N° D'ORDRE :
924.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. A. BOULANGER,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES ET HOMOGÈNES INTÉGRABLES ALGÉBRIQUEMENT.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le juin 1897, devant la Commission d'examen.

MM. APPELL, *Président*.
PICARD, PAINLEVÉ, } *Examinateurs*.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, Professeur	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie physique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	JOLY	Chimie.
	PELLAT	Physique.
	PAINLEVÉ	Calcul différentiel et Calcul intégral.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

24633 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A LA MÉMOIRE DE MON PÈRE,

A MA MÈRE.

Pieux souvenir,
Témoignage de vive affection,
A. BOULANGER.

A Monsieur Paul PAINLEVÉ.

Hommage affectueux et reconnaissant de son élève,

A. BOULANGER.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE THÈSE.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES HOMOGÈNES

INTÉGRABLES ALGÉBRIQUEMENT.

INTRODUCTION.

Le problème de l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires paraît avoir été abordé pour la première fois par J. Liouville. Après avoir donné, dans un Mémoire bien connu (¹), une méthode régulière pour trouver, s'il en existe, les intégrales rationnelles d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, Liouville s'est proposé (²) de reconnaître si l'équation linéaire et homogène du deuxième ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py, \tag{1}$$

(¹) J. Liouville, *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Journal de l'École Polytechnique,* 22ᵉ cahier; 1833).

(²) J. Liouville, *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* (*Journal de Mathématiques,* 1ʳᵉ série, t. IV, p. 433; 1839).

où P est une fonction rationnelle de x, admet comme intégrales les racines d'une équation algébrique

$$(2) \qquad f(y, x) = 0,$$

de degré *connu* en y ; son procédé permet de limiter le degré en x de cette dernière équation, et cela en recherchant les intégrales rationnelles de certaines équations différentielles linéaires dont l'ordre dépend précisément du degré de l'équation (2) en y. La même marche peut d'ailleurs être appliquée aux équations linéaires d'ordre supérieur au second, à coefficients rationnels.

Toutefois la question restait entière, puisque Liouville n'avait pas limité le degré en y de l'équation (2). Elle fut résolue complètement en 1862, en ce qui concerne l'équation du deuxième ordre (1), par le P. Pépin [1] dans un Mémoire remarquable, bien que peu connu.

Voici la conclusion du P. Pépin :

« Si l'intégrale générale de l'équation (1) est algébrique, elle est de la forme $cy + c'y_1$, les intégrales particulières y, y_1 étant :

» Soit déterminées par les équations

$$y^m = \mathrm{A}, \qquad y_1 = \frac{\mathrm{B}}{y},$$

A et B désignant deux fonctions rationnelles de la variable x;

» Soit des racines d'une même équation trinôme

$$y^{2m} + p_1 y^m + p_2 = 0;$$

» Soit enfin des racines d'une équation à coefficients rationnels

$$y^{m\mu} + p_1 y^{(m-1)\mu} + p_2 y^{(m-2)\mu} + \ldots + p_m = 0,$$

---

(1) P. Th. Pépin, *Mémoire sur l'intégration sous forme finie de l'équation différentielle du second ordre à coefficients rationnels* (1862) (*Annali di Matematica,* 1re série, t. V, p. 185-224; 1863).

dans laquelle m et μ sont pris dans l'un des trois systèmes

$$\begin{aligned} m &= 4, & \mu &= 6, \\ m &= 6, & \mu &= 8, \\ m &= 12, & \mu &= 10. \end{aligned}$$

» Quant à la fonction $t = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = \mathrm{P},$$

elle est toujours algébrique lorsqu'elle peut s'exprimer sous forme finie; elle est ou rationnelle, ou racine d'une équation algébrique du 2^e, du 4^e, du 6^e ou du 12^e degré. »

A la vérité, quelques erreurs de calcul s'étaient glissées à la fin de ce travail; l'auteur établit bien l'existence d'une limite pour le degré de l'équation vérifiée par la dérivée logarithmique t, mais l'évaluation de cette limite est inexacte. Ainsi le cas $m = 12$, $\mu = 10$ avait échappé au P. Pépin. La rectification [1] date de mars 1878; elle fut consécutive à un Mémoire de M. Fuchs cité plus loin.

La première étude que présente ensuite la littérature de notre question est relative à un cas particulier, à l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par la série hypergéométrique de Gauss. M. Schwarz [2] (1872), prenant pour point de départ la théorie de la représentation conforme de Riemann, détermine tous les cas où cette équation admet des intégrales algébriques.

En 1875, M. Fuchs rattache l'étude des équations (1) intégrables algébriquement à la théorie des formes [3]. Désignant par y_1 et y_2 deux inté-

---

(1) P. Th. Pépin, *Sur les équations différentielles du second ordre* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. IX, p. 1; mars 1878).

(2) A. Schwarz, *Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische Reihe* $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* (*Borchardt's Journal für Mathematik*, Band 75, S. 292-335).

(3) L. Fuchs, *Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie* (*Borchardt's Journal*, Band. 81, S. 97-147).

grales particulières de l'équation (1) supposée intégrable algébriquement. il établit, à l'aide de considérations fondées sur les propriétés des covariants, qu'il existe une fonction entière et homogène $F(y_1, y_2)$, qu'il appelle *forme principale* (*Primform*), d'un degré N non supérieur à 12, et qui est racine d'une équation binôme, d'ordre L, ayant pour second membre une fonction rationnelle de la variable x. Ce géomètre dresse la liste de ces formes primaires pour les diverses valeurs acceptables de N, avec les valeurs correspondantes de l'*indice* L. Toute forme $F(y_1, y_2)$, d'ordre N, vérifiant une équation différentielle linéaire et homogène, à coefficients rationnels déduits de $P(x)$ et de N, d'ordre $(N+1)$, déjà construite par Liouville, le problème de reconnaître si l'équation (1) est intégrable algébriquement est ramené à rechercher si cette équation d'ordre $(N+1)$ est satisfaite par la racine $L^{\text{ième}}$ d'une fonction rationnelle. Cette dernière question peut être résolue par les procédés que donne Liouville dans le second des Mémoires cités. On est conduit à reconnaître si un système d'équations linéaires a des solutions finies, et M. Fuchs montre même qu'on peut parvenir à ce système sans passer par l'équation différentielle d'ordre $(N+1)$.

Le Mémoire de M. Fuchs conduit presque aussitôt M. Klein [1] à une méthode beaucoup plus simple. Le savant professeur de Gœttingue commence par former toutes les équations différentielles du second ordre, linéaires et homogènes, à coefficients rationnels, dont l'intégrale générale est algébrique, utilisant à cet effet le lien qui unit ce problème à l'énumération des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à deux variables. Un contour fermé du plan de la variable x transforme en effet les intégrales distinctes y_1, y_2 de l'équation (1) en $\alpha y_1 + \beta y_2$ et $\gamma y_1 + \delta y_2$, α, β, γ, δ étant des constantes dont le déterminant n'est pas nul, et le groupe des substitutions

$$\left| y_1, \quad y_2, \quad \alpha y_1 + \beta y_2, \quad \gamma y_1 + \delta y_2 \right|,$$

(1) F. Klein, *Ueber lineare Differentialgleichungen* (*Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*, 26. Juni 1876; *Mathematische Annalen*, Band XI, S. 115). Ce très court Mémoire a été traduit dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (1877).

relatives aux divers contours fermés du plan de x, ne contiendra qu'un nombre fini de substitutions si l'intégrale générale est algébrique.

La détermination des groupes linéaires d'ordre fini à deux variables, ainsi que celle des formes invariantes correspondantes, avaient été faites antérieurement par M. Klein [1]. Voici comment il en tire parti. Le quotient η de deux intégrales particulières y_1, y_2, indépendantes, de l'équation à coefficients rationnels

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p_1\frac{dy}{dx}+p_0y=0, \tag{3}$$

satisfait à l'équation différentielle du troisième ordre déjà formée par M. Schwarz

$$\frac{\eta'''}{\eta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2=2p_0-\frac{1}{2}p_1^2-\frac{dp_1}{dx}. \tag{4}$$

Soit $F(y_1, y_2)$ ou $\Phi(\eta)$ une fonction fondamentale invariante du groupe fini de l'équation proposée, supposée intégrable algébriquement, c'est-à-dire une fonction homogène de y_1, y_2, de degré zéro, laissée invariante par les substitutions du groupe. $\Phi(\eta)$, invariante pour tous les contours fermés du plan de la variable x, sera une fonction rationnelle de x. Réciproquement, posons

$$\Phi(\eta)=R(x),$$

$R(x)$ étant une fonction rationnelle arbitraire de x; M. Klein exprime η en fonction de $R(x)$ et, par substitution dans la relation (4), il est conduit à l'une des formes suivantes pour p_0 :

$$\left\{\begin{aligned}
p_0&=\frac{1}{4}p_1^2+\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx}+\frac{1}{2}\left[\frac{R'''}{R'}-\frac{3}{2}\left(\frac{R''}{R'}\right)^2\right]+\frac{n^2-1}{4n^2}\left(\frac{R'}{R}\right)^2\\
&\qquad (n \text{ étant un entier arbitraire});\\
p_0&=\frac{1}{4}p_1^2+\frac{1}{2}\frac{dp_1}{dx}+\frac{1}{2}\left[\frac{R'''}{R'}-\frac{3}{2}\left(\frac{R''}{R'}\right)^2\right]\\
&\qquad+\frac{R'^2}{4}\left[\frac{1-\lambda^2}{R^2}+\frac{1-\nu^2}{(1-R)^2}-\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{R(1-R)}\right]
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

[1] F. Klein, *Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst* (*Sitzungsberichte der Erlanger Gesellschaft*, Juli 1874; *Math. Annalen*, Band IX, S. 44; 1875).

$\Big(\lambda, \mu, \nu$ étant respectivement égaux à

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{2}, \qquad n \text{ entier arbitraire};$$

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{2}\Big);$$

p_1 étant astreint simplement à ce que $e^{\int p_1 dx}$ soit une fonction algébrique, tous les types d'équations (3) intégrables algébriquement se trouvent construits.

L'intégrale générale d'une telle équation est définie par les relations

$$\Phi(\eta) = \mathrm{R}(x)$$

et

$$\eta' = \frac{(\alpha\eta + \beta)^2}{y^2} e^{-\int p_1 dx},$$

α et β étant deux constantes arbitraires; elle sera fournie par l'élimination de η entre les équations

$$\Phi(\eta) = \mathrm{R}(x)$$

et

$$(\alpha\eta + \beta)^2 \frac{d\Phi}{d\eta} = y^2 \mathrm{R}'(x) e^{\int p_1 dx}.$$

Le problème inverse reste à traiter : *Une équation différentielle* (3) *étant donnée, reconnaître si son intégrale complète est algébrique,* ou encore : *Déterminer la fonction* $\mathrm{R}(x)$ *qui lui correspond.* Dans la Note analysée, M. Klein réserve ce point, qu'il a traité deux ans plus tard [1], en avril 1877.

Ce second Mémoire contient, avec quelques compléments relatifs aux

---

[1] F. KLEIN, *Ueber lineare Differentialgleichungen* (*Math. Annalen,* Band XII, S. 167).

fonctions invariantes, la détermination du degré maximum des termes de la fonction rationnelle $R(x)$ relative à une équation (3) donnée, et cela en utilisant seulement les termes du deuxième degré de la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle

$$2p_0 - \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{dp_1}{dx}.$$

Dès lors, la méthode des coefficients indéterminés permet de trouver la fonction $R(x)$, qui vérifie l'une des équations (5). Le procédé est même appliqué à un exemple numérique.

Dans l'intervalle de la publication de ces deux Mémoires, M. Brioschi [1] forme les équations (5) du premier travail de M. Klein, en partant directement des formes fondamentales invariantes, au lieu d'avoir recours, comme M. Klein, à certains résultats du beau Mémoire cité de M. Schwarz; il calcule aussi la valeur de $R(x)$ pour la plupart des cas d'intégrabilité algébrique de l'équation hypergéométrique, donnés par le Tableau de M. Schwarz.

Avec un grand Mémoire de M. Camille Jordan [2], publié en 1878, apparaît la première extension des vues de M. Klein aux équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre supérieur au second. Après avoir retrouvé, avec les seules ressources de la théorie des substitutions, l'énumération des groupes linéaires à deux variables d'ordre fini, énumération obtenue par M. Klein à l'aide de la Géométrie non euclidienne et confirmée par Gordan [3] à l'aide de la théorie des formes, M. C. Jordan fait la même énumération pour les groupes linéaires à trois variables [4]. Il établit, en

---

(1) F. Brioschi, *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles du deuxième ordre* (*Math. Annalen,* Band XI, S. 401; *Atti dell' Istituto Lombardo di Scienze e Lettere,* décembre 1876).

(2) C. Jordan, *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (*Borchardt's Journal,* Band 84, S. 89; *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1876-1877).

(3) P. Gordan, *Ueber endlich Gruppen linearer Transformationen einer Veranderlichen* (*Math. Annalen,* Band XI, S. 23).

(4) *Voir* à ce sujet le § 2 de la première Partie de ce travail.

outre que *les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à n variables appartiennent à un nombre de types limité,* et obtient le théorème fondamental suivant :

Si une équation différentielle linéaire d'ordre p a toutes ses intégrales algébriques, ces intégrales s'exprimeront linéairement par les racines d'équations binômes, dont les seconds membres sont des fonctions rationnelles de la variable et des racines d'une équation auxiliaire à coefficients rationnels.

Le degré de cette équation auxiliaire est inférieur à une limite fixe, qui ne dépend que de la valeur numérique de p.

A partir de ce moment, les travaux relatifs à la question qui nous occupe apportent surtout des perfectionnements de détail aux résultats acquis.

M. Fuchs [1], d'abord, dont le Tableau des formes primaires avait été réduit par M. Klein, obtient d'une manière plus simple les conclusions de son Mémoire cité, qu'il complète et précise. Par exemple, pour le cas $m=6$, $\mu=8$ du Tableau du P. Pépin, M. Fuchs met l'équation intégrale sous la forme

$$y^{48}-20X_1y^{40}+70X_1^2y^{32}-4(25X_1^3+10308X^4)y^{24}$$
$$+5(13X_1^3-3392X^4)X_1y^{16}-16(X_1^3+78X^4)X_1^2y^8+256X^8=0,$$

où l'on a posé

$$X_1(x)=CX^2(x)\left[\left(\frac{d\log X(x)}{dx}\right)^2+6\frac{d^2\log X(x)}{dx^2}-36P\right];$$

C est une constante, et

$$X(x)=y_1y_2(y_1^4+y_2^4)$$

---

[1] L. Fuchs, *Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiten Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen* (zweite Abhandlung) (*Borchardt's Journal,* Band 85, S. 1-25; 1878).

est la racine carrée d'une fonction rationnelle de x, vérifiant une équation différentielle linéaire du septième ordre, déduite de la proposée (1).

Tous les cas sont amenés à ce point, et l'auteur donne des indications pour simplifier, autant que possible, la recherche de $X(x)$.

M. Jordan [1] complète en 1879 son précédent travail en déterminant une limite supérieure du nombre des types auxquels peuvent appartenir les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à n variables; il rectifie une légère erreur qui lui avait fait omettre, dans l'énumération des groupes ternaires, un groupe dont M. Klein avait antérieurement démontré l'existence; enfin il amorce la détermination des groupes quaternaires.

M. Goursat [2] retrouve les résultats de M. Schwarz relatifs aux cas d'intégrabilité algébrique de l'équation hypergéométrique du second ordre, en formant directement les substitutions du groupe de cette équation et en exprimant que ce groupe est d'ordre fini, à l'aide d'une représentation géométrique remarquablement simple.

Enfin le P. Pépin [3] donne, à la même époque, un long travail d'ensemble sur l'intégration algébrique de l'équation (1). Après avoir, dans la première Partie, repris les résultats du Mémoire rectifié de 1862, en simplifiant les démonstrations par l'emploi de la théorie des fonctions, il consacre la seconde Partie à l'exposé d'une méthode pratique pour déterminer effectivement les intégrales algébriques lorsqu'elles existent. Cette Partie se distingue par la brièveté avec laquelle tous les calculs nécessaires sont conduits jusqu'au bout, d'abord pour obtenir les conditions d'existence d'intégrales algébriques relatives à P, et ensuite, quand elles sont remplies, pour déterminer les coefficients de l'équation algébrique. Dans tous les cas, des exemples détaillés servent à éclaircir la méthode em-

---

(1) C. Jordan, *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire* (*Atti della reale Accademia di Napoli,* vol. VIII, n° 11, 1879).

(2) E. Goursat, *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique* (*Annales de l'École Normale,* 2e série, supplément au t. X, 1881).

(3) P. Th. Pépin, *Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre* (*Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, tomo XXXIV, p. 243-388; juin 1881).

ployée, qui consiste d'ailleurs dans l'emploi de l'équation résolvante à laquelle satisfait le produit $y_1 y_2$ de deux intégrales distinctes de l'équation (1). Enfin, une intéressante application est faite, dans la troisième Partie, à la recherche des fonctions algébriques développables en série hypergéométrique; les résultats concordent avec ceux trouvés par M. Schwarz.

Ce travail, à défaut de la priorité, a le mérite de se suffire à lui-même et de n'invoquer que les principes élémentaires de la théorie des fonctions.

Citons encore la thèse de M. Autonne (1) (1881), qui étudie les propriétés entraînées par l'existence des n relations linéaires à coefficients constants, liant les m racines d'une équation irréductible, dont $p = (m - n)$ racines forment un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre p; un Mémoire de M. Fuchs (2) conduisant au résultat suivant : s'il existe une relation algébrique et homogène, de degré supérieur à deux, entre trois intégrales formant un système fondamental d'une équation linéaire du troisième ordre, à coefficients rationnels, dont les points singuliers sont réguliers et à exposants commensurables, cette équation s'intègre algébriquement (ce théorème, que MM. Schlesinger et Wallenberg ont généralisé, M. Picard l'établit dans son Cours de la manière la plus naturelle en le rattachant à la théorie des groupes de transformations); un Mémoire de M. Goursat (3), où ce géomètre relie l'étude des intégrales algébriques de l'équation du second ordre à la transformation de cette équation en une équation hypergéométrique par le change-

---

(1) L. Autonne, *Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels* (*Journal de l'École Polytechnique*, 51e cahier, p. 93; 1881).

(2) L. Fuchs, *Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen* (*Acta mathematica*, t. I, p. 321).

Ludwig Schlesinger, *Diss.*, Berlin, 1887.

G. Wallenberg, *Anwendung der Theorie der Differentialinvarianten auf die Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen* (*J. für Math.*, B. CXIII, 1894).

E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 550 et suivantes.

(3) E. Goursat, *Sur les transformations rationnelles des équations linéaires* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. II, 1885).

ment de variable et de fonction

$$x = \varphi(t),$$
$$z = y\psi(t).$$

A ce propos, il convient de signaler que Halphen avait donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel changement de variable et de fonction puisse réduire une équation différentielle linéaire donnée, à coefficients rationnels, à une autre équation dont l'intégrale générale soit rationnelle ([1]).

La plupart de ces travaux remarquables ne concernent que l'équation du second ordre. A l'égard des équations d'ordre supérieur au second, le plus beau résultat est le théorème de M. Jordan; mais le savant géomètre laisse de côté la question de former les équations différentielles qui correspondent à un groupe linéaire d'ordre fini. M. H. Poincaré ([2]), attirant l'attention sur ce point, énonce en 1883 le résultat suivant, qu'il déduit de sa théorie des fonctions fuchsiennes, en faisant correspondre à tout groupe fini Γ, et cela d'une infinité de manières, un groupe fuchsien G auquel Γ est mériédriquement isomorphe :

A tout groupe d'ordre fini correspond une infinité d'équations différentielles linéaires et homogènes, à coefficients rationnels, dont les intégrales sont algébriques, et l'on peut même choisir arbitrairement les points singuliers.

Restreignons-nous au cas où l'intégrale générale dépend linéairement de trois constantes arbitraires. Deux questions se posent naturellement :

1° Former toutes les équations du troisième ordre

$$y''' + 3ay'' + 3by' + cy = 0, \tag{I}$$

([1]) G.-H. Halphen, *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, 1883).

([2]) H. Poincaré, *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires* (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 984; 1883).

à coefficients rationnels en x, et tous les systèmes complètement intégrables

$$\text{(II)} \quad \text{(Notations de Monge.)} \quad \begin{cases} r = ap + bq + cz, \\ s = a'p + b'q + c'z, \\ t = a''p + b''q + c''z, \end{cases}$$

à coefficients rationnels en x et y, dont l'intégrale générale est algébrique.

2° Étant donnée une équation de la forme (I), ou bien un système de la forme (II), reconnaître si son intégrale générale est algébrique.

Pour résoudre la première question, M. Painlevé [1] a indiqué une méthode qui généralise celle de M. Klein, et où interviennent certains invariants, analogues à l'invariant schwarzien et déjà rencontrés, dans le cas du système (II), par MM. Goursat et Liouville [2], ainsi que certains systèmes différentiels (Σ), extensions de l'équation de Kummer, ces invariants et ces systèmes étant attachés à chaque groupe linéaire d'ordre fini. Mais le calcul explicite de ces invariants et de ces systèmes (Σ) présentait des difficultés sérieuses, qu'on pouvait craindre inextricables. Je suis parvenu à les surmonter dans le cas du groupe de Hesse.

Pour résoudre la seconde question, M. Painlevé a donné une méthode toute différente dont je développe l'application, et il a indiqué en même temps qu'on pourrait chercher à employer dans ce but la première méthode, ce qui constituerait alors une généralisation complète de la méthode exposée par M. Klein dans le cas de l'équation linéaire du second ordre.

Toute la difficulté, dans cette méthode, consiste à déterminer une limite supérieure du degré de certaines fractions rationnelles qui doivent

---

(1) P. Painlevé (*Comptes rendus*) :
1° *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles;* 31 mai 1887, t. CIV.
2° *Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre;* 27 juin 1887, t. CIV.
3° *Sur les équations différentielles linéaires;* 4 juillet 1887, t. CV.

(2) On donnera, dans le courant du travail, des indications à ce sujet.

être intégrales d'un système différentiel (Σ). Je suis parvenu à déterminer cette limite par un procédé qui peut être étendu à un groupe linéaire quelconque.

Les deux questions posées plus haut font respectivement l'objet de la seconde et de la troisième Partie de ce Mémoire, la première Partie étant consacrée à la formation des invariants dont je viens de parler.

Comme je me limite au cas du groupe de Hesse, il n'y a pas à songer à faire d'application ni à l'équation hypergéométrique du troisième ordre de MM. Pochammer et Goursat, ni au système d'équations aux dérivées partielles simultanées que vérifie la fonction hypergéométrique de deux variables de M. Appell, le groupe de l'un et de l'autre dérivant de moins de substitutions fondamentales que le groupe de Hesse.

Dans un dernier Chapitre, j'ai seulement développé une indication de M. Painlevé sur l'équivalence, au point de vue de l'intégration, entre certains systèmes différentiels, extensions de l'équation de M. Schwarz, qui interviennent dans ce travail, et d'autres systèmes différentiels qui généralisent l'équation de Riccati.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1.

INVARIANTS DIFFÉRENTIELS DE MM. GOURSAT ET PAINLEVÉ.

1. Considérons un groupe fini (α) de substitutions linéaires à deux variables non homogènes u, v, et les deux fonctions fondamentales invariantes qui lui correspondent

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v). \end{cases}$$

Si, pour un système de valeurs (x, y), les valeurs (U, V) vérifient les équations (1), toutes les autres solutions (u, v) de ces équations s'obtiennent en opérant sur les valeurs (U, V) toutes les substitutions du groupe (α).

Cela posé, dérivons, par rapport à x et à y, les deux membres de chacune des relations de substitution

$$(2)\qquad u(a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c) = a'\mathrm{U} + b'\mathrm{V} + c',$$

$$(3)\qquad v(a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c) = a''\mathrm{U} + b''\mathrm{V} + c'',$$

en poussant la dérivation jusqu'au second ordre inclusivement; nous formerons ainsi douze équations linéaires et homogènes en a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', et si nous éliminons ces constantes, il restera quatre équations portant sur les dérivées partielles premières et secondes de u et v d'une part, de U et V d'autre part. Nous allons effectuer cette élimination et construire ces quatre équations.

La dérivation de la relation (2) donne

$$\begin{aligned}
&a\frac{\partial(u\mathrm{U})}{\partial x}+b\frac{\partial(u\mathrm{V})}{\partial x}+c\;\frac{\partial u}{\partial x}=a'\;\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+b'\;\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x},\\
&a\frac{\partial(u\mathrm{U})}{\partial y}+b\frac{\partial(u\mathrm{V})}{\partial y}+c\;\frac{\partial u}{\partial y}=a'\;\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+b'\;\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y},\\
&a\frac{\partial^2(u\mathrm{U})}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2(u\mathrm{V})}{\partial x^2}+c\;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a'\;\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}+b'\;\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2},\\
&a\frac{\partial^2(u\mathrm{U})}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2(u\mathrm{V})}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=a'\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\,\partial y}+b'\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y},\\
&a\frac{\partial^2(u\mathrm{U})}{\partial y^2}+b\frac{\partial^2(u\mathrm{V})}{\partial y^2}+c\;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a'\;\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}+b'\;\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Résolvons par rapport à a' et b' les deux premières équations formées, en posant, d'une manière générale,

$$(\varphi,\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$a'=au+\frac{(u,\mathrm{V})}{(\mathrm{U},\mathrm{V})}(a\mathrm{U}+b\mathrm{V}+c),$$

$$b'=bu+\frac{(u,\mathrm{U})}{(\mathrm{U},\mathrm{V})}(a\mathrm{U}+b\mathrm{V}+c).$$

Remplaçons a' et b' par ces valeurs dans les dernières équations; il vient, après réductions :

$$(4)\quad (\mathrm{U},\mathrm{V})\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{a\mathrm{U}+b\mathrm{V}+c}\left(a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+b\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=(u,\mathrm{V})\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x^2}+(u,\mathrm{U})\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x^2},$$

$$(5)\quad \begin{cases}(\mathrm{U},\mathrm{V})\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{1}{a\mathrm{U}+b\mathrm{V}+c}\left[\left(a\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+b\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(a\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+b\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\right\}\\ \quad =(u,\mathrm{V})\dfrac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x\,\partial y}+(u,\mathrm{U})\dfrac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x\,\partial y},\end{cases}$$

$$(6)\quad (\mathrm{U},\mathrm{V})\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2}{a\mathrm{U}+b\mathrm{V}+c}\left(a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+b\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=(u,\mathrm{V})\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial y^2}+(u,\mathrm{U})\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y^2}.$$

A ce système de trois équations linéaires et homogènes en a, b, c, il y a lieu d'en adjoindre un second qu'on obtiendrait en traitant l'équation (3) comme on a traité l'équation (2) : il se déduit du précédent en changeant u en v.

Il s'agit d'éliminer a, b et c entre les six équations formées; or a, b, c n'interviennent que par les expressions

$$\xi = \frac{a\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + b\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}}{a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c},$$

$$\mu = \frac{a\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + b\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}}{a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + c}.$$

L'élimination de ξ entre l'équation (4) et sa correspondante de l'autre système donne pour résultat

$$(\mathrm{U}, \mathrm{V})\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}\left[(u, \mathrm{V})\frac{\partial v}{\partial x} - (v, \mathrm{V})\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\left[(u, \mathrm{U})\frac{\partial v}{\partial x} + (v, \mathrm{U})\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

ou, en développant le second membre,

$$(7)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{(u, v)} = \frac{\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}}{(\mathrm{U}, \mathrm{V})}.$$

L'élimination de η entre l'équation (6) et son homologue conduirait de même à

$$(8)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}}{(u, v)} = \frac{\dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}}{(\mathrm{U}, \mathrm{V})}.$$

L'élimination de ξ et de η entre les équations (4) et (5) fournit la relation

$$\begin{aligned}(\mathrm{U}, \mathrm{V})\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)\right] \\ = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}\left[(u, \mathrm{V})\frac{\partial v}{\partial y} - (v, \mathrm{V})\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2}\left[(u, \mathrm{U})\frac{\partial v}{\partial y} - (v, \mathrm{U})\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\ + 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\,\partial y}\left[(u, \mathrm{V})\frac{\partial v}{\partial x} - (v, \mathrm{V})\frac{\partial u}{\partial x}\right] + 2\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y}\left[(u, \mathrm{U})\frac{\partial v}{\partial x} - (v, \mathrm{U})\frac{\partial u}{\partial x}\right],\end{aligned}$$

ou, en réduisant le second membre,

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\dfrac{d v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)}{(u, v)} \\ = \dfrac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial y} + 2\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)}{(U, V)}. \end{cases}$$

La permutation de x et y dans cette équation complète le système d'équations que nous nous proposions de former

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)}{(u, v)} \\ = \dfrac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}\dfrac{\partial V}{\partial x} + 2\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)}{(U, V)}. \end{cases}$$

La manière dont se présentent les quatre équations (7), (8), (9) et (10), met en évidence l'existence de quatre fonctions différentielles qui restent invariantes par les substitutions du groupe (α) [1].

Nous désignerons ces invariants par I, J, M et N, en posant

$$(11)\qquad I\nabla = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$(12)\qquad 3M\nabla = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

où

$$(13)\qquad \nabla = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y};$$

---

[1] Ces invariants, extension au cas de deux variables de l'invariant schwarzien $\dfrac{\eta'''}{\eta'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\eta''}{\eta'}\right)^2$, ont été considérés à deux points de vue par M. E. Goursat (*Comptes rendus*, 16 mai 1887 : *Sur un système d'équations aux dérivées partielles*), et par M. P. Painlevé (*Comptes rendus*, 31 mai 1887 : *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles*). Ce qui précède n'est que le développement de la première partie de la Note de M. Painlevé.

J et N se déduisent respectivement de I et de M en permutant à la fois (u, v) et (x, y).

2. La méthode qui a fourni ces invariants peut être généralisée; elle permettra, par exemple, de former les invariants différentiels relatifs aux groupes linéaires finis quaternaires, ou à trois variables non homogènes.

Prenons en effet un tel groupe (β) et ses trois fonctions fondamentales invariantes

$$(14)\qquad \begin{cases} x = f(t, u, v), \\ y = g(t, u, v), \\ z = h(t, u, v). \end{cases}$$

Si, pour un système de valeurs (x, y, z), les valeurs (T, U, V) vérifient les équations (14), toutes les autres solutions (t, u, v) de ces équations s'obtiendront en opérant sur (T, U, V) toutes les substitutions du groupe (β).

Dérivons jusqu'au second ordre inclusivement les relations de substitution

$$(15)\qquad \begin{cases} a(tT) + b(tU) + c(tV) + dt = a'\,T + b'\,U + c'\,V + d', \\ a(uT) + b(uU) + c(uV) + du = a''T + b''U + c''V + d'', \\ a(vT) + b(vU) + c(vV) + dv = a'''T + b'''U + c'''V + d'''. \end{cases}$$

Dérivons d'abord la première de ces relations successivement par rapport à x, à y et à z. Il vient

$$(aT + bU + cV + d)\frac{\partial t}{\partial x} = (a' - at)\frac{\partial T}{\partial x} + (b' - bt)\frac{\partial U}{\partial x} + (c' - ct)\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$(aT + bU + cV + d)\frac{\partial t}{\partial y} = (a' - at)\frac{\partial T}{\partial y} + (b' - bt)\frac{\partial U}{\partial y} + (c' - ct)\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$(aT + bU + cV + d)\frac{\partial t}{\partial z} = (a' - at)\frac{\partial T}{\partial z} + (b' - bt)\frac{\partial U}{\partial z} + (c' - ct)\frac{\partial V}{\partial z}.$$

On déduit de là

$$a' = at + \frac{D(t, U, V)}{D(T, U, V)}(aT + bU + cV + d),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$D(\varphi, \psi, \chi)$ étant le déterminant fonctionnel de φ, ψ, χ par rapport à x, y, z. Dérivons la même première relation par rapport à x deux fois, puis par rapport à x et à y, en remplaçant après la différentiation a', b', c' par les valeurs qu'on vient d'obtenir. Après des simplifications immédiates, on obtient les résultats suivants :

$$2\left(a\frac{\partial T}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial x} + c\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$$
$$= \frac{aT + bU + cV + d}{D(T, U, V)}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2}D(T, U, V) + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}D(t, U, V) \\ +\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}D(T, t, V) + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}D(T, U, t) \end{array}\right\},$$

$$\left(a\frac{\partial T}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial x} + c\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial y} + \left(a\frac{\partial T}{\partial y} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$$
$$= \frac{aT + bU + cV + d}{D(T, U, V)}\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\partial^2 t}{\partial x\, dy}D(T, U, V) + \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\, dy}D(t, U, V) \\ +\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, dy}D(T, t, V) + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, dy}D(T, U, t) \end{array}\right\}.$$

Nous poserons

$$(aT + bU + cV + d)\,\xi = \left(a\frac{\partial T}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial x} + c\frac{\partial V}{\partial x}\right)D(T, U, V),$$
$$(aT + bU + cV + d)\,\eta = \left(a\frac{\partial T}{\partial y} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial y}\right)D(T, U, V),$$
$$(aT + bU + cV + d)\,\zeta = \left(a\frac{\partial T}{\partial z} + b\frac{\partial U}{\partial z} + c\frac{\partial V}{\partial z}\right)D(T, U, V).$$

Les équations ci-dessus s'écrivent

$$2\,\xi\frac{\partial t}{\partial x} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial t}{\partial x} & \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial t}{\partial y} & \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t}{\partial z} & \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial U}{\partial z} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\xi\frac{\partial t}{\partial y}+\eta\frac{\partial t}{\partial x}+\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

On obtiendrait d'une manière toute semblable quatre équations analogues, qui s'en déduisent d'ailleurs aisément

$$2\eta\frac{\partial t}{\partial y}+\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} \\ \frac{\partial t}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} \end{vmatrix}=0,$$

. . . .

En traitant de même les deux autres relations de substitution, on serait conduit à deux autres groupes de six équations, ce qui nous donnerait en tout dix-huit équations entre lesquelles on va éliminer ξ, η, ζ. Les quinze équations finales définiront quinze invariants différentiels que nous allons former.

D'après la méthode générale de Sophus Lie ([1]), faisons l'élimination de façon que l'une des équations contienne, par exemple, $\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}$, à l'exclusion des autres. Il suffira d'éliminer ξ et η entre les trois équations développées ci-dessus, et cela se fera en multipliant la première par $\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2$,

([1]) Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt; Kap. XXV : *Differentialinvarianten,* § 131, S. 549; Kap. XIII : *Invarianten,* § 58, SS. 215 und 218.

la seconde par $-\dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial t}{\partial y}$, la troisième par $\left(\dfrac{\partial t}{\partial x}\right)^2$, et en ajoutant membre à membre.

Il vient

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right] D(T, U, V) \\
&- \frac{\partial t}{\partial x}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 \left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial U}{\partial z} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial U}{\partial z} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} \right\} \\
&+ \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial U}{\partial z} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial U}{\partial z} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&- \frac{\partial t}{\partial z}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} - \frac{\partial t}{\partial z}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \dfrac{\partial V^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} \\
&- \frac{\partial t}{\partial y}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 \left\{ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial^2 y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial U}{\partial z} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial T}{\partial z} & \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix} \right\} \\
&+ 2\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial z} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Le rapport de deux quelconques des coefficients de cette équation (coefficients où figurent les dérivées de T et de U) ne changeant pas par une substitution linéaire, on obtient ainsi sept invariants.

La considération des équations analogues (avec les dérivations relatives à y et z, à z et x) en fournirait huit autres.

Voici le Tableau de ces quinze invariants, au facteur $\dfrac{1}{D(T, U, V)}$ près, en convenant de n'écrire qu'une colonne de chaque déterminant, les deux autres s'en déduisant en remplaçant T par U et V :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (^1)$$

---

(1) Ces invariants ont été indiqués par M. Painlevé, dans la Communication du 31 mai 1887; une légère erreur de calcul, signalée d'ailleurs au début d'une Note du 27 juin 1887, a seulement faussé les expressions des six invariants à double déterminant.

Mais, laissant de côté cette généralisation, revenons au cas de deux variables.

3. Considérons maintenant x et y comme fonctions de u et de v, et formons les expressions explicites des invariants I, J, M, N en fonction de u et de v, les fonctions rationnelles $f(u, v)$ et $g(u, v)$ étant d'ailleurs connues.

Posons

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u},$$

et dérivons les équations (1) par rapport à x et à y; il vient

$$1 = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad 1 = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ces quatre équations donnent

$$\Delta\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial v}, \qquad \Delta\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\Delta\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \Delta\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Dérivons par rapport à x les équations de gauche de ce système. Nous obtenons

$$\Delta^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial\Delta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\Delta^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial\Delta}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}.$$

L'invariant I prend par suite la forme demandée

$$(16) \qquad \mathrm{I}\Delta^2 = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2.$$

L'expression de J se déduira de celle de I en permutant g et f.

La dérivation des mêmes équations par rapport à y donne

$$\Delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\Delta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \Delta}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Il en résulte immédiatement pour M l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 3M\Delta^2 = {} & \frac{\partial \Delta}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} \\ & - 3\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial u}\right]. \end{aligned}$$

Mais on a évidemment

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial \Delta}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} = {} & -\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 \\ & + \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial u}\right], \end{aligned}$$

en sorte que l'expression de M prend la forme définitive

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} -3M\Delta^2 = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \\ & + 2\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\frac{\partial g}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial u}\right]. \end{aligned} \right.$$

On aura N par la permutation de g et de f.

On est ainsi à même de calculer les fonctions I, J, M, N rationnelles en u et v : ces fonctions ne changent pas par les substitutions du groupe considéré (α) et sont par suite des fonctions rationnelles de x et de y.

Pour déterminer ces fonctions de x et de y, il faut, bien entendu, préciser ce groupe (α).

§ 2.

LE GROUPE DE HESSE ET SES FONCTIONS FONDAMENTALES INVARIANTES.

1. L'énumération des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à trois variables homogènes a été faite par M. C. Jordan dans deux Mémoires cités dans l'Introduction, et, plus récemment, d'une manière tout à fait indépendante, par M. H. Valentiner ([1]). Les résultats analytiques de ces travaux ont reçu de M. Kantor ([2]) une interprétation géométrique.

On peut classer ces groupes de la manière suivante :

I. Groupes qui se déduisent des groupes à deux variables, et qui transforment en eux-mêmes un point et une droite extérieure. (Type n° 1 de M. Jordan, se subdivisant en cinq.)

II. Groupes monômes, ou à triangle fondamental, qui laissent invariables les côtés d'un triangle. (Types n^{os} 2 et 3 de M. Jordan.)

III. Groupe G_{60} (comprenant 60 substitutions), isomorphe avec le groupe de l'icosaèdre et transformant une conique en elle-même. (Type n° 4 de M. Jordan.)

IV. Groupe G_{36} transformant en elle-même la cubique harmonique.

V. Groupe G_{72} transformant la cubique harmonique en sa hessienne.

([1]) H. Valentiner, *De endelige Transformations-Gruppers Theori* (avec un résumé en français). (Extrait des *Mémoires de l'Académie Royale de Copenhague;* 6e série, classe des Sciences : Vol. V, n° 2; 1889.)

M. Valentiner ne cite nulle part les travaux de M. Jordan qu'il paraît ignorer; tout en découvrant un nouveau groupe, il omet le groupe de Hesse dont l'intérêt géométrique était connu depuis longtemps.

([2]) S. Kantor, *Sur les groupes finis de collinéations* (*Journal de M. Fuchs,* t. CXVI, p. 171; 1896).

VI. Groupe hessien G_{216}, jouissant de la propriété, signalée par Hesse, de laisser inaltérés les systèmes de trois droites passant par les neuf points d'inflexion d'une cubique plane. (Types n^{os} **5**, **6**, **7** de M. Jordan.)

VII. Groupe de M. Klein G_{168}, découvert par M. Klein (1) dans l'étude de la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques, et laissant invariante la quartique

$$w^3 u + u^3 v + v^3 w = 0.$$

VIII. Groupe de M. Valentiner G_{360}, transformant en elle-même la sextique

$$10 u^3 v^3 + 9 w(u^5 + v^5) - 45 u^2 v^2 w^2 - 135 w^4 uv + 27 w^6 = 0.$$

Ce groupe et le précédent présentent maintes analogies : ainsi leurs fonctions invariantes se forment d'une manière identique.

Les trois derniers groupes sont particulièrement intéressants; nous nous limiterons toutefois dans ce travail à l'un d'eux, celui de Hesse.

2. Le groupe de Hesse comprend 216 substitutions dérivées des 5 substitutions fondamentales suivantes :

	S_1.	S_2.	S_3.	S_4.	S_5.
$u' =$	v	u	u	u	$u + v + w$,
$v' =$	w	w	εv	εv	$u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w$,
$w' =$	u	v	$\varepsilon^2 w$	εw	$u + \varepsilon^2 v + \varepsilon w$,

où

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

On reconnaît d'abord, eu égard aux substitutions S_1, S_2, S_3, que tout invariant relatif du groupe (on entend par là une forme se reproduisant

(1) F. Klein, *Mathematische Annalen*, Band XIV, S. 144; Band XV, S. 265.

à un facteur numérique près) est une fonction entière des expressions

$$\begin{aligned}
\sigma &= u^3 + v^3 + w^3,\\
\tau &= 3uvw,\\
\rho &= u^3v^3 + v^3w^3 + w^3u^3,\\
K &= (u^3 - v^3)(v^3 - w^3)(w^3 - u^3).
\end{aligned}$$

Les substitutions S_4 et S_5 laissent K invariant relatif et transforment σ, τ, ρ de la manière suivante :

S_4.	S_5.
$\sigma' = \sigma$	$3(\sigma + 2\tau)$,
$\tau' = \varepsilon^2\tau$	$3(\sigma - \tau)$,
$\rho' = \rho$	$3(\sigma^2 + \sigma\tau + \tau^2) - 27\rho$.

Un calcul facile montre que les fonctions de σ, τ, ρ qui sont des invariants relatifs pour ces substitutions, en se bornant aux moindres degrés, sont

$$\begin{aligned}
A &= \sigma^2 - 12\rho,\\
B &= \sigma(\sigma^3 + 8\tau^3),\\
C &= 4\tau(\tau^3 - \sigma^3),\\
D &= \sigma^6 - 20\sigma^3\tau^3 - 8\tau^6.
\end{aligned}$$

Entre ces formes, on a les identités

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&B^3 + C^3 = D^2,\\
&A^3 - 3AB + 2D = 432K^2.
\end{aligned}\right.$$

Il est aisé d'établir que tout invariant relatif du groupe de Hesse est exprimable par une fonction entière de A, K, B, C et D [1].

---

[1] *Voir* H. Maschke, *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von* 51840 *linearen Substitutionen* (*Math. Annalen*, Band XXXIII, S. 326; 1889). Le procédé de démonstration avait été indiqué par M. Klein, à propos du groupe G_{168}, dans son cours inédit de l'hiver 1886-1887, à Göttingue (*Aufgewählte Kapitel der Algebra,* Vorlesung XII).

Les invariants absolus ou fonctions fondamentales invariantes du groupe sont les quotients d'invariants relatifs, de même degré, que les substitutions reproduisent au *même* facteur numérique près.

Les substitutions S_1, S_2, S_3 reproduisent identiquement les invariants relatifs A, B, C, D et changent K de signe. Quant à S_4 et S_5, elles donnent les résultats suivants :

S_4.	S_5.
$A' = A$	$-27A,$
$B' = B$	$+\overline{27}^2 B,$
$C' = \varepsilon^2 C$	$+\overline{27}^2 C,$
$D' = D$	$-\overline{27}^3 D.$

Nous sommes ainsi conduits aux fonctions fondamentales invariantes

$$(2)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{3B}{A^2}, \\ y = \dfrac{2D}{A^3}. \end{cases}$$

Moyennant ce choix, les identités (1) prennent la forme remarquable

$$432 K^2 = (x + y + 1) A^3,$$
$$108 C^3 = (4x^3 + 27y^2) A^6.$$

On observera que le nombre des solutions du système (2) en u, v, w, si l'on suppose x et y donnés, est $12 \times 18 = 216$.

§ 3.

INVARIANTS DIFFÉRENTIELS RELATIFS AU GROUPE DE HESSE.

Reprenons maintenant les formules (16) et (17) du § 1, et développons-les dans le cas du groupe de Hesse. Nous aurons à y faire

$$f = -\frac{3B}{A^2}, \qquad g = \frac{2D}{A^3}.$$

w est égal à l'unité, mais nous le conserverons pour l'homogénéité et la symétrie.

Observant que u, v, w ne figurent dans A, B, D que par leurs cubes, nous poserons

$$u^3 = U, \qquad v^3 = V, \qquad w^3 = W.$$

On a alors

$$\sigma = U + V + W; \qquad \theta = \tau^3 = 27\,UVW; \qquad \rho = UV + VW + WU.$$

I. — Calcul de Δ.

Désignons par $[\varphi, \psi]$ le déterminant fonctionnel de φ, ψ par rapport aux variables U, V. On a d'abord

$$w^2 \Delta = \tau^2 [f, g]$$

ou

$$w^2 A^6 \Delta = 6\tau^2 \{ 2B[A, D] + 3D[B, A] - A[B, D] \}.$$

Or, d'une part :

$$[B, D] = \quad 27(U - V)W \left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\frac{\partial D}{\partial \theta} - \frac{\partial B}{\partial \theta}\frac{\partial D}{\partial \sigma}\right),$$

$$[B, D] = -27(U - V)W \,.\, 128(\sigma^3 - \tau^3)^2.$$

D'autre part :

$$2B[A, D] + 3D[B, A] = \frac{\partial A}{\partial U}\left[2B\frac{\partial D}{\partial V} - 3D\frac{\partial B}{\partial V}\right] - \frac{\partial A}{\partial V}\left[2B\frac{\partial D}{\partial U} - 3D\frac{\partial B}{\partial U}\right].$$

Un calcul très simple donne

$$2B\frac{\partial D}{\partial \sigma} - 3D\frac{\partial B}{\partial \sigma} = 3 \times 64\tau^3(\sigma^3 - \tau^3)^2,$$

$$2B\frac{\partial D}{\partial \theta} - 3D\frac{\partial B}{\partial \theta} = -64\sigma(\sigma^3 - \tau^3)^2.$$

Par suite,

$$2B[A, D] + 3D[B, A] = 64 \times 27 W(\sigma^3 - \tau^3)^2 \left\{(3V - \sigma) U \frac{\partial A}{\partial U} - (3U - \sigma) V \frac{\partial A}{\partial V}\right\}.$$

Formons la dernière parenthèse. Il vient aisément

$$2(U - V)[5\sigma^2 - 6\sigma(U + V) + 18 UV]$$

ou

$$- 12K - 2A(U - V).$$

Ainsi

$$2B[A, D] + 3D[B, A] = -27(U - V) W . 128 (\sigma^3 - \tau^3)^2 A - 12 \times 64 \times 27 W(\sigma^3 - \tau^3)^2 K.$$

On en conclut

$$w^2 A^6 \Delta = -6\tau^2 . 12 . 64 . 27 W(\sigma^3 - \tau^3)^2 K,$$

ou

$$A^6 \Delta = -2^5 . 3^5 w C^2 K,$$

ou enfin

$$\Delta^2 = 2^4 . 3^4 (x + y + 1)(4x^3 + 27y^2) \frac{w^2 C}{A^3}.$$

II. — Formes de I, J, M, N.

L'introduction des variables U, V et W, ainsi que l'application du théorème d'Euler aux fonctions homogènes de degré zéro f et g, permettent d'écrire comme suit les expressions de I et de M :

$$I\Delta^2 = 27 uv \left\{ 3UV \left[\frac{\partial^2 g}{\partial U^2}\left(\frac{\partial g}{\partial V}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial U \partial V} \frac{\partial g}{\partial U} \frac{\partial g}{\partial V} + \frac{\partial^2 g}{\partial V^2}\left(\frac{\partial g}{\partial U}\right)^2\right] - 2W \frac{\partial g}{\partial U} \frac{\partial g}{\partial V} \frac{\partial g}{\partial W}\right\},$$

$$-3M\Delta^2 = 27uv \left\{ \begin{array}{l} 3UV \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial U^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial V}\right)^2 - 2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial U \partial V} \dfrac{\partial g}{\partial U} \dfrac{\partial g}{\partial V} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial V^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial U}\right)^2 \\ + 2\left[\dfrac{\partial^2 g}{\partial U^2} \dfrac{\partial f}{\partial V} \dfrac{\partial g}{\partial V} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial U \partial V}\left(\dfrac{\partial f}{\partial U} \dfrac{\partial g}{\partial V} + \dfrac{\partial f}{\partial V} \dfrac{\partial g}{\partial U}\right) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial V^2} \dfrac{\partial f}{\partial U} \dfrac{\partial g}{\partial U}\right] \end{array} \right\} \\ + 2\left[U\left(\dfrac{\partial g}{\partial U}\right)^2 \dfrac{\partial f}{\partial V} + V\left(\dfrac{\partial g}{\partial V}\right)^2 \dfrac{\partial f}{\partial U} - 2W \dfrac{\partial g}{\partial U} \dfrac{\partial g}{\partial V} \dfrac{\partial f}{\partial W}\right] \end{array} \right\}.$$

En permutant f et g, on aurait les valeurs de J et N.

La dérivation des expressions de f et g donne les relations

$$\frac{1}{3}A^3\frac{\partial f}{\partial U} = -A\frac{\partial B}{\partial U} + 2B\frac{\partial A}{\partial U} = f_1,$$

$$\frac{1}{3}A^3\frac{\partial f}{\partial V} = -A\frac{\partial B}{\partial V} + 2B\frac{\partial A}{\partial V} = f_2,$$

$$\frac{1}{3}A^3\frac{\partial f}{\partial W} = -A\frac{\partial B}{\partial W} + 2B\frac{\partial A}{\partial W} = f_3,$$

$$\frac{1}{3}A^3\frac{\partial^2 f}{\partial U^2} + A^2\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial f}{\partial U} = -A\frac{\partial^2 B}{\partial U^2} + \frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial B}{\partial U} + 2B\frac{\partial^2 A}{\partial U^2} = f_{11},$$

$$\frac{1}{3}A^3.2\frac{\partial^2 f}{\partial U\partial V} + A^2\left[\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial U}\right]$$
$$= -2A\frac{\partial^2 B}{\partial U\partial V} + \left[\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial B}{\partial V} + \frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial B}{\partial U}\right] + 4B\frac{\partial^2 A}{\partial U\partial V} = 2f_{12},$$

$$\frac{1}{3}A^3\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} + A^2\frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial V} = -A\frac{\partial^2 B}{\partial V^2} + \frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial B}{\partial V} + 2B\frac{\partial^2 A}{\partial U^2} = f_{22},$$

$$\frac{1}{2}A^4\frac{\partial g}{\partial U} = A\frac{\partial D}{\partial U} - 3D\frac{\partial A}{\partial U} = g_1,$$

$$\frac{1}{2}A^4\frac{\partial g}{\partial V} = A\frac{\partial D}{\partial V} - 3D\frac{\partial A}{\partial V} = g_2,$$

$$\frac{1}{2}A^4\frac{\partial g}{\partial W} = A\frac{\partial D}{\partial W} - 3D\frac{\partial A}{\partial W} = g_3,$$

$$\frac{1}{2}A^4.\frac{\partial^2 g}{\partial U^2} + 2A^3\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial g}{\partial U}$$
$$= A\frac{\partial^2 D}{\partial U^2} - 2\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial D}{\partial U} - 3D\frac{\partial^2 A}{\partial U^2} = g_{11},$$

$$\frac{1}{2}A^4.2\frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V} + 2A^3\left[\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial U}\right]$$
$$= 2A\frac{\partial^2 D}{\partial U\partial V} - 2\left(\frac{\partial A}{\partial U}\frac{\partial D}{\partial V} + \frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial D}{\partial U}\right) - 6D\frac{\partial^2 A}{\partial U\partial V} = 2g_{12},$$

$$\frac{1}{2}A^4.\frac{\partial^2 g}{\partial V^2} + 2A^3\frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial g}{\partial V}$$
$$= A\frac{\partial^2 D}{\partial V^2} - 2\frac{\partial A}{\partial V}\frac{\partial D}{\partial V} - 3D\frac{\partial^2 A}{\partial V^2} = g_{22}.$$

Les quantités $f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, f_{22}$, g_1, g_2, g_3, g_{11}, g_{12}, g_{22} sont des polynômes en U, V, W. Leur introduction permet de mettre nos invariants sous les formes suivantes :

$$I\Delta^2 A^{12} = 2^3.3^3.uv\,[3UV(g_{11}g_2^2 - 2g_{12}g_1g_2 + g_{22}g_1^2) - 2Wg_1g_2g_3],$$

$$-3M\Delta^2A^{11} = 2^2.3^4.uv\left\{\begin{array}{l} 3UV[f_{11}g_2^2 - 2f_{12}g_1g_2 + f_{22}g_1^2 \\ \qquad + 2f_1(g_{22}g_1 - g_{12}g_2) + 2f_2(g_{11}g_2 - g_{12}g_1)] \\ + 2[Ug_1^2f_2 + Vg_2^2f_1 - 2Wg_1g_2f_3] \end{array}\right\},$$

$$-3N\Delta^2A^{10} = 2.3^5.uv\left\{\begin{array}{l} 3UV[g_{11}f_2^2 - 2g_{12}f_1f_2 + g_{22}f_1^2 \\ \qquad + 2g_1(f_{22}f_1 - f_{12}f_2) + 2g_2(f_{11}f_2 - f_{12}f_1)] \\ + 2[Uf_1^2g_2 + Vf_2^2g_1 - 2Wf_1f_2g_3] \end{array}\right\},$$

$$J\Delta^2A^9 = 3^6.uv\;[3UV(f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2) - 2Wf_1f_2f_3].$$

Nous désignerons par [I], -3[M), -3[N], [J] les grandes parenthèses des seconds membres des expressions ci-dessus : elles représentent des formes entières en U, V, W. En remplaçant Δ^2 par sa valeur, il vient :

$$\begin{array}{rl} (x+y+1)(4x^3+27y^2)W(\tau^3-\sigma^3)A^9I & = 2^{-3}.3^{-2}[I], \\ \text{»} \qquad\qquad A^8M & = 2^{-4}.3^{-1}[M], \\ \text{»} \qquad\qquad A^7N & = 2^{-5}.\quad [N], \\ \text{»} \qquad\qquad A^6J & = 2^{-6}.3\;\;[J]. \end{array}$$

Les invariants I, M, N, J, rationnels en x et y, sont exprimables rationnellement en fonction de A, B, D. Les identités ci-dessus entraînent, par suite, que [I], [M], [N], [J] sont divisibles par $W(\tau^3 - \sigma^3)$ et sont exprimables, à ce facteur près, par des polynômes en A, B, D, de degrés en U, V, W respectivement égaux à 18, 16, 14 et 12.

Nous poserons donc :

1° $$[I] = W(\tau^3 - \sigma^3)\sum I_{\alpha\beta\delta}A^\alpha B^\beta D^\delta$$

avec

$$\alpha + 2\beta + 3\delta = 9.$$

Les solutions entières de cette équation sont contenues dans le Tableau suivant :

			Termes correspondants.	
$\delta = 3$	$\beta = 0$	$\alpha = 0$	D^3	$y^3\ A^9$
$\delta = 2$	$\beta = 1$	$\alpha = 1$	D^2BA	y^2xA^9
$\delta = 2$	$\beta = 0$	$\alpha = 3$	D^2A^3	$y^2\ A^9$
$\delta = 1$	$\beta = 3$	$\alpha = 0$	DB^3	»
$\delta = 1$	$\beta = 2$	$\alpha = 2$	DB^2A^2	yx^2A^9
$\delta = 1$	$\beta = 1$	$\alpha = 4$	DBA^4	$yx\ A^9$
$\delta = 1$	$\beta = 0$	$\alpha = 6$	DA^6	$y\ A^9$
$\delta = 0$	$\beta = 4$	$\alpha = 1$	B^4A	»
$\delta = 0$	$\beta = 3$	$\alpha = 3$	B^3A^2	x^3A^9
$\delta = 0$	$\beta = 2$	$\alpha = 5$	B^2A^5	x^2A^9
$\delta = 0$	$\beta = 1$	$\alpha = 7$	BA^7	$x\ A^9$
$\delta = 0$	$\beta = 0$	$\alpha = 9$	A^9	A^9

En se reportant à l'expression de [I], on reconnaît que, pour $A = 0$, [I] doit contenir D^3 en facteur et, pour $D = 0$, A^3 en facteur. Les termes en DB^3 et B^4A disparaissent donc de cette liste, et I a la forme suivante :

$$I = \frac{|y^3| + |y^2x| + |y^2| + |yx^2| + |yx| + |y| + |x^3| + |x^2| + |x| + |1|}{(x+y+1)(4x^3+27y^2)}.$$

2°
$$[M] = W(\tau^3 - \sigma^3) \sum M_{\alpha\beta\delta} A^\alpha B^\beta D^\delta$$

avec

$$\alpha + 2\beta + 3\delta = 8.$$

Les solutions entières de cette équation sont renfermées dans le Tableau suivant :

			Termes correspondants.	
$\delta = 2$	$\beta = 1$	$\alpha = 0$	D^2B	y^2xA^8
$\delta = 2$	$\beta = 0$	$\alpha = 2$	D^2A^2	$y^2\ A^8$
$\delta = 1$	$\beta = 2$	$\alpha = 1$	DB^2A	yx^2A^8
$\delta = 1$	$\beta = 1$	$\alpha = 3$	DBA^3	$yx\ A^8$
$\delta = 1$	$\beta = 0$	$\alpha = 5$	DA^5	$y\ A^8$
$\delta = 0$	$\beta = 4$	$\alpha = 0$	B^4	»
$\delta = 0$	$\beta = 3$	$\alpha = 2$	B^3A^2	x^3A^8
$\delta = 0$	$\beta = 2$	$\alpha = 4$	B^2A^4	x^2A^8
$\delta = 0$	$\beta = 1$	$\alpha = 6$	BA^6	$x\ A^8$
$\delta = 0$	$\beta = 0$	$\alpha = 8$	A^8	A^8

Comme plus haut, on reconnaît que, pour $A = 0$, $[M]$ doit contenir D^2B en facteur; d'où la disparition du terme en B^4, et M prend la forme

$$M = \frac{|y^2x| + |y^2| + |yx^2| + |yx| + |y| + |x^3| + |x^2| + |x| + |1|}{(x+y+1)(4x^3+27y^2)}.$$

3° $$[N] = W(\tau^3 - \sigma^3)\sum N_{\alpha\beta\delta}A^\alpha B^\beta D^\delta$$

avec

$$\alpha + 2\beta + 3\delta = 7.$$

Les solutions entières de cette équation sont renfermées dans le Tableau suivant :

			Termes correspondants.	
$\delta = 2$	$\beta = 0$	$\alpha = 1$	D^2A	$y^2\ A^7$
$\delta = 1$	$\beta = 2$	$\alpha = 0$	DB^2	yx^2A^7
$\delta = 1$	$\beta = 1$	$\alpha = 2$	DBA^2	$yx\ A^7$
$\delta = 1$	$\beta = 0$	$\alpha = 4$	DA^4	$y\ A^7$
$\delta = 0$	$\beta = 3$	$\alpha = 1$	B^3A	x^3A^7
$\delta = 0$	$\beta = 2$	$\alpha = 3$	B^2A^3	x^2A^7
$\delta = 0$	$\beta = 1$	$\alpha = 5$	BA^5	$x\ A^7$
$\delta = 0$	$\beta = 0$	$\alpha = 7$	A^7	A^7

La forme de N est donc la suivante :

$$N = \frac{|y^2| + |yx^2| + |yx| + |y| + |x^3| + |x^2| + |x| + |1|}{(x+y+1)(4x^3+27y^2)}.$$

4°
$$[J] = W(\tau^3 - \sigma^3) \sum J_{\alpha\beta\delta} A^\alpha B^\beta D^\delta$$

avec

$$\alpha + 2\beta + 3\delta = 6.$$

Les solutions entières de cette équation sont contenues dans le Tableau suivant :

			Termes correspondants.	
$\delta = 2$	$\beta = 0$	$\alpha = 0$	D^2	»
$\delta = 1$	$\beta = 1$	$\alpha = 1$	DBA	$yx\ A^6$
$\delta = 1$	$\beta = 0$	$\alpha = 3$	DA^3	$y\ A^6$
$\delta = 0$	$\beta = 3$	$\alpha = 0$	B^3	$x^3 A^6$
$\delta = 0$	$\beta = 2$	$\alpha = 2$	B^2A^2	$x^2 A^6$
$\delta = 0$	$\beta = 1$	$\alpha = 4$	BA^4	$x\ A^6$
$\delta = 0$	$\beta = 0$	$\alpha = 6$	A^6	A^6

Le terme en D^2 disparaît de cette liste parce que, pour $A = 0$, $[J]$ doit admettre B^3 en facteur. De là la forme de J :

$$J = \frac{|yx| + |y| + |x^3| + |x^2| + |x| + |1|}{(x+y+1)(4x^3+27y^2)},$$

III. — Calcul des coefficients de I, M, N, J.

Le calcul des invariants I, M, N, J est ainsi réduit à la détermination de 33 coefficients numériques, qui peuvent être évalués par deux méthodes, l'une qu'on va développer, l'autre qu'on indiquera comme moyen de vérification.

Les identités qui définissent les polynomes [I], [M], [N], [J] ont lieu quels que soient U, V, W. Elles resteront identités en V et W si l'on y fait $U = 0$.

Posons

$$\sigma_0 = V + W \qquad \text{et} \qquad A_0 = (V+W)^2 - 12VW,$$

et désignons par (f_i) la valeur de f_i pour $U = 0$.

On a les identités

$$(1)\quad \begin{cases} \sum I_{\alpha\beta\delta}\, A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2(g_1)(g_2)(g_3), \\ -3W\sum M_{\alpha\beta\delta} A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2(g_2)[2W(g_1)(f_3) - V(g_2)(f_1)], \\ -3W\sum N_{\alpha\beta\gamma}\, A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2(f_2)[2W(f_1)(g_3) - V(f_2)(g_1)], \\ \sum J_{\alpha\beta\delta}\, A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2(f_1)(f_2)(f_3). \end{cases}$$

Nous sommes donc conduit à calculer les expressions (f_i) et (g_i). Il suffit pour cela de se reporter à la définition de ces expressions et aux valeurs de A, B et D. On obtient successivement

$$(f_1) = 2\sigma_0^4(-10\sigma_0) - A_0[4\sigma_0^3 + 18\sigma_0(\sigma_0^2 - A_0)],$$
$$(f_2) = 2\sigma_0^4[2\sigma_0 - 12W] - A_0(4\sigma_0^3),$$
$$(f_3) = 2\sigma_0^4[2\sigma_0 - 12V\ ] - A_0(4\sigma_0^3),$$

ou, en simplifiant,

$$(2)\quad \begin{cases} (f_1) = -\ \ 2\sigma_0[10\sigma_0^4 + 11\sigma_0^2 A_0 - 9A_0^2], \\ (f_2) = -24\sigma_0^3[W - V\ ]W, \\ (f_3) = -24\sigma_0^3[\ V - W]V. \end{cases}$$

De même

$$(g_1) = A_0[6\sigma_0^5 - 45\sigma_0^3(\sigma_0^2 - A_0)] - 3\sigma_0^6[-10\sigma_0]$$
$$(g_2) = 6A_0\sigma_0^5 - 3\sigma_0^6(2\sigma_0 - 12W),$$
$$(g_3) = 6A_0\sigma_0^5 - 3\sigma_0^6(2\sigma_0 - 12V\ ),$$

ou, en simplifiant,

$$(3)\quad \begin{cases} (g_1) = 3\sigma_0^3[10\sigma_0^4 - 13\sigma_0^2 A_0 + 15A_0^2], \\ (g_2) = 36\sigma_0^5[W - V\ ]W, \\ (g_3) = 36\sigma_0^5[\ V - W]V. \end{cases}$$

1° *Calcul de* [I].

L'identité

$$\sum I_{\alpha\beta\delta} A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = -2\times 3\times \overline{36}^2 \sigma_0^{13}(V-W)^2 VW(10\sigma_0^3 - 13\sigma_0^2 A_0 + 15A_0^2),$$

$$\sum I_{\alpha\beta\delta} A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = -2^3\times 3^3\sigma_0^{13}[2\sigma_0^2 + A_0][10\sigma_0^3 - 13\sigma_0^2 + 15A_0^2][\sigma_0^2 - A_0]$$

a lieu quels que soient A_0 et σ_0. Elle exige que l'on ait

$$4\beta + 6\delta + 3 \geqq 13,$$

c'est-à-dire que l'expression de [I] ne contienne pas de termes en DA^6, B^2A^5, BA^7 et A^9.

Si donc on pose

$$[I] = W(\tau^3 - \sigma^3)[aD^3 + bD^2BA + cD^2A^3 + dDB^2A^2 + eDBA^4 + fB^3A^3],$$

on a identiquement

$$a\sigma_0^8 + b\sigma_0^6 A_0 + d\sigma_0^4 A_0^2 + (c+f)\sigma_0^2 A_0^3 + eA_0^4 \equiv -2^3.3^3[2\sigma_0^4 - A_0\sigma_0^2 - A_0^2][10\sigma_0^4 - 13A_0\sigma_0^2 + 15A_0^2].$$

Les valeurs de a, b, d, $(c+f)$ et e sont ainsi connues et l'on peut écrire

$$[I] = -2^3.3^3 W(\tau^3 - \sigma^3)[20D^3 - 36D^2BA + \gamma D^2A^3 + 33DB^2A^2 - 15DBA^4 + \varphi B^3A^3].$$

L'expression de I est, par suite, déterminée à la constante γ près, puisque

$$\gamma + \varphi = -2.$$

Pour achever cette détermination, nous ferons dans les deux membres de l'identité qui définit [I] :

$$U = V = 1, \qquad W = -2.$$

Par suite

$$\sigma = 0; \qquad A = \quad 2^2.3^2;$$
$$B = 0; \qquad D = -2^5.3^6;$$

et l'on a d'une part

$$[I] = -2^{21}.3^{24}(\gamma - 10).$$

Un calcul élémentaire montre qu'alors

$$g_1 = g_2 = g_3 = -2^7.3^8$$

et

$$g_{11} - 2g_{12} + g_{22} = 2^8.3^9.$$

On a donc d'autre part

$$[I] = +2^{22}.3^{24}.7 = g_1^2[3(g_{11} - 2g_{12} + g_{22}) + 4g_1],$$

et, par comparaison, il vient $\gamma = -4$; d'où $\varphi = 2$.

Ainsi

$$\begin{aligned}[I] = -2^3.3^3.W(\tau^3 - \sigma^3)[&20D^3 - 36D^2BA - 4D^2A^3 \\ &+ 33DB^2A^2 - 15DBA^4 + 2B^3A^3].\end{aligned}$$

2° *Calcul de* [M].

L'identité

$$-3\sum M_{\alpha\beta\delta}A_0^\alpha\sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2^6.3^5(W-V)^2VW\sigma_0^{11}[10\sigma_0^4 - 5\sigma_0^2A_0 + 7A_0^2]$$

ou

$$\begin{aligned}&\sum M_{\alpha\beta\delta}A_0^\alpha\sigma_0^{4\beta+6\delta+3} \\ &\quad = -2^4.3^2\sigma_0^{11}(2\sigma_0^2 + A_0)(\sigma_0^2 - A_0)[10\sigma_0^4 - 5\sigma_0^2A_0 + 7A_0^2]\end{aligned}$$

a lieu quels que soient σ_0 et A_0; elle entraîne

$$4\beta + 6\delta + 3 \geqq 11,$$

c'est-à-dire que l'expression de $[M]$ ne doit pas contenir de termes en DA^5, BA^6 et A^8.

Posant alors

$$[M] = W(\tau^3 - \sigma^3)[aD^2B + bD^2A^2 + cDB^2A + dDBA^3 + eB^3A^2 + fB^2A^4],$$

on a identiquement

$$a\sigma_0^8 + c\sigma_0^6 A_0 + (b+e)\sigma_0^4 A_0^2 + d\sigma_0^2 A_0^3 + fA_0^4 = -2^4.3^2(2\sigma_0^4 - \sigma_0^2 A_0 - A_0^2)(10\sigma_0^4 - 5\sigma_0^2 A_0 + 7A_0^2).$$

On en conclut que

$$[M] = -2^4.3^2 W(\tau^3 - \sigma^3)[20D^2B + \beta D^2A^2 - 20DB^2A - 2DBA^3 + \varepsilon B^3A^2 - 7B^2A^4],$$

avec

$$\beta + \varepsilon = 9.$$

On achèvera le calcul en faisant dans les deux membres de l'identité qui définit $[M]$

$$U = V = 1; \qquad W = -2;$$

comme précédemment, on a, d'une part,

$$[M] = -2^{20}.3^{21}.\beta.$$

Mais on trouve

$$f_1 = f_2 = f_3 = 2^6.3^5,$$
$$g_1 = g_2 = -2^7.3^8,$$
$$f_{11} - 2f_{12} + f_{22} = 0,$$
$$g_{11} - 2g_{12} + g_{22} = 2^8.3^9,$$

en sorte que l'on a, d'autre part,

$$[M] = +2g_1f_1[g_{11} - 2g_{12} + g_{22} + 2g_1] = -2^{23}.3^{21};$$

Par suite $\beta = +8$, $\varepsilon = 1$ et $[M]$ a pour valeur

$$[M] = -2^4 . 3^2 W(\tau^3 - \sigma^3)[20 D^2 B + 8 D^2 A^2 \\ - 20 DB^2 A - 2 DBA^3 + B^3 A^2 - 7 B^2 A^4].$$

3° *Calcul de* $[N]$.

L'identité

$$-3 \sum N_{\alpha\beta\delta} A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = -2^7 . 3^4 (V - W)^2 VW \sigma_0^9 [10 \sigma_0^4 + 3 \sigma_0^2 A_0 - A_0^2]$$

ou

$$\sum N_{\alpha\beta\delta} A_0^\alpha \sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2^5 . 3 \sigma_0^9 (\sigma_0^2 - A_0)(2 \sigma_0^2 + A_0)(10 \sigma_0^4 + 3 \sigma_0^2 A_0 - A_0^2),$$

vraie quels que soient σ_0 et A_0, entraîne

$$4\beta + 6\delta + 3 \geqq 9,$$

c'est-à-dire que l'expression de $[N]$ ne doit pas contenir de termes en BA^5 et A^7.

Posons

$$[N] = W(\tau^3 - \sigma^3)[a D^2 A + b DB^2 + c DBA^2 \\ + d DA^4 + e B^3 A + f B^2 A^3],$$

et nous aurons identiquement

$$b \sigma_0^8 + (a + e) \sigma_0^6 A_0 + c \sigma_0^4 A_0^2 + f \sigma_0^2 A_0^3 + d A_0^4 \\ \equiv 2^5 . 3 (2 \sigma_0^4 - \sigma_0^2 A - A_0^2)(10 \sigma_0^4 + 3 \sigma_0^2 A_0 - A_0^2).$$

On déduit de là que

$$[N] = 2^5 . 3 W(\tau^3 - \sigma^3)[\alpha D^2 A + 20 DB^2 \\ - 15 DBA^2 + DA^4 + \varepsilon B^3 A - 2 B^2 A^3]$$

avec

$$\alpha + \varepsilon = -4.$$

Le calcul se terminera encore en faisant dans les deux membres de l'identité qui définit $[N]$:

$$U = V = 1 \qquad \text{et} \qquad W = -2.$$

On a, d'une part,

$$[N] = +2^{19}.3^{18}(\alpha - 2),$$

et, d'autre part,

$$[N] = +f_1^2[g_{11} - 2g_{12} + g_{22} + 4g_1] = +2^{20}.3^{18}.$$

Par suite

$$\alpha = 4 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = -8.$$

Ainsi

$$[N] = 2^5.3W(\tau^3 - \sigma^3)[4D^2A + 20DB^2 \\ - 15DBA^2 + DA^4 - 8B^3A - 2B^2A^3].$$

4° *Calcul de* $[J]$.

L'identité

$$\Sigma J_{\alpha\beta\delta}A_0^\alpha\sigma_0^{4\beta+6\delta+3} = 2^8 3^2\sigma_0^7(V - W)^2VW[10\sigma_0^4 + 11\sigma_0^2A_0 - 9A_0^2]$$

ou

$$\text{»} \qquad = 2^6\sigma_0^7(2\sigma_0^2 + A_0)(\sigma_0^2 + A_0)[10\sigma_0^4 + 11\sigma_0^2A_0 - 9A_0^2]$$

entraîne l'inégalité

$$4\beta + 6\delta + 3 \geqq 7;$$

l'expression de $[J]$ ne doit donc pas contenir de terme en A^6.

Posant alors

$$[J] = W(\tau^3 - \sigma^3)[aDBA + bDA^3 + cB^3 + dB^2A^2 + eBA^4],$$

nous aurons l'identité

$$c\sigma_0^8 + a\sigma_0^6A_0 + d\sigma_0^4A_0^2 + b\sigma_0^2A_0^3 + eA_0^4 \\ = 2^6(2\sigma_0^4 - \sigma_0^2A_0 - A_0^2)(10\sigma_0^4 + 11\sigma_0^2A_0 - 9A_0^2).$$

Tous les coefficients sont, dans ce cas, déterminés :

$$[J] = 2^6 W(\tau^3 - \sigma^3)[12DBA - 2DA^3 + 20B^3 - 39B^2A^2 + 9BA^4].$$

IV. — Expressions de I, J, M, N.

Voici le résumé des résultats obtenus :

$$(x+y+1)(4x^3+27y^2)A^9 I$$
$$= -3[20D^3 - 36D^2BA - 4D^2A^3 + 33DB^2A^2 - 15DBA^4 + 2B^3A^3],$$

$$(x+y+1)(4x^3+27y^2)A^8 M$$
$$= -3[20D^2B + 8D^2A^2 - 20DB^2A - 2DBA^3 + B^3A^2 - 7B^2A^4],$$

$$(x+y+1)(4x^3+27y^2)A^7 N$$
$$= 3[4D^2A + 20DB^2 - 15DBA^2 + DA^4 - 8B^3A - 2B^2A^3],$$

$$(x+y+1)(4x^3+27y^2)A^6 J$$
$$= 3[12DBA - 2DA^3 + 20B^3 - 39B^2A^2 + 9BA^4].$$

Remplaçons dans les seconds membres B par $-\frac{xA^2}{3}$ et D par $\frac{yA^3}{2}$, et nous aurons les expressions demandées de I, M, N, J :

$$I = \frac{4x^3 - 99x^2y - 162xy^2 - 135y^3 + 54y^2 - 135xy}{18(x+y+1)(4x^3+27y^2)};$$

$$M = \frac{x^3 + 30x^2y + 45xy^2 + 21x^2 - 9xy - 54y^2}{9(x+y+1)(4x^3+27y^2)};$$

$$N = \frac{16x^3 + 60x^2y - 12x^2 + 135xy + 54y^2 + 27y}{18(x+y+1)(4x^3+27y^2)};$$

$$J = \frac{-20x^3 - 117x^2 - 54xy - 81x - 27y}{9(x+y+1)(4x^3+27y^2)}.$$

Remarque. — Nous établirons, dans le § II de la seconde Partie, les relations différentielles suivantes entre les *fonctions* I, M, N, J *de x et* *de y* :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + 3\frac{\partial(M^2+IN)}{\partial y} + M^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{M^2}\right) - \frac{1}{J}\frac{\partial(J^2 I)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + 3\frac{\partial(N^2+JM)}{\partial x} + N^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{N^2}\right) - \frac{1}{I}\frac{\partial(I^2 J)}{\partial y} = 0.$$

On peut tirer parti de ces relations pour déterminer les coefficients de I, M, N, J, une fois connue la forme de ces fonctions. L'introduction simultanée de ces 33 coefficients, dont 10 sont nuls, rend le calcul bien plus compliqué que par le procédé exposé. Cependant ces relations fournissent un moyen de vérification des résultats trouvés.

DEUXIÈME PARTIE.

§ 1.

GÉNÉRALITÉS SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE (A).

1. Considérons le système de trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du second ordre :

$$
\text{(A)} \qquad \begin{cases} r = a_1 p + a_2 q + a_3 z, \\ s = b_1 p + b_2 q + b_3 z, \\ t = c_1 p + c_2 q + c_3 z, \end{cases}
$$

où p, q, r, s, t désignent, suivant la notation de Monge, les dérivées partielles de la fonction z par rapport à x et à y, et où a, b, c sont des fonctions rationnelles des variables x et y.

Pour que ce système admette des solutions communes, il faut et il suffit que les conditions

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

soient remplies identiquement. Nous reviendrons plus loin sur ces conditions d'intégrabilité.

Ces conditions vérifiées, le système (A) admettra trois solutions linéairement indépendantes, soit z_1, z_2, z_3, et toute solution de ce système sera une fonction linéaire de z_1, z_2, z,

$$z = lz_1 + mz_2 + nz_3,$$

l, m, n étant des constantes arbitraires [1].

---

[1] *Voir* Appell, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, t. VIII, p. 62 et suiv.; 1882.

2. Désignons par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

non nul par hypothèse. Il satisfait à la relation

$$d \log \mathrm{D} = (a_1 + b_2)dx + (c_2 + b_1)dy.$$

En effet, d'une part, le système (A) équivaut au système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= (a_1 p + a_2 q + a_3 z)dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z)\,dy, \\ dq &= (b_1 p + b_2 q + b_3 z)dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z)\,dy, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$d\mathrm{D} = \begin{vmatrix} dz_i \\ p_i \\ q_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ dp_i \\ q_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_i \\ p_i \\ dq_i \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est nul; le second est égal à $(a_1 dx + b_1 dy)\mathrm{D}$, et le troisième à $(b_2 dx + c_2 dy)\mathrm{D}$; d'où résulte immédiatement l'équation écrite. Ainsi

$$\mathrm{D} = e^{\int (a_1+b_2)dx+(c_2+b_1)dy}.$$

Posons maintenant

$$u = \frac{z_2}{z_1} \quad \text{et} \quad v = \frac{z_3}{z_1}.$$

On a évidemment

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1} & \frac{p_2}{z_2} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1} & \frac{q_2}{z_2} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix} z_1 z_2 z_3$$

ou

$$D = uvz_1^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{p_1}{z_1} & \frac{p_2}{z_2} - \frac{p_1}{z_1} & \frac{p_3}{z_3} - \frac{p_1}{z_1} \\ \frac{q_1}{z_1} & \frac{q_2}{z_2} - \frac{q_1}{z_1} & \frac{q_3}{z_3} - \frac{q_1}{z_1} \end{vmatrix} = uvz_1^3 \begin{vmatrix} \frac{z_1}{z_2}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{z_1}{z_3}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{z_1}{z_2}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{z_1}{z_3}\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix};$$

d'où enfin

$$D = z_1^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Le rapprochement des deux expressions obtenues de D conduit à la relation importante

$$(1) \qquad z_1 = e^{\frac{1}{3}\int (a_1+b_2)dx+(c_2+b_1)dy}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

3. Si, dans le système (A), on remplace z par uZ ou vZ, le système fourni par ce changement de fonction devra admettre une intégrale commune avec le système donné (A).

Faisons d'une manière générale le changement de fonction

$$z = \Pi(x, y), Z,$$

et désignons par P, Q, R, S, T les dérivées de Z par rapport à x

et à y. On a

$$
\begin{aligned}
p &= \mathrm{P}\Pi + \mathrm{Z}\frac{\partial\Pi}{\partial x},\\
q &= \mathrm{Q}\Pi + \mathrm{Z}\frac{\partial\Pi}{\partial y},\\
r &= \mathrm{R}\Pi + 2\mathrm{P}\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2},\\
s &= \mathrm{S}\Pi + \left(\mathrm{P}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \mathrm{Q}\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \mathrm{Z}\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y},\\
t &= \mathrm{T}\Pi + 2\mathrm{Q}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}.
\end{aligned}
$$

Le système proposé devient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} &= \left[a_1 - \frac{2}{\Pi}\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right]\mathrm{P} + a_2\mathrm{Q} + \left[a_3 + \frac{1}{\Pi}\left(a_1\frac{\partial\Pi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}\right)\right]\mathrm{Z},\\
\mathrm{S} &= \left[b_1 - \frac{1}{\Pi}\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right]\mathrm{P} + \left[b_2 - \frac{1}{\Pi}\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right]\mathrm{Q} + \left[b_3 + \frac{1}{\Pi}\left(b_1\frac{\partial\Pi}{\partial x} + b_2\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)\right]\mathrm{Z},\\
\mathrm{T} &= c_1\mathrm{P} + \left[c_2 - \frac{2}{\Pi}\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right]\mathrm{Q} + \left[c_3 + \frac{1}{\Pi}\left(c_1\frac{\partial\Pi}{\partial x} + c_2\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{Z}.
\end{aligned}
$$

En exprimant que ce système admet une solution commune avec (A), on obtient l'équation suivante vérifiée par les fonctions u et v :

$$
\begin{vmatrix}
2\frac{\partial\Pi}{\partial x} & 0 & a_1\frac{\partial\Pi}{\partial x} + a_2\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}\\
\frac{\partial\Pi}{\partial y} & \frac{\partial\Pi}{\partial x} & b_1\frac{\partial\Pi}{\partial x} + b_2\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y}\\
0 & 2\frac{\partial\Pi}{\partial y} & c_1\frac{\partial\Pi}{\partial x} + c_2\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Développée, cette équation s'écrit

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\Pi}{\partial x}\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)^2\\
&\quad = c_1\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)^3 + (c_2 - 2b_1)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\Pi}{\partial y} + (a_1 - 2b_2)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\Pi}{\partial x} + a_2\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)^3.
\end{aligned}
$$

Si l'on désigne par α et β deux constantes arbitraires, $\alpha u + \beta v$ devra aussi vérifier cette dernière équation; que l'on remplace Π par $\alpha u + \beta v$ dans cette équation et qu'on annule les coefficients de α^3, $\alpha^2\beta$, $\alpha\beta^2$ et β^3, et l'on obtiendra le système suivant de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre, auquel satisfont les fonctions u et v :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad = c_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 + (c_2 - 2b_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial y} + (a_1 - 2b_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&\quad = \left\{\begin{aligned}
&3c_1\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (c_2 - 2b_1)\left[\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&+ 3a_2\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + (a_1 - 2b_2)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]
\end{aligned}\right\},
\end{aligned}$$

. . . . ,

Multiplions ces équations respectivement par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3,\quad \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\quad -\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,\quad -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3,$$

d'une part, par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\frac{\partial v}{\partial x},\quad \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

$$-\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right],\quad -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x};$$

d'autre part, etc., et ajoutons membre à membre. Nous obtiendrons, après des simplifications immédiates, le système suivant équivalent au proposé, et linéaire par rapport à chacune des fonctions u et v séparément (¹) :

$$
(\mathrm{B})\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=c_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=(c_2-2b_1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)=(a_1-2b_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
&\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Étant donné le système (B), il est évidemment vérifié par les fonctions

$$U=\frac{c'_1 z_1+c'_2 z_2+c'_3 z_3}{c_1 z_1+c_2 z_2+c_3 z_3},\qquad V=\frac{c''_1 z_1+c''_2 z_2+c''_3 z_3}{c_1 z_1+c_2 z_2+c_3 z_3},$$

ou

$$U=\frac{c'_1 u+c'_2 v+c'_3}{c_1 u+c_2 v+c_3},\qquad V=\frac{c''_1 u+c''_2 v+c''_3}{c_1 u+c_2 v+c_3},$$

(¹) Ce système a été construit par M. Goursat dans la Communication citée page 17, et dont cet alinéa est le développement. M. Goursat démontre différemment le point suivant :

« Des équations (B) on déduit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ en fonction de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$, pourvu que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$ ne soit pas nul, et il est bien aisé de prouver que ce déterminant ne peut être nul identiquement.

» Si l'on différentie ensuite les quatre équations (B) par rapport à x et à y, on déduira des nouvelles équations les dérivées partielles $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\,\partial x}$ en fonction des précédentes, et l'on pourra former un système de *huit* équations aux différentielles totales du premier ordre, où les inconnues seront u, v, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$.

» Si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites identiquement, l'intégrale générale contiendra *huit* constantes arbitraires. Mais nous savons *a priori* que les fonctions u et v dépendent de *huit* constantes arbitraires. Il est donc nécessaire que ces conditions d'intégrabilité soient satisfaites identiquement, et l'on aura, par conséquent, l'intégrale générale de (B) en posant

$$u=\frac{c'_1 z_1+c'_2 z_2+c'_3 z_3}{c_1 z_1+c_2 z_2+c_3 z_3},\qquad v=\frac{c''_1 z_1+c''_2 z_2+c''_3 z_3}{c_1 z_1+c_2 z_2+c_3 z_3},$$

les c étant des constantes arbitraires. »

les c étant des constantes arbitraires. Je dis que, réciproquement, c'est le système le plus général dont l'intégrale générale ait cette forme.

En effet, si l'on se reporte aux calculs développés dans le § 1 de la première Partie, on reconnaît que le résultat de l'élimination des constantes c entre les équations intégrales, et des fonctions u et v entre les équations obtenues et le système (B), fournit précisément le système (B) lui-même, où u et v sont remplacés par U et V.

4. Revenons sur les conditions d'intégrabilité du système, qui sont

$$\begin{aligned} & a_1 s + a_2 t + a_3 q + p\frac{\partial a_1}{\partial y} + q\frac{\partial a_2}{\partial y} + z\frac{\partial a_3}{\partial y} \\ & \quad = b_1 r + b_2 s + b_3 p + p\frac{\partial b_1}{\partial x} + q\frac{\partial b_2}{\partial x} + z\frac{\partial b_3}{\partial x}, \\ & b_1 s + b_2 t + b_3 q + p\frac{\partial b_1}{\partial y} + q\frac{\partial b_2}{\partial y} + z\frac{\partial b_3}{\partial y} \\ & \quad = c_1 r + c_2 s + c_3 p + p\frac{\partial c_1}{\partial x} + q\frac{\partial c_2}{\partial x} + z\frac{\partial c_3}{\partial x}. \end{aligned}$$

Après remplacement de r, s et t par leurs expressions tirées du système donné, on a deux équations linéaires et homogènes en p, q, z. Elles doivent être identiques en p, q, z, puisqu'elles doivent admettre une infinité de solutions ne différant pas seulement par un facteur constant. De là les six relations différentielles suivantes entre les coefficients du système (A), conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité :

$$\left|\begin{aligned} & a_2 c_1 + \frac{\partial a_1}{\partial y} = b_1 b_2 + b_3 + \frac{\partial b_1}{\partial x}, \\ & a_1 b_2 + a_2 c_1 + a_3 + \frac{\partial a_2}{\partial y} = a_2 b_1 + b_2^2 + \frac{\partial b_2}{\partial x}, \\ & a_1 b_3 + a_2 c_3 + \frac{\partial a_3}{\partial y} = a_3 b_1 + b_2 b_3 + \frac{\partial b_3}{\partial x}, \\ & b_1^2 + b_2 c_1 + \frac{\partial b_1}{\partial y} = a_1 c_1 + b_1 c_2 + c_3 + \frac{\partial c_1}{\partial x}, \\ & b_1 b_2 + b_3 + \frac{\partial b_2}{\partial y} = a_2 c_1 + \frac{\partial c_2}{\partial x}, \\ & b_1 b_3 + b_2 c_3 + \frac{\partial b_3}{\partial y} = a_3 c_1 + b_3 c_2 + \frac{\partial c_3}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

De la première et de la cinquième de ces relations, on déduit par addition

$$\frac{\partial(a_1+b_2)}{\partial y}=\frac{\partial(b_1+c_2)}{\partial x},$$

en sorte que (a_1+b_2) et (b_1+c_2) sont les dérivées partielles d'une même fonction $\varphi(x,y)$. Ce résultat pouvait d'ailleurs se déduire de l'expression obtenue pour D.

Ces relations se mettent sous la forme suivante :

$$b_1=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-c_2,$$

$$b_2=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-a_1,$$

$$b_3=a_2c_1-a_1c_2+\frac{\partial a_1}{\partial y}+\frac{\partial c_2}{\partial x}+a_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},$$

$$a_3=a_2b_1-a_1b_2+b_2^2-a_2c_2+\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial a_2}{\partial y},$$

$$c_3=b_2c_1-b_1c_2+b_1^2-a_1c_1+\frac{\partial b_1}{\partial y}-\frac{\partial c_1}{\partial x},$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial b_3}{\partial x}+(a_1-b_2)\left(\frac{\partial a_1}{\partial y}-\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)+a_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}-\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)+b_1\left(\frac{\partial a_2}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial y}-\frac{\partial c_3}{\partial x}+(b_1-c_2)\left(\frac{\partial a_1}{\partial y}-\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)+b_2\left(\frac{\partial b_1}{\partial y}-\frac{\partial c_1}{\partial x}\right)+c_1\left(\frac{\partial a_2}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial x}\right)=0.$$

Les cinq premières expriment b_1, b_2, b_3, a_3, c_3 en fonction de a_1, a_2, c_1, c_2 et de φ, et les deux autres sont deux équations aux dérivées partielles du second ordre liant ces dernières quantités.

5. Nous allons utiliser ces relations pour mettre le système (A) sous une forme canonique due à M. R. Liouville [1].

---

(1) Roger Liouville, *Sur quelques équations différentielles non linéaires* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIIe cahier, p. 189) et *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications* (*Ibid.*, LVIIIe cahier, p. 7).

Si l'on fait le changement de fonction

$$z = \mathrm{Z} e^{\frac{1}{3}\int (a_1+b_2)\,dx+(b_1+c_2)\,dy},$$

qui n'altère pas u et v, le système transformé en Z, de même forme que le système (A) et dont nous désignerons les éléments par des majuscules, admettra pour intégrales

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_1 &= \mathrm{C}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-\frac{1}{3}}, \\ \mathrm{Z}_2 &= u\mathrm{Z}_1, \\ \mathrm{Z}_3 &= v\mathrm{Z}_1; \end{aligned}$$

par suite, on aura, pour ce système, $\mathrm{D} \equiv$ const. ou $\varphi \equiv$ const. Soit

$$\mathrm{A}_1 = \alpha, \qquad \mathrm{A}_2 = -\gamma,$$
$$\mathrm{C}_1 = -\delta, \qquad \mathrm{C}_2 = \beta.$$

Les conditions d'intégrabilité, vérifiées pour le nouveau système comme pour l'ancien, et dans lesquelles φ est une constante, donneront

$$\mathrm{B}_1 = -\beta, \qquad \mathrm{B}_2 = -\alpha,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_3 &= \gamma\delta - \alpha\beta \quad + \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}, \\ \mathrm{A}_3 &= 2(\alpha^2 + \beta\gamma) - \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \\ \mathrm{C}_3 &= 2(\beta^2 + \alpha\delta) - \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Les quatre fonctions α, β, γ, δ sont liées par les deux relations que nous supposerons vérifiées identiquement

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + 3\frac{\partial(\alpha^2+\beta\gamma)}{\partial y} + \alpha^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial(\gamma\delta^2)}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + 3\frac{\partial(\beta^2+\alpha\delta)}{\partial x} + \beta^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right) - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial(\delta\gamma^2)}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right.$$

et le système prendra la forme de M. Liouville

$$(\mathrm{A}_1)\quad \begin{cases} \mathrm{R} = \alpha \mathrm{P} - \gamma \mathrm{Q} + \left[2(\alpha^2 + \beta\gamma) - \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\right]\mathrm{Z}, \\ \mathrm{S} = -\beta \mathrm{P} - \alpha \mathrm{Q} + \left[\gamma\delta - \alpha\beta + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right]\mathrm{Z}, \\ \mathrm{T} = -\delta \mathrm{P} + \beta \mathrm{Q} + \left[2(\beta^2 + \alpha\delta) - \dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta}{\partial x}\right]\mathrm{Z}. \end{cases}$$

6. M. Liouville est arrivé à ce type par une voie différente, à propos de la détermination des équations différentielles ordinaires du second ordre dont l'intégrale générale a la forme

$$(1)\qquad c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0,$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes arbitraires et z_1, z_2, z_3 des fonctions de x et de y.

A chaque système (A) correspond une telle équation, obtenue en faisant $z = 0$, et, par suite,

$$p + qy' = 0,$$
$$r + 2sy' + ty'^2 + qy'' = 0;$$

une élimination immédiate la fournit, à savoir

$$y'' - c_1 y'^3 - (2b_1 - c_2)y'^2 + (2b_2 - a_1)y' + a_2 = 0,$$

ou

$$(\mathrm{C})\qquad y'' + \mathcal{A}_1 y'^3 + 3\mathcal{A}_2 y'^2 + 3\mathcal{A}_3 y' + \mathcal{A}_4 = 0.$$

Réciproquement, l'équation (C) étant donnée, les coefficients $\mathcal{A}$ étant liés par les conditions indiquées ci-dessus, une infinité de systèmes semblables à (A) lui correspondent, ayant pour intégrale générale le premier membre de (1) lorsqu'on y laisse x et y indépendants.

Ce lien permettra d'étendre aux équations (C) de M. Liouville les solutions des problèmes qu'on traitera relativement aux systèmes (A).

§ 2.

FORMATION DES SYSTÈMES (A) INTÉGRABLES ALGÉBRIQUEMENT.

1. Nous nous proposons de *former tous les systèmes* (A) *à coefficients rationnels et dont l'intégrale générale est algébrique.*

Nous commencerons par indiquer un système particulier répondant à la question.

Soient

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v)$$

les deux fonctions fondamentales invariantes relatives à un groupe linéaire fini (α).

Considérons les trois expressions

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}} = \sqrt[3]{\Delta},$$

$$z_2 = u z_1,$$

$$z_3 = v z_1,$$

comme fonctions de x et de y. On peut former un système du type (A) auquel satisfassent ces trois fonctions. Nous allons en calculer les coefficients.

Tout d'abord, à cause de la relation

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}\right) \equiv 1,$$

on a

$$D = z_1^3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \equiv 1,$$

en sorte que le système se présentera sous la forme canonique, et le déterminant des équations linéaires qui feront connaître soit les a, soit les b, sera égal à l'unité.

Si l'on se reporte pour les notations au § I de la première Partie, on obtient immédiatement les coefficients α et γ de la première équation du système (A) :

$$\alpha = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y} & z_1 \\ \dfrac{\partial^2 (u z_1)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial (u z_1)}{\partial y} & u z_1 \\ \dfrac{\partial^2 (v z_1)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial (v z_1)}{\partial y} & v z_1 \end{vmatrix}$$

$$= z_1^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 z_1^2 \frac{\partial z_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ou

$$3\nabla\alpha = 3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial \nabla}{\partial x},$$

$$3\nabla\alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

ou, enfin,

$$\alpha = \mathrm{M};$$

de même

$$-\gamma = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} & z_1 \\ \dfrac{\partial (u z_1)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 (u z_1)}{\partial x^2} & u z_1 \\ \dfrac{\partial (v z_1)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 (v z_1)}{\partial x^2} & v z_1 \end{vmatrix} = z_1^3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

ou

$$\gamma \nabla = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x},$$

ou, enfin,

$$\gamma = \mathrm{I}.$$

On trouverait de même

$$\beta = \mathrm{N},$$

$$\delta = \mathrm{J}.$$

Les conditions d'intégrabilité étant nécessairement vérifiées, les fonctions I, M, N, J de x et de y, que nous avons formées dans le cas du groupe de Hesse (p. 42) satisfont identiquement aux deux relations

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + 3\frac{\partial(M^2+IN)}{\partial y} + M^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N}{M^2}\right) - \frac{1}{J}\frac{\partial(J^2 I)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + 3\frac{\partial(N^2+JM)}{\partial x} + N^3\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M}{N^2}\right) - \frac{1}{I}\frac{\partial(I^2 J)}{\partial y} = 0,$$

déjà signalées page 43.

Ainsi *le système*

$$(A_2)\quad \begin{cases} r = \quad Mp - Iq + \left[2(M^2+IN) - \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial I}{\partial y}\right]z, \\ s = -Np - Mq + \left[IJ \quad - MN + \dfrac{\partial M}{\partial y} + \dfrac{\partial N}{\partial x}\right]z, \\ t = -Jp + Nq + \left[2(N^2+JM) - \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial J}{\partial x}\right]z, \end{cases}$$

où I, J, M, N *sont les fonctions formées d'autre part, est intégrable algébriquement; son intégrale générale est la famille de surfaces de degré* $216 \times 3 = 648$, *définies par les équations*

$$A^2 x + 3B = 0,$$
$$A^3 y - 2D = 0,$$
$$A^6 z^2 - (\alpha u + \beta v + \gamma)^3 C^2 K = 0,$$

A, B, C, K, D étant les fonctions de u et de v définies au § II de la première Partie ($w = 1$), et α, β, γ trois constantes arbitraires.

2. Considérons maintenant un système (A) dont les variables soient ξ, η et dont l'intégrale générale soit algébrique. Si l'on fait décrire aux variables ξ et η, respectivement dans leurs plans, des contours fermés quelconques, les intégrales distinctes z_1, z_2, z_3 se changeront en fonctions linéaires de z_1, z_2, z_3, et à tous les contours fermés des deux plans correspondra un groupe de substitutions linéaires qui sera d'ordre fini, puisque, pour des valeurs données de ξ et η, z ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Ce groupe est dit le *groupe du système* (A); supposons que ce soit le groupe de Hesse.

Les fonctions fondamentales invariantes $f(u, v)$, $g(u, v)$ du groupe de Hesse, dans lesquelles on remplace u et v par $\frac{z_2}{z_1}$ et $\frac{z_3}{z_1}$, conserveront la même valeur si l'on fait décrire à ξ et à η des contours fermés quelconques; par suite, ce seront des fonctions rationnelles de ξ et η, soit

$$f(u, v) = \mathrm{P}(\xi, \eta), \qquad g(u, v) = \mathrm{Q}(\xi, \eta).$$

Il résulte de là, et de la double expression de D donnée pages 45-46, que *le système* (A) *le plus général, intégrable algébriquement et dont le groupe est celui de Hesse, se déduira du système* (A_2) *précédent, par le changement de variables et de fonction*

$$x = \mathrm{P}(\xi, \eta),$$
$$y = \mathrm{Q}(\xi, \eta),$$
$$z = \sqrt[n]{\chi(\xi, \eta)}\, z,$$

P, Q et χ *étant trois fonctions rationnelles arbitraires de* ξ *et de* η, *et* n *un entier quelconque.*

3. On peut, d'ailleurs, obtenir ce système sous forme explicite sans passer par l'intermédiaire de (A_2).

Les fonctions u et v de ξ et η vérifient le système (B) de quatre équations aux dérivées partielles de M. Goursat (p. 49), où x et y sont remplacés par ξ et η. Exprimons dans ce système u et v en fonction de $\mathrm{P}(\xi, \eta)$ et $\mathrm{Q}(\xi, \eta)$.

Des dérivations immédiates donnent

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = {} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 P}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial P}{\partial \eta}\\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial Q}{\partial \eta},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)^2,$$

avec des formules analogues relatives à v. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\\ = {} & \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ & + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^3\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\ & + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial Q}{\partial \xi}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\\ & - \frac{\partial P}{\partial \xi}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)^2\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\\ & - \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)^3\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\frac{\partial u}{\partial \eta} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\\ = {} & \left[\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}\frac{\partial Q}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2}\frac{\partial P}{\partial \eta} + 2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ & + 3\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial P}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\ & + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial Q}{\partial \eta} + 2\frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial P}{\partial \eta}\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\\ & - \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial P}{\partial \eta} + 2\frac{\partial Q}{\partial \xi}\frac{\partial Q}{\partial \eta}\frac{\partial P}{\partial \xi}\right]\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\\ & - 3\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial Q}{\partial \eta}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right];\end{aligned}$$

. . . .

Ces relations, jointes à la suivante,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi},$$

transforment le système (B) en celui-ci

$$(\mathrm{B}_1)\left\{\begin{aligned}
-a_2 &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}-\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\right)^3\mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{Q})+3\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\mathrm{M}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\\
&-3\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right)^2\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{Q})-\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right)^3\mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\end{aligned}\right\},\\
a_1-2b_2 &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}-\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}+2\left[\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}-\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\right]\\
&+3\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{Q})+3\left[\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}+2\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right]\mathrm{M}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\\
&-3\left[\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}+2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\right]\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{Q})-3\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\end{aligned}\right\},\\
c_2-2b_1 &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}-\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}+2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}-\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\right)\\
&-3\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{Q})-3\left[\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}+2\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\right]\mathrm{M}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\\
&+3\left[\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}+2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\right]\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{Q})+3\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\end{aligned}\right\},\\
-c_1 &= \frac{1}{\Delta_1}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}-\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \eta^2}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}-\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\right)^3\mathrm{I}(\mathrm{P},\mathrm{Q})-3\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\mathrm{M}(\mathrm{P},\mathrm{Q})\\
&+3\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\right)^2\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{Q})+\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}\right)^3\mathrm{J}(\mathrm{P},\mathrm{Q})]\end{aligned}\right\},
\end{aligned}\right.$$

où

$$\Delta_1=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \eta}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \xi} \quad (^1).$$

Si le système (A) est intégrable algébriquement, le système (B_1) est vérifié par deux fonctions rationnelles $\mathrm{P}(\xi, \eta)$ et $\mathrm{Q}(\xi, \eta)$. Inversement, si l'on se donne arbitrairement les deux fonctions rationnelles P et Q, les relations (B_1) permettent de calculer les coefficients du système (A) le plus général intégrable algébriquement. Ainsi, *on obtiendra le système*

(1) Cf. Painlevé, *Comptes rendus*, 31 mai 1887.

canonique (A_1) *le plus général intégrable algébriquement (groupe de Hesse) en prenant pour valeurs de* γ, 3α, 3β *et* δ *les seconds membres des relations* (B_1).

4. J'ajouterai une remarque relative à la structure du système (B_1) : on pouvait prévoir *a priori* que P et Q ne figureraient dans les équations de ce système que par les fonctions I, J, M, N de P et Q.

Ce système n'est autre que celui vérifié par les fonctions $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$ permettant de passer du système (A_2) au système

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} = a_1(\xi, \eta)\dfrac{\partial Z}{\partial \xi} + a_2 \dfrac{\partial Z}{\partial \eta} + a_3 Z, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

par le changement de variables et de fonction

$$(\alpha) \qquad x = P(\xi, \eta), \qquad y = Q(\xi, \eta), \qquad z = w(\xi, \eta) Z.$$

A chacun des systèmes (A_2) et (A) correspond un système vérifié par les quotients deux à deux de trois intégrales linéairement distinctes, à savoir :

$$(\Omega_2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = I\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

et

$$(\Omega) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial V}{\partial \xi} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\dfrac{\partial U}{\partial \xi} = a_2\left(\dfrac{\partial U}{\partial \xi}\dfrac{\partial V}{\partial \eta} - \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\dfrac{\partial V}{\partial \xi}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Or les valeurs de (u, v) et (U, V) provenant des intégrales associées par la dernière relation (α) sont égales; et, comme l'intégrale générale de chacun des systèmes (Ω_2) et (Ω) se déduit d'une intégrale particulière par une transformation homographique à coefficients constants, on peut dire qu'à toute intégrale $u(x, y)$, $v(x, y)$ de (Ω_2) correspond une intégrale

$U(\xi, \eta)$, $V(\xi, \eta)$ de (Ω), telle que

$$u(x, y) = U(\xi, \eta),$$
$$v(x, y) = V(\xi, \eta),$$

x et y étant liés à ξ et à η par les relations

$$(\beta) \qquad x = P(\xi, \eta), \qquad y = Q(\xi, \eta).$$

Si donc on fait dans le système (Ω_2) le changement de variables défini par les relations (β), P et Q étant convenablement choisis, on doit retomber sur le système (Ω). Or, choisissons arbitrairement P et Q; les fonctions U, V de ξ, η vérifieront un système (Ω') dont les coefficients seront connus à l'aide de I, J, M, N et des dérivées $\frac{\partial P}{\partial \xi}$, $\frac{\partial P}{\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$, ..., $\frac{\partial Q}{\partial \xi}$, ..., $\frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}$. Pour exprimer que (Ω) et (Ω') coïncident, on n'a qu'à identifier les seconds membres de (Ω) et de (Ω') (supposés résolus par rapport aux invariants différentiels) et l'on obtient le système (B_1).

Le système (B_1) ne renfermera donc que les combinaisons I, J, M, N de $P(\xi, \eta)$ et de $Q(\xi, \eta)$ et, en outre, les dérivées premières et secondes de $P(\xi, \eta)$ et de $Q(\xi, \eta)$.

§ 3.

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU TROISIÈME ORDRE ET LES INVARIANTS DE M. PAINLEVÉ.

1. Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$(D) \qquad y''' + 3ay'' + 3by' + cy = 0,$$

dont les coefficients a, b, c soient des fonctions rationnelles de la variable x.

Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales linéairement distinctes; posons

$$U = \frac{y_2}{y_1}, \qquad V = \frac{y_3}{y_1};$$

les fonctions $U(x)$ et $V(x)$ vérifient un système de deux équations différentielles du quatrième ordre qu'on va former.

Construisons le système

$$(1) \qquad u^{(\text{IV})} = R\,(u''', u'', u', u, v''', v'', v', v),$$

$$(2) \qquad v^{(\text{IV})} = R_1(u''', u'', u', u, v''', v'', v', v),$$

dont l'intégrale générale est

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{a'U + b'V + c'}{aU + bV + c}, \\ v &= \frac{a''U + b''V + c''}{aU + bV + c}, \end{aligned} \right.$$

U et V étant les fonctions de x définies plus haut. Il suffit pour cela d'écrire les équations (3) sous la forme

$$\begin{aligned} a(uU) + b(uV) + cu - a'U - b'V - c' &= 0, \\ a(vU) + b(vV) + cv - a''U - b''V - c'' &= 0, \end{aligned}$$

et de différentier chaque équation quatre fois. On obtiendra l'équation (1) en éliminant les constantes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' entre les neuf premières équations formées, et l'équation (2) en traitant de même les huit premières équations et la dixième. Le dernier résultat, par exemple, est

$$\begin{vmatrix} (uU)' & (uV)' & u' & U' & V' & 0 & 0 \\ (uU)'' & (uV)'' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0 \\ (uU)''' & (uV)''' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0 \\ (vU)' & (vV)' & v' & 0 & 0 & U' & V' \\ (vU)'' & (vV)'' & v'' & 0 & 0 & U'' & V'' \\ (vU)''' & (vV)''' & v''' & 0 & 0 & U''' & V''' \\ (vU)^{\text{IV}} & (vV)^{\text{IV}} & v^{\text{IV}} & 0 & 0 & U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

Développons les deux premières colonnes; après une simplification immédiate, il vient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & u' & U' & V' & 0 & 0 \\ 2u'U' & 2u'V' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0 \\ 3U'u''+3U''u' & 3V'u''+3V''u' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v' & 0 & 0 & U' & V' \\ 2v'U' & 2v'V' & v'' & 0 & 0 & U'' & V'' \\ 3U'v''+3U''v' & 3V'v''+3V''v' & v''' & 0 & 0 & U''' & V''' \\ 4U'v'''+6U''v''+4U'''v' & 4V'v'''+6V''v''+4V'''v' & v^{\text{IV}} & 0 & 0 & U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous poserons dorénavant

$$d = \begin{vmatrix} U' & V' \\ U'' & V'' \end{vmatrix}, \quad d_1 = \begin{vmatrix} U' & V' \\ U''' & V''' \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} U' & V' \\ U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} U'' & V'' \\ U''' & V''' \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} U'' & V'' \\ U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix}, \quad d_5 = \begin{vmatrix} U''' & V''' \\ U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix}.$$

Une double combinaison des deux premières colonnes, après multiplication par $-V'$ et U' d'une part, par V'' et $-U''$ d'autre part, transforme ainsi l'équation précédente :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & u' & U' & V' & 0 & 0 \\ 0 & 2du' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0 \\ 3du' & 3du'' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v' & 0 & 0 & U' & V' \\ 0 & 2dv' & v'' & 0 & 0 & U'' & V'' \\ 3dv' & 3dv'' & v''' & 0 & 0 & U''' & V''' \\ 6dv''+4d_1v' & 4du'''-4d_3v' & v^{\text{IV}} & 0 & 0 & U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant premier membre se décompose bien simplement en trois autres, après suppression d'un facteur d :

$$1^\circ \qquad 12d_3v'\begin{vmatrix} 0 & u' & U' & V' & 0 & 0 \\ 0 & u'' & U'' & V'' & 0 & 0 \\ u' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0 \\ 0 & v' & 0 & 0 & U' & V' \\ 0 & v'' & 0 & 0 & U'' & V'' \\ v' & v''' & 0 & 0 & U''' & V''' \end{vmatrix},$$

ou en développant, par rapport aux éléments de la première colonne,

$$(\alpha) \qquad 12dd_3v'\big[(v'u''-u''v')d_1-(v'u'''-v'''u')d\big],$$

$$2^\circ \qquad 4d_1v'\begin{vmatrix} 0 & u' & U' & V' & 0 & 0 \\ 2u' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0 \\ 3u'' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0 \\ 0 & v' & 0 & 0 & U' & V' \\ 2v' & v'' & 0 & 0 & U'' & V'' \\ 3v'' & v''' & 0 & 0 & U''' & V''' \end{vmatrix},$$

ou en développant de même :

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned} &12\,dd_1 v'\big[(v'u''-u'v'')\,d_3+(v'''u''-v''u''')\,d\big]\\ &\quad-8\,d_1^2 v'\big[(v'u''-u'v'')\,d_1+(v'''u'-u'''v')\,d\big], \end{aligned}\right.$$

$$3^\circ\qquad 3d\begin{vmatrix} 0 & 0 & u' & U' & V' & 0 & 0\\ 0 & 2u' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0\\ u' & 3u'' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0\\ 0 & 0 & v' & 0 & 0 & U' & V'\\ 0 & 2v' & v'' & 0 & 0 & U'' & V''\\ v' & 3v'' & v''' & 0 & 0 & U''' & V'''\\ 2v'' & 4v''' & v^{\text{IV}} & 0 & 0 & U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix}.$$

Le terme en v^{IV} est

$$(\gamma)\qquad 9\,d^3(v'u''-u'v'')\,u^{\text{IV}}.$$

Abstraction faite de ce terme, ce déterminant se développe par rapport aux éléments de la première colonne :

$$6v''d\begin{vmatrix} 0 & u' & U' & V' & 0 & 0\\ 2u' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0\\ 3u'' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0\\ 0 & v' & 0 & 0 & U' & V'\\ 2v' & v'' & 0 & 0 & U'' & V''\\ 3v'' & v''' & 0 & 0 & U''' & V''' \end{vmatrix} + 3u'd\begin{vmatrix} 0 & u' & U' & V' & 0 & 0\\ 2u' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0\\ 0 & v' & 0 & 0 & U' & V'\\ 2v' & v'' & 0 & 0 & U'' & V''\\ 3v'' & v''' & 0 & 0 & U''' & V'''\\ 4v''' & 0 & 0 & 0 & U^{\text{IV}} & V^{\text{IV}} \end{vmatrix}$$

$$-3v'd\begin{vmatrix} 0 & u' & U' & V' & 0 & 0\\ 2u' & u'' & U'' & V'' & 0 & 0\\ 3u'' & u''' & U''' & V''' & 0 & 0\\ 0 & v' & 0 & 0 & U' & V'\\ 2v' & v'' & 0 & 0 & U'' & V''\\ 4v''' & 0 & 0 & 0 & U^{\text{IV}} & V^{\text{I}} \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant développé donne les termes

$$(\delta)\qquad \left\{\begin{aligned} &12v''dd_1\big[(u'v''-v'u'')d_1-(u'v'''-v'u''')d\big]\\ &\quad+18u''d^2\big[(u''v'-v''u')d_3+(u''v'''-v''u''')d\big]. \end{aligned}\right.$$

Les deux autres fournissent les termes

$$3d^2u'\begin{vmatrix} 0 & v' & U' & V' \\ 2v' & v'' & U'' & V'' \\ 3v'' & v''' & U''' & V''' \\ 4v''' & 0 & U^{IV} & V^{IV} \end{vmatrix} - 3d^2v'\begin{vmatrix} 0 & v' & U' & V' \\ 2v' & v'' & U'' & V'' \\ 3u'' & u''' & U''' & V''' \\ 4v''' & 0 & U^{IV} & V^{IV} \end{vmatrix}$$

$$+3dd_1v'\begin{vmatrix} 0 & v' & U' & V' \\ 2v' & v'' & U'' & V'' \\ 2u' & u'' & U'' & V'' \\ 4v''' & 0 & U^{IV} & V^{IV} \end{vmatrix} - 3dd_3v'\begin{vmatrix} 0 & u' & U' & V' \\ 0 & v' & U' & V' \\ 2v' & v'' & U'' & V'' \\ 4v''' & 0 & U^{IV} & V^{IV} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &3d^2\,u'\big[-4v'''^2d+4v''v'''d_1+(2v'v'''-3v''^2)\,d_2-4v'v'''d_3+3v'v''d_4-2v'^2d_5\big]\\ -&3d^2\,v'\big[-4v'''u'''d+4v''v'''d_1+(2v'u'''-3v''u'')d_2-4v'v'''d_3+3v'u''d_4-\overline{2v'^2d_5}\big]\\ +&3dd_1v'\big[-4v'''u''d+4v''v'''d+2(v'u''-v''u')d_2+2v'u'd_4-\overline{2v'^2d_4}\big]\\ -&3dd_3v'\qquad +4v'v'''d-\overline{2v'^2d_2}-4v'''u'd+2v'u'd_2\big]. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que l'on a identiquement

$$dd_5-d_1d_4+d_2d_3=0,$$

les termes surlignés se détruisent, et ceux qui restent se groupent ainsi :

$$(\varepsilon)\qquad \left\{\begin{aligned} &12v'''d^2\big[(v'u'''-u'v''')d+(u'v'''-v'u''')d_1\big]\\ &\quad+9v'd^2d_4(v''u'-u''v')-9v''d^2d_2(u'v''-u''v')\\ &\quad+6d^2d_2v'(u'v'''-v'u''')-6v'dd_1d_2(v''u'-u''v'). \end{aligned}\right.$$

Réunissant les divers termes calculés, on obtient enfin l'équation demandée, qui s'écrit, après quelques simplifications évidentes :

$$(1)\left\{\begin{aligned} & d^3[9v^{\text{IV}}(v'u''-u'v'')+12v'''(v'u'''-u'v''')-18v''(v''u'''-u''v''')] \\ & \quad +d(6dd_3-4d_1^2+3dd_2)[2v'(u'v'''-v'u''')-3v''(u'v''-v'u'')] \\ & \quad +(8d_1^3+9d^2d_4-6dd_1d_2-24dd_1d_3)v'(u'v''-v'u'')=0. \end{aligned}\right.$$

On formerait de même l'équation (2), qui se déduirait d'ailleurs de la précédente en permutant u et v.

2. Je dis que les coefficients qui figurent dans ces équations,

$$I_1=\frac{4d_1^2-3d(d_2+2d_3)}{d^3},$$

$$I_2=\frac{6dd_1(d_2+4d_3)-8d_1^3-9d^2d_4}{d^3},$$

et qui dépendent de U', V', U'', V'', U''', V''', U^{IV}, V^{IV} restent *invariants* pour toute substitution linéaire effectuée sur $U(x)$ et $V(x)$.

En effet, quand je remplace U et V respectivement par

$$\frac{a_1'U+b_1'V+c_1'}{a_1U+b_1V+c_1}=U_1,\qquad \frac{a_1''U+b_1''V+c_1''}{a_1U+b_1V+c_1}=V_1,$$

l'intégrale générale $u(x)$, $v(x)$ ne change pas; on a donc le même système (1), (2), et, par suite, les mêmes équations (1), (2), car *le système* (1), (2) *est résolu par rapport à* u^{IV} *et* v^{IV}. Donc les coefficients I_1, I_2 sont les mêmes fonctions de x, c'est-à-dire que ce sont des *invariants* [1].

3. Il est facile de montrer que les coefficients I_1, I_2, ... de ces équations doivent *a priori* se réduire à *deux nécessairement distincts*.

En effet, si trois de ces coefficients invariants, α, β, γ, étaient distincts [autrement dit, si l'on n'avait pas entre eux une relation

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=0],$$

---

[1] Cela résultait d'ailleurs de la théorie générale de Sophus Lie (*voir*, page 20, l'indication bibliographique).

les égalités

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \gamma = \gamma_1,$$

où α, β, γ sont exprimés en fonction de u et v, et α_1, β_1, γ_1 en fonction de U et V, donneraient pour u, v un système de fonctions dépendant au plus de sept constantes arbitraires [U et V étant des fonctions données de x].

D'autre part, si tous les coefficients étaient fonctions d'un seul d'entre eux, α par exemple, le système (1), (2) ne changerait pas quand, à U et V, on substituerait U_1 et V_1, tels que

$$\alpha[U^{\text{IV}}, \ldots, U, V^{\text{IV}}, \ldots, V] \equiv \alpha[U_1^{\text{IV}}, \ldots, U_1, V_1^{\text{IV}}, \ldots, V_1].$$

Or, U, V étant *donnés,* on pourra prendre V_1 *arbitrairement* et choisir U_1 vérifiant cette dernière égalité. Les relations (3), où l'on remplacera U par U_1, V par V_1, donneront encore l'intégrale du système (1), (2), intégrale qui dépendrait ainsi d'une fonction arbitraire V_1, ce qui est absurde.

Si α et β sont deux invariants distincts, les égalités

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \beta_1$$

équivalent au système (1), (2).

4. Revenons à l'équation différentielle proposée (D). Lorsqu'on fait décrire à la variable x un contour fermé quelconque, les quotients

$$U(x) = \frac{y_2}{y_1}, \qquad V(x) = \frac{y_3}{y_1}$$

se transforment en quotients de fonctions linéaires de U et de V; les fonctions I_1 et I_2 restent donc invariantes. Elles dépendent par suite uniquement des coefficients a, b, c de l'équation donnée [1].

---

[1] Ces invariants, tout à fait analogues à la fonction invariante de M. Schwarz, sont dus

Pour en faire le calcul il suffit d'éliminer $y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_1^{\text{IV}}$ entre les six équations homogènes suivantes :

$$y_1''' + 3ay_1'' + 3by_1' + cy_1 = 0,$$

$$(Uy_1)''' + 3a(Uy_1)'' + 3b(Uy_1)' + cUy_1 = 0,$$

$$(Vy_1)''' + 3a(Vy_1)'' + 3b(Vy_1)' + cVy_1 = 0,$$

$$y^{\text{IV}} + 3ay_1''' + 3(a' + b)y_1'' + (3b' + c)y_1' + c'y_1 = 0,$$

$$(Uy_1)^{\text{IV}} + 3a(Uy_1)''' + 3(a' + b)(Uy_1)'' + (3b' + c)(Uy_1)' + c'Uy_1 = 0,$$

$$(Vy_1)^{\text{IV}} + 3a(Vy_1)''' + 3(a' + b)(Vy_1)'' + (3b' + c)(Vy_1)' + c'Vy_1 = 0.$$

La seconde et la troisième s'écrivent, en tenant compte de la première :

$$3U'y_1'' + 3(U'' + 2aU')y_1' + (U''' + 3aU'' + 3bU')y_1 = 0,$$

$$3V'y_1'' + 3(V'' + 2aV')y_1' + (V''' + 3aV'' + 3bV')y_1 = 0.$$

Deux combinaisons linéaires, ayant pour multiplicateurs, l'une V'' et $-U''$, l'autre V' et $-U'$, donnent

$$(4) \qquad 3dy_1'' + 6ady_1' + (3bd - d_3)y_1 = 0,$$

$$(5) \qquad 3dy_1' + [3ad + d_1]y_1 = 0.$$

La cinquième et la sixième équation s'écrivent, en tenant compte de la quatrième :

$$\begin{aligned} 4U'y_1''' + 3(2U'' + 3aU')y_1'' + [4U''' + 9aU'' + 6(a' + b)U']y_1' \\ + [U^{(\text{IV})} + 3aU''' + 3(a' + b)U'' + (3b' + c)U']y_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4V'y_1''' + 3(2V'' + 3aV')y_1'' + [4V''' + 9aV'' + 6(a' + b)V']y_1' \\ + [V^{\text{IV}} + 3aV''' + 3(a' + b)V'' + (3b' + c)V']y_1 = 0. \end{aligned}$$

à M. Painlevé, qui les a signalés très succinctement dans une Note *Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre*, insérée aux *Comptes rendus* du 27 janvier 1887. Ce paragraphe est le développement du début de cette Note.

Les mêmes combinaisons fournissent les équations équivalentes :

$$(6)\quad \begin{cases} 6dy_1'' + [4d_1 + 9ad]y_1' + [d_2 + 3ad_1 + 3(a' + b)d]y_1 = 0, \\ 4dy_1''' + 9ady_1'' + [-4d_3 + 6(a' + b)d]y_1' \\ \qquad + [-d_4 - 3ad_3 + (3b' + c)d]y_1 = 0. \end{cases}$$

Faisons enfin disparaître y_1''' de cette dernière, en tenant compte de la proposée; il vient

$$(7)\quad 3ady_1'' + [4d_3 - 6(a' - b)d]y_1' + [d_4 + 3ad_3 - 3(b' - c)d]y_1 = 0.$$

L'élimination de y_1'' entre (4) et (6) donne

$$[4d_1 - 3ad]y_1' + [2d_3 + d_2 + 3ad_1 + 3(a' - b)d]y_1 = 0,$$

et celle de $\dfrac{y_1'}{y_1}$ entre (5) et cette dernière conduit à

$$[4d_1 - 3ad][d_1 + 3ad] - 3d[2d_3 + d_2 + 3ad_1 + 3(a' - b)d] = 0.$$

Cette relation peut s'écrire

$$d^2[9a^2 + 9(a' - b)] = 4d_1^2 - 3d(d_2 + 2d_3),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I}_1 = 9[a^2 + a' - b].$$

Éliminons de même y_1'' entre (4) et (7)

$$[4d_3 - 6(a' - b + a^2)d]y_1' + [d_4 + 4ad_3 - 3(b' - c + ab)d]y_1 = 0,$$

puis $\dfrac{y_1'}{y_1}$ entre l'équation obtenue et (5)

$$\begin{aligned}&[4d_3 - 6(a' - b + a^2)d][3ad + d_1] \\ &\qquad - 3d[d_4 + 4ad_3 - 3(b' - c + ab)d] = 0.\end{aligned}$$

Cette relation peut s'écrire

$$4d_1d_3 - 3dd_4 - 6(a^2 + a' - b)dd_1 = 9d^2[2a(a^2 + a') - 3ab - b' + c],$$

ou, en tenant compte de la valeur obtenue plus haut pour $a^2 + a' - b$,

$$24dd_1d_3 - 9d^2d_4 + 6dd_1d_2 - 8d_1^3 = 27d^3[2a(a^2+a') - 3ab - b' + c],$$

c'est-à-dire enfin

$$I_2 = 27[2a(a^2+a') - 3ab - b' + c].$$

5. Ainsi les rapports des intégrales de l'équation (D) vérifient le système suivant :

$$\begin{aligned} &3d(d_2 + 2d_3) - 4d_1^2 + 9[a^2 + a' - b]d^2 = 0, \\ &6dd_1(d_2 + 4d_3) - 8d_1^3 - 9d^2d_4 \\ &\qquad + 27[-2a(a^2+a') + 3ab + b' - c]d^3 = 0. \end{aligned}$$

On peut n'y faire figurer que

$$d = U'V'' - U''V' \qquad \text{et} \qquad D = d_3 = U''V''' - U'''V'';$$

car on a

$$d_1 = d'; \qquad d_2 = d'' - D; \qquad d_4 = D'.$$

Le système prend ainsi la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{3(d''+D)}{d} - 4\left(\frac{d'}{d}\right)^2 = 9(-a^2 - a' + b), \\ &\frac{6d'(d''+3D)}{d^2} - 9\,\frac{D'}{d} - 8\left(\frac{d'}{d}\right)^3 \\ &\qquad = 27[2a(a^2+a') - 3ab - b' + c]. \end{aligned} \right.$$

On désignera les deux équations de ce système respectivement par (E′) et (E″).

6. On terminera ce paragraphe par deux remarques qui seront utilisées dans la troisième Partie.

Reprenons d'abord l'équation (5) du n° 4

$$3dy_1' + (3ad + d')y_1 = 0;$$

multiplions les deux membres par y_1^2; elle s'écrit :

$$(y_1^3 d)' + 3ay_1^3 d = 0$$

ou, par une intégration immédiate,

$$y_1^3 d e^{3\int a\,dx} = \text{const.}$$

Ainsi

$$y_1 = e^{-\int a\,dx}(\mathrm{U}'\mathrm{V}'' - \mathrm{U}''\mathrm{V}')^{-\frac{1}{3}}.$$

Si l'on fait dans (D) le changement de fonction

$$y = \mathrm{Y}e^{-\int a\,dx},$$

on ne change pas les valeurs de $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{V}(x)$; on ramène l'équation proposée (D) à une forme analogue dans laquelle le coefficient de Y'' est nul, et l'on obtient

$$\text{(F)} \qquad \mathrm{Y}_1 = \mathrm{C}'(\mathrm{U}'\mathrm{V}'' - \mathrm{U}''\mathrm{V}')^{-\frac{1}{3}}.$$

7. En second lieu, si l'on élimine D entre les équations (E), on obtient une équation du troisième ordre en d; en posant

$$3\zeta = -\frac{d'}{d},$$

il vient une équation du deuxième ordre en ζ, analogue à l'équation de Riccati, et qui n'est autre que l'équation vérifiée par la dérivée logarithmique $\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}$; car la relation du numéro précédent

$$\mathrm{Y}_1^3 d = \text{const.}$$

donne

$$\frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}} = -\frac{1}{3}\frac{d'}{d}.$$

En dérivant l'équation (E′), multipliée par 3, et en ajoutant l'équation obtenue membre à membre avec (E''), on élimine D' :

$$9\frac{d'''}{d} - 27\frac{d'd''}{d^2} + 9\frac{d'D}{d^2} + 16\left(\frac{d'}{d}\right)^3 - 27[2a^3 - a'' - 3ab + c] = 0.$$

L'élimination de D entre cette équation et (E') est immédiate :

$$9\frac{d'''}{d} - 36\frac{d'd''}{d^2} + 28\left(\frac{d'}{d}\right)^3 - 27\frac{d'}{d}(a^2 + a' - b) - 27[2a^3 - a'' - 3ab + c] = 0.$$

En introduisant ζ, on obtient

$$\text{(G)} \quad \zeta'' + 3\zeta\zeta' + \zeta^3 - 3\zeta(a^2 + a' - b) + (2a^3 - a'' - 3ab + c) = 0.$$

On tirera parti plus loin de cette équation.

---

§ 4.

FORMATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE LINÉAIRE DU TROISIÈME ORDRE INTÉGRABLE ALGÉBRIQUEMENT.

1. Nous nous proposons de *former toutes les équations différentielles linéaires et homogènes du troisième ordre* (D) *à coefficients rationnels intégrables algébriquement.*

A cet effet, considérons l'équation (D) et le système (E) correspondant.

Si l'intégrale générale de (D) est algébrique, il en est de même de l'intégrale de (E). Il en résulte, d'après l'expression de y_1 donnée page 72, que $e^{-\int a\,dx}$ est algébrique, c'est-à-dire que a est une fonction rationnelle à pôles simples et à résidus commensurables.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et que l'intégrale du système (E) soit algébrique, l'équation (D) sera intégrable algébriquement.

Cela posé, si l'intégrale de (E) est algébrique, les diverses valeurs de $U(x)$ et de $(V(x)$, qui correspondent à une valeur donnée de x, forment un groupe fini (α) de substitutions linéaires. Si l'on remplace, dans les deux fonctions fondamentales invariantes qui correspondent à ce groupe, les variables par les fonctions $U(x)$ et $V(x)$, on obtiendra donc deux fonctions rationnelles de x. Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} f(U, V) = P(x), \\ g(U, V) = Q(x), \end{cases}$$

P et Q étant deux fonctions rationnelles de x. Remplaçons dans le système (E) U et V en fonction de P et Q; nous obtiendrons deux équations (E'_1) et (E''_1) où figurent les dérivées de P et de Q jusqu'au quatrième ordre inclusivement, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des dérivées de $f(U, V)$ et de $g(U, V)$, par suite des fonctions rationnelles de U et de V, qui ne changent pas par les substitutions du groupe (α), et *s'expriment, par suite, rationnellement en fonction de* P *et de* Q.

2. Nous allons former ces équations (E_1).

Nous adopterons, d'accord avec la première Partie, les notations suivantes :

$$\nabla = \frac{\partial U}{\partial P}\frac{\partial V}{\partial Q} - \frac{\partial U}{\partial Q}\frac{\partial V}{\partial P};$$

$$I\nabla = \frac{\partial^2 U}{\partial P^2}\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\frac{\partial U}{\partial P}, \qquad J\nabla = \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}\frac{\partial U}{\partial Q} - \frac{\partial^2 U}{\partial Q^2}\frac{\partial V}{\partial Q};$$

$$A\nabla = \frac{\partial^2 U}{\partial P^2}\frac{\partial V}{\partial Q} - \frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\frac{\partial U}{\partial Q}, \qquad A_1\nabla = \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}\frac{\partial U}{\partial P} - \frac{\partial^2 U}{\partial Q^2}\frac{\partial V}{\partial P};$$

$$B\nabla = \frac{\partial^2 U}{\partial P\partial Q}\frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial^2 V}{\partial P\partial Q}\frac{\partial U}{\partial P}, \qquad B_1\nabla = \frac{\partial^2 V}{\partial P\partial Q}\frac{\partial U}{\partial Q} - \frac{\partial^2 U}{\partial P\partial Q}\frac{\partial V}{\partial Q};$$

$$A + 2B = 3M; \qquad A_1 + 2B_1 = 3N.$$

I, J, M, N sont les quatre fonctions de P et de Q obtenues en remplaçant x et y, dans les formules de la p. 42, par P et Q.

Les relations ci-dessus, résolues par rapport aux dérivées secondes, peuvent s'écrire :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} &= A\frac{\partial U}{\partial P} - I\frac{\partial U}{\partial Q}, & \frac{\partial^2 V}{\partial P^2} &= A\frac{\partial V}{\partial P} - I\frac{\partial V}{\partial Q}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial P\partial Q} &= -B_1\frac{\partial U}{\partial P} - B\frac{\partial U}{\partial Q}, & \frac{\partial^2 V}{\partial P\partial Q} &= -B_1\frac{\partial V}{\partial P} - B\frac{\partial V}{\partial Q}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Q^2} &= -J\frac{\partial U}{\partial P} + A_1\frac{\partial U}{\partial Q}, & \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} &= -J\frac{\partial V}{\partial P} + A_1\frac{\partial V}{\partial Q}. \end{aligned}\right.$$

3. U et V interviennent dans le système (E) par les expressions

$$d = U'V'' - U''V' \qquad \text{et} \qquad D = U''V''' - U'''V''$$

et par leurs dérivées ; nous allons donc former ces quantités. On a d'abord

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} U' &= \frac{\partial U}{\partial P}P' + \frac{\partial U}{\partial Q}Q', \\ V' &= \frac{\partial V}{\partial P}P' + \frac{\partial V}{\partial Q}Q'. \end{aligned}\right.$$

Une seconde dérivation donne

$$U'' = \frac{\partial U}{\partial P}P'' + \frac{\partial U}{\partial Q}Q'' + \frac{\partial^2 U}{\partial P^2}P'^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial P\partial Q}P'Q' + \frac{\partial^2 U}{\partial Q^2}Q'^2,$$

ou, en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs (2),

$$\begin{aligned} U'' = \frac{\partial U}{\partial P}&[P'' + AP'^2 - 2B_1P'Q' - JQ'^2] \\ &+ \frac{\partial U}{\partial Q}[Q'' + A_1Q'^2 - 2BP'Q' - IP'^2] \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} U'' = \frac{\partial U}{\partial P}&[P'' + 3MP'^2 - JQ'^2] \\ &+ \frac{\partial U}{\partial Q}[Q'' + 3NQ'^2 - IP'^2] - 2U'[BP' + B_1Q']. \end{aligned}$$

Nous sommes conduit à poser

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= P'' + 3MP'^2 - JQ'^2, \\ \gamma &= Q'' + 3NQ'^2 - IP'^2, \\ G &= BP' + B_1Q'. \end{aligned}\right.$$

Il vient ainsi

$$(5)\quad \begin{cases} U'' + 2GU' = \varphi \dfrac{\partial U}{\partial P} + \gamma \dfrac{\partial U}{\partial Q}, \\ V'' + 2GV' = \varphi \dfrac{\partial V}{\partial P} + \gamma \dfrac{\partial V}{\partial Q}. \end{cases}$$

On déduit d'abord de (3) et (5)

$$\begin{vmatrix} U' & V' \\ U'' + 2GU' & V'' + 2GV' \end{vmatrix} = \nabla \begin{vmatrix} P' & Q' \\ \varphi & \gamma \end{vmatrix}$$

ou

$$(6)\quad \frac{d}{\nabla} = \gamma P' - \varphi Q' = \underline{P'Q'' - P''Q' + 3P'Q'(NQ' - MP') + JQ'^3 - IP'^3 = \alpha.}$$

Continuons la dérivation sur les formules (5)

$$U''' + 2GU'' + 2G'U' = \frac{\partial U}{\partial P}[\varphi' + (AP' - B_1Q')\varphi - (B_1P' + JQ')\gamma] \\ + \frac{\partial U}{\partial Q}[\gamma' + (A_1Q' - BP')\gamma - (BQ' + IP')\varphi].$$

Posons

$$(7)\quad \begin{cases} \Phi = \varphi' + 3MP'\varphi - JQ'\gamma, \\ \Gamma = \gamma' + 3NQ'\gamma - IP'\varphi, \end{cases}$$

et nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} U''' + 2GU'' + 2G'U' = \dfrac{\partial U}{\partial P}[\Phi - 2G\varphi - B_1\alpha] + \dfrac{\partial U}{\partial Q}[\Gamma - 2G\gamma + B\alpha], \\ V''' + 2GV'' + 2G'V' = \dfrac{\partial V}{\partial P}[\Phi - 2G\varphi - B_1\alpha] + \dfrac{\partial V}{\partial Q}[\Gamma - 2G\gamma + B\alpha]. \end{cases}$$

On obtient, comme plus haut, à l'aide de (5) et (8)

$$\begin{vmatrix} U'' + 2GU' & V'' + 2GV' \\ U''' + 2GU'' + 2G'U' & V''' + 2GV'' + 2G'V' \end{vmatrix} \\ = \nabla \begin{vmatrix} \varphi & \gamma \\ \Phi - 2G\varphi - B_1\alpha & \Gamma - 2G\gamma + B\alpha \end{vmatrix}$$

ou, en développant,

$$D - 2G'd + 2Gd' + 4G^2 d - (B\varphi + B_1\gamma)d = \nabla(\varphi\Gamma - \gamma\Phi).$$

Or

$$d' = \alpha'\nabla + \alpha\nabla'$$

et, comme on trouve bien simplement

$$\frac{\nabla'}{\nabla} = (A - B)P' + (A_1 - B_1)Q' = 3(MP' + NQ' - G),$$

il vient

$$d' = [\alpha' + 3(MP' + NQ' - G)\alpha]\nabla;$$

la relation qui définit D prend la forme

$$\frac{D}{d} + \left\{2G\left[\frac{\alpha'}{\alpha} + 3MP' + 3NQ'\right] - 2(G^2 + G') - (B\varphi + B_1\gamma)\right\}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(\varphi\Gamma - \gamma\Phi).$$

4. Posons

$$\Theta = \frac{\alpha'}{\alpha} + 3(MP' + NQ') \qquad \text{et} \qquad \beta = \varphi\Gamma - \gamma\Phi.$$

Ce sont des quantités qu'on sait exprimer en fonction de P, Q et de leurs dérivées; l'expression développée de β sera donnée plus loin. Substituons dans l'équation (E′), qu'on peut écrire

$$3\frac{D}{d} + 3\left(\frac{d'}{d}\right)' - \left(\frac{d'}{d}\right)^2 + 9(a^2 + a' - b) = 0,$$

les valeurs de $\frac{D}{d}$ et de $\frac{d'}{d}$ obtenues, c'est-à-dire

$$\frac{d'}{d} = \Theta - 3G,$$
$$\frac{D}{d} = \frac{\beta}{\alpha} - 2G\Theta + 2(G^2 + G') + B\varphi + B_1\gamma.$$

Il vient

$$3\frac{\beta}{\alpha}+3\Theta'-\Theta^2+3(B\varphi+B_1\gamma-G^2-G')+9(a^2+a'-b)=0.$$

5. Nous sommes amenés à former le groupe de termes

$$B\varphi+B_1\gamma-G^2-G'.$$

A cet effet, reportons-nous aux relations (2) et exprimons que l'on a

$$\frac{\partial^3 U}{\partial P^2\partial Q}=\frac{\partial^3 U}{\partial P\partial Q\partial Q};$$

il vient, en remplaçant les dérivées secondes qui s'introduisent par leurs valeurs (2)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial A}{\partial Q}\frac{\partial U}{\partial P}-\frac{\partial I}{\partial Q}\frac{\partial U}{\partial Q}+A\left[-B_1\frac{\partial U}{\partial P}-B\frac{\partial U}{\partial Q}\right]-I\left[-J\frac{\partial U}{\partial P}+A_1\frac{\partial U}{\partial Q}\right]\\&+\frac{\partial B_1}{\partial P}\frac{\partial U}{\partial P}+\frac{\partial B}{\partial P}\frac{\partial U}{\partial Q}+B_1\left[A\frac{\partial U}{\partial P}-I\frac{\partial U}{\partial Q}\right]+B\left[-B_1\frac{\partial U}{\partial P}-B\frac{\partial U}{\partial Q}\right]=0.\end{aligned}$$

Soit

$$m\frac{\partial U}{\partial P}+n\frac{\partial U}{\partial Q}=0$$

cette relation; en considérant de même les dérivées de V, on serait conduit à

$$m\frac{\partial V}{\partial P}+n\frac{\partial V}{\partial Q}=0.$$

Comme ∇ n'est pas nul identiquement, ces relations entraînent

$$m=0,\qquad n=0,$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial A}{\partial Q}+\frac{\partial B_1}{\partial P}+IJ-BB_1=0,\\&-\frac{\partial I}{\partial Q}+\frac{\partial B}{\partial P}-3IN+IB_1-3MB+B^2=0.\end{aligned}\right.$$

On obtiendrait d'une manière toute semblable les relations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial P} + \dfrac{\partial B}{\partial Q} + IJ - BB_1 = 0, \\ -\dfrac{\partial J}{\partial P} + \dfrac{\partial B_1}{\partial Q} - 3JM + JB - 3NB + B_1^2 = 0. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre les premières équations de chaque système, il vient

$$3\left[\frac{\partial M}{\partial Q} + \frac{\partial N}{\partial P}\right] + 2(IJ - BB_1) = \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B_1}{\partial P}.$$

Cela posé, formons G'

$$G' = BP'' + B_1 Q'' + \frac{\partial B}{\partial P} P'^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B_1}{\partial P}\right) P'Q' + \frac{\partial B_1}{\partial Q} Q'^2.$$

Tirons $\dfrac{\partial B}{\partial P}$ et $\dfrac{\partial B_1}{\partial Q}$ des secondes équations des systèmes ci-dessus, et leur somme de la dernière équation obtenue

$$\begin{aligned} G' = BP'' + B_1 Q'' + &\left[\frac{\partial I}{\partial Q} + 3IN - IB_1 + 3MB - B^2\right] P'^2 \\ + &\left[2(IJ - BB_1) + 3\left(\frac{\partial M}{\partial Q} + \frac{\partial N}{\partial P}\right)\right] P'Q' \\ + &\left[\frac{\partial J}{\partial P} + 3JM - JB + 3NB_1 - B_1^2\right] Q'^2. \end{aligned}$$

Un groupement facile des termes conduit à l'expression cherchée

$$(10)\begin{cases} G' + G^2 - B\varphi - B_1\gamma \\ \quad = \left(\dfrac{\partial I}{\partial Q} + 3IN\right) P'^2 + \left(3\dfrac{\partial M}{\partial Q} + 3\dfrac{\partial N}{\partial P} + 2IJ\right) P'Q' + \left(\dfrac{\partial J}{\partial P} + 3JM\right) Q'^2. \end{cases}$$

Nous désignerons le second membre, évalué en fonction de P et de Q, par H. L'équation (E')

$$3\,\frac{\beta}{\alpha} + 3\Theta' - \Theta^2 - 3H + 9(a^2 + a' - b) = 0$$

prend la forme

$$(\mathrm{E}'_1) \qquad 3\alpha(\alpha'' + \Lambda) - 4\alpha'^2 + 9\alpha^2(a^2 + a' - b) = 0.$$

où

$$\Lambda = \beta + [-\mathrm{H} + 3(\mathrm{MP}' + \mathrm{NQ}')' - 3(\mathrm{MP}' + \mathrm{NQ}')^2]\alpha - 2(\mathrm{MP}' + \mathrm{NQ}')\alpha'.$$

6. Passons à l'équation (E'') que j'écris, en observant que

$$\frac{\mathrm{D}'}{d} = \left(\frac{\mathrm{D}}{d}\right)' + \frac{\mathrm{D}d'}{d^2},$$

$$\frac{d'}{d}\left[6\frac{d''}{d} + 9\frac{\mathrm{D}}{d} - 8\left(\frac{d'}{d}\right)^2\right] - 9\left(\frac{\mathrm{D}}{d}\right)' + 27[-2a(a^2 + a') + 3ab + b' - c] = 0.$$

Rappelons que l'on a

$$\frac{d'}{d} = \Theta - 3\mathrm{G},$$

$$\frac{\mathrm{D}}{d} = \frac{\beta}{\alpha} - \mathrm{H} - 2\mathrm{G}\Theta + 3(\mathrm{G}^2 + \mathrm{G}');$$

d'où

$$\frac{d''}{d} = \Theta' - 3\mathrm{G}' + \frac{d'^2}{d^2},$$

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{d}\right)' = \left(\frac{\beta}{\alpha} - \mathrm{H}\right)' - 2\mathrm{G}'\Theta - 2\mathrm{G}\Theta' + 6\mathrm{G}\mathrm{G}' + 3\mathrm{G}''.$$

L'équation (E'') prend donc la forme

$$(\Theta - 3\mathrm{G})\left[9(\mathrm{G}^2 + \mathrm{G}') - 6\mathrm{G}\Theta + 6\Theta' - 2\Theta^2 + 9\left(\frac{\beta}{\alpha} - \mathrm{H}\right)\right] - 9\left[\left(\frac{\beta}{\alpha} - \mathrm{H}\right)' - 2\mathrm{G}'\Theta - 2\mathrm{G}\Theta' + 6\mathrm{G}\mathrm{G}' + 3\mathrm{G}''\right] + 27[-2a(a^2 + a') + 3ab + b' - c] = 0,$$

ou, en isolant les termes déjà exprimés en fonction de P et Q,

$$\begin{aligned}\Theta\left[9\left(\frac{\beta}{\alpha}-\mathrm{H}\right)-2\Theta^2+6\Theta'\right]+9\left(\mathrm{H}-\frac{\beta}{\alpha}\right)'\\ +27\left[(\Theta-\mathrm{G})(\mathrm{G}^2+\mathrm{G}')-\mathrm{G}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\mathrm{H}\right)-(\mathrm{G}^2+\mathrm{G}')'\right]\\ =27[2a(a^2+a')-3ab-b'+c].\end{aligned}$$

En tenant compte de la relation

$$\mathrm{G}^2+\mathrm{G}'=\mathrm{B}\varphi+\mathrm{B}_1\gamma+\mathrm{H},$$

la dernière parenthèse du premier membre s'écrit

$$\Theta\mathrm{H}-\mathrm{H}'+(\Theta-\mathrm{G})(\mathrm{B}\varphi+\mathrm{B}_1\gamma)-\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{G}-(\mathrm{B}\varphi+\mathrm{B}_1\gamma)'.$$

Posons

$$\mathrm{H}_1=(\Theta-\mathrm{G})(\mathrm{B}\varphi+\mathrm{B}_1\gamma)-\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{G}-(\mathrm{B}\varphi+\mathrm{B}_1\gamma)'.$$

Nous verrons tout à l'heure que H_1 est exprimable en fonction de P et Q. Dès lors l'équation (E''_1) cherchée est

$$(\mathrm{E}''_1)\quad\left\{\begin{aligned}&18(\Theta\mathrm{H}-\mathrm{H}')+2\Theta(3\Theta'-\Theta^2)+9\left[\Theta\frac{\beta}{\alpha}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)'\right]+27\mathrm{H}_1\\ &=27[2a(a^2+a')-3ab-b'+c]\ldots.\end{aligned}\right.$$

7. Il reste à faire le calcul de H_1. Si l'on tient compte des valeurs des dérivées de B et B_1 calculées au n° 5, on obtient d'abord

$$(\mathrm{B}\varphi+\mathrm{B}_1\gamma)'=\mathrm{B}\varphi'+\mathrm{B}_1\gamma'+\left\{\begin{aligned}&\mathrm{P}'\varphi\left(\frac{\partial\mathrm{I}}{\partial\mathrm{Q}}+3\mathrm{IN}+3\mathrm{MB}-\mathrm{IB}_1-\mathrm{B}^2\right)\\ &+\mathrm{Q}'\varphi\left(\mathrm{IJ}+2\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mathrm{Q}}+\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial\mathrm{P}}-\mathrm{BB}_1\right)\\ &+\mathrm{P}'\gamma\left(\mathrm{IJ}+2\frac{\partial\mathrm{N}}{\partial\mathrm{P}}+\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\mathrm{Q}}-\mathrm{BB}_1\right)\\ &+\mathrm{Q}'\gamma\left(\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial\mathrm{P}}+3\mathrm{JM}+3\mathrm{NB}_1-\mathrm{JB}-\mathrm{B}_1^2\right),\end{aligned}\right.$$

ou

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&(B\varphi+B_1\gamma)'+G(B\varphi+B_1\gamma)-B\Phi-B_1\Gamma\\&\quad=\varphi\left[P'\left(\frac{\partial I}{\partial Q}+3IN\right)+Q'\left(IJ+2\frac{\partial M}{\partial Q}+\frac{\partial N}{\partial P}\right)\right]\\&\qquad+\gamma\left[Q'\left(\frac{\partial J}{\partial P}+3JM\right)+P'\left(IJ+2\frac{\partial N}{\partial P}+\frac{\partial M}{\partial Q}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

Je dis que H_1 est égal au second membre changé de signe. Cela revient à dire que

$$\Theta(B\varphi+B_1\gamma)-B\Phi-B_1\Gamma-\frac{\beta}{\alpha}G$$

est identiquement nul. Le coefficient de B dans cette expression est

$$\Theta\varphi-\Phi-\frac{\varphi\Gamma-\gamma\Phi}{\alpha}P',$$

ou

$$\frac{\varphi}{\alpha}(\alpha\Theta+\Phi Q'-\Gamma P'),$$

et, en développant la parenthèse, on trouve immédiatement qu'elle est identiquement nulle. Le coefficient de B_1 est semblablement nul, et le résultat annoncé est justifié.

8. Ainsi l'équation (E''_1) s'écrit, en posant

$$(12)\qquad MP'+NQ'=\lambda,$$

et par suite

$$\alpha\Theta=\alpha'+3\alpha\lambda,$$

$$\Lambda=\beta-H\alpha+3(\lambda'-\lambda^2)\alpha-2\lambda\alpha';$$

$$\begin{aligned}\Theta\left[6\Theta'-2\Theta^2+18\left(H+\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]-9\frac{\beta'+3\beta\lambda}{\alpha}+27H_1-18H'\\=27[2a(a^2+a')-3ab-b'+c].\end{aligned}$$

Remplaçons Θ par sa valeur et β en fonction de α ; il vient

$$\begin{aligned}(\alpha'+3\alpha\lambda)\,[6\alpha(\alpha''+3\Lambda)-8\alpha'^2+36\alpha^2(\mathrm{H}+\lambda^2-\lambda')+24\alpha\alpha'\lambda]\\ -9\alpha^2\left\{\begin{array}{l}3\lambda[\Lambda+\mathrm{H}\alpha-3(\lambda'-\lambda^2)\alpha+2\alpha'\lambda]\\ +\Lambda'+\mathrm{H}\alpha'+\mathrm{H}'\alpha-3(\lambda'-\lambda^2)\alpha'-3(\lambda'-\lambda^2)'\alpha+2\lambda'\alpha'+2\lambda\alpha''\end{array}\right\}\\ +9\alpha^3(3\mathrm{H}_1-2\mathrm{H}')=27\alpha^3[2a(a^2+a')-3ab-b'+c].\end{aligned}$$

Si l'on met en évidence, dans le premier membre, les termes

$$6\alpha\alpha'(\alpha''+3\Lambda)-8\alpha'^3,$$

les termes restant, par suite de la destruction de deux termes en $24\alpha\alpha'^2\lambda$, contiennent tous en facteur $9\alpha^2$, et l'équation (E_1'') prend la forme remarquable

$$6\alpha\alpha'(\alpha''+3\Lambda)-8\alpha'^3-9\Lambda_1\alpha^2=27\alpha^3[2a(a^2+a')-3ab-b'+c].$$

La valeur de Λ_1 subit d'abord des réductions évidentes

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\Lambda_1=\Lambda'+\alpha(3\mathrm{H}_1+\mathrm{H}')-3(\lambda^2-\lambda')(\alpha'-\alpha\lambda)\\ +3(\lambda^2-\lambda')'-3(\alpha'+3\alpha\lambda)\mathrm{H}+3\Lambda\lambda.\end{aligned}\right.$$

9. En résumé, le système (E_1)

$$(\mathrm{E}_1)\ \left\{\begin{array}{l}3\alpha(\alpha''+\Lambda)-4\alpha'^2+9\alpha^2(a^2+a'-b)=0,\\ 6\alpha\alpha'(\alpha''+3\Lambda)-8\alpha'^3-9\Lambda_1\alpha^2+27\alpha^3[-2a(a^2+a')+3ab+b'-c]=0\end{array}\right.$$

s'obtient en remplaçant, dans le système (E), d par α, D par Λ et D′ par Λ_1

$$\alpha = P'Q'' - P''Q' + 3P'Q'(NQ' - MP') + JQ'^3 - IP'^3;$$

$$\Lambda = \left\{\begin{aligned}
&-(Q'' + NQ'^2 - 2MP'Q' - IP'^2)\Big[P''' + 9MP'P'' - 3JQ'Q'' \\
&\qquad + 3\left(\frac{\partial M}{\partial P} + 3M^2\right)P'^3 + \left(3\frac{\partial M}{\partial Q} + IJ\right)P'^2Q' \\
&\qquad - \left(\frac{\partial J}{\partial P} - 3MJ\right)P'Q'^2 - \left(\frac{\partial J}{\partial Q} + 3NJ\right)Q'^3\Big] \\
&+(P'' + MP'^2 - 2NP'Q' - JQ'^2)\Big[Q''' + 3NQ'Q'' - 3IP'P'' \\
&\qquad + 3\left(\frac{\partial N}{\partial Q} + 3N^2\right)Q'^3 + \left(3\frac{\partial N}{\partial P} + IJ\right)P'Q'^2 \\
&\qquad - \left(\frac{\partial I}{\partial Q} + 3NI\right)P'^2Q' - \left(\frac{\partial I}{\partial P} + 3MI\right)P'^3\Big] \\
&+\alpha\Big[3(MP'' + NQ'') + \left(3M^2 - 3IN + 3\frac{\partial M}{\partial P} - \frac{\partial I}{\partial Q}\right)P'^2 \\
&\qquad + 2(3MN - IJ)P'Q' + \left(3N^2 - 3JN + 3\frac{\partial N}{\partial Q} - \frac{\partial J}{\partial P}\right)Q'^2\Big];
\end{aligned}\right.$$

quant à Λ_1, elle est définie par l'égalité (13) où H, H_1 et λ doivent être remplacés par leurs valeurs déduites des égalités (10), (11), (12); les termes du quatrième ordre sont

$$P''Q^{\text{IV}} - Q''P^{\text{IV}},$$

provenant de Λ'.

10. Si l'équation D est intégrable algébriquement, le système (E_1) est vérifié par deux fonctions rationnelles $P(x)$ et $Q(x)$. Inversement, si l'on se donne arbitrairement les deux fonctions rationnelles $P(x)$ et $Q(x)$, les relations (E_1) permettent de calculer les coefficients de l'équation linéaire du troisième ordre (D_1) la plus générale intégrable algébriquement. On a

$$b - a^2 - a' = \mathcal{F}(P, P', P'', P''', P^{\text{IV}}, Q, Q', Q'', Q''', Q^{\text{IV}}),$$
$$c - b' - 3ab + 2a(a^2 + a') = \mathcal{G}(P, P', P'', P''', P^{\text{IV}}, Q, Q', Q'', Q''', Q^{\text{IV}}),$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant deux fonctions que nous savons former, au moins dans le cas du groupe de Hesse. Nous limitant à ce cas, le type général des équations (B) intégrables algébriquement est

$$\begin{aligned}
&y''' + 3ay'' + 3(a^2 + a' + \mathcal{F})y' \\
&\quad + [\mathcal{G} + \mathcal{F}' + a'' + a(a^2 + a') + 3a\mathcal{F}]y = 0,
\end{aligned}$$

a étant une fonction rationnelle arbitraire à pôles simples et à résidus commensurables.

11. Il était possible de prévoir *a priori* que les fonctions P et Q ne figureraient dans le système (E_1) obtenu au n° 9, que par l'intermédiaire des fonctions I, J, M, N de P et Q, et de leurs dérivées premières et secondes.

Le système (E_1) résulte du changement de fonctions

$$\begin{aligned}
f(U, V) &= P(x),\\
g(U, V) &= Q(x),
\end{aligned}$$

dans le système (E). Posons

$$X = P(x), \qquad Y = Q(x);$$

les fonctions u, v de X, Y définies par

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= X,\\
g(u, v) &= Y,
\end{aligned}$$

vérifient le système

$$(\Omega)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2}\dfrac{\partial v}{\partial X} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial X^2}\dfrac{\partial u}{\partial X} = I(X, Y)\left[\dfrac{\partial u}{\partial X}\dfrac{\partial v}{\partial Y} - \dfrac{\partial u}{\partial Y}\dfrac{\partial v}{\partial X}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les relations

$$\begin{aligned}
f(U, V) &= f(u, v),\\
g(U, V) &= g(u, v)
\end{aligned}$$

entraînent cette conséquence que u et v sont liées à U et V par des relations homographiques à coefficients constants; et comme à l'intégrale (U, V), il est loisible d'en substituer une autre provenant d'une transformation homographique effectuée sur U et V, il en résulte qu'on peut associer les intégrales des systèmes (E) et (Ω) de manière que

$$u(X, Y) = U(x),$$
$$v(X, Y) = V(x),$$

X et Y étant liées à x par les relations

$$X = P(x), \qquad Y = Q(x).$$

Si donc on fait dans le système (Ω) le changement de variables

$$X = P(x), \qquad Y = Q(x),$$

où P et Q sont deux fonctions de x choisies arbitrairement, u et v deviennent des fonctions U et V de x, qui vérifient un système (E) (*voir* p. 71), soit ($\mathcal{E}$), car l'intégrale générale U(x), V(x) se déduit d'une intégrale particulière par la transformation homographique la plus générale. Pour former ce système ($\mathcal{E}$) en partant de (Ω), il suffit d'écrire

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\partial u}{\partial X} P' + \frac{\partial u}{\partial Y} Q',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et de même pour V, en allant jusqu'aux dérivées quatrièmes, et d'éliminer les dérivées $\frac{\partial u}{\partial X} \cdots, \frac{\partial^4 u}{\partial Y^4}, \frac{\partial v}{\partial X}, \cdots, \frac{\partial^4 v}{\partial Y^4}$ entre ces relations et le système (Ω) différentié deux fois.

On obtient donc de cette façon un système ($\mathcal{E}$) dont les seconds membres sont connus en fonction des coefficients de (Ω) dérivés deux fois (exprimés en X, Y) et de P', Q', ..., $P^{(\text{IV})}$, $Q^{(\text{IV})}$.

D'autre part, à notre équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre *donnée*, correspond un système (E) connu, et pour que

(E) et ($\mathcal{E}$) coïncident, il faut et il suffit que les seconds membres de (E) et de ($\mathcal{E}$) coïncident; d'où deux relations (E_1)

$$9(b - a^2 - a') = A,$$
$$27[2a(a^2 + a') - 3ab - b' + c] = B,$$

A et B étant connus en fonction des quantités I, J, M, N, de leurs dérivées premières et secondes et de P', Q', ..., $P^{(IV)}$, $Q^{(IV)}$.

Pour que l'équation du troisième ordre soit intégrable algébriquement, il faut et il suffit que le système (E_1) admette une intégrale particulière $X = P(x)$, $Y = Q(x)$ rationnelle en x (la condition relative à a étant supposée remplie).

Il est donc bien évident ainsi que les quantités I, J, M, N et leurs dérivées interviennent seules.

TROISIÈME PARTIE.

§ 1.

RECONNAITRE SI UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU TROISIÈME ORDRE EST INTÉGRABLE ALGÉBRIQUEMENT.

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients rationnels

$$(\mathrm{D}) \qquad y''' + 3ay'' + 3by' + cy = 0;$$

proposons-nous de *reconnaître si son intégrale générale est algébrique*, et, *dans le cas où elle l'est*, de *la déterminer*.

L'équation (D) doit d'abord avoir ses intégrales régulières aux environs de tout point singulier, le point ∞ compris; par suite

$$a = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\mathcal{A}_i}{x-\alpha_i},$$

$$b = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\mathcal{B}_i}{(x-\alpha_i)^2} + \frac{\mathcal{B}'_i}{x-\alpha_i},$$

$$c = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\mathcal{C}_i}{(x-\alpha_i)^3} + \frac{\mathcal{C}'_i}{(x-\alpha_i)^2} + \frac{\mathcal{C}''_i}{x-\alpha_i}.$$

Il faut, en outre, comme on l'a vu p. 73, que $e^{-\int a\,dx}$ soit algébrique, c'est-à-dire que les coefficients $\mathcal{A}_i$ soient commensurables.

Ces conditions vérifiées, le changement de fonction

$$y = \mathrm{Y}\, e^{-\int a\,dx}$$

ramène l'équation (D) à la forme

$$(\mathrm{D}') \qquad Y''' = 3\mathfrak{P}Y' + \mathfrak{Q}Y,$$

où

$$\mathfrak{P} = a^2 + a' - b \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Q} = -2a^3 + a'' + 3ab - c.$$

2. Extension des théorèmes du P. Pépin.

Soient Y_1, Y_2, Y_3 trois intégrales linéairement distinctes de (D'); posant

$$Y_2 = UY_1, \qquad Y_3 = VY_1,$$

on a (p. 72, formule F)

$$Y_1^3 = C(U'V'' - U''V')^{-1}.$$

Les diverses déterminations de U et V forment un groupe linéaire fini (α) dont je désigne par N le nombre d'opérations. On peut supposer U et V choisis de telle sorte que le *noyau* du groupe (α) soit ramené à sa forme canonique [1]; les diverses substitutions de ce faisceau s'obtiendront en multipliant U et V par les puissances d'une racine primitive d'une équation binôme telle que

$$\varepsilon^{\mu} = 1.$$

Le nombre μ est dit l'*indice* du groupe (α); c'est un diviseur de l'ordre N du groupe

$$N = n\mu.$$

On connaît, d'après les travaux cités de M. Jordan, les nombres N et μ relatifs à chaque groupe fini.

Les diverses valeurs de $U'V'' - U''V'$ relatives aux substitutions du noyau sont racines d'une équation binôme de degré μ, ou celles de Y_1

(1) *Voir* C. Jordan, *Atti della R. Accademia di Napoli,* vol. VIII, n° 11, p. 15. *Voir* aussi les Mémoires énumérés p. 25.

d'une équation binôme de degré 3μ. L'équation algébrique qui définit Y_1 sera donc de degré $3N$ ou $3\mu n$, et ne contiendra que les puissances de $Y^{3\mu}$, c'est-à-dire qu'elle sera de la forme

$$Y^{3\mu n} + p_1 Y^{3\mu(n-1)} + p_2 Y^{3\mu(n-2)} + \ldots + p_{n-1} Y^{3\mu} + p_n = 0,$$

les coefficients p étant des fonctions rationnelles de x.

On est ainsi conduit à énoncer les théorèmes suivants, extension de ceux du P. Pépin rappelés dans l'Introduction :

Si l'équation (D′) *a son intégrale générale algébrique, cette intégrale est de la forme*

$$Y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3,$$

Y_1, Y_2, Y_3 *étant trois racines, linéairement distinctes, de l'équation*

$$\text{(H)} \qquad Y^{\mathfrak{N} n} + p_1 Y^{\mathfrak{N}(n-1)} + \ldots + p_{n-1} Y^{\mathfrak{N}} + p_n = 0,$$

les nombres $\mathfrak{N}$ *et* n *ayant pour valeurs l'un des systèmes contenus dans le Tableau suivant :*

Nos	Indication du groupe.	Ordre N.	Indice μ.	$\mathfrak{N}$.	n.
1	Groupe de M. Valentiner	360	3	9	120
2	Groupe de M. Klein	168	7	21	24
3	Groupe de Hesse	216	3	9	72
4	Groupe de la cubique harmonique et de sa hessienne	72	3	9	12
5	Groupe de la cubique harmonique	36	3	9	24
6	Groupe icosaédrique ternaire	60	5	15	12
7	Groupe tétraédrique binaire	12	3	9	4
8	Groupe octaédrique »	24	4	12	6
9	Groupe icosaédrique »	60	5	15	12
10	Groupes analogues à ceux du dièdre	3μ	Indéterminé.	3μ	3

Je laisse en dehors de cette énumération les groupes monômes, analogues aux groupes cycliques, pour lesquels les intégrales particulières Y_1, Y_2, Y_3 sont des racines d'équations binômes :

$$Y_1^\alpha = \varphi_1(x), \qquad Y_2^\beta = \varphi_2(x), \qquad Y_3^\gamma = \varphi_3(x),$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des fonctions rationnelles de x.

3. Méthode de J. Liouville.

Le problème est ramené à reconnaître si l'équation (D') admet pour intégrales les racines de l'équation (H), $\mathfrak{N}$ et n étant donnés (par exemple pour le groupe de Hesse qui nous occupe, $\mathfrak{N} = 9$ et $n = 72$) et les coefficients p_k étant des fonctions rationnelles supposées réduites à leur plus simple expression. La méthode des coefficients indéterminés permettrait de vérifier s'il en est ainsi, à l'aide de calculs purement algébriques, sous condition de connaître une limite supérieure du degré des fractions p_k en x.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_k$, k solutions de (H) différant entre elles autrement que par un facteur constant (1); formons l'équation différentielle à laquelle satisfait le produit

$$Z_k = y_1, y_2, \ldots, y_k,$$

ou, ce qui revient au même, l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la fonction

$$Z_k = y_1^k.$$

Cette équation est d'ordre

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2};$$

elle a pour points singuliers ceux de l'équation (D) donnée, et elle doit être vérifiée par la fonction

$$Z_k = \sqrt[\mathfrak{N}]{p_k(x)}.$$

On cherchera donc (2) les intégrales de l'équation différentielle en Z_k,

---

(1) $y_1, y_2, \ldots, y_k$ forment, selon l'expression de M. Fuchs, un *système réduit* de racines.

(2) J. Liouville, *Journal de l'École Polytechnique,* cahier XXII, p. 154 et suivantes. A propos de la formation de l'équation différentielle en Z_k, *voir* aussi le Mémoire *Sur les équations différentielles linéaires* de M. P. Appell (*Annales de l'École Normale supérieure;* 1881).

de la forme

$$\sqrt[\mathfrak{N}]{\frac{R(x)}{S(x)}},$$

$R(x)$ et $S(x)$ étant des polynômes. $S(x)$ ne peut admettre pour racines que les points singuliers de (D'); la formation des équations fondamentales déterminantes de l'équation en Z_k, relatives à ces points, fait connaître l'ordre maximum de ces racines, et par suite le degré maximum σ de $S(x)$. La considération du point ∞ donne une limite supérieure ρ du degré de $R(x)$; soit, en effet, λ l'ordre maximum du point ∞ pour l'équation donnée (D'); l'ordre d'infinitude de $p_k(x)$, ou de $\frac{R(x)}{S(x)}$ pour $x=\infty$, doit être inférieur à $\mathfrak{N}(n-k)\lambda$, et par suite

$$\rho < \sigma + \mathfrak{N}(n-k)\lambda.$$

Le degré des termes des fractions rationnelles $p_k(x)$ étant ainsi limité, la question est achevée.

Cependant, d'une part, ces limitations de degré sont très pénibles, à cause de la formation des équations différentielles successives en Z_k, dont l'ordre, pour le groupe de Hesse, atteint $\frac{73 \times 74}{2} = 2701$.

D'autre part, cette méthode est inapplicable au cas des groupes analogues aux groupes du diédre (cas n° **10**), le nombre n pouvant alors dépasser toute limite.

4. Méthode de M. Painlevé.

La méthode suivante, due à M. Painlevé [1], résout le problème de la manière la plus brève, et sans laisser de cas d'exception. Elle peut en outre être étendue au cas où les coefficients de l'équation (D) donnée sont algébriques.

Si (H) est intégrale de l'équation (D'), $y^{\mathfrak{N}}$ est une fonction algébrique

---

[1] P. Painlevé, *Sur les équations différentielles linéaires* (*Comptes rendus*, t. CV; 4 juillet 1887).

susceptible de prendre n valeurs, et il en est évidemment de même de

$$u = \frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\mathfrak{N}} \frac{(Y^{\mathfrak{N}})'}{Y^{\mathfrak{N}}}.$$

De plus, l'intégrale générale étant algébrique, u n'aura que des pôles simples, à résidus commensurables (le point ∞ compris).

Recherchons s'il en est ainsi. Soit

$$(\mathrm{H}_1) \qquad P_n u^n + P_{n-1} u^{n-1} + P_{n-2} u^{n-2} + \ldots + P_1 u + P_0 = 0$$

la relation qui définirait u. Supposons qu'on sache limiter le degré en x des coefficients $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0$. La méthode des coefficients indéterminés permet alors de reconnaître si l'équation différentielle du second ordre, analogue à l'équation de Riccati, vérifiée par la fonction $u = \frac{Y'}{Y}$ et déjà rencontré p. 73 :

$$u'' + 3uu' + u^3 = 3\mathfrak{P}u + \mathfrak{Q}$$

est vérifiée par une relation de la forme (H_1); elle fait de plus connaître cette relation quand elle existe. L'intégration de l'équation (D) est alors ramenée à la quadrature

$$\frac{Y'}{Y} = \mathcal{A}(x),$$

$\mathcal{A}(x)$ désignant une fonction algébrique connue de x, à n valeurs, et le problème revient à reconnaître si la différentielle algébrique $\mathcal{A}(x)\,dx$ s'intègre par un seul logarithme. C'est le problème d'Abel.

Revenons donc à la limitation du degré de $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0$ en x.

Si l'on détermine une limite supérieure ϖ du degré de P_n en x, P_{n-1}, $P_{n-2}, \ldots, P_1, P_0$ seront de degrés inférieurs à $(\varpi + n)$.

Soit, en effet, M le degré maximum des polynômes P. Changeons dans l'équation (H_1) x en $\frac{1}{X}$; l'équation obtenue, mise sous forme entière, s'écrit

$$Q_n(X) X^{M-\alpha_n} u^n + Q_{n-1}(X) X^{M-\alpha_{n-1}} u^{n-1} + \ldots + Q_0(X) X^{M-\alpha_0} = 0,$$

α_i étant le degré de $P_i(x)$, l'un des exposants $M - \alpha_i$ étant nul et les polynômes Q n'admettant pas X en facteur. Comme $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont infinis d'ordre *un* au plus pour $X = 0$, leur produit sera infini d'ordre n au plus, la somme de leurs produits $(n-1)$ à $(n-1)$ d'ordre $(n-1)$ au plus, et ainsi de suite. Donc

$$\begin{array}{lcl} \alpha_0 - \alpha_n < n & \text{ou} & \alpha_0 < \alpha_n + n, \\ \alpha_1 - \alpha_n < n - 1 & & \alpha_1 < \alpha_n + n - 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ainsi la question est réduite à la recherche d'une limite supérieure du degré en x du polynôme $P_n(x)$. Considérons pour cela le produit de n valeurs distinctes (ne différant pas seulement par un facteur constant) de

$$y_i = e^{\int_{x_0}^{x} u_i\,dx},$$

c'est-à-dire

$$y_1 y_2 \ldots y_n = e^{\int_{x_0}^{x} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\,dx} = \sqrt[\mathfrak{N}]{\frac{Q(x)}{R(x)}},$$

en désignant par $\frac{Q(x)}{R(x)}$ le terme p_n indépendant de y dans l'équation (H).

Les zéros de $P_n(x)$ sont :

1° Ou bien des points $x = a$ singuliers de l'équation donnée, points en nombre connu m;

2° Ou bien des points tels que $x = b$, annulant $Q(x)$ et étant des zéros entiers de $y_1, y_2, \ldots$ ou y_n [car, si $x = b$ n'est pas un point singulier de l'équation proposée (D'), les intégrales sont holomorphes dans le domaine du point $x = b$].

Cherchons une limite supérieure M du nombre des points b. A cet effet, remarquons que les zéros de $R(x)$ sont des points singuliers $x = a$, et l'on sait calculer leur ordre maximum; si donc on écrit le produit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sous la forme

$$y_1 y_2 \ldots y_n = \frac{\Pi(x-a)^{\alpha}.\ \Pi(x-b)^{\beta}}{\Pi(x-a')^{\alpha'}},$$

où les exposants α et α' sont fractionnaires positifs, et les exposants β entiers positifs, on connaît une limite supérieure de $\Sigma\alpha'$. De plus, on sait l'ordre maximum r de chacune des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour $\frac{1}{x} = X = 0$; leur produit étant d'ordre inférieur ou au plus égal à nr, on a l'inégalité

$$\Sigma\beta + \Sigma\alpha - \Sigma\alpha' < nr,$$

et, *a fortiori*,

$$\Sigma\beta < nr + \Sigma\alpha'.$$

La connaissance de $\Sigma\alpha'$ et de r, qui résulte de la formation des équations déterminantes fondamentales de l'équation (D′) pour ses divers points singuliers, le point ∞ compris, fait connaître une limite supérieure de $\Sigma\beta$ et, par suite, une limite supérieure M du nombre des points $x = b$.

Il en résulte que le degré de $P_n(x)$ est au plus égal à

$$n(M + m),$$

puisque les pôles de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont du premier ordre.

Le problème proposé est donc bien ramené à de simples calculs algébriques.

5. Extension de la méthode de M. Klein relative a l'équation du second ordre.

Un troisième procédé, dont l'indication est aussi due à M. Painlevé, généralise élégamment la méthode de M. Klein signalée dans l'Introduction. Il consiste à *reconnaître s'il existe un système de fonctions rationnelles* $P(x)$ et $Q(x)$ *vérifiant le système d'équations différentielles simultanées du quatrième ordre* (E_1) *formé dans le* § 4 *de la seconde Partie.*

Pour que l'intégrale de (D) soit algébrique, il faut et il suffit, en effet, comme on l'a vu (la condition relative à a étant supposée vérifiée), que l'intégrale du système (E) soit algébrique, autrement dit que, pour un groupe fini (α), les équations (E_1) admettent un système d'intégrales

P, Q rationnelles. Nous allons reconnaître s'il en est ainsi pour le groupe de Hesse.

Ces fonctions une fois connues, l'intégrale générale de l'équation (D) sera définie par les équations

$$\begin{gathered} f(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \mathrm{P}(x), \\ g(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \mathrm{Q}(x), \\ y^3(\mathrm{U}'\mathrm{V}'' - \mathrm{U}''\mathrm{V}')\, e^{3\int a\,dx} = (\alpha\mathrm{U} + \beta\mathrm{V} + \gamma)^3, \end{gathered}$$

f et g étant les fonctions invariantes fondamentales du groupe de Hesse, et α, β, γ des constantes arbitraires. Or, on a vu que

$$\mathrm{U}'\mathrm{V}'' - \mathrm{U}''\mathrm{V}' = \nabla[\mathrm{P}'\mathrm{Q}'' - \mathrm{P}''\mathrm{Q}' + 3\mathrm{P}'\mathrm{Q}'(\mathrm{N}\mathrm{Q}' - \mathrm{M}\mathrm{P}') + \mathrm{J}\mathrm{Q}'^3 - \mathrm{I}\mathrm{P}'^3]$$

et

$$\nabla = \frac{1}{\Delta} = -\frac{\mathrm{A}^6}{2^5.3^5.\mathrm{C}^2\mathrm{K}}.$$

La détermination de l'intégrale générale est donc un problème d'élimination qui n'offre que des difficultés algébriques : on a à éliminer U et V entre les équations

$$\begin{gathered} \mathrm{A}^2\mathrm{P}(x) + 3\mathrm{B} = 0, \\ \mathrm{A}^3\mathrm{Q}(x) - 2\mathrm{D} = 0, \\ y^3\mathrm{A}^6[\mathrm{P}'\mathrm{Q}'' - \mathrm{P}''\mathrm{Q}' + 3\mathrm{P}'\mathrm{Q}'(\mathrm{N}\mathrm{Q}' - \mathrm{M}\mathrm{P}') + \mathrm{J}\mathrm{Q}'^3 - \mathrm{I}\mathrm{P}'^3]\, e^{3\int a\,dx} \\ = \mathrm{C}^2\mathrm{K}(\alpha_1\mathrm{U} + \beta_1\mathrm{V} + \gamma_1)^3, \end{gathered}$$

α_1, β_1, γ_1 étant les constantes d'intégration; A, B, C, D, K les fonctions définies au § **2** de la première Partie, où l'on remplace u, v, w par U, V, 1.

La recherche des fonctions P et Q pourra se faire par la méthode des coefficients indéterminés, à l'aide d'opérations algébriques, dès que l'on aura trouvé une limite supérieure du degré en x des termes des fonctions P et Q. Si les équations de conditions fournies par l'identification présentent quelque impossibilité, c'est que le système (E_1) n'admettra pas d'intégrales rationnelles pour le groupe de Hesse.

La question est ainsi réduite à la limitation des degrés de P *et de* Q.

C'est là la difficulté qu'il s'agit de lever.

6. L'équation (D) ayant toutes ces intégrales algébriques, les racines des équations déterminantes fondamentales relatives aux points singuliers α_i et au point ∞ devront toutes être *rationnelles et distinctes* (1). Il nous sera permis de supposer, pour plus de simplicité, que le point $x = \infty$ est un point ordinaire; car, s'il en était autrement, il suffirait de poser

$$x = \omega + \frac{1}{X},$$

ω étant un point quelconque non singulier.

Pour le point α_i, l'équation déterminante est

$$(1) \qquad r(r-1)(r-2) + 3\mathcal{A}_i r(r-1) + 3\mathcal{B}_i r + \mathcal{C}_i = 0.$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{X}$ dans l'équation (D), le point $X = 0$ doit être un point ordinaire, ce qui entraîne entre les coefficients les relations

$$\sum \mathcal{A}_i = 2, \qquad \sum \mathcal{B}_i = 2,$$
$$\sum \mathcal{C}_i = 0, \qquad \sum \mathcal{B}'_i = 0, \qquad \sum \mathcal{C}'_i = 0, \qquad \sum \mathcal{C}''_i = 0.$$

La somme des racines de l'équation (1) est : $3(1 - \mathcal{A}_i)$, et, par suite, la somme des racines des équations déterminantes relatives à tous les points singuliers, en nombre m, est

$$3(m-2) \quad (^2).$$

7. L'introduction des racines des équations déterminantes permet de donner au premier des invariants de M. Painlevé une forme dont on tirera parti plus loin. On a

$$3(a^2 + a' - b) = 3\sum \frac{\mathcal{A}_i^2 - \mathcal{B}_i - \mathcal{A}_i}{(x-\alpha_i)^2} + \sum \frac{K_i}{x - \alpha_i}.$$

---

(1) *Voir*, par exemple, J. TANNERY, Thèse, 3e Partie (*Annales de l'École Normale*, 1875).

(2) C'est un cas particulier d'un résultat bien connu. *Voir* C. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, p. 206 (2e édition).

Or

$$r' + r'' + r''' = 3(1 - \mathcal{A}_i),$$
$$r'r'' + r''r''' + r'''r' = 2 - 3\mathcal{A}_i + 3\mathcal{B}_i,$$
$$r'r''r''' = \mathcal{C}_i.$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i^2 - \mathcal{B}_i - \mathcal{A}_i &= (\mathcal{A}_i - 1)^2 - 1 + (\mathcal{A}_i - \mathcal{B}_i) \\ &= \frac{(r' + r'' + r''')^2 - 9 + 3[2 - (r'r'' + r''r''' + r'''r')]}{9} \\ &= \frac{(r' - r'')^2 + (r'' - r''')^2 + (r''' - r')^2 - 6}{18}.\end{aligned}$$

Les termes quadratiques de la décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $3(a^2 + a' - b)$ ont, par suite, pour expression

$$-\sum \frac{1 - \dfrac{(r' - r'')^2 + (r'' - r''')^2 + (r''' - r')^2}{6}}{(x - \alpha_i)^2};$$

c'est l'extension de la forme donnée par M. Klein à l'invariant schwarzien.

Les termes cubiques relatifs au second invariant

$$[2a(a^2 + a') - 2ab - b' + c]$$

s'expriment d'une manière un peu plus compliquée en fonction des mêmes racines; mais je n'aurai pas à les utiliser.

8. Si, dans une intégrale de (D),

$$y = \mathcal{F}(x).$$

on pose $x = \frac{x_2}{x_1}$, y sera une fonction homogène de degré zéro de x_1 et x_2. Faisons le changement de fonction

$$y = (x_1 - \alpha_1 x_2)^{\sigma_1}(x_1 - \alpha_2 x_2)^{\sigma_2} \ldots (x_1 - \alpha_m x_2)^{\sigma_m}\,\Pi(x_1, x_2),$$

où les exposants $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sont des nombres rationnels; $\Pi(x_1, x_2)$ sera une fonction homogène de degré

$$\varpi = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m).$$

Soit r_i''' la plus petite racine de l'équation (1),

$$r_i''' < r_i'' < r_i'.$$

Si l'on prend $\sigma_i = r_i'''$, la fonction Π, relative à une intégrale quelconque admettra les facteurs $(x_1 - \alpha_i x_2)$ avec les exposants $r_i'' - r_i'''$, $r_i' - r_i'''$ ou 0. Ces exposants sont positifs ou nuls, et en aucun point la fonction Π ne deviendra infinie. C'est ce que M. Klein appelle une *forme transcendante entière* de x_1 et x_2. Toutes les formes Π ont pour degré

$$\varpi = -\sum r_i'''$$

ou

$$\varpi = \frac{\Sigma(r_i'' - r_i''') + \Sigma(r_i' - r_i''') - 3(m-2)}{3},$$

en tenant compte de la relation donnée à la fin du n° **6**.

La décomposition en éléments simples de la fonction $3(b - a' - a^2)$, dont je suppose calculés les termes quadratiques

$$\sum \frac{M_i}{(x-\alpha_i)^2},$$

permet de déterminer une limite supérieure de ϖ. On a en effet

$$(r_i' - r_i'')^2 + (r_i'' - r_i''')^2 + (r_i''' - r_i')^2 = 6[M_i + 1],$$

et, par suite,

$$\sum(r_i' - r_i''') + \sum(r_i'' - r_i''') < 2\sum\sqrt{2M_i + 1)}$$

ou

$$\varpi < \frac{2}{3}\sum\sqrt{2(M_i + 1)} - (m-2).$$

9. Cela posé, considérons les relations

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{B(U,V,1)}{A^2(U,V,1)},$$
$$\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{D(U,V,1)}{A^3(U,V,1)},$$

où

$$U = \frac{y_2}{y_1}, \qquad V = \frac{y_3}{y_1}.$$

P_1 et P_2, Q_1 et Q_2 sont supposés sans facteurs communs. Soient Π_1, Π_2, Π_3 les formes entières (sans infinis à distance finie) correspondant aux intégrales y_1, y_2, y_3. Elles sont d'un même degré d'homogénéité ϖ calculé plus haut. On a

$$U = \frac{\Pi_2}{\Pi_1}, \qquad V = \frac{\Pi_3}{\Pi_1}.$$

Rendons homogènes les relations ci-dessus en remplaçant x par $\frac{x_1}{x_2}$; il vient d'abord

$$\frac{P'_1(x_1, x_2)}{P'_2(x_1, x_2)} = \frac{B(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)}{A^2(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)}.$$

$B(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)$ et $A^2(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)$ sont du douzième degré en Π_1, Π_2, Π_3 et sont proportionnels aux polynômes $P'_1(x_1, x_2)$ et $P'_2(x_1, x_2)$. Mais Π_1 Π_2, Π_3 étant des formes entières de x_1, x_2, $B(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)$ et $A^2(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)$ en sont aussi, et ces dernières sont nécessairement des formes rationnelles de x_1 et x_2. De même que Π_1, Π_2, Π_3, elles sont sans infinis à distance finie. Il s'ensuit qu'elles sont non seulement proportionnelles, mais bien identiques aux polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ rendus homogènes, $P'_1(x_1, x_2)$ et $P'_2(x_1, x_2)$.

La considération du degré d'homogénéité montre alors que le *degré des polynômes* P *est* 12ϖ.

De même, *le degré des polynômes* Q *est* 18ϖ.

Une limite supérieure de chacun de ces degrés se déduit de la décomposition de l'invariant de M. Painlevé, à savoir :

$$8\sum\sqrt{2(M_i+1)} - 12(m-2),$$

$$12\sum\sqrt{2(M_i+1)} - 18(m-2).$$

Si l'équation est donnée numériquement, comme les racines des équations déterminantes sont commensurables, on sait les calculer et il y a alors avantage à prendre la valeur exacte de ϖ : $-\Sigma r'''_i$.

En résumé, quelque méthode qu'on adopte entre les deux dernières, les calculs seront sans aucun doute très compliqués : on a seulement voulu montrer que le problème est susceptible d'une solution complète.

---

§ 2.

RECONNAITRE SI UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (A) EST INTÉGRABLE ALGÉBRIQUEMENT.

1. Un système (A) d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du second ordre, à coefficients rationnels, étant donné, il s'agit de *reconnaître si son intégrale générale est algébrique* et de *la former* dans le cas de l'affirmative.

Il faut d'abord que

$$e^{-\int (a_1+b_2)dx+(b_1+c_2)dy}$$

soit algébrique, et alors nécessairement de la forme $\sqrt[p]{\Psi(x,y)}$, $\Psi(x,y)$ étant une fonction rationnelle de x et de y, et p un entier.

Je suppose cette condition vérifiée, et le système ramené à sa forme canonique. On s'assure en outre que les relations d'intégrabilité sont identiquement satisfaites.

2. Étudions maintenant la nature des intégrales du système (A) dans le voisinage d'une ligne singulière

$$\varphi(x,y)=0,$$

$\varphi(x,y)$ étant un facteur irréductible figurant dans les dénominateurs des coefficients a, b, c. Cette question a fait l'objet de plusieurs Mémoires de M. Horn (1) et d'une courte Note de M. Fuchs (2). Je me bornerai aux

(1) J. Horn, 1° *Ueber ein System linearer partieller Differentialgleichungen* (*Acta Mathematica*, t. XII, p. 113).

2° *Ueber System linearer Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen* (*Habilitationsschrift der Universität Freiburg* i. B. 1890).

Un extrait de cette Thèse, où l'auteur étend au système (A) la théorie devenue classique de M. Fuchs, a été publié dans le Tome XVI des *Acta Mathematica*, p. 337-347.

(2) L. Fuchs, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1892, S. 157.

indications indispensables pour la suite, renvoyant à ces travaux pour plus de détails.

Des deux premières équations du système (A), où l'on a par hypothèse

$$a_1 + b_2 = 0, \qquad b_1 + c_2 = 0,$$

on déduit l'équation du troisième ordre

$$(\mathrm{U}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial \log a_2}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left[a_3 + b_2^2 - a_2 c_2 + a_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial x} \\ &\qquad - \left[a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_3}{a_2}\right)\right] z = 0, \end{aligned} \right.$$

qui définit z comme fonction de x seul, y étant considéré comme constant.

Soit y_0 une ordonnée quelconque ne passant pas par un point singulier de la courbe $\varphi = 0$, ni par un point commun à cette courbe et à une autre ligne singulière, ni par un point où la tangente soit parallèle à Ox. Soit $a_i(y_0)$ une racine de l'équation $\varphi(x, y_0) = 0$; si l'intégrale du système (A) est algébrique, il en est de même pour l'équation (U) en x, et, par suite, cette dernière a ses intégrales régulières dans le domaine du point $a_i(y_0)$. C'est dire que cette équation (U) est de la forme

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\mathrm{M}_1(x, y_0)}{x - a_i(y_0)}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{M}_2(x, y_0)}{[x - a_i(y_0)]^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\mathrm{M}_3(x, y_0)}{[x - a_i(y_0)]^3} z = 0,$$

$\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ n'étant pas infinies pour $x = a_i$. De plus, les racines de l'équation déterminante fondamentale relative au point $x = a_i$

$$(\mathrm{V}) \quad \left\{ \begin{aligned} &r(r-1)(r-2) + \mathrm{M}_1[a_i(y_0), y_0].\, r(r-1) \\ &\qquad + \mathrm{M}_2[a_i(y_0), y_0].\, r + \mathrm{M}_3[a_i(y_0), y_0] = 0 \end{aligned} \right.$$

sont commensurables et distinctes. Mais le groupe de l'équation (U) coïncidant avec celui du système (A), ses substitutions sont indépendantes de y; par suite, les racines de l'équation déterminante (V) sont indépendantes de y_0 : ses coefficients, qui sont des fonctions rationnelles du point de la courbe algébrique $\varphi = 0$, ont donc une valeur indépendante de y_0.

En outre, $\varphi(x, y)$ étant irréductible, l'équation (V) a les mêmes racines, quelle que soit la détermination $a_i(y_0)$ choisie. On conclut de là que si l'on désigne par r', r'', r''' les racines de l'équation (V), dites *exposants de la courbe singulière* $\varphi = 0$, le système donné (A) admet un système fondamental d'intégrales de la forme

$$\varphi^{r'}(x,y).\zeta', \quad \varphi^{r''}(x,y).\zeta'', \quad \varphi^{r'''}(x,y).\zeta''',$$

ζ', ζ'', ζ''' étant des fonctions uniformes et finies dans le domaine des points de la courbe $\varphi = 0$.

M. Horn a établi que cette circonstance ne pouvait se présenter que dans le cas où le système (A) est de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \varphi^{h+1} r &= A_1 p + A_2 q + A_3 z, \\ \varphi^{h+1} s &= B_1 p + B_2 q + B_3 z, \\ \varphi^{h+1} t &= C_1 p + C_2 q + C_3 z, \end{aligned}\right.$$

les nouveaux coefficients ne devenant pas infinis pour les points de la courbe $\varphi = 0$, et A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 n'étant pas tous divisibles par φ. On s'assurera que le système donné présente cette forme [1].

Pour que les intégrales de l'équation (U) soient régulières aux environs de la courbe singulière $\varphi = 0$, il faut et il suffit que ses coefficients successifs contiennent au plus en dénominateur φ, φ^2 et φ^3. Le premier réalise sûrement cette condition; quant aux deux autres, si on les exprime en fonction des coefficients $A_1, \ldots, B_3$, ils conduisent aux identités de

---

(1) Nous déduirons de là une remarque relative au système particulier (A_2) formé p. 56; l'un au moins des coefficients de z, à savoir :

$$2(M^2 + IN) - \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y}, \quad IJ - MN + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}, \quad 2(N^2 + JM) - \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial J}{\partial x},$$

se réduit au quotient par $(x + y + 1)(4x^3 + 27y^2)$ d'un polynôme du second degré en x et y.

condition

$$\left[A_3 + A_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\right]\varphi^{h+1} + B_2^2 - A_2 C_2 \equiv \Phi(x,y)\varphi^{2h},$$
$$A_2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_3}{A_2}\right)\cdot\varphi^{h+1} + A_2 B_3 - A_3 B_2 \equiv \Psi(x,y)\varphi^{2h-1},$$

$\Phi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ désignant deux fonctions rationnelles qui ne contiennent pas $\varphi(x,y)$ en dénominateur. On vérifiera si ces conditions sont satisfaites, et en même temps on aura les coefficients de l'équation déterminante

$$r(r-1)(r-2) + \alpha r(r-1) + \beta r + \gamma = 0$$

relative à la courbe $\varphi = 0$: en effet, α est l'exposant de la puissance de φ, qui est en facteur dans le dénominateur de a_2; quant à β et γ, ce sont les valeurs que prennent, pour un point quelconque de la courbe $\varphi = 0$, les expressions

$$\frac{\Phi(x,y)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\Psi(x,y)}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^3}.$$

J'ai déjà dit que les racines de cette équation doivent être commensurables et distinctes.

Dans le § **12** de la thèse citée tout à l'heure, M. Horn indique un procédé pour former directement l'équation déterminante sans passer par l'équation du troisième ordre (U); mais il nécessite des calculs plus longs que la marche exposée ci-dessus.

Bien entendu, si $\varphi = 0$ était indépendant de x, on aurait recours à l'équation linéaire du troisième ordre définissant z comme fonction de y seul, x étant regardé comme constant.

3. Après s'être assuré de la régularité des intégrales dans le domaine des points des lignes singulières et de la condition imposée aux exposants de ces lignes, on abordera le problème proposé par l'une des trois méthodes exposées dans le Chapitre précédent.

Quelle sera d'abord la forme en z de l'équation intégrale?

Soient z_1, z_2, z_3 trois intégrales linéairement distinctes de (A); posant

$$z_2 = uz_1, \qquad z_3 = vz_1,$$

on a (page 46)

$$z_1^3 = C\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1}.$$

Par un raisonnement absolument identique à celui qui a été employé à propos de l'équation linéaire du troisième ordre, on arrive au résultat suivant :

Si le système (A_1) *a son intégrale générale algébrique, cette intégrale est de la forme*

$$z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3,$$

z_1, z_2, z_3 *étant trois racines, de rapports dépendants de* x *et* y, *de l'équation*

$$z^{\mathfrak{N}n} + q_1 z^{\mathfrak{N}(n-1)} + \ldots + q_{n-1} z^{\mathfrak{N}} + q_n = 0,$$

les nombres $\mathfrak{N}$ *et* n *étant pris parmi les systèmes donnés page* 90, *et les fonctions* q_1, ..., q_n *étant rationnelles en* x *et* y.

On saura dès lors reconnaître, par la méthode des coefficients indéterminés, si le système donné a son intégrale générale algébrique et correspondant à un groupe linéaire fini donné, dès que le degré en x et en y des coefficients q sera limité.

En considérant successivement x et y comme constantes, on pourra limiter ces degrés par l'application de la méthode de Liouville à l'équation linéaire du troisième ordre (U) et à l'équation analogue relative à y.

On pourra aussi traiter ces équations par la méthode de M. Painlevé; mais les calculs seront moins longs et plus symétriques en employant le procédé suivant, extension de celui de M. Klein.

4. Pour que l'intégrale générale du système (A) soit algébrique, il faut et il suffit que, pour un groupe fini (α), le système (B_1) formé pages 59, où l'on remplace ξ et η par x et y, admette un système d'intégrales $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ rationnelles.

On vérifiera s'il en est ainsi dans le cas du groupe de Hesse, en suivant la même marche que pour l'équation linéaire du troisième ordre.

Introduisons les variables homogènes x_1, x_2, x_3 en posant

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \qquad y = \frac{x_3}{x_1}.$$

Une intégrale quelconque du système (A) :

$$z = \mathscr{F}(x, y) = \mathscr{F}\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$$

est une fonction homogène de x_1, x_2, x_3, de degré zéro.

Soit

$$\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation homogène irréductible d'une courbe singulière du système $(i = 1, 2, \ldots, m)$, de degré p_i. Faisons le changement de fonction :

$$z = \varphi_1^{\rho_1}(x_1, x_2, x_3) \ldots \varphi_m^{\rho_m}(x_1, x_2, x_3) \Pi(x_1, x_2, x_3),$$

$\rho_1, \ldots, \rho_m$ étant des nombres commensurables; $\Pi(x_1, x_2, x_3)$ sera une fonction homogène de degré

$$\varpi = -\sum p_i \rho_i.$$

Désignons par r'_i, r''_i, r'''_i les racines de l'équation déterminante relative à la courbe $\varphi_i = 0$, supposées rangées par ordre de grandeur décroissante

$$r'''_i < r''_i < r'_i.$$

Si l'on prend

$$\rho_i = r'''_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

les fonctions $\Pi(x_1, x_2, x_3)$, qui correspondent aux diverses intégrales du système (A), resteront finies pour toutes les valeurs finies de x_1, x_2, x_3.

Cela posé, soient Π_1, Π_2, Π_3 les fonctions Π relatives aux intégrales

z_1, z_2, z_3 considérées plus haut. Les relations homogènes

$$\frac{B(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)}{A^2(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)} = \frac{P_1(x_1, x_2, x_3)}{P_2(x_1, x_2, x_3)},$$

$$\frac{D(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)}{A^3(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)} = \frac{Q_1(x_1, x_2, x_3)}{Q_2(x_1, x_2, x_3)},$$

où $\frac{P_1}{P_2}$ et $\frac{Q_1}{Q_2}$ sont les expressions rendues homogènes de P et Q, permettent d'évaluer le degré des termes de P et Q. En effet,

$$B(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1) \quad \text{et} \quad A^2(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_1)$$

sont des formes du douzième degré en Π_1, Π_2, Π_3, respectivement proportionnelles à P_1 et P_2; après substitution des valeurs de Π_1, Π_2, Π_3, elles deviennent des fonctions nécessairement rationnelles de x_1, x_2, x_3 et sans infinis, donc sans dénominateurs; elles coïncident, par suite, avec les polynômes P_1 et P_2 et l'on a pour degré de ces polynômes

$$-12\sum p_i r_i'''.$$

Le degré des polynômes Q_1 et Q_2 est

$$-18\sum p_i r_i'''.$$

5. Le degré des fonctions P et Q étant connu, la méthode des coefficients indéterminés, appliquée au système (B_1), déterminera ces fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. Lorsqu'on les aura obtenues, l'intégrale générale du système (A) sera définie par les équations

$$A^2 P(x, y) + 3B = 0,$$

$$A^3 Q(x, y) - 2D = 0,$$

$$A^6 z^3 - (\alpha u + \beta v + \gamma)^3 C^2 K e^{\int (a_1+b_2)dx + (b_1+c_2)dy} = 0,$$

α, β, γ étant les constantes d'intégration et A, B, C, D, K les fonctions connues de u et v $(w = 1)$.

Il resterait à éliminer u et v entre ces trois relations.

§ 3.

ÉQUIVALENCE DE CERTAINS SYSTÈMES AU POINT DE VUE DE L'INTÉGRATION.

1. Considérons l'équation de Riccati qu'un changement linéaire de fonction ramène à la forme canonique

$$(1) \qquad y' + y^2 + \mathrm{M}(x) = 0.$$

Si l'on pose

$$y = \frac{z'}{z},$$

cette équation se transforme en une équation linéaire et homogène du second ordre

$$(2) \qquad z'' + \mathrm{M}(x)z = 0,$$

dont le rapport t de deux intégrales vérifie l'équation de Schwarz

$$(3) \qquad \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2 = 2\,\mathrm{M}(x).$$

M. Painlevé a démontré [1] que les trois équations (1), (2), (3) sont rigoureusement équivalentes au point de vue de l'intégration : quand on sait intégrer l'une, on sait aussi intégrer les deux autres.

Cette propriété est susceptible d'une double généralisation que M. Painlevé a bien voulu me signaler et qui se rattache de très près aux questions traitées dans ce Travail.

2. Il s'agira d'abord des systèmes différentiels ordinaires dont l'inté-

---

(1) P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles,* professées à Stockholm (1895); p. 230 et p. 29-30.

grale générale est de la forme

$$y = \frac{\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + f_3(x)}{\alpha \varphi_1(x) + \beta \varphi_2(x) + \varphi_3(x)},$$

$$z = \frac{\alpha \psi_1(x) + \beta \psi_2(x) + \psi_3(x)}{\alpha \varphi_1(x) + \beta \varphi_2(x) + \varphi_3(x)},$$

α et β étant deux constantes arbitraires, les fonctions f, φ, ψ étant données.

La formation d'un tel système s'effectuera en éliminant α et β entre les équations intégrales et les équations qui s'en déduisent par dérivation. On obtient ainsi d'abord

$$\begin{vmatrix} y\varphi_1 - f_1 & y\varphi_2 - f_2 & y\varphi_3 - f_3 \\ z\varphi_1 - \psi_1 & z\varphi_2 - \psi_2 & z\varphi_3 - \psi_3 \\ y\varphi'_1 + y'\varphi_1 - f'_1 & y\varphi'_2 + y'\varphi_2 - f'_2 & y\varphi'_3 + y'\varphi_3 - f'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien en développant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} y^2 + \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} yz$$
$$+ \left\{ \begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} \right\} y - \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

équation de la forme

$$\text{(I)} \qquad y' + Ay^2 + Byz + Cy + Dz + F = 0.$$

On obtiendrait, par un calcul tout semblable, la seconde équation du système sous la forme

$$\text{(I)} \qquad z' + Bz^2 + Ayz + C_1 y + D_1 z + F_1 = 0.$$

Le système (I) dépend de huit fonctions de x. Par un changement linéaire de fonctions

$$y = \lambda\, Y + \mu\, Z + \nu,$$
$$z = \lambda_1 Y + \mu_1 Z + \nu_1,$$

dont les coefficients sont des fonctions de x convenablement choisies, on peut ramener ce système à la forme canonique

$$(\mathcal{R}) \qquad \begin{cases} Y' + Y^2 - Z = 0, \\ Z' + YZ + \mathcal{A}(x)Y + \mathcal{B}(x) = 0; \end{cases}$$

c'est ce système qui généralise l'équation de Riccati (1).

Un calcul sans difficulté donne, entre les six fonctions qui interviennent dans la réduction, les relations suivantes

$$(4) \qquad A\lambda + B\lambda_1 = 1,$$

$$(5) \qquad A\mu + B\mu_1 = 0,$$

$$(6) \quad \lambda'\mu_1 - \mu\lambda'_1 + \nu\mu_1 - \mu\nu_1 + \lambda(C\mu_1 - C_1\mu) + \lambda_1(D\mu_1 - D_1\mu) = 0,$$

$$(7) \quad \mu'\mu_1 - \mu'_1\mu + \mu(C\mu_1 - C_1\mu) + \mu_1(D\mu_1 - D_1\mu) = \lambda\mu_1 - \mu\lambda_1,$$

$$(8) \quad \begin{cases} \nu'\mu_1 - \nu'_1\mu + (A\nu + B\nu_1)(\nu\mu_1 - \mu\nu_1) \\ \qquad + \nu(C\mu_1 - C_1\mu) + \nu_1(D\mu_1 - D_1\mu) + F\mu_1 - F_1\mu = 0, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \mu'\lambda_1 - \mu'_1\lambda + (A\nu + B\nu_1)(\lambda_1\mu - \mu_1\lambda) \\ \qquad + \mu(C\lambda_1 - C_1\lambda) + \mu_1(D\lambda_1 - D_1\lambda) = 0. \end{cases}$$

Ce système définit linéairement les six fonctions inconnues. D'abord (5) conduit à poser

$$\mu = B\varphi, \qquad \mu_1 = -A\varphi.$$

Les relations (4) et (7) donnent alors

$$\varphi = \frac{1}{A^2 D - B^2 C_1 - AB(C - D_1) + A'B - AB'}.$$

En ajoutant membre à membre les équations (7) et (9), et la relation résultant de la dérivation de (4), il vient

$$\lambda\left[A\frac{\varphi'}{\varphi}+2A'-A(C-D_1)-2BC_1\right]$$
$$+\lambda_1\left[B\frac{\varphi'}{\varphi}+2B'-B(D_1-C)-2AD\right]=0.$$

Cette équation, associée à (4), donne

$$\lambda=\frac{B\varphi'}{2}+\left[B'-\frac{B(D_1-C)}{2}-AD\right]\varphi,$$
$$\lambda_1=-\frac{A\varphi'}{2}+\left[A'+\frac{A(D_1-C)}{2}+BC_1\right]\varphi.$$

Enfin, pour calculer ν et ν_1, retranchons membre à membre les équations (7) et (9); nous aurons d'une part

$$\varphi'+2\varphi(A\nu+B\nu_1)+\varphi(C+D_1)=0,$$

ou

$$A\nu+B\nu_1=-\left[\frac{C+D_1}{2}+\frac{\varphi'}{2\varphi}\right]=\Phi;$$

d'autre part, ajoutons membre à membre l'équation (8), divisée par φ et la relation obtenue en dérivant l'équation précédente; il vient

$$\nu(A'-AC-BC_1)+\nu_1(B'-AD-BD_1)=\Phi^2+\Phi'+FA-F_1B.$$

ν et ν_1 sont déterminés par ces équations linéaires, dont le déterminant est $\frac{1}{\varphi}$.

Revenons au système canonique $(\mathcal{R})$, qu'on peut écrire

$$(\mathcal{R}_1)\qquad\begin{cases}Z=Y'+Y^2,\\ Y''+3YY'+Y^3+\mathcal{A}(x)Y+\mathcal{B}(x)=0.\end{cases}$$

Si l'on pose

$$Y=\frac{\zeta'}{\zeta},\qquad Z=\frac{\zeta''}{\zeta},$$

la première équation est vérifiée identiquement, et la seconde devient

$$(\mathcal{L})\qquad \zeta''' + \mathcal{A}(x)\zeta' + \mathcal{B}(x)\zeta = 0.$$

$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ étant trois solutions de cette équation linéaire et homogène du troisième ordre, l'intégrale générale de cette équation sera de la forme

$$m\zeta_1 + n\zeta_2 + p\zeta_3,$$

m, n, p étant trois constantes, et l'intégrale générale du système $(\mathcal{R})$, dont la forme est connue *a priori*, sera

$$(10)\qquad Y_4 = \frac{m\zeta_1' + n\zeta_2' + \zeta_3'}{m\zeta_1 + n\zeta_2 + \zeta_3}, \qquad Z_4 = \frac{m\zeta_1'' + n\zeta_2'' + \zeta_3''}{m\zeta_1 + n\zeta_2 + \zeta_3}.$$

Si maintenant on pose

$$u = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \qquad v = \frac{\zeta_3}{\zeta_1},$$

les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ vérifient le système

$$(\mathcal{S})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{3(d''+D)}{d} - 4\left(\frac{d'}{d}\right)^2 - 3\mathcal{A}(x) = 0,\\ &\frac{6d'(d''+3D)}{d^2} - 9\frac{D'}{d} - 8\left(\frac{d'}{d}\right)^3 + 9[\mathcal{A}'(x) - 3\mathcal{B}(x)] = 0,\end{aligned}\right.$$

où

$$d = u'v'' - u''v',$$
$$D = u''v''' - u'''v'',$$

système déjà formé page 71, et qui généralise l'équation de Schwarz.

5. Je dis qu'il y a équivalence, au point de vue de l'intégration entre le système de Riccati $(\mathcal{R})$, l'équation linéaire et homogène du troisième ordre $(\mathcal{L})$ et le système $(\mathcal{S})$.

Il est d'abord évident que l'intégration de l'équation $(\mathcal{L})$ fait connaître l'intégrale générale des systèmes $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{S})$.

D'autre part, ζ_1, ζ_2, ζ_3 étant trois solutions linéairement indépendantes de $(\mathcal{L})$, les expressions

$$Y_1 = \frac{\zeta_1'}{\zeta_1}, \qquad Z_1 = \frac{\zeta_1''}{\zeta_1},$$
$$Y_2 = \frac{\zeta_2'}{\zeta_2}, \qquad Z_2 = \frac{\zeta_2''}{\zeta_2},$$
$$Y_3 = \frac{\zeta_3'}{\zeta_3}, \qquad Z_3 = \frac{\zeta_3''}{\zeta_3}$$

sont trois solutions particulières du système $(\mathcal{R})$, dont l'intégrale générale peut alors s'écrire

$$(11) \qquad Y_4 = \frac{mY_1\zeta_1 + nY_2\zeta_2 + Y_3\zeta_3}{m\zeta_1 + n\zeta_2 + \zeta_3}; \qquad Z_4 = \frac{mZ_1\zeta_1 + nZ_2\zeta_2 + Z_3\zeta_3}{m\zeta_1 + n\zeta_2 + \zeta_3}.$$

Mais, puisque l'équation $(\mathcal{L})$ manque de terme en ζ'', ζ_1, ζ_2, ζ_3 vérifient la relation

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1' & \zeta_2' & \zeta_3' \\ \zeta_1''' & \zeta_2''' & \zeta_3''' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_1' & \zeta_2' & \zeta_3' \\ \zeta_1'' & \zeta_2'' & \zeta_3'' \end{vmatrix} = \text{const.},$$

ou encore

$$(12) \qquad \zeta_1\zeta_2\zeta_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = \text{const.}$$

Soit

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_3 & Y_4 & Y_1 \\ Z_3 & Z_4 & Z_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Y_4 & Y_1 & Y_2 \\ Z_4 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix};$$

les équations (11) et (12) donnent

$$\frac{m\zeta_1}{\Delta_1} = \frac{n\zeta_2}{\Delta_2} = \frac{\zeta_3}{\Delta_3} = \frac{\sqrt[3]{mn\mathrm{C}}}{\sqrt[3]{\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}},$$

ou

$$\frac{m^2}{n\mathrm{C}}\zeta_1^3 = \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2\Delta_3\Delta_4},$$

$$\frac{n^2}{m\mathrm{C}}\zeta_2^3 = \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1\Delta_3\Delta_4},$$

$$\frac{1}{mn\mathrm{C}}\zeta_3^3 = \frac{\Delta_3^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_4}.$$

Comme $\sqrt[3]{\frac{m^2}{n\mathrm{C}}}\zeta_1$, $\sqrt[3]{\frac{n^2}{m\mathrm{C}}}\zeta_2$, $\sqrt[3]{\frac{1}{mn\mathrm{C}}}\zeta_3$ sont encore des intégrales de l'équation $(\mathcal{L})$, on voit qu'à quatre intégrales $(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)$, $(\mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2)$, $(\mathrm{Y}_3, \mathrm{Z}_3)$, $(\mathrm{Y}_4, \mathrm{Z}_4)$ du système $(\mathcal{R})$ correspondent les intégrales de l'équation $(\mathcal{L})$

$$\zeta_1 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1^2}{\Delta_2\Delta_3\Delta_4}}, \qquad \zeta_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1\Delta_3\Delta_4}}, \qquad \zeta_3 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_3^2}{\Delta_1\Delta_2\Delta_4}},$$

dont les rapports font connaître une solution du système $(\mathcal{S})$

$$u = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

$$v = \frac{\zeta_3}{\zeta_1} = \frac{\Delta_3}{\Delta_1}.$$

D'ailleurs la connaissance d'une intégrale particulière $u(x)$, $v(x)$ de ce système $(\mathcal{S})$ entraîne celle de l'intégrale générale; il suffit d'effectuer sur u et v une transformation homographique à coefficients constants.

Il résulte de là que l'intégration du système $(\mathcal{R})$ entraîne celle de l'équation $(\mathcal{L})$ et du système $(\mathcal{S})$.

Enfin, connaissant une solution particulière $u(x)$, $v(x)$ du système $(\mathcal{S})$, on a, d'une part, trois solutions particulières de l'équation $(\mathcal{L})$ (*voir* p. 72)

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{u'v'' - u''v'}}, \qquad \zeta_2 = \frac{u}{\sqrt[3]{u'v'' - u''v'}}, \qquad \zeta_3 = \frac{v}{\sqrt[3]{u'v'' - u''v'}},$$

et d'autre part la solution générale du système $(\mathcal{R})$, d'après les relations (10).

L'équivalence annoncée est donc complètement établie.

4. Cette généralisation peut être faite d'une manière différente.

Nous allons considérer maintenant les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégrale générale est de la forme

$$U = \frac{\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) + f_3(x,y)}{\alpha\varphi_1(x,y) + \beta\varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y)},$$
$$V = \frac{\alpha\psi_1(x,y) + \beta\psi_2(x,y) + \psi_3(x,y)}{\alpha\varphi_1(x,y) + \beta\varphi_2(x,y) + \varphi_3(x,y)},$$

α et β étant deux constantes arbitraires.

On obtiendra d'abord la forme de ces systèmes en éliminant α et β entre ces équations intégrales et celles qui s'en déduisent en dérivant par rapport à x et à y. Un calcul très analogue à celui donné plus haut fournit comme résultat

$$(\mathcal{R}_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} + A\,U^2 + B\,UV + C\,U + D\,V + F = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} + A_1 U^2 + B_1 UV + C_1 U + D_1 V + F_1 = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} + B\,V^2 + A\,UV + C_2 U + D_2 V + F_2 = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + B_1 V^2 + A_1 UV + C_3 U + D_3 V + F_3 = 0, \end{cases}$$

les conditions d'intégrabilité étant identiquement satisfaites, ce qui ne laisse subsister que huit fonctions arbitraires.

Nous allons ramener ce système, nouvelle extension de l'équation de Riccati, à une forme canonique remarquable. En posant

$$U = \lambda\, u + \mu\, v,$$
$$V = \lambda_1 u + \mu_1 v,$$

où λ, μ, λ_1, μ_1 sont choisis de manière à vérifier les conditions

$$\begin{aligned} A\lambda + B\lambda_1 &= 1, \\ A\mu + B\mu_1 &= 0, \\ A_1\mu + B_1\mu_1 &= 1, \\ A_1\lambda + B_1\lambda_1 &= 0, \end{aligned}$$

on fait d'abord prendre au système $(\mathcal{R}_1)$ la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 + c\,u + d\,v + f &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + uv + c_1 u + d_1 v + f_1 &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + uv + c_2 u + d_2 v + f_2 &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} + v^2 + c_3 u + d_3 v + f_3 &= 0. \end{aligned}$$

Posons ensuite

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{U} + \varphi, \\ v &= \mathfrak{V} + \psi, \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} c + d_1 + 3\varphi &= 0, \\ c_2 + d_3 + 3\psi &= 0, \end{aligned}$$

et nous obtiendrons la forme nouvelle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \mathfrak{U}^2 + \mathcal{C}\,\mathfrak{U} + \mathcal{D}\,\mathfrak{V} + \mathcal{F} &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} + \mathfrak{U}\mathfrak{V} + \mathcal{C}_1\mathfrak{U} - \mathcal{C}\,\mathfrak{V} + \mathcal{F}_1 &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathcal{D}_3\mathfrak{U} + \mathcal{D}_2\mathfrak{V} + \mathcal{F}_2 &= 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \mathfrak{V}^2 + \mathcal{C}_3\mathfrak{U} + \mathcal{D}_3\mathfrak{V} + \mathcal{F}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Détaillons maintenant les conditions d'intégrabilité que nous avons laissées de côté tout à l'heure. En exprimant que l'on a identiquement

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y\, \partial x},$$

on est conduit à écrire qu'un polynome du second degré en $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est nul identiquement ; le coefficient du terme en $\mathcal{V}^2$ est nul identiquement, et les autres termes donnent les cinq relations

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1 + \mathcal{D}_3 = 0,\\
&\mathcal{E} + \mathcal{D}_2 = 0,\\
&-\mathcal{F} = 2\left[\mathcal{E}^2 - \mathcal{D}\mathcal{D}_3\right] - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial y},\\
&2\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial x} - \mathcal{D}\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}\mathcal{D}_3,\\
&\mathcal{F}_1 \mathcal{E} + \mathcal{F}_1 \mathcal{D} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \mathcal{F}\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}\mathcal{F}_2 - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x}.
\end{aligned}$$

L'identité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y\, \partial x}$$

redonne les deux premières relations précédentes, et fournit les suivantes

$$\begin{aligned}
&-\mathcal{F}_3 = 2\left(\mathcal{D}_3^2 - \mathcal{E}\mathcal{E}_3\right) - \frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial x},\\
&2\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial x} - \mathcal{D}\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}\mathcal{D}_3,\\
&\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_3 + \mathcal{F}\mathcal{E}_3 - \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial x} = -\mathcal{F}_3 \mathcal{E}_2 - \mathcal{F}_1 \mathcal{D}_3 - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x}.
\end{aligned}$$

On déduit de ces relations

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial x} - \mathcal{D}\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}\mathcal{D}_3,$$

et un changement bien simple de notation nous donnera la forme canonique que nous avions en vue

$$(\mathfrak{R}_1)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}+\mathfrak{U}^2-\alpha\mathfrak{U}+\gamma\mathfrak{V}-\left[2(\alpha^2+\beta\gamma)-\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\right]=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}+\mathfrak{U}\mathfrak{V}+\beta\mathfrak{U}+\alpha\mathfrak{V}-\left[(\gamma\delta-\alpha\beta)+\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right]=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}+\mathfrak{U}\mathfrak{V}+\beta\mathfrak{U}+\alpha\mathfrak{V}-\left[(\gamma\delta-\alpha\beta)+\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right]=0,\\[2ex] \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}+\mathfrak{V}^2+\delta\mathfrak{U}-\beta\mathfrak{V}-\left[2(\beta^2+\alpha\delta)-\dfrac{\partial\beta}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta}{\partial x}\right]=0,\end{cases}$$

les fonctions α, β, γ, δ étant liées par deux relations qui coïncident avec celles déjà données page 52.

Si l'on pose

$$\mathfrak{U}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad \mathfrak{V}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

les quatre équations ci-dessus se réduisent à trois,

$$(\mathcal{L}_1)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\gamma\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\left[2(\alpha^2+\beta\gamma)-\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\right]\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=-\beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\left[\gamma\delta+\alpha\beta+\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right]\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\delta\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\left[2(\beta^2+\alpha\delta)-\dfrac{\partial\beta}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta}{\partial x}\right]\varphi,\end{cases}$$

les conditions d'intégrabilité étant vérifiées, et le déterminant D relatif à un système fondamental d'intégrales étant constant.

Si φ_1, φ_2, φ_3 sont trois intégrales du système $(\mathcal{L}_1)$, linéairement indépendantes, l'intégrale du système $(\mathfrak{R}_1)$, intégrale dont la forme est connue, est

$$(13)\qquad \mathfrak{U}_1=\frac{m\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}+n\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x}}{m\varphi_1+n\varphi_2+\varphi_3},\qquad \mathfrak{V}_1=\frac{m\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}+n\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y}}{m\varphi_1+n\varphi_2+\varphi_3}.$$

En posant

$$u=\frac{\varphi_2}{\varphi_1},\qquad v=\frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

on obtient le système de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre

$$
(\mathcal{S}_1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \gamma\nabla, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 3\alpha\nabla, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 3\beta\nabla, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \delta\nabla,
\end{cases}
$$

où

$$\nabla = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y},$$

extension de l'équation de Schwarz.

5. Il y a équivalence, dans le sens indiqué plus haut, entre les systèmes $(\mathcal{R}_1)$, $(\mathcal{L}_1)$ et $(\mathcal{S}_1)$, et la démonstration de cette équivalence est calquée sur la précédente.

La connaissance d'une intégrale particulière $u(x, y)$, $v(x, y)$ du système $(\mathcal{S}_1)$ faisant avoir l'intégrale générale de ce système par une transformation homographique à coefficients constants, il est évident que l'intégration du système $(\mathcal{L}_1)$ fournit l'intégrale générale des systèmes $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{S}_1)$.

D'autre part, les solutions particulières du système $(\mathcal{R}_1)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, & \mathcal{V}_1 &= \frac{1}{\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}, \\
\mathcal{U}_2 &= \frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & \mathcal{V}_2 &= \frac{1}{\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, \\
\mathcal{U}_2 &= \frac{1}{\varphi_3}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}, & \mathcal{V}_3 &= \frac{1}{\varphi_3}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y},
\end{aligned}
$$

eu égard à la relation

$$
\begin{vmatrix}
\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y}
\end{vmatrix} = \text{const.},
$$

donnent la relation

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{V}_1 & \mathfrak{V}_2 & \mathfrak{V}_3 \\ \mathfrak{P}_1 & \mathfrak{P}_2 & \mathfrak{P}_3 \end{vmatrix} = \text{const.};$$

comme l'intégrale générale du système $(\mathcal{R}_1)$ s'écrit

$$\mathfrak{V}_4 = \frac{m\varphi_1\mathfrak{V}_1 + n\varphi_2\mathfrak{V}_2 + \varphi_3\mathfrak{V}_3}{m\varphi_1 + n\varphi_2 + \varphi_3}; \qquad \mathfrak{P}_4 = \frac{m\varphi_1\mathfrak{P}_1 + n\varphi_2\mathfrak{P}_2 + \varphi_3\mathfrak{P}_3}{m\varphi_1 + n\varphi_2 + \varphi_3},$$

ces trois équations montrent que la connaissance de quatre intégrales du système $(\mathcal{R}_1)$: $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{P}_1)$, $(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{P}_2)$, $(\mathfrak{V}_3, \mathfrak{P}_3)$, $(\mathfrak{V}_4, \mathfrak{P}_4)$ entraîne celle des intégrales particulières distinctes $(\mathcal{L}_1)$,

$$\varphi_1 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1'^2}{\Delta_2'\Delta_3'\Delta_4'}}, \qquad \varphi_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_2'^2}{\Delta_1'\Delta_3'\Delta_4'}}, \qquad \varphi_3 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_3'^2}{\Delta_1'\Delta_2'\Delta_4'}},$$

en posant

$$\Delta_4' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{V}_1 & \mathfrak{V}_2 & \mathfrak{V}_3 \\ \mathfrak{P}_1 & \mathfrak{P}_2 & \mathfrak{P}_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{V}_2 & \mathfrak{V}_3 & \mathfrak{V}_4 \\ \mathfrak{P}_2 & \mathfrak{P}_3 & \mathfrak{P}_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{V}_3 & \mathfrak{V}_4 & \mathfrak{V}_1 \\ \mathfrak{P}_3 & \mathfrak{P}_4 & \mathfrak{P}_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathfrak{V}_4 & \mathfrak{V}_1 & \mathfrak{V}_2 \\ \mathfrak{P}_4 & \mathfrak{P}_1 & \mathfrak{P}_2 \end{vmatrix}.$$

De plus, une intégrale particulière du système $(\mathcal{S}_1)$ est

$$u = \frac{\Delta_2'}{\Delta_1'}, \qquad v = \frac{\Delta_3'}{\Delta_1'},$$

Enfin, si l'on connaît une solution particulière du système $(\mathcal{S}_1)$, soit $u(x, y)$, $v(x, y)$, puisque le déterminant D, relatif à un système fondamental de $(\mathcal{L}_1)$ est constant, on a les trois intégrales particulières du système $(\mathcal{L}_1)$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}}}; \qquad \varphi_2 = u\varphi_1; \qquad \varphi_3 = v\varphi_1,$$

et les formules (13) donnent, par suite, l'intégrale générale du système $(\mathcal{R}_2)$.

L'équivalence est donc complètement établie.

6. En particulier, si l'intégrale générale d'un des systèmes précédents est algébrique, il en sera de même de l'intégrale des deux autres systèmes. Par suite, comme on sait reconnaître si l'équation linéaire $(\mathcal{L})$ [ou le système complet $(\mathcal{L}_1)$] a son intégrale générale algébrique, ses coefficients étant supposés rationnels, on est, par le fait, à même de s'assurer, dans la même hypothèse, si les systèmes $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{S})$ [ou $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{S}_1)$] sont intégrables algébriquement.

CONCLUSION.

Cette étude a mis en évidence le rôle essentiel que jouent, dans le double problème qu'on y a traité, les invariants I, J, M, N de MM. Painlevé et Goursat. C'est à leur calcul que se ramènent les solutions indiquées, solutions qui subsistent quel que soit le groupe linéaire fini considéré.

Ce calcul est beaucoup plus compliqué pour le groupe de M. Klein que pour celui de Hesse; il devient presque rebutant pour celui de M. Valentiner. Je me propose cependant de l'effectuer, au moins dans le cas du groupe de M. Klein pour lequel j'ai déjà obtenu la forme des invariants.

La considération des quinze invariants du second ordre de M. Painlevé, signalés page 22, permettrait de traiter les mêmes problèmes pour un système de six équations linéaires, homogènes, simultanées aux dérivées partielles du second ordre à trois variables. Mais l'énumération des groupes quaternaires linéaires, d'ordre fini, n'est pas faite, et les formes invariantes ne sont connues que pour le groupe de 51 840 substitutions de M. Witting, groupe lié à celui de Hesse : là encore les calculs sont extrêmement pénibles.

Vu et approuvé :
Paris, le 13 mai 1897,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 13 mai 1897,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

De l'intégration des équations

$$\Delta u = f(x, y, u),$$

en ayant égard aux conditions aux limites; cas particulier des équations

$$\Delta u = k^2 u \qquad \text{et} \qquad \Delta u = ke^u.$$

Vu et approuvé :
Paris, le 13 mai 1897,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 13 mai 1897,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

24638 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.