SUR LES

VARIATIONS SÉCULAIRES

DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

THÈSE D'ASTRONOMIE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,

Par Ch. Choquet.

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, 12.

1842.

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES.

MM	DUMAS, doyen,	professeurs.
	LACROIX,	
	FRANCOEUR,	
	GEOFFROY SAINT-HILAIRE,	
	MIRBEL,	
	POUILLET,	
	PONCELET,	
	LIBRI,	
	STURM,	
	DELAFOSSE,	
	DE BLAINVILLE,	professeurs-adjoints
	CONSTANT PREVOST,	
	AUGUSTE SAINT-HILAIRE,	
	DESPRETZ,	
	BALARD,	
	LEFÉBURE DE FOURCY,	agrégés.
	DUHAMEL,	
	MASSON,	
	PÉLIGOT,	
	MILNE EDWARDS,	
	DE JUSSIEU,	
	PAYEN,	suppléants.
	LAURENT,	

THÈSE D'ASTRONOMIE.

SUR LES

VARIATIONS SÉCULAIRES

DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

§ I.

1. Les trois équations différentielles du mouvement d'une planète autour du centre du Soleil, supposé fixe, peuvent être présentées sous cette forme

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\mu x}{r^3}+\frac{dR}{dx},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\mu y}{r^3}+\frac{dR}{dy},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{\mu z}{r^3}+\frac{dR}{dz}.$$

x, y, z sont les coordonnées de la planète rapportées au centre du Soleil; r est la distance de ces deux corps, et μ la somme de leurs masses, de sorte qu'en désignant par m la masse de la planète et par M celle du Soleil, on a $\mu = M + m$.

De plus, si l'on représente par m_1, m_2, etc., les masses des autres planètes, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de m_1, par x_2, y_2, z_2 celles de m_2, etc., et par r_1, r_2, etc., les distances de ces différentes planètes au centre du Soleil, on a

$$(2)\quad R = m_1\left[\frac{1}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}}-\frac{xx_1+yy_1+zz_1}{r_1^3}\right]+\text{etc.}$$

On peut d'ailleurs remplacer les équations (1) par un système de six équations différentielles du premier ordre, savoir :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x', \quad \dfrac{dy}{dt}=y', \quad \dfrac{dz}{dt}=z', \\ \dfrac{dx'}{dt}=-\dfrac{\mu x}{r^3}+\dfrac{dR}{dx}, \quad \dfrac{dy'}{dt}=-\dfrac{\mu y}{r^3}+\dfrac{dR}{dy}, \quad \dfrac{dz'}{dt}=-\dfrac{\mu z}{r^3}+\dfrac{dR}{dz}. \end{cases}$$

2. Pour déduire de ces équations différentielles les lois du mouvement, on les intègre d'abord en négligeant la quantité R; on a ensuite égard à cette quantité au moyen de la méthode de la variation des constantes arbitraires.

Désignons généralement par a, b, c, etc., les six constantes arbitraires qui résultent de l'intégration des équations (1) quand on ne tient pas compte de la quantité R. Les valeurs de x, y, z sont alors des fonctions connues de t et de ces constantes. Pour que ces valeurs satisfassent aux équations quand on cesse de négliger la quantité R, il suffit de concevoir que les constantes a, b, c, etc., deviennent elles-mêmes des fonctions de la variable indépendante t, et de déterminer convenablement ces nouvelles fonctions. Comme on a d'ailleurs six inconnues, et seulement trois équations à vérifier, on peut se donner trois autres conditions arbitrairement; celles qu'il convient le mieux de choisir sont que les valeurs des dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en fonction de t et de a, b, c, etc., conservent la même forme que dans le cas où les dernières quantités sont constantes; c'est-à-dire que les dérivées de x, y, z, prises en ayant égard seulement à la variation des constantes arbitraires a, b, c, etc., soient nulles. De cette manière, on a, pour déterminer ces quantités a, b, c, etc., devenues variables, les six équations qui suivent :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{da}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{dx}{db}\dfrac{db}{dt}+\dfrac{dx}{dc}\dfrac{dc}{dt}+\text{etc.}=0, \\ \dfrac{dy}{da}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{dy}{db}\dfrac{db}{dt}+\dfrac{dy}{dc}\dfrac{dc}{dt}+\text{etc.}=0, \\ \dfrac{dz}{da}\dfrac{da}{dt}+\dfrac{dz}{db}\dfrac{db}{dt}+\dfrac{dz}{dc}\dfrac{dc}{dt}+\text{etc.}=0. \end{cases}$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx'}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dx'}{db}\frac{db}{dt}+\frac{dx'}{dc}\frac{dc}{dt}+\text{etc.}=\frac{d\mathrm{R}}{dx},\\ &\frac{dy'}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dy'}{db}\frac{db}{dt}+\frac{dy'}{dc}\frac{dc}{dt}+\text{etc.}=\frac{d\mathrm{R}}{dy},\\ &\frac{dz'}{da}\frac{da}{dt}+\frac{dz'}{db}\frac{db}{dt}+\frac{dz'}{dc}\frac{dc}{dt}+\text{etc.}=\frac{d\mathrm{R}}{dz}. \end{aligned}\right.$$

3. En regardant tour à tour x, y, z, x', y', z' comme fonctions de a, b, c, etc., et réciproquement, on obtient aisément ces relations,

$$\frac{da}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{da}{dy}\frac{dy}{da}+\frac{da}{dz}\frac{dz}{da}+\frac{da}{dx'}\frac{dx'}{da}+\text{etc.}=1,$$

$$\frac{da}{dx}\frac{dx}{db}+\frac{da}{dy}\frac{dy}{db}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,$$

$$\frac{da}{dx}\frac{dx}{dc}+\frac{da}{dy}\frac{dy}{dc}+\text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,$$

etc.

On en a de semblables pour chacun des autres éléments b, c, etc.; et au moyen de ces diverses relations, on tire sans difficulté des équations (4) et (5)

$$\frac{da}{dt}=\frac{da}{dx'}\frac{d\mathrm{R}}{dx}+\frac{da}{dy'}\frac{d\mathrm{R}}{dy}+\frac{da}{dz'}\frac{d\mathrm{R}}{dz},$$

$$\frac{db}{dt}=\frac{db}{dx'}\frac{d\mathrm{R}}{dx}+\frac{db}{dy'}\frac{d\mathrm{R}}{dy}+\frac{db}{dz'}\frac{d\mathrm{R}}{dz},$$

$$\frac{dc}{dt}=\frac{dc}{dx'}\frac{d\mathrm{R}}{dx}+\frac{dc}{dy'}\frac{d\mathrm{R}}{dy}+\frac{dc}{dz'}\frac{d\mathrm{R}}{dz},$$

etc.

On peut d'ailleurs établir directement ces dernières équations.

4. Les valeurs de $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, etc., peuvent être présentées sous une autre forme, en y mettant, au lieu des dérivées partielles de la fonction R relatives à x, y, z, les expressions de ces dérivées au moyen de celles de la même fonction relatives aux quantités a, b, c, etc., considérées comme des fonctions de x, y, z. On a

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx} = \frac{d\mathrm{R}}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d\mathrm{R}}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d\mathrm{R}}{dc}\frac{dc}{dx} + \text{etc.}$$

On a aussi, puisque R ne contient pas x', y', z',

$$\frac{d\mathrm{R}}{dx'}\frac{da}{dx} + \frac{d\mathrm{R}}{dy'}\frac{da}{dy} + \frac{d\mathrm{R}}{dz'}\frac{da}{dz} = 0.$$

Si l'on retranche le premier membre de la dernière égalité de la valeur ci-dessus de $\frac{da}{dt}$, après avoir remplacé $\frac{d\mathrm{R}}{dx'}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dy'}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dz'}$ par leurs expressions au moyen de $\frac{d\mathrm{R}}{da}$, $\frac{d\mathrm{R}}{db}$, etc., et que l'on transforme d'une manière analogue les valeurs de $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, etc., en posant

$$(a, b) = \frac{da}{dx}\frac{db}{dx'} - \frac{da}{dx'}\frac{db}{dx} + \frac{da}{dy}\frac{db}{dy'} - \frac{da}{dy'}\frac{db}{dy} + \frac{da}{dz}\frac{db}{dz'} - \frac{da}{dz'}\frac{db}{dz},$$

et en représentant de même par les symboles (a, c), (b, c), etc., les autres expressions de la même forme, on trouve

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -(a, b)\frac{d\mathrm{R}}{db} - (a, c)\frac{d\mathrm{R}}{dc} - \text{etc.},\\ \frac{db}{dt} &= -(b, a)\frac{d\mathrm{R}}{da} - (b, c)\frac{d\mathrm{R}}{dc} - \text{etc.},\\ \frac{dc}{dt} &= -(c, a)\frac{d\mathrm{R}}{da} - (c, b)\frac{d\mathrm{R}}{db} - \text{etc.},\\ &\text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules ont un avantage important qui consiste en ce que, après la substitution des valeurs en a, b, c, etc. et t, que l'on doit mettre pour x, y, z, x', y', z', et qui sont celles qui résultent du mouvement elliptique de la planète, les coefficients représentés par (a, b), (a, c), etc., se réduisent à de simples fonctions de a, b, c, etc., sans t.

3. Par l'intégration des équations (1) ou (3), en ne tenant pas compte de la quantité R, on obtient les équations suivantes :

$$(7) \qquad yz' - zy' = C, \quad zx' - xz' = C', \quad xy' - yx' = C'',$$

$$(8) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2H + \frac{2\mu}{r},$$

$$(9) \qquad v - g = \int_{r_0}^{r} \frac{K\,dr}{r^2\sqrt{2H - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}},$$

$$(10) \qquad t - \tau = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2H - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}},$$

$$(11) \qquad K^2 = C^2 + C'^2 + C''^2.$$

L'équation du plan de l'orbite est

$$(12) \qquad Cx + C'y + C''z = 0.$$

En nommant θ l'angle compris entre la trace de ce plan sur le plan xy et l'axe des x, et φ son inclinaison sur le plan xy, on a

$$(13) \qquad \operatorname{tang}\theta = -\frac{C}{C'},$$

$$(14) \qquad \cos\varphi = \frac{C''}{K}.$$

Enfin on a, entre les coordonnées rectilignes x, y, z, et les coordonnées polaires r et v de la planète dans son orbite, la relation

$$(15) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et en outre, en supposant, pour plus de simplicité, que les angles v et g soient comptés à partir du nœud,

$$z = r\sin v\sin\varphi, \qquad x\cos\theta + y\sin\theta = r\cos v,$$

ou, ce qui revient au même, d'après les équations (13), (14) et (11),

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{K}z = r \sin v \sqrt{\mathrm{C}^2 + \mathrm{C}'^2},$$

$$\text{(17)} \qquad r \cos v = \frac{\mathrm{C}y - \mathrm{C}'x}{\sqrt{\mathrm{C}^2 + \mathrm{C}'^2}}.$$

Dans ces formules, les six constantes arbitraires sont C, C′, C″, H, g et τ; mais on peut également prendre pour ces six constantes, H, K, θ, φ, g et τ.

6. Concevons maintenant que l'on représente par S et T deux fonctions quelconques des variables x, y, z et des variables correspondantes x', y', z'; et soit généralement

$$(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = \frac{d\mathrm{S}}{dx}\frac{d\mathrm{T}}{dx'} - \frac{d\mathrm{S}}{dx'}\frac{d\mathrm{T}}{dx} + \frac{d\mathrm{S}}{dy}\frac{d\mathrm{T}}{dy'} - \frac{d\mathrm{S}}{dy'}\frac{d\mathrm{T}}{dy} + \frac{d\mathrm{S}}{dz}\frac{d\mathrm{T}}{dz'} - \frac{d\mathrm{S}}{dz'}\frac{d\mathrm{T}}{dz}.$$

Il est facile de voir que la fonction différentielle alternée (S, T) jouira des propriétés ci-après :

1°. Si l'on échange entre elles les deux quantités S et T, cette fonction ne fera que changer de signe ou, en d'autres termes, on aura

$$(\mathrm{T}, \mathrm{S}) = -(\mathrm{S}, \mathrm{T});$$

2°. Si l'on a $\mathrm{T} = \mathrm{S}$, cette fonction sera identiquement nulle, ou, en d'autres termes,

$$(\mathrm{S}, \mathrm{S}) = 0;$$

3°. Si l'une des deux fonctions S ou T ne contient aucune des variables x', y', z' correspondantes à celles des variables x, y, z qui sont contenues dans l'autre fonction T ou S, on aura

$$(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = 0;$$

4°. Si T est fonction de quantités L, M, N, etc., qui soient elles-mêmes des fonctions des variables x, y, z, x', y', z', on aura

$$(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = (\mathrm{S}, \mathrm{L})\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{L}} + (\mathrm{S}, \mathrm{M})\frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{M}} + \text{etc.}$$

7. Au moyen des principes qui viennent d'être énoncés, on trouve

$$(\mathrm{H}, \mathrm{K}) = 0, \quad (\mathrm{H}, \theta) = 0, \quad (\mathrm{H}, \varphi) = 0, \quad (\mathrm{K}, \theta) = 0, \quad (\mathrm{K}, \varphi) = 0,$$

$$(\theta, \varphi) = -\frac{1}{\mathrm{K}\sin\varphi}, \quad (\mathrm{H}, g) = 0, \quad (\mathrm{H}, \tau) = 1, \quad (\mathrm{K}, g) = -1, \quad (\mathrm{K}, \tau) = 0,$$

$$(\theta, g) = 0, \quad (\theta, \tau) = 0, \quad (\varphi, g) = -\frac{1}{\mathrm{K}\operatorname{tang}\varphi}, \quad (\varphi, \tau) = 0, \quad (g, \tau) = 0.$$

On exécute les calculs qui conduisent à ces résultats, en considérant
H comme une fonction de x', y', z' et r, d'après l'équation (8);
K comme une fonction de C, C', C'', d'après l'équation (11);
θ comme une fonction de C et C', d'après l'équation (13);
φ comme une fonction de C'' et K, d'après l'équation (14);
g comme une fonction de H, K, r et v, d'après l'équation (9);
τ comme une fonction de H, K et r, d'après l'équation (10);
v comme une fonction de C, C', K, r et z, d'après l'équation (16);
r comme une fonction de x, y, z, d'après l'équation (15);
C, C', C'' comme des fonctions de x, y, z, x', y', z', d'après les équations (7).

Les formules ci-dessus subsistent d'ailleurs également, soit que l'on regarde dans les équations (9) et (10), r_0 comme représentant une valeur donnée de r, ou comme représentant le rayon vecteur du périhélie, auquel cas la constante arbitraire g est la distance angulaire du périhélie au nœud.

8. Ces formules, combinées avec les formules (6), donnent

$$(18)\ \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{H}}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{d\tau}, \quad \dfrac{d\mathrm{K}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dg}, \quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{\mathrm{K}\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varphi}, \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{1}{\mathrm{K}\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\theta} + \dfrac{1}{\mathrm{K}\operatorname{tang}\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{dg}, \quad \dfrac{dg}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{K}} - \dfrac{1}{\mathrm{K}\operatorname{tang}\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varphi}, \quad \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{H}}. \end{cases}$$

9. Soient actuellement ϖ la longitude du périhélie, a le demi grand axe, e l'excentricité, ε la longitude de l'époque, et n le moyen mouvement de la planète. Ces nouvelles quantités seront

liées aux précédentes par les relations

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathrm{H} = -\dfrac{\mu}{2a}, \quad \mathrm{K}^2 = \mu a(1-e^2), \quad \varpi = g + \theta, \\ \varepsilon = \varpi - n\tau, \quad n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}}. \end{cases}$$

Au moyen de ces relations, on peut transformer les formules (18) en y introduisant, au lieu des quatre constantes arbitraires H, K, g et τ, les quantités a, e, ϖ et ε; on obtient ainsi les six équations suivantes :

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{an}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}, \\ \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{(1-\sqrt{1-e^2})\sqrt{1-e^2}}{a^2en}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} - \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{a^2en}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varpi}, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varphi}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\theta} - \dfrac{1-\cos\varphi}{a^2n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\left(\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varpi} + \dfrac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right), \\ \dfrac{d\varpi}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{a^2en}\dfrac{d\mathrm{R}}{de} + \dfrac{1-\cos\varphi}{a^2n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varphi}, \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{a^2en}(1-\sqrt{1-e^2})\dfrac{d\mathrm{R}}{de} - \dfrac{2}{an}\dfrac{d\mathrm{R}}{da} + \dfrac{1-\cos\varphi}{a^2n\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\dfrac{d\mathrm{R}}{d\varphi}. \end{cases}$$

§ II.

10. Les forces perturbatrices étant proportionnelles aux masses m_1, m_2, etc., qui sont des quantités très-petites, les perturbations produites par ces forces seront aussi très-petites; et si, pour une première approximation, on néglige les termes qui seraient de l'ordre des carrés des masses, on pourra, après avoir substitué dans R les valeurs elliptiques des coordonnées x, y, z, x_1, y_1, z_1, etc., remplacer dans les seconds membres des équations (20) les quantités a,

e, ϖ, φ, θ et ε par leurs parties constantes; on obtiendra alors les parties variables de ces quantités par de simples intégrations.

D'un autre côté, la fonction perturbatrice R, à cause de la petitesse des excentricités et des inclinaisons, peut être développée en une suite de termes qui ne contiennent le temps t que par des sinus et cosinus d'angles proportionnels à t, et dépendants des longitudes moyennes de la planète troublée et de la planète troublante. Dans les valeurs différentielles des éléments a, e, ϖ, φ et θ, qui déterminent la forme et la position de l'orbite, les termes de R en sinus et cosinus ne donnent que de pareils termes; et les variations séculaires de ces éléments, au degré d'approximation que nous venons d'indiquer, dépendent uniquement des termes de R, dans lesquels t n'entre point.

Dans la valeur de la différentielle $d\varepsilon$, qui contient la dérivée partielle $\frac{dR}{da}$, les termes de R en sinus et cosinus donnent, par la différentiation des termes multipliés par t en dehors des signes sinus et cosinus; mais il est inutile d'avoir égard à ces termes, parce qu'ils se détruisent avec d'autres dans l'expression de la longitude moyenne. En effet, la quantité ε dans le développement de R, étant toujours jointe à nt, on a $\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{dR}{d.nt}$, d'où $\frac{dR}{d\varepsilon} ndt = d'R$, en marquant par la caractéristique d' une différentielle relative à t, prise en ne faisant varier t qu'autant qu'il est multiplié par n. Au moyen de cette formule, la première équation (20) devient $da = \frac{2}{an^2} d'R$; d'un autre côté, puisque $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, on a

$$dn = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a^5}}\, da = -\frac{3n}{2a}\, da, \quad \text{ou} \quad dn = -\frac{3}{a^2 n} d'R,$$

d'où l'on conclura par l'intégration la valeur de n pour le mouvement troublé. Mais si l'on représente par V la longitude moyenne, on aura

$$V = nt + \varepsilon, \quad \text{d'où} \quad dV = ndt + tdn + d\varepsilon;$$

le terme $-\frac{2}{an}\frac{d\text{R}}{da}\,dt$ de $d\varepsilon$ donnera, par la variation de a dans n, $-\frac{2}{an}\,t\,\frac{d\text{R}}{d\varepsilon}\frac{dn}{da}\,dt$, ou $\frac{3}{a^2n}\,td'\text{R}$; et le terme tdn donnera $-\frac{3}{a^2n}\,td'\text{R}$. Il suit de là qu'on pourra regarder n comme constant dans la différentiation de R par rapport à a, et l'on aura simplement, pour l'expression de la longitude moyenne dans le mouvement troublé, $\text{V}=\int ndt+\varepsilon$. De cette manière, l'expression de $d\varepsilon$ ne renfermera aucun terme contenant t en dehors des signes sinus et cosinus.

11. Les termes en t sous les signes sinus et cosinus dans le développement de R, ne pouvant se détruire, à cause de l'incommensurabilité des moyens mouvements, on a, en ne considérant que la partie de R indépendante de t, $\frac{d\text{R}}{d\varepsilon}=0$; par conséquent, $da=0$; ce qui fait voir que le demi grand axe, et par conséquent aussi le moyen mouvement sont constants par rapport aux variations séculaires, du moins tant qu'on ne tient compte que des premières puissances des masses perturbatrices. On sait d'ailleurs que Poisson a prouvé que l'invariabilité des grands axes subsiste encore quand on tient compte des carrés et des produits deux à deux des masses.

12. Lorsqu'on néglige, dans le développement de la fonction perturbatrice R, les puissances des excentricités et des inclinaisons supérieures au carré, en considérant seulement deux planètes m et m_1, et en désignant par F la partie du développement indépendante des positions de ces deux planètes dans leurs orbites, on a

$$(21)\left\{\begin{aligned}\frac{\text{F}}{m_1}=\;&\frac{(a^2+a_1^2)(a,a_1)+3aa_1(a,a_1)'}{(a_1^2-a^2)^2}\\&-\frac{3aa_1(a,a_1)'}{8(a_1^2-a^2)^2}\left[e^2+e_1^2-4\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\right)+2\sin\varphi\sin\varphi_1\cos(\theta_1-\theta)\right]\\&+\frac{3\left[aa_1(a,a_1)+(a^2+a_1^2)(a,a_1)'\right]}{2(a_1^2-a^2)^2}\times ee_1\cos(\varpi_1-\varpi).\end{aligned}\right.$$

Les quantités qu'on représente ici par $(a,\ a_1)$ et $(a,\ a_1)'$ sont les coefficients des deux premiers termes de la fonction

$$(a_1^2\;-\;2aa_1\cos\theta\;+\;a^2)^{\frac{1}{2}},$$

développée en une série de cosinus des multiples successifs de l'angle β.

Comme les éléments des deux planètes m et m_1 entrent de la même manière dans l'expression de $\frac{F}{m_1}$, cette quantité détermine les perturbations de chacune des deux planètes dues à l'action de l'autre.

13. Au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, on réduit les équations différentielles des variations à la forme linéaire en introduisant, au lieu des variables e, ϖ, φ et θ, relatives à chaque planète, d'autres variables h, l, p, q liées aux précédentes par les relations

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{ll} h = e\sin\varpi, & l = e\cos\varpi, \\ p = \operatorname{tang}\varphi\sin\theta, & q = \operatorname{tang}\varphi\cos\theta. \end{array}\right.$$

La formule (21) se change alors dans la suivante

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{F}{m_1} = {} & \frac{(a^2 + a_1^2)(a, a_1) + 3aa_1(a, a_1)'}{(a_1^2 - a^2)^2} \\ & - \frac{3aa_1(a, a_1)'}{8(a_1^2 - a^2)^2}\left[h^2 + l^2 + h_1^2 + l_1^2 - (p_1 - p)^2 - (q_1 - q)^2\right] \\ & + \frac{3\left[a a_1 (a, a_1) + (a^2 + a_1^2)(a, a_1)'\right]}{2(a_1^2 - a^2)^2}(hh_1 + ll_1). \end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, les équations (20) donnent, par la même transformation,

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{a^2 n}\dfrac{dR}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{1}{a^2 n}\dfrac{dR}{dh}, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{a^2 n}\dfrac{dR}{dq}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1}{a^2 n}\dfrac{dR}{dp}. \end{array}\right.$$

Pour l'exécution des calculs qui conduisent à ces dernières équations, on peut omettre, dans les équations (20), les termes qui ont en facteur $\frac{dR}{d\varepsilon}$, puisque cette dérivée partielle est nulle par rapport aux variations séculaires; on peut également omettre, dans les valeurs des différentielles $d\varphi$ et $d\varpi$, les termes qui ont en facteurs $\frac{dR}{d\varpi}$ et $\frac{dR}{d\varphi}$, attendu qu'il ne résulterait de ces termes dans les valeurs de dh, dl, dp, dq, que des termes de plus de deux dimensions par rapport à h, l, p, q.

14. La lettre R, dans les équations (24), ne représente plus que la somme des quantités telles que F, par rapport à chacune des planètes m_1, m_2, m_3, etc. Pour la symétrie des formules, posons

$$(25)\quad L = \Sigma mm_1 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(a^2+a_1^2)(a,a_1)+3aa_1(a,a_1)'}{(a_1^2-a^2)^2} \\ -\dfrac{3aa_1(a,a_1)'}{8(a_1^2-a^2)^2}\left[h^2+l^2+h_1^2+l_1^2-(p_1-p)^2-(q_1-q)^2\right] \\ +\dfrac{3\left[aa_1(a,a_1)+(a^2+a_1^2)(a,a_1)'\right]}{2(a_1^2-a^2)^2}(hh_1+ll_1) \end{array} \right\},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les combinaisons deux à deux des planètes. On pourra remplacer les dérivées de R dans les équations (24) par celles de L, divisées par m; en même temps, pour appliquer ces équations aux diverses autres planètes m_1, m_2, etc., il suffira d'affecter les lettres h, l, p, q, ainsi que a, μ et m, successivement des indices 1, 2, 3, etc. On aura ainsi le système d'équations linéaires ci-après, dans lesquelles, à cause de $a^3n^2 = \mu$, je mets $\sqrt{\mu a}$ au lieu de a^2n:

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{m\sqrt{\mu a}}\dfrac{dL}{dl}, & \dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{1}{m\sqrt{\mu a}}\dfrac{dL}{dh}, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{1}{m\sqrt{\mu a}}\dfrac{dL}{dq}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{1}{m\sqrt{\mu a}}\dfrac{dL}{dp}, \\ \dfrac{dh_1}{dt} = \dfrac{1}{m_1\sqrt{\mu_1 a_1}}\dfrac{dL}{dl_1}, & \dfrac{dl_1}{dt} = -\dfrac{1}{m_1\sqrt{\mu_1 a_1}}\dfrac{dL}{dh_1}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{1}{m_1\sqrt{\mu_1 a_1}}\dfrac{dL}{dq_1}, & \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{1}{m_1\sqrt{\mu_1 a_1}}\dfrac{dL}{dp_1}, \\ \text{etc.} & \end{array} \right.$$

15. On conclut des équations (26)

$$\frac{dL}{dh}\,dh + \frac{dL}{dl}\,dl = 0, \qquad \frac{dL}{dp}\,dp + \frac{dL}{dq}\,dq = 0,$$

$$\frac{dL}{dh_1}\,dh_1 + \frac{dL}{dl_1}\,dl_1 = 0, \qquad \frac{dL}{dp_1}\,dp_1 + \frac{dL}{dq_1}\,dq_1 = 0,$$

etc.

Donc, puisque L est une fonction des variables h, l, p, q, etc., qui ne contient pas explicitement t, et que d'ailleurs a, a_1, etc., sont constantes par rapport aux variations séculaires, on a $dL = 0$, et par conséquent $L =$ constante.

Ces considérations démontrent seulement l'invariabilité de la fonction L pour le cas où les variations séculaires des éléments sont déterminées en négligeant les puissances des excentricités et des inclinaisons supérieures au carré; mais, à l'aide des équations (20), on peut s'assurer que cette invariabilité subsiste encore quand on a égard à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons. En effet, en supposant la fonction R réduite à sa partie indépendante des longitudes moyennes des planètes, on a $\frac{dR}{d\varepsilon} = 0$, donc aussi $da = 0$, et

$$dR = \frac{dR}{de}\,de + \frac{dR}{d\theta}\,d\theta + \frac{dR}{d\varpi}\,d\varpi + \frac{dR}{d\varphi}\,d\varphi;$$

or cette différentielle totale est nulle en vertu des équations (20).

Les équations (26) donnent encore, en considérant seulement celles qui contiennent h, l, h_1, l_1, etc.,

$$m\sqrt{\mu a}\,(h\,dh + l\,dl) + m_1\sqrt{\mu_1 a_1}\,(h_1\,dh_1 + l_1\,dl_1) + \text{etc.}$$
$$= h\frac{dL}{dl} - l\frac{dL}{dh} + h_1\frac{dL}{dl_1} - l_1\frac{dL}{dh_1} + \text{etc.}$$

Le second membre de cette équation est nul, d'après la valeur de la fonction de L; par suite, en intégrant, et se rappelant que $h^2 + l^2 = e^2$, $h_1^2 + l_1^2 = e_1^2$, etc., il vient

$$m\sqrt{\mu a}\,e^2 + m_1\sqrt{\mu_1 a_1}\,e_1^2 + \text{etc.} = \text{const.} \tag{27}$$

On obtient de même, relativement aux inclinaisons, l'équation

$$(28)\qquad m\sqrt{\mu a}\,\text{tang}^2\varphi + m_1\sqrt{\mu_1 a_1}\,\text{tang}^2\varphi_1 + \text{etc.} = \text{const.}$$

16. Je passe maintenant à l'intégration des équations (26), sans m'arrêter aux autres relations qu'on peut encore en déduire indépendamment de l'intégration, et qui se rapportent aux mouvements des périhélies et des nœuds, et aux longitudes ε, ε_1, ε_2, etc., des différentes planètes, à l'époque prise pour origine du temps.

Soient

$$-\frac{3m_1 aa_1(a,a_1)'}{4(a_1^2-a^2)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\mu a}}=(0,\ 1),$$

$$-\frac{3m_1 aa_1(a,a_1)+(a^2+a_1^2)(a,a_1)']}{2(a_1^2-a^2)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\mu a}}=\boxed{0,1},$$

et représentons de même par les symboles $(0,2)$, $\boxed{0,2}$, $(1,2)$, $\boxed{1,2}$, etc., les expressions qui se déduisent des précédentes quand on y remplace les quantités relatives à la masse m_1 ou à la masse m, par celles qui se rapportent aux autres masses. Les équations des variations des excentricités et des périhélies seront

$$(29)\quad\begin{cases}\dfrac{dh}{dt}=\ [(0,1)+(0,2)+\ldots]l-\boxed{0,1}\,l_1-\boxed{0,2}\,l_2-\text{etc.},\\[2ex]\dfrac{dl}{dt}=-[(1,0)+(0,2)+\ldots]h+\boxed{0.1}\,h_1+\boxed{0,2}\,h_2+\text{etc.},\\[2ex]\dfrac{dh_1}{dt}=\ [(1,0)+(1,2)+\ldots]l_1-\boxed{1,0}\,l-\boxed{1,2}\,l_2-\text{etc.},\\[2ex]\dfrac{dl_1}{dt}=-[(1,0)+(1,2)+\ldots]h_1+\boxed{1,0}\,h+\boxed{1,2}\,h_2+\text{etc.},\\[2ex]\text{etc.}\end{cases}$$

Les coefficients $(0,1)$, $(1,0)$,..., $\boxed{0,1}$, $\boxed{1,0}$,..., qui ne dépendent que des masses des planètes, et des grands axes de leurs orbites, sont d'ailleurs liés deux à deux par des relations telles que celles-ci :

$$(30)\quad \begin{cases} m\sqrt{\mu a}\ (0,1) = m_1\ \sqrt{\mu_1 a_1}\,(1,0), \\ m\sqrt{\mu a}\,\boxed{0,1} = m_1\ \sqrt{\mu_1 a_1}\,\boxed{1,0}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

On intègre les équations (29) en posant

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{M}\sin(gt + 6), \quad l = \mathrm{M}\cos(gt + 6), \\ h_1 &= \mathrm{M}_1\sin(gt + 6), \quad l_1 = \mathrm{M}_1\cos(gt + 6), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs dans les équations différentielles conduit aux équations

$$(31)\quad \begin{cases} \{g - [(0,1) + (0,2) + \ldots]\}\mathrm{M} + \boxed{0,1}\,\mathrm{M}_1 + \boxed{0,2}\,\mathrm{M}_2 + \ldots = 0, \\ \{g - [(1,0) + (1,2) + \ldots]\}\mathrm{M}_1 + \boxed{1,0}\,\mathrm{M} + \boxed{1,2}\,\mathrm{M}_2 + \ldots = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

On élimine entre ces équations les rapports de tous les coefficients M, M_1, M_2, etc., hors un, à celui-ci, par exemple les rapports de M_1, M_2, etc., à M ; on obtient ainsi une équation en g dont le degré est égal à celui des corps m, m_1, m_2, etc. Soient g, g', g'', etc., les racines de cette équation ; pour chacune d'elles on obtiendra une solution particulière des équations différentielles, et en faisant la somme de ces solutions particulières, on aura les intégrales générales qui seront de cette forme :

$$(32)\quad \begin{cases} h = \mathrm{M}\sin(gt + 6) + \mathrm{M}'\sin(g't + 6') + \mathrm{M}''\sin(g''t + 6'') + \text{etc.}, \\ l = \mathrm{M}\cos(gt + 6) + \mathrm{M}'\cos(g't + 6') + \mathrm{M}''\cos(g''t + 6'') + \text{etc.}, \\ h_1 = \mathrm{M}_1\sin(gt + 6) + \mathrm{M}'_1\sin(g't + 6') + \mathrm{M}''_1\sin(g''t + 6'') + \text{etc.}, \\ l_1 = \mathrm{M}_1\cos(gt + 6) + \mathrm{M}'_1\cos(g't + 6') + \mathrm{M}''_1\cos(g''t + 6'') + \text{etc.}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

17. Dans ces intégrales générales, les constantes arbitraires sont 6, $6'$, $6''$, ..., et M, M′, M″, etc. On les déterminera au moyen des valeurs initiales des quantités h, l, h_1, l_1, etc.

On pourrait résoudre directement les équations de condition entre les constantes arbitraires et les valeurs initiales de h, l, h_1, l_1, etc. Mais on peut éliminer très-simplement toutes les inconnues hors deux, au moyen des relations qui existent entre les différents systèmes de solutions des équations (31). Ces relations sont les suivantes :

$$\mathrm{MM}' m\sqrt{\mu a} + \mathrm{M}_1\mathrm{M}'_1 m_1\sqrt{\mu_1 a_1} + \mathrm{M}_2\mathrm{M}'_2 m_2\sqrt{\mu_2 a_2} + \text{etc.} = 0,$$
$$\mathrm{MM}'' m\sqrt{\mu a} + \mathrm{M}_1\mathrm{M}''_1 m_1\sqrt{\mu_1 a_1} + \mathrm{M}_2\mathrm{M}''_2 m_2\sqrt{\mu_2 a_2} + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

Si l'on fait dans les équations (32) $t = 0$, et qu'on y mette en même temps pour h, l, h_1, l_1, etc., leurs valeurs initiales, que nous continuerons à désigner par les mêmes lettres, on en conclura facilement, à l'aide des dernières relations,

$$n = \mathrm{DM}\sin 6, \quad d = \mathrm{DM}\cos 6, \tag{33}$$

en posant

$$n = mh\sqrt{\mu a} + m_1 h_1\sqrt{\mu_1 a_1}\,\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}} + m_2 h_2\sqrt{\mu_2 a_2}\,\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}} + \text{etc.},$$

$$d = ml\sqrt{\mu a} + m_1 l_1\sqrt{\mu_1 a_1}\,\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}} + m_2 l_2\sqrt{\mu_2 a_2}\,\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}} + \text{etc.},$$

$$\mathrm{D} = m\sqrt{\mu a} + m_1\sqrt{\mu_1 a_1}\left(\frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{M}}\right)^2 + m_2\sqrt{\mu_2 a_2}\left(\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}}\right)^2 + \text{etc.}$$

Les équations (33) feront connaître les valeurs des constantes M et 6, et l'on aura de la même manière les valeurs des autres constantes.

18. La forme des intégrales (32) changerait si l'équation en g avait des racines égales ou des racines imaginaires; les valeurs de h, l, h_1, l_1, etc., contiendraient des termes ayant le temps en facteur ou en exposant. Mais l'équation (27) prouve que les excentricités sont assujetties à des limites qu'elles ne peuvent dépasser; les valeurs des quantités h, l, etc., ne peuvent donc pas renfermer de termes susceptibles de croître indéfiniment avec le temps, ce qui suffit pour établir que l'équation en g a toutes ses racines réelles et inégales.

Cette proposition a d'ailleurs été prouvée directement par M. Cauchy et par M. Sturm.

Toutefois cette seule considération ne suffit pas pour démontrer la stabilité du système planétaire par rapport aux excentricités; car l'équation (27) fait voir seulement que, si les excentricités sont toutes très-petites à une certaine époque, celles des grosses masses resteront toujours très-petites; mais celles des petites masses pourraient croître, même au delà de l'unité, comme Lagrange l'avait fait remarquer, sans que l'équation dont il s'agit cessât d'être vérifiée.

Pour démontrer l'invariabilité de la forme presque circulaire des orbites, il faut recourir aux intégrales générales. Celles ci donnent

$$\begin{aligned} e^2 = \mathrm{M}^2 + \mathrm{M}'^2 + \mathrm{M}''^2 + \text{etc.} &+ 2\mathrm{MM}'\cos[(g-g')t + 6 - 6'] \\ &+ 2\mathrm{MM}''\cos[(g-g'')t + 6 - 6''] + \text{etc.} \end{aligned}$$

Cette dernière équation fait voir que la valeur de e sera toujours moindre que la somme $\mathrm{M} + \mathrm{M}' + \mathrm{M}'' +$ etc., les coefficients $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{M}''$, etc., étant tous pris positivement; il suffira donc de calculer ces coefficients par rapport à chaque planète, pour avoir des limites que les excentricités ne pourront jamais dépasser.

19. Le procédé le plus simple, pour former l'équation en g, est celui qui a été indiqué dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1843, et qui est fondé sur la considération des fonctions symétriques.

Écrivons les équations (31) sous cette forme

$$(34)\quad \begin{cases} (g-a)\mathrm{M} + b\mathrm{M}_1 + c\mathrm{M}_2 + \text{etc.} = 0, \\ a'\mathrm{M} + (g-b')\mathrm{M}_1 + c'\mathrm{M}_2 + \text{etc.} = 0, \\ a''\mathrm{M} + b''\mathrm{M}_1 + (g-c'')\mathrm{M}_2 + \text{etc.} = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Si l'on formait par la règle connue le dénominateur commun D des valeurs qu'on tirerait de ces équations pour les indéterminées $\mathrm{M}, \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$, etc., dans le cas où les seconds membres des équations seraient des quantités connues différentes de zéro, l'équation en g qu'il s'agit d'obtenir serait $\mathrm{D} = 0$.

Cela posé, le dénominateur D contiendra le produit

$$(g - a)(g - b')(g - c'')\ldots$$

De plus, chacun des produits qui composeront ce dénominateur devant renfermer toutes les lettres a, b, c, . . ., et tous les indices ^{0}, $'$, $''$, . . ., il ne pourra s'y trouver deux coefficients compris dans une même ligne horizontale ou dans une même colonne verticale des équations (34). D'où il suit que, si n est le nombre des équations, l'existence de $n - 1$ facteurs en g dans un produit entraînera nécessairement l'existence du $n^{ième}$. Par conséquent le produit ci-dessus, composé des n facteurs en g, et qui donnera dans l'équation $D = 0$ le terme g^n, sera aussi le seul dans lequel g sera affecté de l'exposant $n - 1$. Le coefficient de cette puissance de g est donc égal à

$$-(a + b' + c'' + \ldots);$$

ou, en d'autres termes, la somme des racines de l'équation est égale à la somme des coefficients qui affectent respectivement l, l_1, l_2, ... dans les expressions de $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dh_1}{dt}$, $\frac{dh_2}{dt}$, etc.

Différentions actuellement les équations (29) et remplaçons dans les seconds membres $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dl_1}{dt}$, $\frac{dl_2}{dt}$, etc., par leurs valeurs en fonction de h, h_1, etc.; nous obtiendrons ainsi des équations qui peuvent être représentées par

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\mathrm{A}h + \mathrm{B}h_1 + \mathrm{C}h_2 + \ldots,$$

$$\frac{d^2h_1}{dt^2} = \mathrm{A}'h - \mathrm{B}'h_1 + \mathrm{C}'h_2 + \ldots,$$

$$\frac{d^2h_2}{dt^2} = \mathrm{A}''h + \mathrm{B}''h_1 - \mathrm{C}''h_2 + \ldots,$$

etc.

Les valeurs de h, h_1, h_2,... devront satisfaire à ces équations; or, si on les y substitue, ainsi que leurs dérivées secondes, on obtiendra les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
&(g^2 - A) M + BM_1 + CM_2 + \ldots = 0,\\
&A'M + (g^2 - B') M_1 + C' M_2 + \ldots = 0,\\
&A''M + B''M_1 + (g^2 - C'') M_2 + \ldots = 0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Ces conditions, qui peuvent remplacer les conditions (34), n'en diffèrent sous le rapport de la forme qu'en ce qu'elles contiennent le carré de g, au lieu de la première puissance. Donc, en leur appliquant le raisonnement précédent, on conclura que la somme des carrés des racines est égale à $A + B' + C'' + \ldots$, c'est-à-dire à la somme des coefficients qui affectent respectivement h, h_1, h_2, etc., dans les dérivées secondes $\frac{d^2h}{dt^2}$, $\frac{d^2h_1}{dt^2}$, $\frac{d^2h_2}{dt^2}$, etc., cette somme étant prise en signe contraire.

On obtiendra de même la somme des troisièmes, des quatrièmes... puissances, des racines, au moyen des dérivées troisièmes, quatrièmes, ... de h, h_1, etc.; on en déduira ensuite les coefficients de l'équation par la méthode connue.

20. Les équations différentielles des mouvements des inclinaisons et des nœuds sont de la même forme que celles des excentricités et des périhélies; elles s'intègrent de la même manière et elles donnent lieu à des remarques tout à fait analogues à celles qui viennent d'être développées.

21. Il reste encore à considérer la variation de la quantité ε. Or la dernière des formules (20) donne, en négligeant les troisièmes puissances des quantités h, l, p, q,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{an}\frac{dR}{da} + \frac{1}{2a^2n}\left(h\frac{dR}{dh} + l\frac{dR}{dl} + p\frac{dR}{dp} + q\frac{dR}{dq}\right).$$

Il faudra mettre dans cette formule, à la place de R, la somme de la fonction F du n° **13** et d'une suite d'autres fonctions semblables. pour les autres planètes troublantes m_2, m_3, etc.; ou, ce qui revient au même, on devra remplacer les dérivées de R par celles de la fonction L divisées par m : de cette manière la valeur de $\frac{d\varepsilon}{dt}$ sera

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{man}\frac{d\mathrm{L}}{da} + \frac{1}{2ma^2n}\left(h\frac{d\mathrm{L}}{dh} + l\frac{d\mathrm{L}}{dl} + p\frac{d\mathrm{L}}{dp} + q\frac{d\mathrm{L}}{dq}\right).$$

Dans cette dernière formule, la différentiation relative à a n'affectera que les coefficients de la fonction L dépendants des demi grands axes a et a_1, a_2, etc., et comme les valeurs de h, l, p, q sont exprimées par des suites de sinus et de cosinus, la valeur de $d\varepsilon$ sera intégrable. Les termes constants donneront des termes proportionnels à t qui se confondront avec le moyen mouvement, et les termes en sinus et cosinus donneront des termes de la même nature, dont l'ensemble exprimera la variation séculaire.

On aura des formules semblables pour la variation des autres quantités ε_1, ε_2, etc.

Vu et approuvé,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ,

J. DUMAS.

Permis d'imprimer,

L'INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES,

chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.

THÈSE DE MÉCANIQUE.

PROGRAMME.

SUR LES

ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE

ET DES MOUVEMENTS MOLÉCULAIRES DES CORPS SOLIDES ÉLASTIQUES.

1 à **7**. Équations différentielles de l'équilibre et du mouvement d'un système de molécules qui agissent les unes sur les autres par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelles. Équation de la propagation du son dans un milieu élastique indéfini, dont l'élasticité est la même dans tous les sens.

8 à **15**. Évaluation des tensions ou pressions qui ont lieu en un point quelconque du système contre trois plans parallèles aux plans coordonnés. Équations de l'équilibre déduites de la considération de ces pressions. Formules qui font connaître la grandeur et la direction de la tension ou pression exercée contre un plan quelconque. Équations relatives aux points de la surface.

16 et **17**. Conditions qui doivent être vérifiées dans l'état naturel du système, et dans le cas où, les forces accélératrices étant nulles, les points de la surface sont soumis à une pression normale et constante.

18. Formules qui font connaître la dilatation ou condensation linéaire suivant une direction quelconque, et la dilatation ou condensation du volume.

19 à **26**. Équations de l'équilibre et du mouvement des plaques et des lames élastiques.

Vu et approuvé,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ,

J. DUMAS.

Permis d'imprimer,

L'INSPECTEUR GÉNÉRAL DES ÉTUDES,

chargé de l'administration de l'Académie de Paris,

ROUSSELLES.