H. F. u. f. 166. (21) 1

1377

N° D'ORDRE :

617.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. A. PETOT,

Ancien élève de l'École Normale supérieure.

FACULTÉ des SCIENCES BIBLIOTHÈQUE PARIS

1re THÈSE. — SUR UNE EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL A LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 juin ~~avril~~ 1888, devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*
APPELL, PICARD, } *Examinateurs.*

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1888

DONS N° 24056.

16

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	HÉBERT, Professeur	Géologie.
PROFESSEURS HONORAIRES	PASTEUR.	
	DUCHARTRE	Botanique.
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	TROOST	Chimie.
	FRIEDEL	Chimie organique.
	O. BONNET	Astronomie.
	DARBOUX	Géométrie supérieure.
	DEBRAY	Chimie.
	TISSERAND	Astronomie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Mécanique physique et expérimentale.
	PICARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
PROFESSEURS ADJOINTS	WOLF	Physique céleste.
	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

13910 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

A LA MÉMOIRE

DE MON PÈRE ET DE MA MÈRE.

P. .I

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 -4

PREMIÈRE THÈSE.

SUR UNE

EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL

A LA

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

INTRODUCTION.

Une surface du second ordre étant déterminée par neuf points, il existe une relation entre dix points pris arbitrairement sur une telle surface. La recherche de l'expression géométrique de cette relation a été proposée par l'Académie de Bruxelles, au concours de 1825; plus tard, en 1837, Chasles a insisté, dans son *Aperçu historique,* sur l'utilité que présenterait la connaissance de cette expression, dans la théorie des surfaces du second degré. Depuis cette époque, de nombreuses recherches intéressantes ont été faites sur ce sujet; mais, malgré l'importance des résultats obtenus, il ne nous semble pas que la question ait été résolue d'une manière définitive. Quand on veut généraliser un théorème de Géométrie, on doit tout d'abord se demander ce qui caractérise essentiellement le fait exprimé par ce théorème, afin de faire porter la généralisation sur ce caractère essentiel. Ce premier point a été nettement indiqué par Chasles; nous ne pouvons mieux faire à ce sujet que de citer textuellement quelques passages de l'*Aperçu historique :* « On peut regarder le théorème de Pascal comme exprimant une relation générale et constante entre six points quelconques d'une conique, c'est-à-dire *un de plus* qu'il n'en faut pour

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

déterminer cette courbe, ou bien comme exprimant une propriété générale d'une conique par rapport à un triangle tracé arbitrairement dans son plan.... D'après cela, on peut concevoir de deux manières, dans l'espace, l'analogue du théorème de Pascal. Ce sera, dans le premier cas, une propriété générale de *dix* points appartenant à une surface du second degré, c'est-à-dire *un point de plus* qu'il n'en faut pour déterminer une telle surface. Dans le second cas, ce sera une propriété générale résultant du système d'une surface du second ordre et d'un tétraèdre placé d'une manière quelconque dans l'espace. » (*Aperçu historique*, Note XXXII.)

M. Paul Serret a complété cette analyse des différentes formes, sous lesquelles on peut concevoir le théorème analogue à celui de Pascal, en montrant que l'on n'aurait pas ce théorème dans une propriété de dix points d'une surface du second ordre, qui n'aurait pas, pour une telle surface, les mêmes conséquences pratiques que le théorème de Pascal pour les coniques. Si l'on désigne par A et B deux des cinq points donnés pour déterminer une conique, et par M un point quelconque de cette courbe, le théorème de Pascal fournit, entre les deux droites AM et BM, une relation géométrique telle que, l'une des deux étant donnée, l'autre s'en déduit immédiatement par une construction, qui exige seulement l'emploi de la règle. De même, si l'on désigne par A, B, C trois des neuf points donnés pour déterminer une quadrique, et par M un point quelconque de cette surface, le théorème cherché devra fournir, entre les trois plans ABM, BCM, CAM, une relation géométrique telle que, deux d'entre eux étant donnés, le troisième s'en déduise simplement par une construction linéaire. Les plans variables ABM, BCM, CAM forment ce que l'on appelle *trois faisceaux duplo-projectifs;* les axes de ces trois faisceaux sont dans un même plan ABC; de plus, ce plan appartient à chacun des faisceaux. Dans le cas général, où les axes des faisceaux sont des droites quelconques non concourantes, M. Cremona [1] a montré que le lieu de M est une surface du troisième ordre. La relation duplo-projective est définie analytiquement, et l'on n'a pas pu en déduire jusqu'à ce jour un mode géomé-

[1] *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre* (*Journal de Crelle*, p. 80; 1868).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

trique de description de la surface du troisième ordre par points; M. Cremona s'en est seulement servi pour mettre en évidence certaines propriétés de cette surface. M. Reye (1) a indiqué, il est vrai, une construction géométrique de la surface cubique, mais la surface que l'on obtient par cette construction a un point double. Enfin M. Le Paige (2), en étudiant une homographie particulière analogue à la relation duplo-projective, est parvenu seulement à ramener la construction d'une surface du troisième ordre donnée par trois droites non concourantes et sept points à celle d'une quadrique donnée par neuf plans tangents.

Nous avons été ainsi conduit à chercher, au lieu de la propriété de dix points d'une quadrique, l'expression géométrique de la relation qui existe entre trois droites non concourantes et huit points appartenant à une même surface du troisième ordre. Toute droite, qui s'appuie sur deux droites données de la surface, ne rencontre plus cette surface qu'en un point; la relation cherchée devra, pour être comparable au théorème de Pascal, donner une détermination géométrique de ce point, qui exige seulement l'emploi de la règle. D'autre part, M. Cremona a montré que toutes les surfaces cubiques, qui ont en commun trois droites non concourantes A, B, C et six points pris arbitrairement dans l'espace, passent par une courbe gauche du sixième ordre et du premier genre. Il y a seulement exception quand les trois droites et les six points considérés sont associés et appartiennent à un faisceau doublement infini de surfaces du troisième ordre. Nous avons étudié, en même temps que la surface cubique, la courbe gauche du sixième ordre considérée, ainsi que le groupe de droites et de points associés. D'ailleurs les trois relations dont nous venons de parler comprennent, comme cas particuliers, les propriétés de dix points d'une quadrique, de neuf points d'une quartique gauche, de huit points associés.

Nous allons maintenant résumer ce qui a été fait sur les surfaces du second ordre, en nous tenant à ce qui concerne l'extension du théorème de Pascal à ces surfaces, et en nous plaçant au double point de vue de la théorie et de la pratique.

---

(1) *Géométrie de position*, deuxième Volume, p. 209.
(2) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, t. V, 1883.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Lamé (1) démontra, le premier, que toutes les surfaces du second ordre qui passent par huit points ont en commun une quartique gauche, et que toutes celles qui passent par sept points se rencontrent en un huitième point. On lui doit en outre une construction de la surface du second ordre donnée par neuf points.

Chasles (2) donna différentes propriétés de la cubique gauche, et la relation suivante entre douze points d'une quadrique : *quand les six arêtes d'un tétraèdre quelconque rencontrent une surface du second ordre en douze points, ces douze points sont trois à trois sur quatre plans dont chacun contient trois points appartenant aux trois arêtes issues d'un même sommet du tétraèdre; ces quatre plans rencontrent respectivement les faces opposées à ces sommets suivant quatre droites, qui sont les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde.*

On doit à Thomas Weddle (3) une propriété du groupe de huit points associés et une construction de la quadrique donnée par neuf points; ce qui caractérise cette construction, c'est qu'elle exige la détermination de certains éléments métriques.

Nous citerons de Hesse (4) la propriété suivante de huit points associés : *Si l'on sépare huit points associés en deux groupes égaux composés chacun de quatre points, les deux tétraèdres ayant pour sommets respectifs les points de l'un ou de l'autre groupe sont toujours conjugués à une même surface du second ordre.*

On doit, en outre, à Hesse, à Schröter (5) et à Steiner (6) diverses constructions de la quadrique donnée par neuf points.

M. Darboux (7), après avoir exposé un mode de correspondance d'après lequel à un point correspond un point et à une droite une conique, en a déduit une construction de la surface du second ordre donnée par neuf points. On commence par déterminer, sur un plan

---

(1) *Examen des différentes méthodes employées en Géométrie*, 1818.

(2) *Aperçu historique*, Notes XXXII et XXXIII. — *Comptes rendus*, t. LII, LIII et LIV.

(3) *Journal de Cambridge*, t. IV, p. 26 à 44; t. V, p. 58 à 69, 238 à 243; t. VII, p. 10 à 13.

(4) *Journal de Crelle*, 1842 et 1843.

(5) *Journal de Crelle*, t. 62, p. 215.

(6) *Journal de Crelle*, t. 68, p. 191.

(7) *Bulletin de la Société philomathique*, 1868.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

mené par trois des points donnés, la quatrième trace de la quartique gauche déterminée par ces trois points et par cinq des autres points donnés. On peut ainsi obtenir des coniques appartenant à la surface demandée et en déduire les différents éléments de cette surface.

Les résultats les plus importants que l'on ait obtenus sur le sujet qui nous occupe sont dus à M. Paul Serret; nous ne pouvons pas analyser ici son très intéressant Livre sur la *Géométrie de direction;* nous citerons seulement la propriété suivante de dix points d'une surface du second ordre : *Dix points d'une surface du second ordre étant séparés en deux groupes égaux, les points de chaque groupe déterminent les sommets de deux pentagones gauches respectivement conjugués à une deuxième surface du second ordre, et réciproquement.* Ce qui fait l'intérêt du théorème précédent, c'est qu'il est la généralisation d'une propriété de six points d'une conique. M. Paul Serret a d'ailleurs donné des théorèmes analogues à celui que nous venons de citer, pour la quartique gauche, pour la cubique gauche et pour le groupe de points associés, et il a pu en déduire la solution d'un grand nombre de problèmes sur les surfaces du second ordre.

Nous signalerons encore les résultats obtenus par MM. Héger (1) et Hunyady (2), et tout particulièrement le mode de construction indiqué par M. Le Paige (3) pour la quadrique donnée par neuf points.

En résumé, la question que nous nous sommes proposée n'a pas été abordée, en ce qui concerne les surfaces du troisième ordre, et n'a pas été complètement résolue pour celles du second. Nous allons indiquer la méthode que nous avons suivie et les résultats que nous avons obtenus.

Quand on cherche à étendre le théorème de Pascal à la Géométrie de l'espace, on ne sait tout d'abord comment aborder cette recherche. Cela tient à ce que l'on n'a pas à démontrer un théorème énoncé, mais bien à inventer l'énoncé même de ce théorème; et, pour cela, on n'est guidé que par des considérations assez vagues sur les analogies que peuvent présenter le plan et l'espace. Nous allons indiquer par quelle

---

(1) *Journal für Mathematik,* 1880.
(2) *Journal de Borchardt,* 1880.
(3) *Bulletin de l'Académie de Belgique,* t. V.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

suite d'inductions nous avons pu déterminer à l'avance, sinon l'expression définitive, du moins la forme générale des résultats auxquels on doit arriver.

Dans le théorème de Pascal, ou dans les théorèmes analogues, on fait correspondre linéairement à un point décrivant une conique, soit une droite enveloppant un point, soit, ce qui revient au même, un point décrivant une droite. De même, on peut faire correspondre linéairement à un point M, qui se déplace sur une surface du troisième ordre S_3, un certain élément ω qui engendre une forme géométrique Σ. Si la forme Σ est déterminée par n éléments ω, la condition pour que le point M décrive une surface S_3 sera ramenée à la relation entre $(n+1)$ éléments ω d'une même forme Σ; pour qu'il y ait à cela un avantage, il faudra évidemment que cette dernière relation soit connue. D'autre part, lorsque le point M décrit une droite L s'appuyant sur deux des trois droites données pour déterminer S_3, l'élément correspondant ω engendre une deuxième forme σ; par suite, la détermination de la troisième trace de L sur S_3 sera ramenée à celle de l'élément ω, commun aux deux formes Σ et σ. Dès lors, pour que le théorème obtenu ait, relativement aux surfaces du troisième ordre, les mêmes conséquences pratiques que celui de Pascal pour les coniques, il faudra que l'on sache déterminer linéairement l'élément commun aux deux formes Σ et σ, puis revenir de cet élément à M. On aura bien alors la troisième trace de L sur la surface S_3, et l'on saura construire cette surface par points. Il reste à déterminer la nature de l'élément ω et celle de la forme Σ, ainsi que le mode de correspondance à établir entre M et ω.

Tout d'abord, nous avons pris pour ω un plan, mais ce mode de correspondance ne nous a donné aucun résultat simple; nous avons alors choisi pour ω une droite. Dans ce cas, il était tout naturel de prendre pour Σ un complexe du premier ordre et pour σ un faisceau du premier ordre. Le premier problème à résoudre a alors été le suivant : *Trouver la relation homographique à établir entre un point* M *et une droite* ω *de l'espace pour que,* M *décrivant une droite quelconque qui s'appuie sur deux des trois droites données de la surface,* ω *engendre un faisceau du premier ordre.* Après avoir obtenu ce mode de correspondance, nous avons cherché le lieu que décrit M quand on impose à ω d'appartenir à un complexe du premier ordre; nous avons trouvé que ce lieu est une sur-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

face du troisième ordre, se dédoublant, dans un cas particulier facile à caractériser, en un plan et une quadrique. On parvient ainsi à faire dépendre la situation de trois droites non concourantes et de huit points sur une même surface du troisième ordre, et, en particulier, celle de dix points sur une surface du second ordre de la situation sur un même complexe du premier ordre, de six droites déduites linéairement des points considérés. D'ailleurs, le même mode de correspondance donne immédiatement les propriétés de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre et de huit points associés, et, plus généralement, les propriétés analogues pour la courbe gauche du sixième ordre et pour le groupe de droites et de points associés. On obtient comme conclusions : pour les courbes gauches, cinq droites appartenant à une même congruence du premier ordre; pour les groupes d'éléments associés, quatre droites appartenant à un même système de génératrices d'un hyperboloïde. Ce sont ces différents théorèmes que nous présentons comme une extension du théorème de Pascal à la Géométrie de l'espace; nous montrons qu'ils ont, pour les surfaces du troisième ordre et pour celles du second, les mêmes conséquences pratiques que le théorème de Pascal pour les coniques; un grand nombre de problèmes, jusqu'ici non résolus, sur ces surfaces et sur quelques-unes de leurs courbes d'intersection sont ainsi ramenés immédiatement à des constructions que l'on sait exécuter sur des systèmes de droites.

CHAPITRE I.

EXTENSION DU THÉORÈME DE PASCAL AUX SURFACES DU TROISIÈME ORDRE. PROPOSITIONS CORRÉLATIVES.

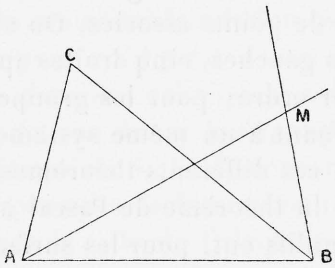
1. On peut faire correspondre homographiquement, à un point décrivant une conique, une droite qui enveloppe un point. Nous allons déduire de ce fait une démonstration du théorème de Pascal; puis, en suivant une marche semblable, nous obtiendrons des théorèmes analogues à ce dernier pour les surfaces du troisième ordre.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

I. — Coniques.

2. Considérons dans un plan deux points fixes A et B (*fig.* 1), et cherchons l'expression analytique générale du mode de correspondance homographique à établir entre un point M et une droite ω, mobiles dans ce plan, pour que, M décrivant une droite qui passe par l'un des points A ou B, ω enveloppe un point.

Fig. 1.



Si l'on prend les points A et B pour deux des sommets du triangle de référence, et pour troisième sommet un point quelconque C du plan, les équations des droites BM et AM sont

$$x + \lambda z = 0, \tag{1}$$

$$y + \mu z = 0, \tag{2}$$

en désignant par λ et μ deux paramètres arbitraires, qui peuvent être considérés comme les coordonnées du point M.

Pour la droite ω reliée homographiquement à M, elle est déterminée par deux points donnés, en coordonnées tangentielles, par les équations

$$\lambda P + \mu Q + R = 0, \tag{3}$$

$$\lambda P_1 + \mu Q_1 + R_1 = 0, \tag{4}$$

où P, Q, ..., R sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées a, b, c d'une droite.

Pour que ω enveloppe un point, quand M décrit une droite quel-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

conque passant par A ou par B, il faut et il suffit que P et Q aient leurs coefficients respectivement proportionnels à ceux de P_1 et de Q_1.

D'autre part, si l'on cherche les points M tels que les équations (3) et (4), modifiées comme il vient d'être dit, représentent le même point, on trouve, en dehors de AB, un seul point jouissant de cette propriété; on peut prendre ce dernier point pour le troisième sommet C, jusqu'ici arbitraire, du triangle de référence; il suffit pour cela que R et R_1 aient aussi leurs coefficients proportionnels. La droite ω est alors déterminée par les deux points

$$T = l\lambda P + m\mu Q + R = 0, \tag{5}$$

$$T_1 = l_1\lambda P + m_1\mu Q + R = 0. \tag{6}$$

On a d'ailleurs

$$P = \alpha a + \alpha' b + \alpha'' c, \tag{7}$$

$$Q = \beta a + \beta' b + \beta'' c, \tag{8}$$

$$R = \gamma a + \gamma' b + \gamma'' c. \tag{9}$$

Les trois points fixes P, Q, R sont jusqu'ici quelconques et assujettis seulement à ne pas être en ligne droite.

3. Cherchons maintenant quelle est la courbe engendrée par M quand ω enveloppe un point quelconque Σ_1.

Les équations (5) et (6) peuvent s'écrire

$$(l\alpha\lambda + m\beta\mu + \gamma)a + (l\alpha'\lambda + m\beta'\mu + \gamma')b + (l\alpha''\lambda + m\beta''\mu + \gamma'')c = 0, \tag{10}$$

$$(l_1\alpha\lambda + m_1\beta\mu + \gamma)a + (l_1\alpha'\lambda + m_1\beta'\mu + \gamma')b + (l_1\alpha''\lambda + m_1\beta''\mu + \gamma'')c = 0. \tag{11}$$

Le lieu de M a alors une équation de la forme

$$\sum L \begin{vmatrix} l\alpha\lambda + m\beta\mu + \gamma & l\alpha'\lambda + m\beta'\mu + \gamma' \\ l_1\alpha\lambda + m_1\beta\mu + \gamma & l_1\alpha'\lambda + m_1\beta'\lambda + \gamma' \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Cette équation représente une conique C_2 circonscrite au triangle ABC; on peut d'ailleurs faire passer cette conique par deux autres points quelconques 1 et 2 du plan; il suffit pour cela de prendre comme point Σ_1 le point de rencontre des deux droites ω_1, ω_2; donc, *pour que les six points* A, B, C, 1, 2, 3 *appartiennent à une même conique, il faut et il suffit que les trois droites* ω_1, ω_2, ω_3 *soient concourantes.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

4. D'autre part, lorsque M décrit une droite quelconque passant par l'un des points A, B, C, ω enveloppe un point; dès lors la droite ω, qui correspond au deuxième point de rencontre de l'une des droites considérées avec la conique C_2, s'obtient immédiatement en joignant deux points connus. Par suite, pour que le mode de correspondance considéré fournisse une détermination pratique du sixième point de la conique donnée par cinq points, il suffit de trouver de ce mode de correspondance, jusqu'ici analytique, une définition géométrique permettant d'obtenir ω, connaissant M, et inversement de revenir de ω à M.

Les points enveloppés par ω lorsque M décrit une droite (λ) passant par B ou une droite (μ) passant par A ont respectivement pour équations

$$(lm_1 - ml_1)\lambda P + (m_1 - m)R = 0, \tag{13}$$

$$(ml_1 - lm_1)\mu Q + (l_1 - l)R = 0. \tag{14}$$

Pour déterminer la droite ω, qui correspond au point d'intersection M des deux droites (λ) et (μ), on peut prendre, au lieu des points (5) et (6), les points (13) et (14), qui sont situés sur les droites fixes PR, QR, et dépendent seulement, le premier de λ, et le second de μ.

Les points ξ et η, où les droites variables (1) et (2) rencontrent les droites fixes PR et QR, ont pour équations

$$(\gamma + \gamma''\lambda)P - (\alpha + \alpha''\lambda)R = 0, \tag{15}$$

$$(\gamma' + \gamma''\mu)Q - (\beta' + \beta''\mu)R = 0. \tag{16}$$

Ces équations montrent que les points connus ξ et η sont reliés homographiquement aux points cherchés (13) et (14) et, par suite, peuvent servir à les déterminer. Pour que les points (13) et (14) coïncident respectivement avec les points ξ et η, quels que soient λ et μ, il suffit de poser

$$\alpha'' = \beta'' = \gamma = \gamma' = 0,$$

$$(m - m_1)\gamma'' + (ml_1 - lm_1)\alpha = 0, \tag{17}$$

$$(l - l_1)\gamma'' + (lm_1 - ml_1)\beta' = 0. \tag{18}$$

En tenant compte des hypothèses faites, on voit que le point R coïncide avec C, et que les points P et Q sont pris arbitrairement sur AB; les deux droites RP et RQ peuvent donc être menées arbitraire-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

ment par le point C; nous les désignerons par β et α. D'ailleurs, on peut toujours déterminer les paramètres l, l_1, m, m_1 de manière à vérifier les relations (17) et (18). On obtient ainsi le théorème connu suivant :

THÉORÈME I (Propriété de six points d'une conique.) — *Si, menant arbitrairement deux droites α et β par le sommet* C *du triangle* ABC, *qui a pour sommets trois de ces points, on fait correspondre à tout point* M *du plan la droite ω déterminée par les points où les droites* AM, BM *rencontrent respectivement les droites α et β, les trois droites correspondantes aux derniers points de la conique sont concourantes.*

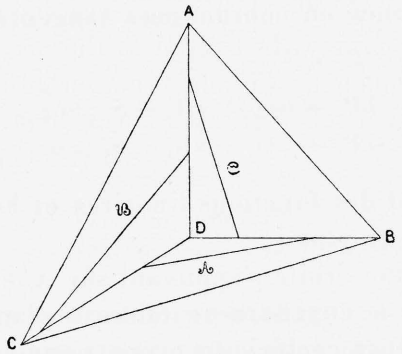
D'ailleurs, si l'on prend pour droites α et β des droites passant par deux des trois derniers points de la conique, on obtient le théorème de Pascal.

On sait démontrer simplement le théorème I ; si nous en avons donné la démonstration complexe qui précède, c'est qu'elle peut, comme nous allons le montrer, être transportée terme à terme aux surfaces du troisième ordre. Il apparaît alors clairement que les théorèmes obtenus de cette manière peuvent être considérés comme une extension du théorème de Pascal à la géométrie de l'espace.

II. — Surfaces du troisième ordre.

5. Considérons trois droites fixes non concourantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (*fig.* 2),

Fig. 2.



et cherchons l'expression analytique générale de la relation homogra-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

phique à établir entre un point M et une droite ω de l'espace, pour que, M décrivant une droite qui s'appuie sur deux des trois droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ω engendre un faisceau plan, c'est-à-dire tourne autour d'un point et reste dans un plan.

Si l'on prend pour trois des faces du tétraèdre de référence des plans menés respectivement par les droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et par un point D, les équations de ces droites sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x = 0, \\ \mathcal{A}_0 = fx + f'y + f''z + f'''u = 0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} y = 0, \\ \mathcal{B}_0 = gx + g'y + g''z + g'''u = 0; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} z = 0, \\ \mathcal{C}_0 = hx + h'y + h''z + h'''u = 0. \end{cases}$$

$\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ désignant trois nouveaux plans fixes menés par les droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et par un point E.

Un point quelconque M de l'espace peut être déterminé par les trois plans

$$(4)\qquad x + \lambda\mathcal{A}_0 = 0,$$
$$(5)\qquad y + \mu\mathcal{B}_0 = 0,$$
$$(6)\qquad z + \nu\mathcal{C}_0 = 0,$$

où λ, μ, ν sont des paramètres arbitraires.

Pour la droite ω reliée homographiquement à M, elle est déterminée par deux points donnés en coordonnées tangentielles par les équations

$$(7)\qquad \lambda P + \mu Q + \nu R + S = 0,$$
$$(8)\qquad \lambda P_1 + \mu Q_1 + \nu R_1 + S_1 = 0,$$

où P, Q, ..., S sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées a, b, c, d d'un plan.

Quand M décrit une droite s'appuyant sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, λ et μ restent constants ; pour que ω engendre un faisceau plan, il faut et il suffit que R et R_1 aient leurs coefficients proportionnels. On voit de même que les coefficients de P et de Q doivent être respectivement propor-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

tionnels à ceux de P_1 et de Q_1. D'autre part, si l'on cherche les points M, tels que les équations (7) et (8), modifiées comme il vient d'être dit, représentent le même point, on trouve, en dehors des droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, un seul point jouissant de cette propriété ; on peut prendre ce dernier point pour le sommet D, jusqu'ici arbitraire, du tétraèdre de référence ; il suffit pour cela que S et S_1 aient leurs coefficients proportionnels. On est ainsi conduit à prendre pour ω la droite qui joint les deux points

$$T = l\lambda P + m\mu Q + n\nu R + S = 0, \tag{9}$$

$$T_1 = l_1\lambda P + m_1\mu Q + n_1\nu R + S = 0. \tag{10}$$

On a, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} P &= \alpha a + \alpha' b + \alpha'' c + \alpha''' d, \\ Q &= \beta a + \beta' b + \beta'' c + \beta''' d, \\ R &= \gamma a + \gamma' b + \gamma'' c + \gamma''' d, \\ S &= \delta a + \delta' b + \delta'' c + \delta''' d. \end{aligned}$$

Les quatre points fixes donnés par les équations obtenues en égalant à zéro les fonctions P, Q, R, S sont jusqu'ici quelconques et assujettis seulement à ne pas être dans un même plan ; nous désignerons par θ le tétraèdre ayant pour sommets ces points et par p, q, r, s les faces de ce tétraèdre, respectivement opposées aux sommets P, Q, R, S.

6. On a étudié le complexe engendré par une droite reliée homographiquement à un point de l'espace. La droite ω, qui joint les points T et T_1, engendre un complexe tétraédral, ayant θ pour tétraèdre principal. Le rapport anharmonique des plans menés par ω et par les points P, Q, R, S et celui des traces de ω sur les plans p, q, r, s sont tous deux égaux à la constante

$$\frac{(m - m_1)(ln_1 - l_1 n)}{(l - l_1)(mn_1 - m_1 n)}$$

que nous appellerons *paramètre du complexe*.

A tout point M de l'espace, non situé sur l'une des droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, correspond une droite ω et une seule ; il y a seulement exception pour

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

les points D et E; les points T et T_1 sont, pour le premier, confondus et, pour le second, indéterminés. Cherchons la surface engendrée par M quand on impose à ω, qui est par construction sur Σ_2, d'appartenir en outre à un complexe du premier ordre Σ_1.

Les équations des points T et T_1 peuvent s'écrire

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} (l\alpha\lambda + m\beta\mu + n\gamma\nu + \delta)a + (l\alpha'\lambda + m\beta'\mu + n\gamma'\nu + \delta')b \\ + (l\alpha''\lambda + m\beta''\mu + n\gamma''\nu + \delta'')c + (l\alpha'''\lambda + m\beta'''\mu + n\gamma'''\nu + \delta''')d = 0, \end{array}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} (l_1\alpha\lambda + m_1\beta\mu + n_1\gamma\nu + \delta)a + (l_1\alpha'\lambda + m_1\beta'\mu + n_1\gamma'\nu + \delta')b \\ + (l_1\alpha''\lambda + m_1\beta''\mu + n_1\gamma''\nu + \delta'')c + (l_1\alpha'''\lambda + m_1\beta'''\mu + n_1\gamma'''\nu + \delta''')d = 0. \end{array}\right.$$

Le lieu de M a alors une équation de la forme

$$(13)\quad \sum \mathrm{L} \begin{vmatrix} l\alpha\lambda + m\beta\mu + n\gamma\nu + \delta & l\alpha'\lambda + m\beta'\mu + n\gamma'\nu + \delta \\ l_1\alpha\lambda + m_1\beta\mu + n_1\gamma\nu + \delta & l_1\alpha'\lambda + m_1\beta'\mu + n_1\gamma'\nu + \delta' \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une surface du troisième ordre S_3, passant par les droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et par les points D et E. On peut d'ailleurs faire passer cette surface par cinq autres points quelconques 1, 2, 3, 4, 5; il suffit pour cela de prendre comme complexe Σ_1 celui qui est déterminé par les cinq droites $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5$; donc, *pour que les trois droites* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *et les huit points* D, E, 1, 2, ..., 6 *appartiennent à une même surface du troisième ordre, il faut que les six droites* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ *appartiennent à un même complexe du premier ordre.*

Cette condition est d'ailleurs suffisante; en effet, les six droites précédentes doivent être situées sur la congruence du second ordre (Σ_2, Σ_1); mais, comme elles sont par construction sur Σ_2, il suffit de leur imposer d'appartenir à Σ_1.

7. Cherchons maintenant si les résultats obtenus peuvent avoir, pour les surfaces du troisième ordre, des conséqueuces pratiques analogues à celles du théorème de Pascal pour les coniques.

Quand M décrit une droite quelconque (λ, μ) s'appuyant sur les deux droites $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ω engendre un faisceau du premier ordre. Ce faisceau a pour pôle le point

$$(14)\qquad (ln_1 - l_1 n)\lambda \mathrm{P} + (mn_1 - m_1 n)\mu \mathrm{Q} + (n_1 - n)\mathrm{S} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

et pour plan celui des trois points

$$\begin{cases} & R = 0, \\ (15) & l\lambda P + m\mu Q + S = 0, \\ (16) & l_1\lambda P + m_1\mu Q + S = 0. \end{cases}$$

On a des résultats analogues quand M décrit une droite (μ, ν) s'appuyant sur $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, ou une droite (ν, λ) s'appuyant sur $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{A}$.

Une cubique gauche φ_3 ayant pour cordes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et passant par les points D et E a des équations de la forme

$$(17) \qquad \frac{\lambda}{k} = \frac{\mu}{k'} = \frac{\nu}{k''}.$$

Si M décrit une pareille cubique, ω engendre un faisceau du premier ordre, ayant pour pôle le point

$$(18) \qquad (l - l_1)kP + (m - m_1)k'Q + (n - n_1)k''R = 0,$$

et pour plan celui des trois points

$$\begin{cases} & S = 0, \\ (19) & lkP + mk'Q + nk''R = 0, \\ (20) & l_1kP + m_1k'Q + n_1k''R = 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi quatre séries de faisceaux du premier ordre; tous les faisceaux d'une même série ont leurs pôles dans une même face du tétraèdre θ, de plus leurs plans passent par le sommet opposé à cette face; c'est d'ailleurs là une propriété connue du complexe tétraédral, de laquelle il résulte un mode simple de génération de ce tétraèdre.

La détermination du dernier point de rencontre de la surface S_3 *avec l'une des droites ou des cubiques considérées est ainsi ramenée à la détermination de la droite commune à un complexe du premier ordre et à un faisceau du premier ordre; il en résulte pour cette surface un mode pratique de description par points.*

Il reste à trouver du mode de correspondance établi entre M et ω une définition géométrique permettant d'obtenir simplement ω connaissant M, et inversement de revenir de ω à M.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

8. En tenant compte de ce que la droite ω appartient au complexe Σ_2, il suffit de trois conditions pour la déterminer; cherchons à faire intervenir séparément dans l'expression de ces conditions les paramètres λ, μ et ν.

Quand M décrit un plan quelconque passant par $\mathcal{A}$, ω engendre une congruence du premier ordre C_λ ayant pour directrices les droites

$$(21)\quad \begin{cases} Q = 0, \\ (22)\quad (ln_1 - l_1 n)\lambda P + (n_1 - n)S = 0; \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} R = 0, \\ (24)\quad (lm_1 - l_1 m)\lambda P + (m_1 - n)S = 0. \end{cases}$$

On obtiendrait facilement par permutation circulaire les directrices des congruences C_μ, C_ν engendrées par ω quand M décrit un plan quelconque passant par $\mathcal{B}$ ou par $\mathcal{C}$.

On retrouve ainsi le mode de génération connu du complexe tétraédral par des congruences du premier ordre. Les trois congruences C_λ, C_μ, C_ν ont en commun la droite ω; pour déterminer cette droite, il suffit, en tenant compte de ce qu'elle appartient à Σ_2, de lui imposer de rencontrer une directrice de chacune de ces congruences, par exemple la droite (23) et les deux suivantes, qui s'en déduisent par permutation circulaire

$$(25)\quad \begin{cases} P = 0, \\ (26)\quad (mn_1 - m_1 n)\mu Q + (n_1 - m)S = 0, \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} Q = 0, \\ (28)\quad (nl_1 - n_1 l)\nu R + (l_1 - l)S = 0. \end{cases}$$

On sait en effet déterminer simplement la droite d'un complexe tétraédral qui s'appuie sur trois droites menées respectivement par les sommets et dans les faces du tétraèdre principal. Si l'on remarque que les droites (23), (25), (27) passent respectivement par les points fixes R, P, Q, on voit que la détermination de ω est ramenée à celle des trois points (24), (26), (28), qui sont situés sur les droites fixes PS, QS, RS, et dépendent seulement, le premier de λ, le deuxième de μ, le troisième de ν.

Le point de rencontre ξ du plan variable $\mathcal{A}$M avec la droite fixe PS a

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

pour équation

$$[\lambda(\delta f + \delta' f' + \delta'' f'' + \delta''' f''') + \delta]\mathrm{P} - [\lambda(\alpha f + \alpha' f' + \alpha'' f'' + \alpha''' f''') + \alpha]\mathrm{S} = 0.$$

On obtient facilement par permutation circulaire les équations des points η et ζ où les plans variables $\mathfrak{B}$M, $\mathfrak{C}$M sont respectivement rencontrés par les droites fixes QS, RS. On voit ainsi que les points connus ξ, η, ζ sont reliés homographiquement aux points cherchés (24), (26), (28); pour que ces derniers coïncident respectivement avec les premiers, quels que soient λ, μ et ν, il suffit de poser

$$\delta = \delta' = \delta'' = 0,$$

$$\alpha f + \alpha' f' + \alpha'' f'' + \alpha''' f''' = 0,$$

$$\beta g + \beta' g' + \beta'' g'' + \beta''' g''' = 0,$$

$$\gamma h + \gamma' h' + \gamma'' h'' + \gamma''' h''' = 0;$$

$$(lm_1 - l_1 m)\alpha + (m_1 - m)\delta''' f''' = 0, \tag{30}$$

$$(mn_1 - m_1 n)\beta' + (n_1 - n)\delta''' g''' = 0, \tag{31}$$

$$(nl_1 - n_1 l)\gamma'' + (l_1 - l)\delta''' h''' = 0. \tag{32}$$

En tenant compte des hypothèses précédentes, on voit que le point S coïncide avec D et que les points P, Q, R sont pris arbitrairement dans les plans $\mathfrak{A}$E, $\mathfrak{B}$E, $\mathfrak{C}$E; les trois droites SP, SQ, SR peuvent donc être menées arbitrairement par le point D; nous les désignerons par α, β, γ. D'ailleurs on peut toujours disposer des paramètres l, l_1, m, ..., n_1, de manière à vérifier les relations (30), (31), (32). On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème II (Propriété de trois droites non concourantes et de huit points appartenant à une même surface du troisième ordre). — *Si, menant arbitrairement par l'un des points donnés* D *trois droites* α, β, γ, *et considérant un complexe tétraédral quelconque* Σ_2, *dont le tétraèdre principal a pour sommets* D *et les traces* P, Q, R *des droites* α, β, γ *sur les plans menés par les droites données* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *et par un autre des points donnés* E, *on fait correspondre à tout point* M *de l'espace la droite* ω *de* Σ_2, *qui s'appuie sur trois droites variables avec* M, *déduites les unes des autres par permutation circulaire, et obtenues en joignant l'un des points fixes* P, Q, R *à l'un de ceux où les plans* $\mathfrak{A}$M, $\mathfrak{B}$M, $\mathfrak{C}$M *sont rencontrés respec-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

tivement par les droites fixes α, β, γ, les six droites correspondantes aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre.

9. On peut éviter de faire intervenir le complexe Σ_2 dans les constructions qui donnent ω, et obtenir cette droite comme intersection de deux plans connus. Les six directrices des congruences, auxquelles appartient ω, passent deux à deux par les trois sommets P, Q, R de θ et déterminent ainsi trois plans qui se coupent suivant ω; on peut donc pour déterminer cette droite prendre deux de ces plans, par exemple les suivants que nous désignerons par V et W :

$$\text{Plan V.}\quad \begin{cases} & P = 0, \\ (33) & (mn_1 - m_1 n)\mu Q + (n_1 - n)S = 0, \\ (34) & (nm_1 - n_1 m)\nu R + (m_1 - m)S = 0; \end{cases}$$

$$\text{Plan W.}\quad \begin{cases} & Q = 0, \\ (35) & (ln_1 - l_1 n)\lambda P + (n_1 - n)S = 0, \\ (36) & (nl_1 - n_1 l)\nu R + (l_1 - l)S = 0. \end{cases}$$

On verrait, comme plus haut, que si l'on pose

$$\delta = \delta' = \delta'' = 0,$$
$$\alpha f + \alpha' f' + \alpha'' f'' + \alpha''' f''' = 0,$$
$$\beta g + \beta' g' + \beta'' g'' + \beta''' g''' = 0,$$
$$(37)\qquad (ln_1 - l_1 n)\alpha + (n_1 - n)\delta''' f''' = 0,$$
$$(38)\qquad (mn_1 - m_1 n)\beta' + (n_1 - n)\delta''' g''' = 0,$$

les points (33) et (35) sont les points de rencontre des plans $\mathfrak{A}M$, $\mathfrak{B}M$ avec les droites fixes PS, QS.

On connaît ainsi deux points de chacun des plans V et W; il reste à déterminer un troisième point de chacun d'eux. Pour le troisième point du plan V, on peut prendre un point quelconque de la droite qui joint le point P au point (34), par exemple le point de rencontre de cette ligne avec le plan $\mathfrak{S}M$; ce point a pour équation

$$(39)\qquad \begin{cases} \{(nm_1 - n_1 m)\nu[\nu(\gamma h + \gamma' h' + \gamma'' h'' + \gamma''' h''') + \gamma''] + (m_1 - m)\delta''' h'''\nu\} P \\ \quad - [\nu(\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \alpha''' h''') + \alpha''][(nm_1 - n_1 m)\nu R + (m_1 - m)S] = 0. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

De même, pour le troisième point du plan W, on peut prendre le point de rencontre du plan ΘM avec la droite qui joint le point Q au point (36).

Ce point a d'ailleurs pour équation

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l}\{(nl_1 - n_1 l)\nu[\nu(\gamma h + \gamma' h' + \gamma'' h'' + \gamma''' h''') + \gamma''] + (l_1 - l)\delta''' h'''\nu\}\mathrm{P} \\ \quad - [\nu(\beta h + \beta' h' + \beta'' h'' + \beta''' h''') + \beta''][(nl_1 - n_1 l)\nu\mathrm{R} + (l_1 - l)\mathrm{S}] = 0.\end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$(41)\qquad \alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \alpha''' h''' = 0,$$

$$(42)\qquad \beta h + \beta' h' + \beta'' h'' + \beta''' h''' = 0,$$

$$(43)\qquad \gamma h + \gamma' h' + \gamma'' h'' + \gamma''' h''' = 0,$$

les deux points (39) et (40) sont respectivement situés sur les droites fixes

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \mathrm{S} = 0, \\ (45) & [(nm_1 - n_1 m)\gamma'' + (m_1 - m)\delta''' h''']\mathrm{P} - (nm_1 - n_1 m)\alpha''\mathrm{R} = 0,\end{array}\right.$$

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \mathrm{S} = 0, \\ (47) & [(nl_1 - n_1 l)\gamma'' + (l_1 - l)\delta''' h''']\mathrm{Q} - (nl_1 - n_1 l)\beta''\mathrm{R} = 0.\end{array}\right.$$

En tenant compte des hypothèses faites, on voit que les troisièmes points des plans V et W sont ceux où le plan CM est rencontré par les droites fixes (44) et (46); d'ailleurs le point S coïncide avec D, de plus les points P, Q, R peuvent être pris arbitrairement, le premier sur la droite ($\mathcal{A}_0$, Θ_0), le second sur la droite ($\mathcal{B}_0$, Θ_0), enfin le troisième dans le plan Θ_0. D'autre part, on peut disposer des paramètres l, l_1, ..., n_1 de manière à vérifier les relations (37) et (38) et à faire prendre aux deux rapports, qui déterminent les directions des droites (44) et (46), des valeurs arbitraires; ces deux droites peuvent donc être menées arbitrairement par le point D, la première dans la face DPR, la seconde dans la face DQR du tétraèdre θ. D'ailleurs, si l'on ne se donne pas à l'avance le point R, les deux droites (44) et (46) peuvent être menées arbitrairement par le point D; nous désignerons la première par α et la seconde par β. On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME III (Propriété de trois droites non concourantes et de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

huit points appartenant à une même surface du troisième ordre). — *Si, désignant par* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, D, E *les trois droites et deux des points donnés, et par* P *et* Q *deux points pris arbitrairement sur les intersections respectives du plan* $\mathfrak{C}$E *avec les plans* $\mathfrak{A}$E, $\mathfrak{B}$E, *puis menant par* D *deux droites quelconques* α *et* β, *on fait correspondre à tout point* M *de l'espace la droite* ω, *intersection des deux plans menés respectivement par les points fixes* P *et* Q, *par les traces des droites fixes* DQ, DP *sur les plans* $\mathfrak{B}$M, $\mathfrak{A}$M *et, par celles des droites fixes* α *et* β *sur le plan* $\mathfrak{C}$M, *les six droites correspondantes aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre.*

L'énoncé de ce dernier théorème est moins symétrique que celui du théorème II, mais la droite ω correspondante au point M s'obtient immédiatement, sans que l'on soit obligé de considérer le complexe Σ_2, comme l'intersection de deux plans donnés chacun par trois points.

Nous avons supposé jusqu'ici que les droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ne se rencontrent pas; on peut supposer qu'elles soient concourantes deux à deux, mais il faut alors que leurs points de rencontre respectifs soient des points doubles de la surface S_3. On obtient ainsi, à l'aide des théorèmes II et III, deux énoncés de la propriété de trois points doubles et de huit points appartenant à une même surface du troisième ordre.

Nous allons montrer maintenant que le mode de correspondance étudié donne aussi une propriété de la courbe gauche du sixième ordre, suivant laquelle se coupent deux surfaces du troisième ordre, qui ont trois droites non concourantes communes.

III. — Courbe gauche du sixième ordre. — Groupe de points et de droites associés suivant le module trois. — Cubique gauche.

10. Il y a différentes espèces de courbes gauches du sixième ordre; nous allons étudier la courbe gauche du sixième ordre (S_3, S'_3) commune à toutes les surfaces du troisième ordre, qui passent par trois droites non concourantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et par six points D, E, 1, 2, 3, 4. Chacune des droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ rencontrant la courbe (S_3, S'_3) en quatre points, nous dirons, pour simplifier le langage, qu'elles sont, pour cette courbe, des droites de quadruple appui.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Si l'on considère un septième point quelconque 5 de la courbe (S_3, S'_3), toutes les surfaces du troisième ordre qui passent par les droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et par six des points D, E, 1, ..., 5 passent par le septième; par suite, tous les complexes du premier ordre, qui contiennent quatre des cinq droites $\omega_1, \ldots, \omega_5$, contiennent la cinquième. Cela exige que les cinq droites $\omega_1, \ldots, \omega_5$ appartiennent à une même congruence du premier ordre (Σ_1, Σ'_1).

Cette condition est d'ailleurs suffisante; en effet, les cinq droites $\omega_1, \ldots, \omega_5$ appartiennent en réalité à une même surface réglée du quatrième ordre $(\Sigma_2, \Sigma_1, \Sigma'_1)$; mais, comme elles sont par construction, en vertu du mode de correspondance, sur le complexe Σ_2, il suffit de leur imposer d'appartenir à la congruence (Σ_1, Σ'_1). De là résulte un théorème que nous énoncerons plus loin.

De même, si les trois droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et les six points D, E, 1, ..., 4 sont associés suivant le module trois, toutes les surfaces du troisième ordre, qui passent par ces droites et par cinq de ces points, passent par le sixième; par suite, tous les complexes du premier ordre, qui contiennent trois des quatre droites $\omega_1, \ldots, \omega_4$, contiennent la quatrième. Cela exige que les quatre droites $\omega_1, \ldots, \omega_4$ appartiennent à un même système de génératrices d'un hyperboloïde. On démontrerait d'ailleurs, comme plus haut, que cette dernière condition est suffisante.

Enfin on a vu (§ VII) qu'à une cubique gauche φ_3, passant par D et E et s'appuyant sur $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, correspond un faisceau du premier ordre, dont le pôle est dans la face s de θ, et dont le plan passe par le sommet S de ce tétraèdre. On obtient ainsi les trois théorèmes suivants :

Théorèmes IV, V, VI (Propriétés : 1° des trois droites de quadruple appui et de sept points d'une courbe gauche du sixième ordre; 2° de trois droites et de six points associés; 3° de trois cordes et de quatre points d'une cubique gauche). — *Si, désignant par* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, D, E *les trois droites et deux des points donnés, et par* P *et* Q *deux points pris arbitrairement sur les intersections respectives du plan* $\mathfrak{C}$E *avec les plans* $\mathfrak{A}$E, $\mathfrak{B}$E, *puis menant par* D *deux droites quelconques* α *et* β, *on fait correspondre à tout point* M *de l'espace la droite* ω, *intersection des deux plans menés respectivement par les points fixes* P *et* Q, *par les traces des droites fixes* DQ, DP, *sur les plans* $\mathfrak{B}$M, $\mathfrak{A}$M, *et par celles des droites fixes* α *et* β *sur le plan* $\mathfrak{C}$M :

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI.1 4

1° *Les cinq droites correspondantes aux derniers points de la courbe gauche appartiennent à une même congruence du premier ordre ;*

2° *Les quatre droites correspondantes aux derniers points associés appartiennent à un même système de génératrices d'un hyperboloïde ;*

3° *Les deux droites correspondantes aux derniers points de la cubique sont concourantes, de plus leur plan passe par le point* D.

11. On simplifie beaucoup les applications des théorèmes précédents en choisissant les points P et Q et les droites α et β, jusqu'ici arbitraires, de manière que les droites ω_1 et ω_2, qui correspondent à deux des points donnés, soient concourantes; voyons à quelle condition il en sera ainsi.

La courbe gauche du sixième ordre (S_3, S'_3) peut se dédoubler en deux cubiques gauches ψ_3 et ψ'_3, ayant toutes deux pour cordes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, passant la première par D, la seconde par E, et, de plus, se rencontrant en deux points; dans ce cas, la surface réglée du quatrième ordre $(\Sigma_2, \Sigma_1, \Sigma'_3)$ se dédouble en deux hyperboloïdes, l'un H circonscrit au tétraèdre θ, l'autre H′ inscrit dans ce même tétraèdre; le premier correspond à ψ_3, le second à ψ'_3. Cherchons ce qui caractérise, parmi les cubiques ψ'_3, celles pour lesquelles les génératrices de H′ deviennent les tangentes à une conique.

Toute cubique ψ'_3 a des équations de la forme

$$\begin{cases} (1) & \lambda = k\nu + j, \\ (2) & \mu = k_1\nu + j_1. \end{cases}$$

Les équations des deux points T et T_1, qui déterminent ω, deviennent alors, pour un point de ψ'_3,

$$(3) \qquad (lk\,P + mk_1\,Q + n\,R)\nu + (lj\,P + mj_1\,Q + S) = 0,$$

$$(4) \qquad (l_1k\,P + m_1k_1\,Q + n_1R)\nu + (l_1j\,P + m_1j_1\,Q + S) = 0.$$

Pour que ω reste, quel que soit ν, dans un plan fixe, il faut que les quatre points

$$\begin{aligned} lk\,P + mk_1\,Q + n\,R &= 0, \\ lj\,P + m_1j_1\,Q + S &= 0, \\ l_1k\,P + m_1k_1\,Q + n_1R &= 0, \\ l_1j\,P + m_1j_1\,Q + S &= 0 \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

soient dans un même plan; on en déduit, pour la condition cherchée,

$$(5)\qquad \frac{(m-m_1)(ln_1-l_1n)}{(l-l_1)(mn_1-m_1n)}=\frac{jk_1}{kj_1}.$$

Les plans menés par la droite $\mathcal{O}$ et par les troisièmes traces de ψ'_3 sur les plans x et y ont pour équation

$$(6)\qquad kz-j\,\mathcal{O}_0=0,$$

$$(7)\qquad k_1z-j_1\mathcal{O}_0=0.$$

La condition (5) signifie que le rapport anharmonique des quatre points z, $\mathcal{O}_0$, (6), (7), est constant et égal au paramètre du complexe tétraédral. D'ailleurs on sait que le rapport anharmonique des quatre plans menés par quatre points fixes d'une cubique gauche et par une quelconque de ses cordes est constant; par suite, une fois la cubique déterminée, ce rapport ne dépend que des points considérés; on peut donc l'appeler rapport anharmonique des quatre points de la cubique. Cette dénomination étant adoptée, les cubiques ψ_3, pour lesquelles l'hyperboloïde H′ se réduit aux tangentes à une conique, sont celles qui sont coupées par les quatre plans z, $\mathcal{O}_0$, x, y suivant un rapport anharmonique constant et égal au paramètre de Σ_2; elles forment un complexe analogue au complexe tétraédral de droites. Pour que les droites ω_1, ω_2 soient concourantes, il suffit de prendre le paramètre de Σ_2 égal au rapport anharmonique des quatre plans z, $\mathcal{O}_0$, (6), (7); c'est là une condition à laquelle il est toujours facile de satisfaire, parce que le paramètre de Σ_2 représente aussi le rapport anharmonique de quatre plans. On peut d'ailleurs ne pas faire intervenir le complexe Σ_2 dans la détermination des deux droites α et β.

Considérons les deux plans V_1 et W_1, dont l'intersection est la droite ω_1 correspondante au point 1; chacun de ces plans est déterminé par trois points. Par exemple, V_1 est donné par le point fixe P, par la trace de la droite fixe DQ sur le plan ($\mathfrak{B}$, 1) et par celle de la droite fixe α sur le plan $\mathcal{O}_1$. Sur ces trois points, un seul, le dernier, dépend de la droite α, les deux autres peuvent être déterminés avant qu'on ait choisi cette ligne : il suffit que l'on se soit donné les points P et Q. Il en est de même pour le plan W_1 et pour les plans V_2, W_2 qui déterminent ω_2.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Imaginons maintenant que l'on se donne arbitrairement le point de rencontre ε des droites ω_1, ω_2; les quatre plans V_1, V_2, W_1, W_2 devant passer par ε, on connaît trois points de chacun d'eux; on peut donc les considérer comme des plans connus. On a alors, pour déterminer les droites α et β la construction suivante : *La droite α est celle qui, menée par le point* D, *s'appuie sur les intersections respectives des plans* $(\mathcal{E}, 1)$, $(\mathcal{E}, 2)$ *avec les plans* V_1, V_2; *de même la droite β est celle qui, menée par le point* D, *s'appuie sur les intersections respectives des plans* $(\mathcal{E}, 1)$, $(\mathcal{E}, 2)$ *avec les plans* W_1, W_2.

En choisissant, comme nous venons de le dire, les droites α et β, les droites ω_1, ω_2 se coupent au point ε et déterminent un plan que nous appellerons π.

On connaît trois sommets du tétraèdre θ : ce sont les points D, P, Q; le quatrième sommet R de ce tétraèdre est le point de rencontre des droites que joignent respectivement les points P et Q aux traces des droites α et β sur le plan $\mathcal{E}$E. Pour le complexe Σ_2, il est déterminé par son tétraèdre principal θ et par l'une ou l'autre des droites ω_1, ω_2.

12. Voyons maintenant comment se modifient, avec le choix indiqué des droites α et β, les conclusions du théorème précédent.

Pour la surface du troisième ordre, le complexe Σ_1 est donné par un plan π et son pôle ε, et par trois droites ω_3, ω_4, ω_5; il est alors très facile de déterminer relativement à ce complexe le pôle d'un plan donné ou, inversement, le plan qui a pour pôle un point donné.

Remarque. — Dans le cas particulier où les quatre points E, 1, 2, 3 sont sur une cubique gauche admettant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ pour cordes, l'énoncé du théorème III se simplifie; on a la nouvelle conclusion suivante :

Les traces des trois droites correspondantes aux derniers points de la surface sur le plan π sont en ligne droite.

Pour la courbe gauche (S_3, S'_3), la congruence correspondante (Σ_1, Σ'_1) a pour directrices la droite qui joint la trace des droites ω_3, ω_4 sur le plan π et la droite suivant laquelle se coupe le plan mené par les mêmes droites ω_3, ω_4 et par le point ε. On a alors, pour le théorème IV, la nouvelle conclusion suivante :

Les traces des droites correspondantes aux derniers points de la courbe

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

sur le plan π sont en ligne droite; de plus, les trois plans menés par ces mêmes droites et par le point ε se coupent suivant une droite.

Pour le groupe de points associés, l'hyperboloïde ω_1, ω_2, ω_3 se dédouble en deux faisceaux plans : le premier a pour pôle ε et pour plan π, le second a pour pôle la trace de ω_3 sur π et pour plan celui qui est déterminé par la droite ω_3 et par le point ε. On a alors, pour le théorème V, la nouvelle conclusion suivante :

Les deux droites correspondantes aux derniers points associés sont aussi concourantes; leur point de rencontre est situé dans le plan π; de plus, leur plan passe par le point ε.

On peut supposer que les droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ soient concourantes, pourvu que l'on admette en même temps que leurs points de rencontre respectifs soient des points doubles de la courbe du sixième ordre. On obtient alors, à l'aide du théorème IV, une propriété de trois points doubles et de sept points d'une courbe gauche du sixième ordre. On obtient de même une relation entre trois points doubles et six points associés suivant le module trois; de même, enfin, une relation entre sept points d'une cubique gauche.

IV. — Propositions corrélatives.

13. Toutes les surfaces de la troisième classe, qui passent par trois droites non concourantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et sont tangentes à six plans sont inscrites dans une même développable de la sixième classe. Par chacune des trois droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, on peut mener quatre plans tangents à cette développable; nous dirons, pour simplifier le langage, que ces droites sont, pour la développable considérée, des arêtes de quadruple tangence. En appliquant aux résultats obtenus plus haut la méthode de transformation par polaires réciproques, on obtient les théorèmes suivants :

Théorèmes VII, VIII, IX, X (Propriétés : 1° de huit plans tangents à une surface de la troisième classe et de trois droites non concourantes de cette surface; 2° de sept plans tangents à une développable de la

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

sixième classe et des arêtes de quadruple tangence de cette surface; 3° de trois droites et de six plans associés; 4° de quatre plans tangents à une développable cubique et de trois arêtes de double tangence de cette surface). — *Si, désignant par* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, D, E *les trois droites et deux des plans donnés, et par* P *et* Q *deux plans menés arbitrairement par les droites qui joignent le point* ($\mathcal{C}$, E) *aux points* ($\mathcal{A}$, E), ($\mathcal{B}$, E); *puis, traçant dans le plan* D *deux droites quelconques* α *et* β, *on fait correspondre à tout plan* M *de l'espace la droite* ω, *qui joint les deux points de rencontre des plans fixes* P *et* Q *avec les droites, suivant lesquelles les plans menés par les points* ($\mathcal{B}$, M), ($\mathcal{A}$, M) *et par les droites fixes* (D, Q), (D, P) *coupent respectivement les plans menés par le point* ($\mathcal{C}$, M) *et par les droites* α *et* β :

1° *Les six droites correspondantes aux derniers plans tangents à la surface appartiennent à une même complexe du premier ordre.*

2° *Les cinq droites correspondantes aux derniers plans tangents à la développable appartiennent à une même congruence du premier ordre.*

3° *Les quatre droites correspondantes aux derniers plans associés appartiennent à un même système de génératrices d'un hyperboloïde.*

4° *Les deux droites correspondantes aux derniers plans tangents à la développable cubique sont concourantes; de plus, leur point de rencontre est situé dans le plan* D.

On pourrait d'ailleurs déterminer, comme plus haut, les droites α et β, de manière que les droites correspondantes à deux des plans donnés soient concourantes, et énoncer les nouvelles conclusions qui résultent de ce choix pour les deux théorèmes relatifs à la développable de la sixième classe et au groupe de plans associés; il suffit pour cela de transformer par la méthode des polaires réciproques, ce qui a été dit aux n°s 11 et 12.

Nous allons maintenant étudier les conséquences pratiques des théorèmes obtenus.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

CHAPITRE II.

APPLICATIONS : DESCRIPTIONS PAR POINTS DE LA SURFACE DU TROISIÈME ORDRE ET DE LA COURBE GAUCHE DU SIXIÈME ORDRE. PROBLÈMES DIVERS.

14. Nous allons montrer que les théorèmes obtenus dans le Chapitre précédent permettent de ramener un grand nombre de problèmes du premier et du second degré sur les surfaces du troisième ordre, et quelques-unes de leurs courbes d'intersection, à des constructions que l'on sait exécuter sur des systèmes de droites. La résolution d'un problème sur les surfaces du troisième ordre comprendra alors trois parties : 1° on effectuera, une fois pour toutes, certaines constructions préliminaires pour transformer le problème proposé en un problème sur des systèmes de droites; 2° on résoudra ce dernier problème; 3° on repassera du résultat obtenu pour le problème auxiliaire à la solution du problème proposé. Nous allons indiquer rapidement les solutions de plusieurs de ces problèmes auxiliaires.

PROBLÈME I. — *Trouver la droite* ω *correspondante à un point donné* M.

L'énoncé du théorème III montre que la droite ω est l'intersection de deux plans donnés chacun par trois points.

PROBLÈME II. — *Revenir de la droite* ω *au point* M.

Les plans menés par ω et par les points fixes Q et P coupent respectivement les droites fixes DP, DQ en deux points qui appartiennent le premier au plan $\mathcal{A}$M, le second au plan $\mathcal{B}$M; ces deux plans sont ainsi déterminés chacun par une droite et un point. De même les plans menés par ω et par les points fixes Q et P rencontrent les droites fixes α et β en deux points qui appartiennent au plan $\mathcal{C}$M; un seul de ces points suffit pour déterminer ce plan. Le point M est alors le point de rencontre de trois plans donnés chacun par une droite et un point.

Remarquons que le plus souvent on donne dans l'énoncé du pro-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

blème un plan ou une droite passant par le point cherché M, on connaît alors un ou deux des trois plans $\mathfrak{a}$M, $\mathfrak{b}$M, $\mathfrak{c}$M; il en résulte une grande simplification dans la construction précédente.

Nous avons vu que le plan $\mathfrak{c}$M est donné par une droite et par deux points : cela exige que cette droite et ces deux points soient dans un même plan, et cela a lieu précisément parce que la droite ω appartient, par construction, au complexe Σ_2 ; de là résulte pour ce complexe la définition très simple suivante : *La droite, qui joint les traces respectives des droites fixes α et β sur les plans menés par les points* P *et* Q *et par une droite quelconque ω de Σ_2, passe par un point fixe.*

Problème III. — *Détermination des éléments du complexe tétraèdral Σ_2.*

1° *Tétraèdre principal* θ. — Ce tétraèdre a pour sommets les points D, P, Q, et le point de rencontre des droites, qui joignent respectivement les points P et Q, aux traces des droites α et β sur le plan $\mathfrak{c}$E.

2° *Directrices d'une congruence quelconque du premier ordre appartenant à Σ_2.* — Par la trace de la droite $\mathfrak{c}$ sur le plan des deux droites α et β, on mène, dans ce plan, une droite quelconque, qui rencontre les droites α et β en deux points; en joignant respectivement ces points aux points fixes P et Q, on obtient les directrices cherchées.

3° *Cônes des droites du complexe Σ_2, qui passent par un point de l'espace.* — On connaît quatre génératrices du cône, ce sont les droites menées du point donné aux sommets du tétraèdre θ; on a une cinquième génératrice du cône en menant par le point donné une droite, qui s'appuie sur les deux directrices d'une des congruences du premier ordre, obtenues comme on vient de le dire.

4° *Faisceau plan du complexe Σ_2, qui a pour pôle un point donné dans l'une des faces du tétraèdre principal* θ. — Ce problème est un cas particulier du précédent : au lieu d'un cône on obtient deux faisceaux plans; le plan de l'un des faisceaux est précisément celui de la face de θ où se trouve le point donné. Le plan de l'autre faisceau passe par le point donné et par le sommet de θ opposé à la face où se trouve le point donné : enfin on a une droite de ce plan en menant par le point donné une droite qui s'appuie sur les deux directrices d'une congruence quelconque de Σ_2, obtenues comme nous l'avons dit plus haut.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

PROBLÈME IV. — *Détermination des éléments du complexe* Σ_1.

Ce complexe est donné par un plan π et son pôle ε et par les trois droites ω_3, ω_4, ω_5; on obtient alors facilement les directrices d'autant de congruences du premier ordre que l'on veut de ce complexe; il en résulte une détermination immédiate du pôle d'un plan donné, et inversement du plan qui a pour pôle un point donné. Nous désignerons par d_1, p_1, q_1, r_1 les plans qui ont pour pôles, relativement à Σ_1, les sommets D, P, Q, R du tétraèdre θ, et de même par D_1, P_1, Q_1, R_1 les pôles des faces d, p, q, r de θ relativement au même complexe.

PROBLÈME V. — *Détermination des éléments de la congruence tétraédrale.*

Les deux droites de la congruence tétraédrale (Σ_2, Σ_1), qui passent par un point donné, sont les intersections du cône relatif à Σ_2 avec le plan relatif à Σ_1. Dans le cas particulier où le point donné est situé dans l'une des faces de θ, l'une des droites s'obtient en joignant le point donné au pôle de cette face relativement à θ; l'autre est l'intersection des plans des deux faisceaux relatifs, l'un à Σ_1, l'autre à Σ_2. D'ailleurs la congruence tétraédrale comprend les quatre faisceaux du premier ordre qui ont pour pôles les sommets D, P, Q, R de θ et pour plans les plans d_1, p_1, q_1, r_1; elle comprend de même les quatre faisceaux qui ont pour plans les faces d, p, q, r de θ et pour pôles les points D_1, P_1, Q_1, R_1.

PROBLÈME VI. — *Détermination de la surface tétraédrale* $(\Sigma_2, \Sigma_1, \Sigma'_1)$.

La congruence du premier ordre est déterminée par le plan π et son pôle ε et par les droites ω_3, ω_4; on a alors immédiatement ses directrices : l'une est la droite qui joint les traces des droites ω_3, ω_4 sur le plan π, l'autre est la droite d'intersection des plans menés par le point ε et ces mêmes droites ω_3, ω_4. Si maintenant on considère le cône de Σ_2 qui a pour sommet un point pris arbitrairement sur l'une des directrices, que nous venons d'obtenir, les deux droites de ce cône qui s'appuient sur l'autre directrice sont deux génératrices de la surface tétraédrale. Cette surface est à la fois circonscrite au tétraèdre θ et inscrite dans ce même tétraèdre. Les génératrices de la surface tétraédrale qui passent par les sommets D, P, Q, R sont les intersections respectives des plans d_1, p_1, q_1, r_1, relatifs à Σ_1, avec les plans d'_1, p'_1, q'_1, r'_1,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

relatifs à Σ'_1; de même les génératrices de cette surface, qui sont situées dans les faces d, p, q, r de θ, s'obtiennent en joignant respectivement les pôles D_1, P_1, Q_1, R_1, relatifs à Σ_1, aux pôles D'_1, P'_1, Q'_1, R'_1, relatifs à Σ'_1.

Surface du troisième ordre donnée par trois droites non concourantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et par sept points D, E, 1, 2, 3, 4, 5.

15. Problème I. — *Trouver le dernier point de rencontre de la surface avec une droite quelconque, qui s'appuie sur deux des droites données.*

On est ramené à trouver sur un complexe du premier ordre Σ_1, donné par un plan π et son pôle ε et par trois droites ω_3, ω_4, ω_5, la droite qui se trouve dans un plan et passe par un point. D'ailleurs, si la droite donnée L s'appuie, par exemple, sur $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, le plan qui contient ω est le plan W; pour le point par lequel passe ω, il est l'intersection de ce même plan W avec la droite qui joint le point fixe Q à la trace de la droite fixe β sur le plan $\mathfrak{C}$L. Quand on a déterminé ω, on revient de cette droite à M; d'ailleurs la construction à effectuer pour cela est très simple, parce que ce point est sur la droite L. Effectivement le point M est la trace de la droite L sur le plan mené par la droite $\mathfrak{A}$ et par le point de rencontre de la droite fixe DQ avec le plan ωP. Il résulte de là, pour la surface du troisième ordre, un mode de description par points, qui exige seulement l'emploi de la règle.

La construction précédente peut être beaucoup simplifiée si, tenant compte de ce que le plan variable W passe toujours par le point fixe Q, on détermine une fois pour toutes le plan q_1 qui a pour pôle le point Q relativement au complexe Σ_1.

Problème II. — *Trouver le dernier point de rencontre de la surface avec une cubique gauche quelconque, ayant pour cordes les trois droites données et passant par deux des points donnés.*

La cubique considérée φ est déterminée par ses trois cordes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, par les deux points D et E, et par un point M′ donné arbitrairement dans l'espace. Si l'on désigne par ω' la droite correspondante à M′, on voit qu'aux points de φ correspondent les droites d'un faisceau du premier ordre, qui a pour pôle le point (ω', d) et pour plan le plan

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

(ω', D). Le problème proposé est ainsi ramené au suivant : Trouver la droite ω de Σ_1, qui est située dans le plan (ω', D) et passe par le point (ω', d) de ce plan.

On peut faire ici les mêmes remarques que pour le problème précédent.

Cas particulier. — *Déterminer la cubique φ de manière qu'elle soit tangente en* D *à la surface.*

Il suffit, pour cela, que le plan du faisceau correspondant à φ coupe le plan d suivant une droite appartenant à Σ_1; on peut donc prendre pour plan du faisceau considéré l'un quelconque des plans menés par la droite DD_1. D'ailleurs, une fois le plan du faisceau choisi, on détermine facilement son pôle, en tenant compte de ce que ce faisceau appartient au complexe Σ_2.

Problème III. — *Déterminer la conique suivant laquelle la surface est coupée par un plan quelconque passant par l'une des trois droites données.*

Soit (μ) le plan donné, mené arbitrairement par C; aux différents points de ce plan correspondent les droites d'une congruence du premier ordre, qui a pour directrices les droites menées respectivement par les points fixes P et Q et par les traces des droites fixes α et β sur le plan donné (μ). Aux points de la conique cherchée correspondent les génératrices de l'hyperboloïde commun au complexe Σ_1 et à la congruence dont nous venons de parler.

En particulier, si le plan μ est le plan CD, l'hyperboloïde correspondant se réduit au faisceau du premier ordre qui a pour plan r et pour pôle R_1. De même, si (μ) est le plan CE, l'hyperboloïde correspondant se réduit au faisceau du premier ordre qui a pour pôle R et pour plan r_1.

Problème IV. — *Plan tangent en un point quelconque de la surface.*

On détermine deux coniques passant par ce point; les tangentes en ce point aux deux coniques donnent le plan tangent cherché.

Problème V. — *Déterminer la quartique gauche unicursale, intersection de la surface avec un hyperboloïde quelconque passant par deux des droites et deux des points donnés.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Soit H un hyperboloïde quelconque passant par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, D, E; son équation est de la forme

$$\frac{\lambda}{k} = \frac{\mu}{k'}. \tag{1}$$

Si l'on se reporte aux équations (9) et (10), n° 5, on voit que la droite ω, correspondante à un point M qui se déplace sur H, engendre une congruence du premier ordre, dont les directrices sont les droites menées respectivement par les points fixes R et D et par les points

$$(l - l_1)kP + (m - m_1)k'Q = 0, \tag{2}$$

$$(ln_1 - l_1 n)kP + (mn_1 - m_1 n)k'Q = 0. \tag{3}$$

D'autre part, l'hyperboloïde H est déterminé par un point M'; si l'on appelle ω' la droite correspondante à M', la congruence relative à H a pour directrices les droites qui joignent respectivement les points fixes R et D aux traces de ω' sur les faces d et r de θ. Aux points de la quartique cherchée correspondent les génératrices de l'hyperboloïde commun à la congruence précédente et au complexe Σ_1.

Remarque. — Le problème que nous venons de résoudre est un cas particulier de l'intersection de la surface S_3 avec une surface réglée passant par deux des droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et dont on sait déterminer les génératrices.

16. Parmi les problèmes du second degré, nous citerons les suivants :

Problème VI. — *Trouver les deux derniers points de rencontre de la surface avec une cubique gauche quelconque, ayant pour cordes les droites données et passant par l'un des points donnés.*

Soit φ la cubique donnée : elle est déterminée par les cordes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, par le point E de la surface et par deux points M' et M'', donnés arbitrairement dans l'espace ; on sait qu'aux points d'une pareille cubique correspondent les génératrices d'un hyperboloïde inscrit dans le tétraèdre θ et déterminé par les deux droites ω' et ω''. Les deux droites ω correspondantes aux deux points M cherchés sont donc les deux droites communes au complexe Σ_1 et à l'hyperboloïde précédent.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Cas particulier. — *Intersection de la surface avec une droite quelconque menée par l'un des points donnés.*

On opère comme dans le cas de la cubique.

Remarque. — La construction précédente permet d'obtenir par points l'intersection de S_3 avec un cône ayant pour sommet l'un des points donnés, et dont on sait déterminer les génératrices. Il en est de même pour l'intersection de S_3 avec une surface quelconque engendrée par des cubiques, qui admettent pour cordes les droites $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et passent par l'un des points donnés, pourvu que l'on sache déterminer ces cubiques.

Nous citerons, en particulier, l'intersection de la surface S_3 avec un plan quelconque mené par l'un des points donnés.

Problème VII. — *Déterminer les deux droites de la surface, qui s'appuient sur deux des droites données.*

Soit L la droite cherchée, qui s'appuie sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$; le faisceau F correspondant à L doit appartenir à la fois à Σ_2 et à Σ_1 ; désignons par X et x le pôle et le plan de ce faisceau. Le faisceau F appartenant à Σ_1 et à Σ_2, son pôle X est situé dans le plan p_1, et inversement son plan passe par le point P_1 ; il en résulte que le point X est sur la droite (p, p_1) et que le plan x passe par la droite P, P_1. Tout revient donc à trouver un faisceau F de Σ_2, dont le pôle soit sur la droite (p, p_1) et dont le plan passe par la droite PP_1.

Lorsque le sommet X du faisceau F de Σ_2 décrit la droite (p, p_1), son plan enveloppe un cône du second ordre, et la trace de ce plan sur le plan p enveloppe une conique ψ tangente à la droite (p, p_1) et aux trois arêtes de 0 situées dans la face p ; on a d'ailleurs immédiatement une cinquième tangente à cette conique en considérant une position quelconque du faisceau F. Si maintenant on mène à la conique ψ deux tangentes par le point P_1, les faisceaux cherchés ont pour pôles les points de rencontre de la droite (p, p_1) avec ces deux tangentes, et pour plans ceux qui sont déterminés par ces mêmes tangentes et par le point P. On passe d'ailleurs facilement des faisceaux obtenus F et F′ aux deux droites L et L′ cherchées.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

PROBLÈME VIII. — *Tracer sur la surface les deux cubiques gauches qui admettent pour cordes les trois droites données et passent par deux des points donnés* D *et* E.

A la cubique cherchée correspond un faisceau F, dont le pôle est situé dans le plan d, et dont le plan passe par le point D ; d'ailleurs ce faisceau F doit appartenir à la fois à Σ_2 et à Σ_1; par suite, pour résoudre le problème proposé, il suffit d'exécuter relativement au plan d et au point D les constructions indiquées, dans le problème précédent, relativement au plan p et au point P.

II. — Courbe gauche du sixième ordre commune à toutes les surfaces du troisième ordre, qui passent par trois droites non concourantes et par six points donnés.

17. PROBLÈME IX. — *Trouver les deux dernières traces de la courbe sur un plan quelconque mené par l'une des droites données.*

Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, D, E, 1, 2, 3, 4 les droites et les points qui déterminent la courbe φ. On construit une fois pour toutes (n° 12) la droite ξ qui joint les traces des droites ω_3, ω_4 sur le plan π, et la droite η suivant laquelle se coupent les plans menés par ces mêmes droites et par le point ε ; les droites ξ et η ainsi obtenues sont les directrices de la congruence du premier ordre correspondante à φ.

Si maintenant on désigne par (ν) le plan sécant donné, et supposé mené arbitrairement par $\mathfrak{c}$, on voit, d'après l'énoncé du théorème IV, qu'aux points de ce plan (ν) correspond une congruence du premier ordre, qui a pour directrices les droites g et h menées respectivement par les points fixes P et Q et par les traces des droites fixes α et β sur le plan ν. *On est alors ramené à trouver les deux droites* ω *et* ω' *qui s'appuient sur les quatre droites* ξ, η, g *et* h; les points cherchés sont ceux qui correspondent aux deux droites ω et ω'.

On remarque que, sur les quatre droites ξ, η, g et h, les deux premières sont fixes, et que les deux autres passent chacune par un point fixe et sont situées chacune dans un plan fixe ; c'est ce qui permet d'obtenir facilement par points l'épure de la courbe φ.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

PROBLÈME X. — *Trouver les deux dernières traces de la courbe sur un hyperboloïde quelconque mené par deux des droites et par deux des points donnés.*

Nous avons vu au problème V qu'à un hyperboloïde quelconque H passant par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, D, E correspond une congruence du premier ordre dont on obtient facilement les directrices. Une fois ces directrices déterminées, le problème proposé se résout comme le précédent.

Les deux problèmes que nous venons de résoudre donnent, pour la courbe gauche du sixième ordre considérée, un mode de description par points, qui exige seulement l'emploi de la règle et du compas.

On obtiendrait de même par points l'intersection de deux surfaces du troisième ordre ayant trois droites non concourantes communes et déterminées chacune par sept points.

PROBLÈME XI. — *Étant donnée une courbe gauche du sixième ordre par ses trois droites de quadruple appui et par six points, on demande de mener par un point de l'espace et par l'un des points donnés une cubique gauche qui s'appuie en deux points sur la courbe donnée et admette comme cordes les trois droites données.*

Le problème proposé admet deux solutions. Si l'on considère la surface du troisième ordre S_3 déterminée par les trois droites et les sept points donnés, on est ramené à tracer sur cette surface les deux cubiques gauches, qui passent par les deux points indiqués et admettent comme cordes les trois droites données (*Problème VIII*). Il est d'ailleurs facile de déterminer les deux points où chacune des cubiques s'appuie sur la courbe du sixième ordre.

III. — Problèmes divers.

18. PROBLÈME XII. — *Détermination du dernier point associé à trois droites et à cinq points donnés.*

En conservant les notations adoptées pour les problèmes précédents et en désignant par ω la droite correspondante au point cherché M, on voit que ω est dans le plan $\varepsilon\omega_3$ et passe par la trace de cette même

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

droite ω_3 sur le plan π. Les droites de Σ_2, qui sont situées dans le plan $\varepsilon\omega_3$, enveloppent une conique tangente à ω_3 et aux quatre traces de ce plan sur les faces de θ; la droite ω, correspondante au point cherché, est la sixième tangente, que l'on peut mener à la conique considérée par le point (π, ω_3) pris sur l'une des cinq tangentes qui la déterminent. On voit que la solution du problème proposé exige seulement l'emploi de la règle.

Problème XIII. — *Trouver les deux derniers points communs à trois surfaces du troisième ordre qui passent par trois droites non concourantes et par quatre points donnés, et sont déterminées chacune par trois autres points donnés.*

Si l'on désigne par Σ_1, Σ'_1, Σ''_1 les trois complexes du premier ordre qui correspondent aux trois surfaces données, on voit que ces trois complexes ont en commun un faisceau du premier ordre et sont déterminés chacun par trois droites. L'hyperboloïde commun aux complexes considérés se dédouble alors en deux faisceaux du premier ordre : l'un de ces faisceaux a pour pôle le point ε et pour plan le plan π ; il est alors facile de déterminer le pôle et le plan du second de ces faisceaux. On est alors ramené à chercher les deux droites de Σ_2, qui sont dans un plan connu et passent par un point donné de ce plan.

19. On sait résoudre la plupart des problèmes sur les cubiques gauches ; aussi nous étudierons seulement sur ces courbes le problème suivant :

Problème XIV. — *Étant donnée une cubique gauche par trois cordes non concourantes et trois points, on demande de mener par deux nouveaux points donnés une cubique gauche s'appuyant en deux points sur la première, et admettant pour cordes les trois droites données.*

Désignons par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, E, 1, 2 les droites et les points qui déterminent la cubique donnée φ et par D et 3 les deux points par lesquels doit être menée la cubique cherchée ψ. A la cubique φ correspondent les droites de Σ_2 situées dans le plan π et enveloppant une conique. De même, à la cubique cherchée ψ correspondent les droites de Σ_2 qui

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

passent par la trace de ω_3 sur le plan π. On sait que ces droites forment un cône et l'on a cinq génératrices de ce cône.

Les deux droites, suivant lesquelles le cône considéré est coupé par le plan π, sont les droites correspondantes aux deux points où la cubique cherchée s'appuie sur la cubique donnée.

20. Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers des problèmes précédents.

Quand le point E est un point double, la surface est déterminée par le point D et deux autres points. Nous verrons plus loin que la surface du troisième degré à point double se compose de cubiques gauches comme le plan se compose de droites. Dans ce cas, voici comment se modifie la conclusion du théorème III : *Les traces des trois droites correspondantes aux derniers points de la surface sur le plan* $\mathfrak{S}$ E *sont en ligne droite.*

Courbe gauche du sixième degré unicursale. — Si l'on considère la courbe suivant laquelle la surface S_3 est coupée par une surface du troisième ordre à point double, on voit que cette courbe, admettant aussi un point double, est unicursale. La construction donnée plus haut pour la courbe gauche du sixième ordre se simplifie et exige seulement l'emploi de la règle.

Courbe gauche unicursale du cinquième ordre. — Lorsque l'un des points qui déterminent la courbe gauche du sixième ordre (S_3, S'_3) se trouve sur l'une des droites menées par D et s'appuyant sur l'une des trois droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$, cette courbe se dédouble en une droite et une courbe gauche unicursale du cinquième ordre. La construction donnée pour le cas général s'applique encore, mais elle se simplifie beaucoup et exige seulement l'emploi de la règle.

On aurait aussi des cas particuliers des problèmes étudiés en supposant que les droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}$ sont concourantes et en admettant que leurs points de rencontre sont des points doubles des surfaces considérées. Les problèmes particuliers correspondants se résolvent comme dans le cas général.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

IV. — Tracé des courbes sur la surface du troisième ordre. — Représentation de cette surface sur un plan.

21. On sait que l'on peut faire correspondre analytiquement à un point d'une surface du troisième ordre un point d'un plan (¹); nous allons indiquer comment cette représentation de la surface du troisième ordre sur un plan peut être obtenue géométriquement. Considérons un point quelconque N de l'espace, par ce point passent deux droites ω et ω' de la congruence tétraédrale; d'ailleurs ces deux droites s'obtiennent facilement comme intersections du cône relatif à Σ_2 avec le plan relatif à Σ_1. A ces deux droites ω, ω' correspondent deux points M et M′ de S_3. Si maintenant on imagine que le point N décrit une courbe quelconque φ de l'espace, les points M et M′ engendrent une courbe ψ tracée sur S_3. A toute courbe φ que l'on sait décrire dans le plan ou dans l'espace correspond une courbe ψ que l'on sait tracer sur une surface du troisième ordre. Si les points de φ s'obtiennent un par un, ceux de ψ s'obtiennent par groupes de deux. Dans le cas particulier où N est dans l'une des faces de θ, par ce point passe seulement une génératrice ω de la congruence tétraédrale, et par suite à chaque point N de cette face correspond un seul point M de S_3. Si la courbe décrite par N dans la face considérée de θ est unicursale, la courbe correspondante tracée par M sur S_3 est aussi unicursale. Nous allons étudier quelques-unes des transformées planes des courbes tracées sur S_3.

Si l'on désigne par λ, μ, ν les coordonnées d'un point M pris sur S_3 et par N le point qui lui correspond sur la face PQR de θ, on voit que ce point N a pour équation

$$(1) \qquad (l - l_1)\lambda P + (m - m_1)\mu Q + (n - n_1)\nu R = 0.$$

Si ce point décrit une droite, le point M trace sur S_3 une courbe gauche unicursale du sixième ordre, qui admet pour point double le point E et qui passe par le point D; d'ailleurs, de même que la droite décrite par N est déterminée par deux points, la courbe décrite par M l'est aussi par deux points, en tenant compte des conditions auxquelles elle est tout d'abord assujettie.

(¹) Cremona, Mémoire cité.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

De là résulte un moyen de transporter aux courbes tracées sur les surfaces du troisième ordre certaines propriétés descriptives des courbes planes. Si, par exemple, on désigne par ψ_1 les courbes gauches unicursales du sixième ordre dont nous venons de parler et par ψ_2 la courbe décrite par M sur S_3 quand N engendre une conique dans le plan PQR; on a entre six points d'une courbe ψ_2 la relation suivante : *Si l'on considère l'hexagone curviligne ayant pour sommets les points de ψ_2, et formé par des courbes ψ_1, les côtés opposés de cet hexagone se rencontrent respectivement en trois points qui appartiennent à une même courbe ψ_1.*

De même le point N du plan PQS, qui correspond au point M de S_3, a pour équation

$$(2) \qquad (ln_1 - l_1 n)\lambda P + (mn_1 - m_1 n)\mu' Q + (n_1 - n)S = 0.$$

Si ce point N décrit une droite, le point M trace sur S_3 une quartique gauche unicursale. On aurait des résultats analogues en faisant correspondre à un point M de S_3 un point N situé dans l'une ou l'autre des deux dernières faces du tétraèdre θ.

Remarque. — Si l'on n'impose pas au point M d'appartenir à la surface S_3, à tout point N correspond une cubique gauche décrite par M. Dès lors à toute courbe φ que l'on sait décrire dans le plan ou dans l'espace correspond une surface S que l'on sait construire par points. Ce qui caractérise les surfaces S ainsi obtenues, c'est qu'elles sont engendrées par des cubiques gauches appartenant à un complexe tétraédral.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS DE DIX POINTS D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE, DE NEUF POINTS D'UNE QUARTIQUE GAUCHE, DE HUIT POINTS ASSOCIÉS. — PROPRIÉTÉS CORRÉLATIVES. — APPLICATIONS.

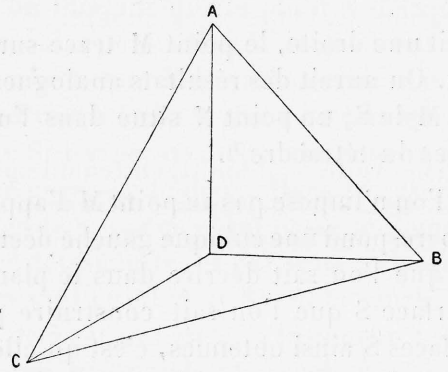
22. Nous avons vu que, si les droites $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont dans un même plan, la surface du troisième ordre S_3 donnée par l'équation (13) (n° 6) admet pour points doubles les points de rencontre A, B, C de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

ces trois droites. Si l'on suppose en outre que le point E soit dans le plan ABC, la surface considérée S_3 se dédouble en ce plan et en une surface du second ordre S_2 ; par suite les théorèmes obtenus pour les surfaces du troisième ordre comprennent, comme cas particuliers, des propriétés que l'on peut immédiatement énoncer pour celles du second ordre. Nous allons reprendre rapidement ce qui a été dit dans les Chapitres précédents, afin de montrer les simplifications que l'on peut apporter, dans le cas des surfaces du second ordre, aux théorèmes obtenus pour celles du troisième.

Les plans $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ (*fig.* 3) coïncident avec le plan ABC, que l'on

Fig. 3.



peut prendre pour la face $u = 0$ du tétraèdre de référence. Les plans qui donnent le point M sont alors

$$x + \lambda u = 0, \tag{1}$$
$$y + \mu u = 0, \tag{2}$$
$$z + \nu u = 0. \tag{3}$$

Pour la droite ω correspondante à M, elle est encore donnée par les deux points

$$T = l\lambda P + m\mu Q + n\nu R + S = 0, \tag{4}$$
$$T_1 = l_1\lambda P + m_1\mu Q + n_1\nu R + S = 0. \tag{5}$$

Les droites s'appuyant sur deux des droites fixes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ deviennent des droites menées par l'un des points A, B, C. Pour les cubiques φ_3

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

données par les équations (17) (n° 7), elles se réduisent à des droites menées par D. Quand le point M décrit une droite menée arbitrairement par l'un des quatre points A, B, C, D, la droite correspondante ω engendre un faisceau du premier ordre.

De même, quand M décrit un plan passant par deux des points A, B, C, D, ω engendre une congruence du premier ordre dont les directrices sont données par des équations identiques à celles obtenues au n° 8. On obtient ainsi, pour la propriété de dix points d'une surface du second ordre, un énoncé analogue à celui du théorème II.

Voici maintenant comment on peut simplifier cet énoncé et lui donner une forme symétrique.

Si l'on suppose que les points P, Q, R, S coïncident avec les points A, B, C, D les équations (4) et (5) deviennent

$$T = l\lambda a + m\mu b + n\nu c + d = 0, \tag{6}$$

$$T_1 = l_1\lambda a + m_1\mu b + n_1\nu c + d = 0. \tag{7}$$

Pour déterminer la droite ω, il suffit, en tenant compte de ce qu'elle appartient au complexe Σ_2, de lui imposer de rencontrer les trois droites qui joignent respectivement les points A, B, C aux points

$$(mn_1 - m_1 n)\mu b + (n_1 - n)d = 0, \tag{8}$$

$$(nl_1 - n_1 l)\nu c + (l_1 - l)d = 0, \tag{9}$$

$$(lm_1 - l_1 m)\lambda a + (m_1 - m)d = 0. \tag{10}$$

Si l'on pose

$$(m+1)n_1 - (m_1+1)n = 0,$$
$$(n+1)l_1 - (n_1+1)l = 0,$$
$$(l+1)m_1 - (l_1+1)m = 0,$$

on vérifie facilement que la première de ces droites est la trace du plan ACM sur le plan ABD et que les deux autres se déduisent de la première en permutant circulairement les lettres A, B, C. Nous avons ainsi obtenu les théorèmes suivants :

Théorèmes XI, XII, XIII. [Propriétés : 1° de dix points d'une surface du second ordre; 2° de neuf points d'une quartique gauche; 3° de huit points associés (premier énoncé)]. — *Si, considérant un complexe tétraédral quelconque dont le tétraèdre principal a pour som-*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

mets quatre des points donnés, on fait correspondre à tout point de l'espace la droite de ce complexe qui s'appuie sur les trois droites suivant lesquelles les plans menés par ce point et par les trois arêtes d'une même face du tétraèdre principal coupent respectivement les trois autres faces de ce même tétraèdre :

1° *Les six droites correspondantes aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre ;*

2° *Les cinq droites correspondantes aux derniers points de la courbe appartiennent à une même congruence du premier ordre ;*

3° *Les quatre droites correspondantes aux derniers points associés appartiennent à un même système de génératrices d'un hyperboloïde.*

23. On remarquera qu'une fois les dix points de la surface disposés en deux groupes, l'un de quatre, l'autre de six points, ces points interviennent symétriquement dans l'énoncé du théorème. On peut d'ailleurs ne pas faire intervenir le complexe tétraédral dans les constructions qui donnent ω, et obtenir cette droite comme intersection de deux plans connus. Il suffit pour cela de procéder comme on l'a fait au n° 9.

Si l'on pose

$$\gamma''' = \alpha' = \alpha''' = \beta = \beta''' = \delta = \delta' = \delta'' = 0,$$

$$(mn_1 - m_1 n)\beta' + (n_1 - n)\delta''' = 0, \tag{11}$$

$$(ln_1 - l_1 n)\alpha + (n_1 - n)\delta''' = 0, \tag{12}$$

la droite ω est déterminée par deux plans V et W, donnés chacun par une droite et un point.

Les droites par lesquelles passent respectivement les plans V et W sont les traces des plans ACM, BCM sur le plan fixe DPQ.

De même les plans V et W passent respectivement par les points où le plan ABM est rencontré par les deux droites fixes

$$(13)\quad \begin{cases} S = 0, \\ (14)\quad [(nm_1 - n_1 m)\gamma'' + (m_1 - m)\delta'''] P - (nm_1 - n_1 m)\alpha'' R = 0, \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} S = 0, \\ (16)\quad [(nl_1 - n_1 l)\gamma'' + (l_1 - l)\delta'''] Q - (nl_1 - n_1 l)\beta'' R = 0. \end{cases}$$

En tenant compte des hypothèses faites, on voit que le point S coïncide avec D, et que de plus les points P, Q, R peuvent être pris ar-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

bitrairement, le premier sur la droite AC, le second sur la droite BC, enfin le troisième dans le plan ABC. Le plan PQR est alors un plan quelconque mené par le point D : nous le désignerons par H. D'autre part, on peut disposer des paramètres l, l_1, ..., n_1 de manière à vérifier les relations (11) et (12) et à faire prendre aux deux rapports, qui déterminent les directions des droites (13) et (15), des valeurs quelconques, ces deux droites peuvent donc être menées arbitrairement par le point D, la première dans la face DPR, la seconde dans la face DQR du tétraèdre θ. D'ailleurs, si l'on ne se donne pas à l'avance le point R, les deux droites (13) et (15) peuvent être menées arbitrairement par le point D; nous désignerons la première par α et la seconde par β. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorèmes XIV, XV, XVI, XVII. [Propriétés : 1° de dix points d'une surface du second ordre; 2° de neuf points d'une quartique gauche; 3° de huit points associés; 4° de sept points d'une cubique gauche (deuxième énoncé)]. — *Si, menant arbitrairement par le sommet* D *du tétraèdre* DABC, *qui a pour sommets quatre de ces points, un plan fixe* H *et deux droites fixes* α *et* β, *on fait correspondre à tout point* M *de l'espace la droite* ω *intersection des deux plans menés respectivement par les traces des droites fixes* α *et* β *sur le plan* ABM, *et par les traces des plans* ACM, BCM *sur le plan fixe* H :

1° *Les six droites correspondantes aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre;*

2° *Les cinq droites correspondantes aux derniers points de la quartique gauche appartiennent à une même congruence du premier ordre;*

3° *Les quatre droites correspondantes aux derniers points associés appartiennent à un même système de génératrices d'un hyperboloïde ;*

4° *Les trois plans menés par chacun des points fixes* (H — BC), (H — AC) *et par les trois droites correspondantes aux derniers points de la cubique se coupent suivant une même droite.*

Les quatre faces du tétraèdre θ sont les plans ABC et H, et les deux plans menés respectivement par les droites α et β et par les traces du plan H sur les droites AC, BC.

24. Voici maintenant comment on peut choisir le plan H et les droites α et β, de manière que les droites ω_1, ω_2, qui correspondent

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

à deux des points donnés, soient concourantes. Il suffit pour cela que le paramètre du complexe tétraédral soit égal au rapport anharmonique des quatre points suivant lesquels la droite 1, 2 est rencontrée par les faces du tétraèdre θ.

Si l'on applique les théorèmes XI, XII, XIII, il suffit de prendre, pour déterminer le complexe Σ_2, dont on connaît déjà le tétraèdre principal, la droite 1, 2 elle-même. Si, au contraire, on emploie les théorèmes XIV, XV, XVII, on peut opérer comme il a été dit au n° 11 dans le cas des surfaces du troisième ordre. D'ailleurs il suffit de prendre pour droites α et β les traces des plans ACD, BCD sur le plan (D, 1, 2) et pour plan H un plan mené arbitrairement par la droite qui joint le point D à la trace de la droite 1, 2 sur le plan ABC.

Voici maintenant comment se modifient, avec le choix indiqué des éléments α, β et H, les conclusions des théorèmes précédents. Si l'on désigne par ε le point de rencontre des droites ω_1, ω_2, et par π le plan de ces deux droites, le complexe Σ_1 qui correspond à la surface du second ordre est donné par un plan π et son pôle ε, et par trois droites ω_3, ω_4, ω_5. Dans le cas particulier où les sept points A, B, C, D, 1, 2, 3 sont sur une cubique gauche, l'énoncé du théorème se simplifie; on a la nouvelle conclusion suivante :

Les traces des trois droites correspondantes aux derniers points de la surface sur le plan π sont en ligne droite.

Pour la quartique gauche, on a la nouvelle conclusion :

Les traces des trois droites correspondantes aux derniers points de la courbe sur le plan π sont en ligne droite; de plus, les trois plans menés par ces mêmes droites et par le point ε se coupent suivant une même droite.

Pour le groupe de points associés, on a de même :

Les deux droites correspondantes aux derniers points associés sont aussi concourantes; leur point de rencontre est situé dans le plan π; de plus, leur plan passe par le point ε.

Enfin, pour la cubique gauche, la conclusion devient la suivante :

La droite correspondante au dernier point de la cubique passe par le point ε.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Le théorème XIV est la généralisation du théorème I énoncé plus haut, et qui exprime une propriété connue de six points d'une conique. D'ailleurs nous avons vu que le théorème I comprend comme cas particulier le théorème de Pascal. L'énoncé de ce dernier théorème doit sa simplicité à ce que les six points de la conique y interviennent d'une manière symétrique; on ne peut pas obtenir une symétrie aussi complète pour la propriété de dix points d'une surface de second ordre; cela tient à une différence entre les propriétés des nombres 6 et 10. D'ailleurs, si l'on compare au point de vue pratique le théorème de Pascal au théorème I, on voit qu'il présente sur ce dernier très peu d'avantages, et que la détermination individuelle de chaque point de la conique donnée par cinq points est la même par l'un ou par l'autre de ces deux théorèmes. Nous croyons donc pouvoir donner le théorème XIV comme une généralisation du théorème de Pascal. Effectivement, au point de vue théorique, les conclusions : trois points en ligne droite, six droites sur un complexe du premier ordre sont comparables; au point de vue pratique, nous allons montrer que le théorème XIV a, pour les surfaces du second ordre, les mêmes conséquences que celui de Pascal pour les coniques.

25. Problème I. — *Trouver sur une surface du second ordre* S_2 *donnée par les neuf points* A, B, C, D, 1, 2, 3, 4, 5 *la dernière trace d'une droite* L *menée arbitrairement par l'un des points donnés* A.

On est ramené à trouver, sur un complexe du premier ordre Σ_1 donné par un plan π, son pôle ε et trois droites ω_3, ω_4, ω_5, la droite ω qui se trouve dans un plan P et passe par un point p. Nous avons vu comment s'obtiennent une fois pour toutes les éléments de Σ_1. Pour le plan P, il est déterminé par la droite (H — C, L) et par le point (α — BL), enfin le point p est celui où le plan P est rencontré par la droite qui joint le point fixe (H — BC) au point (β — BL). De là résulte pour la surface du second ordre donnée par neuf points un mode de description par points, qui exige seulement l'emploi de la règle.

Problème II. — *Mener à une surface du second ordre donnée par neuf points* A, B, C, D, 1, 2, 3, 4, 5 *un plan tangent par l'un des points donnés* C.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Si l'on associe au plan ABC un plan quelconque mené par BC, en effectuant la construction indiquée au problème précédent, on trouve une certaine position pour le troisième plan mené par AC; la droite de rencontre de ces deux derniers plans est une tangente à la surface au point C. On peut obtenir de même une deuxième tangente, et le plan tangent se trouve déterminé par deux droites.

Si l'on veut le plan tangent au point D, il suffit de déterminer le pôle D_1 du plan ABC, relativement à Σ_1; aux différentes droites du plan tangent cherché correspondent sur Σ_2 les faisceaux du premier ordre, dont le plan passe par DD_1.

Problème III. — *Déterminer la conique suivant laquelle une surface du second ordre donnée par neuf points est coupée par un plan mené arbitrairement par deux des points donnés.*

Au plan sécant correspondent les génératrices d'une congruence du premier ordre; et aux points de la conique cherchée correspondent les génératrices de l'hyperboloïde commun au complexe Σ_1 et à la congruence dont nous venons de parler.

Remarque. — Le problème précédent est un cas particulier de l'intersection de la surface S_2 avec un cône ayant pour sommet l'un des points donnés. Toutes les fois que l'on saura déterminer les génératrices de ce cône, on obtiendra facilement sa trace sur la surface du second ordre considérée.

Problème IV. — *Trouver les traces d'une droite quelconque* L *sur une surface du second ordre donnée par neuf points* A, B, C, D, 1, 2, 3, 4, 5.

A la droite L correspond un hyperboloïde considéré comme formé d'un seul système de génératrices, et l'on est ramené à déterminer les deux droites communes à cet hyperboloïde et au complexe Σ_1.

Remarque. — Le problème précédent permet d'obtenir par points l'intersection de la surface du second ordre avec une surface réglée quelconque, toutes les fois que l'on sait déterminer les génératrices de cette dernière surface.

Problème V. — *Déterminer sur une surface du second ordre donnée par neuf points les deux génératrices qui passent par l'un des points donnés.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

On peut résoudre ce problème comme le problème correspondant pour la surface du troisième ordre (probl. VII, p. 37).

On peut aussi déterminer l'intersection de la surface avec son plan tangent au point donné.

Problème VI. — *Une surface du second ordre étant donnée par neuf points, tracer une cubique gauche sur cette surface par cinq des points donnés.*

Ce problème a deux solutions; il se résout d'ailleurs comme le problème analogue pour les surfaces du troisième ordre (probl. VIII, p. 38).

Problème VII. — *Trouver les deux dernières traces d'une quartique gauche donnée par huit points* A, B, C, D, 1, 2, 3, 4 *sur un plan* ν *mené arbitrairement par deux de ces points* A *et* B.

On détermine, une fois pour toutes, la droite ξ qui joint les traces des droites ω_3 et ω_4 sur le plan π, et la droite η intersection des plans menés par ces mêmes droites et par le point ε.

Quand le point M se déplace sur le plan ν, la droite correspondante ω se déplace en s'appuyant sur les deux droites $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$, déterminées respectivement par les points fixes (H — BC), (H — AC) et par les traces des droites fixes α et β sur le plan ν.

Les deux droites ω et ω', correspondantes aux traces cherchées M et M', sont les deux droites qui s'appuient sur les quatre droites ξ, η, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$.

On remarque que, sur les quatre droites précédentes, les deux premières sont fixes, et que les deux dernières passent chacune par un point fixe et sont chacune dans un plan fixe; c'est ce qui permet d'obtenir facilement par points l'épure de la quartique gauche donnée.

Remarque. — Au lieu d'être donnée par huit points, la quartique gauche peut être donnée comme intersection de deux surfaces du second ordre circonscrites au tétraèdre ABCD, et déterminées chacune par cinq points. Aux points de la quartique considérée correspondent les génératrices de la congruence du premier ordre commune à deux complexes du premier ordre donnés chacun par cinq droites.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Problème VIII. — *Détermination du huitième point associé aux points* A, B, C, D, 1, 2, 3.

On considère dans le plan $(\varepsilon - \omega_3)$ la conique tangente à ω_3 et aux quatre traces de ce même plan sur les faces du tétraèdre θ; la droite ω, correspondante au huitième point associé, est la sixième tangente que l'on peut mener à la conique considérée par le point $(\pi - \omega_3)$, pris sur l'une des cinq tangentes qui la déterminent.

On voit que la solution de ce dernier problème exige seulement l'emploi de la règle.

Problème IX. — *Trouver les deux derniers points communs à trois surfaces du second ordre qui passent par six points communs et sont déterminées chacune par trois autres points donnés.*

Aux surfaces considérées correspondent trois complexes du premier ordre, qui ont en commun le faisceau du premier ordre (π, ε), et qui sont déterminés chacun par trois autres droites connues. On cherche le pôle et le plan du deuxième faisceau du premier ordre commun aux trois complexes considérés, ce qui est d'ailleurs facile, car le plan de ce faisceau passe par ε, et son pôle est situé dans le plan π. On est alors ramené à chercher les deux droites du complexe Σ_2, qui sont situées dans un plan connu et passent par un point donné de ce plan.

Remarquons que le problème précédent pourrait aussi s'énoncer de la manière suivante : *Trouver, sur une surface du second ordre donnée par neuf points, les deux dernières traces d'une quartique gauche menée par six des points donnés et par deux autres points pris arbitrairement dans l'espace.* La résolution de ce dernier problème exige l'emploi de la règle et du compas, ce qui est tout naturel, puisqu'il est du second degré.

Problème X. — *Trouver la dernière trace d'une cubique gauche donnée par six points* A, B, C, D, 1, 2, *sur un plan* ν *mené arbitrairement par deux de ces points* A *et* B.

La droite ω, correspondante au point M cherché, est l'intersection des plans menés par le point ε et par les droites $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$.

Tangentes au point C *à la cubique.* — Si l'on prend pour plan ν le plan ABC, la construction précédente donne la tangente au point C.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

PROBLÈME XI. — *Mener par un point donné* 3 *la droite qui s'appuie en deux points sur la cubique gauche* A, B, C, D, 1, 2.

La droite ω_3 et les quatre traces du plan $(\varepsilon - \omega_3)$ sur les faces du tétraèdre θ enveloppent une conique; les tangentes à cette conique correspondent aux points de la droite cherchée.

Déterminer les deux points où la droite s'appuie sur la cubique. — A la cubique correspondent les génératrices d'un cône ayant pour sommet le point ε et dont on connaît cinq génératrices; les droites correspondantes aux deux points cherchés sont celles suivant lesquelles le plan $(\varepsilon - \omega_3)$ coupe le cône considéré.

Déterminer sur la droite considérée le conjugué harmonique du point donné 3 *par rapport aux deux points où cette droite s'appuie sur la cubique donnée.* — La droite correspondante au point cherché est la deuxième tangente que l'on peut mener à la conique considérée plus haut par la trace de ω_3 sur la polaire de ε.

PROBLÈME XII. — *Déterminer le point commun à tous les plans polaires d'un point fixe donné* 3 *par rapport à toutes les surfaces du second ordre, qui passent par une cubique gauche donnée* A, B, C, D, 1, 2.

Ce point est précisément le conjugué harmonique du point donné 3, par rapport aux deux points où la droite, menée par ce point et s'appuyant sur la cubique, rencontre cette cubique; il s'obtient donc comme nous l'avons vu au problème précédent.

PROBLÈME XIII. — *Déterminer la droite commune à tous les plans polaires d'un point fixe* 3 *par rapport aux surfaces du second ordre, qui passent par une cubique gauche donnée* A, B, C, D, 1, 2 *et par un point* 4 *pris hors de cette cubique.*

On obtient un premier point de cette droite comme on l'a vu au problème précédent. Si maintenant on désigne par ξ la droite menée par le point 4 et s'appuyant sur la cubique, le plan $(3 - \xi)$ rencontre cette cubique en un troisième point G, facile à obtenir; la droite 3, G rencontre à son tour la droite ξ en un certain point K; le conjugué harmonique du point 3, par rapport aux deux points G et K, est un deuxième point de la droite cherchée.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Problème XIV. — *Déterminer le point commun à tous les plans polaires d'un point fixe* M *par rapport aux surfaces du second ordre qui passent par sept points* A, B, C, D, 1, 2, 3.

En considérant la cubique A, B, C, D, 1, 2 et le point 3 pris hors de cette cubique, on obtient, comme on l'a vu au problème précédent, une droite sur laquelle se trouve le point cherché. De même, en considérant la cubique A, B, C, D, 1, 3 et le point 2, on obtient une deuxième droite sur laquelle se trouve le point cherché.

Problème XV. — *Déterminer la droite commune à tous les plans polaires d'un point fixe* M *par rapport aux surfaces du second ordre qui passent par huit points donnés* A, B, C, D, 1, 2, 3, 4.

En associant successivement à six des points donnés les deux derniers points donnés, de manière à obtenir deux groupes distincts de sept points, on obtient, comme on l'a vu au problème précédent, deux points de la droite cherchée.

Remarque. — On pourrait faire, relativement au tracé des courbes sur la surface du second ordre et à la représentation de cette surface sur un plan, des remarques analogues à celles faites plus haut pour les surfaces du troisième ordre. A toute courbe que l'on sait décrire dans le plan ou dans l'espace correspond une courbe que l'on sait tracer sur une surface du second ordre. On pourrait aussi, de la même manière, transporter aux courbes tracées sur une surface du second ordre certaines propriétés descriptives des courbes planes.

Nous allons maintenant terminer cette étude par des notes relatives aux divers sujets que nous y avons traités. On obtiendrait d'ailleurs facilement, par la méthode des polaires réciproques, des propriétés de dix plans tangents à une surface du second ordre, de neuf plans tangents à une développable de quatrième classe, de huit plans associés, et enfin de sept plans tangents à une développable cubique.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

CHAPITRE IV.

I. — Sur une forme particulière de la propriété de dix points d'une surface du second ordre.

26. Considérons deux coniques φ et φ' conjuguées au triangle de référence ABC : leurs équations sont de la forme

$$(1) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$(2) \qquad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0.$$

Si l'on désigne par α, β, γ les coordonnées d'un point quelconque M du plan, les équations des deux polaires de ce point par rapport aux coniques considérées sont

$$(3) \qquad a\alpha x + b\beta y + c\gamma z = 0,$$
$$(4) \qquad a'\alpha x + b'\beta y + c'\gamma z = 0.$$

Si maintenant on écrit que le point μ de rencontre des droites (3) et (4) décrit une droite, on a, pour le lieu de M, une équation de la forme

$$(5) \qquad \Sigma p(ab' - ba')\alpha\beta = 0.$$

Le lieu de M est donc une conique; c'est d'ailleurs là un résultat connu. On sait effectivement que, si μ engendre une courbe de degré n, M décrit une courbe de degré $2n$, circonscrite au triangle de référence.

On peut d'ailleurs faire passer la conique (5) par deux points quelconques 1 et 2 du plan; il suffit pour cela de prendre, pour la droite que doit décrire μ, celle qui passe par les deux points 1 et 2. On obtient ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME (Propriété de six points d'une conique). — *Si l'on considère deux coniques φ et φ', conjuguées au triangle ayant pour sommets trois de ces points, les deux polaires de chacun des trois autres points,*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

par rapport à φ et φ', se coupent respectivement en trois points situés en ligne droite.

27. Nous allons montrer que la propriété précédente de six points d'une conique peut être transportée, dans les mêmes termes, aux surfaces du second ordre.

Considérons deux surfaces du second ordre S et S', conjuguées au tétraèdre de référence; leurs équations sont de la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0, \tag{6}$$

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'u^2 = 0. \tag{7}$$

Si l'on désigne par α, β, γ, δ les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace, les équations des deux plans polaires de ce point par rapport aux surfaces considérées sont

$$a\alpha x + b\beta y + c\gamma z + d\delta u = 0, \tag{8}$$

$$a'\alpha x + b'\beta y + c'\gamma z + d'\delta u = 0. \tag{9}$$

Si maintenant on écrit que la droite ω, intersection des deux plans (8) et (9), appartient à un complexe du premier ordre, on a pour le lieu de M une équation de la forme

$$\Sigma p(ab' - ba')\alpha\beta = 0. \tag{10}$$

Le lieu de M est donc une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre de référence. On peut d'ailleurs faire passer la surface (10) par cinq points quelconques 1, 2, 3, 4, 5 de l'espace; il suffit pour cela de prendre, pour le complexe sur lequel doit se déplacer ω, celui qui est déterminé par les cinq droites ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5.

Quand le point M est quelconque dans l'espace, la droite ω appartient à un complexe du second ordre Σ_2; ce complexe est un complexe tétraédral qui admet pour tétraèdre principal le tétraèdre de référence. Ce complexe peut être défini comme le lieu de la droite ω telle que ses deux conjuguées par rapport aux deux surfaces S et S' soient concourantes.

Quand M décrit la surface du second ordre (10), ω engendre en réalité une congruence du second ordre; mais on verrait comme plus haut qu'il suffit de lui imposer d'appartenir à un complexe du premier

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

ordre. De là résulte une propriété de dix points d'une surface du second ordre, de laquelle on déduit simplement les propriétés analogues pour la quartique gauche, pour le groupe de points associés, et pour la cubique gauche; on obtient ainsi les théorèmes suivants :

THÉORÈMES XVIII, XIX, XX, XXI. — (Propriétés : 1° de dix points d'une surface du second ordre; 2° de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre; 3° de huit points associés; 4° de sept points d'une cubique gauche). — *Si l'on considère deux surfaces quelconques du second ordre* S *et* S′, *conjuguées au tétraèdre ayant pour sommets quatre de ces points, les deux plans polaires de chacun des autres points, par rapport aux deux surfaces* S *et* S′, *se coupent respectivement :*

1° *Suivant six droites, qui appartiennent à un même complexe du premier ordre;*

2° *Suivant cinq droites, qui appartiennent à une même congruence du premier ordre;*

3° *Suivant quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde;*

4° *Suivant trois droites dont les traces, sur chacune des faces du tétraèdre considéré, sont en ligne droite.*

La méthode des polaires réciproques donne immédiatement les propriétés corrélatives de celles que nous venons d'énoncer.

II. — Sur la congruence tétraédrale.

28. A tout point M de la surface du second ordre S_2 correspond une droite ω située sur la congruence tétraédrale (Σ_2, Σ_1); cette congruence est ainsi formée de droites comme la surface du second ordre est formée de points; on peut alors, à l'aide de toute propriété descriptive de S_2, énoncer immédiatement une propriété de la congruence considérée.

On sait, par exemple, que par un point de S_2 passent deux génératrices de cette surface, qui d'ailleurs peuvent être réelles ou imaginaires; de même : *Par une droite de la congruence tétraédrale on peut toujours faire passer deux hyperboloïdes, formés de génératrices de la congruence et inscrits dans le tétraèdre principal de la congruence.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

Au double système de génératrices de la surface S_2 correspondent, sur la congruence tétraédrale, deux systèmes d'hyperboloïdes inscrits dans le tétraèdre principal et qui jouissent de la propriété suivante : *Deux hyperboloïdes inscrits dans le tétraèdre principal et de même système n'ont jamais de droite commune ; au contraire, tout hyperboloïde inscrit d'un système a une droite commune avec chacun des hyperboloïdes inscrits de l'autre système.*

On sait de même que, par un point de la surface S_2, on peut tracer sur cette surface deux cubiques gauches circonscrites au tétraèdre ABCD ; de même : *Par une droite de la congruence tétraédrale on peut toujours faire passer deux hyperboloïdes, formés de génératrices de la congruence, et circonscrits à son tétraèdre principal.* On obtient ainsi sur la congruence tétraédrale deux systèmes d'hyperboloïdes circonscrits au tétraèdre principal, et pour lesquels on pourrait énoncer une propriété analogue à celle du double système d'hyperboloïdes inscrits. On a, en outre, en transformant une propriété connue des systèmes de cubiques et de droites appartenant à S_2, la propriété suivante : *Chaque hyperboloïde inscrit d'un système a une droite commune avec chacun des hyperboloïdes circonscrits d'un des deux systèmes, et deux droites communes avec chacun des hyperboloïdes circonscrits de l'autre système ; et inversement.*

On sait, d'autre part, que toutes les génératrices d'un système de S_2 sont rencontrées par quatre génératrices de l'autre système, suivant un rapport anharmonique constant ; on peut alors désigner par rapport anharmonique de quatre droites, appartenant à un même système de génératrices d'un hyperboloïde, le rapport anharmonique constant suivant lequel ces quatre droites coupent une génératrice quelconque, appartenant à l'autre système de ce même hyperboloïde. Cette dénomination étant adoptée, on a la propriété suivante de la congruence tétraédrale : *Le rapport anharmonique des quatre droites suivant lesquelles un hyperboloïde inscrit quelconque de l'un des systèmes est rencontré par quatre hyperboloïdes inscrits de l'autre système est constant.* On a d'ailleurs une propriété analogue pour les hyperboloïdes circonscrits au tétraèdre principal.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

III. — Sur certaines propriétés de la cubique gauche. — Étude du cas où, parmi les éléments donnés pour déterminer une surface du second ou du troisième ordre, il entre une cubique gauche.

29. Si l'on cherche le lieu du point M, tel que les plans menés par ce point et par trois droites fixes non concourantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ rencontrent respectivement trois autres droites fixes α, β, γ suivant trois points ξ, η, ζ situés en ligne droite, on trouve, pour ce lieu, une cubique gauche φ admettant pour cordes les trois droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. On peut d'ailleurs disposer des droites α, β, γ de manière à faire passer la cubique φ par trois points D, E, F pris arbitrairement dans l'espace; il suffit, par exemple, de prendre pour α la droite menée par D et s'appuyant sur les deux droites ($\mathcal{A}$E — $\mathcal{C}$E), ($\mathcal{A}$F — $\mathcal{B}$F); et de même pour β et γ les droites déduites de α par permutation circulaire; on obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème XXII (Propriété de trois cordes non concourantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et de quatre points D, E, F, M d'une cubique gauche.) — *Si l'on désigne par α la droite menée par* D *et s'appuyant sur les deux droites* ($\mathcal{A}$E — $\mathcal{C}$E), ($\mathcal{A}$F — $\mathcal{B}$F), *et par β et γ deux droites déduites circulairement de la première, les trois plans* $\mathcal{A}$M, $\mathcal{B}$M, $\mathcal{C}$M *rencontrent respectivement les droites fixes α, β, γ suivant trois points situés en ligne droite.*

De ce théorème résulte, pour la cubique gauche φ donnée par trois cordes non concourantes, un mode de description par points qui nous paraît plus simple que ceux indiqués jusqu'ici.

Imaginons, par exemple, que l'on veuille la dernière trace M de la cubique φ sur un plan ν mené arbitrairement par la corde $\mathcal{C}$. Par le point ζ où le plan ν est rencontré par la droite fixe γ, on mène la droite qui s'appuie respectivement, en ξ et η, sur les deux autres droites fixes α et β. Le point M cherché de la cubique est le point de rencontre des trois plans ν, ($\mathcal{A}$ — ξ), ($\mathcal{B}$ — η).

30. Si maintenant on cherche le lieu du point M, tel que le plan (ξ, η, ζ) enveloppe un point, on trouve une surface du troisième ordre

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

S_3 passant par les droites $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et par la cubique φ. On peut d'ailleurs faire passer cette surface par trois points 1, 2, 3 pris arbitrairement dans l'espace ; il suffit pour cela de choisir, pour le point-enveloppe considéré, le point de rencontre des plans correspondants aux points 1, 2, 3. On a alors le théorème suivant :

Théorème XXIII (Relation entre les éléments suivants d'une surface du troisième ordre : 1° trois droites non concourantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; 2° une cubique gauche φ admettant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ pour cordes et déterminée par trois points D, E, F ; 3° quatre points 1, 2, 3, 4). — *Si, désignant par α la droite menée par* D *et s'appuyant sur les deux droites* ($\mathcal{A}$E — $\mathcal{C}$E), ($\mathcal{A}$F — $\mathcal{B}$F), *et par β et γ deux droites déduites circulairement de la première, on fait correspondre à tout point* M *de l'espace le plan* P *mené par les traces respectives des droites fixes α, β, γ sur les plans* $\mathcal{A}$M, $\mathcal{B}$M, $\mathcal{C}$M, *les quatre plans correspondants aux derniers points de la surface se rencontrent en un même point.*

APPLICATIONS.

Problème I. — *Déterminer, sur la surface* S_3, *la dernière trace d'une droite quelconque* L *s'appuyant sur deux droites données* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Désignons par ε le point de rencontre des trois plans P_1, P_2, P_3, point qui d'ailleurs se détermine une fois pour toutes. Les plans $\mathcal{A}$L, $\mathcal{B}$L rencontrent respectivement les droites α et β en deux points que nous appellerons ξ et η. Si l'on désigne par ζ la trace de la droite fixe γ sur le plan $\xi\eta\varepsilon$, le point cherché M de la surface est la trace de la droite L sur le plan Cζ.

Problème II. — *Trouver les deux droites de la surface, qui s'appuient sur deux des droites données,* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *par exemple.*

Désignons par L et L′ les deux droites cherchées. Si l'on exécutait sur ces deux droites les constructions indiquées au problème précédent, on devrait trouver que le plan $\mathcal{C}\zeta$, qui détermine M, est indéterminé ; cela exige que le point ζ lui-même soit indéterminé. Il faut alors, ou que les trois points ξ, η, ε soient en ligne droite, ou que le plan $\xi\eta\varepsilon$ passe par la droite γ. Si donc on mène par ε la droite qui s'appuie en ξ et η sur les deux droites α et β, les plans $\mathcal{A}\xi$, $\mathcal{B}\eta$ se cou-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

pent suivant une droite L appartenant à S_3. De même, si l'on désigne par ξ' et η' les traces des droites α et β sur le plan $\varepsilon\gamma$, les plans $\mathfrak{A}\xi'$, $\mathfrak{B}\eta'$ se coupent aussi suivant une droite L′ de la surface. Les deux droites ainsi obtenues L et L′ sont les droites cherchées. La recherche des droites L et L′ est un problème du second degré, si l'on a pu le résoudre ici avec la règle seulement; cela tient à ce que, dans le cas étudié, les deux droites L et L′ jouissent de propriétés distinctes et sont en quelque sorte séparées; effectivement L′ rencontre en un point la cubique donnée φ, tandis que L ne rencontre pas cette cubique.

Problème III. — *Mener par deux points donnés* 1 *et* 2 *une cubique gauche* ψ, *qui admette pour corde les trois droites* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *et qui s'appuie en deux points sur la cubique donnée* φ.

Toutes les surfaces du troisième ordre, qui passent par les droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, par la cubique φ et par les points 1 et 2, passent aussi par la cubique ψ; par suite, lorsqu'un point M décrit la cubique ψ, le plan P correspondant à ce point tourne autour de la droite $(P_1 - P_2)$.

31. Dans le cas où les trois droites $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ se coupent deux à deux en trois points A, B, C, la cubique gauche φ passe par ces trois points, de plus la surface S_3 admet ces mêmes points comme points doubles; on obtient ainsi, à l'aide des théorèmes précédents, des théorèmes que l'on peut énoncer immédiatement. Il en résulte une détermination très simple de la cubique gauche donnée par six points.

Si l'on suppose, en outre, que le point ε soit dans le plan ABC, la surface S_3 se dédouble, elle se compose de ce plan ABC et d'une surface du second ordre S_2 déterminée par la cubique φ et par les deux points 1 et 2 pris hors de cette cubique. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème XXIV (Relation entre une cubique φ, déterminée par six points A, B, C, D, E, F, et trois points quelconques 1, 2, 3, appartenant à une même surface du second ordre). — *Si, désignant par* α *la droite menée par* D *et s'appuyant sur les droites* EB *et* FC, *et par* β *et* γ *deux droites déduites circulairement de la première, on fait correspondre à tout point* M *de l'espace le plan* P *mené par les traces respectives des droites fixes* α, β, γ *sur les plans* BCM, CAM, ABM, *le plan*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

ABC *et les trois plans correspondants aux derniers points de la surface se rencontrent en un même point.*

Les conséquences pratiques du théorème précédent sont analogues à celles du théorème XXIII; nous ne les développerons pas. Remarquons de plus que l'on obtiendrait immédiatement, par la méthode des polaires réciproques, les propositions corrélatives des théorèmes précédents.

IV. — Extension de certaines propriétés descriptives des surfaces du second ordre à celles du troisième ordre. — En particulier, pôles et polaires relativement aux surfaces du troisième ordre.

32. Imaginons que l'on considère en même temps les deux systèmes de coordonnées représentés par les *fig.* 2 et 3; une même équation, interprétée simultanément dans ces deux systèmes, représente deux surfaces différentes; il est facile, connaissant une propriété de l'une de ces surfaces, d'énoncer immédiatement la propriété correspondante pour l'autre; cette remarque va nous permettre d'étendre aux surfaces du troisième ordre certaines propriétés descriptives démontrées pour celles du second.

Toute équation en $\lambda\mu\nu$, qui représente, dans le second système de coordonnées, une surface du second ordre S_2 circonscrite au tétraèdre ABCD, représente, dans le premier, une surface du troisième ordre S_3, qui passe par les trois droites $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et par les deux points D et E.

De même à toute droite L du second système correspond, dans le premier, une cubique φ, qui admet pour cordes les droites $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et passe par le point E. La droite L et la cubique φ sont toutes deux déterminées par deux points; si L passe par le point D du second système, φ passe aussi par ce point dans le premier.

A tout plan P du second système correspond, dans le premier, une surface particulière du troisième ordre σ, qui passe par les droites $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, et admet le point E pour point double. Une surface σ quelconque est déterminée, comme un plan, par trois points. Deux surfaces σ se coupent suivant une cubique φ, et trois de ces surfaces se rencontrent

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

en un point. Une surface σ est engendrée par des cubiques φ comme le plan est engendré par des droites.

Au double système de génératrices de la surface S_2 correspond, sur S_3, un double système de cubiques φ. Deux cubiques φ du même système n'ont aucun point commun, une cubique quelconque φ d'un système rencontre en un point toutes les cubiques φ de l'autre système. Il est d'ailleurs entendu que l'on ne compte pas, dans ce qui précède, le point E commun à toutes les cubiques φ. De plus, si l'on adopte la dénomination indiquée plus haut pour le rapport anharmonique de quatre points pris sur une cubique, on a la proposition suivante : *Toutes les cubiques φ d'un système sont rencontrées dans le même rapport anharmonique par quatre cubiques φ de l'autre système.*

Aux coniques tracées sur S_2 correspondent sur S_3 des courbes gauches unicursales du sixième ordre, admettant pour point double le point E. Toute surface σ coupe S_3 suivant une pareille courbe, que nous désignerons par ψ. Toute courbe ψ est déterminée par trois points. Aux plans tangents à S_2 correspondent des surfaces σ qui coupent S_3 suivant deux cubiques gauches φ appartenant, l'une à un système, l'autre à l'autre système.

Si l'on considère quatre surfaces σ passant par une même cubique φ, une autre cubique φ quelconque est rencontrée par ces quatre surfaces suivant un rapport anharmonique constant, que l'on peut prendre pour expression du rapport anharmonique des quatre surfaces considérées.

Si l'on considère sur deux cubiques φ, non concourantes, deux systèmes de points homographiques, la cubique φ, qui joint deux points homologues des deux systèmes, engendre une surface du troisième ordre. Les deux cubiques fixes appartiennent à l'un des systèmes de la surface et la cubique mobile à l'autre.

Si l'on considère sur une surface S_3 deux cubiques φ d'un même système, les deux rapports anharmoniques des quatre surfaces σ menées par ces deux cubiques et par quatre points de la surface sont égaux. En d'autres termes, si l'on considère deux faisceaux homographiques de surfaces σ, la cubique φ, intersection de deux surfaces homologues, engendre une surface du troisième ordre.

Une cubique φ rencontre généralement la surface S_3, abstraction faite

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

du point E en deux points. Si l'on considère des cubiques φ menées par un même point M de l'espace, le lieu du conjugué harmonique de M, pris sur une cubique φ par rapport aux deux derniers points de rencontre de cette cubique avec S_3, est une surface σ que nous appellerons *surface polaire* de M; inversement nous dirons que le point M est le pôle de cette surface σ. On a, relativement à un point et à sa surface polaire, les propriétés suivantes :

Quand un point M *se meut sur une surface* σ, *la surface* σ *polaire de* M *tourne autour d'un point fixe, qui est le pôle de la première.*

Réciproquement, quand une surface σ *tourne autour d'un point fixe, son pôle décrit la surface* σ *polaire de ce point.*

Quand un point M *décrit une cubique* φ, *la surface* σ *polaire de ce point tourne autour d'une deuxième cubique* φ' *et inversement. Les cubiques* φ *et* φ' *sont dites* conjuguées.

Si l'on considère quatre surfaces σ *formant un tétraèdre curviligne, et tel que chaque sommet de ce tétraèdre ait pour surface polaire la surface* σ *qui lui est opposée, on dit que le tétraèdre ainsi obtenu est conjugué à la surface* S_3. *On a pour une surface* S_3 *et pour un tétraèdre conjugué des propriétés analogues à celles que présentent une surface du second ordre et un tétraèdre conjugué à cette surface.*

Le complexe des cubiques φ, *qui sont rencontrées suivant un rapport anharmonique constant par les faces d'un tétraèdre curviligne formé de surfaces* σ, *a des propriétés analogues à celles du complexe tétraédral de droites.*

V. — Sur une propriété générale des fonctions algébriques, et la méthode qui en résulte pour trouver une relation entre N + 1 éléments appartenant à une même forme géométrique déterminée par N d'entre eux.

33. Imaginons qu'un élément géométrique dépende de p coordonnées $x, y, z, \ldots, w$; si l'on donne entre les coordonnées de cet élément une relation

$$F(x, y, \ldots, w) = 0, \tag{1}$$

l'élément considéré engendre une certaine forme géométrique, que

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

nous appellerons *connexe;* si l'équation (1) est du degré n, nous dirons que le connexe est du degré n, et nous le représenterons par Σ_n.

Si le connexe Σ_n est déterminé par N éléments M, il existe une relation entre $N+1$ éléments de ce connexe; nous nous proposons d'indiquer comment on peut obtenir cette relation, dans le cas où l'équation du connexe est algébrique.

Désignons par Σ_1 le connexe du premier ordre à p variables, donné par une équation du premier degré entre ces variables; ce connexe est déterminé par p éléments M; il se compose de ces éléments M, de la même manière qu'un plan se compose de points. En général, p connexes Σ_1 se coupent suivant un élément M et un seul.

En résumé, d'une part, il existe une relation entre $N+1$ éléments M appartenant à un même connexe Σ_n; d'autre part, il existe aussi une relation entre $p+1$ connexes Σ_1, qui ont un élément M commun; nous nous proposons de ramener la première de ces relations à la seconde.

Pour cela désignons par $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$, ..., $F_{p+1}=0$ les équations de $p+1$ connexes d'ordre n à p variables, qui ont en commun $N-p$ éléments M.

Désignons de même par $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$, $\varphi_3=0$, ..., $\varphi_{p+1}=0$ les équations de $p+1$ connexes du premier ordre à p variables, n'ayant aucun élément commun, ce qui est d'ailleurs le cas général.

Enfin représentons par $x', y', z', \ldots, w'$ les coordonnées d'un élément quelconque M', et par $F'_1, F'_2, F'_3, \ldots, F'_{p+1}$ ce que deviennent les fonctions $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_{p+1}$, quand on y remplace les variables $x, y, z, \ldots, w$ par les coordonnées de l'élément M'.

On peut faire correspondre à tout élément M' de l'espace le connexe du premier ordre à p variables ω, donné par l'équation

$$(1) \qquad F'_1\varphi_1 + F'_2\varphi_2 + \ldots F'_{p+1}\varphi_{p+1} = 0.$$

Si maintenant on imagine que le connexe ω soit assujetti à comprendre un élément fixe M_0, dont les coordonnées sont $x_0, y_0, \ldots, w_0$, le lieu de l'élément M' correspondant à ω est un connexe donné par l'équation

$$(2) \qquad F'_1\varphi^0_1 + F'_2\varphi^0_2 + \ldots + F'_{p+1}\varphi^0_{p+1} = 0,$$

où $\varphi^0_1, \varphi^0_2, \ldots, \varphi^0_{p+1}$ représentent ce que deviennent les fonctions φ_1,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

$\varphi_2, \ldots, \varphi_{p+1}$, quand on y remplace les variables $x, y, \ldots, w$ par les coordonnées de l'élément fixe M_0.

L'équation (2) représente un connexe d'ordre n, à p variables Σ_n, comprenant les $N-p$ éléments communs aux connexes représentés par les équations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_{p+1} = 0.$$

On peut d'ailleurs faire passer le connexe Σ_n par p autres éléments M, pris arbitrairement dans l'espace; il suffit pour cela de prendre pour l'élément M_0 celui qui est commun aux p connexes du premier ordre, correspondants aux p derniers éléments considérés. On obtient ainsi le théorème suivant:

Théorème (Propriété de $N+1$ éléments appartenant à un même connexe Σ_n, d'ordre n déterminé par N de ces éléments). — *Si, désignant par* $F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots, F_{p+1} = 0$ *les équations de* $p+1$ *connexes quelconques d'ordre n comprenant* $N-p$ *des éléments considérés, et par* $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_{p+1} = 0$ *les équations de* $p+1$ *connexes du premier ordre non concourants, on fait correspondre à tout élément* M *de l'espace le connexe* ω *donné par l'équation*

$$F'_1 \varphi_1 + F'_2 \varphi_2 + \ldots + F'_{p+1} \varphi_{p+1} = 0,$$

où $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{p+1}$ *représentent ce que deviennent les fonctions* $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$, *quand on y remplace les variables* $x, y, \ldots, w$ *par les coordonnées de cet élément* M; *les* $p+1$ *connexes du premier ordre, correspondants aux derniers éléments de* Σ_n, *sont concourants.*

Nous remarquerons que le théorème précédent exprime une propriété générale de la fonction algébrique d'ordre n, à p variable; si l'on y considère l'élément M, et les connexes Σ_n et Σ_1, c'est seulement pour en faciliter l'énoncé.

Tous les connexes d'ordre n, à p variables, qui ont en commun $N-1$ éléments M, comprennent une congruence première (Σ_n, Σ'_n) déterminée par ces $N-1$ éléments. Le mode de correspondance que nous venons d'indiquer donne une propriété de N éléments d'une pareille congruence; on obtient comme conclusion: *les p connexes du premier ordre, correspondants aux derniers éléments de la congruence, ont en*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

commun une congruence $(p-2)^{\text{ième}}$ *du premier ordre*. Nous désignons d'ailleurs par congruence $(p-2)^{\text{ième}}$ du premier ordre l'ensemble des éléments M communs à $p-1$ connexes du premier ordre. Une pareille congruence se compose d'éléments M, comme une droite se compose de points.

Il reste maintenant à faire voir comment on peut donner du mode de correspondance indiqué entre M et ω une définition géométrique. Les deux connexes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ont en commun une congruence première (F_1, F_2); cette congruence et l'élément M déterminent un connexe d'ordre n et un seul; quand M décrit un pareil connexe, ω passe par un élément fixe. En associant ainsi l'un quelconque des connexes $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, ..., $F_{p+1} = 0$ avec les p autres, on obtient p éléments appartenant à ω. Le connexe ω du premier ordre à p variables est alors déterminé par p éléments connus, de la même manière qu'une droite, c'est-à-dire un connexe du premier ordre à deux variables, est déterminée par deux points.

Nous nous proposons d'étudier, dans un prochain Mémoire, à l'aide du théorème précédent, les propriétés descriptives des connexes.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 février 1888.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 3 février 1888.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes :

1° Les équations linéaires r, s, t et $rt - s^2$;

2° Les équations complètement linéaires.

Définition des invariants. Méthode de Laplace. Étude des cas dans lesquels la suite de Laplace se termine dans un seul sens ou dans les deux sens.

Vu et approuvé :

Paris, le 2 février 1888.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

E. HÉBERT.

Permis d'imprimer :

Paris, le 3 février 1888.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

13910 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 XXI 1 4