N° D'ORDRE
211.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. ÉDOUARD COMBESCURE.

1re THÈSE D'ANALYSE.—Sur la théorie analytique des formes homogènes.

2e THÈSE DE MÉCANIQUE. — Sur divers problèmes particuliers relatifs au mouvement.

Soutenues le 7 Juin 1858 devant la Commission d'Examen.

MM. LEFÉBURE DE FOURCY, *Président*.
DELAUNAY, } *Examinateurs*.
LIOUVILLE, }

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1858.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	BIOT. PONCELET.	
PROFESSEURS	DUMAS	Chimie.
	DESPRETZ	Physique.
	DELAFOSSE	Minéralogie.
	BALARD	Chimie.
	LEFÉBURE DE FOURCY	Calcul différentiel et intégral.
	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie physique.
	DUHAMEL	Algèbre supérieure.
	GEOFFROY-SAINT-HILAIRE	Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
	LAMÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	DELAUNAY	Mécanique physique.
	PAYER	Botanique.
	C. BERNARD	Physiologie générale.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
AGRÉGÉS	BERTRAND J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	MASSON PELIGOT	Sciences physiques.
	DUCHARTRE	Sciences naturelles.
SECRÉTAIRE	E. PREZ-REYNIER.	

THÈSE D'ANALYSE.

SUR LA THÉORIE ANALYTIQUE DES FORMES HOMOGÈNES.

Les recherches suivantes, terminées depuis déjà longtemps, ont été entreprises à la suite de la réception de trois remarquables Mémoires (*) que M. Cayley a bien voulu me communiquer, et qui représentaient pour moi le dernier mot des faits acquis sur la théorie des formes. J'ai essayé d'étendre et de généraliser quelques résultats de l'auteur, et je crois en avoir établi de nouveaux. Si, par cas, je m'étais rencontré en certains points avec quelques analystes dont les écrits auraient paru dans l'intervalle, je prie les auteurs que j'aurais omis de citer, de vouloir bien mettre cette omission sur le compte de mon isolement actuel relativement aux publications qui ont trait à la présente théorie.

Indépendamment des trois Mémoires que je viens de mentionner, je renverrai le lecteur aux éminents travaux que MM. Sylvester et Hermite ont publiés antérieurement dans le journal de *Cambridge* et *Dublin* (**), et dans celui de M. Crelle (***). Je mentionnerai enfin un Mémoire inséré au tome XX du *Journal* de M. Liouville, par la raison que l'analyse que je vais développer coïncide en divers points avec celle dont j'ai fait usage dans le Mémoire dont il s'agit.

I.

De la constitution et du calcul des covariants d'une forme homogène à un nombre quelconque d'indéterminées.

1. Soit f une fonction homogène, d'ordre n, des variables x, y, z que je supposerai au nombre de trois, pour fixer les idées, ce qui ne nuira en rien

(*) *Voir*, dans les *Transactions philosophiques* (1854, 1855, 1856), les Mémoires ayant pour titres : *Memoirs upon quantics; — Researches on the partition of numbers.*

(**) Années 1852 et 1854.

(***) Tome LII.

à la généralité des formules que leur symétrie permettra de modifier tout de suite pour le cas d'un nombre quelconque de variables. Je représenterai, suivant l'usage, cette forme par

$$f = \sum \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} a_{\lambda,\mu,\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu,$$

où $\lambda + \mu + \nu = n$ et où $\lambda!$ désigne le produit continuel $1, 2, 3, \ldots, \lambda$.

Soit une autre forme d'ordre m,

$$F = \sum \frac{m!}{p!\,q!\,r!} A_{p,q,r}\, x^p y^q z^r,$$

dont les coefficients $A_{p,q,r}$ sont considérés comme des fonctions des $a_{\lambda,\mu,\nu}$, déterminées par les conditions suivantes, savoir : Que si l'on fait subir aux variables x, y, z, une substitution unimodulaire quelconque, ce qui change les $a_{\lambda,\mu,\nu}$ en $a'_{\lambda,\mu,\nu}$, et les $A_{p,q,r}$ en $A'_{p,q,r}$, $A'_{p,q,r}$ ne soit autre chose que ce que deviendrait la fonction $A_{p,q,r}$, si l'on substituait directement dans son expression les $a'_{\lambda,\mu,\nu}$ au lieu des $a_{\lambda,\mu,\nu}$. Les formes F qui jouissent de cette propriété ont été appelées, par M. Sylvester, des *covariants* de f. Lorsque F est de l'ordre *zéro*, elle prend le nom d'*invariant* à cause de la propriété qu'elle acquiert de rester identique à elle-même quand on la compose avec les coefficients de f ou avec ceux de la transformée f'.

Pour traduire analytiquement ces conditions, je prendrai, comme je l'ai fait à propos des *invariants*, la substitution unimodulaire, et en quelque sorte élémentaire

$$x = x, \quad y = y + \varepsilon x, \quad z = z,$$

qui donnera

$$a'_{\lambda,\mu,\nu} = a_{\lambda,\mu,\nu} + \lambda\varepsilon a_{\lambda-1,\mu+1,\nu} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\varepsilon^2 a_{\lambda-2,\mu+2,\nu} + \ldots + \varepsilon^\lambda a_{0,\lambda+\mu,\nu},$$

$$A'_{p,q,r} = A_{p,q,r} + p\varepsilon A_{p-1,q+1,r} + \ldots \qquad + \varepsilon^p A_{0,p+q,r},$$

d'où

$$\frac{da'_{\lambda,\mu,\nu}}{d\varepsilon} = \lambda a'_{\lambda-1,\mu+1,\nu}, \qquad \frac{dA'_{p,q,r}}{d\varepsilon} = p A'_{p-1,q+1,r}.$$

Donc en considérant $A_{p,q,r}$ comme dépendant immédiatement des $a'_{\lambda,\mu,\nu}$, on aura

$$\frac{d\,\mathrm{A}'_{p,\,q,\,r}}{d\varepsilon} = \sum\nolimits_{a'} \frac{d\,\mathrm{A}'_{p,\,q,\,r}}{da'_{\lambda,\,\mu,\,\nu}} \cdot \frac{da'_{\lambda,\,\mu,\,\nu}}{d\,\varepsilon} = \sum\nolimits_{a'} \lambda\, a'_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu} \frac{d\,\mathrm{A}'_{p,\,q,\,r}}{da'_{\lambda,\,\mu,\,\nu}};$$

c'est-à-dire

$$\sum\nolimits_{a'} \lambda\, a'_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu} \cdot \frac{d\,\mathrm{A}'_{p,\,q\,r}}{da'_{\lambda,\,\mu,\,\nu}} = p\,\mathrm{A}'_{p-1,\,q+1,\,r}$$

où l'on peut supprimer les accents, puisque $\mathrm{A}'_{p,\,q,\,r}$ dépend des $a'_{\lambda,\,\mu,\,\nu}$ de la même manière que $\mathrm{A}_{p,\,q,\,r}$ des $a_{\lambda,\,\mu,\,\nu}$, d'après les conditions ci-dessus énoncées. D'après cela, si l'on désigne par $\Theta_{\lambda,\,\mu}$ l'opération $\sum_a \lambda a_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu} \dfrac{d}{da_{\lambda,\,\mu,\,\nu}}$, on aura

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \Theta_{\lambda\mu}\,\mathrm{A}_{p,\,q,\,r} = p\,\mathrm{A}_{p-1,\,q+1\,,\,r}, \\ \Theta_{\mu,\,\nu}\,\mathrm{A}_{p,\,q,\,r} = q\,\mathrm{A}_{p,\,q-1,\,r+1}, \\ \Theta_{\nu,\lambda}\,\mathrm{A}_{p,\,q,\,r} = r\,\mathrm{A}_{p+1,\,q,\,r-1}, \end{cases}$$

les deux dernières équations provenant des substitutions

$$x = x, \qquad y = y, \quad z = z + \eta y$$

et

$$x = x + \gamma z, \quad y = y, \quad z = z.$$

Comme les trois substitutions aboutissent à la substitution unique

$$x = x' + \gamma z', \quad y = y' + \varepsilon x' + \varepsilon\gamma z', \quad z = z' + \eta y',$$

les équations (A) conserveront identiquement leur forme quand on fera dans f et F cette dernière substitution, et par conséquent quand on la superposera trois fois de suite à elle-même, ce qui conduira évidemment à une substitution unimodulaire générale. Donc ces équations multiples (A) sont les conditions analytiques nécessaires et suffisantes pour que F soit un covariant de f.

2. On remarquera que l'on a

$$\Theta_{\lambda\mu}\,\mathrm{F} = \sum \frac{m!}{p!\,q!\,r!} x^p\, y^q\, z^r\, \Theta_{\lambda\mu}\,\mathrm{A}_{p,\,q,\,r},$$

ou bien, en ayant égard à la première équation (A) et changeant ensuite p en $p+1$, q en $q-1$,

$$\Theta_{\lambda\mu} \mathrm{F} = x \sum \frac{m!}{p!\, q!\, r!} q \mathrm{A}_{p,q,r}\, x^p y^{q-1} z^r,$$

c'est-à-dire

$$\Theta_{\lambda\mu} \mathrm{F} = x \frac{d\mathrm{F}}{dy}.$$

Si l'on eût pris pour F la fonction f elle-même, on aurait eu manifestement

$$\Theta_{\lambda\mu} f = x \frac{df}{dy}.$$

En partant de cette considération que, pour une fonction donnée f, il existe toujours une certaine opération différentielle effectuée sur les coefficients qui équivaut à $x\frac{df}{dy}$, M. Cayley, dans le travail déjà cité, fait observer qu'outre la forme donnée, il en existe une infinité d'autres en général jouissant de cette équivalence d'opérations, quand on considère leurs coefficients comme des fonctions de ceux de la forme primitive. A cause de cette propriété commune, ces formes sont alors des *covariants* de celle-ci. Il est clair qu'en prenant pour point de départ cette propriété, on aurait pu arriver aux équations (A) pourvu qu'on eût défini préalablement l'opération différentielle qui doit affecter les coefficients : or cette opération peut s'obtenir évidemment sur-le-champ si l'on observe que, abstraction faite du facteur polynomial, $x\frac{df}{dy}$ donne pour terme général

$$\lambda a_{\lambda-1,\, \mu+1,\, \nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu,$$

et que, pour déduire ce même résultat de la forme f sans toucher aux variables x, y, z, il suffit d'employer l'opération $\frac{d}{da_{\lambda,\mu,\nu}}$ qui supprime $a_{\lambda,\mu,\nu}$, et de multiplier par $\lambda a_{\lambda-1,\, \mu+1,\, \nu}$: la somme

$$\sum \lambda a_{\lambda-1,\, \mu+1,\, \nu} \frac{d}{da_{\lambda,\mu,\nu}},$$

modifiant de la même manière et individuellement chacun des coefficients, est précisément l'opération différentielle requise. En suivant cette idée d'équivalence, on serait conduit à une très-grande généralisation, mais aussi à une non moins grande complication de la théorie des formes. Une forme étant donnée, on peut toujours trouver effectivement une opération effectuée sur les coefficients (on fait naturellement abstraction de toute idée d'intégration) qui produise sur la fonction le même effet que $x^h \frac{d^h f}{dy^h}$ par exemple, ou que

$$x^h \frac{d^h f}{dy^h} + xy^{h-1} \frac{d^h f}{dz^h} + xz^{h-1} \frac{d^h f}{dx\, dy^{h-1}} + \ldots,$$

ou réciproquement, ayant adopté une opération différentielle, on peut dans une infinité de cas trouver l'opération équivalente sur les variables. Ainsi, si l'on cherche comment il faut modifier les coefficients pour reproduire je suppose $\frac{x^2}{1.2} \frac{d^2 f}{dy^2}$, on remarquera que le terme général de f devenant par l'opération $\frac{x^2}{1.2} \frac{d^2 f}{dy^2}$,

$$\frac{n!}{2!\,\lambda!\,\overline{\mu-2}!\,\nu}\, a_{\lambda,\mu,\nu}\, x^{\lambda+2} y^{\mu-2} z^\nu,$$

ou, en changeant λ en $\lambda - 2$, μ en $\mu + 2$,

$$\frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\, a_{\lambda-2,\mu+2,\nu}\, x^\lambda y^\mu z^\nu;$$

pour reproduire ce même terme par une opération faite sur les seuls coefficients, il suffira de prendre

$$\Phi_{\lambda,\mu} = \sum_a \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\, a_{\lambda-2,\mu+2,\nu} \frac{d}{da_{\lambda,\mu,\nu}}.$$

Les diverses fonctions F qui jouiront d'une propriété analogue seront dès lors soumises à des conditions telles que

$$\Phi_{\lambda\mu}\, A_{p,q,r} = \frac{p(p-1)}{1.2}\, A_{p-2,q+2,r}.$$

Cette affinité de variabilité pourrait encore mériter aux formes F le nom de *covariants* ou de *synvariants*. Mais ici cette sorte d'indifférence aux substitutions linéaires qui caractérise les covariants ordinaires disparaît, et avec elle en grande partie l'importance de ces nouvelles fonctions.

3. Je reviens aux équations (A). En appliquant à la première h fois de suite l'opération $\Theta_{\lambda\mu}$, ce que je désignerai par $\Theta_{\lambda\mu}^{h}$, on aura, en vertu de cette même équation,

$$\Theta_{\lambda\mu}^{h} \mathrm{A}_{p,q,r} = p.p-1\ldots p-h+1.\mathrm{A}_{p-h,q+h,r},$$

et en particulier

$$\Theta_{\lambda\mu}^{p+1} \mathrm{A}_{p,q,r} = 0,$$

et aussi

$$\Theta_{\mu\nu}^{q+1} \mathrm{A}_{p,q,r} = 0, \quad \Theta_{\nu\lambda}^{r+1} \mathrm{A}_{p,q,r} = 0, \ldots,$$

puis en appliquant k fois de suite l'opération $\Theta_{\mu\nu}$, on aura, en vertu de la seconde,

$$\Theta_{\mu\nu}^{k} \Theta_{\lambda\mu}^{h} \mathrm{A}_{p,q,r} = p.p-1\ldots p-h+1.q+h.q+h-1\ldots q+h-k+1\,\mathrm{A}_{p-h,q+h-k,r+k},$$

formule qui, en faisant $p=m$, $q=r=0$, devient

$$\mathrm{A}_{m-h,\,h-k,k} = \frac{\Theta_{\mu\nu}^{k}\Theta_{\lambda\mu}^{h}\mathrm{A}_{m,0,0}}{m.m-1\ldots m-h+1.h.h-1\ldots h-k+1},$$

et fait dépendre tous les coefficients $\mathrm{A}_{p,q,r}$ du premier $\mathrm{A}_{m,0,0}$. C'est à un résultat pareil qu'est arrivé M. Cayley dans le Mémoire déjà cité, pour le cas des formes binaires dont il s'est spécialement occupé. Quant à ce coefficient *principal* $\mathrm{A}_{m,0,0}$, il est déterminé lui-même par les équations

$$\Theta_{\lambda\mu}^{m+1} \mathrm{A}_{m,0,0} = 0,$$

$$\Theta_{\mu\nu} \mathrm{A}_{m,0,0} = 0,$$

$$\Theta_{\nu\lambda} \mathrm{A}_{m,0,0} = 0,$$

et l'on va voir tout à l'heure que la première de ces équations peut être supprimée moyennant d'autres relations que je vais bientôt établir.

On peut déduire tous les coefficients du premier d'une manière plus symétrique en observant que

$$A_{p,q,r} = \frac{\Theta_{\lambda\nu}^{r}\,\Theta_{\lambda\mu}^{q}\,A_{m,0,0}}{m.m-1\ldots p+1},$$

les opérations $\Theta_{\lambda\mu}$, $\Theta_{\lambda\nu}$ pouvant être interverties à volonté, ce qui a évidemment lieu quand ces symboles ont le premier ou le second indice commun. En vertu de cette relation, on peut écrire symboliquement

$$F = x^m \sum \frac{\left(\frac{y}{x}\Theta_{\lambda\mu}\right)^q \left(\frac{z}{x}\Theta_{\lambda\nu}\right)^r}{q\,!\,r\,!} A_{m,0,0},$$

ou

$$F = x^m e^{\frac{y}{x}\Theta_{\lambda\mu} + \frac{z}{x}\Theta_{\lambda\nu}} . A_{m,0,0},$$

le développement de l'exponentielle suivant les puissances de $\frac{y}{x}$ et $\frac{z}{x}$ s'arrêtant de lui-même aux termes de degré m inclusivement, à cause que, pour $r+q \geqq m+1$,

$$\Theta_{\lambda\nu}^{r}\,\Theta_{\lambda\mu}^{q}\,A_{m,0,0} = 0.$$

4. Les formules (A), définissant complétement un covariant, renferment implicitement toutes les relations plus ou moins simples auxquelles une pareille fonction doit satisfaire : et il serait aisé de faire voir que des équations telles que $\Theta F = x\frac{dF}{dy}$, ou même $\Theta F = \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2F}{dy^2}$, etc., donnent toujours lieu à d'autres séries d'équations de forme un peu différente. Mais je préfère recourir aux substitutions. Or on a la substitution unimodulaire $x = \varepsilon x$, $y = \frac{1}{\varepsilon} y$, que j'appellerai substitution d'*homogénéité*, laquelle par sa superposition ne peut conduire, comme celles primitivement employées, à une substitution tout à fait générale, mais qui va néanmoins mettre en évidence une propriété caractéristique et fondamentale des covariants. Par cette substitution on a effectivement

$$a'_{\lambda,\mu,\nu} = \varepsilon^{\lambda-\mu}\,a_{\lambda,\mu,\nu}, \quad A'_{p,q,r} = \varepsilon^{p-q}\,A_{p,q,r};$$

d'où

$$\frac{da'_{\lambda,\mu,\nu}}{d\varepsilon} = (\lambda-\mu)\,\varepsilon^{-1}\,\varepsilon^{(\lambda-\mu)}\,a_{\lambda,\mu,\nu},$$

c'est-à-dire

$$\frac{da'_{\lambda,\mu,\nu}}{d\varepsilon} = (\lambda-\mu)\,\varepsilon^{-1}\,a'_{\lambda,\mu,\nu},$$

et aussi

$$\frac{d\mathrm{A}'_{p,q,r}}{d\varepsilon} = (p-q)\,\varepsilon^{-1}\,\mathrm{A}'_{p,q,r}.$$

Par suite

$$\varepsilon^{-1}(p-q)\mathrm{A}'_{p,q,r} = \frac{d\mathrm{A}'_{p,q,r}}{d\varepsilon} = \sum\nolimits_{a'} \frac{d\mathrm{A}'_{p,q,r}}{da'_{\lambda,\mu,\nu}}\frac{da'_{\lambda,\mu,\nu}}{d\varepsilon} = \sum\nolimits_{a'} \frac{d\mathrm{A}'_{p,q,r}}{da'_{\lambda,\mu,\nu}}(\lambda-\mu)a'_{\lambda,\mu,\nu}\,\varepsilon^{-1}.$$

Donc, en supprimant les accents, on a une suite d'équations telles que

$$\sum\nolimits_a (\lambda-\mu)\,a_{\lambda,\mu,\nu}\frac{d\mathrm{A}_{p,q,r}}{da_{\lambda,\mu,\nu}} = (p-q)\,\mathrm{A}_{p,q,r},$$

$$\sum\nolimits_a (\lambda-\nu)\,a_{\lambda,\mu,\nu}\frac{d\mathrm{A}_{p,q,r}}{da_{\lambda,\mu,\nu}} = (p-r)\,\mathrm{A}_{p,q,r};$$

. . . .

et si l'on ajoute convenablement ces équations, par exemple les deux premières, on aura

$$\sum\nolimits_a (n-3\lambda)\,a_{\lambda,\mu,\nu}\frac{d\mathrm{A}_{p,q,r}}{da_{\lambda,\mu,\nu}} = (m-3p)\,\mathrm{A}_{p,q,r}.$$

Quand on supposera, comme on le fera toujours, $\mathrm{A}_{p,q,r}$ une fonction rationnelle, homogène et entière des coefficients $a_{\lambda,\mu,\nu}$, en appelant θ le degré de cette fonction, il viendra donc

$$\sum \lambda\,a_{\lambda,\mu,\nu}\frac{d\mathrm{A}_{p,q,r}}{da_{\lambda,\mu,\nu}} = \left(\frac{n\theta-m}{3}+p\right)\mathrm{A}_{p,q,r},$$

$$\sum \mu\,a_{\lambda,\mu,\nu}\frac{d\mathrm{A}_{p,q,r}}{da_{\lambda,\mu,\nu}} = \left(\frac{n\theta-m}{3}+q\right)\mathrm{A}_{p,q,r},$$

$$\sum \nu\,a_{\lambda,\mu,\nu}\frac{d\mathrm{A}_{p,q,r}}{da_{\lambda,\mu,\nu}} = \left(\frac{n\theta-m}{3}+r\right)\mathrm{A}_{p,q,r},$$

équations dont l'une évidemment rentre toujours dans les autres. En désignant par

$$\mathcal{A}\, a^{\alpha_1}_{\lambda_1 \mu_1 \nu_1}\, a^{\alpha_2}_{\lambda_2 \mu_2 \nu_2} \ldots a^{\alpha_i}_{\lambda_i \mu_i \nu_i},$$

un terme quelconque de $A_{p,q,r}$, ces équations montrent que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \ldots + \alpha_i \lambda_i &= \varpi + p,\\
\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \ldots + \alpha_i \mu_i &= \varpi + q,\\
\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \ldots + \alpha_i \nu_i &= \varpi + r,
\end{aligned}$$

où

$$\varpi = \frac{n\theta - m}{3},$$

c'est-à-dire que dans chaque terme de $A_{p,q,r}$, la somme des produits obtenus en multipliant chaque premier indice par l'exposant correspondant est constante et égale à $\varpi + p$; de même pour les seconds, les troisièmes indices. On voit, en outre, que $\frac{n\theta - m}{3}$ doit être un nombre entier.

L'analyse précédente étant évidemment applicable, sans modification, au cas d'un nombre quelconque de variables, on peut résumer ainsi qu'il suit ce qui concerne jusqu'ici la constitution et le calcul des covariants d'une forme f à $\varkappa$ variables $x, y, \ldots, u, v$.

Si $A_{p,q,r,\ldots,s,t}$ représente le coefficient général d'un covariant F relatif à la forme donnée f, un terme quelconque de $A_{p,q,\ldots,t}$ étant écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{A}.\ \begin{matrix} a_{\lambda_1 \mu_1 \ldots \sigma_1 \tau_1} \\ a_{\lambda_2 \mu_2 \ldots \sigma_2 \tau_2} \\ \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{\lambda_\theta \mu_\theta \ldots \sigma_\theta \tau_\theta} \end{matrix} \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \mathcal{A}.\ \begin{matrix} \lambda_1 \mu_1 \ldots \sigma_1 \tau_1 \\ \lambda_2 \mu_2 \ldots \sigma_2 \tau_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_\theta \mu_\theta \ldots \sigma_\theta \tau_\theta \end{matrix}$$

où certaines lignes horizontales sont généralement plusieurs fois répétées en tout ou en partie, la somme des indices de la première colonne verticale est constante et égale $\varpi + p$, celle des seconds indices constante et égale à $\varpi + q, \ldots$ celle des derniers indices constante et égale à $\varpi + t$, pour tous les termes de $A_{p,q,\ldots,t}$. Le nombre ϖ, qui doit être entier, a pour valeur $\frac{n\theta - m}{\varkappa}$,

n étant toujours l'ordre de f, m celui du covariant F, $\varkappa$ le nombre des variables et θ le degré de $A_{p,q,\ldots,t}$, par rapport aux coefficients de f, dont il dépend uniquement.

Tous les coefficients de F peuvent se déduire de l'un quelconque d'entre eux, et particulièrement du premier $A_{m,0,0,\ldots}$ lequel est déterminé par les $\varkappa - 1$ équations :

$$\Theta_{\tau,\sigma} A_{m,0,0,\ldots} = 0,$$
$$\Theta_{\sigma,\rho} A_{m,0,0,\ldots} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Theta_{\nu,\mu} A_{m,0,0,\ldots} = 0,$$
$$\Theta_{\mu,\lambda} A_{m,0,0,\ldots} = 0,$$

et l'on a

$$A_{p,q,\ldots s,t} = \frac{\Theta_{\lambda\tau}^{t}\, \Theta_{\lambda\sigma}^{s} \cdots \Theta_{\lambda\nu}^{r}\, \Theta_{\lambda\mu}^{q} \cdot A_{m,0,0,\ldots}}{m.m-1\ldots p+1}.$$

J'ajouterai ici quelques remarques. Et d'abord, pour ce qui est de la suppression de l'équation $\Theta_{\lambda\mu}^{m+1} A_{m,0,0,\ldots} = 0$ et des analogues, elle résulte, si l'on veut, de ce que les substitutions d'homogénéité étant nécessairement comprises dans les substitutions élémentaires convenablement superposées, les équations qu'elles fournissent ne peuvent être que des transformées de celles obtenues par ces dernières substitutions, équations dont le nombre est $\varkappa - 1$, en adoptant l'ordre opératoire $\Theta_{\tau\sigma}$, $\Theta_{\sigma\rho}$, $\Theta_{\rho\iota}$, ... $\Theta_{\nu\mu}$, $\Theta_{\mu\lambda}$. Or aucune de ces dernières opérations ne peut, sauf nouvelles considérations, être supprimée, sans quoi il se produirait une interruption entre deux séries consécutives d'indices, ce qui reviendrait à la supposition inadmissible que les substitutions n'affectent point une au moins des variables $x, y, \ldots$. Donc avec l'ordre opératoire adopté, et sous les conditions d'homogénéité quant aux indices, les équations

$$\Theta_{\lambda\mu}^{m+1} A_{m,0,\ldots} = 0, \quad \Theta_{\lambda\nu}^{m+1} A_{m,0,\ldots} = 0, \ldots$$

pourront être rejetées comme superflues. D'ailleurs, sous ces mêmes conditions d'homogénéité, il est visible que l'opération $\Theta_{\nu\mu}$, par exemple, ou l'inverse $\Theta_{\mu\nu}$ conduiront entre les coefficients indéterminés de $A_{m,0,\ldots}$ identiquement aux mêmes équations. Enfin je rappellerai la remarque que j'ai faite dans le temps, à propos des invariants, et qui consiste simplement à faire ressortir l'effet de l'opération $\Theta_{\lambda\mu}$, par exemple, effet qui est écrit dans l'équation

$$\Theta_{\lambda\mu}\, a^{\alpha}_{\lambda,\mu} = \alpha\lambda a^{\alpha-1}_{\lambda,\mu}\, a_{\lambda-1,\mu+1},$$

et qui, une fois bien senti, permet de mettre de côté toutes les formules précédentes, et réduit le calcul des covariants à un simple exercice arithmétique.

5. Pour éclaircir ceci par un exemple et en même temps pour montrer la disposition et les simplifications que l'on peut, dans les cas plus compliqués, introduire dans le calcul, je vais chercher le covariant cubique et du troisième ordre, pour la forme ternaire du troisième ordre. On a donc ici $\varkappa = 3$, $n = 3$, $m = 3$, $\theta = 3$, et par suite $\varpi = 2$. Et si, par exemple, on veut déterminer directement le coefficient moyen de F, à cause de l'égalité entre les sommes des trois séries d'indices, cette somme commune étant $\varpi + \frac{m}{3}$, on prendra

$$\begin{aligned} A_{1,1,1} = {} & \mathcal{A} \begin{matrix} 3,0,0 \\ 0,3,0 \\ 0,0,3 \end{matrix} + \mathcal{A}_1 \begin{matrix} 3,0,0 \\ 0,2,1 \\ 0,1,2 \end{matrix} + \mathcal{A}_2 \begin{matrix} 0,3,0 \\ 2,0,1 \\ 1,0,2 \end{matrix} + \mathcal{A}_3 \begin{matrix} 0,0,3 \\ 2,1,0 \\ 1,2,0 \end{matrix} + \mathcal{A}_4 \begin{matrix} 2,1,0 \\ 1,0,2 \\ 0,2,1 \end{matrix} + \mathcal{A}_5 \begin{matrix} 2,0,1 \\ 1,2,0 \\ 0,1,2 \end{matrix} \\ & + \mathcal{A}_6 \begin{matrix} 2,1,0 \\ 0,1,2 \\ 1,1,1 \end{matrix} + \mathcal{A}_7 \begin{matrix} 2,0,1 \\ 0,2,1 \\ 1,1,1 \end{matrix} + \mathcal{A}_8 \begin{matrix} 1,2,0 \\ 1,0,2 \\ 1,1,1 \end{matrix} + \mathcal{A}_9 \begin{matrix} 1,1,1 \\ 1,1,1 \\ 1,1,1 \end{matrix}. \end{aligned}$$

Maintenant en écrivant que $\Theta^2_{\nu\mu} A_{1,1,1} = 0$, $\Theta^2_{\lambda\mu} A_{1,1,1} = 0$, etc., on aura les équations propres à déterminer $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots$ Mais il est manifeste, par la symétrie, que les termes de $A_{1,1,1}$ qui se déduisent les uns des autres par la simple permutation des colonnes d'indices doivent avoir un coefficient égal de même signe ou de signe contraire. Pour l'entière détermination de ces coefficients, il suffira évidemment alors d'une seule opération Θ^2, à laquelle on joindra ici $\Theta_{\lambda\nu}\Theta_{\lambda\mu}A_{1,1,1} = 0$, et l'on trouvera

$$\begin{aligned} 6\,A_{1,1,1} = {} & \begin{matrix} 300 \\ 030 \\ 003 \end{matrix} - \begin{matrix} 300 \\ 021 \\ 012 \end{matrix} - \begin{matrix} 030 \\ 201 \\ 102 \end{matrix} - \begin{matrix} 003 \\ 210 \\ 120 \end{matrix} + 3.\begin{matrix} 210 \\ 102 \\ 021 \end{matrix} + 3.\begin{matrix} 201 \\ 120 \\ 012 \end{matrix} \\ & - 2.\begin{matrix} 201 \\ 021 \\ 111 \end{matrix} - 2.\begin{matrix} 210 \\ 012 \\ 111 \end{matrix} - 2.\begin{matrix} 120 \\ 102 \\ 111 \end{matrix} + 2.\begin{matrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{matrix}. \end{aligned}$$

On aura ensuite, en se rappelant que Θ opère généralement sur les indices des $A_{p,q,r}$ comme sur ceux des $a_{\lambda,\mu,\nu}$,

$$3\,A_{0,2,1} = 3\Theta_{\lambda\mu}A_{1,1,1} = \substack{210\\030\\003} - \substack{210\\021\\012} - 2.\substack{030\\111\\102} - \substack{003\\120\\120} + 2.\substack{120\\102\\021} + \substack{111\\111\\021} + \substack{030\\201\\012} - \substack{201\\021\\021},$$

$$A_{030} = \Theta_{\nu\mu}A_{021} = \substack{210\\012\\030} - \substack{210\\021\\021} - \substack{012\\120\\120} - \substack{030\\111\\111} + 2.\substack{111\\120\\021}.$$

Les termes répondant à toutes les combinaisons des indices p, q, r étant formés, les autres s'en déduiront en faisant les mêmes permutations entre ces indices et les colonnes correspondantes de l'expression du terme considéré. Ainsi, par exemple, de $A_{0,3,0}$ on déduira tout de suite $A_{3,0,0}$, $A_{0,0,3}$, et de $A_{0,2,1}$ on déduira $A_{2,0,1}$, $A_{2,1,0}$, $A_{1,0,2}$, $A_{0,1,2}$, $A_{1,2,0}$, et l'on aura ici :

$$\frac{1}{2}A_{0,1,2} = \substack{201\\003\\030} - \substack{201\\012\\021} - 2.\substack{003\\111\\120} - \substack{030\\102\\102} + 2.\substack{102\\120\\012} + \substack{111\\111\\012} + \substack{003\\210\\021} - \substack{210\\012\\012};$$

. . . .

Mais, dans d'autres cas, on devra avoir égard au changement de signe qui pourra suivre la permutation. En général on a la règle suivante, dont il faudrait chercher l'origine dans ce qui sera dit aux §§ IV et V :

1°. Dans l'expression d'un coefficient déterminé $A_{p,q,r,\ldots,q,\ldots,s,t}$, où deux ou plusieurs indices sont égaux, le terme

$$\mathcal{A}\begin{matrix} \lambda_1\mu_1\nu_1\ldots\iota_1\ldots\sigma_1\tau_1 \\ \lambda_2\mu_2\nu_2\ldots\iota_2\ldots\sigma_2\tau_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_\theta\mu_\theta\nu_\theta\ldots\iota_\theta\ldots\sigma_\theta\tau_\theta \end{matrix} \text{ sera accompagné de } \pm\mathcal{A}. \begin{matrix} \lambda_1\iota_1\nu_1\ldots\mu_1\ldots\sigma_1\tau_1 \\ \lambda_2\iota_2\nu_2\ldots\mu_2\ldots\sigma_2\tau_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_\theta\iota_\theta\nu_\theta\ldots\mu_\theta\ldots\sigma_\theta\tau_\theta \end{matrix}$$

suivant que ϖ sera pair ou impair.

2°. De même, suivant la parité ou l'imparité de ϖ, un coefficient $A_{q,p,\ldots,t}$, déduit de $A_{p,q,\ldots,t}$ par la permutation des colonnes de même rang que les indices permutés, sera affecté du même signe ou d'un signe contraire dans les deux termes correspondants.

Bien que tous les termes puissent être déduits d'un quelconque d'entre eux $A_{p,q,r},\ldots$ si l'on voulait déterminer directement celui-ci, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, il subsisterait généralement des arbitraires, dont la réduction définitive serait moins simple que celle que fournit la détermination immédiate du coefficient principal.

Si, comme second exemple, on suppose

$$\varkappa = 4,\quad n = 3,\quad \theta = 4,\quad m = 4,$$

on trouvera

$$\mathrm{A}_{4000} = \begin{matrix}3000\\1200\\1020\\1002\end{matrix} - \begin{matrix}\widetilde{3000}\\1200\\1011\\1011\end{matrix} + 2.\begin{matrix}3000\\1110\\1101\\1011\end{matrix} - \begin{matrix}\widetilde{2100}\\2100\\1020\\1002\end{matrix} + \begin{matrix}\widetilde{2100}\\2100\\1011\\1011\end{matrix} + 2.\begin{matrix}\widetilde{2100}\\2010\\1002\\1110\end{matrix} - 2\begin{matrix}\widetilde{2100}\\2010\\1101\\1011\end{matrix},$$

où le signe $\sim$ indique qu'il faut sous-entendre tous les termes distincts déduits de la permutation des colonnes qu'il affecte. Dans la détermination effective de ce coefficient principal, on voit certaines équations fournies par l'opération $\Theta_{\mu\nu}$ rentrer les unes dans les autres et dans celles que produit l'opération $\Theta_{\mu\lambda}$: et cette circonstance, favorable à l'existence des covariants, devient un obstacle extrêmement sérieux quand il s'agit de la délicate question des covariants *irréductibles* dont il sera dit un mot dans le dernier paragraphe.

II.

Des covariants relatifs à plusieurs formes données.

6. L'analyse du précédent paragraphe s'étend évidemment au cas où les coefficients $\mathrm{A}_{pq,\ldots,t}$ de F dépendent de ceux de plusieurs formes données $f, f', \ldots, f^{(i)}$. En sorte que, si l'on dénote par

$$\Theta_{\sigma(\lambda\mu)} \text{ l'opération } \Theta_{\lambda\mu} + \Theta_{\lambda'\mu'} + \ldots + \Theta_{\lambda^{(i)}\mu^{(i)}},$$

on aura, par exemple,

$$\Theta_{\sigma(\lambda\mu)}\,\mathrm{A}_{pq,\ldots,t} = p\,\mathrm{A}_{p-1,\,q+1,\ldots,t},$$

d'où l'on déduira les mêmes conséquences que précédemment, en substituant partout la nouvelle opération Θ à l'ancienne. En faisant pareillement

$$\nabla_\lambda = \sum_a \lambda a_{\lambda,\mu,\nu,\ldots} \frac{d}{da_{\lambda\mu\nu\ldots}}, \quad \nabla_{\lambda'} = \sum_{a'} \lambda' a'_{\lambda'\mu'\nu'\ldots} \frac{d}{da'_{\lambda'\mu'\nu'\ldots}}, \text{ etc}\ldots$$

et posant, pour abréger,

$$\nabla_{\sigma(\lambda)} = \nabla_\lambda + \nabla_{\lambda'} + \ldots + \nabla_{\lambda^{(i)}},$$

on aura

$$(\nabla_{\sigma(\lambda)} - \nabla_{\sigma(\mu)}).\mathrm{A}_{pq\ldots t} = (p-q)\mathrm{A}_{pq\ldots t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

d'où l'on conclura, en supposant $\mathrm{A}_{pq\ldots t}$ homogène et du degré $\theta, \theta', \ldots, \theta^{(i)}$ par rapport aux coefficients respectifs $a_{\lambda\mu\ldots}$; $a'_{\lambda'\mu'\ldots}$; ... de $f, f', \ldots$,

$$\nabla_{\sigma(\lambda)} \mathrm{A}_{pq\ldots t} = (\varpi + p)\mathrm{A}_{pq\ldots t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où

$$\varpi = \frac{n\theta + n'\theta' + \ldots + n^{(i)}\theta^{(i)} - m}{\varkappa}$$

doit être un nombre entier. Dès lors un terme quelconque de $\mathrm{A}_{pq\ldots t}$ étant écrit de la manière suivante :

$$\begin{array}{c}
\lambda_1 \mu_1 \ldots \tau_1 \\
\lambda_2 \mu_2 \ldots \tau_2 \\
\cdots\cdots \\
\lambda_\theta \mu_\theta \ldots \tau_\theta \\
\bullet \\
\lambda'_1 \mu'_1 \ldots \tau'_1 \\
\lambda'_2 \mu'_2 \ldots \tau'_2 \\
\cdots\cdots \\
\lambda'_{\theta'} \mu'_{\theta'} \ldots \tau'_{\theta'} \\
\bullet \\
\cdots\cdots \\
\bullet \\
\lambda^{(i)}_1 \mu^{(i)}_1 \ldots \tau^{(i)}_1 \\
\lambda^{(i)}_2 \mu^{(i)}_2 \ldots \tau^{(i)}_2 \\
\cdots\cdots \\
\lambda^{(i)}_{\theta^{(i)}} \mu^{(i)}_{\theta^{(i)}} \ldots \tau^{(i)}_{\theta^{(i)}}
\end{array}$$

la somme de tous les premiers indices devra être constante et égale à $\varpi + p$, celle des seconds égale à $\varpi + q$, etc....

Soit, par exemple,

$$\varkappa = 3, \quad n = 2, \quad n' = 1, \quad \theta = 2, \quad \theta' = 2, \quad m = 0.$$

Ce que l'on a dit dans le numéro précédent relativement à l'égalité des coefficients des termes permutés subsistant toujours, l'une quelconque des opérations $\Theta_{\sigma(\lambda\mu)}$ fera connaître les trois arbitraires qui restaient indéterminées, et l'on aura pour l'invariant cherché

$$\begin{array}{ccccccc} \approx & & \approx & & \approx & & \approx \\ 200 & & 200 & & 110 & & 110 \\ 020 & & 011 & & 110 & & 101 \\ \bullet & -2. & \bullet & - & & +2. & \bullet\ , \\ 001 & & 010 & & 001 & & 010 \\ 001 & & 001 & & 001 & & 001 \end{array}$$

où le double signe $\approx$, placé sur un terme, indique que les permutations se font par colonnes totales. Cet invariant revient au déterminant connu

$$\begin{vmatrix} a_{200} & a_{110} & a_{101} & b_{100} \\ a_{110} & a_{020} & a_{011} & b_{010} \\ a_{101} & a_{011} & a_{012} & b_{001} \\ b_{100} & b_{010} & b_{001} & 0 \end{vmatrix}$$

qui, égalé à zéro, exprime la condition de contact d'une droite avec une conique. Et l'on trouverait un invariant quaternaire, aussi connu, pour exprimer le contact d'un plan avec une surface du second ordre.

7. Je reprends la forme unique f, et je suppose que

$$\begin{array}{l} a_{\lambda_1 \mu_1 \ldots \tau_1} \\ a_{\lambda_2 \mu_2 \ldots \tau_2} \\ \ldots\ldots \\ a_{\lambda_\theta \mu_\theta \ldots \tau_\theta} \end{array}$$

représente, abstraction faite d'un facteur *numérique*, un terme quelconque du coefficient principal $A_{m00\ldots}$ de F. Si, prenant pour $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\bar{\bar{\theta}}}$ une solution déterminée de l'équation

$$\lambda_1 + \lambda_2 \ldots + \lambda_\theta = \frac{n\theta - m}{\varkappa} + m,$$

on considère tous les termes possibles pour lesquels

$$\mu_1 + \ldots + \tau_1 = n - \lambda_1,\ \mu_2 + \ldots + \tau_2 = n - \lambda_2,\ \ldots,\ \mu_\theta + \ldots + \tau_\theta = n - \lambda_\theta,$$

et aussi

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\theta = \frac{n\theta - m}{\varkappa}, \ldots, \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\theta = \frac{n\theta - m}{\varkappa}:$$

le groupe de termes que l'on obtiendra de la sorte devra s'annuler par une quelconque des opérations Θ qui n'affectent point λ. D'ailleurs les coefficients a qui ont leur premier indice différent peuvent être considérés, quant à cette annulation, comme se rapportant à des formes distinctes d'ordres respectifs $n - \lambda_1$, $n - \lambda_2$, ... Or si l'on cherche dans cette hypothèse l'invariant de ces θ formes, linéaire par rapport aux coefficients de chacune d'elles, on aura par ce qui précède

$$\varpi' = \frac{n - \lambda_1 + n - \lambda_2 + \ldots + n - \lambda_\theta}{\varkappa - 1},$$

c'est-à-dire

$$\varpi' = \frac{n\theta - \dfrac{n\theta - m}{\varkappa} - m}{\varkappa - 1} = \frac{n\theta - m}{\varkappa} = \varpi;$$

et comme les mêmes choses ont lieu évidemment si plusieurs des indices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\theta$, viennent à coïncider, ce qui est le cas ordinaire, il en résulte que la détermination du coefficient principal d'un covariant, relatif à une forme unique, revient d'abord à celle d'invariants du même degré ou de degrés moindres pour des formes de même ordre ou d'ordres moindres, mais renfermant toujours une variable de moins. Et réciproquement la détermination directe du coefficient principal entraîne celle de certains de ces derniers invariants ; ainsi, par exemple, de l'expression A_{4000} qui se trouve à la fin du § I[er], résulte l'invariant du troisième degré

$$\begin{matrix} 200 & \widetilde{200} & 110 \\ 020 - & 011 + & 2.101 \\ 002 & 011 & 011 \end{matrix}$$

pour la forme ternaire du second ordre, et l'invariant du quatrième degré relatif à deux formes ternaires, l'une du premier, l'autre du second ordre, que nous venons tout à l'heure de considérer.

Maintenant si l'on se figure écrits, chacun sur une ligne horizontale, les divers groupes de termes qui répondent respectivement à chacune des solutions distinctes de l'équation

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\theta = \varpi + m,$$

l'opération $\Theta_{\mu\lambda}$ qui doit annuler l'ensemble de ces groupes établira, entre les coefficients indéterminés qui restent dans chacun d'eux, les relations nouvelles et définitives auxquelles ils doivent satisfaire pour que $A_{moo\ldots}$, soit le coefficient principal de F. Et comme, sous la condition d'égalité, dans chaque groupe, des coefficients des termes permutés, les diverses opérations Θ qui n'affectent point λ, donnent lieu pour chaque groupe absolument aux mêmes équations (ces équations changent naturellement d'un groupe à l'autre), il s'ensuit que sous la condition d'égalité mentionnée, les deux opérations $\Theta_{\mu\nu}$ et $\Theta_{\mu\lambda}$ seront nécessaires et parfaitement suffisantes pour l'entière détermination du coefficient principal. Dans le cas des invariants, l'une de ces opérations sera évidemment suffisante. Telle est la plus grande réduction qu'il m'a paru possible de faire dans le calcul des covariants.

Les mêmes conséquences s'étendent, ainsi que les remarques du n° 5, aux covariants relatifs à plusieurs formes données que l'on vient de considérer dans le n° **6**.

III.

Des covariants dans le cas de plusieurs groupes indépendants de variables et dans celui de plusieurs groupes correspondants.

8. Si l'on considère plusieurs formes homogènes dépendant des groupes respectifs des variables $(xy\ldots u)$, $(x'y'\ldots v')$, $(x''y''\ldots w'')$,... et qu'après les avoir multipliées ensemble, on remplace par une lettre unique $a_{\lambda\mu\ldots,\lambda'\mu'\ldots}$ la partie littérale de chaque terme du produit, on aura une forme f dans laquelle les divers groupes de variables pourront être soumis à des substitutions linéaires tout à fait indépendantes. En désignant par $A_{pq\ldots,p'q'\ldots}$ le coefficient

3..

général d'une forme F dépendante des mêmes groupes de variables, on pourra demander les conditions que ce coefficient doit remplir pour que F soit un covariant de f, par rapport à chacun des groupes en particulier. Alors en faisant

$$\Theta_{\lambda\mu} = \sum \lambda\, a_{\lambda-1,\mu+1,\nu\ldots,\lambda'\mu'\ldots} \frac{d}{da_{\lambda\mu\ldots,\lambda'\mu',\ldots}},$$

$$\Theta_{\lambda'\mu'} = \sum \lambda'\, a_{\lambda\mu\ldots,\lambda'-1,\mu'+1,\ldots} \frac{d}{da_{\lambda\mu\ldots,\lambda'\mu'\ldots}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

le $\sum$ s'étendant à tous les coefficients de f sans exception, on aura

$$\Theta_{\lambda\mu}\, A_{pq\ldots,p'q'\ldots} = p\, A_{p-1,q+1\ldots,p'q'\ldots}$$

$$\Theta_{\lambda'\mu'}\, A_{pq\ldots,p'q'\ldots} = p'\, A_{pq\ldots,p'-1,q'+1,\ldots}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et comme les opérations $\Theta_{\lambda\mu},\ldots,\ \Theta_{\lambda'\mu'},\ldots$ sont indépendantes les unes des autres à cause de l'indépendance des substitutions qui les font naître, et pourront conséquemment être interverties à volonté, on fera dépendre tout de suite la détermination des divers coefficients du covariant de la connaissance de l'un d'eux, et par exemple du coefficient principal qui sera déterminé lui-même par des équations telles que

$$\Theta_{\mu\nu}\, A_{moo\ldots,m'oo\ldots} = 0, \quad \Theta_{\mu'\nu'}\, A_{moo\ldots,m'oo\ldots} = 0,\ldots$$

Ensuite si $n, n', n'',\ldots$ désignent l'ordre respectif de f relativement aux groupes $(xy\ldots u)$, $(x'y'\ldots v')$,... composés respectivement de $\varkappa, \varkappa', \varkappa'',\ldots,$ variables, et que θ soit le degré de $A_{p\ldots,p'\ldots}$ par rapport à l'ensemble des coefficients de f, on aura

$$\sum \lambda\, a_{\lambda\mu\ldots,\lambda'\mu'\ldots} \frac{dA_{p\ldots,p'\ldots}}{da_{\lambda\ldots,\lambda'\ldots}} = (\varpi + p)\, A_{p\ldots,p'\ldots}\,;$$

$$\sum \lambda' a_{\lambda\ldots,\lambda'\ldots} \frac{dA_{p\ldots,p'\ldots}}{da_{\lambda\ldots,\lambda'\ldots}} = (\varpi' + p')\, A_{p\ldots,p'\ldots}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où

$$\varpi = \frac{n\,\theta - m}{x}, \quad \varpi' = \frac{n'\,\theta - m'}{x'}, \ldots$$

doivent être des nombres entiers. Un terme quelconque de $A_{p\ldots,p'\ldots}$ écrit de la manière suivante

$$\begin{matrix} \lambda_1\,\mu_1\,\ldots, & \lambda'_1\,\mu'_1\ldots, \ldots \\ \lambda_2\,\mu_2\ldots, & \lambda'_2\,\mu'_2\ldots, \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \lambda_\theta\,\mu_\theta\ldots, & \lambda'_\theta\,\mu'_\theta\ldots, \ldots \end{matrix}$$

devra donc donner

$$\begin{matrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\theta = \varpi + p; & \lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots + \lambda'_\theta = \varpi' + p'; \ldots \\ \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\theta = \varpi + q; & \mu'_1 + \mu'_2 + \ldots + \mu'_\theta = \varpi' + q'; \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

Soit par exemple

$$\begin{aligned} f = {} & a_{20,20}\,x^2 x'^2 + 2\,a_{20,11}\,x^2 x' y' + a_{20,02}\,x^2 y'^2 + 2\,a_{11,20}\,xyx'^2 \\ & + 4\,a_{11,11}\,xyx'y' + 2\,a_{11,02}\,xyy'^2 + a_{02,20}\,y^2 x'^2 \\ & + 2\,a_{02,11}\,y^2 x' y' + a_{02,02}\,y^2 y'^2. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'invariant quadratique, on formera le tableau

$$\mathcal{A}\begin{matrix}20,20\\02,02\end{matrix} + \mathcal{A}_1\begin{matrix}20\ 11\\02,11\end{matrix} + \mathcal{A}_2\begin{matrix}20,02\\02,20\end{matrix} + \mathcal{A}_3\begin{matrix}11,20\\11,02\end{matrix} + \mathcal{A}_4\begin{matrix}11,11\\11,11\end{matrix},$$

et l'on aura, par $\Theta_{\lambda\mu}$

$$2\,\mathcal{A} + \mathcal{A}_3 = 0, \quad 2\,\mathcal{A}_1 + 2\,\mathcal{A}_4 = 0, \quad 2\,\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 0;$$

par $\Theta_{\lambda'\mu'}$

$$2\,\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 = 0, \quad \mathcal{A}_1 + 2\,\mathcal{A}_2 = 0, \quad 2\,\mathcal{A}_3 + 2\,\mathcal{A}_4 = 0.$$

L'invariant sera donc

$$a_{20,20}\, a_{02,02} + a_{20,02}\, a_{02,20} + 2\, a_{11,11}^2 - 2\, a_{20,11}\, a_{02,11} - 2\, a_{11,20}\, a_{11,02}.$$

Soit pour second exemple

$$\varkappa = 3,\ n = 2,\ m = 4\,;\quad \varkappa' = 2,\ n' = 3,\ m' = 2;\ \theta = 2.$$

On aura

$$\mathrm{A}_{400,20} = \genfrac{}{}{0pt}{}{200,30}{200,12} - \genfrac{}{}{0pt}{}{200,21}{200,21},$$

$$2\,\mathrm{A}_{310,20} = \frac{1}{2}\,\Theta_{\lambda\mu}\,\mathrm{A}_{400,20} = \genfrac{}{}{0pt}{}{110,30}{200,12} + \genfrac{}{}{0pt}{}{200,30}{110,12} - 2.\genfrac{}{}{0pt}{}{200,21}{110,21},$$

$$6\,\mathrm{A}_{220,20} = 2\,\Theta_{\lambda\mu}\,\mathrm{A}_{310,20} = \text{etc.},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\,\mathrm{A}_{400,11} = \Theta_{\lambda'\mu'}\,\mathrm{A}_{400,20} = \genfrac{}{}{0pt}{}{200,30}{200,03} - \genfrac{}{}{0pt}{}{200,21}{200,12},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$8\,\mathrm{A}_{310,11} = 2\,\Theta_{\lambda\mu}\,\mathrm{A}_{400,11} = \text{etc.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

9. Si l'on suppose que $\mathrm{A}_{p\ldots,p'\ldots}$ dépend des coefficients de plusieurs formes données f, ${}_1f$, ${}_2f$,..., renfermant les mêmes groupes indépendants de variables en représentant par $a_{\lambda\mu\ldots,\lambda'\mu'\ldots}$ $a_{{}_1\lambda{}_1\mu\ldots,{}_1\lambda'_1\mu'\ldots}$ etc., les coefficients généraux relatifs à chacune de ces fonctions, et posant

$$\Theta_{\sigma({}_j\lambda\,{}_j\mu)} = \Theta_{\lambda\mu} + \Theta_{{}_1\lambda_1\mu} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura

$$\Theta_{\sigma({}_j\lambda\,{}_j\mu)}\ \mathrm{A}_{p\ldots,p'\ldots} = p\ \mathrm{A}_{p-1,q+1\ldots,p'\ldots}$$

$$\Theta_{\sigma({}_j\lambda'\,{}_j\mu')}\ \mathrm{A}_{p\ldots,p'\ldots} = p'\ \mathrm{A}_{p\ldots,p'-1,q'+1\ldots}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ce qui conduira aux mêmes conclusions que précédemment, en substituant partout la nouvelle opération Θ à l'ancienne. On trouve de même qu'un terme quelconque de $A_{p\ldots,p'\ldots}$ doit présenter la composition suivante :

$$\begin{array}{l}
\lambda_1 \quad \mu_1 \ldots, \ \lambda'_1 \quad \mu'_1 \ldots, \ldots \\
\lambda_2 \quad \mu_2 \ldots, \ \lambda'_2 \quad \mu'_2 \ldots, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_\theta \quad \mu_\theta \ldots, \ \lambda'_\theta \quad \mu'_\theta \ldots, \ldots \\
\\
{}_1\lambda_1 \ {}_1\mu_1 \ldots, {}_1\lambda'_1 \ {}_1\mu'_1 \ldots, \ldots \\
{}_1\lambda_2 \ {}_1\mu_2 \ldots, {}_1\lambda'_2 \ {}_1\mu'_2 \ldots, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_1\lambda_{{}_1\theta} \ {}_1\mu_{{}_1\theta} \ldots, {}_1\lambda'_{{}_1\theta} \ {}_1\mu'_{{}_1\theta} \ldots, \ldots \\
\\
{}_2\lambda_1 \ {}_2\mu_1 \ldots, {}_2\lambda'_1 \ {}_2\mu'_1 \ldots, \ldots \\
{}_2\lambda_2 \ {}_2\mu_2 \ldots, {}_2\lambda'_2 \ {}_2\mu'_2 \ldots, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_2\lambda_{{}_2\theta} \ {}_2\mu_{{}_2\theta} \ldots, {}_2\lambda'_{{}_2\theta} \ {}_2\mu'_{{}_2\theta} \ldots, \ldots \\
\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
\varpi+p, \varpi+q\ldots, \varpi'+p', \varpi'+q'\ldots, \ldots
\end{array}$$

où chaque colonne verticale donne pour somme le nombre $\varpi + p, \ldots,$ qui est placé au-dessous. Les nombres entiers $\varpi, \varpi', \ldots,$ ont pour expression

$$\varpi = \frac{n\,\theta + {}_1n\,{}_1\theta + {}_2n_2\,\theta + \ldots - m}{\varkappa}$$

$$\varpi' = \frac{n'\,\theta + {}_1n'\,{}_1\theta + {}_2n'\,{}_2\theta + \ldots - m}{\varkappa'}$$

$$\varpi'' = \frac{n''\,\theta + {}_1n''\,{}_1\theta + {}_2n''\,{}_2\theta + \ldots - m''}{\varkappa''}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et dans ces expressions les $\varkappa$ désignent le nombre de variables de chaque groupe respectif $(xy\ldots u)$, $(x'y'\ldots v')$,...

$n, \ n', \ n''\ldots$ ordres de f par rapport aux variables de chacun de ces groupes,
${}_1n, {}_1n', {}_1n''\ldots$ » de ${}_1f$ »
${}_2n, {}_2n', {}_2n''\ldots$ » de ${}_2f$ »
. . . .
$m, m', m''\ldots$ » de F »

et quelques-uns de ces ordres peuvent être zéro.

θ degré de F par rapport aux coefficients de f,

${}_1\theta$ » de ${}_1f$,

${}_2\theta$ » de ${}_2f$,

. . . .

10. Il est enfin un dernier point de vue sous lequel on peut généraliser la notion des covariants. Prenons, pour fixer les idées, une seule fonction f à plusieurs groupes de variables $(x, y, z,\ldots, u)$, $(x_1, y_1, z_1,\ldots, u_1)$, $(x_2, y_2, z_2,\ldots, u_2),\ldots$ tellement associés qu'ils soient modifiés simultanément par des substitutions *homologues*, c'est-à-dire ayant les mêmes coefficients. La forme F étant censée dépendre de ces mêmes groupes, son coefficient général sera représenté par

$$A_{\substack{p\,q\,\ldots\,t\\ p_1q_1\ldots t_1\\ p_2q_2\ldots t_2\\ \ldots\ldots}} \text{ celui de } f \text{ par } a_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\,\tau\\ \lambda_1\mu_1\ldots\tau_1\\ \lambda_2\mu_2\ldots\tau_2\\ \ldots\ldots}}$$

Si l'on fait dans f la substitution

$$\begin{array}{lll} y = y + \varepsilon x, & y_1 = y_1 + \varepsilon x_1, & y_2 = y_2 + \varepsilon x_2,\ldots \\ x = x & x_1 = x_1 & x_2 = x_2 \\ z = z & z_1 = z_1 & z_2 = z_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

le coefficient $a_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}}$ deviendra $a^{(h)}_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}}$, $h+1$ désignant le nombre de groupes de variables. On peut supposer que ces substitutions se font l'une après l'autre. Après la première on aura, comme au § I,

$$a'_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}} = a_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}} + \lambda\varepsilon\, a_{\substack{\lambda-1,\mu+1\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\varepsilon^2 a_{\substack{\lambda-2,\mu+2\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}} + \ldots$$

après la deuxième

$$a''_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}} = a'_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots\ldots}} + \lambda_1\,\varepsilon\, a'_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots\\ \ldots\ldots}} + \frac{\lambda_1(\lambda_1-1)}{1.2}\varepsilon^2 a'_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-2,\mu_1+2\ldots\\ \ldots\ldots}} + \ldots$$

De là

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(a''_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots}}\right) = \lambda_1\, a''_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots}} + \frac{d}{d\varepsilon}\left(a'_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots}}\right) + \lambda_1\,\varepsilon\,\frac{d}{d\varepsilon}\left(a'_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots}}\right)$$

$$+ \frac{\lambda_1(\lambda_1-1)}{1.2}\,\varepsilon^2\,\frac{d}{d\varepsilon}\left(a'_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-2,\mu_1+2\ldots}}\right) + \ldots$$

$$= \lambda_1\, a''_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots}} + \lambda\, a'_{\substack{\lambda-1,\mu+1\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots}} + \lambda\lambda_1\,\varepsilon\, a'_{\substack{\lambda-1,\mu+1\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots}}$$

$$+ \lambda\frac{\lambda_1(\lambda_1-1)}{1.2}\,\varepsilon^2\, a'_{\substack{\lambda-1,\mu+1\ldots\\ \lambda_1-2,\mu_1+2\ldots}} + \ldots$$

$$= \lambda_1\, a''_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots}} + \lambda\, a''_{\substack{\lambda-1,\,\mu+1\ldots\\ \lambda_1\mu_1}}$$

Après la troisième substitution, on aurait d'une manière analogue

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(a'''_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \lambda_2\mu_2}}\right) = \lambda_2\,.\,a'''_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \lambda_2-1,\mu_2+1\ldots}} + \lambda_1\,.\,a'''_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots\\ \lambda_2\mu_2\ldots}} + \lambda\,.\,a'''_{\substack{\lambda-1,\mu+1\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \lambda_2\mu_2\ldots}}$$

et ainsi de suite pour un nombre quelconque de substitutions élémentaires affectant la première série $x, x_1, x_2,\ldots$ de variables correspondantes. La même chose ayant lieu pour le coefficient $A_{\substack{p\,q\,\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ p_2q_2\ldots\\ \ldots\ldots}}$, si l'on fait

$$\Theta_{\sigma(\lambda_i\mu_i)} = \sum\nolimits_a\left(\lambda\,.\,a_{\substack{\lambda-1,\mu+1\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \lambda_2\mu_2\ldots}} + \lambda_1\,.\,a_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1-1,\mu_1+1\ldots\\ \lambda_2\mu_2\ldots}} + \lambda_2\, a_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \lambda_2-1,\mu_2+1\ldots}} + \ldots\right)\frac{d}{da_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots}}},$$

on aura

$$\Theta_{\sigma(\lambda_i\mu_i)}\, A_{\substack{p\,q\,\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ p_2q_2\ldots\\ \ldots\ldots}} = p\, A_{\substack{p-1,q+1\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ p_2q_2\ldots\\ \ldots\ldots}} + p_1\, A_{\substack{pq\ldots\\ p_1-1,q_1+1\ldots\\ p_2q_2\ldots\\ \ldots\ldots}} + p_2\, A_{\substack{pq\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ p_2-1,q_2+1\ldots\\ \ldots\ldots}} + \ldots.$$

Dans le cas présent il n'est pas possible de faire dépendre la détermination des divers coefficients de F de celle du coefficient principal, c'est-à-dire de celui qui dans F se trouve multiplié par $x^m\, x_1^{m_1}\, x_2^{m_2}\ldots$, $m, m_1, m_2,\ldots$, étant respectivement l'ordre de F par rapport aux groupes $(x\,y\ldots u)$, $(x_1\,y_1\ldots u_1)$,... Il n'y a d'exception bien entendu que pour le cas des invariants. Comme l'opération $\Theta_{\sigma(\lambda_i\mu_i)}$ diminue d'une unité la somme des indices de la première colonne de $A_{\substack{pq\ldots\\p_1q_1\ldots\\\ldots\ldots}}$, c'est-à-dire $p+p_1+p_2+\ldots$, ce coefficient devra satisfaire aux équations

$$\Theta_{\sigma(\lambda_i\mu_i)}^{p+p_1+\ldots+p_h+1} A_{\substack{pq\ldots\\p_1q_1\ldots\\\ldots\ldots}} = 0, \ldots, \Theta_{\sigma(\tau_i\lambda_i)}^{t+t_1+\ldots+t_h+1} A_{\substack{pq\ldots\\p_1q_1\ldots\\\ldots\ldots}} = 0,$$

. . . .

Mais il est clair que les coefficients A n'étant pas indépendants entre eux, il ne sera pas nécessaire de les déterminer tous séparément. Il m'a paru que celui dans lequel les indices de chaque groupe tendaient vers l'égalité pouvait suffire, moyennant des éliminations ultérieures et linéaires, à la détermination de tous les autres, comme on peut le vérifier dans des hypothèses particulières. Mais je n'ai pas entrevu de formule générale propre à marquer immédiatement cette dépendance.

Dans le cas de deux groupes binaires, on peut, par exemple, déduire tous les coefficients de $A_{\substack{m0\\0m_1}}$; car si l'on désigne, pour abréger l'écriture, par P et Q les deux opérations $\Theta_{\sigma(\lambda\mu)}$, $\Theta_{\sigma(\mu\lambda)}$, on aura

$$P^q A_{\substack{m0\\0m_1}} = m\ldots(m-q+1) A_{\substack{m-q,\,q\\0,\,m_1,}}$$

$$Q^p A_{\substack{m0\\0m_1}} = m_1\ldots(m_1-p+1) A_{\substack{m0\\p,\,m_1-p,}}$$

ce qui donnera deux séries de coefficients. Ensuite, en sous-entendant $A_{\substack{m0\\0m_1}}$, quand on ne l'écrit pas sous le dernier signe opératoire à droite,

$$QP = m A_{\substack{m0\\0m_1}} + mm_1 A_{\substack{m-1,\,1\\1,\,m_1-1,}}$$

. . . .

$$P^iQP = (m+im_1)P^i + m_1 . m . m-1 \ldots m-i . A_{\substack{m-i-1,\,i+1\\1,\,m_1-1,}}$$

ce qui fait connaître une autre série de coefficients. On a de même, en ayant égard aux équations précédentes,

$$Q^2P = 2mQ + m . m_1 . m_1 - 1 . A_{\substack{m-1,\,1\\2,\,m_1-2}}$$

$$PQ^2P = 2mPQ + 2 . m_1 - 1 . QP - 2m . m_1 - 1 . A_{\substack{m0\\0m_1}} + m . m-1 . m_1 . m_1 - 1 . A_{\substack{m-2,\,2\\2,\,m_1-2,}}$$

. . . .

d'où l'on déduit la série de coefficients $A_{\substack{m-i,\, i\\ 2,\, m_1-2}}$. On trouverait d'une manière analogue les séries

$$A_{\substack{m-i,\, i,\\ 3,\, m_1-3}}\qquad A_{\substack{m-i,\, i,\\ 4,\, m_1-4}}\qquad ,\ldots.$$

11. En désignant par $\Theta_{\lambda\mu}$ l'opération ordinaire définie au § I, il est aisé de voir que l'opération $\Theta_{\sigma(\lambda_i\,\mu_i)}$ donne lieu aux relations symboliques suivantes :

$$\Theta^j_{\sigma(\lambda_i\mu_i)} = (\Theta_{\lambda\mu} + \Theta_{\lambda_1\mu_1} + \Theta_{\lambda_2\mu_2} + \ldots)^j,$$

$$\Theta^k_{\sigma(\mu_i\nu_i)}\Theta^j_{\sigma(\lambda_i\mu_i)} = (\Theta_{\mu\nu} + \Theta_{\mu_1\nu_1} + \Theta_{\mu_2\nu_2} + \ldots)^k(\Theta_{\lambda\mu} + \Theta_{\lambda_1\mu_1} + \Theta_{\lambda_2\mu_2} + \ldots)^j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pourvu qu'après le développement des puissances des seconds membres les exposants marquent la répétition des opérations qu'ils affectent, et que ces opérations partielles se succèdent dans l'ordre où elles se présentent quand on multiplie, de la manière ordinaire, le développement du dernier facteur à droite par celui du précédent, et ainsi du reste. Seulement, dans le développement définitif, on pourra évidemment intervertir dans un terme quelconque les opérations Θ qui portent sur des indices appartenant à des groupes différents. On pourrait déduire de là la constitution indiciale des covariants, mais on y arrive beaucoup plus vite et plus simplement par la substitution homogénique

$$x = \varepsilon x,\quad x_1 = \varepsilon x_1,\ldots,$$
$$y = \frac{1}{\varepsilon} y,\quad y_1 = \frac{1}{\varepsilon} y_1,\ldots,$$

qui conduit, comme dans les paragraphes précédents, à des équations telles que

$$\sum_a \begin{pmatrix} +\lambda - \mu \\ +\lambda_1 - \mu_1 \\ +\lambda_2 - \mu_2 \\ + \ldots \end{pmatrix} a_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots}} \frac{dA_{\substack{pq\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ \ldots}}}{da_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots}}} = \begin{pmatrix} +p - q \\ +p_1 - q_1 \\ +p_2 - q_2 \\ + \ldots \end{pmatrix} A_{\substack{pq\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ \ldots}}$$

d'où l'on déduit, en désignant par θ le degré de $A_{\substack{p\ldots\\ p_1\ldots\\ \ldots}}$ par rapport aux coefficients $a_{\substack{\lambda\ldots\\ \lambda_1\ldots\\ \ldots}}$,

$$\sum \begin{pmatrix} +\lambda \\ +\lambda_1 \\ +\lambda_2 \\ + . \end{pmatrix} a_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots}} \frac{dA_{\substack{pq\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ \ldots}}}{da_{\substack{\lambda\mu\ldots\\ \lambda_1\mu_1\ldots\\ \ldots}}} = \begin{pmatrix} & +p \\ & +p_1 \\ \varpi + & +p_2 \\ & + . \end{pmatrix} A_{\substack{pq\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ \ldots}}$$

où

$$\varpi = \frac{\begin{pmatrix} +n \\ +n_1 \\ +n_2 \\ +\cdot \end{pmatrix}\theta - \begin{pmatrix} +m \\ +m_1 \\ +m_2 \\ +\cdot \end{pmatrix}}{\varkappa}$$

doit être un nombre entier. Dans cette dernière valeur, n, n_1, n_2,..., indiquent l'ordre de f par rapport aux groupes respectifs $(x, y, \ldots, u)$, $(x_1\ y_1, \ldots, u_1)$,... renfermant chacun $\varkappa$ variables. m, m_1, m_2,..., sont les quantités analogues relatives à F.

De là résulte que le coefficient

$$a_{\begin{array}{l}\lambda\mu\ldots \\ \lambda_1\mu_1\ldots \\ \ldots\ldots \\ \lambda_h\mu_h\ldots\end{array}} \text{ étant représenté par } \left|\begin{array}{l}\lambda\mu\ldots \\ \lambda_1\mu_1\ldots \\ \ldots\ldots \\ \lambda_h\mu_h\ldots\end{array}\right.$$

un terme quelconque de $A_{\begin{array}{l}p\,q\,\ldots \\ p_1 q_1\ldots \\ \ldots\end{array}}$ présentera la composition suivante :

$$\frac{\left|\begin{array}{l}\lambda'\ \mu'\ldots \\ \lambda'_1\ \mu'_1\ldots \\ \ldots\ldots \\ \lambda'_h\ \mu'_h\ldots\end{array}\right. \left|\begin{array}{l}\lambda''\ \mu''\ldots \\ \lambda''_1\ \mu''_1\ldots \\ \ldots\ldots \\ \lambda''_h\ \mu''_h\ldots\end{array}\right. \ldots\ldots \left|\begin{array}{l}\lambda^{(\theta)}\ \mu^{(\theta)}\ldots \\ \lambda^{(\theta)}_1\ \mu^{(\theta)}_1\ldots \\ \ldots\ldots \\ \lambda^{(\theta)}_h\ \mu^{(\theta)}_h\ldots\end{array}\right.}{\begin{array}{ll}\varpi+p, & \varpi+q,\ldots \\ +p_1 & +q_1 \\ +\cdot & +\cdot \\ \cdot & \cdot \\ +p_h & +q_h.\end{array}}$$

Par exemple, si

$$\varkappa = 2, \quad n = 2, \quad n_1 = 2, \quad \theta = 2, \quad m = 0, \quad m_1 = 0,$$

on aura cet invariant, avec trois coefficients indéterminés,

$$\mathcal{A}\left\{
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}02\\02\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\02\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\20\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}02\\11\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}11\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\02\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\02\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
\right)$$

$$+\,\mathcal{A}_1\left\{
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\02\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}02\\20\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\02\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\20\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}02\\11\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}11\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\02\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\02\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
-
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
\right)$$

$$+\,\mathcal{A}_2\left\{
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\02\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}20\\02\end{array}\end{array}
+
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}02\\20\end{array}\end{array}
-2.
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\02\end{array}\end{array}
-2.
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\20\end{array}\end{array}
+2
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}02\\11\end{array}\end{array}
+2.
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}11\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\02\end{array}\end{array}
-2.
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}20\\02\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
-2.
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}02\\20\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
+2.
\begin{array}{c}\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\\[1ex]\begin{array}{|l}11\\11\end{array}\end{array}
\right)$$

On aurait aussi cet invariant du premier degré, qu'on peut généraliser pour deux groupes binaires du même ordre n,

$$\begin{array}{|l}20\\ \\02\end{array} + \begin{array}{|l}02\\ \\20\end{array} - 2.\begin{array}{|l}11\\ \\11\end{array}$$

Lorsqu'on suppose que $\mathrm{A}_{\substack{p\,q\,\ldots\\ p_1q_1\ldots\\ \cdots\cdots}}$ dépend des coefficients d'autres fonctions, ${}_1f, {}_2f, \ldots$, analogues à f, en désignant par $\Theta_{\sigma({}_1\lambda_i\,{}_1\mu_i)}, \ldots$, les opérations analogues à $\Theta_{\sigma(\lambda_i\,\mu_i)}$ et relatives aux coefficients de ces nouvelles formes et posant

$$\Theta_{\sigma\sigma({}_j\lambda_i\,{}_j\mu_i)} = \Theta_{\sigma(\lambda_i\,\mu_i)} + \Theta_{\sigma({}_1\lambda_i\,{}_1\mu_i)} + \cdots$$

tout ce qui a été dit dans ce numéro et dans le précédent subsiste en remplaçant partout $\Theta_{\sigma(\lambda_i\,\mu_i)}$ par $\Theta_{\sigma\sigma({}_j\lambda_i\,{}_j\mu_i)}$.

Un terme quelconque de $\mathrm{A}_{\substack{p\,\ldots\\ p_1\ldots\\ \cdots\cdots}}$ doit alors satisfaire aux additions arithmétiques

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{ll} \lambda' & \mu'\dots \\ \dots\dots & \dots \\ \lambda'_h & \mu'_h\dots \end{array}\right. \\
\left|\begin{array}{ll} \lambda'' & \mu''\dots \\ \dots\dots & \dots \\ \lambda''_h & \mu''_h\dots \end{array}\right. \\
\quad\dots\dots\dots \\
\left|\begin{array}{ll} \lambda^{(\theta)} & \mu^{(\theta)}\dots \\ \dots\dots & \dots \\ \lambda^{(\theta)}_h & \mu^{(\theta)}_h\dots \end{array}\right. \\
\qquad\bullet \\
\left|\begin{array}{ll} {}_1\lambda' & {}_1\mu'\dots \\ \dots\dots & \dots \\ {}_1\lambda'_h & {}_1\mu'_h\dots \end{array}\right. \\
\left|\begin{array}{ll} {}_1\lambda'' & {}_1\mu''\dots \\ \dots\dots & \dots \\ {}_1\lambda''_h & {}_1\mu''_h\dots \end{array}\right. \\
\quad\dots\dots\dots \\
\left|\begin{array}{ll} {}_1\lambda^{({}_1\theta)} & {}_1\mu^{({}_1\theta)}\dots \\ \dots\dots & \dots \\ {}_1\lambda^{({}_1\theta)}_h & {}_1\mu^{({}_1\theta)}_h\dots \end{array}\right. \\
\qquad\bullet \\
\quad\dots\dots\dots \\
\hline
\begin{array}{ll} \varpi + p, & \varpi + q,\dots \\ \quad + p_1 & \quad + q_1 \\ \quad + . & \quad + . \\ \quad\ . & \quad\ . \\ \quad + p_h & \quad + q_h \end{array}
\end{array}
$$

où

$$
\varpi = \frac{\begin{pmatrix} +n \\ +n_1 \\ +n_2 \\ \dots\dots \end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix} +{}_1n \\ +{}_1n_1 \\ +{}_1n_2 \\ \dots\dots \end{pmatrix}{}_1\theta + \dots - \left(\begin{matrix} +m \\ +m_1 \\ +m_2 \\ \dots\dots \end{matrix} + \begin{matrix} +{}_1m \\ +{}_1m_1 \\ +{}_1m_2 \\ \dots\dots \end{matrix} + \dots\right)}{\varkappa}
$$

Enfin si F renfermait plusieurs systèmes de groupes correspondants, ces systèmes étant indépendants les uns des autres, le coefficient général de cette forme étant représenté par (et ceux de f supposée d'abord unique, d'une manière analogue)

$$A_{\substack{p\,q\ldots;\,p'\,q'\ldots;\,p''\,q''\ldots \\ p_1 q_1\ldots;\,p'_1\,q'_1\ldots;\,p''_1\,q''_1\ldots \\ \ldots\ldots;\,\ldots\ldots;\,\ldots\ldots}}$$

on poserait

$$\Theta_{\sigma(\lambda_i^{(k)}\mu_i^{(k)})} = \sum\nolimits_a \left(\lambda^{(k)} a_{\substack{\ldots;\,\lambda^{(k)}-1,\,\mu^{(k)}+1,\ldots \\ \ldots;\,\lambda_1^{(k)}\quad \mu_1^{(k)}\ldots \\ \ldots;\ldots\ldots\ldots}} + \lambda_1^{(k)} a_{\substack{\ldots;\,\lambda^{(k)}\quad \mu^{(k)}\ldots \\ \ldots;\,\lambda_1^{(k)}-1,\,\mu_1^{(k)}+1,\ldots \\ \ldots;\ldots\ldots\ldots}} + \ldots \right) \frac{d}{da_{\substack{\lambda\,\mu\,\ldots;\,\lambda'\,\mu'\ldots \\ \lambda_1\mu_1\ldots;\,\lambda'_1\,\mu'_1\ldots \\ \ldots;\ldots}}}$$

et l'on aurait des équations telles que

$$\Theta_{\sigma(\lambda_i\mu_i)} A_{\substack{p\,\ldots;\,p'\ldots \\ p_1\ldots;\,p'_1\ldots \\ \ldots;\ldots}} = p A_{\substack{p-1,\,q+1,\ldots;\,p'\ldots \\ p_1\,q_1\ldots\ldots;\,p'_1\ldots \\ \ldots\ldots;\ldots}} + p_1 A_{\substack{p\,q\ldots\ldots;\,p'\ldots \\ p_1-1,\,q_1+1\ldots;\,p'_1\ldots \\ \ldots\ldots;\ldots}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta_{\sigma(\lambda'_i\,\mu'_i)} A_{\substack{p\,\ldots;\,p'\ldots \\ p_1\ldots;\,p'_1\ldots \\ \ldots;\ldots}} = p' A_{\substack{p\,q\,\ldots;\,p'-1,\,q'+1,\ldots \\ p_1 q_1\ldots;\,p'_1\,q'_1\ldots \\ \ldots;\ldots}} + p'_1 A_{\substack{p\,\ldots;\,p'\ldots \\ p_1\ldots;\,p'_1-1,\,q_1+1\ldots \\ \ldots;\ldots}} + \ldots$$

etc.

Le terme $A_{\substack{p\,\ldots;\,p'\ldots \\ p_1\ldots;\,p'_1\ldots \\ \ldots;\ldots}}$ présenterait une composition analogue à celle du premier tableau du présent numéro, où il suffirait d'écrire horizontalement les séries indépendantes d'indices et les

$$\varpi = \frac{\begin{pmatrix}+n \\ +n_1 \\ +\ldots\end{pmatrix}\theta - \begin{pmatrix}+m \\ +m_1 \\ +\ldots\end{pmatrix}}{\varkappa}, \quad \varpi' = \frac{\begin{pmatrix}+n' \\ +n'_1 \\ +\ldots\end{pmatrix}\theta - \begin{pmatrix}+m' \\ +m'_1 \\ +\ldots\end{pmatrix}}{\varkappa'},\ldots$$

devraient être des nombres entiers, $\varkappa$, $\varkappa'$,..., désignant respectivement le nombre de variables qui entrent dans chacun des groupes de chaque système indépendant

$$\begin{vmatrix} x\ y\ \ldots u \\ x_1\, y_1 \ldots u_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_h\, y_h \ldots u_h \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x'\ y' \ldots v' \\ x'_1\, y'_1 \ldots v'_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x'_{h'}\, y'_{h'} \ldots v'_{h'} \end{vmatrix}, \ldots$$

Et si l'on supposait définitivement que dans $\mathrm{A}_{\substack{p\ldots;\,p'\ldots\\ p_1\ldots;\,p'_1\ldots\\ \ldots;\ldots}}$ entrent les coefficients de plusieurs formes analogues à f, il suffirait de substituer dans les équations précédentes les opérations $\Theta_{\sigma\sigma}\left({}_j\lambda_i^{(k)}\ {}_j\mu_i^{(k)}\right),\ldots$ à celles qui y figurent et d'introduire horizontalement les diverses séries verticales d'indices dans le deuxième tableau du présent numéro. Les divers nombres ϖ se déduiraient de celui qui se rapporte à ce même tableau, en accentuant toutes les lettres, à l'exception des θ.

Voilà finalement la constitution générale d'un covariant. On pourrait la rendre plus complexe, en soumettant à de certaines liaisons soit les diverses formes f, ${}_1f$, ${}_2f,\ldots$ soit les divers systèmes de groupes qui concourent à leur formation; mais la notion des covariants, arrêtée au point où nous en sommes, laisse encore un champ assez vaste à de futures méditations.

IV.

Deux théorèmes très-généraux. — Conséquences pour le calcul des covariants.

12. Voici un théorème qui paraît presque évident de lui-même si l'on fait un instant attention que les diverses opérations Θ modifient suivant la même loi les indices des coefficients d'un covariant, et ceux des coefficients des formes auxquelles se rapporte ce covariant. On peut l'énoncer de la manière suivante:

I. Si F, F_1, $\mathrm{F}_2,\ldots$ désignent des covariants relatifs à un système de formes f, ${}_1f$, ${}_2f,\ldots$, tout covariant $\mathfrak{F}$ relatif au système de formes $\mathrm{F}, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2,\ldots$, considérées comme indépendantes, sera aussi un covariant du système f, ${}_1f$, ${}_2f,\ldots$

Supposons, pour simplifier l'écriture, qu'il s'agisse de formes ternaires à un seul groupe de variables, et soit $\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}}$ le coefficient général de $\mathfrak{F}$; on aura par hypothèse

$$\Theta_{\sigma(pq)}\,\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}} = \mathrm{p}\,\mathcal{A}_{\mathrm{p-1,q+1,r}}.$$

Mais $\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}}$ étant de la forme

$$\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}} = \sum\left(\mathcal{M}\quad \mathrm{A}^{\alpha}_{pqr}\cdots\mathrm{A}^{\alpha_1}_{p_1q_1r_1}\cdots\right),$$

on a

$$\Theta_{\sigma(\lambda\mu)}\,\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}} = \sum \mathcal{M}\left(\begin{array}{c} \alpha\, p\, A_{pqr}\, A_{p-1,q+1,r}\ldots A^{\alpha_1}_{p_1 q_1 r_1}\ldots \\ +\,\alpha_1 p_1 A^{\alpha}_{pqr}\ldots A^{\alpha_1-1}_{p_1 q_1 r_1} A_{p_1-1,q_1+1,r}\ldots + \ldots \end{array}\right)$$

à cause que l'on suppose

$$\Theta_{\sigma(\lambda\mu)}\, A_{pqr} = p\, A_{p-1,q+1,r}\ ;\ \text{etc.}$$

Or l'opération $\Theta_{\sigma(pq)}$ produit précisément ce même résultat. On a donc

$$\Theta_{\sigma(\lambda\mu)}\,\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}} = \Theta_{\sigma(pq)}\,\mathcal{A}_{\mathrm{pqr}} = \mathrm{p}\,\mathcal{A}_{\mathrm{p-1,q+1,r}},$$

ce qui fait voir que $\mathcal{F}$ est un covariant de f, $_1f$, $_2f$,...

On verrait par un procédé analogue que si deux covariants appartiennent à un même système donné (f, $_1f$, $_2f$,...), et que les coefficients de l'un soient des fonctions rationnelles et entières de ceux de l'autre, le premier sera un covariant de celui-ci considéré comme une forme indépendante.

La même analyse conduit encore à ce résultat :

II. Si F, F_1, F_2,..., représentent une suite de covariants relatifs à un système (f, $_1f$, $_2f$, $_3f$,...) ; si F', F'', F''',..., représentent une suite de covariants relatifs à un autre système (f', f'',...), indépendant ou dépendant du premier, et ainsi de suite, tout covariant $\mathcal{F}$ relatif au système (F, F_1,..., F', F'',...), censé composé de formes tout à fait indépendantes, sera aussi un covariant du système (f, $_1f$, $_2f$,..., f', f'',...).

Cette proposition, qui est une extension de la première, et qui s'applique évidemment aux covariants envisagés sous le point de vue le plus général, paraît fondamentale dans la théorie des formes, et susceptible de nombreuses conséquences, soit pour leur classification, soit pour leur calcul. Il en résulte tout de suite pour ce dernier objet que toute formule propre à faire connaître un covariant pour un système donné de formes est apte par cela même à donner généralement une infinité de covariants pour ce même système, et pour une infinité d'autres systèmes. Il s'agit donc de trouver de pareilles formules, ce qui n'offre pas de difficulté, et comme les covariants des formes ternaires, quaternaires, etc., peuvent finalement être censés déduits de covariants relatifs aux formes binaires, d'après ce qui a été dit au n° 7, il convient de considérer en premier lieu ces dernières formes qui d'ailleurs sont naturellement plus faciles à traiter.

13. Considérons deux formes binaires f et f' d'ordres n, n', et soit F un covariant de ces deux formes, d'ordre m, linéaire par rapport aux coefficients de chacune d'elles séparément, et du second degré pour leur ensemble. En faisant

$$\mathrm{g} = \frac{\mathrm{n} + \mathrm{n}' - \mathrm{m}}{2},$$

on verra tout de suite, par l'opération $\Theta_{\mu\lambda} + \Theta_{\mu'\lambda'}$, que le coefficient principal de F a nécessairement pour expression

$$(g)\quad \mathrm{A}_{\mathrm{m}\mathrm{o}} = \mathrm{a}_{\mathrm{n},\mathrm{o}}\, \mathrm{a}'_{\mathrm{n}'-\mathrm{g},\mathrm{g}} - \mathrm{g}\, \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1,1}\, \mathrm{a}'_{\mathrm{n}'-\mathrm{g}+1,\mathrm{g}-1} + \frac{\mathrm{g}(\mathrm{g}-1)}{1.2}\mathrm{a}_{\mathrm{n}-2,2}\, \mathrm{a}'_{\mathrm{n}'-\mathrm{g}+2,\mathrm{g}-2} - \ldots + (-1)^{\mathrm{g}}\, \mathrm{a}_{\mathrm{n}-\mathrm{g},\mathrm{g}}\, \mathrm{a}'_{\mathrm{n}',\mathrm{o}}.$$

Si les deux formes coïncident et se réduisent à f, on aura $g = n - \frac{m}{2}$ et g devra être un nombre pair, sans quoi les termes de $\mathrm{A}_{\mathrm{m},\mathrm{o}}$, également distants des extrêmes, s'entre-détruiraient mutuellement. Ainsi la forme binaire f, d'ordre pair n, admet $\frac{n}{2}$ covariants (et pas davantage) du second degré et d'ordres respectifs

$$0, 4, 8, 12, \ldots, 2n,$$

en y comprenant le carré de la forme elle-même ; et les formes d'ordre impair n admettent $\frac{n+1}{2}$ (et pas davantage) covariants du second degré et d'ordres

$$2, 6, 10, 14, \ldots, 2n,$$

y compris toujours le carré de la forme.

Maintenant si l'on prend pour f la forme donnée f, et pour f' un quelconque de ses covariants du second degré, on obtiendra en vertu du théorème I, et en donnant à m des valeurs convenables dans la formule (g), une suite de covariants du troisième degré pour la forme primitive f. L'association, dans la même formule, de la forme f à chacun de ses covariants du troisième degré fera naître une suite de covariants du quatrième degré, que l'on pourra reproduire en partie en associant deux à deux dans la même formule tous les covariants du second degré. On pourra continuer de la sorte à l'infini en associant la forme primitive à chacun de ses covariants d'un même degré, ce qui donnera lieu à une suite de covariants du degré immédiatement supérieur. Mais on pourra parvenir à des covariants de ce dernier degré en associant deux covariants dont la somme des degrés soit égale au degré que l'on veut obtenir. Il est clair que les covariants d'un même degré auxquels on arrive de ces diverses manières, ne seront pas généralement tous distincts entre eux ; et je ne me préoccupe pas présentement de cette délicate question. Quoi qu'il en soit, on voit que cette formule (g) peut servir non-seulement au calcul des covariants, mais révéler aussi leur existence. Je vais l'appliquer, pour en faire saisir la véritable portée, aux formes du 2^e, 3^e, 4^e et 5^e ordre, dont l'étude approfondie a été l'objet des remarquables travaux de MM. Cayley, Sylvester et Hermite. Mais auparavant je ferai observer que ce dernier géomètre est arrivé (*Journal de Crelle,* tome LII) par une voie différente à une autre *association* de covariants qui lui a fourni tous les covariants des formes binaires du 2^e, 3^e et 4^e ordre, mais qui, pour la forme du 5^e ordre, a nécessité le concours de très-ingénieuses et nouvelles considérations, consignées dans le dernier volume du *Journal de Cambrige et Dublin* que je n'ai pas présentement sous les yeux (*Théorie des formes homogènes à deux indéterminées*). L'auteur est arrivé entre autres choses, dans le premier des journaux mentionnés, à cette proposition remarquable, que je me contente d'indiquer :

f étant la forme donnée, h un quelconque de ses covariants, tout covariant de f, quel qu'il soit, ou au moins son produit par une puissance entière de h, sera une fonction rationnelle et entière des covariants associés à h.

N'ayant pas entrevu pour le moment d'extension possible de cette proposition aux formes ternaires,..., et mon but ayant été primitivement le calcul général des formes, je me borne à cette simple indication sous la réserve de revenir un jour, autant que mes loisirs pourront me le permettre, sur l'importante et très-difficile question de la classification générale des covariants.

14. La forme binaire du second ordre

$$a_{2,0}\, x^2 + 2\, a_{1,1}\, xy + a_{0,2}\, y^2$$

admet l'unique invariant du second degré $\begin{vmatrix} a_{2,0} & a_{1,1} \\ a_{0,2} & a_{1,1} \end{vmatrix}$.

Or, comme on vient de le voir, les formes impaires admettent toutes un covariant du second degré et du second ordre. En désignant par A_{20}, A_{11}, A_{02}, les coefficients de ce covariant, de façon que

$$A_{2,0} = a_n a_1 - (n-1) a_{n-1} a_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a_{n-2} a_3 \ldots + a_1 a_n,$$

$$2 A_{1,1} = a_n a_0 - (n-2) a_{n-1} a_1 + \frac{(n-1)(n-4)}{1.2} a_{n-2} a_2$$

$$- \frac{(n-1)(n-2)(n-6)}{1.2.3} a_{n-3} a_3 + \ldots,$$

$$A_{0,2} = a_{n-1} a_0 - (n-1) a_{n-2} a_1 + \ldots,$$

où j'ai supprimé les seconds indices, comme je le ferai maintes fois ; on aura, d'après le théorème I,

$$I^{(4)} = A_{20} A_{02} - A_{1,1}^2,$$

pour l'expression générale de l'un des invariants du quatrième degré, relatifs aux formes impaires. On obtiendra, quel que soit n, une suite de covariants du quatrième degré en prenant les covariants du second degré de chacun des covariants du second degré de la forme proposée.

La forme du 3[e] ordre

$$a_3 x^3 + 3 a_2 x^2 y + 3 a_1 x y^2 + a_0 y^3,$$

admettant l'unique covariant du second ordre et du second degré (en excluant le carré de la forme) désigné par son coefficient principal

$$B_{2,0} = \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_2},$$

en supposant dans la formule (g)

$$\mathrm{a_n} = a_3, \quad \mathrm{a'_{n'}} = B_{2,0}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{g} = \frac{3+2-\mathrm{m}}{2},$$

et observant que l'on doit avoir généralement $\mathrm{n'} > \mathrm{n} - \mathrm{m}$, afin que $\mathrm{n} - \mathrm{g}$, et $< \mathrm{n} + \mathrm{m}$

$n' - g$ soient positifs, on ne pourra prendre que $m = 3$ et $m = 5$. La seconde hypothèse donnant $A_{3,0} = \frac{a_3}{B_{2,0}}$, correspond au produit de la forme proposée par son covariant du second degré, et peut être ici exclue. On a donc l'unique covariant du troisième degré et du troisième ordre désigné par son coefficient principal

$$C_{3,0} = \frac{a_{3,0}}{B_{1,1}} - \frac{a_{2,1}}{B_{2,0}}.$$

Ce covariant admettant lui-même, quand on le considère comme une forme indépendante, un covariant du second degré et du second ordre, donne lieu par cela même à un covariant du second ordre et du sixième degré pour la forme primitive, etc., et la question de savoir généralement quels sont les covariants *fondamentaux* ou *irréductibles*, c'est-à-dire ceux dont les autres peuvent être considérés comme des fonctions rationnelles et entières, constitue un problème difficile, dont M. Cayley a donné une belle solution dans ses *Recherches sur la partition des nombres* (Mémoire cité).

On voit par la formule (g) que deux formes f et f' ne peuvent avoir d'invariant du second degré que dans le cas où elles sont de même ordre. Or, les formes d'ordre $4i$ étant les seules qui admettent un covariant du second degré et d'ordre $4i$, sont aussi les seules qui puissent avoir un invariant cubique dont on a une expression générale en prenant dans (g) f pour la forme proposée f, f' pour son covariant d'ordre $4i$, du second degré, et supposant $m = 0$. Ce covariant d'ordre $4i$ donnant, par la même formule, dont il suffit de prendre ici la moitié des termes,

$$C_{n,0} = \frac{a_n}{a_{2i}} - 2i\frac{a_{n-1}}{a_{2i+1}} + \frac{2i.2i-1}{1.2}\frac{a_{n-2}}{a_{2i+2}} - \ldots \pm \frac{a_{3i}}{a_{3i}},$$

on aura pour l'invariant cubique des formes d'ordre $4i$

$$I^{(3)} = \frac{a_{n,0}}{C_{0,n}} - n\frac{a_{n-1,1}}{C_{1,n-1}} + \ldots;$$

ce qui rentre dans une formule trouvée différemment par M. Brioschi.

On reconnaîtra aisément par la formule (g) qu'il n'existe point de covariant cubique et du premier ordre pour la forme générale f.

La forme du 5^e ordre

$$f = a_5 x^5 + 5\, a_4 x^4 y + \ldots + a_0 y^5,$$

admettant trois covariants du second degré, d'ordres 2, 6, 10, y compris le carré de la forme, l'invariant quadratique de chacun de ces covariants donne lieu à l'unique invariant biquadratique de la forme primitive, lequel se présente ainsi sous trois aspects différents. Ces trois covariants étant désignés respectivement par leur coefficient principal $C^{(2)}_{2,0}$, $C^{(2)}_{6,0}$, $C^{(2)}_{10,0}$, en prenant dans (g) $a_n = a_5$, $a'_{n'} = C^{(2)}_{2,0}$, $m = 3, 5, 7$, on obtient le covariant cubique et du 3^e ordre $C^{(3)}_{3,0}$, le covariant cubique du 5^e ordre $C^{(3)}_{5,0}$, et le covariant cubique du 7^e ordre $C^{(3)}_{7,0}$, qui n'est autre que le produit de f par $(C^{(2)}_{2,0}\, x^2 + \ldots)$. Si l'on associe dans (g) f et $C^{(2)}_{6,0}$, on retrouve, pour $m = 3, 5$, les covariants $C^{(3)}_{3,0}$, $C^{(3)}_{5,0}$, et, pour $m = 9$, un nouveau covariant cubique $C^{(3)}_{9,0}$. Les covariants quadratiques de $(C^{(2)}_{6,0}\, x^6 + \ldots)$ produisent trois covariants biquadratiques de f, $C^{(4)}_{0,0}$, $C^{(4)}_{4,0}$, $C^{(4)}_{8,0}$, dont le dernier n'est pas irréductible, et peut être rejeté. On les obtiendrait, comme on l'a dit généralement, en associant f à ses covariants cubiques, ce qui produirait en outre $(C^{(4)}_{6,0}\, x^6 + \ldots)$. L'association dans (g) de f et de $(C^{(4)}_{4,0}\, x^4 + \ldots)$, produit pour $m = 1$ un covariant linéaire et du 5^e degré $C^{(5)}_{1,0}\, x + C^{(5)}_{0,1}\, y$, lequel associé à son tour à f dans la même formule, donne pour $m = 4$ un covariant du sixième degré et du 4^e ordre,

$$C^{(6)}_{4,0} = \overset{a_5}{C^{(5)}_{0,1}} - \overset{a_4}{C^{(5)}_{1,0}},$$

dont l'invariant quadratique

$$C^{(6)}_{4,0}\, C^{(6)}_{0,4} - C^{(6)}_{3,1}\, C^{(6)}_{1,3} + 3\, C^{(6)}_{2,2}\, C^{(6)}_{2,2},$$

et l'invariant cubique

$$C^{(6)}_{4,0}\, C^{(6)}_{2,2}\, C^{(6)}_{0,4} + 2\, C^{(6)}_{3,1}\, C^{(6)}_{2,2}\, C^{(6)}_{1,3} - C^{(6)}_{4,0}\, C^{(6)}_{1,3}\, C^{(6)}_{1,3} - C^{(6)}_{0,4}\, C^{(6)}_{3,4}\, C^{(6)}_{3,1} - C^{(6)}_{2,2}\, C^{(6)}_{2,2}\, C^{(6)}_{2,2},$$

représentent respectivement l'invariant du douzième degré, et le célèbre invariant du dix-huitième degré de M. Hermite, relatifs à la forme du 5ᵉ ordre.

On pourrait aller plus loin soit pour la forme du 5ᵉ ordre, soit pour d'autres formes; mais j'ai voulu montrer simplement l'usage de la formule (g), combinée avec le théorème I. On peut en déduire d'autres conséquences en la combinant avec le théorème II.

15. Si l'on prend effectivement pour f' un covariant relatif à deux formes indépendantes $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, fourni précisément par cette même formule, en sorte que, en faisant $g_1 = \frac{n_1 + n_2 - n'}{2}$ sous les conditions $n_2 > n_1 - n'$, on ait et $< n_1 + n'$

$$a'_{n',0} = \genfrac{}{}{0pt}{}{a^{(1)}_{n_1,0}}{a^{(2)}_{n_2-g_1,g_1}} - g_1 \genfrac{}{}{0pt}{}{a^{(1)}_{n_1-1,1}}{a^{(2)}_{n_2-g_1+1,g_1-1}} + \ldots,$$

on aura, en vertu du théorème II, un covariant du troisième degré relatif au système (f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$), et linéaire par rapport aux coefficients de chacune de ces formes. On obtiendra ainsi une nouvelle formule dans laquelle on pourra prendre pour f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, des covariants relatifs à une, à deux, ou à trois nouvelles formes indépendantes données précisément par ces mêmes formules, et toujours du premier degré par rapport aux coefficients de ces nouvelles formes, et l'on obtiendra en continuant ainsi une suite indéfinie de nouvelles formules, propres chacune à en produire d'autres.

Supposons actuellement que $A_{m,0}$ représente le coefficient principal d'un covariant du degré $(\theta + 1)$ par rapport aux coefficients de $(\theta + 1)$ formes $f, f^{(1)}, \ldots, f^{(\theta)}$, et du premier degré par rapport aux coefficients individuels de chacune de ces formes. En mettant en évidence les coefficients de l'une des formes f, il est permis d'écrire

$$A_{m,0} = \genfrac{}{}{0pt}{}{a_{n,0}}{x_{h,g}} - g \genfrac{}{}{0pt}{}{a_{n-1,1}}{x_{h+1,g-1}} + \frac{g(g-1)}{1.2} \genfrac{}{}{0pt}{}{a_{n-2,2}}{x_{h+2,g-2}} - \ldots \pm g \genfrac{}{}{0pt}{}{a_{n-g+1,g-1}}{x_{n'-1,1}} \mp \genfrac{}{}{0pt}{}{a_{n-g,g}}{x_{n',0}},$$

où $g = \frac{n + n' - m}{2}$, $h = n' - g$, et où n' est un nombre tel, que les inégalités $n' < n + m$, $n' > n - m$ soient satisfaites quels que soient les nombres donnés n et m, ce qui est toujours possible. On a par hypothèse, en écrivant partout $\Theta_{\mu\lambda}$ pour $\Theta_{\sigma(\mu\lambda)}$,

$$\Theta_{\mu\lambda} A_{m,0} = 0,$$

c'est-à-dire

$$g\,X_{h+1,g-1} = \Theta_{\mu\lambda} X_{h,g}, \quad (g-1)\,X_{h+2,g-2} = \Theta_{\mu\lambda} X_{h+1,g-1},$$
$$(g-2)\,X_{h+3,g-3} = \Theta_{\mu\lambda} X_{h+2,g-2},\ldots, \quad X_{n',0} = \Theta_{\mu\lambda} X_{n'-1,1}, \quad \Theta_{\mu\lambda} X_{n',0} = 0,$$

ou bien

$$g\,X_{h+1,g-1} = \Theta_{\mu\lambda} X_{h,g}, \quad g\,(g-1)\,X_{h+2,g-2} = \Theta^2_{\mu\lambda} X_{h,g},$$
$$g\,(g-1)\,(g-2)\,X_{h+3,g-3} = \Theta^3_{\mu\lambda} X_{h,g},\ldots, \quad g\ldots 2.1\,X_{n'-1,1} = \Theta^g_{\mu\lambda} X_{h,g},$$
$$\Theta^{g+1}_{\mu\lambda} X_{h,g} = 0.$$

Or ces équations sont précisément celles que l'on trouverait si l'on cherchait le covariant de degré θ

$$X_{n'0}\,x^{n'} + n'\,X_{n'-1,1}\,x^{n'-1} + \ldots$$

pour les formes $f^{(1)}, f^{(2)},\ldots, f^{(\theta)}$, et que l'on prît pour point de départ le coefficient $X_{n'-g,g}$. Et comme ce coefficient satisfait d'ailleurs évidemment aux conditions d'homogénéité quant aux indices, il en résulte que l'on peut prendre dans la formule (g), $a'_{n',0} = X_{n',0}$, et que, partant, cette formule est apte à reproduire de proche en proche tous les covariants relatifs à tant de formes indépendantes que l'on voudra, ces covariants contenant toujours linéairement les coefficients de chacune des formes et leur ensemble au degré $\theta + 1$, nombre de ces mêmes formes. En observera que, G désignant la somme des seconds indices d'un terme de $A_{m,0}$, on doit avoir

$$g = G = \frac{n + n_1 + \ldots + n_\theta - m}{2},$$

et par suite

$$n' = n_1 + n_2 + \ldots + n_\theta;$$

et comme $m < n + n_1 + \ldots + n_\theta$, c'est-à-dire $m < n' + n$, la condition nécessaire $n' > m - n$ se trouve bien satisfaite. On remarquera aussi que si $a_{n,0}, a_{n-1,1},\ldots$, étaient supposés, dans $A_{m,0}$, représenter les coefficients successifs d'un covariant d'ordre n et de degré θ' pour plusieurs formes $f, f'\ldots$, dont un nombre quelconque, peuvent coïncider, $X_{n',0}, X_{n'-1,1},\ldots$, devraient représenter les coefficients successifs d'un autre covariant d'ordre n' et de degré $\theta'' = \theta + 1 - \theta'$ pour d'autres formes indépendantes des premières et dont plusieurs pourraient coïncider, $\theta + 1$ étant le degré de $A_{m,0}$ pour l'ensemble des coefficients de toutes les formes.

Le coefficient principal $A_{m,0}$ d'un covariant relatif à i formes $f_1, f_2, \ldots, f_i$, dont les coefficients entrent respectivement au degré $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i$, dans ce covariant, peut être censé déduit d'un covariant de même ordre et relatif à $(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_i)$ formes indépendantes dont les coefficients entrent linéairement dans ce covariant ; θ_1 de ces formes étant de l'ordre de f_1, θ_2 de de f_2, etc. Le nombre d'arbitraires qui entrent dans le nouveau coefficient principal $A_{m,0}$ étant évidemment plus grand que dans $A_{m,0}$, on peut donc dire que $A_{m,0}$ peut être produit par la formule (g) étendue au nouveau système, et où l'on introduit après coup la coïncidence des θ_1 formes de même ordre, des θ_2 autres formes de même ordre, etc. Mais la coïncidence de certains groupes de coefficients établissant des liaisons nouvelles, il peut arriver alors que $A_{m,0}$ soit identiquement nul, ce qui signifiera naturellement que le covariant supposé n'existe pas. C'est ce qui a lieu par exemple lorsque, en se bornant à deux formes, on suppose dans (g) $\mathrm{m} = 0$, $\mathrm{f} = \mathrm{f}' = f$, et n un nombre impair.

Dans le cas particulier de $\theta + 1$ formes de même ordre, si θ d'entre elles coïncident, l'une f demeurant indépendante, $X_{n',0}$, $X_{n'-1,1}, \ldots$, devront être les coefficients successifs d'un covariant de degré θ et d'ordre n' pour les θ formes coïncidentes. Et si l'on suppose après coup que f coïncide encore avec les autres formes f, on arrive, d'après ce qui vient d'être dit, à cette conclusion :

Que tout covariant, de degré $\theta + 1$, relatif à une forme binaire f, peut être déduit d'un covariant de degré inférieur d'une unité, et cela par l'association directe dans la formule (g) de la forme f à ce dernier covariant.

On a vu plusieurs exemples de cette déduction dans le numéro précédent, mais il restait à faire voir qu'elle ne laissait échapper aucun covariant.

On peut dire plus généralement que tous les covariants relatifs à tant de formes binaires que l'on voudra, peuvent être déduits de l'association directe et successive dans la formule (g) de chacune des formes à leurs covariants de degré inférieur d'une unité.

16. Voici deux exemples très-simples propres à éclairer les faits établis dans le numéro qui précède. Il s'agit d'abord du système de covariants irréductibles pour deux formes du second ordre donnés tout de suite par la formule (g)

$$\begin{cases} a_2 x^2 + 2 a_1 xy + a_0 y^2, \\ b_2 x^2 + 2 b_1 xy + b_0 y^2. \end{cases}$$

Covariants quadratiques.

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} \underline{a_2 b_0 - 2 a_1 b_1 + a_0 b_2,} \\ \underline{a_2 a_0 - a_1 a_1,} \\ b_2 b_0 - b_1 b_1, \end{cases}$$

$$(4)\ (a_2 b_1 - a_1 b_2) x^2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2) xy + (a_1 b_0 - a_0 b_1) y^2.$$

Les invariants (2) et (3) résultent de (1), quand on fait coïncider la deuxième forme avec la première, ou *vice versâ;* (4) s'évanouit par la même coïncidence. La *résultante* des deux formes proposées étant, d'après les belles recherches de M. Faà de Bruno sur l'élimination, un invariant biquadratique et séparément quadratique pour les deux formes, ne pourra être que le carré de (1) ajouté au produit de (2) et (3) par une indéterminée. Cette résultante devant s'évanouir quand les deux formes coïncident, l'indéterminée sera égale à -4, et l'on aura pour ladite résultante connue

$$(a_2 b_0 - 2 a_1 b_1 + a_0 b_2)^2 - 4 (a_2 a_0 - a_1 a_1)(b_2 b_0 - b_1 b_1).$$

Soient en second lieu deux formes du 3e ordre

$$\begin{cases} a_3 x^3 + 3 a_2 x^2 y + 3 a_1 xy^2 + a_0 y^3, \\ b_3 x^3 + 3 b_2 x^2 y + 3 b_1 xy^2 + b_0 y^3. \end{cases}$$

Covariants quadratiques.

(1) $\quad A^{(1,1)}_{0,0} = a_3 b_0 - 3 a_2 b_1 + 3 a_1 b_2 - a_0 b_3 \qquad$ pour $b = a$ ..... o.

$$(2) \begin{cases} A^{(1,1)}_{2,0} = a_3 b_1 - 2 a_2 b_2 + a_1 b_3 \\ 2 A^{(1,1)}_{1,1} = a_3 b_0 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_0 b_3 \\ A^{(1,1)}_{0,2} = a_2 b_0 - 2 a_1 b_1 + a_0 b_2 \end{cases}$$

pour $b = a$ et $a = b$ on a (2′) et (2″).

Covariants quadratiques (suite).

$$(2')\left\{\begin{aligned} A^{(2,0)}_{2,0} &= a_3 a_1 - a_2^2 \\ A^{(2,0)}_{1,1} &= a_3 a_0 - a_2 a_1 \\ A^{(2,0)}_{0,2} &= a_2 a_0 - a_1^2 \end{aligned}\right.$$

$$(2'')\left\{\begin{aligned} A^{(0,2)}_{2,0} &= b_3 b_1 - b_2^2 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(3)\left\{\begin{aligned} A^{(1,1)}_{4,0} &= a_3 b_2 - a_2 b_3 \\ 2\,A^{(1,1)}_{3,1} &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ 6\,A^{(1,1)}_{2,2} &= a_3 b_0 + 3\,a_2 b_1 - 3\,a_1 b_2 - a_0 b_3 \\ 2\,A^{(1,1)}_{1,3} &= a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ A^{(1,1)}_{0,4} &= a_1 b_0 - a_0 b_1 \end{aligned}\right. \qquad \begin{matrix}\text{pour } b = a \\ \ldots\ldots\ 0.\end{matrix}$$

Covariants cubiques.

$$(4)\left\{\begin{aligned} A^{(2,1)}_{1,0} &= A^{(2,0)}_{2,0}\, b_1 - 2\,A^{(2,0)}_{1,1}\, b_2 + A^{(2,0)}_{0,2}\, b_3 \\ A^{(2,1)}_{0,1} &= A^{(2,0)}_{0,2}\, b_2 - 2\,A^{(2,0)}_{1,1}\, b_1 + A^{(2,0)}_{2,0}\, b_0 \end{aligned}\right. \qquad \begin{matrix}\text{pour } b = a \\ \ldots\ldots\ 0.\end{matrix}$$

$$(4')\left\{\begin{aligned} A^{(1,2)}_{1,0} &= \ldots \\ A^{(1,2)}_{0,1} &= \ldots \end{aligned}\right. \qquad \begin{matrix}\text{(changer les } a \text{ en } b, \\ \text{et } \textit{vice versâ}.\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\text{pour } b = a \\ \ldots\ldots\ 0.\end{matrix}$$

$$(5)\left\{\begin{aligned} A^{(2,1)}_{3,0} &= A^{(2,0)}_{2,0}\, b_2 - A^{(2,0)}_{1,1}\, b_3 \\ 3\,A^{(2,1)}_{2,1} &= 2\,A^{(2,0)}_{2,0}\, b_1 - A^{(2,0)}_{1,1}\, b_2 - A^{(2,0)}_{0,3}\, b_3 \\ 3\,A^{(2,1)}_{1,2} &= A^{(2,0)}_{2,0}\, b_0 + A^{(2,0)}_{1,1}\, b_1 - 2\,A^{(2,0)}_{0,2}\, b_2 \\ A^{(2,1)}_{0,3} &= A^{(2,0)}_{1,1}\, b_0 - A^{(2,0)}_{0,2}\, b_1 \end{aligned}\right.$$

pour $b = a$ on a le covariant cubique connu, relatif à une forme unique.

$$(5')\left\{\begin{aligned} A^{(1,2)}_{3,0} &= \ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Je crois pouvoir me dispenser ici d'écrire les covariants biquadratiques, et aussi la résultante que l'on peut déduire de diverses manières de ces derniers covariants et des précédents, en s'appuyant sur le théorème I, et qui renferme nécessairement trois coefficients indéterminés, que les opérations Θ ne peuvent faire disparaître, et qu'il faut déterminer par des considérations particulières, inhérentes à la théorie de l'élimination. Il en serait de même pour deux formes du 4^e ordre, c'est-à-dire que dans ce cas il existe douze invariants du huitième degré et du quatrième par rapport à chaque forme, linéairement indépendants, de façon que la résultante renferme nécessairement douze indéterminées sur le compte desquelles les opérations Θ et l'égalité des coefficients *équidistants des extrêmes* ne peuvent rien apprendre, etc.

Il est presque inutile de faire observer que la représentation d'un covariant au moyen des coefficients de covariants plus simples est généralement préférable à la représentation immédiate par les coefficients de la forme, et qu'en adoptant le premier mode, la déduction des coefficients successifs d'un covariant de l'un d'entre eux suit toujours les lois ordinaires, comme on le voit par exemple sur le covariant très-simple (5).

V.

D'une certaine extension aux formes ternaires, quaternaires,... de quelques résultats du précédent paragraphe.

17. Il est facile de se convaincre, et l'on pourra entrevoir par ce qui suit qu'en excluant les puissances successives jusqu'à la $(\varkappa - 1)^{ième}$ inclusivement, d'une forme f à $\varkappa$ indéterminées, le plus faible degré que puissent admettre les covariants relatifs à cette forme, est précisément $\varkappa$: et une chose analogue a lieu pour le système de plusieurs formes indépendantes. Considérons donc, pour procéder par ordre, trois formes ternaires f, f', f'' d'ordre n, n', n'', et cherchons les covariants du troisième degré pour l'ensemble de ces formes, et du premier pour chacune en particulier. Si l'on fait

$$g = \frac{n + n' + n'' - m}{3},$$

le premier terme du coefficient principal $A_{m,o,o}$, sera sous les conditions $n' - g > o$, $n'' - g > o$,

$$\begin{array}{c} a_{n,o,o} \\ a'_{n'-g,g,o} \\ a''_{n''-g,o,g}. \end{array}$$

L'opération $\Theta_{\mu\nu}$ qu'il faut toujours entendre pour $\Theta_{\sigma(\mu\nu)}$, à moins qu'on ne prévienne du contraire, devant annuler l'ensemble $X_{o,o}$ des termes qui ont $a_{n,o,o}$ pour facteur, on aura

$$X_{o,o} \quad \text{ou} \quad X = \sum_{h=o}^{h=g} (-1)^h \frac{g, g-1 \ldots (g-h+1)}{1.2\ldots h} \cdot a'_{n'-g,g-h,h}\, a''_{n''-g,h,g-h}$$

en sorte que X peut être considéré comme l'invariant quadratique de deux formes binaires indépendantes, ce qui rentre dans une remarque faite précédemment. Maintenant si l'on représente $A_{m,o,o}$ par

$$A_{m,o,o} = \sum_{i=o}^{i=n} \left(\begin{array}{c} a_{n-i,i,o} X_{o,i} + a_{n-i,i-i,1} X_{1,i-1} + a_{n-i,i-2,2} X_{2,i-2} + \ldots \\ + a_{n-i,o,i} X_{i,o} \end{array} \right),$$

on devra avoir

$$(X) \qquad \left\{ \begin{array}{r} \Theta_{\nu\mu} X_{i,o} = o, \\ i X_{i,o} = -\Theta_{\nu\mu} X_{i-1,1}, \\ (i-1) X_{i-1,1} = -\Theta_{\nu\mu} X_{i-2,2}, \\ (i-2) X_{i-2,2} = -\Theta_{\nu\mu} X_{i-3,3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2 X_{2,i-2} = -\Theta_{\nu\mu} X_{1,i-1}, \\ X_{1,i-1} = -\Theta_{\nu\mu} X_{0,i}, \end{array} \right.$$

d'où

$$X_{1,i-1} = -\Theta_{\nu\mu} X_{0,i},$$

$$X_{2,i-2} = \frac{1}{2} \Theta^2_{\nu\mu} X_{0,i},$$

$$X_{3,i-3} = -\frac{1}{1.2.3} \Theta^3_{\nu\mu} X_{0,i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{j,i-j} = (-1)^j \frac{1}{1.2\ldots j} \Theta^j_{\nu\mu} X_{0,i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{i,0} = (-1)^i \frac{1}{1.2\ldots i} \Theta^i_{\nu\mu} X_{0,i},$$

et aussi

$$\Theta^{i+1}_{\nu\mu} X_{0,i} = 0, \quad \Theta_{\mu\nu} X_{0,i} = 0.$$

La considération de deux termes consécutifs de $A_{m,0,0}$ répondant à deux valeurs successives de i, i et $i+1$,

$$a_{n-i-1,i+1,0} X_{0,i+1} + a_{n-i,i,0} X_{0,i},$$

donne ensuite

$$(i+1) X_{0,i+1} = -\Theta_{\mu\lambda} X_{0,i};$$

d'où

$$X_{0,1} = -\Theta_{\mu\lambda} X,$$

$$2 X_{0,2} = -\Theta_{\mu\lambda} X_{0,1},$$

$$3 X_{0,3} = -\Theta_{\mu\lambda} X_{0,2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et par suite

$$X_{0,i} = (-1)^i \frac{\Theta^i_{\mu\lambda} X}{1.2\ldots i}.$$

On a donc

$$X_{j,i-j} = (-1)^{i+j} \frac{\Theta^j_{\nu\mu} \Theta^i_{\mu\lambda} X}{j!\, i!},$$

et finalement

$$(h) \qquad A_{m,0,0} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=i} \frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!} a_{n-i,i-j,j}\, \Theta^{j}_{\nu\mu}\, \Theta^{i}_{\mu\lambda}\, X.$$

Il reste à vérifier que

$$\Theta_{\mu\nu}\, X_{0,i} = 0, \quad \text{et} \quad \Theta_{\nu\mu}\, X_{i,0}, \quad \text{ou} \quad \Theta^{i+1}_{\nu\mu}\, X_{0,i} = 0.$$

Cela suit tout de suite de la remarque déjà faite et que l'on peut vérifier, si l'on veut, sur une fonction des coefficients généralement, savoir que deux opérations Θ, qui ont un indice de même rang commun, peuvent être interverties. Il résulte de cette remarque que

$$\Theta_{\mu\nu}\, X_{0,i} = \frac{(-1)^i}{i!}\, \Theta_{\mu\nu}\, \Theta^{i}_{\mu\lambda}\, X = \frac{(-1)^i}{i!}\, \Theta^{i}_{\mu\lambda}\, \Theta_{\mu\nu}\, X = 0,$$

$$\Theta_{\nu\mu}\, X_{i,0} = \frac{(-1)^i}{i!}\, \Theta_{\nu\mu}\, \Theta^{i}_{\nu\lambda}\, X = \frac{(-1)^i}{i!}\, \Theta^{i}_{\nu\lambda}\, \Theta_{\nu\mu}\, X = 0.$$

Pour trois formes du second ordre, par exemple, en supposant $m = 0$, on a cet invariant cubique

$$A_{0,0,0} = \begin{array}{ccc} a^{s(6)}_{200} & a^{s(9)}_{200} & a^{s(6)}_{110} \\ a'_{020} & -\ 2\,.\ a'_{011} & +\ 2\,.\ a'_{101} \\ a''_{002} & a''_{011} & a''_{011} \end{array}$$

où par le signe s j'entends l'ensemble des termes qui se déduisent de celui que ce signe affecte par les permutations des indices qui ne troublent pas dans chaque colonne la somme des mêmes indices. J'indique par un numéro placé à côté de ce signe le nombre des termes déduits. Si l'on faisait coïncider les trois formes, on retrouverait l'invariant cubique relatif à la forme ternaire du second ordre : et si l'on prend pour f le carré d'une forme du premier ordre, et pour f′, f″ deux formes identiques du second, on reproduira l'invariant biquadratique pour une forme du premier ordre et une du deuxième, dont il a été question au n° **6**.

Pour trois formes indépendantes du 3^e ordre, on a

$$A_{000} = \begin{matrix} \overset{(6)}{\bowtie} \\ a_{300} \\ a'_{030} \\ a''_{003} \end{matrix} + 3 \,.\, \begin{matrix} \overset{(6)}{\bowtie} \\ a_{300} \\ a'_{012} \\ a''_{021} \end{matrix} \bowtie_{(3)} + 6 \,.\, \begin{matrix} \overset{(6)}{\bowtie} \\ a_{210} \\ a'_{111} \\ a''_{012} \end{matrix} \bowtie_{(3)} + 3 \,.\, \begin{matrix} \overset{(6)}{\bowtie} \\ a_{210} \\ a'_{021} \\ a''_{102} \end{matrix} \bowtie_{(2)},$$

où le signe $\bowtie$ indique la permutation des colonnes avec changement de signe à chaque déplacement, et le même signe placé verticalement indique avec changement de signe les différents termes que l'on peut déduire de ceux qu'engendre le premier signe, par le transport vertical des lignes horizontales les unes dans les autres. Le n° (6) du deuxième terme, par exemple, indique que l'on peut déduire 6 termes de celui qui est écrit par la simple permutation des colonnes, et le (3) affecté au second signe signifie que chacun de ces termes peut en produire 3 par le transport des lignes. En sorte que le nombre total des termes de l'invariant est

$$6 + 18 + 18 + 12 = 54.$$

Si deux des formes coïncident, cet invariant est identiquement nul.

Si généralement on fait coïncider les deux formes f′, f″, le nombre des termes de X sera dédoublé. Et si l'on suppose après que f coïncide avec les deux autres formes, la formule précédente répondra aux covariants cubiques d'une forme ternaire d'ordre n. Mais on peut dans ce cas introduire immédiatement la coïncidence des trois formes, pourvu que dans l'application successive des opérations Θ, quand un terme se présentera dans $A_{m,o,o}$ avec l'exposant 2 ou 3, on ait soin de diviser le coefficient du terme dont il s'agit par son exposant; on rendra ainsi le calcul à peu près trois fois moins long, et l'on pourra l'abréger encore généralement par des considérations de symétrie. On aura ainsi par exemple cet invariant cubique relatif à la forme ternaire du 4^e ordre

$$\begin{matrix} 400 \\ 040 \\ 004 \end{matrix} - 4 \,.\, \begin{matrix} \overset{(3)}{\sim} \\ 400 \\ 031 \\ 013 \end{matrix} + 3 \,.\, \begin{matrix} \overset{(3)}{\sim} \\ 400 \\ 022 \\ 022 \end{matrix} - 12 \begin{matrix} \overset{(6)}{\sim} \\ 310 \\ 112 \\ 022 \end{matrix} + 12 \,.\, \begin{matrix} \overset{(3)}{\sim} \\ 220 \\ 112 \\ 112 \end{matrix} + 12 \begin{matrix} \overset{(3)}{\sim} \\ 310 \\ 121 \\ 013 \end{matrix}$$

$$+ 4 \begin{matrix} \overset{(2)}{\sim} \\ 310 \\ 031 \\ 103 \end{matrix} + 6 \begin{matrix} 220 \\ 202 \\ 022 \end{matrix} - 12 \,.\, \begin{matrix} 121 \\ 112 \\ 211 \end{matrix};$$

et cet invariant cubique pour la forme du 6^e ordre

$$\begin{matrix}600\\060\\006\end{matrix} - 6\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{600}}\\051\\015\end{matrix} + 15\,\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{600}}\\042\\024\end{matrix} - 10\,\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{600}}\\033\\033\end{matrix} + 30\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{510}}\\015\\141\end{matrix} + 6\,\begin{matrix}\overset{(2)}{\widetilde{510}}\\051\\105\end{matrix}$$

$$- 60\,.\begin{matrix}\overset{(6)}{\widetilde{510}}\\132\\024\end{matrix} - 30\,.\begin{matrix}\overset{(6)}{\widetilde{510}}\\114\\042\end{matrix} + 60\,.\begin{matrix}\overset{(6)}{\widetilde{510}}\\123\\033\end{matrix} + 90\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{420}}\\222\\024\end{matrix} + 120\,.\begin{matrix}\overset{(6)}{\widetilde{420}}\\132\\114\end{matrix} - 60\,.\begin{matrix}\overset{(6)}{\widetilde{420}}\\213\\033\end{matrix}$$

$$- 90\,.\begin{matrix}\overset{(6)}{\widetilde{420}}\\123\\123\end{matrix} + 15\,.\begin{matrix}\overset{(2)}{\widetilde{420}}\\204\\042\end{matrix} - 180\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{411}}\\222\\033\end{matrix} - 90\,.\begin{matrix}411\\141\\114\end{matrix} + 60\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{411}}\\132\\123\end{matrix} + 180\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{330}}\\123\\213\end{matrix}$$

$$+ 20\,.\begin{matrix}303\\330\\033\end{matrix} + 180\,.\begin{matrix}\overset{(3)}{\widetilde{321}}\\222\\123\end{matrix} - 300\,.\begin{matrix}\overset{(2)}{\widetilde{321}}\\213\\132\end{matrix} - 90\,.\begin{matrix}222\\222\\222\end{matrix}.$$

18. La valeur de g étant dans le cas de trois formes coincidentes, c'est-à-dire dans le cas de la forme unique f, $g = n - \frac{m}{3}$ et X étant nul si $n - g$ est impair, on voit que la forme ternaire d'ordre pair n admet $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}$ seulement covariants cubiques d'ordre

$$0,\ 6,\ 12,\ 18, \ldots,\ 3n,$$

y compris le cube de la forme; et la forme ternaire d'ordre impair n admet $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ seulement covariants cubiques d'ordre

$$3,\ 9,\ 15,\ 21, \ldots,\ 3n,$$

y compris le cube de la forme.

En prenant pour f, f′, f″ dans la formule (h) le carré de la forme donnée f, on obtiendra, en vertu du théorème I, n covariants du sixième degré et d'ordre

$$0,\ 6,\ 12,\ 18, \ldots,\ 6n$$

dont certains pourront être le carré de covariants cubiques ou le produit de covariants biquadratiques par le carré de la forme, etc. En particulier, on peut dire qu'au delà du second ordre toutes les formes ternaires admettent un invariant irréductible du sixième degré qui joue à leur égard le même rôle que l'invariant biquadratique pour les formes binaires.

Si l'on prend pour f dans la formule (h) un covariant cubique relatif à trois formes indépendantes ou coïncidentes f_1, f_2, f_3 et donné par cette même formule, on obtiendra une nouvelle formule propre à produire une suite de covariants du cinquième degré pour cinq formes indépendantes que l'on pourra ensuite faire coïncider en tout ou en partie. Et l'on pourra continuer ainsi à l'infini en prenant pour une, deux, trois,... des nouvelles formes, soit dans les formules (h), soit dans celles qu'on en déduit, des covariants fournis par une quelconque de ces mêmes formules. Mais on voit se produire ici des lacunes dans les degrés des covariants dérivés, et par exemple on ne voit pas surgir les covariants du quatrième degré. Il est vrai que dans la formule primitive (h) on aurait pu prendre d'abord pour f le produit de deux formes f_1, f_2, ce qui aurait fourni une suite de covariants biquadratiques : mais tous les covariants biquadratiques n'auraient pas été reproduits. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la forme ternaire du troisième ordre qui admet un invariant biquadratique. Or si l'on se reporte aux calculs du numéro précédent et qu'on suppose que $A_{m,0,0}$ représente maintenant le coefficient principal d'un covariant relatif à tant de formes qu'on voudra, les coefficients de l'une des formes, f, étant seuls astreints à entrer linéairement dans $A_{m,0,0}$, on pourra écrire ce coefficient principal sous la forme qu'on lui a donnée dans le numéro cité, et l'on trouvera entre les $X_{j,i}$ les mêmes équations (X) (*) qui font tout dépendre de la première fonction X, laquelle, devant s'annuler par $\Theta_{\mu,\nu}$ et $\Theta_{\nu,\mu}$, pourra être considérée dans tous les cas comme un invariant relatif à des *formes binaires*, le degré de cet invariant étant inférieur d'une unité à celui de $A_{m,0,0}$. En appelant f_1, f_2,... les formes dont X est supposée renfermer les coefficients aux degrés respectifs θ_1, θ_2,..., on aura pour la somme commune des seconds et des troisièmes indices de l'expression de $A_{m,0,0}$, $g = \dfrac{n + n_1\theta_1 + n_2\theta_2 + \ldots - m}{3}$: celle

(*) Pages 45, 46.

des premiers indices de l'expression de X sera donc

$$g + m - n \quad \text{ou} \quad n_1 \theta_1 + n_2 \theta_2 + \ldots - 2g = g'.$$

Il faudra donc sous ces conditions faciles à interpréter chercher tous les *invariants binaires* X, et chacun d'eux donnera dans (h) un covariant ternaire d'un degré supérieur d'une unité. On pourra faire coïncider ensuite f avec une quelconque des autres formes. Cette coïncidence diminuant généralement le nombre des *arbitraires*, il en résulte qu'on peut par ce moyen reproduire de proche en proche tous les covariants ternaires relatifs à tant de formes que l'on voudra.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple, considérons la forme ternaire du cinquième ordre et cherchons ses covariants biquadratiques du second ordre. On a ici

$$g = \frac{18}{3} = 6, \quad g + m - 5 = 3.$$

On peut faire ces trois hypothèses, pour la série des premiers indices de

$\mathrm{X}, \begin{smallmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$, en sorte que X peut être considéré comme un *invariant binaire* et cubique, soit pour deux formes *binaires*, l'une du second ordre et l'autre du cinquième, les coefficients de celle-ci entrant dans X au carré, soit pour trois *formes binaires* d'ordre 3, 4, 5, soit enfin pour une *forme binaire* unique du quatrième ordre. On trouve pour ces trois hypothèses :

$${}_1\mathrm{X} = \begin{smallmatrix} \widetilde{320} \\ 041 \\ 005 \end{smallmatrix} - 4.\begin{smallmatrix} \widetilde{320} \\ 032 \\ 014 \end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix} \widetilde{320} \\ 023 \\ 023 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 311 \\ 050 \\ 005 \end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix} 311 \\ 041 \\ 014 \end{smallmatrix} - 2.\begin{smallmatrix} 311 \\ 032 \\ 023 \end{smallmatrix},$$

$${}_2\mathrm{X} = \begin{smallmatrix} \widetilde{230} \\ 131 \\ 005 \end{smallmatrix} - 3.\begin{smallmatrix} \widetilde{230} \\ 122 \\ 014 \end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix} \widetilde{230} \\ 113 \\ 023 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \widetilde{230} \\ 104 \\ 032 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \widetilde{221} \\ 140 \\ 005 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \widetilde{221} \\ 131 \\ 014 \end{smallmatrix} + 3.\begin{smallmatrix} \widetilde{221} \\ 122 \\ 023 \end{smallmatrix} - 5.\begin{smallmatrix} \widetilde{221} \\ 113 \\ 032 \end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix} \widetilde{221} \\ 104 \\ 041 \end{smallmatrix},$$

$${}_3\mathrm{X} = \begin{smallmatrix} 140 \\ 122 \\ 104 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 140 \\ 113 \\ 113 \end{smallmatrix} + 2.\begin{smallmatrix} 131 \\ 122 \\ 113 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 122 \\ 122 \\ 122 \end{smallmatrix}.$$

En substituant successivement chacune de ces expressions dans (h) et y supposant $n = 5$, on aura donc trois covariants du quatrième degré et du second ordre, linéairement indépendants, relatifs à deux formes du cinquième ordre, les coefficients de l'une f entrant au premier degré dans ces covariants, et ceux de f au troisième. Et en supposant ensuite $\mathfrak{f} = f$, on aura tous les covariants biquadratiques et du second ordre, relatifs à une forme unique du cinquième ordre.

En suivant les indications précédentes, on peut trouver diverses formules assez générales; je noterai seulement la suivante qui se rapporte à l'invariant biquadratique de quatre formes f, f_1, f_2, f_3 du même ordre $n = 3n'$, et que l'on obtient en prenant pour **X** dans (h)

$$X = \sum_{k=0}^{k=2n'} \frac{(-1)^k}{k!} \mathfrak{a}^{(1)}_{n', 2n'-k, k} \Theta^k_{\nu\mu} Z,$$

où

$$Z = \sum_{h=0}^{h=2n'} (-1)^h \frac{2n'.2n'-1\ldots\ldots 2n'-h+1}{1.2\ldots h} \cdot \mathfrak{a}^{(2)}_{0,2n'-h,n'+h}, \mathfrak{a}^{(3)}_{0,h,3n'-h}$$

et l'on pourra faire coïncider deux, trois ou les quatre formes. On voit par là que toute forme ternaire d'ordre $3n'$ admet un invariant unique biquadratique. Je rappellerai encore que la coïncidence des formes permet presque toujours de resserrer les limites des $\sum$, quand on introduit dès l'abord cette coïncidence, ce qui est plus expéditif, pourvu que l'on ait soin de diviser par l'exposant le coefficient de chaque terme à mesure qu'il se présente et que l'on s'arrête quand tous les termes *distincts*, ou plutôt les types distincts sont ainsi reproduits.

19. La généralisation de proche en proche des résultats précédents n'offre actuellement aucune difficulté. On aura ainsi pour les formes quaternaires une formule analogue à (h), savoir

$$A_{m,0,0,0} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=i} \sum_{h=0}^{h=j} \frac{(-1)^{i+j+h}}{h!\,j!\,i!} \mathfrak{a}_{n-i,i-j+h,j-h,h} \Theta^h_{\rho\nu} \Theta^j_{\nu\mu} \Theta^i_{\mu\lambda} X,$$

où X peut être considéré comme un invariant *ternaire* dans le sens précédemment indiqué. On en conclut en particulier qu'une forme quaternaire f d'ordre pair n admet $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}$ seulement covariants biquadratiques d'ordre

$$0, 8, 16, \ldots, 4n,$$

y compris la quatrième puissance de la forme ; et qu'une forme f d'ordre impair n admet $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ seulement covariants biquadratiques d'ordre

$$4,\ 12,\ 20,\ldots,\ 4n,$$

y compris la quatrième puissance de la forme. Ce sont là les covariants du plus faible degré en excluant les puissances 1, 2, 3 de la forme. Rien ne serait plus simple que d'écrire la formule analogue pour le cas de $\varkappa$ variables, ce qui me paraît parfaitement inutile ; elle donnerait lieu à des conséquences de même nature que celles des précédents numéros, et l'on en conclurait en particulier qu'une forme $\varkappa^{re}$ d'ordre pair n admet $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2}$ seulement covariants de degré $\varkappa$, d'ordre

$$0,\ 2\varkappa,\ 4\varkappa,\ldots,\ n\varkappa\ :$$

qu'une forme d'ordre impair n admet $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n+1}{2}$ seulement covariants de degré $\varkappa$, et d'ordre

$$\varkappa,\ 3\varkappa,\ 5\varkappa,\ldots,\ n\varkappa,$$

y compris la puissance $\varkappa$ de la forme ; que ce sont là les covariants du plus faible degré, en excluant les puissances successives de la forme jusqu'à $\varkappa - 1$ inclusivement.

Je bornerai là présentement le développement des conséquences immédiates des théorèmes I, II, aidés des formules (h) : les questions diverses qui se présenteraient spontanément, et par exemple celles de savoir de combien de manières tous les covariants d'un degré donné peuvent être produits par une association convenable de covariants de degrés inférieurs, etc., conduisent à une nature de recherches principalement arithmétiques qui demandent une analyse plus pure, si je puis m'exprimer ainsi, et dont on trouve de remarquables exemples dans les ingénieux travaux de MM. Hermite et Sylvester.

Je laisse aussi de côté ce qui concerne les formes à groupes de variables indépendants ou correspondants, et je passe au dernier paragraphe.

VI.

Du nombre de termes d'un covariant et de la loi de réciprocité de M. Sylvester.

20. En partant de cette observation que l'opération différentielle qui doit annuler le coefficient principal d'un covariant relatif à une forme binaire f, diminue d'une unité la somme des indices (*le poids* d'après l'auteur) de chaque terme de ce coefficient (il faut entendre qu'on a supprimé les premiers indices de chaque lettre), M. Cayley, dans ses profondes recherches sur la partition des nombres, est arrivé à une ingénieuse solution du problème qui a pour objet la détermination du nombre de covariants, d'un degré donné, relatifs à une forme unique f. Il suffisait, en effet, pour résoudre ce problème de connaître le nombre de termes de poids constant $g = \frac{n\theta - m}{2}$, et de degré θ qui concourent à l'expression la plus générale du coefficient principal du covariant. Ce nombre étant représenté par $N(n, \theta, g)$, la différence $N(n, \theta, g) - N(n, \theta, g - 1)$ indiquait alors le nombre d'arbitraires qui restaient après l'annulation du coefficient principal par l'effet de l'opération mentionnée, c'est-à-dire le nombre de covariants, linéairement indépendants, d'un degré et d'un ordre déterminés. Ici se présentait naturellement ce problème d'Euler (*De partitione num.*) :

De combien de manières peut-on former un nombre donné g, par l'addition de θ nombres pris dans la suite $0, 1, 2, \ldots, n$, ces nombres pouvant être pris avec répétition?

Le nombre requis est, comme on sait, le coefficient de $u^\theta x^g$ dans le développement ascendant de

$$1 : \prod_{i=0}^{i=n} (1 - ux^i),$$

Π désignant à l'ordinaire un produit de $n+1$ facteurs. En supposant ce développement de la forme

$$1 + P_1 u + P_2 u^2 + \ldots + P_\theta u^\theta + \ldots$$

et changeant u en ux, on trouve tout de suite, avec Euler,

$$P_\theta = \frac{(1-x^{\theta+1})(1-x^{\theta+2})\ldots\ldots(1-x^{\theta+n})}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots(1-x^n)},$$

en sorte que $N(n, \theta, g)$ est donné par le coefficient de x^g dans le quotient fini de cette division. Cette expression P_θ restant évidemment la même quand on échange l'une dans l'autre les lettres n et θ, M. Cayley en a conclu, en passant, la démonstration la plus simple que l'on puisse donner de l'importante loi de M. Sylvester, loi que M. Hermite a démontrée le premier par d'autres considérations et dont il a tiré un très-grand parti dans son beau Mémoire sur les formes à deux indéterminées. Elle est comprise comme on voit dans cet énoncé :

A tout covariant de degré θ et d'ordre m relatif à une forme binaire d'ordre n, correspond un covariant de degré n et d'ordre m pour la forme binaire d'ordre θ.

En suivant le point de vue de M. Cayley et s'appuyant sur la constitution des covariants établie au commencement, on peut étendre les résultats précédents au cas de plusieurs formes binaires. Le nombre de termes qui entrent dans l'expression la plus générale d'un coefficient quelconque $A_{p,q}$ d'un covariant relatif à $h+1$ formes binaires $f, f_1, f_2, \ldots, f_h$, est évidemment donné par la réponse à cette question :

De combien de manières peut-on former un nombre donné g $\left(\text{ici } g = \frac{n\theta + n_1\theta_1 + n_h\theta_h - m}{2} + q\right)$ par l'addition, avec ou sans répétition, de θ nombres pris dans la série $0, 1, 2, \ldots, n$; *plus* θ_1 nombres pris dans la série $0, 1, 2, \ldots, n_1; \ldots$ *plus* θ_h nombres pris dans la série $0, 1, 2, \ldots, n_h$?

Il est facile de voir, avec un peu d'attention, que le nombre requis de partitions est donné par le coefficient de $u^\theta u_1^{\theta_1} \ldots u_h^{\theta_h} x^g$, dans le développement ascendant de la fonction

$$1 : \prod_{i=0}^{i=n} (1-ux^i) \times \prod_{i_1=0}^{i_1=n_1} (1-u_1 x^{i_1}) \times \ldots \times \prod_{i_h=0}^{i_h=n_h} (1-u_h x^{i_h}),$$

ou bien par le coefficient de x^g dans le quotient fini ou le développement ascendant de

$$(\pi)\qquad \prod_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1-x^{\theta+i}}{1-x^{i}}\right)\times\prod_{i_1=1}^{i_1=n_1}\left(\frac{1-x^{\theta_1+i_1}}{1-x^{i_1}}\right)\times\ldots\times\prod_{i_h=1}^{i_h=n_h}\left(\frac{1-x^{\theta_h+i_h}}{1-x^{i_h}}\right).$$

L'opération $\Theta_{\sigma(\mu\lambda)}$ étant seule suffisante, comme on l'a vu, pour l'entière détermination du coefficient principal $A_{m,0}$, et son effet se réduisant encore à diminuer d'une unité le poids de chaque terme de $A_{m,0}$, le nombre d'arbitraires que renfermera $A_{m,0}$ sera égal à

$$N(n, n_1,\ldots, n_h, \theta, \theta_1,\ldots, \theta_h, g) - N(n, n_1,\ldots, n_h, \theta, \theta_1,\ldots, \theta_h, g-1),$$

où

$$g = \frac{n\theta + n_1\theta_1 + \ldots + n_h\theta_h - m}{2}.$$

Tel sera donc aussi le nombre de covariants linéairement indépendants de l'ordre et des degrés donnés. En particulier pour l'invariant relatif à deux formes f et f_1, et contenant au degré n_1 les coefficients de la première, au degré n les coefficients de la seconde, le nombre de termes est donné par le coefficient de x^{nn_1}, dans

$$\prod_{i=1}^{i=n}\cdot\left(\frac{1-x^{n_1+i}}{1-x^{i}}\right)^2;$$

la différence entre le coefficient de x^{nn_1} et celui de x^{nn_1-1} dans ce produit développé représente donc le nombre des invariants linéairement indépendants de l'espèce dont il s'agit.

Dans le cas, aussi particulier, où les $h+1$ formes sont toutes du même ordre n, et où leurs coefficients entrent respectivement au premier degré dans l'expression du covariant, la fonction qui fait connaître le nombre des termes devient

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^{h+1}.$$

Si dans la différence $N(n, n_1,\ldots, g) - N(n, n_1,\ldots, g-1)$, on donne à m, lorsque $K = n\theta + \ldots + n_h\theta_h$ est pair, les valeurs $0, 2, 4,\ldots, K$, et que l'on ajoute les résultats, on obtiendra

$$N\left(n, n_1, \ldots, \theta, \theta_1, \ldots, \frac{K}{2}\right),$$

pour le nombre total des covariants de degré $(\theta, \theta_1, \ldots, \theta_h)$. Et si K est impair, ce nombre sera

$$N\left(n, n_1, \ldots, \theta, \theta_1, \ldots, \frac{K-1}{2}\right).$$

De ce que l'expression (π) conserve la même valeur quand un nombre quelconque de θ sont échangés avec les n correspondants, il en résulte cet énoncé très-varié de la loi de réciprocité :

A tout covariant d'ordre m, relatif à $h+1$ formes $f, f_1, \ldots, f_h$ d'ordre respectif $n, n_1, \ldots, n_h$, et qui renferme les coefficients de ces formes au degré $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_h$ respectivement, correspond un covariant de même ordre m pour $h+1$ formes d'ordre

$$\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j, n_{j+1}, n_{j+2}, \ldots, n_h,$$

et qui renferme les coefficients respectifs de ces formes au degré

$$n, n_1, n_2, \ldots, n_j, \theta_{j+1}, \theta_{j+2}, \ldots, \theta_h.$$

L'extension à plusieurs formes binaires des développements ultérieurs de M. Cayley, dans ses *Recherches sur la partition des nombres*, et les conséquences qui en découlent pour le nombre de covariants irréductibles, mènerait ici trop loin, et m'a paru devoir être réservée pour une autre occasion.

21. Les formes homogènes à plus de deux indéterminées exigent des considérations différentes pour ce qui concerne la détermination du nombre de covariants, d'un degré donné, linéairement indépendants, c'est-à-dire que la connaissance du nombre de termes d'un covariant n'est pas ici suffisante. On a vu que, sous la condition des permutations et de l'homogénéité indiciale, les deux opérations $\Theta_{\mu\lambda}$, $\Theta_{\mu\nu}$ étaient parfaitement suffisantes pour la détermination du coefficient principal, quel que soit le nombre des variables ; mais on a vu aussi que par l'effet de $\Theta_{\mu\lambda}$ des équations fournies par $\Theta_{\mu\nu}$ étaient de nouveau reproduites, et la question de savoir combien d'équations reparaissent de la sorte, semble exiger un examen minutieux auquel je ne me suis pas encore livré.

Néanmoins il m'a paru au moins curieux de connaître la fonction qui par son développement pouvait fournir le nombre des termes qui doivent entrer dans la composition d'un coefficient quelconque d'un covariant. En considérant d'abord une forme unique à $\varkappa$ variables, la détermination de ce nombre de termes revient à la solution du problème suivant qui présente assez d'intérêt par lui-même, et dont voici, si l'on veut, l'énoncé :

On écrit, l'une au-dessous de l'autre, θ lignes horizontales renfermant chacune $\varkappa$ nombres, pris dans la série $0, 1, 2, \ldots, n$ avec ou sans répétition, sous la condition que la somme des nombres inscrits dans chaque ligne horizontale soit toujours égale à n, et que la somme des nombres inscrits dans chaque colonne verticale soit constante et égale respectivement à des nombres donnés $a, b, c, \ldots, l$. On demande le nombre de rectangles distincts que l'on peut ainsi former? La permutation de deux lignes horizontales ne constitue pas deux rectangles distincts.

Comme on a nécessairement $a+b+c+\ldots+l=n\theta$ et que la puissance θ d'une forme homogène f d'ordre n à $\varkappa$ variables est un covariant de cette forme, dont le coefficient principal est $A_{n\theta,0,0,\ldots} = A^{\theta}_{n,0,0,\ldots}$: comme, d'autre part, le coefficient $A_{a,b,c,\ldots,l}$ du covariant renferme tous les termes possibles soumis à la composition précédente ; la question ci-dessus revient, si on le préfère, à celle de savoir combien renferme de termes le coefficient de $x^a y^b \ldots v^l$ dans la puissance θ d'une forme d'ordre n à $\varkappa$ indéterminées. Or si l'on désigne par u une indéterminée quelconque, qui ne fait pas partie des $\varkappa$ variables $x, y, \ldots, v$ de f, et que l'on fasse *directement* le produit des q développements

$$1 + x^{\lambda_1} y^{\mu_1} \ldots v^{\tau_1} . u + x^{2\lambda_1} y^{2\mu_1} \ldots v^{2\tau_1} u^2 + \ldots + x^{\theta\lambda_1} y^{\theta\mu_1} \ldots v^{\theta\tau_1} . u^\theta + \ldots$$

$$1 + x^{\lambda_2} y^{\mu_2} \ldots v^{\tau_2} . u + x^{2\lambda_2} y^{2\mu_2} \ldots v^{2\tau_2} u^2 + \ldots + x^{\theta\lambda_2} y^{\theta\mu_2} \ldots v^{\theta\tau_2} u^\theta + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où $\lambda_i + \mu_i + \ldots + \tau_i = n$ et où q désigne le nombre de solutions de cette dernière équation, c'est-à-dire le nombre de termes de f, en sorte que

$$q = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+\varkappa-1)}{1 \cdot 2 \ldots (\varkappa-1)};$$

on reconnaîtra facilement que le terme général du *coefficient* de u^θ est de la forme

$$x^{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\ldots+\alpha_q\lambda_q}\, y^{\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2+\ldots+\beta_q\mu_q} \ldots v^{\varepsilon_1\tau_1+\varepsilon_2\tau_2+\ldots+\varepsilon_q\tau_q},$$

où

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_q=\theta,\ldots,\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_q=\theta.$$

Conséquemment le nombre de rectangles cherché est égal au coefficient de $x^a y^b \ldots v^l . u^\theta$ dans le développement ascendant de

$$\mathrm{U}=\frac{1}{\Pi(1-x^\lambda y^\mu \ldots v^\tau . u)},$$

le produit renfermant les q facteurs qui proviennent des solutions de $\lambda+\mu+\ldots+\tau=n$.

Si l'on désigne par ϖ_i ce que devient f, quand tous les coefficients, y compris le facteur polynomial, s'y trouvent remplacés par l'unité, et $x^\lambda y^\mu \ldots v^\tau$ par $x^{i\lambda} y^{i\mu} \ldots v^{i\tau}$, on aura

$$\log \mathrm{U}=\varpi_1 u+\varpi_2 . \frac{u^2}{2}+\ldots+\varpi_\theta \frac{u^\theta}{\theta}+\ldots,$$

et en supposant U de la forme

$$\mathrm{U}=1+u_1 . u+u_2 u^2+\ldots+u_\theta u^\theta+\ldots,$$

il en résultera

$$\theta u_\theta=\varpi_1 u_{\theta-1}+\varpi_2 u_{\theta-2}+\ldots+\varpi_{\theta-1} u_1+\varpi_\theta.$$

On peut donner diverses formes à u_θ, et, par exemple, en passant de log U à la fonction U; mais cette expression nouvelle, impliquant en elle-même la partition effective du nombre θ, ne paraît pas propre à conduire à une expression *analytique* du coefficient de $x^a y^b \ldots v^l$. Il en serait de même si l'on présentait u_θ sous la forme d'un déterminant.

Le tableau polyrectangulaire du § II donne lieu à un problème de partition de nombres facile à énoncer, et que l'on doit résoudre lorsqu'on se propose de connaître le nombre de termes qui peuvent figurer dans un coefficient déterminé d'un covariant relatif à plusieurs formes $f, f_1, \ldots, f_i$. Ce problème est ramené, comme ci-dessus, à celui de savoir combien il entre de termes dans un coefficient de *rang* déterminé du produit $f^{\theta} f_1^{\theta_1} \ldots f_i^{\theta_i}$; et par des considérations analogues aux précédentes, on verra que ce nombre de termes est égal au coefficient de $x^a y^b \ldots v^l . u^{\theta} u_1^{\theta_1} \ldots u_i^{\theta_i}$ dans le développement ascendant de

$$U = 1 : \Pi(1 - x^{\lambda} y^{\mu} \ldots v^{\tau} . u) . \Pi_1 (1 - x^{\lambda_1} y^{\mu_1} \ldots v^{\tau_1} . u_1) \ldots \Pi_i . (1 - x^{\lambda_i} y^{\mu_i} \ldots v^{\tau_i} . u_i),$$

chaque produit se rapportant aux solutions des équations respectives

$$\lambda + \mu + \ldots + \tau = n, \quad \lambda_1 + \mu_1 + \ldots + \tau_1 = n_1, \ldots, \quad \lambda_i + \mu_i + \ldots + \tau_i = n_i.$$

Ce même nombre sera donc, si l'on veut, le coefficient de $x^a y^b \ldots v^l$ dans $u_{\theta} u_{\theta_1} \ldots u_{\theta_i}$, u_{θ_h} désignant pour la forme f_h ce que u_{θ} désignait précédemment pour f. Quant aux nombres $a, b, \ldots, l$, ils vérifient la relation

$$a + b + \ldots + l = n\theta + n_1 \theta_1 + \ldots + n_i \theta_i.$$

Dans le cas d'une forme f à groupes indépendants de variables, considéré au § III, le nombre de termes qui peuvent figurer dans un coefficient déterminé d'un covariant, est donné par la solution d'un nouveau problème de partition que je me dispense d'énoncer et qui peut être ramené à la détermination du coefficient général d'une fonction particulière que l'on formera de la manière suivante. La forme f étant censée déduite, ainsi qu'on l'a dit, du produit de $(h+1)$ formes *ordinaires*, $f, f', \ldots, f^{(h)}$, si l'on désigne par $\varpi, \varpi', \ldots, \varpi^{(h)}$, ce que deviennent ces formes respectivement lorsque l'on y remplace chaque coefficient, y compris le facteur polynomial, par l'unité, le produit $\varpi \varpi' \ldots \varpi^{(h)}$ donnera tous les termes distincts que doit renfermer f. Si l'on multiplie séparément chacun de ces termes par la même indéterminée u, et que l'on retranche chacun de ces produits de l'unité, le produit de l'inverse de ces binômes sera la fonction cherchée. La fonction dont il s'agit étant désignée par U, si l'on appelle ϖ_s ce que devient ϖ lorsque chaque variable $x, y, \ldots$, est remplacée par $x^s, y^s, \ldots$, et de même ϖ'_s ce que devient ϖ' lorsque $x', y', \ldots$, sont remplacés par $x'^s, y'^s, \ldots$, etc.; on aura cette loi de formation plus symétrique

$$\log U = \varpi_1 \varpi'_1 \ldots \varpi_1^{(h)} . u + \varpi_2 \varpi'_2 \ldots \varpi_2^{(h)} \frac{u^2}{2} + \ldots + \varpi_{\theta} \varpi'_{\theta} \ldots \varpi_{\theta}^{(h)} . \frac{u^{\theta}}{\theta} + \ldots$$

et le nombre requis de termes sera donné par le coefficient de

$$x^a\, y^b \dots x'^{a'}\, y'^{b'} \dots x^{(h)a^h}\, y^{(h)b^h} \dots u^\theta,$$

dans le développement ascendant de U. Lorsque tous les groupes $(xy\dots)$, $(x'y'\dots)$, sont binaires, on a, en remplaçant les y par 1,

$$\log \mathrm{U} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x'^{n'+1}}{1 - x'} \cdots \frac{1 - x^{(h)n^{(h)}+1}}{1 - x^{(h)}} \cdot u$$
$$+ \frac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x'^{2(n'+1)}}{1 - x'^2} \cdots \frac{u^2}{2} + \dots$$

Si l'on fait entrer dans le covariant les coefficients de plusieurs formes à groupes indépendants de variables, la fonction à développer s'obtiendra en prenant le produit d'autant de fonctions analogues à U qu'il y a de formes données. Ces fonctions se déduiront de U par le changement successif de u en d'autres indéterminées $u_{(1)}, u_{(2)}, \dots$, et des $n, n', \dots$, en $n_1, n'_1, \dots, n_2, n'_2, \dots$, ou si l'on désigne par u_θ le coefficient de u^θ dans le développement de U, le nombre cherché de termes sera donné par le coefficient de

$$x^a\, y^b \dots x'^{a'}\, y'^{b'} \dots x^{(h)a^h}\, y^{(h)b^h} \dots,$$

dans $u_\theta\, u_{\theta_1}, \dots, u_{\theta_i}$.

Enfin, s'il s'agit d'une forme à groupes correspondants de variables, il suffit de supposer dans ce que l'on vient de voir pour une forme unique à groupes indépendants que tous ces groupes coïncident ; on a alors, par exemple, pour une forme *binaire*,

$$\log \mathrm{U} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \frac{1 - x^{n_1+1}}{1 - x} \frac{1 - x^{n_2+1}}{1 - x} \cdots u + \frac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2} \cdot \frac{1 - x^{2(n_1+1)}}{1 - x^2} \cdots \frac{u^2}{2} + \dots,$$

et généralement en désignant par $\varpi, {}_1\varpi, {}_2\varpi, \dots, {}_i\varpi$ les $i + 1$ formes ordinaires et correspondantes réduites à avoir pour coefficients l'unité (y compris les facteurs polynômiaux), et qui par leur produit sont censées donner tous les termes de f, on aura

$$\log \mathrm{U} = \varpi_1\ {}_1\varpi_1\ {}_2\varpi_1 \dots {}_i\varpi_1 + \varpi_2\ {}_1\varpi_2\ {}_2\varpi_2 \dots {}_i\varpi_2 \cdot \frac{u^2}{2} + \dots$$

S'il entre dans f plusieurs systèmes de groupes correspondants, indépendants entre eux, on a

$$\log \mathrm{U} = \varpi_1\, {}_1\varpi_1\, {}_2\varpi_1 \ldots {}_i\varpi_1 \times \varpi'_1\, {}_1\varpi'_1\, {}_2\varpi'_1 \ldots {}_{i'}\varpi'_1 \times \ldots \times u + \ldots$$

$$+ \varpi_\theta\, {}_1\varpi_\theta \ldots {}_i\varpi_\theta \times \varpi'_\theta\, {}_1\varpi'_\theta \ldots {}_{i'}\varpi'_\theta \times \ldots \times \frac{u^\theta}{\theta} + \ldots,$$

et si finalement il s'agit d'un covariant relatif à plusieurs formes analogues à cette dernière f, en appelant $\varpi_{(\theta)}$ le coefficient u^θ dans la dernière fonction U, on aura à chercher le coefficient général du produit

$$\varpi_{(\theta)}\, \varpi_{(\theta_1)}\, \varpi_{(\theta_2)} \ldots,$$

$\varpi_{(\theta_1)}, \ldots,$ désignant pour les nouvelles formes ce que $\varpi_{(\theta)}$ désigne pour f.

Voilà donc les *fonctions génératrices* du nombre de termes que peut contenir le coefficient général d'un covariant, dans les différents cas examinés. A l'exception peut-être des groupes binaires, la transformation purement algébrique des problèmes arithmétiques qui se sont offerts dès l'abord, ne paraît pas avancer considérablement la véritable solution. Elle semble seulement, dans l'état actuel de la science des développements, pouvoir prêter quelques points de repère à une étude intime et directe de ces questions, qui ne sont pas dépourvues d'un certain intérêt, et sur lesquelles j'espère revenir un jour, ainsi que sur la loi de réciprocité qui jouit à mes yeux d'une extrême généralité.

Vu et approuvé,

Le 5 février 1858,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 5 février 1858,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

CAYX.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

SUR DIVERS PROBLÈMES PARTICULIERS RELATIFS AU MOUVEMENT.

I.

Sur un problème de M. Binet.

1. Dans le tome II du *Journal* de M. Liouville, M. Binet a donné une élégante extension analytique au problème du mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale fonction de la distance. La méthode de l'éminent et regrettable géomètre peut être étendue, sous un certain point de vue, à un système plus complexe d'équations de la forme du suivant

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{R}.x,\\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{R}.y,\\ \dots\dots\dots\\ m\dfrac{d^2v}{dt^2}=\mathrm{R}.v,\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=\mathrm{R}_1.x_1,\dots\\ m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2}=\mathrm{R}_1.y_1,\dots\\ \dots\dots\dots\dots\\ m_1\dfrac{d^2v_1}{dt^2}=\mathrm{R}_1.v_1,\dots\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} m_n\dfrac{d^2x_n}{dt^2}=\mathrm{R}_n.x_n,\\ m_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2}=\mathrm{R}_n.y_n,\\ \dots\dots\dots\dots\\ m_n\dfrac{d^2v_n}{dt^2}=\mathrm{R}_n.v_n,\end{array}\right.$$

où le nombre des variables $(x_i\, y_i \dots v_i)$ peut changer arbitrairement d'un groupe vertical à l'autre. Mais au lieu de considérer le carré du *rayon vecteur* comme la somme des carrés des coordonnées correspondantes, je prendrai

$$\rho=\sqrt{\mathfrak{F}},\dots,\quad \rho_n=\sqrt{\mathfrak{F}_n},$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1,\dots$, désignant des formes homogènes du second ordre, de façon que

$$\mathfrak{F}=\widehat{aa}\,x^2+\widehat{bb}\,y^2+\dots+\widehat{hh}\,v^2+2\,\widehat{ab}\,xy+\dots,\quad \mathfrak{F}_1=\widehat{a_1a_1}\,x_1^2+\dots,$$

et l'on doit observer que les coefficients $\widehat{aa}$, $\widehat{bb}$,..., $\widehat{ab}$,... sont symboliques et sont censés représenter des constantes quelconques tout à fait indépendantes. Si l'on pose

$$\mathfrak{ff} = \widehat{aa}\,xx' + \widehat{bb}\,yy' + \ldots + \widehat{hh}\,vv' + \widehat{ab}\,(xy' + yx') + \ldots,$$

et qu'on désigne par $\mathfrak{f}^{(1)}$ ce que devient $\mathfrak{f}$ par la substitution $\begin{pmatrix} x\ y \ldots v \\ x'\ y' \ldots v' \end{pmatrix}$, $\mathfrak{ff}$ coïncidera avec $\mathfrak{f}^{(1)}$ par la même substitution et avec $\mathfrak{f}$ par la substitution inverse $\begin{pmatrix} x'\ y' \ldots v' \\ x\ y \ldots v \end{pmatrix}$. En admettant actuellement que les accents indiquent les dérivées par rapport à t, on aura

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{\widehat{aa}\,xx'' + \ldots + \widehat{hh}\,vv'' + \widehat{ab}\,(yx'' + xy'') + \ldots}{\rho} + \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{f}^{(1)} - \mathfrak{ff}^2}{\rho^3}.$$

Or, si l'on désigne par S, avec M. Lamé, la caractéristique d'une somme symétrique, il est facile de vérifier l'identité

$$\mathfrak{f}\mathfrak{f}^{(1)} - \mathfrak{ff}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}\left(\widehat{aa}\,\widehat{bb} - \widehat{ab}^2\right)(xy' - yx')^2 \\ + 2\mathrm{S}\,\widehat{aa}\,\widehat{bb}\,(xz' - zx')(xy' - yx') \\ + 2\mathrm{S}\,\widehat{ab}\,\widehat{ac}\,(xy' - yx')(zx' - xz') \\ + 2\mathrm{S}\,\widehat{ab}\,\widehat{cd}\,[(xy' - yx')(uz' - zu') + (uy' - yu')(xz' - zx')], \end{array} \right.$$

dont le second membre se réduit ici à une constante (qu'on verra être égale à 1) en vertu des équations des *aires*. En substituant dès lors dans l'expression de $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ les valeurs de $x''\ y'' \ldots v''$ fournies par les équations (1), on obtiendra la première du groupe suivant, les autres ayant une origine analogue,

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} m\,\dfrac{d^2\rho}{dt^2} = \mathrm{R}\,\rho + \dfrac{m}{\rho^3}, \\ m_1\,\dfrac{d^2\rho_1}{dt^2} = \mathrm{R}_1\rho_1 + \dfrac{m_1}{\rho_1^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n\,\dfrac{d^2\rho_n}{dt^2} = \mathrm{R}_n\rho_n + \dfrac{m_n}{\rho_n^3}. \end{array} \right.$$

Les deux premières équations (1) et (2) donnent

$$\rho \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 \rho}{dt^2} = - \frac{x}{\rho^3},$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d}{dt} \cdot \frac{x}{\rho}\right) = - \frac{x}{\rho^3},$$

et en posant, d'après M. Binet,

$$dt = \rho^2 \, d\varphi$$

(ce qui n'est autre chose au fond que l'équation polaire des aires), on aura

$$\frac{d^2 . \frac{x}{\rho}}{d\varphi^2} + \frac{x}{\rho} = 0,$$

d'où et des analogues on déduit

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\rho} = \text{A} \sin\varphi + \text{A}' \cos\varphi, \\ \frac{y}{\rho} = \text{B} \sin\varphi + \text{B}' \cos\varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{v}{\rho} = \text{H} \sin\varphi + \text{H}' \cos\varphi, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{\rho_1} = \text{A}_1 \sin\varphi_1 + \text{A}'_1 \cos\varphi_1, \\ \frac{y_1}{\rho_1} = \text{B}_1 \sin\varphi_1 + \text{B}'_1 \cos\varphi_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{v_1}{\rho_1} = \text{H}_1 \sin\varphi_1 + \text{H}'_1 \cos\varphi_1, \end{array} \right. \quad \text{etc...}$$

où

$$dt = \rho^2 \, d\varphi = \rho_1^2 \, d\varphi_1 = \ldots = \rho_n^2 \, d\varphi_n.$$

Quant aux arbitraires A, A′, B, B′,..., elles devront, dans chaque groupe vertical, vérifier les trois relations suivantes, qui résultent de la reconstitution de ρ_i^2 ou $\mathfrak{F}_i$ au moyen des valeurs (3),

$$\mathfrak{F}(\text{A}, \ \text{B} \ldots) = 1,$$
$$\mathfrak{F}(\text{A}', \ \text{B}' \ldots) = 1,$$
$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}(\text{A}, \ \text{A}', \ \text{B}, \ \text{B}' \ldots) = 0,$$

et dont les premiers membres représentent ce que deviennent $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{ff}$ par les substitutions

$$\begin{pmatrix} x & y \dots & v \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \;.\,. & \mathrm{H} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' & y' \dots & v' \\ \mathrm{A}' & \mathrm{B}' \dots & \mathrm{H}' \end{pmatrix}.$$

En vertu de ces relations, le premier membre de l'identité dont on a fait précédemment usage devient égal à l'unité par les mêmes substitutions, et comme le second membre est toujours une constante C, il faut que cette constante soit aussi égale à l'unité.

Lorsque $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \dots, \mathrm{R}_n$ seront des fonctions de $\rho, \rho_1, \dots, \rho_n$, et de t si l'on veut, l'intégration du système (1) sera ramenée à celle du système (2). Si $\mathrm{R}\rho$, $\mathrm{R}_1\rho_1, \dots, \mathrm{R}_n\rho_n$ sont les dérivées partielles par rapport à $\rho, \rho_1, \dots, \rho_n$ d'une même fonction $\mathfrak{R}$ dépendante uniquement de ces variables, en posant

$$\mathrm{U} = \mathfrak{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\rho^2} + \frac{m_1}{\rho_1^2} + \dots + \frac{m_n}{\rho_n^2}\right),$$

les équations (2) pourront s'écrire

$$m\,\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{d\rho},$$

$$m_1\,\frac{d^2\rho_1}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_1},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m_n\,\frac{d^2\rho_n}{dt^2} = \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_n},$$

et l'on aura l'équation des *forces vives*

$$m\,\frac{d\rho^2}{dt^2} + \dots + m_n\,\frac{d\rho_n^2}{dt^2} = 2\,\mathrm{U} + \text{constante},$$

qui suffit, dans le cas d'un seul groupe vertical (1) pour ramener le problème aux quadratures.

Comme les équations *des aires* permettent d'exprimer les variables $(x, y, \dots, v)$ d'un même groupe en fonctions linéaires de deux d'entre elles, il serait résulté de là une méthode de réduction intégrale, peut-être plus naturelle, mais sans contredit moins symétrique que celle dont le principe est dû à M. Binet.

2. Supposons que les formes $\mathfrak{F}_i$ se réduisent à des sommes de carrés, en sorte que

$$\mathfrak{F} = x^2 + y^2 + \ldots + v^2, \quad \mathfrak{F}_1 = x_1^2 + y_1^2 + \ldots + v_1^2, \text{ etc}\ldots$$

et admettons qu'il existe entre les rayons vecteurs ρ, ρ_1,... une équation de condition

$$F(\rho, \rho_1, \ldots) = 0.$$

Si l'on désigne par λ une indéterminée, l'application de la méthode ordinaire de la mécanique conduira au système (1) où l'on aura fait

$$R = \lambda \frac{dF}{\rho\, d\rho}, \quad R_1 = \lambda \frac{dF}{\rho_1\, d\rho_1}, \ldots$$

On arrivera au système (2) où il suffira de faire la même substitution, et les x_i, y_i,... seront fournis par le groupe (3). Le système (2) donnera lieu à l'équation des *forces vives* si F ne contient pas t.

Je noterai comme cas particulier le mouvement de deux points matériels liés par un fil flexible et inextensible passant par un anneau fixe infiniment étroit : l'équation de condition est alors

$$\rho + \rho_1 = a,$$

a désignant la longueur constante du fil, et l'on a l'équation des forces vives

$$m \frac{d\rho^2}{dt^2} + m_1 \frac{d\rho_1^2}{dt^2} = K - \frac{m}{\rho^2} - \frac{m_1}{\rho_1^2},$$

ou

$$(m + m_1) \frac{d\rho^2}{dt^2} = K - \frac{m}{\rho^2} - \frac{m_1}{(a - \rho)^2}.$$

Si l'on prenait

$$\rho + \rho_1 = a_1, \quad \rho + \rho_2 = a_2, \ldots, \quad \rho + \rho_n = a_n,$$

en supposant toujours qu'il n'existe point de forces extérieures, on aurait semblablement

$$(m+m_1+\ldots+m_n)\frac{d\rho^2}{dt^2}=\mathrm{K}-\frac{m}{\rho^2}-\frac{m_1}{(a_1-\rho)^2}-\ldots-\frac{m_n}{(a_n-\rho)^2},$$

ce qui dépend des fonctions ultra-elliptiques. Les ρ_i étant censés ne contenir que trois coordonnées, le mouvement de chaque point matériel s'effectuera dans un plan : on peut donc réaliser ce mouvement en plaçant sur un plan horizontal les corps $m, m_1, \ldots, m_n$ et fixant au premier d'entre eux n fils $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui passant, réunis, dans un anneau infiniment étroit, situé dans le plan, vont ensuite se fixer respectivement aux autres corps $m_1, \ldots, m_n$.

3. Si l'on adjoint aux groupes verticaux (1) de nouvelles équations de la forme

$$\mathrm{m}\frac{d^2 w}{dt^2}=\lambda\frac{d\mathrm{F}}{dw}+\mathrm{W},\quad \mathrm{m}_1\frac{d^2 w_1}{dt^2}=\lambda\frac{d\mathrm{F}}{dw_1}+\mathrm{W}_1,\ldots$$

en supposant qu'on ait l'équation de condition

$$\mathrm{F}(\rho,\ \rho_1,\ldots, w, w_1,\ldots, t)=0,$$

et toujours

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+\ldots+v^2},\ldots,\quad \mathrm{R}=\lambda\frac{d\mathrm{F}}{\rho\, d\rho},\ldots$$

l'intégration du système primitif sera ramenée à celle du système (2) combiné avec les équations nouvellement introduites. Ceci comprend comme cas particulier la généralisation analytique du problème relatif au mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution : il suffit de supposer

$$\mathrm{F}=\rho-f(w)=0,\quad \mathrm{m}=m,$$

w désignant la *coordonnée perpendiculaire* à ρ et W ne dépendant que de w. On a alors

$$\mathrm{m}\frac{dw^2}{dt^2}+m\frac{d\rho^2}{dt^2}=2\int \mathrm{W}\,dw-\frac{m}{\rho^2},$$

ce qui donne ρ ou w par une quadrature, et $x, y, \ldots u$ sont encore fournis par les formules (3).

Le problème serait encore ramené visiblement aux quadratures si l'on prenait dans le système (1)

$$\rho = f(w), \quad \rho_1 = f_1(w), \ldots \quad \rho_n = f_n(w),$$
$$\mathrm{R} = \frac{\lambda}{\rho}, \quad \mathrm{R}_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1}, \ldots \quad \mathrm{R}_n = \frac{\lambda_n}{\rho_n};$$

et qu'à ce système fût adjointe l'unique équation

$$\mathrm{m}\frac{d^2 w}{dt^2} = -\lambda f'(w) - \lambda_1 f_1'(w) - \ldots - \lambda_n f_n'(w) + \mathrm{W} \quad (\mathrm{W} \text{ fonction de } w \text{ seul})$$

obtenue toujours, ainsi que les autres formules (1), par l'application des principes habituels de la Mécanique rationnelle. On aurait l'*équation des forces vives* qui serait ici suffisante : les groupes (3) fourniraient encore les $(x_i y_i \ldots v_i)$.

Par exemple, si l'on suppose

$$\rho = a - w, \quad f_1 = a_1 - w, \ldots, \quad \rho_n = a_n - w, \quad \mathrm{W} = g = \text{constante},$$

et qu'on réduise à deux les coordonnées qui entrent dans les ρ_i, on pourra considérer les équations ci-dessus jointes à (1) comme se rapportant au mouvement d'un système de points matériels pesants dont l'un m est attaché à plusieurs fils qui, restant toujours confondus verticalement, traversent un anneau fixe infiniment étroit et vont ensuite aboutir aux corps $m, m_1, \ldots, m_n$ assujettis à se mouvoir sur le plan horizontal qui contient l'anneau et détruit leur pesanteur.

On remarquera qu'en se bornant au corps m, supposant $\mathrm{m} = m$ et considérant w comme la coordonnée verticale de m, les équations du problème qui vient d'être énoncé répondraient au mouvement d'un point matériel pesant sur le cône droit $\rho + w = a$. Or il est très-facile de voir que cette diversité dans l'interprétation mécanique se rencontre surtout lorsque l'on généralise certaines formes géométriques, comme dans le problème de M. Binet ; de façon que la question reste toujours purement mécanique, et que l'on peut lui appliquer directement, si on le juge à propos, les équations de Lagrange ou celles de Poisson.

4. Supposons

$$\mathfrak{F} = ax^2 + by^2 + \ldots + hv^2,$$

et considérons le système d'équations

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = (\lambda a + g)\, x,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (\lambda b + g)\, y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = (\lambda h + g)\, v.$$

Si l'on suppose que $\mathcal{F}$ demeure constante pendant tout le mouvement, en différentiant deux fois de suite son expression, on aura

$$axx'' + byy'' + \ldots + hvv'' + ax'^2 + by'^2 + \ldots + hv'^2 = 0,$$

ou, d'après les valeurs actuelles de $x'', y'', \ldots, v''$,

$$\lambda p^2 + ax'^2 + by'^2 + \ldots + hv'^2 + g\,\mathcal{F} = 0,$$

où

$$p^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + \ldots + h^2 v^2.$$

En différentiant de nouveau et supposant g constante (on pourrait supposer g fonction de p), on aura, d'après les mêmes valeurs $x''\ y'' \ldots v''$,

$$d.\lambda p^2 + \lambda\, d.p^2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{C}{p^4},$$

C désignant une constante. Par suite on aura cette intégrale première

$$\frac{C}{p^2} + ax'^2 + by'^2 + \ldots + hv'^2 + g\,\mathcal{F} = 0,$$

qui, jointe à l'équation des forces vives, reproduit pour le cas de trois variables et par l'introduction du merveilleux système des coordonnées elliptiques, les intégrales du mouvement d'un point matériel attiré ou repoussé sur un ellipsoïde par une force proportionnelle à sa distance au centre, et dirigée vers ce centre, intégrales obtenues depuis longtemps par M. Liouville, dans son brillant Mémoire *sur quelques cas particuliers, etc.* (voir *Journal de Mathématiques,* tome XII), et qui pour $g = 0$ redonnent l'élégante équation des lignes géodésiques que MM. Chasles et Liouville ont établie par des considérations purement géométriques. Au reste, l'intégrale ci-dessus correspond directement, quand $g = 0$, à la généralisation analytique d'un théorème de Joachimsthal.

Dans les numéros précédents, les intégrales *nouvelles* étaient toutes de même forme (le type de l'équation des aires pour un point matériel), ce qui permettait de pousser plus loin l'intégration; ici c'est une intégrale unique (et aussi celle des forces vives) qui se trouve généralisée dans son expression, et l'intégration complète du système reste très-éloignée de son terme.

II.

Sur l'élimination des nœuds.

La plupart des problèmes ordinaires de mécanique dont la solution est connue totalement ou en partie, peuvent se prêter à une certaine extension analytique qui repose principalement sur la généralisation de l'expression de la distance de deux points, du cosinus de l'angle de deux directions, etc., et sur l'introduction des formes générales quadratiques. Le problème des trois corps pourrait en fournir un nouvel exemple. Mais ce problème paraissant destiné à attendre très-longtemps une entière solution, je préfère montrer comment par une analyse très-élémentaire on peut arriver à l'*élimination des nœuds* pour trois véritables corps ou plutôt deux corps circulant autour d'un troisième.

x, y, z, m, coordonnées et masse du 1^er corps,
x_1, y_1, z_1, m_1, » 2^e corps,
f fonction de l'attraction vers le centre fixe,
F » de m et m_1.

En posant

$$x = \frac{\varpi}{\sqrt{m}}\xi, \quad y = \frac{\varpi}{\sqrt{m}}\eta, \quad z = \frac{\varpi}{\sqrt{m}}\zeta,$$

$$x_1 = \frac{\varpi_1}{\sqrt{m_1}}\xi_1, \quad y_1 = \frac{\varpi_1}{\sqrt{m_1}}\eta_1, \quad z_1 = \frac{\varpi_1}{\sqrt{m_1}}\zeta_1,$$

de façon que ϖ, ϖ_1 soient les distances, divisées par $\sqrt{m}$, $\sqrt{m_1}$, du centre fixe aux deux autres corps, et ξ, η... les cosinus de direction de ces mêmes distances : en supposant en outre écrites les six équations ordinaires du mouvement, et multipliant les trois premières par x, y, z, les trois secondes par x_1, y_1, z_1, on a d'abord

$$(1)\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varpi}{dt^2} &= \varpi\left\{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + f\left(\frac{\varpi}{\sqrt{m}}\right) + m_1 \mathrm{F}(r)\right\} - \frac{m_1\sqrt{m_1}}{\sqrt{m}}\mathrm{F}(r)\varpi_1\varphi, \\ \frac{d^2\varpi_1}{dt^2} &= \varpi_1\left\{\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 + f\left(\frac{\varpi_1}{\sqrt{m_1}}\right) - m\mathrm{F}(r)\right\} + \frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{m_1}}\mathrm{F}(r)\varpi\varphi, \end{aligned}\right.$$

où r désigne la distance de m à m_1, et où

$$\varphi = \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1.$$

Enfin si l'on pose

$$\mathrm{V} = \mathrm{U} - \varpi'^2 - \varpi_1'^2,$$

U désignant la fonction des forces, y compris la constante additionnelle, on aura l'équation des forces vives et les trois des aires, dont le groupe est complété par les différentielles de

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1,$$

et qui forment le tableau suivant :

$$(2)\left\{\begin{aligned} \varpi^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \varpi_1^2(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) &= \mathrm{V}, \\ \varpi^2(\xi\eta' - \eta\xi') + \varpi_1^2(\xi_1\eta_1' - \eta_1\xi_1') &= c, \\ \varpi^2(\zeta\xi' - \xi\zeta') + \varpi_1^2(\zeta_1\xi_1' - \xi_1\zeta_1') &= c', \\ \varpi^2(\eta\zeta' - \zeta\eta') + \varpi_1^2(\eta_1\zeta_1' - \zeta_1\eta_1') &= c'', \\ \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' &= 0, \\ \xi_1\xi_1' + \eta_1\eta_1' + \zeta_1\zeta_1' &= 0; \end{aligned}\right.$$

or la première idée que fait naître l'inspection de ce tableau, c'est l'isolement des dérivés ξ', η',..., qu'on peut, si l'on veut, effectuer comme il suit :

Les trois secondes équations (2), multipliées par ζ, η, ξ et ajoutées, donnent

$$(\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1)\xi_1' + (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1)\eta_1' + (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)\zeta_1' = \frac{p}{\varpi_1^2},$$

où

$$p = c\zeta + c'\eta + c''\xi,$$

et, en éliminant successivement de cette équation $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ au moyen de la sixième (2), il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(\zeta - \zeta_1\varphi)\eta'_1 - (\eta - \eta_1\varphi)\zeta'_1 = \frac{p\xi_1}{\varpi_1^2},\\ &(\xi - \xi_1\varphi)\zeta'_1 - (\zeta - \zeta_1\varphi)\xi'_1 = \frac{p\eta_1}{\varpi_1^2},\\ &(\eta - \eta_1\varphi)\xi'_1 - (\xi - \xi_1\varphi)\eta'_1 = \frac{p\zeta_1}{\varpi_1^2}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(\xi - \xi_1\varphi)^2(\xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1) = (1-\varphi^2)\xi'^2_1 + \frac{2p}{\varpi_1^2}(\zeta\eta_1 - \eta\zeta_1)\xi'_1 + \frac{p^2}{\varpi_1^2}(1-\xi_1^2).$$

Si l'on résout les quatre secondes (2) par rapport à ξ', η', ζ', résolution qui se fait par la combinaison $c'\zeta - c\eta$, il vient

$$\begin{aligned} \varpi^2\xi' &= \varpi_1^2(\psi\xi_1 - \varphi\xi'_1) + c'\zeta - c\,\eta,\\ \varpi^2\eta' &= \varpi_1^2(\psi\eta_1 - \varphi\eta'_1) + c\,\xi - c''\zeta,\\ \varpi^2\zeta' &= \varpi_1^2(\psi\zeta_1 - \varphi\zeta'_1) + c''\eta - c'\,\xi, \end{aligned}$$

où

$$\psi = \xi\xi'_1 + \eta\eta'_1 + \zeta\zeta'_1,$$

et de là, en posant

$$\lambda = c(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) + c'(\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1) + c''(\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1),$$

on déduit

$$\begin{aligned} \varpi^4(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) &= \varpi_1^4\psi^2 + \varpi_1^4\varphi^2(\xi'^2_1 + \eta'^2_1 + \zeta'^2_1) + 2\varpi_1^2\psi\lambda + (c'\zeta - c\eta)^2\\ &+ (c\xi - c''\zeta)^2 + (c''\eta - c'\xi)^2 - 2\varpi_1^2\varphi\left[(c'\zeta - c\eta)\xi'_1 + (c\xi - c''\zeta)\eta'_1 + (c''\eta - c'\xi)\zeta'_1\right]. \end{aligned}$$

D'ailleurs des équations (3) on déduit aussi

$$(\xi - \xi_1\varphi)\psi = (1-\varphi^2)\xi'_1 + \frac{p}{\varpi_1^2}(\eta_1\zeta - \eta\zeta_1)$$

$$(\xi - \xi_1\varphi)[(c'\zeta - c\eta)\xi'_1 + (c\xi - c''\zeta)\eta'_1 + (c''\eta - c'\xi)\zeta'_1]$$
$$= -\varphi\lambda\xi'_1 + \frac{p}{\varpi_1^2}[\eta_1(c''\eta - c'\xi) - \zeta_1(c\xi - c''\zeta)].$$

Par ces valeurs, $\varpi^4(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$ ne contiendra que la dérivée ξ'_1, et, en ayant égard à l'expression ci-dessus de $\varpi_1^4(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2)$, l'équation des forces vives deviendra

$$\frac{(\xi - \xi_1\varphi)^2\varpi^2 V}{\varpi^2 + \varpi_1^2} = \varpi_1^2(1-\varphi^2)\xi_1'^2 + 2[p(\eta_1\zeta - \eta\zeta_1) + \varpi_1^2\nu(\xi - \xi_1\varphi)]\xi'_1 + \Delta,$$

où l'on a posé

$$\nu = \frac{\lambda}{\varpi^2 + \varpi_1^2},$$

et où Δ désigne un terme indépendant de ξ'_1. La résolution de cette équation donnera la première du groupe suivant, les autres s'en déduisant par de simples changements de lettres,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
(1-\varphi^2)\varpi_1^2\xi'_1 &= p\,(\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1) + (\varpi\varpi_1\mathfrak{R} - \varpi_1^2\nu)(\xi - \xi_1\varphi),\\
(1-\varphi^2)\varpi_1^2\eta'_1 &= p\,(\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1) + (\varpi\varpi_1\mathfrak{R} - \varpi_1^2\nu)(\eta - \eta_1\varphi),\\
(1-\varphi^2)\varpi_1^2\zeta'_1 &= p\,(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) + (\varpi\varpi_1\mathfrak{R} - \varpi_1^2\nu)(\zeta - \zeta_1\varphi),\\
(1-\varphi^2)\varpi^2\xi' &= p_1(\zeta\eta_1 - \eta\zeta_1) + (\varpi\varpi_1\mathfrak{R} + \varpi^2\nu)(\xi_1 - \xi\varphi),\\
(1-\varphi^2)\varpi^2\eta' &= p_1(\xi\zeta_1 - \zeta\xi_1) + (\varpi\varpi_1\mathfrak{R} + \varpi^2\nu)(\eta_1 - \eta\varphi),\\
(1-\varphi^2)\varpi^2\zeta' &= p_1(\eta\xi_1 - \xi\eta_1) + (\varpi\varpi_1\mathfrak{R} + \varpi^2\nu)(\zeta_1 - \zeta\varphi),
\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{R}$ désignant le radical qui se présente dans la résolution dont il s'agit.

Si par une considération intuitive ou quelconque on eût écrit directement ces équations, il serait facile de constater *à posteriori* qu'elles vérifient toutes les conditions (2). En désignant toujours, avec M. Lamé, par S la caractéristique d'une somme symétrique (*Théorie de l'élasticité*), et ayant égard aux identités

$$S\xi\,(\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1) = 0,\quad S\xi_1(\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1) = 0,$$
$$S\xi_1\,(\,\xi - \xi_1\varphi) = 0,\quad S\xi\,(\xi_1 - \xi\varphi\,) = 0,$$

on voit tout de suite que les deux dernières (2) sont satisfaites. Puis en ayant égard aux identités telles que la suivante (que l'on vérifie, si l'on veut, par la substitution directe des valeurs de p, p_1, λ)

$$\begin{aligned} &p\,[\eta_1(\eta_1\zeta - \eta\zeta_1) - \xi_1(\xi\zeta_1 - \zeta\xi_1)] \\ &\quad + p_1[\xi(\xi\zeta_1 - \zeta\xi_1) - \eta(\zeta\eta_1 - \eta\zeta_1)] + \lambda(\eta_1\xi - \eta\xi_1) \\ &\quad = c\,S(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^2 = c\,[S\xi^2.S\xi_1^2 - (S\xi\xi_1)^2] = c(1 - \varphi^2), \end{aligned}$$

on reconnaît tout de suite que les équations des aires sont vérifiées. On remarquera que ces dernières identités pouvant s'écrire

$$\begin{aligned} p(\zeta - \zeta_1\varphi) + p_1(\zeta_1 - \zeta\varphi) + \lambda(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) &= c\,(1 - \varphi^2) \\ p(\eta - \eta_1\varphi) + p_1(\eta_1 - \eta\varphi) + \lambda(\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1) &= c'\,(1 - \varphi^2) \\ p(\xi - \xi_1\varphi) + p_1(\xi_1 - \xi\varphi) + \lambda(\eta\zeta_1 - \zeta\eta_1) &= c''(1 - \varphi^2), \end{aligned}$$

en les multipliant par c, c', c'', et ajoutant, on aura

(5) $$p^2 + p_1^2 - 2\,pp_1\varphi + \lambda^2 = (c^2 + c'^2 + c''^2)(1 - \varphi^2).$$

On a enfin

(6) $$\begin{cases} (1-\varphi^2)\,\varpi_1^2\,(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) = \dfrac{p^2}{\varpi_1^2} + \nu^2\,\varpi_1^2 + \varpi^2\,\mathfrak{R}^2 - 2\,\varpi\varpi_1\,\nu\,\mathfrak{R} \\ (1-\varphi^2)\,\varpi^2\,(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \dfrac{p_1^2}{\varpi^2} + \nu^2\,\varpi^2 + \varpi_1^2\,\mathfrak{R}^2 + 2\,\varpi\varpi_1\,\nu\,\mathfrak{R} \end{cases}$$

et la vérification nécessaire et définitive de l'équation des forces vives donne pour déterminer $\mathfrak{R}$

(7) $$(\varpi^2 + \varpi_1^2)(\mathfrak{R}^2 + \nu^2) + \frac{p^2}{\varpi_1^2} + \frac{p_1^2}{\varpi^2} = (1 - \varphi^2)\,\mathrm{V}.$$

Maintenant les deux groupes (4), multipliés respectivement par c'', c', c, et séparément ajoutés, donnent

$$(8)\quad \begin{cases} (1-\varphi^2)\,\varpi_1^2\,p_1' = p\lambda + (\varpi\varpi_1\,\mathfrak{R} - \varpi_1^2\,\nu)\,(p - p_1\varphi), \\ (1-\varphi^2)\,\varpi^2\,p' = -\,p_1\lambda + (\varpi\varpi_1\,\mathfrak{R} + \varpi^2\nu)\,(p_1 - p\varphi). \end{cases}$$

Les mêmes équations fournissent

$$\varpi^2\,\varpi_1^2\,[\mathrm{S}\,\xi\xi_1' + \mathrm{S}\,\xi_1\,\xi'],$$

c'est-à-dire

$$\varpi^2\,\varpi_1^2\,\varphi' = \varpi\varpi_1\,(\varpi^2 + \varpi_1^2)\,\mathfrak{R},$$

ou

$$(9)\quad \mathfrak{R} = \frac{\varpi\,\varpi_1}{\varpi^2 + \varpi_1^2}\,\varphi'.$$

On peut noter aussi la relation

$$(1-\varphi^2)\,\mathrm{S}\,\xi'\,\xi_1' = -\frac{pp_1}{\varpi^2\,\varpi_1^2} - \left(\mathfrak{R} - \frac{\varpi_1\,\nu}{\varpi}\right)\left(\mathfrak{R} + \frac{\varpi\nu}{\varpi_1}\right)\varphi,$$

déduite des mêmes équations.

Actuellement les valeurs (6) étant introduites dans (1), λ ou ν remplacé partout par sa valeur déduite de (5), $\mathfrak{R}$ par sa valeur (9), on aura les trois équations (7) et (8) toutes du premier ordre en φ, p, p_1, ϖ, ϖ_1, ϖ', ϖ_1', lesquelles jointes à (1) reviennent, si l'on veut, à un système de sept équations différentielles du premier ordre; mais le temps n'entrant dans ces équations que par sa différentielle, en éliminant celle-ci on aura ramené la question à l'intégration de six équations différentielles du premier ordre entre six variables et à une quadrature. Enfin les équations primitives donneront la *dernière* intégrale par une quadrature en vertu du principe du dernier multiplicateur. Il est facile de voir que ceci coïncide, quant au nombre des intégrations, avec les conclusions du fameux Mémoire de Jacobi, et avec celles que M. Bertrand a présentées sur le même sujet dans son remarquable Mémoire *sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique* (Journal de M. Liouville, t. XVII). On sait l'élégante transformation que M. Bour a fait subir dans ces derniers temps aux équations de M. Bertrand, et quelle liaison il a établie entre le problème *plan* et le problème à trois dimensions. Un rapprochement, en apparence plus éloigné, pourrait peut-être mettre sur le chemin de la découverte de quelque nouvelle intégrale : je veux parler du mouvement de deux points matériels obligés de se mouvoir sur deux sphères concentriques et uniquement soumis à leur action mutuelle, supposée une fonction de la distance. Tel serait, par exemple, le mouvement de deux pendules électriques, soustraits à l'action de la pesanteur et ayant le même point de suspension. Pour avoir les équations relatives à ce problème, il n'y a évidemment qu'à faire abstraction des deux équations (1), et à supposer dans tout ce qui précède ϖ, ϖ_1 constants, et conséquemment ϖ', ϖ'_1 égaux à zéro. La question est alors ramenée à l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre entre deux variables. Mais leur réduction définitive aux quadratures m'a paru présenter encore de grandes difficultés. Bien que la constance des rayons vecteurs change profondément la nature du nouveau problème, et sans aucun doute celle des fonctions qui doivent figurer dans la solution finale du problème des trois corps, il existe entre eux certainement des liens de parenté qui pourraient permettre d'étendre au second quelques résultats obtenus pour le premier. Mais il s'agirait d'abord d'obtenir lesdits résultats.

III.

Simple application des fonctions elliptiques.

J'indiquerai ici une certaine application des fonctions elliptiques à laquelle donne lieu le problème signalé au n° 3 du § I. Ce problème, qui revient au fond à celui d'une force centrale d'intensité constante, pouvant être physiquement réalisé, je supposerai comme dans le numéro cité qu'il s'agit de deux points matériels pesants dont le premier m est posé sur un plan horizontal et est tiré vers l'origine des coordonnées par un fil de longueur constante fixé par son autre extrémité au second corps m_1, qui ne peut quitter l'axe vertical des z_1. En désignant par ρ_0 le rayon initial de m, et supposant la vitesse initiale $v_0 = \sqrt{2gh}$ perpendiculaire à ρ_0, on aura par les considérations ordinaires,

$$\lambda dt = \frac{\mp \rho \, d\rho}{\sqrt{(\rho_0 - \rho)(\rho - \rho_1)(\rho + \rho_2)}},$$

ou, pour abréger,

$$\lambda = \sqrt{\frac{2g}{m+m_1}}, \quad \rho_1 = \frac{mh}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4\rho_0}{mh}}+1\right], \quad \rho_2 = \frac{mh}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4\rho_0}{mh}}-1\right].$$

Le mobile oscillant entre les deux cercles (ρ_0) et (ρ_1), si l'on suppose, ce qui est toujours permis,

$$\rho_0 > \rho_1,$$

d'où la condition évidente

$$g > \frac{mv_0^2}{\rho_0},$$

on pourra prendre

$$\rho = \rho_0 \cos^2\varphi + \rho_1 \sin^2\varphi,$$

et en posant

$$k^2 = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0 + \rho_2}, \quad \mu = \lambda\frac{\sqrt{\rho_0+\rho_2}}{2\rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0},$$

on aura

$$\mu t = \int_0^\varphi \frac{(1-\varepsilon\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on fait

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

il viendra donc

$$u = \mu t + \varepsilon\int_0^u \sin^2\varphi\, du.$$

En désignant par K la valeur de u pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, par K′ ce que devient cette valeur lorsque k est remplacé par $k' = \sqrt{1-k^2}$, et posant

$$\frac{\pi u}{\mathrm{K}} = 2x, \quad \frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = 2h, \quad q = e^{-2h}, \quad \mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{K}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

on aura par les formules des *Fundamenta* (page 133)

$$(1-\varepsilon G)x = \frac{\pi\mu}{2K}t - \frac{\varepsilon\pi^2}{2k^2K}\left[\frac{\sin 2x}{\operatorname{Sin} 2h} + \frac{\sin 4x}{\operatorname{Sin} 4h} + \frac{\sin 6x}{\operatorname{Sin} 6h} + \ldots,\right]$$

où Sin h représente le sinus hyperbolique $\frac{e^h - e^{-h}}{2}$, qui s'introduit de lui-même, ainsi que les autres lignes hyperboliques, lors du développement en séries des fonctions elliptiques (*Fundamenta*, pages 84 et suiv.), et qu'il conviendrait peut-être de faire reparaître dans la plupart des formules subséquentes.

Quant à l'angle polaire ω, il sera donné par la formule

$$\omega = \frac{v_0}{\mu\rho_0}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-\varepsilon\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et par des transformations identiques à celles qu'a employées M. Voizot (*Journal* de M. Liouville, tome XVII) relativement au pendule, et que je m'abstiendrai conséquemment de développer, on aura pour cet angle une expression de la forme

$$\omega = \mathcal{A}x + \varpi,$$

ϖ désignant une fonction périodique de x.

On a donc, par des formules convergentes et très-symétriques, les expressions de t, φ, ρ et ω au moyen de la variable intermédiaire u. Mais la question de renverser les suites pour exprimer directement les coordonnées en fonctions du temps ou la solution de la question analogue au problème de Képler ne laisse pas de présenter quelques obstacles, en ce qui concerne du moins une formation satisfaisante des termes généraux des développements.

Au reste, on peut mesurer la périodicité et se proposer le problème de l'inversion par l'introduction directe de la variable φ. Si l'on développe effectivement le radical $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$, on aura en série convergente

$$\begin{aligned}\mu.t &= \int_0^\varphi\left[1 - \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{2.4.6\ldots 2m}\left(\frac{2m}{2m-1}\varepsilon - k^2\right)\sin^{2m}\varphi\right]d\varphi \\ &= \mathcal{A}\varphi + \Sigma_j B_j \sin 2j\varphi.\end{aligned}$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il viendra donc

$$\mu \mathrm{T} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \varepsilon \sin^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \mathcal{A} \cdot \frac{\pi}{2},$$

et par suite généralement

$$t = \frac{2\mathrm{T}}{\pi} \varphi + \frac{1}{\mu} \Sigma_j \mathrm{B}_j \cdot \sin 2j\varphi.$$

Toutes les fois que φ augmente de $\frac{\pi}{2}$, t augmente de T; conséquemment $\rho = \rho_0(1 - \varepsilon \sin^2 \varphi)$ est une fonction périodique du temps, dont l'indice de périodicité est $2\mathrm{T}$.

On a aussi

$$\omega = \frac{v_0}{\mu \rho_0} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 6\varphi + \Sigma_j \mathrm{D}_j \sin 2j\varphi,$$

et par suite

$$\Omega = \frac{v_0}{\mu \rho_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - \varepsilon \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 6\, \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{2\Omega}{\pi} \cdot \varphi + \Sigma_j \mathrm{D}_j \sin 2j\varphi,$$

où

$$\frac{v_0}{\mu \rho_0} = 2 \sqrt{\frac{m + m_1}{m}} \sqrt{\frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_0 + \rho_2}}.$$

Après chaque intervalle de temps T, ω augmente donc de Ω, et les *axes* de la trajectoire sont doués d'un mouvement direct ou rétrograde, suivant que cette dernière quantité est plus grande ou plus petite que $\frac{\pi}{2}$, double circonstance qui peut avoir lieu selon la grandeur relative des arbitraires du problème.

IV.

Sur un cas particulier du mouvement d'un corps pesant.

L'insuffisance des faits acquis dans l'étude générale des fonctions inverses oblige à des développements au moins indirects dans bon nombre d'applications mathématiques. Je viens d'en signaler un exemple relativement assez simple : Le mouvement de la toupie en présente un autre un peu plus complexe. Je suppose que l'on ait sous les yeux le tome II de la *Mécanique* de Poisson, 2[e] édition, chapitre VI, page 207, et particulièrement la page 216. En conservant toutes les notations de l'auteur, sauf que l'on change ici l en $-l$, θ en $\pi-\theta$, de façon que θ désigne pour nous l'angle que fait avec la partie inférieure de la verticale la ligne GK qui va du centre de gravité G à la pointe K de la toupie, on a les équations suivantes

$$\mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}+\mathrm{C}n\cos\theta=l,$$

$$\mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}+\mathrm{A}\,\frac{d\theta^2}{dt^2}+\mathrm{M}\gamma^2\sin^2\theta\,\frac{d\theta^2}{dt^2}+2\,\mathrm{M}g\gamma\cos\theta=h,$$

$$pdt=\sin\theta\sin\varphi\,d\psi+\cos\varphi\,d\theta,$$

$$qdt=\sin\theta\cos\varphi\,d\psi-\sin\varphi\,d\theta,$$

$$ndt=d\varphi+\cos\theta\,d\psi,$$

$$x=x_1+\gamma\sin\theta\sin\psi,$$

$$y=y_1+\gamma\sin\theta\cos\psi,$$

$$z_1=\gamma\cos\theta,$$

où les coordonnées horizontales x_1, y_1 de G sont des fonctions linéaires du temps que l'on peut, si l'on veut, supprimer. Je ferai remarquer que ces équations ne se rapportent pas spécialement à la toupie, et qu'elles répondent généralement au mouvement d'un solide de révolution pesant, dont un point de l'axe de figure est astreint à rester dans un plan horizontal. En sorte que les limites analytiques possibles de $z=\cos\theta$ sont $+1$ et -1. Mais ses limites physiques seront généralement plus resserrées, comme pour la toupie placée au-dessus d'un plan *matériel* horizontal, ou soutenue au-dessous d'un pareil plan par une action magnétique qu'il exercerait sur la pointe.

Si l'on fait

$$A = 2Mg\gamma a, \quad C = 2Mg\gamma c, \quad h = 2Mg\gamma h', \quad l = 2Mg\gamma l',$$

les deux premières équations pourront s'écrire

$$a\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} + cn\cos\theta = l',$$

$$a\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2} + \left(a + \frac{\gamma}{2g}\sin^2\theta\right)\frac{d\theta^2}{dt^2} + \cos\theta = h',$$

d'où, en posant

$$a + \frac{\gamma}{2g} = \frac{1}{m^2}, \quad \frac{m^2\gamma}{2g} = \varepsilon^2, \quad z = \cos\theta,$$

et par l'élimination immédiate de $\frac{d\psi}{dt}$, on déduit

$$(1 - \varepsilon^2 z^2)\frac{dz^2}{m^2\,dt^2} = (1 - z^2)(h' - z) - \frac{(l' - cnz)^2}{a}.$$

Le second membre étant nécessairement positif, comme le premier, pour la valeur initiale z_0 de z, ce même second membre, devenant visiblement négatif pour $z = \pm 1$ et $\pm\infty$ pour $z = \pm\infty$, admet trois racines réelles

$$\delta > 1, \quad \alpha \text{ comprise entre } z_0 \text{ et } +1, \quad \beta \text{ entre } z_0 \text{ et } -1.$$

On a donc

$$mdt = \frac{\pm\sqrt{1 - \varepsilon^2 z^2}\,dz}{\sqrt{(\delta - z)(\alpha - z)(z - \beta)}},$$

et le problème ne paraît pas, contrairement à ce qu'avance Poisson au commencement de la page 217 *loc. cit.*, pouvoir se réduire aux fonctions elliptiques.

L'axe de révolution de la toupie ne pouvant devenir horizontal, il faudra que β soit positif. Or α et δ étant positifs, le produit des trois racines

$\frac{l'^2}{a} - h'$ devra être lui-même positif. Mais cette condition ne sera pas physiquement suffisante en général, c'est-à-dire que, à cause de la *largeur* du solide et pour que sa surface ne touche pas le plan horizontal, le second membre de l'équation ci-dessus en $\frac{dz^2}{dt^2}$ devra être négatif pour une certaine limite donnée b de z comprise entre o et α.

Soit fait actuellement

$$z = \beta + (\alpha - \beta)\sin^2 \varpi,$$

en sorte que le centre de gravité G remonte de la limite inférieure $\gamma\beta$ à la limite supérieure $\gamma\alpha$, lorsque ϖ varie de o à $\frac{\pi}{2}$. En posant

$$\frac{m}{2}\sqrt{\frac{\delta - \beta}{1 - \varepsilon^2\beta^2}} = m', \quad \frac{\alpha - \beta}{\delta - \beta} = \lambda^2, \quad \frac{\varepsilon(\alpha - \beta)}{1 - \varepsilon\beta} = \mu^2, \quad \frac{\varepsilon(\alpha - \beta)}{1 + \varepsilon\beta} = \nu^2,$$

et faisant commencer t avec ϖ, on aura

$$m' t = \int_0^{\varpi} \mathrm{P}\, d\varpi.$$

où l'on a fait

$$\mathrm{P} = \frac{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\varpi}\sqrt{1 + \nu^2\sin^2\varpi}}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varpi}}.$$

Les nombres λ, μ, ν étant moindres que l'unité, en développant P suivant les puissances ascendantes de ces quantités et intégrant, on obtiendra une expression de la forme

$$m' t = \mathcal{A}\varpi + \sum_{j=1}^{i=\infty} \mathcal{B}_j \sin 2j\varpi,$$

d'ou

$$m'\mathrm{T} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P}\, d\varpi = \mathcal{A} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$t = \frac{2\mathrm{T}}{\pi}\cdot\varpi + \frac{1}{m'}\sum_{j=1}^{j=\infty} \mathcal{B}_j \sin 2j\varpi,$$

z est donc une fonction périodique du temps et la durée de la période est 2T.

Ensuite on aura

$$d\psi = \frac{sm'\,dt}{1 - \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta}\sin^2\varpi} + \frac{s'm'\,dt}{1 + \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta}\sin^2\varpi},$$

où

$$\frac{l' - cn}{2a(1 - \beta)} = sm', \quad \frac{l' + cn}{2a(1 + \beta)} = s'm';$$

par suite

$$\psi = s\int_0^{\varpi} \frac{\mathrm{P}\,d\varpi}{1 - \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta}\sin^2\varpi} + s'\int_0^{\varpi} \frac{\mathrm{P}\,d\varpi}{1 + \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta}\sin^2\varpi},$$

et l'on trouvera semblablement

$$n't - \varphi = s\int_0^{\varpi} \frac{\mathrm{P}\,d\varpi}{1 - \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta}\sin^2\varpi} - s'\int_0^{\varpi} \frac{\mathrm{P}\,d\varpi}{1 + \frac{\alpha - \beta}{1 + \beta}\sin^2\varpi},$$

où

$$n' = n\left(1 - \frac{c}{a}\right).$$

Si donc on désigne par Λ et Λ' les deux intégrales des seconds membres pour $\varpi = \frac{\pi}{2}$, et que l'on pose

$$\Psi = s\Lambda + s'\Lambda',$$
$$-\Phi = s\Lambda - s'\Lambda',$$

on aura, si l'on veut,

$$\psi = \frac{2\Psi}{\pi}\cdot\varpi + \sum_{j=1}^{j=\infty} \Theta_j \sin 2j\varpi,$$

$$\varphi - n't = \frac{2\Phi}{\pi}\cdot\varpi + \sum_{j=1}^{j=\infty} \Omega_j \sin 2j\varpi;$$

d'où l'on conclut que ψ et φ augmentent respectivement de Ψ et de $\Phi + n'\mathrm{T}$ toutes les fois que ϖ augmente de $\frac{\pi}{2}$, ou t de T.

Si maintenant on pose, pour abréger,

$$\frac{\pi t}{2\mathrm{T}} = x, \qquad \frac{\pi}{2\mathrm{T}m'}\,\mathfrak{B}_j = -\,\mathcal{E}_j,$$

la véritable solution du problème exigera que l'on fasse l'inversion de la suite

$$\varpi = x + \sum_{j=1}^{j=\infty} \mathcal{E}_j \sin 2j\varpi = x + f(\varpi).$$

On voit par la formule de Lagrange que l'on pourra supposer

$$\varpi = x + \sum_{h=1}^{h=\infty} \mathcal{E}'_h \sin 2hx = x + \mathrm{F}(x),$$

et aussi

$$z = \sum_{h=0}^{h=\infty} \mathcal{F}_h \cos 2hx,$$

. . . .

On peut par cette même formule trouver en fonction de temps, avec telle approximation que l'on voudra, les inconnues de la question. Mais si l'on fait attention que le présent problème comprend comme cas particulier le mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, et que l'on possède dans ce cas des formules dont la loi des coefficients est parfaitement connue; si l'on fait encore attention que ce même cas particulier peut être traité directement par la méthode précédente qui dissimule presque entièrement la loi desdits coefficients, on sent qu'il doit exister une méthode directe et relativement plus simple qu'il faudrait chercher dans une étude immédiate et plus complète des fonctions ultra-elliptiques. Le problème précédent serait une des premières applications de cette étude. Viendrait ensuite, mais sous un point de vue un peu plus complexe, le mouvement d'un tore sur un plan horizontal. Ce dernier problème, qui ne me paraît pas sans intérêt, pourrait, comme beaucoup d'autres, être traité par un développement indirect en série qui ne servirait qu'à constater une fois de plus l'insuffisance des procédés analytiques actuels. Ceci n'est au fond, et sous une forme infiniment moins élégante, que la reproduction d'une grande vérité énoncée naguère par M. Lamé (voir les *Leçons sur les fonctions inverses*).

Si une discussion complète de ces deux problèmes présentait quelque intérêt, je pourrais y revenir dans une autre occasion.

Vu et approuvé,
Le 5 février 1858,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 5 février 1858,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
CAYX.

Paris. — Imprimerie de Mallet-Bachelier, rue du Jardinet, 12.

ERRATA.

Page 4, ligne 5, *au lieu de* $1, 2, 3, \ldots, \lambda$, *lisez* $1.2.3\ldots\lambda$.

Page 4, ligne dernière, *au lieu de* $A_{p,q,r}$, *lisez* $A'_{p,q,r}$.

Page 39, ligne 15, *au lieu de* données, *lisez* donnés.

Page 43, ligne 3, *au lieu de* $A^{(2,0)}_{1,1}$, *lisez* $2A^{(2,0)}_{1,1}$.

Page 51, ligne 15, *au lieu de* $,{}^{0}_{0},$ *lisez* $,\overset{3}{\underset{0}{0}},$

Page 61, ligne 15, *au lieu de* $u_\theta\, u_{\theta_1}, \ldots, u_{\theta_i}$, *lisez* $u_\theta\, u_{\theta_1} \ldots u_{\theta_i}$.

Page 72, ligne 1, *au lieu de* divisées, *lisez* multipliées.

Page 72, équation (1), *au lieu de* $f\left(\frac{\varpi}{\sqrt{m}}\right)$, *lisez* $\frac{\sqrt{m}}{\varpi} f\left(\frac{\varpi}{\sqrt{m}}\right)$.

Page 72, équation (1'), *au lieu de* $f\left(\frac{\varpi_1}{\sqrt{m_1}}\right)$, *lisez* $\frac{\sqrt{m_1}}{\varpi_1} f\left(\frac{\varpi_1}{\sqrt{m_1}}\right)$.

Page 72, équation (1), *au lieu de* $F(r)$, *lisez* $\frac{F(r)}{r}$.

Page 72, équation (1), *au lieu de* $-m$, *lisez* $+m$.

Page 72, équation (1), *au lieu de* $-\frac{m_1\sqrt{m_1}}{\sqrt{m}}$ *et de* $+\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{m_1}}$, *lisez* $-\sqrt{mm_1}$.