THÈSE
DE MÉCANIQUE

SUR

LES MOUVEMENTS OSCILLATOIRES DES CORPS FLOTTANTS,

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

PAR A. QUET,

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AU COLLÉGE ROYAL ET A L'ÉCOLE NORMALE DE VERSAILLES.

VERSAILLES,

IMPRIMERIE DE MONTALANT-BOUGLEUX,

AVENUE DE SCEAUX, 4.

1839.

OSCILLATIONS

DES CORPS FLOTTANTS.

1.°

Je me propose de traiter d'une manière générale le problème des oscillations des corps flottants. Dans la première partie de ce travail (celle qui fait le sujet de cette thèse) je ferai abstraction du mouvement communiqué au liquide ; et dans une seconde partie, je considérerai le mouvement simultané du liquide et du corps flottant.

Je formerai d'abord les équations différentielles du mouvement, soit par rapport aux oscillations du centre de gravité, soit par rapport à la rotation du mobile autour de ce centre. Pour les intégrer, je distinguerai deux cas généraux, et par le choix des variables je les rendrai linéaires dans chacun de ces deux cas.

Comme application et vérification de la solution générale, j'en déduirai les cas particuliers que l'on trouve dans les Traités de Mécanique ; j'examinerai, en outre, un cas particulier très étendu, où les diverses circonstances du problème s'analyseront avec beaucoup de simplicité, en employant, comme M. Poisson a bien voulu me l'indiquer, le principe des aires et l'équation des forces vives.

2.° EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT.

Par le centre de gravité G du corps, je mène trois axes rectangulaires Gx_{ι} Gy_{ι} Gz_{ι} fixes dans le corps et mobiles avec lui dans l'espace. Gz_{ι} sera perpendiculaire à l'ancien plan de flottaison, et les deux autres auront d'abord des directions arbitraires. Je prends, en outre, trois autres axes rectangulaires Ax Ay Az, dont l'axe Az soit dirigé suivant la pesanteur, et ait son origine sur la surface libre du liquide.

D'après les principes généraux de la dynamique, le mouvement du centre de gravité du corps flottant sera déterminé par les équations

$$M\frac{d^2x'}{dt^2}=0\quad M\frac{d^2y'}{dt^2}=0\quad M\frac{d^2z'}{dt^2}=Mg-\rho g(V+U)$$

où x' y' z' sont les coordonnées du centre de gravité du corps, M sa masse, V le volume primitivement immergé, $V+U$ le volume immergé au bout du temps t, ρ la densité du fluide, et g la pesanteur.

Dans l'état d'équilibre, on avait $M=V\rho$; par conséquent, les équations précédentes deviennent

$$\frac{d^2x'}{dt^2}=0\quad \frac{d^2y'}{dt^2}=0\quad \frac{d^2z'}{dt^2}=-\frac{gU}{V}$$

On voit par là que le mouvement du centre de gravité suivant une droite horizontale quelconque est uniforme et indépendant, soit de son mouvement suivant la verticale, soit de la rotation du corps autour de son centre de gravité. Pour cette raison, nous n'aurons égard dans la suite qu'à l'équation

$$(1)\quad \frac{d^2z'}{dt^2}=-\frac{gU}{V}$$

Les équations du mouvement de rotation autour du centre de gravité sont :

$$(2)\quad R=\int(x_1Y_1-y_1X_1)\,dm,\quad Q=\int(z_1X_1-x_1Z_1)\,dm,\quad P=\int(y_1Z_1-z_1Y_1)\,dm$$

En posant pour abréger :

$$(3)\quad R=\int(x_1q_1-y_1p_1)\,dm,\quad Q=\int(z_1p_1-x_1r_1)\,dm,\quad P=\int(r_1y_1-z_1q_1)\,dm$$

et en désignant par X_1dm, Y_1dm, Z_1dm les trois composantes parallèles aux axes Gx_1 Gy_1 Gz_1 de la force motrice de l'élément dm et par p_1dt q_1dt r_1dt les accroissements de vitesse que cet élément reçoit réellement suivant les mêmes axes.

Les forces qui sollicitent les divers points du mobile sont de plusieurs espèces. D'abord, la pesanteur en sollicite tous les points. Mais, comme la résultante de la pesanteur passe par le centre de gravité du corps, elle ne peut pas influer sur le mouvement de rotation autour de ce point, et nous en ferons abstraction. Les points situés sur la partie de la surface qui est immergée sont, en outre, soumis à une pression normale, et qui provient de la poussée du fluide. Si le fluide ne participait pas au mouvement du corps, cette pression serait connue en grandeur pour chaque point de la surface du corps. Lorsqu'on voudra avoir égard au mouvement du fluide, cette pression sera une quantité inconnue qui entrera à la fois dans les équations relatives au fluide et dans celles qui se rapportent au corps flottant, et on ne pourra la déterminer qu'en résolvant simultanément ces équations. Pour simplifier, nous supposerons que la poussée du fluide est la même que s'il était en repos. Or, dans ce cas, on ne changera pas l'effet produit en faisant abstraction de la poussée du fluide, et en appliquant à chaque élément du volume immergé une force égale au poids du fluide qu'il déplace et dirigée en sens contraire de la pesanteur. Par cette substitution, on a l'avantage de pouvoir faire abstraction de la nature de la surface du corps. ρ étant la densité du fluide et dv le volume de l'élément du corps dont la masse est dm, la force motrice que nous venons de supposer appliquée à cet élément, sera en grandeur $g\rho dv$; on aura donc pour tous les points du volume immergé $X_1 dm = -\rho g a'' dv$ $Y_1 dm = -\rho g b'' dv$ $Z_1 dm = -\rho g c'' dv$, où a'' b'' c'' désignent les cosinus des angles que l'axe Az fait avec les trois axes mobiles Gx_1 Gy_1 Gz_1.

Enfin, si l'on considère une molécule quelconque de fluide située à la surface du corps, on verra qu'en général elle n'aura pas la même vîtesse que le point du solide qu'elle touche; il résultera de cette différence de vîtesse un frottement qui, en général, influera sur le mouvement du corps flottant. Il faudrait comprendre ce frottement dans les diverses forces qui sollicitent le mobile, mais nous en ferons abstraction, et les seules forces que nous considérerons sont celles dont nous avons déjà donné la grandeur. D'après cela, on aura pour les équations (2) :

$$R = -\rho g\left[b''\int x_1 dv - a''\int y_1 dv\right], \quad Q = -\rho g\left[a''\int z_1 dv - c''\int x_1 dv\right]$$

$$P = -\rho g\left[c''\int y_1 dv - b''\int z_1 dv\right]$$

et l'on n'étendra ces intégrales qu'au volume immergé au bout du temps t.

Puisque le corps était primitivement en équilibre, son centre de gravité et le centre de poussée se trouvaient sur une même verticale et par conséquent sur l'axe Gz_1. Soit h la distance de ce centre de poussée au point G ; h sera une quantité positive ou négative suivant que ce centre sera sur la partie positive ou la partie négative de l'axe Gz_1. Cela posé, au bout du temps t le volume immergé est $V + U$. Il est clair, d'après la propriété des centres de gravité, qu'en étendant les intégrales seulement au volume V, on aura :

$$\int x_1 dv = 0 \quad \int y_1 dv = 0 \quad \int z_1 dv = \pm Vh.$$

Pour étendre les intégrales aux éléments du volume variable U, je décompose la base de l'ancien plan de flottaison en ses éléments, et sur chacun d'eux j'élève un cylindre droit et terminé au niveau du fluide. En désignant par $d\lambda$ l'élément superficiel, et par ξ la longueur du cylindre, nous étendrons d'abord les intégrales aux divers éléments de l'un de ces cylindres dont le volume est $\xi d\lambda$, et ensuite à tous ces cylindres. Remarquons maintenant que tous les éléments de ce cylindre ont le même x_1 et le même y_1, puisqu'il est parallèle à l'axe Gz_1: donc on aura :

$$\int x_1 dv = \int x_1 \xi d\lambda$$

$$\int y_1 dv = \int y_1 \xi d\lambda$$

On peut donner à ξ une forme commode pour achever ces intégrales. Je mène par le centre de gravité C de l'ancien plan de flottaison un plan parallèle à la surface fluide, et je désigne par ζ la distance variable de ces deux surfaces. $\alpha\beta\delta$ étant les coordonnées de ce centre parallèlement aux axes Gx_1, Gy_1, Gz_1, on aura par les formules ordinaires de la transformation des coordonnées :

$$\zeta = z' + a''\alpha + b''\beta + c''\delta$$

De même z étant la distance de l'élément $d\lambda$ à la surface du fluide, on aura :

$$z = z' + a''x_1 + b''y_1 + c''\delta$$

Cet élément ayant, par rapport aux axes fixes dans l'intérieur du corps, les coordonnées $x_1 y_1 \delta$, en retranchant ces deux équations, on tire :

$$(4) \quad z = \zeta + a''(x_1 - \alpha) + b''(y_1 - \beta)$$

Si maintenant nous remarquons que la distance z est la projection de la distance ξ, et que l'angle de projection est le supplément de celui dont le cosinus est c'', on aura :

$$-c''\xi = z = \zeta + a''(x_1 - \alpha) + b''(y_1 - \beta)$$

donc

$$-c''\int \xi x_1 d\lambda = \zeta\int x_1 d\lambda + a''\int x_1^2 d\lambda - \alpha a''\int x_1 d\lambda + b''\int y_1 x_1 d\lambda - \beta b''\int x_1 d\lambda$$

$$-c''\int y_1 \xi d\lambda = \zeta\int y_1 d\lambda + a''\int x_1 y_1 d\lambda - \alpha a''\int y_1 d\lambda + b''\int y_1^2 d\lambda - \beta b''\int y_1 d\lambda$$

En désignant par m la surface de l'ancien plan de flottaison, et étendant ces intégrales à tous les éléments de ce plan, il viendra :

$$-c''\int x_1 \xi d\lambda = m\left\{\alpha\zeta + a''(E-\alpha^2) + b''(G-\alpha\beta)\right\}$$

$$-c''\int y_1 \xi d\lambda = m\left\{\beta\zeta + b''(F-\beta^2) + a''(G-\alpha\beta)\right\}$$

où l'on a fait pour abréger :

$$mE = \int x_1^2 d\lambda \quad mF = \int y_1^2 d\lambda \quad mG = \int x_1 y_1 d\lambda$$

Si sur l'ancien plan de flottaison on élève un cylindre perpendiculaire à ce plan et aboutissant à la surface du fluide, on aura dans ce cylindre tous les éléments auxquels les intégrales précédentes ont été étendues. Il ne fallait étendre ces intégrales qu'à la partie de ce cylindre interceptée par le corps flottant ; mais il est facile de voir qu'en étendant les intégrales au cylindre entier, on commet une erreur négligeable. En effet, le volume du cylindre ne diffère du volume U que par des parties latérales qui sont du troisième ordre, et nous négligerons dans tout ce qui suivra même les quantités du second ordre.

Nous n'avons pas calculé l'intégrale $\int z_1 dv$, parce qu'il est facile de voir qu'elle est infiniment petite et qu'on ne doit en faire usage dans les valeurs de R, P, Q, qu'après l'avoir multipliée par a'' et b'', qui sont aussi des quantités infiniment petites dans le cas des oscillations très petites; on sait, en effet, que $a'' = -\sin\theta \sin\varphi$ $b'' = -\sin\theta\cos\varphi$, où θ désigne l'angle très petit que l'axe Gz_1 fait avec la verticale. Pour montrer que $\int z_1 dv$ étendu aux éléments du volume U est infiniment petit, on pourrait en calculer la valeur comme on l'a fait dans les intégrales $\int x_1 dv$ $\int y_1 dv$. Mais il est plus simple de remarquer que $\int z_1 dv$ est égal au moment du volume U par rapport au plan $G\,x_1 y_1$. Or, ce moment est égal au produit de U par la distance du centre de gravité de U au plan $x_1 G y_1$. Cette distance peut être quelconque, mais le volume U étant infiniment petit, ce produit le sera aussi, et par suite l'intégrale $\int z_1 dv$.

Au moyen des intégrales relatives aux volumes V et U que nous venons de trouver, les valeurs de R Q P deviendront, en négligeant les quantités du second ordre :

$$R = 0$$

$$Q = -\rho g\left\{Vha'' + m\left\{\alpha\zeta + a''(E-\alpha^2) + b''(G-\alpha\beta)\right\}\right\}$$

$$P = -\rho g\left\{-Vhb'' - m\left\{\beta\zeta + b''(F-\beta^2) + a''(G-\alpha\beta)\right\}\right\}$$

Si l'on conçoit qu'on ait mené par le centre de gravité C de l'ancien plan de flottaison deux droites parallèles aux axes Gx_1, Gy_1, et qu'on désigne les moments d'inertie de ce plan, par rapport à ces deux droites, par mH^2, mK^2, on aura :

$$E = H^2 + \alpha^2 \quad F = K^2 + \beta^2$$

Donc $E - \alpha^2 = H^2$, et $F - \beta^2 = K^2$. Alors les expressions précédentes pourront s'écrire ainsi :

$$(5) \begin{cases} R = o \\ Q = -\rho g m \left\{ \alpha\zeta + \left(H^2 \pm \frac{Vh}{m}\right) a'' + (G - \alpha\beta)\, b'' \right\} \\ P = \quad \rho g m \left\{ \beta\zeta + \left(K^2 \pm \frac{Vh}{m}\right) b'' + (G - \alpha\beta)\, a'' \right\} \end{cases}$$

Telle est la transformation que nous nous proposions de faire subir aux seconds membres des équations (2). On voit qu'on y a tout exprimé au moyen des variables $\zeta\, a''\, b''$ qui doivent rester infiniment petites tant que les oscillations du mobile le seront aussi.

On fera subir aisément au second membre de l'équation (1) une transformation analogue. En effet, pour déterminer le volume U, je projette l'ancien plan de flottaison m sur la surface libre du fluide. Le cylindre projetant pourra être pris pour le volume U, parce qu'il n'en diffère que par des parties latérales qui sont du troisième ordre. Pour évaluer le volume de ce cylindre, je décompose la base m en ses éléments $d\lambda$, et je projette chacun d'eux sur le plan actuel de flottaison. La base du cylindre projetant sera $d\lambda \operatorname{Cos}\theta$ et sa hauteur z; son volume sera donc $zd\lambda \operatorname{Cos}\theta$, et il faudra calculer $\int zd\lambda \operatorname{Cos}\theta$, et étendre cette intégrale à tous les éléments de la base m. Or, en vertu de (4) on a :

$$\int zd\lambda \operatorname{Cos.}\theta = \quad \operatorname{Cos}\theta \int \left[\zeta + a''\,(x_1 - \alpha) + b''\,(y_1 - \beta) \right] d\lambda$$

$\zeta\, a''\, b''$ étant les mêmes pour tous les éléments, sortent du signe $\int$, et il en est de même de α, β Si on remarque que $\int x_1 d\lambda = \alpha m$ $\int y_1 d\lambda = \beta m$, le volnme U deviendra $U = m\zeta \operatorname{Cos}\theta$. Mais jusqu'ici nous avons négligé les quantités du second ordre ; il ne serait pas plus rigoureux de conserver $\operatorname{Cos}\theta$ que de le réduire à l'unité. Nous prendrons donc $U = m\zeta$; ce qui sera plus commode ; et l'équation (1) deviendra :

$$(6) \qquad \frac{d^2 z'}{dt^2} = -\frac{gm}{V}\zeta$$

Occupons-nous maintenant de transformer les premiers membres des équations (5) (6). La nature de ces premiers membres est donnée par les équations (3). Or, si on désigne par pqr les composantes rectangulaires de la vitesse de rotation du mobile autour des axes Gx_1 Gy_1 Gz_1, on sait, par la théorie générale du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point, que les fonctions désignées dans (3) par $p_1 q_1 r_1$ peuvent être exprimées en fonction de pqr et de $x_1 y_1 z_1$, et qu'on a les expressions :

$$p_1 dt = z_1 dq - y_1 dr + (py_1 - qx_1)\, qdt + (pz_1 - rx_1)\, rdt$$

$$q_1 dt = x_1 dr - z_1 dp + (qz_1 - ry_1)\, rdt + (qx_1 - pq_1)\, pdt$$

$$r_1 dt = y_1 dp - x_1 dq + (rx_1 - pz_1)\, pdt + (ry_1 - qz_1)\, qdt$$

Si on porte ces valeurs de $p_1 q_1 r_1$ dans les valeurs de RQP fournies par les équations (3), et que pour abréger on pose :

$$A = \int (y_1^2 + z_1^2)\, dm, \quad B = \int (z_1^2 + x_1^2)\, dm, \quad C = \int (y_1^2 + x_1^2)\, dm,$$

$$A' = \int y_1\, z_1\, dm \qquad B' = \int z_1\, x_1\, dm \qquad C' = \int y_1\, x_1\, dm$$

et que ces intégrales soient étendues à toute la masse du mobile, les équations (5) deviendront :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & C\frac{dr}{dt} - B'\frac{dp}{dt} - A'\frac{dq}{dt} + B'rq + C'(q^2 - p^2) + (B - A)\, pq - A'pr = 0 \\ & B\frac{dq}{dt} - C'\frac{dp}{dt} - A'\frac{dr}{dt} - C'rq + B'(p^2 - r^2) + (A - C)\, rp + A'pq = \\ & \qquad = -\rho g m \left\{ \alpha\zeta + a''\left(H^2 \pm \frac{Vh}{m} \right) + b''(G - \alpha\beta) \right\} \\ & A\frac{dp}{dt} - C'\frac{dq}{dt} - B'\frac{dr}{dt} + C'rp + A'(r^2 - q^2) + (C - B)\, rq - B'pq = \\ & \qquad = \rho g m \left\{ \beta\zeta + b''\left(K^2 \pm \frac{Vh}{m} \right) + a''(G - \alpha\beta) \right\} \end{aligned} \right.$$

Je remarque maintenant que, par la théorie du mouvement de rotation autour d'un point, on a les équations.

$$pdt = cdb + c'db' + c''db'', -rdt = adb + a'db' + a''db'', o = bdb + b'db' + b''db''$$

où $a, b, c,$ désignent les cosinus des angles que l'axe fixe Ax fait avec les axes mobiles Gx, Gy Gz_1, $a'b'c'$ les cosinus des angles que l'axe fixe Ay fait avec les mêmes axes mobiles, et $a''\, b''c''$ ceux que l'axe Az fait avec eux. Multipliant ces équations par $c''\, a''\, b''$, et remarquant que l'on a :

$$c''^2 + a''^2 + b''^2 = 1 \quad cc'' + aa'' + bb'' = o \quad c'c'' + a'a'' + b'b'' = o$$

on aura, en les ajoutant :

$$c''p = \frac{db''}{dt} + a''r$$

De même, multipliant par $b''\, c''\, a''$ les équations :

$$rdt = bda + b'da' + b''da'', -qdt = cda + c'da' + c''da'', o = ada + a'da' + a''da''$$

qui sont aussi fournies par la même théorie, et les ajoutant, on aura :

$$c''q = -\frac{da''}{dt} + b''r.$$

Si on remarque maintenant que b'' et a'' sont des quantités infiniment petites, et que $c'' = -\text{Cos}\,\theta$ ou diffère de l'unité par une quantité du second ordre, les quantités p et q seront infiniment petites comme a'' et b'', et on aura pour leur expression, au moyen de a'' et b'' :

$$p = -\frac{db''}{dt} - a''r \quad q = \frac{da''}{dt} - b''r.$$

Si on substitue ces valeurs de p, q dans les équations (7), on verra que tous les termes deviennent infiniment petits par cela même, excepté, dans la première équation, le terme $C\dfrac{dr}{dt}$.

dans la seconde, les termes $A'\dfrac{dr}{dt} + B'r^2$

dans la troisième, les termes $B'\dfrac{dr}{dt} - A'r^2$.

Or, la première équation ayant tous ses termes infiniment petits, il faudra que $C\frac{dr}{dt}$ le soit aussi, et à cause de la nature de C il faudra que $\frac{dr}{dt}$ soit infiniment petit. Les deux autres équations exigeront que $B'r^2$ et $A'r^2$ soient aussi infiniment petits. Or, cela peut arriver de deux manières, ou bien la forme du corps est telle que $B'=o$ $A'=o$. C'est ce qui aura lieu si l'axe Gz_1 est l'un des trois axes principaux du centre de gravité, ou s'écarte très peu de l'un d'eux. Alors r pourra rester quelconque, de grandeur finie ou infiniment petite. Mais si la forme du corps ne rend pas A' et B' infiniment petits ou nuls, alors r sera nécessairement infiniment petit. Nous aurons donc à distinguer deux cas dans la solution du problème.

Dans le premier cas, r est de grandeur finie et ne diffère d'une constante l que d'une quantité infiniment petite, puisque $\frac{dr}{dt}$ doit être très petit. Alors on aura $p=-\frac{db''}{dt}-la''$ $q=\frac{da''}{dt}-lb''$. Comme les axes Gx_1 Gy_1 sont restés arbitraires, nous pourrons les choisir de manière à rendre C' infiniment petit. Il suffira pour cela que ces axes diffèrent très peu des deux autres axes principaux du centre de gravité. Alors les équations du mouvement du corps, en y comprenant celle qui est relative au mouvement du centre de gravité, se réduiront à :

$$
(8)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\alpha\frac{d^2a''}{dt^2}-\beta\frac{d^2b''}{dt^2}+\frac{gm}{V}\zeta=o\\
&B\frac{d^2a''}{dt^2}+D\frac{db''}{dt}+Ea''+Fb''+L\zeta=B'l^2\\
&A\frac{d^2b''}{dt^2}-D\frac{da''}{dt}+E'b''+Fa''+L'\zeta=A'l^2
\end{aligned}\right.
$$

où l'on a posé, pour abréger, $L=\rho gm\alpha$ $L'=\rho gm\beta$ $D=l(C-B-A)$ $F=\rho gm(G-\alpha\beta)$ $E=l^2(C-A)+\rho g(mH^2\pm Vh)$ $E'=l^2(C-B)+\rho g(mK^2\pm Vh)$

Pour déduire de (6) la première équation (8), il suffit de remarquer que z désignant la distance au niveau du liquide du point où l'axe Gz_1 perce l'ancien plan de flottaison, on a, par une formule déjà trouvée, $z=\zeta-\alpha a''-\beta b''$. Mais

$z' = h \operatorname{Cos} \theta + z$. On aura donc, en réduisant $\operatorname{Cos}\theta$ à l'unité :

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \alpha \frac{d^2 a''}{dt^2} - \beta \frac{d^2 b''}{dt^2}.$$

Considérons maintenant le second cas général. A' et B' sont quelconques et r infiniment petits, alors on a $p = -\frac{d b''}{dt}$ $q = \frac{d a''}{dt}$, et les équations du mouvement se réduisent à

$$(9)\left\{\begin{array}{l}
\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \alpha \frac{d^2 b''}{dt^2} - \beta \frac{d^2 b''}{dt^2} + \frac{gm}{V}\zeta = 0 \\
C\frac{dr}{dt} + B'\frac{d^2 b''}{dt^2} - A'\frac{d^2 a''}{dt^2} = 0 \\
B\frac{d^2 a''}{dt^2} + C'\frac{d^2 b''}{dt^2} - A\frac{dr}{dt} + \rho g m \left\{\alpha\zeta + a''\left(H^2 \pm \frac{Vh}{m}\right) + b''(G - \alpha\beta)\right\} = 0 \\
A\frac{d^2 b''}{dt^2} + C'\frac{d^2 a''}{dt^2} + B\frac{dr}{dt} + \rho g m \left\{\beta\zeta + b''\left(K^2 \pm \frac{Vh}{m}\right) + a''(G - \alpha\beta)\right\} = 0
\end{array}\right.$$

La solution complète du problème revient donc maintenant à intégrer simultanément les équations (8) ou bien les équations (9), selon l'un ou l'autre des deux cas que nous avons distingués. Or, on voit que l'un ou l'autre de ces systèmes n'est composé que d'équations linéaires à coëfficients constants ; on pourra donc les intégrer par les méthodes connues. L'avantage d'avoir des équations linéaires tient, comme on voit, à l'emploi des variables a'', b'', ζ.

En intégrant les équations (8), on verra très simplement que la condition générale pour que a'' b'' ζ restent très petites est que l'équation

$$(Vu + gm)\left[(Bu + E)(Au + E') + D^2 u - F^2\right] +$$
$$+ \rho g m V\left[\alpha^2 (Au + E') - 2\alpha\beta F u + \beta^2 (Bu + E)\right] = 0$$

n'admette pour u que des valeurs négatives et inégales. Pour le même but, on voit aussi très simplement que dans l'intégration des équations (6) l'équation

$$0 = (Vu - gm)\left[(gmP' - K''Vu)(gmP - K'Vu) - (gmQ - LVu)^2\right] +$$
$$+ gmVu\left[\alpha^2 (gmP' - K''Vu) - 2\alpha\beta(gmQ - LVu) + \beta^2 (gmP - K'Vu)\right]$$

ne doit admettre pour u que des valeurs positives et inégales. On a fait dans cette équation, pour abréger : $CMK' = BC - A'^2$ $CMK'' = AC - B'^2$ $MLC = CC' + A'B'$ $mP = mH^2 \pm Vh$. $mP' = mK^2 \pm Vh$ $Q = G - \alpha\beta$.

Pour déterminer complètement la position du corps flottant au bout du temps t, il suffit de connaître la position de son centre de gravité qui sera donnée par la valeur de ζ, et en outre les angles $\theta\varphi\psi$. Le premier de ces angles indique l'inclinaison de l'axe Gz, par rapport à la verticale. Le troisième est l'angle que fait avec une droite menée par G parallèlement à l'axe des x l'intersection du plan Gx_1y_1 avec un plan horizontal passant par le point G, enfin l'angle φ est celui que la même intersection fait avec l'axe Gx_1. Or, on a $a'' = -\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\varphi$, $b'' = -\operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\varphi$; d'où on tire :

$$\theta = \sqrt{a''^2 + b''^2} \qquad \operatorname{Tang}\varphi = \frac{a''}{b''}.$$

Enfin la formule $r\,dt = d\varphi + \operatorname{Cos}\theta\, d\psi$ fournie par la théorie des mouvements de rotation, se réduit à $d\psi = r\,dt - d\varphi$, et fera connaître ψ au moyen de r et de φ.

PREMIÈRE APPLICATION.

Supposons que le corps flottant ait un plan de symétrie, et que dans l'état d'équilibre ce plan de symétrie soit vertical. Nous prendrons ce plan pour celui des z_1Gx_1, et comme il doit contenir le centre de gravité de l'ancien plan de flottaison, on aura $A' = 0$ $C' = 0$ $\beta = 0$, et les équations (9) deviendront :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \alpha\frac{d^2a''}{dt^2} + \frac{gm}{V}\zeta = 0$$

$$B\frac{d^2a''}{dt^2} - A\frac{dr}{dt} + \rho gm\left\{\alpha\zeta + a''\left(H^2 \pm \frac{Vh}{m}\right)\right\} = 0$$

$$A\frac{d^2b''}{dt^2} + B\frac{dr}{dt} + \rho g b''(mK^2 \pm Vh) = 0$$

$$C\frac{dr}{dt} + B'\frac{d^2b''}{dt^2} = 0$$

équations faciles à intégrer, et qu'on trouve dans divers Traités de mécanique.

Si le corps avait deux plans de symétrie verticaux et perpendiculaires entre eux, en les prenant pour les plans des $z_1 x_1$ et $z_1 y_1$, on aura : $\alpha = o$ $\beta = o$ $C' = o$ $A' = o$ $B' = o$, et les équations précédentes deviendront :

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{gm}{V} \zeta = o$$

$$B \frac{d^2 a''}{d t^2} + \rho g (mH^2 \pm Vh) a'' = o$$

$$A \frac{d^2 b''}{d t^2} + \rho g (mK^2 \pm Vh) b'' = o$$

$$C\, dr = o$$

et les variables se trouvent séparées, et les oscillations se déterminent dans ce cas indépendamment les unes des autres.

Les applications que nous venons de faire des formules (9) ont eu pour but de les vérifier. Nous allons maintenant traiter un cas des formules (1) où le mouvement de rotation du mobile aura une vitesse quelconque.

DEUXIÈME APPLICATION.

Examinons le cas où le solide est de révolution, et supposons que l'axe de révolution soit vertical dans l'état d'équilibre. Le centre de gravité de l'ancien plan de flottaison se trouvant sur l'axe du mobile, on aura $\alpha = o$ $\beta = o$, et le mouvement du centre de gravité sera donné par

$$\frac{d^2 \zeta}{d t^2} = - \frac{gm}{V} \zeta.$$

équation qu'on peut établir facilement d'une manière directe, ou qu'on peut déduire de (8).

Le mouvement du centre de gravité sera donc indépendant du mouvement de rotation, et ses oscillations seront les mêmes que celles d'un pendule simple dont la longueur est $\frac{V}{m}$.

Les équations (7) du mouvement de rotation se réduiront à :

$$(10)\left\{\begin{array}{l} C\,dr = 0 \\ A\,dq + (A-C)\,rp\,dt = -P a''\,dt \\ A\,dp + (C-A)\,rq\,dt = \quad P b''\,dt. \end{array}\right.$$

car, quel que soit le système des axes Gx_1 Gy_1, on aura : $A' = B' = C' = 0$ $G = 0$, $B = A$, $H = K$, et l'on a fait pour abréger : $P = \rho g\,(mH^2 \pm Vh)$

Ces équations pourraient être intégrées en employant l'analyse générale des problèmes précédents. Mais il vaudra mieux avoir recours au principe des aires et à l'équation des forces vives.

Les forces qui sollicitent les divers points du mobile étant verticales, il en résulte que le moment des quantités de mouvement que possèdent les divers points du mobile est constant autour d'un axe vertical pendant toute la durée du mouvement. Il est le même que si le centre de gravité du mobile était en repos, et que l'axe vertical autour duquel on compte le moment passait par ce centre. Or, par la théorie du mouvement de rotation autour d'un point fixe, ce moment est égal à

$$Crc'' + Bqb'' + Apa''.$$

Puisqu'il est constant, en désignant par l une constante arbitraire, remarquant que $A = B$ dans le cas particulier que nous traitons, que r est égal à une constante quelconque n, et que l'on a $a'' = -\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\varphi$, $b'' = -\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\varphi$, $c'' = -\operatorname{Cos}\theta$, le principe des moments fournira l'équation :

$$(11)\quad Cn\operatorname{Cos}\theta + A\,(p\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Sin}\varphi + q\operatorname{Sin}\theta\operatorname{Cos}\varphi) = -l$$

On déduirait l'équation (11) des deux dernières équations (10) en les multipliant par b'' a'', et ayant égard à ce que la théorie du mouvement de rotation donne $dc'' = (a''q - b''p)\,dt$, $db'' = (cp'' - a''r)\,dt$, $da'' = (b''r - c''q)\,dt$.

Le principe des forces vives étant applicable à cette espèce de mouvement, on aura :

$\int u^2 dm + g\rho\,[m\zeta^2 + (m\gamma^2 \pm Vh)\,\theta^2] = constante$, comme on peut le voir dans le *Traité de mécanique* de M. Poisson. u désigne la vitesse d'un point quelconque du corps dont la masse est dm, et $m\gamma^2$ est le moment d'inertie de l'ancien plan de flottaison, par rappprt à une droite qui passe dans ce plan par son centre de gravité, moment qui est le même quelle que soit cette droite.

puisque le solide est supposé de révolution. Nous avons désigné précédemment par P la quantité $m\gamma^2 \pm Vh$. On sait que la force vive absolue d'un corps $\int u^2\, dm$ est égale à la force vive qu'a ce corps dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité, augmentée du produit de la masse du corps par le carré de la vitesse du centre de gravité. Si donc nous désignons par u' la vitesse d'un point du corps autour de son centre de gravité, et que nous remarquions que ce centre de gravité a pour vitesse $\frac{d\zeta}{dt}$, nous aurons :

$$\int u^2 dm = \int u'^2 dm + M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

d'après l'équation relative au mouvement du centre de gravité, et qui est :

$$M\frac{d^2\zeta}{dt^2} + g\rho m = 0$$

on aura, en multipliant par $2\frac{d\zeta}{dt}$, et intégrant

$$M\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + g\rho m\zeta^2 = \textit{constante}, \text{ donc enfin} \int u'^2 dm = h' - \rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh)\,\theta^2$$

où h' désigne une constante arbitraire.

Or, d'après la théorie du mouvement de rotation autour d'un point fixe, on a $\int u'^2 dm = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$; il viendra donc, en remarquant que $A = B$, et en comprenant dans h' la constante Cr^2.

$$(2)\quad A(p^2 + q^2) = h' - \rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh)\,\theta^2.$$

On peut aussi déduire cette équation des deux dernières équations (10). Multiplions-les par q, p, et ajoutons-les, il viendra :

$$A\,(p\,dp + q\,dq) = P\,dt\,(q \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\varphi - p \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\varphi)$$

Par la théorie du mouvement de rotation autour d'un point fixe, on a :

$$(13)\quad \begin{cases} pdt = \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Sin}\varphi\, d\psi + \operatorname{Cos}\varphi\, d\theta \\ qdt = \operatorname{Sin}\theta \operatorname{Cos}\varphi\, d\psi - \operatorname{Cos}\varphi\, a\theta \\ rdt = d\varphi + \operatorname{Cos}\theta\, d\psi \end{cases}$$

où θ est le supplément de l'angle que l'axe Gz_1 fait avec Az. On tire de là :

$$dt\,(p\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\varphi - q\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,\varphi) = \mathrm{Sin}\,\theta\,d\theta.$$

L'équation précédente deviendra donc, en intégrant :

$$A\,(p^2+q^2) = -2P\int \mathrm{Sin}\,\theta\,d\theta = 2P\,\mathrm{Cos}\,\theta + \textit{constante}.$$

$$\text{Or, } \mathrm{Cos}\,\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \text{ et } P = \rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh);$$

donc cette équation coïncidera avec (18).

L'avantage du principe des forces vives et du principe des aires est de nous avoir fourni deux intégrales premières (11) (12). Et pour achever la solution du problême, il ne nous reste plus qu'à éliminer p et q entre (11) (12) (13) et à intégrer de nouveau. Mais avant de faire l'élimination, nous déterminerons les constantes arbitraires n, l, h', qui entrent dans ces équations.

Nous supposerons qu'après avoir enfoncé le corps dans le liquide, ou après l'en avoir retiré d'une quantité très petite, on ait incliné l'axe du solide d'une quantité très petite que nous désignerons par α. Le plan qui passe par l'axe Gz_1, et par la verticale du centre de gravité pourra être pris pour le plan des zAy, z_1Gy_1, puisque le solide étant de révolution autour de Gz_1, tous les axes passant par G et perpendiculaires à Gz_1 sont des axes principaux du mobile. Si par le point K où l'axe Gz_1 perce l'ancien plan de flottaison, on mène un plan parallèle à la surface du liquide, ces deux plans se couperont suivant une certaine droite que je désignerai par NKN', et qui à l'origine du mouvement sera, d'après ce que nous venons de dire, perpendiculaire au plan vertical zGy; et si nous menons par le point K des droites parallèles aux demi-axes positifs Gx_1 et Ax, à l'origine du mouvement ces deux parallèles Kx_1 et Kx coïncideront et se confondront avec l'intersection NKN'. Je supposerai que NK soit la partie de l'intersection qui coïncide avec Kx_1 ou Kx; d'après la nature des angles φ et ψ, il est évident qu'à l'origine du mouvement ils seront nuls. Ces différentes suppositions n'altèrent en rien la généralité des conditions relatives au mouvement initial. Comme les oscillations du centre de gravité et le mouvement de rotation autour de ce centre se déterminent indépendamment les uns des autres, nous pourrons, sans altérer la généralité des conditions initiales, supposer que le mobile n'a reçu qu'un mouvement de rotation autour de son centre de gravité. De quelque manière que ce mouvement de rotation ait été produit, par des frottements ou par des percussions, il est évident que les quantités de mouvement imprimées au mobile devront être connues. Mais, d'après le principe de d'Alembert, les quantités de mouvement que les divers points du mobile auront réellement à l'origine du temps étant prises en sens contraire de leur direction, devront leur faire équilibre. Cette condition d'équilibre fera connaître en grandeur le moment principal autour du centre de gravité des quantités de mouvement de tous les points du corps, elle fera en outre connaître la direction de son axe. Cela posé, je décompose ce moment principal suivant trois axes rectangulaires principaux : l'axe Gz_1, une droite perpendiculaire à Gz_1 dans le plan vertical qui passe par Gz_1 et une autre droite perpendiculaire à la fois à ces deux axes; il est évident, d'après les conditions initiales que nous avons prises, que ces trois axes principaux ne seront autre chose que Gz_1 Gx_1 Gy_1. Je désigne par L, M, N, ces trois composantes. Le moment autour de l'axe principal Gz_1 étant d'ailleurs Cr, on aura $L = Cn$; ce qui fera connaître la valeur de n.

l désignant le moment des quantités de mouvement autour de l'axe vertical qui passe par le centre de gravité, on aura, d'après la composition des moments :

$$l = L \operatorname{Cos} \alpha' - M \operatorname{Sin} \alpha'.$$

En remarquant que les moments L M N font avec l'axe vertical des angles $\alpha', \alpha' + 90^\circ, 90^\circ$. Enfin je remarque que le moment principal des quantités initiales de mouvement est :

$$\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

On sait d'ailleurs qu'au bout d'un temps quelconque le moment principal des quantités de mouvement autour du centre de gravité est :

$$C^2 r^2 + B^2 q^2 + A^2 r^2.$$

En vertu de l'équation (12), on aura :

$$C^2 r^2 + B^2 q^2 + A^2 p^2 = C^2 n^2 + \left(h' - \rho g \left(m\gamma^2 \pm V h\right) \theta^2\right) A$$

En remarquant que $B = A$ et $r = n$. Or, à l'origine du mouvement, on aura pour ce moment principal :

$$C^2 n^2 + \left[h' - \rho g \left(m\gamma^2 \pm V h\right) \alpha^2\right] A$$

Donc, à cause que $L^2 = B^2 n^2$, il viendra pour déterminer h' :

$$h' = \rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh)\,\alpha^2 + \frac{M^2 + N^2}{A}$$

Pour plus de simplicité, nour supposerons que le mobile n'a reçu d'impulsion qu'autour de son axe de figure ; alors on aura $M = N = 0$, et par suite :

$$l = Cn \operatorname{Cos} \alpha' = -cn \operatorname{Cos} \alpha$$
$$h' = \rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh)\,\alpha^2$$

Cela posé, les équations (11) (12) deviennent, en négligeant les puissances de α et de θ supérieures à la deuxième :

$$A\,(p \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \varphi + q \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \varphi) = \frac{Cn}{2}\,(\theta^2 - \alpha^2)$$
$$A\,(p^2 + q^2) = \rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh)\,(\alpha^2 - \theta^2)$$

Les équations (13) nous permettent d'éliminer p et q, car on en tire :

$$p^2 + q^2 = \operatorname{Sin}^2 \theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2}$$
$$p \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Sin} \varphi + q \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \varphi = \operatorname{Sin}^2 \theta\,\frac{d\psi}{dt}$$

Les équations précédentes deviendront donc :

$$(14)\left\{\begin{aligned} &\theta^2\,\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{2A}\,(\theta^2 - \alpha^2) \\ &\theta^2\,\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{\rho g\,(m\gamma^2 \pm Vh)}{A}\,(\alpha^2 - \theta^2) \end{aligned}\right.$$

Cette seconde équation montre que si $m\gamma^2 \pm Vh$ est une quantité positive, θ restera plus petit que α pendant tout le mouvement, et par conséquent l'équilibre d'où le corps a été tiré était stable. Les équations (11) représenteront donc complètement le mouvement du corps.

Pour les intégrer, j'élimine d'abord $\frac{d\psi}{dt}$ entre ces deux équations. En élevant la première au carré, multipliant par θ^2 la seconde et les retranchant l'une de l'autre, il vient :

$$\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\alpha^2 - \theta^2)\left[\frac{\rho g(m\gamma^2 \pm Vh)}{A}\theta^2 - \frac{c^2n^2}{4A^2}(\alpha^2 - \theta^2)\right]$$

$$(15)\qquad \text{ou } \theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\alpha^2 - \theta^2)\left[\left(\frac{\rho g(m\gamma^2 \pm Vh)}{A} + \frac{c^2n^2}{4A^2}\right)\theta^2 - \frac{c^2n^2}{4A^2}\alpha^2\right]$$

Nous avons déjà vu que la quantité $m\gamma^2 \pm Vh$ devait être positive dans le cas de l'équilibre stable, et que par suite on avait $\theta < \alpha$. Mais il est facile de voir par l'équation précédente que θ ne peut pas, en général, être nul, pour que le second membre ne devienne pas négatif; θ ne peut pas même décroître au-dessous de la limite :

$$\frac{Cn\alpha}{\sqrt{C^2n^2 + 4A\rho g(m\gamma^2 \pm Vh)}}$$

Cette limite serait nulle dans le cas de $n = 0$, c'est-à-dire dans le cas où le mobile n'aurait pas reçu une vitesse primitive de rotation. Dans ce cas, l'équation devient :

$$\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\alpha^2 - \theta^2)\frac{\rho g(m\gamma^2 \pm Vh)}{A}$$

En la différenciant, on trouve :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\rho g(m\gamma^2 \pm Vh)}{A}\theta$$

équation qui coïncide avec celle qu'on trouve relativement à ce cas dans le *Traité de Mécanique* de M. Poisson.

Je poserai, pour abréger, $\frac{\rho(m\gamma^2 \pm Vh)}{A} = \frac{1}{l}$, où l désigne la longueur du pendule simple qui fait des oscillations de même amplitude et de même durée que celles du corps flottant autour de son centre de gravité dans le cas de $n = 0$. En faisant, en outre :

$$\frac{c^2n^2}{4A^2} = \frac{\beta^2 g}{l}$$

où β désigne une ligne, l'équation (15) devient :

$$\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{g}{l}(\alpha^2 - \theta^2)\left[(1+\beta^2)\theta^2 - \beta^2\alpha^2\right]$$

Séparant les variables, j'aurai :

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{\pm\,\theta\,d\theta}{\sqrt{(\alpha^2-\theta^2)\{(1+\beta^2)\theta^2-\beta^2\alpha^2)\}}}$$

et en intégrant $\theta^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{1+\beta^2}\,\mathrm{Sin}^2\,t\sqrt{\frac{g}{l}(1+\beta^2)}$ (16)

d'où l'on voit que θ est une fonction périodique du temps, et que si **T** désigne le temps qu'elle met à passer de sa plus petite valeur à sa plus grande, on aura :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,\pi\sqrt{\frac{l}{g(1+\beta^2)}}$$

Comme $\beta^2 = \frac{C^2 n^2 l}{4A^2 g}$ on voit que si N = o, la durée des demi-oscillations sera la même que celle d'une pendule simple dont la longueur est l ou $\frac{A}{\rho\,(m\gamma^2 \pm Vh)}$ ce qui doit être, et que n n'étant pas nul, les oscillations de la normale à l'ancien plan de flottaison seront d'autant plus rapides que n sera plus grand.

Pour déterminer l'angle ψ, je porte la valeur précédente de θ dans la première équation (14) et il vient :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{Cn}{2A} - \frac{\frac{Cn}{2A}(1+\beta^2)}{1+\beta^2 - \mathrm{Sin}^2\,t\sqrt{\frac{g}{l}(1+\beta^2)}}$$

ou bien, à cause que $\frac{Cn}{2A} = \beta\sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\frac{d\psi}{dt} = \beta\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{\beta\sqrt{\frac{g}{l}}(1+\beta^2)}{\beta^2 + \mathrm{Cos}^2\,t\sqrt{\frac{g}{l}(1+\beta^2)}}$$

en intégrant et supposant comme nous l'avons déjà dit $\psi = o$ pour $t = o$ on aura :

$$\psi = -\text{arc Tang} = \frac{\beta \operatorname{Tang} t \sqrt{\frac{g(1+\beta^2)}{l}}}{\sqrt{1+\beta^2}} + \beta t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Si on fait $t = K \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g(1+\beta^2)}}$, K désignant un nombre entier, ou bien $t = KT$, en remarquant que déjà nous avons posé $T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g(1+\beta^2)}}$.

Nous aurons pour $\operatorname{Tang} t \sqrt{\frac{g(1+\beta^2)}{l}}$ les valeurs

$$o \quad \infty \quad o \quad - \infty \ldots .$$

en faisant successivement

$$K = o \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \quad \ldots \ldots$$

et alors on aura pour *arc Tang* $= \frac{\beta \operatorname{Tang} KT}{\sqrt{1+\beta^2}}$

$$o \qquad \frac{1}{2}\pi \qquad \pi \qquad \frac{3}{2}\pi \ldots .$$

et par suite

$$\psi = o, \quad \frac{\frac{1}{2}\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} - \pi, \quad \frac{\frac{3}{2}\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{3}{2}\pi.$$

Donc l'angle que nous désignons par ψ croîtra de la même quantité

$$\frac{\frac{1}{2}\pi\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{1}{2}\pi$$

pendant les intervalles de temps successifs T.

Quant à la valeur de φ elle sera donnée par l'équation $ndt = d\varphi + d\psi$ d'où l'on tire

$$\varphi = nt - \psi$$

en réduisant à zéro la constante arbitraire, puisqu'on doit avoir en même temps $\psi = 0$ $\varphi = 0$ $t = 0$.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris.

Baron THÉNARD.

17 *Mars* 1839.

Permis d'imprimer :

L'Inspecteur-Général des Études, chargé de l'Administration de l'Académie de Paris.

ROUSSELLE.

PROGRAMME

D'UNE

THÈSE D'ASTRONOMIE

SUR LE FLUX DE LA MER.

1.° Equations différentielles du mouvement d'une masse fluide qui tourne autour d'un axe.

2.° Simplifications qu'elles subissent dans le cas des oscillations très petites.

3.° Application au mouvement de la mer, en la supposant dérangée de l'état d'équilibre par l'action de forces très petites.

4.° Cas où ces forces proviennent de l'attraction du soleil et de la lune.

5.° Intégration des équations différentielles, lorsque la terre est supposée sans mouvement de rotation et la mer d'une profondeur constante. Expression générale de la hauteur de la mer et de ses mouvements dans cette hypothèse.

6.° L'équilibre de la mer n'est alors stable que lorsque sa densité est moindre que la moyenne densité de la terre.

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences de l'Académie de Paris.

Baron THÉNARD.

17 *Mars* 1839.

Permis d'imprimer :

L'Inspecteur-Général des Etudes, chargé de l'Administration de l'Académie de Paris.

ROUSSELLE.