac{c}{a}\frac{\pi}{2}$ quand C croît de a à l'infini.

La ligne géodésique fait donc un nombre de spires d'autant plus grand, qu'elle est tangente à un parallèle plus voisin de l'équateur.

La limite de Φ, quand C croît indéfiniment, peut s'écrire

$$\frac{c}{a}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \sin \beta}$$

en appelant 2β l'angle du cône asymptote; or pour un cône d'angle 2β,

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

on a précisément pour valeur générale de φ,

$$\varphi = \frac{\arccos \frac{C}{r}}{\sin \beta}.$$

Si nous faisons

$$\varphi \sin \beta = \frac{\pi}{2},$$

nous aurons la valeur de φ pour laquelle la ligne géodésique fait un angle nul avec la génératrice du cône; cette valeur est donc la même que pour l'hyperboloïde, et en effet à la limite les deux surfaces se confondent.

Les expressions de s et φ dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes ne présentent pas une simplicité plus grande, quelque transformation qu'elles subissent.

Paraboloïde de révolution. — Les propriétés de la ligne géodésique sur l'ellipsoïde allongé s'appliquent évidemment au paraboloïde. La seule particularité remarquable consiste en ce que la valeur de l'arc s'exprime aisément au moyen de r, et l'on a

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{\frac{r^2 + p^2}{r^2 + C^2}}\, r dr,$$

en posant

$$r^2 = 2ph,$$

équation du méridien, d'où

$$s = \frac{1}{2p} \sqrt{r^2 + p^2}\, \sqrt{r^2 - C^2} + \frac{p^2 + C^2}{2p} \left| \frac{\sqrt{r^2 + p^2} + \sqrt{r^2 - C^2}}{\sqrt{p^2 + C^2}} \right|.$$

Si l'on pose

$$p^2 + C^2 = p'^2, \quad r^2 - C^2 = r'^2,$$

on a

$$s = \frac{1}{2\sqrt{p'^2 - C^2}} \left(r'^2 \sqrt{r'^2 + p'^2} + p'^2 \left| \frac{r' + \sqrt{r'^2 + p'^2}}{p'} \right| \right)$$

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC

Cette valeur de s comparée à celle de l'arc de la parabole

$$r'^2 = 2ph',$$

montre que

$$s = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 - C^2}} s',$$

propriété analogue à celle que l'on a trouvée dans le cas de l'ellipse.

En résumé :

Je crois avoir donné dans ce travail les propriétés générales les plus importantes de la ligne géodésique sur une surface quelconque, et les propriétés particulières les plus propres à faire connaître sa nature sur quelques surfaces choisies et principalement sur les surfaces du second degré, en me renfermant dans les limites que j'ai dû m'imposer.

Vu et approuvé,
Le 31 juillet 1857.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 31 juillet 1857,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

Document numérisé par la Bibliothèque Interuniversitaire Scientifique Jussieu - UPMC