THÈSES

POUR LE

DOCTORAT ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUE

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

EN 1840,

Par P.-H. Blanchet,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÉGE ROYAL DE HENRI IV.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, 12.

1840

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTE DES SCIENCES.

PROFESSEURS.

MM.
BIOT, *Doyen*.
THENARD.
LACROIX.
FRANCOEUR.
DE MIRBEL.
GEOFFROY SAINT-HILAIRE.
POUILLET.
PONCELET.
DE BLAINVILLE.
CONSTANT PRÉVOST.
DUMAS.
AUGUSTE SAINT-HILAIRE.
LIBRI.
DESPRETZ.
BEUDANT.

SUPPLEANTS.

MM.
STURM.
LEFÉBURE DE FOURCY.
I. GEOFFROY SAINT-HILAIRE.
ADRIEN DE JUSSIEU.
PÉLIGOT.
MASSON.
DUHAMEL.
LAURENT.
DELAFOSSE.
BRONGNIART.

SUR

LA PROPAGATION ET LA POLARISATION

DU MOUVEMENT

DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE INDÉFINI

CRISTALLISÉ D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE.

---

1. Pour déterminer le mouvement d'une molécule dans un milieu élastique indéfini cristallissé d'une manière quelconque, on a trois équations du deuxième ordre aux différences partielles et à coefficients constants; ces équations ont respectivement pour premiers membres les dérivées partielles du deuxième ordre des trois projections du déplacement de la molécule, prises par rapport au temps. Les seconds membres renferment, dans le cas le plus général, les diverses dérivées partielles du deuxième ordre des trois projections, prises par rapport aux coordonnées de cette même molécule. [Voyez le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Liouville, tome V, 1840, page 1 et suivantes (*)].

2. Les intégrales de ces équations sont données par les formules (28), page 7. On peut le vérifier, n^{os} **5** et **6**.

3. Les diverses parties des intégrales sont de la forme (36) et (37) ou (38). Par des transformations de coordonnées et par l'application

---

(*) Tous les renvois se rapporteront au premier mémoire inséré dans le tome V de ce journal.

de la formule de Fourier, l'intégrale (36) se ramène à la forme (50) (n° **7**).

4. Par un changement de variable fondé sur des considérations géométriques, on obtient la forme (60), puis la forme (62), et enfin le résultat final (67). La réduction de l'intégrale (37) ou plutôt (38) se fait de même.

5. Si l'on cherche les points de l'espace en mouvement après un certain temps, on a des intégrales de la forme (68). La partie la plus considérable de ces intégrales, quand le temps est suffisamment grand, est de la forme (69) ou (70). Si l'ébranlement initial est primitivement circonscrit dans une portion limitée de l'espace, il n'y aura de mouvement sensible après un temps suffisamment grand, que dans une portion de l'espace comprise entre deux surfaces limites dont les dimensions croîtront avec le temps. On aura ainsi une onde. La vitesse de propagation sera constante dans chaque direction et variera d'une direction à une autre (n° **10**). C'est ce qui résulte de la discussion du facteur qui dépend de l'état initial du système.

6. La discussion d'un autre facteur (n° **11**) démontre qu'après un temps assez grand les vitesses de vibration des molécules pendant la propagation restent parallèles entre elles et à une direction constante pour une même nappe, mais différentes d'une nappe à une autre; ce qui constitue une véritable polarisation du mouvement.

7. Ces résultats peuvent se compliquer quand il y a solution de continuité dans la différentielle d'une certaine fonction qui pourtant est elle-même continue (n° **12**).

8. Enfin la forme générale de l'onde est indiquée par une surface, dont l'équation en coordonnées rectilignes dépend d'une élimination entre des équations qu'il est facile d'obtenir.

9. Il résulte de là les trois conséquences générales suivantes:

1°. Dans un milieu élastique, homogène, indéfini, cristallisé d'une manière quelconque, le mouvement produit par un ébranlement central se propage par une onde plus ou moins compliquée dans sa forme;

2°. Pour chaque nappe de l'onde, la vitesse de propagation est constante dans une même direction, variable avec la direction suivant une loi qui dépend de la forme de l'onde;

3°. Pour une même direction, les vitesses de vibration sont constamment parallèles entre elles dans une même nappe de l'onde pendant la durée des mouvements, et parallèles à des droites différentes pour les différentes nappes, en sorte qu'il y a polarisation du mouvement.

Vu et approuvé,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ.

J.-B. BIOT.

Permis d'imprimer,

L'INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES,

chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.

SUR

L'APPLICATION DE LA VARIATION DES CONSTANTES

A LA

RECHERCHE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES PERTURBATIONS PLANÉTAIRES (*)

---

§ Ier.

1. Soient S et T deux fonctions quelconques de n variables $x, y, z, \ldots$ et de n autres variables $u, v, w, \ldots$ que nous regarderons comme correspondantes aux premieres chacune à chacune; soit posée l'équation de définition

$$(1) \qquad (S, T) = \frac{dS}{dx}\frac{dT}{du} - \frac{dS}{du}\frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dy}\frac{dT}{dv} - \frac{dS}{dv}\frac{dT}{dy} \ldots,$$

la fonction alternée (S, T) jouira de plusieurs propriétés, parmi

---

(*) Le fond est emprunté aux travaux de M. Cauchy, la forme est changée; j'ai entrepris de rattacher tout à l'application d'une formule unique et de donner plus d'uniformité au calcul pour en simplifier l'exécution. (*Voyez* un Mémoire de M. Cauchy, présenté à Turin, le 11 octobre 1831, et les numéros 9, 10, 12 des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, t. XI, 2me semestre 1840.)

lesquelles on vérifiera facilement les suivantes :

$$(2) \qquad (S, S) = 0,$$

$$(3) \qquad (T, S) = -(S, T).$$

Si S et T sont fonctions de quantités l, $m, \ldots$, égales elles-mêmes à des fonctions L, M,... des variables $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$, on aura encore

$$(4) \qquad (S, T) = (S, M)\frac{dS}{dl} + (S, M)\frac{dS}{dm} + \ldots,$$

ou bien

$$(5) \qquad (S, T) = (S, L)\frac{dS}{dL} + \ldots,$$

si l'on regarde S, T comme étant directement fonctions des quantités L, M,..., fonctions elles-mêmes de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$

On aura en outre

$$(6) \qquad (S, T) = 0$$

toutes les fois que T ou S ne contiendra pas au moins une variable correspondante à l'une de celles qui entrent dans S ou T.

2. Soient maintenant entre les variables $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$, et $2n$ autres quantités $a, b, c, \ldots$, $2n$ équations de la forme

$$(7) \qquad A = a, \quad B = b, \quad C = c, \ldots,$$

dans lesquelles A, B, C sont des fonctions quelconques de $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$

En vertu des équations précédentes, $x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots$ seront des fonctions déterminées de $a, b, c, \ldots$

$$(8) \qquad \begin{cases} x = F_1(a, b, c\ldots), & y = F_2(a, b, c\ldots), \ldots, \\ u = f_1(a, b, c\ldots), & v = f_2(a, b, c\ldots), \ldots \end{cases}$$

Si l'on substitue les valeurs (8) dans la première des équations (7), cette équation deviendra identique. Si donc on la différentie par rapport à $a, b, \ldots$, en y regardant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, comme des fonctions de $a, b, c, \ldots$ déterminées par les équations (8), on aura

$$(9)\quad\begin{cases}\dfrac{dA}{dx}\dfrac{dx}{da}+\dfrac{dA}{du}\dfrac{du}{da}+\dfrac{dA}{dy}\dfrac{dy}{da}+\dfrac{dA}{dv}\dfrac{dv}{da}+\ldots=1,\\ \dfrac{dA}{dx}\dfrac{dx}{db}+\dfrac{dA}{du}\dfrac{du}{db}+\dfrac{dA}{dy}\dfrac{dy}{db}+\dfrac{dA}{dv}\dfrac{dv}{db}+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

Mais on a évidemment

$$(10)\qquad \frac{dA}{dx}=(A,u),\quad \frac{dA}{du}=-(A,x),\ldots$$

Si l'on développe les seconds membres de ces équations par la formule (5), en regardant x, u,... comme fonctions de a, b, c,..., et en ayant égard aux équations (7), et si l'on substitue, on trouvera facilement

$$(11)\quad\begin{cases}(A,A)[a,a]+(A,B)[a,b]+(A,C)[a,c]+\ldots=1,\\ (A,A)[b,a]+(A,B)[b,b]+(A,C)[b,c]+\ldots=0,\\ (A,A)[c,a]+(A,B)[c,b]+(A,C)[c,c]+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

On a désigné, pour abréger, par les symboles $[a, b]$, $[a, c]$,..., les expressions de la forme

$$(12)\qquad [a,b]=\frac{dx}{da}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dv}{db}-\frac{dy}{db}\frac{dv}{da}+\ldots$$

Ces équations détermineront, en général, les fonctions alternées (A, B), (A, C),... au moyen des fonctions alternées $[a, b]$, $[a, c]$,...

On trouvera de même des équations pour déterminer (B, A), (B, C),..., (C, A),...

3. Supposons que les quantités a, b, c,... soient des constantes arbitraires, et que les équations (6) soient les intégrales générales des équations différentielles

$$(13)\quad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dQ}{du},\quad \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dQ}{dv},\quad \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dQ}{dw},\ldots,\\ \dfrac{du}{dt}=-\dfrac{dQ}{dx},\quad \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{dQ}{dy},\quad \dfrac{dw}{dt}=-\dfrac{dQ}{dz},\ldots,\end{cases}$$

dans lesquelles t est la variable indépendante, et Q une fonction quelconque des variables x, y, z,..., u, v, w,... et t. Il est aisé de démontrer que les symboles (12) représentent des quantités constantes; en effet, en vertu des équations (8), Q est une fonction de $a, b, c, \ldots, t$; si l'on différentie Q par rapport à a en ayant égard aux équations (13), on aura

$$(14) \qquad \frac{dQ}{da} = -\frac{du}{dt}\frac{dx}{da} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{da} - \frac{dv}{dt}\frac{dy}{da} + \frac{dy}{dt}\frac{dv}{da} \ldots;$$

on aura de même

$$(15) \qquad \frac{dQ}{db} = -\frac{du}{dt}\frac{dx}{db} + \frac{dx}{dt}\frac{du}{db} - \frac{dv}{dt}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{dt}\frac{dv}{db} \ldots$$

Si l'on différentie l'équation (14) par rapport à b, et l'équation (15) par rapport à a, puis qu'on retranche la seconde de la première, on aura précisément

$$\frac{d.}{dt}[a,\ b] = 0,$$

donc

$$[a,\ b] = \text{const.}$$

Il en sera de même de $[a, c]$, $[b, c]$,... ; donc aussi dans ce cas, en vertu des équations (11), les expressions (A, B), (A, C),..., (B, C),... seront des fonctions de $a, b, c, \ldots$

4. Supposons maintenant que les équations (13) soient remplacées par des équations de la forme

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dQ}{du} + \frac{dR}{du}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dQ}{dv} + \frac{dR}{dv}, \ldots, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dx}, & \frac{dv}{dt} &= -\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dy}, \ldots \end{aligned} \right.$$

On pourra étendre à ces équations les intégrales (7), en y regardant les constantes comme des variables fonctions de t. En effet, si l'on différentie la première des équations (7) dans cette hypothèse, on trouve, en ayant égard aux équations (16),

$$\frac{da}{dt} = (A, Q + R) + \frac{dA}{dt};$$

mais, en vertu des équations (7) et (13), on a identiquement

$$(A, Q) + \frac{dA}{dt} = 0,$$

donc

$$\frac{da}{dt} = (A, R).$$

Mais si l'on exprime R en fonction de a, b, c,..., t, en vertu des équations (8), et qu'on mette ensuite A, B, C au lieu de a, b, c, ..., R reprendra sa valeur; donc

$$(A, R) = (A, B)\frac{dR}{db} + (A, C)\frac{dR}{dc} + \ldots,$$

et par suite

$$\frac{da}{dt} = (A, B)\frac{dR}{db} + (A, C)\frac{dR}{dc} + \ldots$$

On peut même remplacer A, B, C par a, b, c dans les parenthèses, pourvu qu'on regarde ces quantités comme des fonctions de x, y, z, ..., u, v, w, ..., déterminées par les intégrales générales des équations (13) résolues par rapport aux constantes arbitraires, et l'on aura

$$(17) \qquad \frac{da}{dt} = (a, b)\frac{dR}{db} + (a, c)\frac{dR}{dc} + \ldots;$$

de même

$$\frac{db}{dt} = (b, a)\frac{dR}{da} + (b, c)\frac{dR}{dc}\ldots,$$

etc.

Les coefficients des dérivées de R auront la propriété remarquable d'être des fonctions des seules quantités a, b, c, ...

Pour déterminer les nouvelles valeurs de ces quantités en fonction de t, on aura à intégrer un système d'équations du premier ordre.

§ II.

5. On sait que les équations différentielles du mouvement d'une planète autour du Soleil, regardé comme fixe, peuvent se ramener à la forme

$$(17)\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=u, \quad \frac{dy}{dt}=v, \quad \frac{dz}{dt}=w,\\ &\frac{du}{dt}=-\frac{\mathfrak{M}x}{r^3}-\frac{dR}{dx}, \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{\mathfrak{M}y}{r^3}-\frac{dR}{dy}, \quad \frac{dw}{dt}=-\frac{\mathfrak{M}z}{r^3}-\frac{dR}{dz}.\end{aligned}\right.$$

On a $\mathfrak{M}=M+m$,

$$(19)\qquad R=\frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^2}+\ldots-\frac{m'}{\imath}-\ \ldots$$

M est la masse du Soleil;
$m, m', m'', \ldots$ celles des planètes;
$r, r', r'', \ldots\ldots$ les distances des planètes au centre du Soleil;
$\imath, \ldots\ldots\ldots$ les distances de la planète m à toutes les autres;
$x, y, z;\ x', y', z', \ldots$ les coordonnées rectangulaires des planètes rapportées au centre du Soleil pour origine.

6. On peut facilement mettre ces équations sous la forme (16). Il suffit de conserver R tel qu'il est, et de prendre

$$(20)\qquad Q=-\frac{\mathfrak{M}}{r}+\tfrac{1}{2}\omega^2,$$

en posant

$$(21)\qquad \omega^2=u^2+v^2+w^2.$$

6. Pour intégrer les équations (18) on néglige d'abord R; elles prennent la forme (13). Nous supposerons, pour plus de généralité, que l'attraction soit une fonction quelconque $\mathrm{f}(r)$ de la distance r, et nous poserons, pour la commodité des calculs,

$$(22)\qquad \mathrm{f}(r)=\frac{d\,.\,f(r)}{dr}.$$

Le principe des forces vives donnera

$$(23)\qquad \omega^2 = 2\mathrm{H} + 2f(r);$$

le principe des aires donnera

$$(24)\qquad yw - zv = \mathrm{U}, \quad zu - xw = \mathrm{V}, \quad xv - yu = \mathrm{W};$$

U, V, W sont trois constantes.

On tire de là

$$(25)\qquad \mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z = 0.$$

Ainsi la courbe décrite est dans un plan passant par le centre du Soleil. Soit

$$(26)\qquad \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2 = \mathrm{K}^2;$$

La perpendiculaire à ce plan fait avec les axes coordonnés des angles dont les cosinus sont

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{K}}, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}}, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}.$$

La trace de ce plan sur le plan des x, y a pour équation

$$\mathrm{U}x + \mathrm{V}y = 0;$$

elle fait avec l'axe des x un angle φ défini par la condition

$$(27)\qquad \tang\varphi = -\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}},$$

et le plan lui-même fait avec le plan des x, y un angle ι donné par l'équation

$$\mathrm{W} = \mathrm{K}\cos\iota.$$

Le plan de la courbe peut donc être déterminé par les trois constantes

$$\mathrm{K}, \quad \mathrm{W}, \quad \varphi.$$

Cela posé, concevons qu'on prenne des coordonnées polaires dans le plan de la courbe; soit p l'angle du rayon vecteur r avec la trace de ce plan sur le plan des x, y, on trouvera facilement

$$(28)\qquad z = r\sin p \,.\, \sqrt{1 - \frac{\mathrm{W}^2}{\mathrm{K}^2}},$$

ou

$$\text{(29)} \qquad \mathrm{K}z = r \sin p \sqrt{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2}\,;$$

$$\text{(30)} \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi = r \cos p,$$

ou

$$\text{(31)} \qquad \frac{\mathrm{U}y - \mathrm{V}x}{\sqrt{\mathrm{U} + \mathrm{V}^2}} = r \cos p\,,$$

Les radicaux devront être pris avec le signe $+$. On peut s'en assurer rapidement par des considérations géométriques.

Le principe des aires deviendra

$$\text{(32)} \qquad r^2 dp = \mathrm{K} dt;$$

et comme on a

$$\omega^2 = \frac{r^2 dp^2}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2},$$

la combinaison des équations (23) et (32) donnera

$$\text{(33)} \qquad \frac{dt}{dr} = \frac{1}{v},$$

en posant, pour abréger,

$$\text{(34)} \qquad v^2 = 2\mathrm{H} - \frac{\mathrm{K}^2}{r^2} + 2f(r);$$

on aura aussi

$$\text{(35)} \qquad \frac{dp}{dr} = \frac{\mathrm{K}}{r^2 v},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\text{(36)} \qquad t - \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{v}\, dr,$$

$$\text{(37)} \qquad p - \varpi = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{K}}{r^2 v}\, dr,$$

τ, ϖ, r_0 étant des valeurs correspondantes de t, p, r. On peut regarder, si l'on veut, r_0 comme donné et τ, ϖ comme deux constantes arbitraires. Remarquons que l'équation (33) donne

$$\text{(38)} \qquad v = \frac{dr}{dt} = \frac{x dx + y dy + z dz}{r . dt} = \frac{ux + vy + wz}{r}.$$

Si l'on désigne par δ l'angle de la vitesse ω avec le rayon vecteur r, on aura

$$(39) \qquad v = \omega \cos\delta.$$

7. Il résulte de l'analyse précédente, que les quantités

$$\mathrm{H}, \ \mathrm{K}, \ \mathrm{W}, \ \tau, \ \varpi, \ \varphi,$$

peuvent être regardées comme les six constantes arbitraires des intégrales générales des équations (17) et (18), dans lesquelles on aurait négligé R. Pour tenir compte de cette quantité, qui est la fonction perturbatrice, il suffit d'appliquer la méthode de la variation des constantes arbitraires exposées dans le premier paragraphe. Il faudra donc calculer les quinze coefficients différents que l'on peut avoir en substituant ces constantes dans la formule (1).

Pour faire ces calculs, nous regarderons
H comme fonction de ω et r, d'après la formule (23);
τ comme fonction de H, K, r, d'après les formules (34) et (36);
ϖ comme fonction de H, K, r, p, d'après les formules (37) et (34);
d'ailleurs r est fonction de x, y, z, en vertu de l'équation

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

ω est fonction de u, v, w, d'après l'équation (21);
p est fonction de z, r, W, K, d'après l'équation (28);
K est fonction de U, V, W, d'après l'équation (26);
φ est fonction de U, V, d'après l'équation (27);
U, V, W sont fonctions de x, y, z, u, v, w, d'après les équations (24).

8. Pour calculer (K, W), on appliquera la formule (5); on aura

$$(\mathrm{K}, \mathrm{W}) = (\mathrm{U}, \mathrm{W})\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{K}} + (\mathrm{V}, \mathrm{W})\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}} + (\mathrm{W}, \mathrm{W})\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}},$$

$$(40) \qquad (\mathrm{V}, \mathrm{W}) = (\mathrm{V}, x)v + (\mathrm{V}, v)x - (\mathrm{V}, y)u - (\mathrm{V}, u)y = \mathrm{U},$$

car

$$(41) \qquad (\mathrm{V}, v) = 0, \quad (\mathrm{V}, y) = 0, \quad (\mathrm{V}, x) = -z, \quad (\mathrm{V}, u) = -w;$$

donc

$$(42) \qquad (\mathrm{K}, \mathrm{W}) = 0.$$

On aura aussi, par analogie,

(43) $$(K, U) = o, \quad (K, V) = o,$$

(44) $$(U, V) = W, \quad (W, U) = V,$$

(45) $(U, x) = o$, $(U, y) = z$, $(U, z) = -y$, $(U, u) = o$, $(U, v) = w$, etc.

9.

$$(K, \varphi) = (K, U)\frac{d\varphi}{dU} + (K, V)\frac{d\varphi}{dV};$$

à cause des formules (43)

(46) $$(K, \varphi) = o.$$

10.

$$(\varphi, W) = (U, W)\frac{d\varphi}{dU} + (V, W)\frac{d\varphi}{dW};$$

(47) $$\frac{d\varphi}{dV} = -\frac{\cos^2\varphi}{V}, \quad \frac{d\varphi}{dV} = \frac{U\cos^2\varphi}{V^2};$$

à cause des équations (44) et (40),

$$(U, W) = -V, \quad (V, W) = U;$$

(48) $$(\varphi, W) = 1.$$

11.

$$(H, K) = (\omega, K)\omega + (r, K)\frac{dH}{dr};$$

$$(\omega, K) = (\omega, U)\frac{U}{K} + (\omega, V)\frac{V}{K} + (\omega, W)\frac{W}{K};$$

$$(\omega, U) = (u, U)\frac{u}{\omega} + (v, U)\frac{v}{\omega} + (w, U)\frac{w}{\omega} = o,$$

car

$$(u, U) = o, \quad (v, U) = w, \quad (w, U) = -v;$$

donc, à cause des analogies,

(49) $$(\omega, U) = o, \quad (\omega, V) = o, \quad (\omega, W) = o, \quad (\omega, K) = o,$$

et aussi

(50) $$(r, U) = o, \quad (r, V) = o, \quad (r, W) = o, \quad (r, K) = o,$$

sans nouveaux calculs, par suite

(51) $$(H, K) = o.$$

12.

$$(\mathrm{H}, \mathrm{W}) = (\omega, \mathrm{W})\,\varpi + (r, \mathrm{W})\,\frac{d\mathrm{H}}{dr};$$

et, en vertu des équations (49) et (50),

$$(\mathrm{H}, \mathrm{W}) = 0. \tag{52}$$

Par analogie

$$(\mathrm{H}, \mathrm{U}) = 0, \qquad (\mathrm{H}, \mathrm{V}) = 0. \tag{53}$$

13.

$$(\mathrm{H}, \varphi) = (\mathrm{H}, \mathrm{U})\,\frac{d\varphi}{d\mathrm{U}} + (\mathrm{H}, \mathrm{V})\,\frac{d\varphi}{d\mathrm{V}};$$

à cause des équations (53),

$$(\mathrm{H}, \varphi) = 0. \tag{54}$$

14.

$$(\tau, \mathrm{K}) = (\mathrm{H}, \mathrm{K})\,\frac{d\tau}{d\mathrm{H}} + (r, \mathrm{K})\,\frac{d\tau}{d\mathrm{K}};$$

à cause des équations (51) et (50),

$$(\tau, \mathrm{K}) = 0. \tag{55}$$

15.

$$(\tau, \mathrm{W}) = (\mathrm{H}, \mathrm{W})\,\frac{d\tau}{d\mathrm{H}} + (\mathrm{K}, \mathrm{W})\,\frac{d\tau}{d\mathrm{K}} + (r, \mathrm{W})\,\frac{d\tau}{dr};$$

par les équations (52), (42), (50),

$$(\tau, \mathrm{W}) = 0. \tag{56}$$

16.

$$(\tau, \varphi) = (\mathrm{H}, \varphi)\,\frac{d\tau}{d\mathrm{H}} + (\mathrm{K}, \varphi)\,\frac{d\tau}{d\varphi} + (r, \varphi)\,\frac{d\tau}{dr};$$

$$(r, \varphi) = (r, \mathrm{U})\,\frac{d\varphi}{d\mathrm{U}} + (r, \mathrm{V})\,\frac{d\varphi}{d\mathrm{V}} = 0,$$

et, en vertu des formules précédentes,

$$(\tau, \varphi) = 0. \tag{57}$$

17.

$$(\varpi, \mathrm{W}) = (\mathrm{H}, \mathrm{W})\,\frac{d\varpi}{d\mathrm{H}} + (\mathrm{K}, \mathrm{W})\,\frac{d\varpi}{d\mathrm{K}} + (r, \mathrm{W})\,\frac{d\varpi}{dr} + (p, \mathrm{W})\,\frac{d\varpi}{dp};$$

les trois premiers termes du second membre sont nuls,

$$(p, \mathrm{W}) = (z, \mathrm{W}) \frac{dp}{dz} + (r, \mathrm{W}) \frac{dp}{dr} + (\mathrm{K}, \mathrm{W}) \frac{dp}{d\mathrm{K}},$$

tout est nul;

(58) $$(\varpi, \mathrm{W}) = 0.$$

18.

$$(\varpi, \mathrm{K}) = (p, \mathrm{K}),$$

on n'a pas écrit les termes nuls;

$$(p, \mathrm{K}) = (z, \mathrm{K}) \frac{dp}{dz} + (r, \mathrm{K}) \frac{dp}{dr} + (\mathrm{W}, \mathrm{K}) \frac{dp}{d\mathrm{K}},$$

(59) $$(z, \mathrm{K}) = (z, \mathrm{U}) \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{K}} + (z, \mathrm{V}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}} + (z, \mathrm{W}) \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}} = -\frac{\mathrm{U}y - \mathrm{V}x}{\mathrm{K}};$$

on tire de l'équation (28),

(60) $$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{U}y - \mathrm{V}x},$$

en faisant usage des formules (28) et (31) et en observant que la formule (26) donne

$$\sqrt{1 - \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^2}} = \frac{\sqrt{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2}}{\mathrm{K}};$$

donc

(61) $$(\varpi, \mathrm{K}) = 1.$$

19.

$$(\varpi, \varphi) = (p, \varphi) + (r, \varphi) \frac{d\varpi}{dr} + (\mathrm{K}, \varphi) \frac{d\varpi}{d\mathrm{K}} + (\mathrm{H}, \varphi) \frac{d\varpi}{d\mathrm{H}};$$

$$(p, \varphi) = (z, \varphi) \frac{dp}{dz} + (\mathrm{W}, \varphi) \frac{dp}{d\mathrm{W}};$$

$$(z, \varphi) = (z, \mathrm{U}) \frac{d\varphi}{d\mathrm{U}} + (z, \mathrm{V}) \frac{d\varphi}{d\mathrm{V}} = -\frac{\mathrm{K}(\mathrm{U}x + \mathrm{V}y)}{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2};$$

(62) $$\frac{dp}{d\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{KW}z}{(\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2)(\mathrm{U}y - \mathrm{V}x)} \text{ (équation 28)};$$

$$(\varpi, \varphi) = -\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2} \cdot \frac{\mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z}{\mathrm{U}y - \mathrm{V}x};$$

donc, à cause de l'équation (25),

(63) $$(\varpi, \varphi) = 0.$$

20.

$$(\mathrm{H},\ \tau) = (\mathrm{H},\ r)\frac{d\tau}{dr};$$

on néglige toujours les termes nuls,

$$(\mathrm{H},\ r) = (\omega,\ r)\,\omega,$$

(64) $$(\omega,\ r) = -\frac{ux+vy+wz}{\omega r} = -\cos\delta,$$

donc

(65) $$(\mathrm{H},\ r) = -\omega\cos\delta = -v;$$

mais

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{v},$$

en vertu de l'équation (36); donc

(66) $$(\mathrm{H},\ \tau) = 1$$

21.

$$(\mathrm{H},\ \varpi) = (\mathrm{H},\ p) + (\mathrm{H},\ r)\frac{d\varpi}{dr},$$

$$(\mathrm{H},\ p) = (\omega,\ p)\,\omega + (r,\ p)\frac{d\mathrm{H}}{dr},$$

(67) $$(r,\ p) = (r,\ z)\frac{dp}{dz} + \ldots = 0,$$

parce que $(r,\ z)$, $(r,\ r)$, $(r,\ \mathrm{W})$, $(r,\ \mathrm{K})$ sont nuls;

$$(\omega,\ p) = (\omega,\ z)\frac{dp}{dz} + (\omega,\ r)\frac{dp}{dr};$$

$$(\omega,\ z) = -\frac{\mathrm{W}}{\omega};$$

on tire de l'équation (28), eu égard à l'équation (19),

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\mathrm{K}z}{\mathrm{U}y - \mathrm{V}x};$$

à l'aide de l'équation (64),

$$(\omega,\ p) = +\frac{\mathrm{K}}{\omega r^2}\left[\frac{(ux+vy+wz)\,z - r^2 w}{\mathrm{U}y - \mathrm{V}x}\right];$$

en réduisant, on a

(68) $$(\omega, p) = -\frac{K}{\omega r^2},$$

donc

(69) $$(H, p) = -\frac{K}{r^2}.$$

Comme l'équation (37) donne

(70) $$\frac{d\varpi}{dr} = -\frac{K}{r^2 v};$$

à cause de l'équation (65), on aura

$$(H, r)\frac{d\varpi}{dr} = \frac{K}{r^2};$$

donc

(71) $$(H, \varpi) = 0.$$

22.

$$(\tau, \varpi) = (r, \varpi)\frac{d\tau}{dr} + (K, \varpi)\frac{d\tau}{dK},$$

$$(r, \varpi) = (r, p)\frac{d\varpi}{dp} + (r, K)\frac{d\varpi}{dK};$$

donc, en vertu des équations précédentes,

(72) $$(\tau, \varpi) = v\frac{d\varpi}{dH} - \frac{d\tau}{dK} = -\frac{d\varpi}{dH} - \frac{d\tau}{dK};$$

mais

(73) $$-\frac{d\tau}{dK} = \int_{r_0}^{r} \frac{d.}{dK}\frac{1}{v}dr,$$

(74) $$-\frac{d\varpi}{dH} = \int_{r_0}^{r} \frac{d.}{dH}\frac{K}{r^2}\frac{1}{v}dr;$$

or, à cause de l'équation (34),

$$v\frac{dv}{dH} = 1, \quad v\frac{dv}{dK} = -\frac{K}{r^2};$$

donc

(75) $$\frac{dv}{dK} = -\frac{K}{r^2}\frac{dv}{dr};$$

donc

(76) $$(\tau, \varpi) = 0.$$

23. On arriverait aux mêmes valeurs lors même que r_0, au lieu d'être un nombre serait une valeur de r correspondante à une valeur donnée de v, par exemple à $v = 0$. Car alors r_0 serait fonction de H, K, en vertu de l'équation (34), ce qui ne changerait rien dans les numéros **8**, **9**,..., **21**.

Le résultat du numéro **22** subsisterait aussi; car dans les formules (73) et (74) on aurait, à la vérité, un terme de plus,

$$\frac{1}{v_0}\frac{dr_0}{dK} \quad \text{et} \quad \frac{K}{r_0^2 v_0}\frac{dr_0}{dH}, \tag{77}$$

mais, de la formule (34), qui deviendrait

$$v_0^2 = 2H - \frac{K^2}{r_0^2} + 2f(r_0), \tag{78}$$

on tirerait

$$\frac{dr_0}{dK} = -\frac{K}{r_0^2}\frac{dr_0}{dH};$$

ce qui suffit pour assurer la conclusion.

24. A l'aide des valeurs calculées, on tirera de la formule (18)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dH}{dt} = \frac{dR}{d\tau}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{dR}{dK}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dR}{dW}, \\ &\frac{d\tau}{dt} = -\frac{dR}{dH}, \quad \frac{dK}{dt} = -\frac{dR}{d\varpi}, \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{dR}{d\varphi}. \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Telles sont les équations différentielles des perturbations dues à la fonction R négligée d'abord.

25. Dans le cas particulier de l'attraction en raison inverse du carré de la distance, le mouvement, abstraction faite de la fonction perturbatrice, a lieu suivant une ellipse dont le centre du Soleil est un foyer, et $f(r) = \frac{\mathfrak{M}}{r}$.

Pour $v = 0$, on trouve

$$r_0^2 + \frac{\mathfrak{M}}{H} r_0 - \frac{K^2}{2H} = 0. \tag{80}$$

Les deux valeurs de r_0 sont

$$a(1 - \varepsilon), \quad a(1 + \varepsilon),$$

si a est le demi grand axe et ε l'excentricité. Alors

$$(81)\qquad -\frac{\mathfrak{M}}{H} = 2a, \quad -\frac{K}{2H} = a^2(1-\varepsilon^2),$$

$$(82)\qquad H = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{M}}{a}, \quad K^2 = \mathfrak{M}\, a(1-\varepsilon^2).$$

Si l'on pose

$$(83)\qquad \left(\frac{\mathfrak{M}}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}} = c,$$

c représentera le moyen mouvement, et l'on trouvera

$$(84)\qquad H = -\tfrac{1}{2}a^2c^2, \quad K = a^2c(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait $r = a$, on a

$$(85)\qquad \tfrac{1}{2}\omega^2 = H + \frac{\mathfrak{M}}{a} = -H.$$

Soit cette quantité $-H = \Omega$; on pourra facilement la mettre à la place de H dans les formules (79). Cette quantité Ω est positive. A l'aide des quantités

$$(86)\qquad \Omega,\ K,\ W,\ \tau,\ \varpi,\ \varphi,$$

on calculera facilement les valeurs de

$$(87)\qquad a,\ \varepsilon,\ \iota,\ \tau,\ \varpi,\ \varphi.$$

Toute la question est ramenée au développement de la fonction perturbatrice R.

Vu et approuvé,

Le Doyen de la Faculté,

J.-B. BIOT.

Permis d'imprimer,

l'Inspecteur général des Études,

chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.