

H.F. uf 166

40 (2)

N° D'ORDRE :

1012.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. PAUL SACERDOTE,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Agrégré des Sciences physiques.



1^{re} THÈSE. — RECHERCHES THÉORIQUES SUR LES DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES DIÉLECTRIQUES SOLIDES ISOTROPES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 décembre 1899, devant la Commission d'examen.



MM. BOUTY, *Président.*

H. POINCARÉ, }
KOENIGS, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1899



UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, Professeur.....	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE ..	CH. HERMITE.	
	DE LACAZE-DUTHIERS.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	TROOST.....	Chimie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Astronomie physique.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	PELLAT.....	Physique.
	HALLER.....	Chimie organique.
PROFESSEUR ADJOINT	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
SECRETÁIRE	FOUSSEREAU.	

A

MONSIEUR E. BOUTY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,
DIRECTEUR DU LABORATOIRE D'ENSEIGNEMENT DE PHYSIQUE.

Hommage de respectueuse reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES THÉORIQUES

SUR LES

DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES DIÉLECTRIQUES

SOLIDES ISOTROPES.

On sait depuis longtemps que, lorsqu'un diélectrique devient le siège d'un champ électrique, il se déforme. Exemple : par la charge, la capacité interne et le volume extérieur d'une bouteille de Leyde augmentent ; un condensateur cylindrique s'allonge ⁽¹⁾, etc.

Plusieurs physiciens ont étudié expérimentalement ces phénomènes : Fontana, Volpicelli, Govi, Duter, Righi, Quincke, Korteweg et Julius, Cantone ⁽²⁾ ; d'autres ont essayé d'en prévoir les lois par la théorie : Moutier, Quincke, Röntgen, Korteweg, Lorberg, Kirchhoff, Vaschy, Curie, Duhem ⁽²⁾ ; mais les résultats théoriques étaient en désaccord les uns avec les autres sur certains points ; il

⁽¹⁾ Ces déformations peuvent se résumer dans l'énoncé suivant : Il y a *dilatation dans toute direction perpendiculaire aux lignes de force* ; aucune expérience n'a encore permis de mettre en évidence *une déformation dans la direction des lignes de force*, ni un *changement de volume de la matière diélectrique*.

⁽²⁾ Voir la bibliographie qui se trouve à la fin.

en était de même des résultats expérimentaux et, en outre, ceux-ci ne s'accordaient pas complètement avec les premiers.

Je me propose :

1° D'établir, d'une façon certaine, les *formules de déformations électriques des diélectriques* des condensateurs, en me basant uniquement sur les principes fondamentaux de la conservation de l'énergie et de l'électricité ; — d'en dégager les *lois* et les *causes* de ces phénomènes ;

2° En passant ensuite *en revue les essais de théorie précédemment faits*, j'indiquerai les erreurs auxquelles sont dues les divergences que présentent leurs résultats, soit entre eux, soit avec ceux de ma théorie ;

3° Enfin la *critique des travaux expérimentaux* nous montrera pourquoi ils ne donnent pas toujours les résultats prévus par la théorie.

ÉTUDE PRÉLIMINAIRE.

Dans ce qui suit, je ferai constamment intervenir *les variations qu'éprouve la constante diélectrique d'un solide primitivement isotrope lorsqu'on le déforme mécaniquement*.

Cette question n'a presque pas été étudiée jusqu'à présent ; je vais donc tout d'abord donner à ce sujet quelques définitions et établir quelques relations fondamentales.

Découpons dans notre solide isotrope une lame plane rectangulaire à faces parallèles et prenons-la comme diélectrique d'un condensateur plan dont les lignes de force seront perpendiculaires aux faces de la lame ; soient x la direction de ces lignes de force, y et z celles des arêtes du rectangle.

Si nous soumettons la lame à une traction infiniment petite (dq par unité de surface) dans l'une des directions y ou z , elle se déformera et sa constante diélectrique de-

viendra $(\mathbf{K} + d_1\mathbf{K})$; $\frac{1}{\mathbf{K}} \frac{d_1\mathbf{K}}{dq} = k_1$, sera, par définition : le *coefficient de variation de la constante diélectrique par une traction perpendiculaire aux lignes de force*; on déduit de là

$$d_1\mathbf{K} = k_1(\mathbf{K}dq).$$

Si nous soumettons la lame à une traction infiniment petite dq suivant la direction x des lignes de force, la constante diélectrique deviendra $(\mathbf{K} + d_2\mathbf{K})$ et $\frac{1}{\mathbf{K}} \frac{d_2\mathbf{K}}{dq} = k_2$ sera le *coefficient de variation de la constante diélectrique par traction parallèle aux lignes de force*; d'où :

$$d_2\mathbf{K} = k_2(\mathbf{K}dq).$$

Nous admettrons que :

1° La *variation de la constante diélectrique change de signe*, comme la déformation, si l'on exerce des *pressions au lieu de tractions*;

2° En outre, comme il s'agit toujours de déformations très petites : la *variation de la constante diélectrique par plusieurs tractions simultanées est la somme de celles que produirait chacune de ces tractions agissant séparément*.

Première application. — Supposons que la même traction dq s'exerce à la fois dans les directions y et z : la variation de la constante diélectrique sera $(2k_1)\mathbf{K}dq$; il en sera encore de même si la lame plane a une forme quelconque et est soumise, sur *tout son contour*, à une traction normale et uniforme dq .

Deuxième application. — Si la lame est soumise sur *toute sa surface* à la traction dq , la variation de la constante diélectrique, est alors $(2k_1 + k_2)\mathbf{K}dq$; nous désignerons souvent $k = 2k_1 + k_2$ sous le nom de : *coefficient de variation de la constante diélectrique par traction superficielle uniforme*.

Généralisation. — La constante diélectrique varie encore de $k(Kdq)$ lorsqu'au lieu d'une lame plane à faces parallèles on considère une *lame de forme et d'épaisseur quelconques soumise sur toute sa surface à une traction normale uniforme*: comme dans le cas précédent, la lame se dilate en restant isotrope.

Il en est enfin encore de même si la lame forme une *surface fermée* et est soumise sur ses deux faces interne et externe à la même traction puisqu'elle se comporte alors comme un solide plein.

Remarque. — Par *pression* superficielle uniforme, la variation de la constante diélectrique serait $(-k)Kdq$.

PROBLÈME I. — *Étant donnée une lame diélectrique sphérique infiniment mince, les lignes de force dirigées suivant les rayons, trouver les variations de la constante diélectrique lorsqu'on soumet la lame à une pression dp s'exerçant sur la face interne ou sur la face externe.*

Premier cas: pression interne. — Soient R le rayon de la sphère, e l'épaisseur très petite de la lame; considérons un élément de la lame: son équilibre exige l'existence d'une sorte de tension superficielle F donnée par la formule $dp = \frac{2F}{R}$; chaque élément est donc soumis sur son contour à une *traction* normale égale par unité de surface à $\left(\frac{F}{e}\right)$ ou $\left(\frac{R}{2e}\right) dp$; la *variation de la constante diélectrique* est donc $(2k_1)K\left(\frac{R}{2e} dp\right)$ ou $\left(\frac{R}{e} k_1\right)K dp$.

Deuxième cas: pression externe. — Déformation égale et de sens contraire à celle du cas précédent: même variation de la constante diélectrique au signe près.

Remarque. — La variation de la constante diélectrique par pression superficielle uniforme devrait être la somme de celles relatives aux deux cas précédents, c'est-à-dire nulle; or nous avons trouvé précédemment pour cette variation la valeur $(-k)Kdp$: mais ceci s'explique très

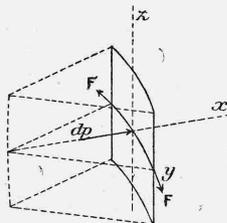
bien en remarquant que (k) est un infiniment petit par rapport à $\left(\frac{R}{e} k_1\right)$.

PROBLÈME II. — *Étant donnée une lame diélectrique infiniment mince, en forme de cylindre ouvert aux deux extrémités, les lignes de force dirigées suivant les rayons du cylindre : trouver les variations de la constante diélectrique par pression interne, par pression externe, ou par traction parallèle aux génératrices.*

Soient R le rayon du cylindre, e l'épaisseur de la lame supposée très petite.

Premier cas : pression interne. — Considérons un élément de la lame diélectrique, son équilibre exige une tension superficielle F donnée par la formule $dp = \frac{F}{R}$; cet

Fig. 1.



élément est donc soumis dans la direction y perpendiculaire aux lignes de force à une traction dont la valeur par unité de surface est $\left(\frac{F}{e}\right) = \left(\frac{R}{e} dp\right)$; la variation de la constante diélectrique est par suite égale à $\left(\frac{R}{e} k_1\right) K dp$.

Deuxième cas : pression externe. — Variation égale et de signe contraire à celle du cas précédent.

Troisième cas : traction parallèle aux génératrices. — Déformation du tube identique à celle qui serait produite sur une tige pleine : variation $(k_1) K dp$ de la constante diélectrique, puisque la traction, étant dirigée suivant z , est perpendiculaire aux lignes de force x .

COMPLÉMENT. — Si le cylindre était fermé aux deux extrémités par deux bases (planes, en calottes sphériques, etc.), voyons quelle serait la variation de la constante diélectrique, par *pression interne*, par exemple; la pression interne sur les parois latérales produirait une variation $\left(\frac{R}{e} k_1\right) K dp$ déjà vue, la pression interne sur les bases équivaldrait à une traction parallèle aux génératrices $dp \frac{\pi R^2}{2\pi R e} = \left(\frac{R}{2e}\right) dp$, qui produirait une variation

$$k_1 K \left(\frac{R}{2e} dp\right);$$

en additionnant, on a pour la *variation de la constante diélectrique* la valeur $\left(\frac{3R}{2e} k_1\right) K dp$.

Autres définitions. — J'avais déjà signalé ⁽¹⁾ la nécessité d'introduire, dans la théorie qui va nous occuper, les coefficients des variations de la constante diélectrique par les déformations lorsque je me suis aperçu que M. Korteweg et après lui Lorberg et Kirchhoff ⁽²⁾ les avaient déjà introduits dans leurs calculs des forces agissant au sein d'un diélectrique polarisé; mais les coefficients qu'ils emploient ne sont pas ceux que j'ai définis plus haut (k_1, k_2).

Considérons notre lame diélectrique plane rectangulaire à faces parallèles: produisons une *compression relative* α dans la direction x des lignes de force (les arêtes parallèles à y et z étant maintenues invariables), la constante diélectrique variera de $(\delta_1 K)$; si la *compression* α a lieu sur les arêtes y ou z perpendiculaires aux lignes de force, la constante diélectrique variera de $(\delta_2 K)$. M. Korteweg pose

$$\delta_1 K = \chi_1 \alpha, \quad \delta_2 K = \chi_2 \alpha,$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 4 avril 1898, t. CXXVI, p. 1019.

⁽²⁾ KORTEWEG, *Wied. Ann.*, t. IX, 1880. LORBERG, *Wied. Ann.*, t. XXI, 1884. KIRCHHOFF, *Wied. Ann.*, t. XXIV, 1885.

c'est-à-dire emploie les *coefficients* χ_1, χ_2 définis par les formules

$$\chi_1 = \frac{\delta_1 K}{\alpha}, \quad \chi_2 = \frac{\delta_2 K}{\alpha}.$$

Cherchons les relations qui lient nos coefficients (k_1, k_2) aux coefficients (χ_1, χ_2).

Une traction dq parallèle à y ou z (z par exemple) produit :

Une dilatation (adq) des arêtes z ,

Une contraction ($a\sigma dq$) des arêtes y et x ,

a désignant le coefficient d'allongement longitudinal ou l'inverse du module d'élasticité de Young,

σ désignant le coefficient de Poisson : rapport de la contraction latérale à l'allongement longitudinal.

Cette traction produit donc une variation de la constante diélectrique

$$d_1 K = -\chi_2 adq + \chi_2 a\sigma dq + \chi_1 a\sigma dq,$$

et comme nous avons posé

$$k_1 = \frac{1}{K} \frac{d_1 K}{dq}$$

on a

$$(1) \quad k_1 = \frac{a}{K} [\sigma(\chi_1 + \chi_2) - \chi_2].$$

Si la traction dq a lieu parallèlement à x , on a de même :

Dilatation (adq) des arêtes x ,

Contraction ($a\sigma dq$) des arêtes y, z ;

Par suite, variation de la constante diélectrique

$$d_2 K = -\chi_1 adq + \chi_2 a\sigma dq + \chi_2 a\sigma dq,$$

et comme nous avons posé

$$k_2 = \frac{1}{K} \frac{d_2 K}{dq}$$

il vient

$$(2) \quad k_2 = \frac{a}{K} (2\sigma\chi_2 - \chi_1).$$

Réciproquement, des expressions (1) et (2), on déduit

$$(1') \quad \chi_1 = \frac{K}{a} \frac{2\sigma k_1 + (1-\sigma)k_2}{2\sigma^2 + \sigma - 1},$$

$$(2') \quad \chi_2 = \frac{K}{a} \frac{k_1 + \sigma k_2}{2\sigma^2 + \sigma - 1}.$$

Remarque. — Dans la théorie des déformations électriques des diélectriques, l'emploi des coefficients (k_1, k_2) va nous conduire à des formules d'aspect beaucoup plus simple que celui de (χ_1, χ_2) . En outre, ces coefficients (k_1, k_2) ont l'avantage sur (χ_1, χ_2) d'être directement accessibles aux mesures expérimentales.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE.

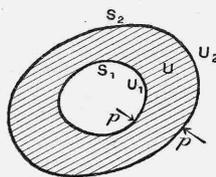
Soit une lame diélectrique dont les faces S_1, S_2 ont été couvertes d'une couche conductrice (infiniment mince) de manière à former un condensateur fermé; désignons par

U_1 le volume de la cavité interne;

U_2 le volume extérieur du diélectrique;

$U = U_2 - U_1$ le volume de la matière diélectrique.

Fig. 2.



Je me propose de trouver les variations $(\Delta U), (\Delta U_1), (\Delta U_2)$ qui se produisent lorsqu'on charge le condensateur à une différence de potentiel V .

VARIATION DE VOLUME DE LA MATIÈRE DIÉLECTRIQUE (ΔU).

Imaginons qu'il s'exerce sur S_1 et S_2 une pression p et maintenons la température constante : l'état du système sera fonction de deux variables p, V ; pour produire une transformation ($dp dV$), il faudra fournir un travail $d\mathcal{E}$ donné par la relation

$$d\mathcal{E} = V dM - p dU,$$

M désignant la charge électrique du condensateur $M = CV$ si l'on représente par C sa capacité électrique; dM est une différentielle exacte d'après le principe de la conservation de l'électricité; on peut donc écrire (¹)

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= V \left(\frac{\partial M}{\partial V} dV + \frac{\partial M}{\partial p} dp \right) - p \left(\frac{\partial U}{\partial V} dV + \frac{\partial U}{\partial p} dp \right) \\ &= V \left(\frac{\partial M}{\partial V} - p \frac{\partial U}{\partial V} \right) dV + \left(V \frac{\partial M}{\partial p} - p \frac{\partial U}{\partial p} \right) dp. \end{aligned}$$

Or $d\mathcal{E}$ doit être une différentielle exacte, puisqu'il s'agit de phénomènes réversibles et que la température reste constante; on a donc

$$V \frac{\partial^2 M}{\partial V \partial p} - \frac{\partial U}{\partial V} - p \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial p} = \frac{\partial M}{\partial p} + V \frac{\partial^2 M}{\partial V \partial p} - p \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial V},$$

d'où

$$\frac{\partial U}{\partial V} = - \frac{\partial M}{\partial p} = - V \frac{\partial C}{\partial p};$$

la variation de la capacité par la pression $\left(\frac{\partial C}{\partial p} \right)$ est faible, ses propres variations avec V seront négligeables, c'est-à-dire qu'on peut regarder $\frac{\partial C}{\partial p}$ comme indépendant de V ; en

(¹) Ce raisonnement est calqué sur celui qui a servi à M. Lippmann pour montrer que la dilatation électrique du tube de Righi entraîne comme phénomène réciproque, la variation de capacité électrique du condensateur cylindrique par traction [*Principe de la conservation de l'électricité* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5^e série, t. XXIV, p. 159; 1881)].

intégrant, on a alors

$$(1) \quad \Delta U = \left(-\frac{\partial C}{\partial p}\right) \frac{V^2}{2} \quad \text{ou} \quad \Delta U = \left(-\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p}\right) W,$$

en désignant par W l'énergie dite électrique du condensateur.

Cette formule étant vraie quelle que soit la valeur de p , nous donnera encore la déformation pour $p = 0$, c'est-à-dire dans le cas du condensateur libre, qui est celui que nous voulons étudier. Occupons-nous maintenant du terme $\left(-\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p}\right)$: la capacité électrique est proportionnelle à une fonction linéaire des dimensions géométriques et à la constante diélectrique K ; quand la pression p change de dp , le diélectrique reste semblable à lui-même et isotrope : le coefficient de diminution linéaire est $\frac{\gamma}{3}$ en désignant par γ le coefficient de compressibilité de la matière diélectrique; quant au coefficient de variation de la constante diélectrique, nous avons vu, dans l'étude préliminaire, qu'il était $(-k)$; par suite $-\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p} = -\frac{\gamma}{3} - k$, et l'on a

$$(1') \quad \Delta U = \left(\frac{\gamma}{3} + k\right) W.$$

Remarque I. — On pourrait faire un raisonnement identique dans le cas où, au lieu d'un condensateur fermé quelconque, il s'agirait d'un condensateur plan ou cylindrique, et, plus généralement, d'un condensateur constitué par une lame diélectrique quelconque métallisée sur ses deux faces : les formules (1) et (1') s'appliquent donc à tous les cas.

Remarque II. — On sait que $W = \int \frac{KH^2}{8\pi} du$: H désignant l'intensité du champ électrique en un point du diélectrique, (du) un élément de volume autour de ce point, et l'intégrale étant étendue à tout le volume du diélec-

trique; on a donc

$$(1'') \quad \Delta U = \int \left(\frac{\gamma}{3} + k \right) \frac{K}{8\pi} H^2 du;$$

l'augmentation totale du volume est donc la même que si, en chaque point, l'augmentation de volume était proportionnelle au carré de l'intensité du champ en ce point et à un coefficient $\left(\frac{\gamma}{3} + k \right) \frac{K}{8\pi}$ caractéristique de la nature du diélectrique.

CAS PARTICULIER. — *Le diélectrique est une lame plane ou une lame mince de forme quelconque.*

La formule (1') peut alors être encore transformée, car $C = \frac{KS}{4\pi e}$, S désignant la surface de la lame et e son épaisseur; on a alors

$$(1''') \quad \Delta U = \left(\frac{\gamma}{3} + k \right) \frac{K}{8\pi} S \frac{V^2}{e},$$

et comme $U = Se$,

$$(1'iv) \quad \frac{\Delta U}{U} \left(\frac{\gamma}{3} + k \right) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2} = \left(\frac{\gamma}{3} + k \right) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Je reviendrai plus loin sur les lois indiquées par ces formules.

VARIATION DE VOLUME DE LA CAVITÉ INTERNE (ΔU_1).

Imaginons le diélectrique soumis à *une pression* p_1 *s'exerçant seulement sur la face interne* S_1 : un raisonnement identique au précédent donnera

$$(2) \quad \Delta U_1 = \left(\frac{\partial C}{\partial p_1} \right) \frac{V^2}{2}.$$

VARIATION DU VOLUME EXTÉRIEUR (ΔU_2).

Imaginons le diélectrique soumis à *une pression* p_2 *s'exerçant seulement sur la surface externe* S_2 , le même

raisonnement donnera

$$(3) \quad \Delta U_2 = \left(-\frac{\partial C}{\partial p_2} \right) \frac{V^2}{2} \quad (1).$$

Dans ces deux derniers cas, la pression (p_1 ou p_2) ne s'exerçant que sur l'une des faces de la lame, à la variation dp correspondra, pour le diélectrique, une déformation complexe qui ne le laissera ni semblable, ni isotrope : nous ne pouvons donc plus transformer les égalités (2) et (3) comme nous l'avons fait pour (1).

Mais, dans le cas particulier du *condensateur sphérique* (et aussi pour les condensateurs *plan* ou *cylindrique*) on pourra pousser le calcul à fond et *obtenir les lois qui régissent les déformations* (ΔU_1) et (ΔU_2) tout aussi bien que celles (1^{'''}) auxquelles obéit la *variation de volume de la matière diélectrique* : c'est ce que nous allons faire maintenant.

APPLICATION AU CAS DU CONDENSATEUR SPHÉRIQUE INFINIMENT MINCE.

Soient R le rayon et e l'épaisseur supposée négligeable par rapport à R .

Variation de volume de la cavité interne. — La formule obtenue dans le cas général était

$$(2) \quad \Delta U_1 = \left(\frac{\partial C}{\partial p_1} \right) \frac{V^2}{2},$$

où p_1 désignait une pression s'exerçant seulement sur la face interne S_1 ; mais ici

$$C = \frac{KR^2}{e}, \quad \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p_1} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial p_1} - \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p_1};$$

or, d'après le problème I de l'étude préliminaire,

$$\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p_1} = \frac{R}{e} k_1,$$

et, d'après les formules qui donnent la déformation élas-

(1) Je rappelle que ces formules (1), (2), (3) ne sont applicables, *en toute rigueur*, qu'au départ, c'est-à-dire pour des potentiels peu élevés.

tique de la sphère mince ⁽¹⁾,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p_1} = a(1-\sigma) \frac{R}{2e}, \quad \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p_1} = -a\sigma \frac{R}{e};$$

on a donc

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{R}{e} k_1 + 2a(1-\sigma) \frac{R}{2e} + a\sigma \frac{R}{e} = \frac{R}{e} (k_1 + a);$$

la formule (2) devient alors, en remplaçant C et $\frac{\partial C}{\partial p_1}$ par leurs valeurs,

$$(4) \quad \Delta U_1 = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} U_1 \frac{V^2}{e^2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(4') \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Remarque. — En désignant par L la longueur d'une ligne quelconque tracée sur la sphère ou bien encore celle du rayon, on aura

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{3} \frac{\Delta U_1}{U_1},$$

ou

$$(4'') \quad \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

et, par suite,

$$(4''') \quad \Delta L = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} L \frac{V^2}{e^2}.$$

Variation du volume extérieur (ΔU_2). — Elle est égale à la variation de volume (ΔU_1) de la cavité, car le diélectrique est supposé infiniment mince.

Il est également intéressant de calculer la

Variation d'épaisseur de la lame diélectrique. — Le

(1) Voir à ce sujet : SACERDOTE, *Sur les déformations élastiques de vases minces* (*Journal de Physique*, 3^e série, t. VII, p. 516; 1898) article qui est reproduit à la fin de ce Mémoire (*Note C*). Je rappelle que, dans ces formules, a désigne le coefficient d'allongement longitudinal et σ le coefficient de Poisson.

volume de la matière diélectrique étant $U = 4\pi R^2 e$, on a

$$\left(\frac{\Delta U}{U}\right) = 2\left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta e}{e}\right);$$

mais $U_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$; donc

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right),$$

par suite

$$\left(\frac{\Delta e}{e}\right) = \left(\frac{\Delta U}{U}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right);$$

en remplaçant $\left(\frac{\Delta U}{U}\right)$ et $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)$ par leurs valeurs (1^{iv}) et (4'), on a

$$\frac{\Delta e}{e} = \left(\frac{\gamma}{3} + k - 2k_1 - 2a\right) \frac{K}{8\pi} H^2;$$

mais on a vu dans l'étude préliminaire que $k = 2k_1 + k_2$, et l'on sait, en outre, que $\gamma = 3a(1 - 2\sigma)$; par suite

$$(5') \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

$$(5) \quad \Delta e = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e}.$$

CAS DU CONDENSATEUR SPHÉRIQUE D'ÉPAISSEUR QUELCONQUE.

Soient R_1, R_2 les deux rayons; $e = R_2 - R_1$ l'épaisseur du diélectrique; la capacité électrique du condensateur est $C = \frac{KR_1 R_2}{e}$.

Variations du volume de la cavité (ΔU_1) et du volume extérieur (ΔU_2). — Nous allons montrer qu'on peut déduire les déformations de la sphère épaisse des formules obtenues pour la sphère infiniment mince; le calcul, quoique encore assez difficile, sera cependant plus commode que celui auquel on serait conduit en essayant d'appliquer à ce cas les formules générales (2) et (3) obtenues pour (ΔU_1) et (ΔU_2).

Soit V le potentiel auquel on porte l'armature interne tandis que l'externe est au sol; à une distance r du

centre, le potentiel est $v = \frac{V}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$ en posant

$$\varepsilon = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}.$$

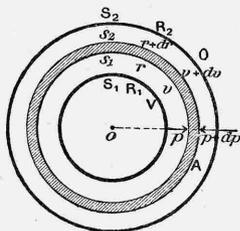
Considérons une tranche sphérique infiniment mince A comprise, avant la déformation, entre les rayons (r) et ($r + dr$) et, après la déformation, entre les rayons ($r + \rho$) et ($r + dr + \rho + d\rho$) : ρ étant une fonction de r .

Cette tranche A est déformée :

1° Parce qu'elle est soumise sur ses deux faces s_1 et s_2 à des pressions p et ($p + dp$) provenant de l'action du diélectrique soit intérieur, soit extérieur à A (p est aussi une fonction de r);

2° Parce qu'il existe une différence de potentiel dv entre ses deux faces $dv = -\frac{V}{\varepsilon r^2} dr$.

Fig. 3.



La déformation due à la première cause est donnée immédiatement par les formules de déformation élastique de la sphère mince ⁽¹⁾; on a

$$\left(\frac{\rho}{r} \right)_1 = -a(1-2\sigma)p - a \frac{1-\sigma}{2} r \frac{dp}{dr},$$

$$\left(\frac{d\rho}{dr} \right)_1 = -a(1-2\sigma)p + a\sigma r \frac{dp}{dr}.$$

⁽¹⁾ *Journal de Physique, loc. cit.* — Note C.

Quant à celle due à la différence de potentiel, elle est fournie par les formules de déformation électrique du condensateur sphérique infiniment mince, établies un peu plus haut (4'''), (5') :

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)_2 = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2 r^4},$$

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_2 = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2 r^4}.$$

La déformation totale s'obtiendra en additionnant, ce qui donne

$$(\alpha) \quad \frac{\rho}{r} = -a \frac{1-\sigma}{2} r \frac{dp}{dr} - a(1-2\sigma)p + (a + k_1) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{r^4},$$

$$(\beta) \quad \frac{d\rho}{dr} = a\sigma r \frac{dp}{dr} - a(1-2\sigma)p - [a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{r^4};$$

de l'égalité (α) tirons par différentiation $\frac{d\rho}{dr}$, et égalons la valeur obtenue à celle que donne (β) : nous arrivons à l'équation différentielle

$$a \frac{1-\sigma}{2} r \frac{d^2p}{dr^2} + 2a(1-\sigma) \frac{dp}{dr} + \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \frac{1}{r^5} = 0,$$

dont la solution est

$$p = -\frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \left[1 + \frac{3k_1 + k_2}{2a(1-\sigma)} \right] \frac{1}{r^4} + \frac{A}{r^3} + B,$$

A et B étant deux constantes que l'on détermine par les conditions limites $p = 0$ pour $r = R_1$ et pour $r = R_2$; on déduit de là

$$(\gamma) \quad \frac{dp}{dr} = \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \left[1 + \frac{3k_1 + k_2}{2a(1-\sigma)} \right] \left(4 - 3 \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} \frac{r}{R_1 R_2} \right) \frac{1}{r^5}.$$

Ce que nous voulons obtenir, ce sont les valeurs de $\left(\frac{\rho}{r}\right)$ pour $r = R_1$ et $r = R_2$ (nous les désignerons par $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ et $\frac{\Delta R_2}{R_2}$);

pour les avoir il suffit maintenant de faire successivement, dans l'équation (α),

$$r = R_1, \quad p = 0, \quad \frac{dp}{dr} = \text{la valeur donnée par } (\gamma) \text{ pour } r = R_1,$$

$$r = R_2, \quad p = 0, \quad \frac{dp}{dr} = \text{la valeur donnée par } (\gamma) \text{ pour } r = R_2.$$

On obtient après calculs

$$(6) \quad \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2^2}{R_1^2} \left\{ a + k_1 - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \right) \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(7) \quad \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} \right) = \frac{R_1^2}{R_2^2} \left\{ a + k_1 - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \right) \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2}.$$

En outre, comme $e = R_2 - R_1$, on a $\Delta e = \Delta R_2 - \Delta R_1$, ce qui donne après calculs

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta e}{e} + \left\{ [a(1-2\sigma) + 2k_1 + k_2] \frac{R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2}{R_1 R_2} \right. \\ \left. - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \frac{3}{4} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2}. \end{array} \right.$$

CONDENSATEUR SPHÉRIQUE MINCE.

Dans le cas où la sphère est *assez mince* pour qu'on puisse *négliger les puissances de $\frac{e}{R_1}$ supérieures à la première*, ces formules deviennent

$$(6') \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \left\{ a + k_1 + \frac{e}{R_1} \left[a(1+\sigma) + \frac{k_1 - k_2}{2} \right] \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(7') \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \left\{ a + k_1 - \frac{e}{R_1} \left[a(1+\sigma) + \frac{k_1 - k_2}{2} \right] \right\} \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2},$$

$$(8') \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e^2}.$$

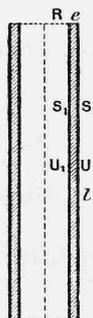
Enfin, si le condensateur est *infinitement mince*, $\frac{e}{R_1}$ est négligeable et les formules précédentes redonnent bien (4''') et (5').

Nous allons maintenant compléter l'étude précédente du condensateur fermé par celle des déformations des condensateurs cylindrique et plan; je ne reparlerai pas de la variation de volume de la matière diélectrique, puisque j'ai déjà dit qu'elle est donnée, dans tous les cas, par les formules (I'), (I'''), (I''), qui ne présenteraient du reste aucune particularité intéressante, si l'on y remplaçait W par sa valeur.

CAS DU CONDENSATEUR CYLINDRIQUE INFINIMENT MINCE.

Soient R le rayon, e l'épaisseur du diélectrique, l la longueur du tube (fig. 4).

Fig. 4.



Variation du rayon (ΔR). — En imaginant qu'il s'exerce une pression p_1 sur la face interne S_1 seulement et en répétant toujours le même raisonnement, on obtient la formule : $\Delta R = \left(\frac{\partial C}{\partial P_1} \right) \frac{V^2}{2}$, P_1 représentant la pression totale ($2\pi R l$) p_1 . Mais on a

$$C = \frac{KRl}{2e}, \quad \frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p_1} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial p_1} - \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p_1};$$

d'après le problème II de l'étude préliminaire $\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p_1} = \frac{R}{e} k_1$, et d'après les formules de déformation élastique du cylindre

infiniment mince ⁽¹⁾ $\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p_1} = a \frac{R}{e}$, $\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial p_1} = \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p_1}$; d'après cela $\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{R}{e} k_1 + \frac{R}{e} a = (a + k_1) \frac{R}{e}$; en portant ce résultat dans la valeur de ΔR on a

$$(9) \quad \Delta R = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} R \frac{V^2}{e^2},$$

$$(9') \quad \frac{\Delta R}{R} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Variation de longueur (Δl). — Imaginons le cylindre soumis à une *force de traction totale* Q , parallèle aux génératrices, et répétons notre même raisonnement; nous arriverons à la formule: $\Delta l = \frac{\partial C}{\partial Q} \frac{V^2}{2}$. Mais $C = \frac{KRl}{2e}$; donc $\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial q} - \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial q} \right)$, en désignant par s la surface de la section annulaire du tube et par dq le quotient $\frac{dQ}{s}$.

Le problème II de l'étude préliminaire donne $\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial q} = k_1$.

Les formules de déformation élastique du cylindre mince soumis à une traction parallèle aux génératrices indiquent: $\frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial q} = a$, $\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial q} = \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial q}$; par suite

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{1}{s} (a + k_1),$$

d'où

$$(10) \quad \Delta l = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} l \frac{V^2}{e^2},$$

$$(10') \quad \frac{\Delta l}{l} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

En nous servant des résultats précédents, il va nous être facile de calculer la *variation de capacité du tube* et la *variation d'épaisseur du diélectrique*:

⁽¹⁾ *Journal de Physique, loc. cit.* — Note C.

1° On a $U_1 = \pi R^2 l$, $\frac{\Delta U_1}{U_1} = 2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta l}{l}$ et, en remplaçant $\frac{\Delta R}{R}$ et $\frac{\Delta l}{l}$ par leurs valeurs :

$$(11') \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$(11) \quad \Delta U_1 = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} U_1 \frac{V^2}{e^2};$$

2° On a $U = 2\pi R l e$, d'où $\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta e}{e}$, d'où $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta R}{R} - \frac{\Delta l}{l}$. Remplaçons les différents termes par leurs valeurs (11'), (9'), (10') :

$$(12') \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$(12) \quad \Delta e = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e}.$$

Complément. — Les formules que nous venons d'établir se rapportent au cas où le condensateur cylindrique est non seulement infiniment mince, mais encore de longueur infinie (d'après la valeur employée pour la capacité électrique).

Mais il est facile de voir que, sous certaines réserves, elles sont encore applicables aux cas suivants (qui sont ceux réalisés dans les expériences) :

1° Le condensateur est formé d'un tube diélectrique cylindrique métallisé sur une partie seulement de sa longueur;

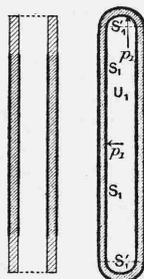
2° Le condensateur est formé d'une partie cylindrique fermée à ses deux extrémités par des calottes, hémisphériques par exemple.

Pour que les formules subsistent, il suffit que, dans l'expression de la capacité électrique, le terme correctif relatif aux parties terminales soit négligeable par rapport au terme qui représente la capacité de la partie cylindrique.

Calculons, par exemple, la *variation de capacité interne pour le cas de la deuxième fig. 5* : on arrive à la formule

déjà vue : $\Delta U_1 = \frac{\partial C}{\partial p_1} \frac{V^2}{2}$, la pression p_1 s'exerçant sur toute

Fig. 5.



la surface interne S_1 et S_1' ; mais on a vu, dans l'étude préliminaire (complément au problème II), que l'on a, dans ce cas, $\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p_1} = \frac{3R}{2e} k_1$; les formules de déformation élastique du cylindre mince donnent :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p_1} = \alpha \frac{R}{e} \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right), \quad \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial p_1} = (1 - 2\sigma) \frac{R}{2e}, \quad \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p_1} = -\frac{3}{2} \alpha \sigma \frac{R}{e};$$

et comme $C = \frac{KRl}{2e}$ puisque nous avons supposé que la capacité électrique se réduisait à celle de la portion cylindrique, on a :

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p_1} = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial p_1} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial p_1} - \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{3R}{2e} (k_1 + \alpha);$$

on déduit de là :

$$\Delta U_1 = \frac{3R}{2e} (k_1 + \alpha) \frac{CV^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(\alpha + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

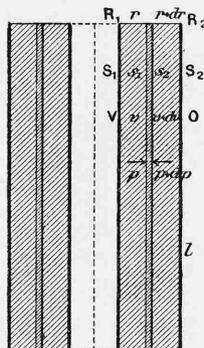
ce qui est bien la formule vue (11').

CAS DU CONDENSATEUR CYLINDRIQUE D'ÉPAISSEUR QUELCONQUE.

Soient R_1 et R_2 les deux rayons, e l'épaisseur du diélectrique $e = R_2 - R_1$, l la longueur du tube.

Nous allons montrer qu'on peut déduire les déforma-

Fig. 6.



tions de ce cylindre épais des formules obtenues précédemment pour le cylindre infiniment mince.

Soit V le potentiel auquel on porte l'armature interne, tandis que l'armature externe est au sol; à une distance r de l'axe du cylindre, le potentiel est $v = -\frac{V}{\epsilon} \mathcal{L} \frac{r}{R_2}$ en posant $\epsilon = \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1}$.

Considérons une tranche cylindrique infiniment mince comprise avant la déformation entre les rayons (r) et ($r + dr$) et après la déformation entre les rayons ($r + \rho$) et ($r + \rho + dr + d\rho$); ρ étant une certaine fonction de r .

Cette tranche se déforme :

1° Parce qu'elle est soumise sur ses deux faces s_1 et s_2 à des pressions p et $(p + dp)$ provenant de l'action du diélectrique soit intérieur soit extérieur à cette tranche : p est aussi une fonction de r ;

2° Parce qu'il existe entre ses deux faces une différence de potentiel $dv = -\frac{V}{\epsilon r} dr$.

La déformation due à la première cause est donnée par les formules de déformation élastique du cylindre mince

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{r}\right)_1 &= -a(1-\sigma)p - ar \frac{dp}{dr}, \\ \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_1 &= -a(1-\sigma)p + a\sigma r \frac{dp}{dr}. \end{aligned}$$

Quant à celle due à la différence de potentiel elle est fournie par les formules de déformation électrique du condensateur cylindrique infiniment mince établies un peu plus haut (g'), ($12'$) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{r}\right)_2 &= (a+k_1) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2 r^2}, \\ \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_2 &= -[a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2 r^2}. \end{aligned}$$

La déformation totale s'obtiendra en additionnant les égalités précédentes, ce qui donne :

$$(\delta) \begin{cases} \left(\frac{\rho}{r}\right) = -ar \frac{dp}{dr} - a(1-\sigma)p + (a+k_1) \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{r^2}, \\ \left(\frac{d\rho}{dr}\right) = a\sigma r \frac{dp}{dr} - a(1-\sigma)p - [a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{r^2}. \end{cases}$$

On déduit de là l'équation différentielle

$$ar^2 \frac{d^2p}{dr^2} + 3ar \frac{dp}{dr} + \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \frac{1}{r^2} = 0,$$

dont la solution est

$$p = \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{k_1 + k_2 - 2a\sigma}{a} \frac{1}{2r^2} \left(\mathcal{L}r + \frac{1}{2} \right) + \frac{A}{r^2} + B;$$

A et B étant deux constantes que l'on détermine par les conditions limites $p = 0$ pour $r = R_1$ et $r = R_2$; on déduit de là

$$(\varphi) \frac{dp}{dr} = \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\varepsilon^2} \frac{k_1 + k_2 - 2a\sigma}{a} \left[-\mathcal{L}r + \frac{1}{2} + \frac{R_2^2 \mathcal{L}R_1 - R_1^2 \mathcal{L}R_2}{R_2^2 - R_1^2} \right] \frac{1}{r^3}.$$

Les valeurs de $\left(\frac{\rho}{r}\right)$ pour $r = R_1$ et $r = R_2$ que nous voulons obtenir et que nous désignerons par $\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)$ et $\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)$ s'obtiendront alors en remplaçant successivement dans l'équation (δ), r par R_1 et R_2 , p par zéro, et $\frac{dp}{dr}$ par les valeurs tirées de (φ) pour $r = R_1$ et pour $r = R_2$; on obtient finalement :

$$(13) \frac{\Delta R_1}{R_1} = \left[a + k_1 + (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{KV^2}{8\pi R_1^2 \left(\mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} \right)^2},$$

$$(14) \frac{\Delta R_2}{R_2} = \left[a + k_1 + (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{KV^2}{8\pi R_2^2 \left(\mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} \right)^2},$$

et l'on déduit de là

$$(15) \frac{\Delta e}{e} = - \left[a + k_1 - (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{KV^2}{8\pi R_1 R_2 \left(\mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} \right)^2}.$$

Dans le cas où le condensateur cylindrique est mince, c'est-à-dire dans le cas où l'on peut négliger les puissances de $\frac{e}{R}$ supérieures à la première, ces formules deviennent

$$(13') \frac{\Delta R_1}{R_1} = \left\{ a + k_1 + \frac{e}{2R_1} [2a(1 + \sigma) + k_1 - k_2] \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2},$$

$$(14') \frac{\Delta R_2}{R_2} = \left\{ a + k_1 - \frac{e}{2R_1} [2a(1 + \sigma) + k_1 - k_2] \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2},$$

$$(15') \quad \frac{\Delta e}{e} = - [a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

Enfin en négligeant $\frac{e}{R_1}$ (condensateur infiniment mince) on retomberait évidemment sur les formules déjà vues, (9'), (12').

Variation de longueur du tube. — On trouve facile-

ment :

$$\frac{\Delta l}{l} = \left[a + k_1 + \frac{\sigma}{2}(k_1 + k_2 - 2a\sigma) - \sigma(k_1 + k_2 - 2a\sigma) \frac{LR_2 - LR_1}{R_2^2 - R_1^2} r^2 \right] \\ \times \frac{1}{r^2} \frac{KV^2}{8\pi\epsilon^2},$$

et, en ne gardant que la première puissance de r ,

$$\frac{\Delta l}{l} = \left[a + k_1 + \frac{\sigma}{2}(k_1 + k_2 - 2a\sigma) - \frac{\sigma}{2}(k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(1 - \frac{e}{R_1} \right) \frac{r^2}{R_1^2} \right] \\ \times \frac{1}{r^2} \frac{KV^2}{8\pi\epsilon^2};$$

cet allongement $\frac{\Delta l}{l}$ est fonction de r ; les différentes tranches cylindriques ne subissent pas la même variation de longueur : le tube ne reste pas cylindrique, il se déforme; pour avoir la valeur moyenne de $\frac{\Delta l}{l}$ nous ferons $r = R_1 + \frac{e}{2}$ et nous obtiendrons ainsi

$$(16) \quad \frac{\Delta l}{l} = (a + k_1) \frac{KV^2}{8\pi\epsilon^2}.$$

Variation de volume de la cavité. — On a $U_1 = \pi R_1^2 l$ et par suite

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = 2 \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta l}{l},$$

ce qui donne

$$(17) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \left\{ 3(a + k_1) + \frac{e}{R_1} [2a(1 + \sigma) + k_1 - k_2] \right\} \frac{KV^2}{8\pi\epsilon^2}$$

et, pour la *variation du volume extérieur*, on obtient

$$(18) \quad \frac{\Delta U_2}{U_2} = \left\{ 3(a + k_1) - \frac{e}{R_1} [2a(1 + \sigma) + k_1 - k_2] \right\} \frac{KV^2}{8\pi\epsilon^2}.$$

S. 4

CAS DU CONDENSATEUR PLAN (1).

Soit une lame diélectrique plane rectangulaire, à faces parallèles, métallisée sur ses deux faces; l et l' les dimensions perpendiculaires aux lignes de force et e l'épaisseur dans la direction de ces lignes de force : cette épaisseur étant du reste quelconque.

Variation de longueur dans les directions perpendiculaires aux lignes de force. — En raisonnant comme nous l'avons fait pour trouver la variation de longueur du cylindre, on obtiendrait

$$(19) \quad \Delta L = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} L \frac{V^2}{e^2},$$

$$(19') \quad \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

L désignant la longueur d'une ligne quelconque perpendiculaire aux lignes de force et en particulier l ou l' .

Variation d'épaisseur du diélectrique : première méthode. — En imaginant le diélectrique soumis à une traction parallèle aux lignes de force et en répétant toujours le même raisonnement, on obtient

$$(20) \quad \Delta e = - [a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e},$$

$$(20') \quad \frac{\Delta e}{e} = - [a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Deuxième méthode. — Mais on peut aussi remarquer que $U = ell'$, on a donc $\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta U}{U} - 2 \left(\frac{\Delta L}{L} \right)$, et en tenant

(1) J'ai déjà traité ce cas particulier dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXVI, p. 1019; 1898.

compte de (1^{iv}) et (20'), on obtient

$$\frac{\Delta e}{e} = \left(\frac{\gamma}{3} + k - 2k_1 - 2a \right) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

En comparant cette valeur à celle déjà trouvée (20') et se rappelant que $\gamma = 3a(1 - 2\sigma)$, on obtient la relation $k = 2k_1 + k_2$, déjà démontrée autrement dans l'étude préliminaire.

Condensateur quelconque.

$$(1) \quad \Delta U = \left(- \frac{\partial C}{\partial p} \right) \frac{V^2}{2}. \quad (1''')$$

$$(1') \quad = \left(\frac{\gamma}{3} + k \right) W. \quad (1'')$$

$$(1'') \quad = \int \left(\frac{\gamma}{3} + k \right) \frac{K}{8\pi} H^2 du.$$

$$(2) \quad \Delta U_1 = \left(\frac{\partial C}{\partial p_1} \right) \frac{V^2}{2}.$$

$$(3) \quad \Delta U_2 = \left(- \frac{\partial C}{\partial p_2} \right) \frac{V^2}{2}.$$

Condensateur sphérique.

$$(6) \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{1}{3} \frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \left\{ a + k_1 - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} \right) \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}. \quad (13) \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = +$$

$$(7) \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{1}{3} \frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \left\{ a + k_1 - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \left(1 - \frac{3}{4} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} \right) \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}. \quad (14) \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = +$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta e}{e} &= \left\{ [a(1+2\sigma) + 2k_1 + k_2] \frac{R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2}{R_1 R_2} \right. \\ &\quad \left. - [2a(1-\sigma) + 3k_1 + k_2] \frac{3}{4} \frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3} \frac{R_2 + R_1}{R_2 R_1} \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}. \end{aligned} \right. \quad (15) \quad \frac{\Delta e}{e} = -$$

Condensateur sphérique mince.

$$(6') \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{1}{3} \frac{\Delta U_1}{U_1} = \left\{ a + k_1 + \frac{e}{R_1} \left[a(1+\sigma) + \frac{k_1 - k_2}{2} \right] \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}. \quad (13')$$

$$(7') \quad \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{1}{3} \frac{\Delta U_2}{U_2} = \left\{ a + k_1 - \frac{e}{R_1} \left[a(1+\sigma) + \frac{k_1 - k_2}{2} \right] \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}. \quad (14')$$

(16)

(17)

(18)

$$(8') \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1+2\sigma) - k_2] \frac{KV^2}{8\pi e^2}. \quad (15')$$

Condensateur sphérique infiniment mince.

$$(4'') \quad \frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{3} \frac{\Delta U_1}{U_1} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2. \quad (9')$$

(10')

(11')

$$(5') \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2. \quad (12')$$

Condensateur quelconque infiniment mince.

$$\Delta U = \left(\frac{\gamma}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} S \frac{V^2}{e}$$

$$\frac{\Delta U}{U} = \left(\frac{\gamma}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Condensateur cylindrique.

$$+ (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \right) \left] \frac{KV^2}{8\pi R_1^2 \left(\mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} \right)^2}.$$

$$+ (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \right) \left] \frac{KV^2}{8\pi R_2^2 \left(\mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} \right)^2}.$$

$$- (k_1 + k_2 - 2a\sigma) \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} \right) \left] \frac{KV^2}{8\pi R_1 R_2 \left(\mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} \right)^2}.$$

Condensateur plan.

Condensateur cylindrique mince.

$$+ k_1 + \frac{e}{2R_1} [2a(1+\sigma) + k_1 - k_2] \left\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

$$+ k_1 - \frac{e}{2R_1} [2a(1+\sigma) + k_1 - k_2] \left\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

$$+ k_1 \left\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

$$(a + k_1) + \frac{e}{R_1} [2a(1+\sigma) + k_1 - k_2] \left\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

$$(a + k_1) - \frac{e}{R_1} [2a(1+\sigma) + k_1 - k_2] \left\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

$$[a(1+2\sigma) - k_2] \left\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}.$$

Condensateur cylindrique infiniment mince.

$$\frac{\Delta R}{R} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

$$\frac{\Delta l}{l} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2.$$

$$\frac{\Delta e}{e} = -[a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

$$(19') \quad \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2,$$

$$(20') \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1+2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

Résumé des formules. — Énoncés des lois.

1° CONDENSATEURS INFINIMENT MINCES (ET CONDENSATEUR PLAN).

Les formules précédemment établies montrent que pour les condensateurs infiniment minces (de forme sphérique ou cylindrique) et pour le condensateur plan, en désignant d'une façon générale par :

L la longueur d'une ligne quelconque perpendiculaire aux lignes de force, et par :

e l'épaisseur du diélectrique dans la direction de ces lignes de force, on a

$$(I) \quad \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2$$

ou

$$(I') \quad \Delta L = (a + k_1) \frac{K}{8\pi} L \frac{V^2}{e^2},$$

$$(II) \quad \frac{\Delta e}{e} = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} H^2.$$

ou

$$(II') \quad \Delta e = -[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{e}$$

Et maintenant qu'il est établi [formule (I)] que la dilatation est la même dans toutes les directions perpendiculaires aux lignes de force, et la même quelles que soient la forme et la grandeur du condensateur, il devient évident que si l'on désigne par :

U_1 le volume d'une cavité, et par U le volume de la matière diélectrique,

$$(III) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \left(\frac{\Delta L}{L} \right)$$

et

$$(IV) \quad \frac{\Delta U}{U} = 2 \left(\frac{\Delta L}{L} \right) + \left(\frac{\Delta e}{e} \right)$$

ou, en tenant compte des relations vues plus haut,

$$(III') \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} H^2$$

ou

$$(III'') \quad \Delta U_1 = 3(a + k_1) \frac{K}{8\pi} U_1 \frac{V^2}{e^2}$$

et

$$(IV') \quad \frac{\Delta U}{U} = \left(\frac{\gamma}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} H^2$$

ou

$$(IV'') \quad \Delta U = \left(\frac{\gamma}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi} S \frac{V^2}{e},$$

formules qui sont du reste bien celles trouvées directement.

Nous pouvons traduire les formules précédentes sous forme de lois :

Soit en les prenant sous leur forme (I), (II), (III'), (IV') :
Lois des déformations unitaires ;

Soit en prenant les formules équivalentes (I'), (II'), (III''), (IV'') : *Lois des déformations.*

LOIS DES DÉFORMATIONS UNITAIRES.

Toutes les déformations unitaires que subit le diélectrique sont proportionnelles au carré de l'intensité du champ électrique, ou encore proportionnelles au carré du potentiel et à l'inverse du carré de l'épaisseur du diélectrique ;

Les coefficients, qui dépendent uniquement de la nature du diélectrique, étant :

$(a + k_1) \frac{K}{8\pi}$, pour les variations de longueur perpendiculairement aux lignes de force et par suite $3(a + k_1) \frac{K}{8\pi}$,
pour les variations de volume des cavités ;

— $[a(1 + 2\sigma) - k_2] \frac{K}{8\pi}$, pour les variations de longueur dans la direction des lignes de force;

$\left(\frac{\gamma}{3} + k\right) \frac{K}{8\pi}$, pour les variations de volume de la matière diélectrique;

Par conséquent, *ni la forme, ni la grandeur* du condensateur n'ont *aucune influence*.

LOIS DES DÉFORMATIONS.

PREMIÈRE LOI. — *Toute ligne perpendiculaire aux lignes de force éprouve une variation de longueur proportionnelle à sa longueur, au carré du potentiel et à l'inverse du carré de l'épaisseur du diélectrique.*

DEUXIÈME LOI. — *L'épaisseur du diélectrique (dans la direction du champ) varie proportionnellement au carré du potentiel et à l'inverse de cette épaisseur.*

TROISIÈME LOI. — *Les cavités éprouvent des variations de volume proportionnelles à leur volume, au carré du potentiel et à l'inverse du carré de l'épaisseur du diélectrique.*

QUATRIÈME LOI. — *La matière diélectrique éprouve une variation de volume proportionnelle à la surface du condensateur, au carré du potentiel et à l'inverse de l'épaisseur du diélectrique.*

Remarque. — Cette dernière loi peut encore s'énoncer de la façon suivante : *La matière diélectrique éprouve une variation de volume égale au produit de l'énergie électrique du condensateur par un coefficient $\left(\frac{\gamma}{3} + k\right)$.*

2° CAS GÉNÉRAL.

Si nous passons maintenant au cas où le condensateur, au lieu d'être infiniment mince (c'est-à-dire $\frac{e}{R}$ négligeable),

est seulement *mince* (les puissances de $\frac{e}{R}$ supérieures à la première négligeables) ou plus généralement est d'*épaisseur quelconque*, nous voyons immédiatement par l'inspection des formules que :

Aucune des lois précédentes ne subsiste, sauf celle relative à la proportionnalité entre la grandeur des déformations et le carré du potentiel.

En particulier, pour une même différence de potentiel et une même épaisseur de diélectrique :

Les différentes lignes perpendiculaires aux lignes de force, soit appartenant à un même condensateur (exemple : lignes circulaires et génératrices du cylindre), soit à des condensateurs de même forme, mais de grandeurs différentes, soit à des condensateurs de formes différentes, subissent des dilatations unitaires inégales.

Il s'ensuit que la *variation unitaire de volume des cavités est différente* pour un cylindre et pour une sphère, ou pour des sphères de rayons différents, etc. ;

Et aussi que la relation $\frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \left(\frac{\Delta L}{L} \right)$ n'est plus exacte (sauf si U_1 et L se rapportent à un même condensateur de forme *sphérique*).

Complément à la théorie précédente.

Cas où les armatures sont indépendantes du diélectrique.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé que les *armatures du condensateur subissaient les mêmes déformations que les surfaces diélectriques en contact.*

C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque les armatures sont formées par la métallisation de la surface du diélectrique lui-même (argentures, feuilles d'étain collées, etc.) ou par des liquides.

Mais il est intéressant de se rendre compte de ce que deviennent les lois dans le cas moins usuel où les arma-

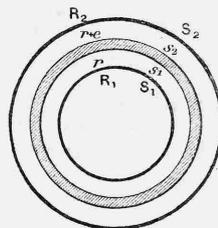
tures seraient indépendantes du diélectrique, c'est-à-dire dans le cas où il existerait entre les armatures et le diélectrique solide un intervalle d'air ou de vide, la surface et la distance des armatures restant alors invariables malgré la déformation du diélectrique.

Cette étude serait tout à fait analogue à celle qui vient d'être faite, aussi je ne la répéterai pas entièrement. Je me bornerai à traiter quelques cas simples (condensateurs à lame diélectrique sphérique infiniment mince ou à lame plane) pour lesquels les résultats donneront lieu plus loin à des remarques intéressantes.

LAME DIÉLECTRIQUE SPHÉRIQUE INFINIMENT MINCE.

Soient R_1 et R_2 les rayons de deux armatures r et $(r + e)$

Fig. 7.



ceux de la lame diélectrique interposée (e très petit par rapport à r); la capacité d'un tel condensateur est

$$C = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{K-1}{K} \frac{e}{r^2}}$$

En désignant par U_1 le volume de la cavité intérieure à la lame diélectrique et par p_1 une pression s'exerçant sur la face interne s_1 de cette lame, les raisonnements déjà vus conduisent à

$$\Delta U_1 = \left(\frac{\partial C}{\partial p_1} \right) \frac{V^2}{2},$$

en se servant des formules de déformation élastique de la sphère mince et d'après la valeur de la capacité, donnée plus haut, on arrive à

$$(21) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \frac{\Delta L}{L} = 3[-\alpha(K-1)K + k_1 K] \frac{1}{8\pi} H^2,$$

et par des calculs analogues

$$(22) \quad \frac{\Delta U}{U} = \left[-\frac{\gamma}{3}(K-1)K + kK \right] \frac{1}{8\pi} H^2,$$

$$(23) \quad \frac{\Delta e}{e} = [\alpha(1+2\sigma)(K-1)K + k_2 K] \frac{1}{8\pi} H^2.$$

Dans ces formules H désigne l'intensité du champ électrique à l'intérieur de la lame diélectrique solide; on a donc

$$H = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{K-1}{K} \frac{e}{r^2}} \frac{V}{Kr^2},$$

qui devient

$$H = \frac{V}{e},$$

si l'intervalle d'air compris entre les armatures et le diélectrique solide est infiniment mince.

LAME DIÉLECTRIQUE PLANE.

Considérons une lame diélectrique plane rectangulaire, de dimensions ll' et d'épaisseur e placée entre deux armatures de dimensions L et L' et distantes l'une de l'autre de E .

Nous distinguerons deux cas :

PREMIER CAS. — *Le diélectrique déborde les armatures*; alors $C = \frac{LL'}{4\pi \left[E - e + \frac{e}{K} \right]}$ et des calculs analogues à

ceux déjà vus conduisent à

$$(24) \quad \frac{\Delta l}{L} = [-\alpha\sigma(K-1)K + k_1 K] \frac{1}{8\pi} H^2,$$

$$(25) \quad \frac{\Delta e}{e} = [\alpha(K-1)K + k_2 K] \frac{1}{8\pi} H^2,$$

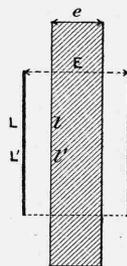
où H désigne l'intensité du champ dans la lame diélectrique

$$H = \frac{V}{K(E - e) + e},$$

expression qui devient

$$H = \frac{V}{e},$$

Fig. 8.



dans le cas où $(E - e)$ est infiniment petit, c'est-à-dire lorsque les armatures ne sont séparées de la lame diélectrique que par une couche d'air infiniment mince.

DEUXIÈME CAS. — *Les armatures débordent le diélectrique*; alors $C = \frac{ll'}{4\pi(E - e + \frac{e}{K})} + \frac{LL' - ll'}{4\pi E}$, on arrive

dans ce cas aux formules

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta l}{l} &= \left[a(1 - \sigma) \frac{K(E - e) + e}{e} - a\sigma(K - 1) + k_1 \right] \\ &\times \frac{K}{8\pi} H^2 - \frac{E}{e} a(1 - \sigma) \frac{H'^2}{8\pi}, \end{aligned} \right.$$

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta e}{e} &= \left[-2a\sigma \frac{K(E - e) + e}{e} + a(K - 1) + k_2 \right] \\ &\times \frac{K}{8\pi} H^2 + \frac{E}{e} 2a\sigma \frac{H'^2}{8\pi}, \end{aligned} \right.$$

où H a la même valeur $\frac{V}{K(E - e) + e}$ que plus haut, et où H' désigne l'intensité du champ électrique dans l'air, c'est-à-dire $H' = \frac{V}{E}$.

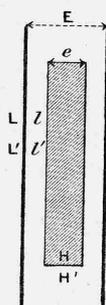
Dans le cas où $(E - e)$ est infiniment petit, ces formules deviennent

$$(26') \quad \frac{\Delta l}{l} = [a(1 - \sigma)(K - 1) - a\sigma(K - 1)K + k_1 K] \frac{H^2}{8\pi},$$

$$(27') \quad \frac{\Delta e}{e} = [-2a\sigma(K - 1) + a(K - 1)K + k_2 K] \frac{H^2}{8\pi},$$

et, en outre, $H' = H = \frac{V}{e}$.

Fig. 9.



Première remarque. — Les formules de déformation sont différentes pour les deux cas; il est évident que, dans la réalité, la transition n'est pas brusque: la déformation change progressivement à mesure que les dimensions de la lame augmentent depuis les valeurs pour lesquelles cette lame est franchement comprise entre les armatures jusqu'aux valeurs pour lesquelles elle déborde nettement ces armatures.

Deuxième remarque. — Nous n'avons pas tenu compte des perturbations sur les bords de la lame ou des armatures, car elles sont sans influence, comme nous l'avons déjà dit, pourvu que les dimensions du condensateur soient assez grandes pour que, dans l'expression de la capacité, le terme relatif à ces bords soit négligeable par rapport aux autres.

Intervalle d'air quelconque.

Intervalle d'air infiniment mince.

Lame sphérique infiniment mince.....

$$\left. \begin{array}{l} (21) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \frac{\Delta R_1}{R_1} = 3 [-a(K-1)K + k_1 K] \frac{H^2}{8\pi}, \\ (23) \quad \frac{\Delta e}{e} = [a(1+2\sigma)(K-1)K + k_2 K] \frac{H^2}{8\pi}, \\ (22) \quad \frac{\Delta U}{U} = \left[-\frac{\gamma}{3}(K-1)K + k_1 K \right] \frac{H^2}{8\pi}, \\ \text{avec} \quad H = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{K-1}{K} \frac{e}{r^2}} \frac{V}{Kr^2}. \end{array} \right\} \quad \left| \quad \text{avec} \quad H = \frac{V}{e} \right.$$

qui déborde les armatures.

$$\left. \begin{array}{l} (24) \quad \frac{\Delta l}{L} = [-a\sigma(K-1)K + k_1 K] \frac{H^2}{8\pi}, \\ (25) \quad \frac{\Delta e}{e} = [a(K-1)K + k_2 K] \frac{H^2}{8\pi}, \\ \text{avec} \quad H = \frac{V}{K(E-e) + e}. \end{array} \right\} \quad \left| \quad \text{avec} \quad H = \frac{V}{e} \right.$$

Lame plane

comprise entre les armatures.

$$\left. \begin{array}{l} (26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta l}{l} = \left[a(1-\sigma) \frac{K(E-e)+e}{e} - a\sigma(K-1) + k_1 \right] \\ \quad \times \frac{K}{8\pi} H^2 - \frac{E}{e} a(1-\sigma) \frac{H'^2}{8\pi}, \end{array} \right\} \quad (26') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta l}{l} = [a(1-\sigma)(K-1) \\ \quad - a\sigma(K-1)K + k_1 K] \frac{H^2}{8\pi}, \end{array} \right. \\ (27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta e}{e} = \left[-2a\sigma \frac{K(E-e)+e}{e} + a(K-1) + k_2 \right] \\ \quad \times \frac{K}{8\pi} H^2 + \frac{E}{e} 2a\sigma \frac{H'^2}{8\pi}, \end{array} \right\} \quad (27') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta e}{e} = [-2a\sigma(K-1) \\ \quad + a(K-1)K + k_2 K] \frac{H^2}{8\pi}, \end{array} \right. \\ \text{avec} \quad H = \frac{V}{K(E-e) + e} \quad \text{et} \quad H' = \frac{V}{E}. \quad \left| \quad \text{avec} \quad H = \frac{V}{e} \right.$$

Conclusions. — En examinant les formules que nous venons d'obtenir (21) à (27'), nous voyons que :

1° Si l'intervalle d'air est infiniment mince, les déformations unitaires sont encore proportionnelles au carré du potentiel et à l'inverse du carré de l'épaisseur (c'est-à-dire proportionnelles au carré de l'intensité du champ dans le diélectrique; quant aux coefficients, les termes enk , k_1 , k_2 sont les mêmes, mais les termes qui dépendent des coefficients élastiques sont différents comme grandeur et même comme signe de ceux obtenus dans le cas du contact entre les armatures et le diélectrique (1).

La dilatation dans les directions perpendiculaires aux lignes de force est différente pour une même lame plane selon les conditions [formules (24) et (26')] et différente de celle relative à une lame sphérique infiniment mince (2) [formule 21)]; par suite, la relation

$$(III) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \frac{\Delta L}{L}$$

n'est plus générale (3) (elle subsiste évidemment pour U_1 et L se rapportant à une même sphère).

(1) Cette différence entre les coefficients relatifs aux deux cas est due à ce que, lorsque l'armature est adhérente au diélectrique, celui-ci est soumis à la pression électrostatique $P = \frac{KH^2}{8\pi}$, tandis que, lorsqu'elle en est séparée par un intervalle d'air, ce diélectrique est soumis à une traction $q = K(K-1) \frac{H^2}{8\pi}$ (voir plus loin, p. 40 à 44).

(2) Le calcul montrerait même que la dilatation devient, dans ce cas, différent pour les diverses lignes perpendiculaires aux lignes de force d'un même condensateur cylindrique (lignes circulaires et génératrices).

(3) Je rappelle que (p. 30), au contraire, lorsque l'armature adhère au diélectrique, la dilatation est la même pour les différentes directions perpendiculaires aux lignes de force d'un même condensateur (génératrices et lignes circulaires d'un cylindre), et aussi la même pour des condensateurs de forme et de grandeurs différentes [formule (I)], de sorte que la relation (III) était générale, U_1 désignant la capacité d'un condensateur quelconque et L la longueur d'une ligne perpendiculaire aux lignes de force d'un autre condensateur quelconque.

2° *Si l'intervalle d'air est quelconque* : la loi de la proportionnalité de la déformation au carré du potentiel subsiste seule.

DEUXIÈME PARTIE.

CAUSES DES DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES DIÉLECTRIQUES.

Nous diviserons cette recherche en deux Parties :

- 1° Causes des déformations correspondantes aux formules, abstraction faites des termes en k_1, k_2, k ;
- 2° Causes des déformations correspondantes aux termes en k_1, k_2, k .

I. — Déformations correspondantes aux formules (abstraction faite des termes en k_1, k_2, k).

Nous allons essayer de trouver un système de forces qui en agissant sur le diélectrique produirait ces déformations.

Occupons-nous d'abord des cas dans lesquels les *armatures sont indépendantes du diélectrique*.

1° *Condensateur plan dont le diélectrique déborde les armatures*. — Les formules (24), (25) donnent dans ce cas, pour la déformation,

$$(24) \quad \frac{\Delta l}{L} = -a\sigma K(K-1) \frac{H^2}{8\pi},$$

$$(25) \quad \frac{\Delta e}{e} = aK(K-1) \frac{H^2}{8\pi},$$

qu'on peut imaginer produite par une *traction parallèle aux lignes de force* égale, par unité de surface de AB ou CD, à $q = K(K-1) \frac{H^2}{8\pi}$ (*fig. 10*).

2° *Condensateur plan dont les armatures débordent le diélectrique*. — Nous prendrons, pour abrégé, le cas où la lame d'air est infiniment mince; la déformation est

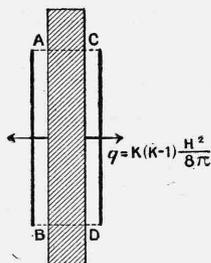
alors donnée par les formules vues

$$(26') \quad \frac{\Delta l}{l} = [a(1-\sigma)(K-1) - a\sigma K(K-1)] \frac{H^2}{8\pi}$$

et

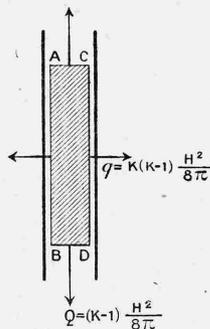
$$(27') \quad \frac{\Delta e}{e} = [-2a\sigma(K-1) + aK(K-1)] \frac{H^2}{8\pi}.$$

Fig. 10.



Il est facile de voir que pour produire une telle déformation il faut imaginer en outre, de la traction q parallèle aux lignes de force, du cas précédent, une *traction perpendiculaire aux lignes de force*, égale par unité de surface de AC, BD à $Q = (K-1) \frac{H^2}{8\pi}$ (fig. 11).

Fig 11.



3° *Lame sphérique*. — Les formules (21), (22), (23), relatives à ce cas, correspondent à des tractions suivant les

S.

6

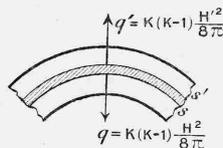
lignes de force

$$q = K(K-1) \frac{H^2}{8\pi} \quad \text{et} \quad q' = K(K-1) \frac{H'^2}{8\pi},$$

H et H' désignant les intensités du champ électrique dans le diélectrique sur les deux faces s et s' ; etc.

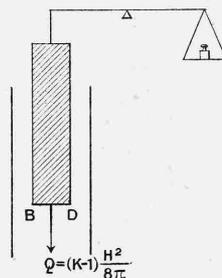
Or, et c'est là ce qui est à remarquer, ces forces (1°), (2°), (3°) ne sont pas fictives : leur existence a été démontrée par des expériences de M. Pellat (1), au moins pour le cas

Fig. 12.



du condensateur plan ; ainsi il a montré que si une lame diélectrique suspendue au fléau d'une balance a l'une de ses extrémités BD entre les armatures d'un condensateur, au moment de la charge le fléau s'incline du côté de la lame et, pour le ramener à sa position primitive, il faut

Fig. 13.



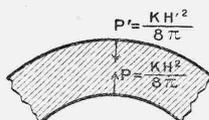
mettre dans les plateaux des poids sensiblement égaux à $\frac{(K-1)H^2}{8\pi} \times \text{surface BD}$ (fig. 13).

(1) Forces électriques agissant sur un diélectrique non électrisé (*Annales de Physique et Chimie*, 7^e série, t. IV; 1895. — *Journal de Physique*, 3^e série, t. V, p. 525).

Passons maintenant aux cas où *les armatures sont en contact avec le diélectrique* et en suivent les déformations.

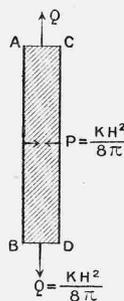
1. *Condensateur sphérique.* — Les *pressions électrostatiques* $P = \frac{KH^2}{8\pi}$ et $P' = \frac{KH'^2}{8\pi}$ qui s'exercent sur les deux faces du diélectrique suffisent à produire les déformations données par les formules (6), (7), (8) (abstraction faite, naturellement des termes en k_1, k_2, k) (fig. 14).

Fig. 14.



2. Pour les *condensateurs plan* ou *cylindrique*, les déformations exigent, en outre des pressions électrostatiques P , des *tractions perpendiculaires aux lignes de force* $Q = \frac{KH^2}{8\pi}$ (fig. 15).

Fig. 15.



Remarque. — Dans le cas où le cylindre est terminé par des calottes sphériques, AC et BD ne sont plus des surfaces de discontinuité pour le diélectrique, mais on voit alors facilement d'où proviennent ces *tractions* $Q = \frac{KH^2}{8\pi}$: elles sont les *résultantes des pressions électrostatiques sur les deux faces des calottes*. En effet, soient p et p' les pressions électrostatiques sur les deux surfaces

S et S': $p = \frac{KH^2}{8\pi}$, $p' = \frac{KH'^2}{8\pi}$; la composante suivant z de la résultante des pressions électrostatiques sur deux éléments correspondants s et s' sera

$$z = (ps - p's') \cos \alpha = \frac{K}{8\pi} (H^2 s - H'^2 s') \cos \alpha,$$

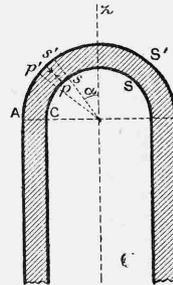
et comme $Hs = H's'$ et $\frac{s}{s'} = \left(1 - \frac{2e}{R}\right)$, on a

$$z = \frac{K}{8\pi} H^2 s \frac{2e}{R} \cos \alpha = \frac{KH^2}{8\pi} \frac{2e}{R} s \cos \alpha,$$

$$\Sigma z = \frac{KH^2}{8\pi} \frac{2e}{R} \Sigma s \cos \alpha = \frac{KH^2}{8\pi} \frac{2e}{R} \pi R^2 = \frac{KH^2}{8\pi} \times (2\pi R e),$$

ce qui est bien une traction $\left(\frac{KH^2}{8\pi}\right)$ par unité des surfaces de la section annulaire $(2\pi R e)$.

Fig. 16.



En résumé, les déformations électriques correspondantes aux termes où n'entrent pas les coefficients (k_1, k_2, k) ne sont que les déformations élastiques dues aux forces qui s'exercent sur un diélectrique non électrisé placé dans un champ électrique, forces mises en évidence par les expériences de M. Pellat et qui deviennent les pressions électrostatiques ⁽¹⁾ pour les portions de surface où le diélectrique est au contact des armatures.

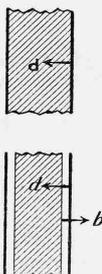
⁽¹⁾ A ce sujet remarquons que, lorsque le diélectrique n'est pas en contact avec les armatures, nous venons de voir qu'il est soumis à des

NOTE SUR L'EXPLICATION DES DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES
PAR LES PRESSIONS ÉLECTROSTATIQUES.

D'après ce qui précède, c'est seulement dans le cas des condensateurs fermés à armatures adhérentes au diélectrique (*condensateur sphérique et condensateur cylindrique avec calottes terminales*) que les pressions électrostatiques suffisent à rendre compte des déformations électriques des diélectriques (abstraction faite des termes en k_1, k_2, k).

tractions parallèles aux lignes de force $q = K(K - 1) \frac{H^2}{8\pi}$; en outre, la pression électrostatique qui agit alors sur l'armature est $p = \frac{K^2 H^2}{8\pi}$ (2).

Fig. 15 bis.



Quand au contraire il y a contact entre l'armature et le diélectrique, celui-ci est soumis à une pression électrostatique $P = \frac{KH^2}{8\pi}$ et il est facile de s'assurer que $P = (p - q)$, ce qui s'énonce :

La pression électrostatique, lorsqu'il y a contact entre l'armature et le diélectrique, est la différence entre la pression électrostatique p qui s'exercerait sur l'armature et la traction q qui agirait sur le diélectrique si ce contact n'existait pas, c'est-à-dire s'il y avait un intervalle d'air entre l'armature et le diélectrique. Je crois que cette relation n'avait pas encore été signalée.

(2) Cette valeur de p est facile à obtenir; soient, en effet, H' l'intensité du champ dans l'interstice d'air et μ la densité électrique sur l'armature, $p = \frac{1}{2} H' \mu = \frac{1}{2} H' \frac{H'}{4\pi} = \frac{H'^2}{8\pi}$; or $H' = KH$, donc $p = \frac{K^2 H^2}{8\pi}$.

Plusieurs auteurs avaient déjà calculé cet effet de déformation dû aux pressions électriques agissant sur le diélectrique d'un *condensateur sphérique infiniment mince* ⁽¹⁾; ils étaient bien arrivés à notre formule

$$(III') \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3a \frac{KV^2}{8\pi e^2}$$

(ou à des formules équivalentes); mais, quand on comparait les résultats numériques calculés d'après cette formule avec ceux des expériences, il n'y avait nullement accord; ceci est dû en partie à ce que l'on *omettait le terme en k_1* , mais aussi à des déficiences expérimentales sur lesquelles je reviendrai plus loin ⁽²⁾.

M. Quincke avait également essayé de calculer l'effet des pressions électriques sur le *condensateur cylindrique infiniment mince fermé aux deux bouts par des calottes hémisphériques* ⁽³⁾, mais la formule à laquelle il arrive (et qui est équivalente à $\frac{\Delta U_1}{U_1} = \frac{5}{2} a \frac{KV^2}{8\pi e^2}$) est inexacte [voir (III')]; la cause en est qu'il part d'une formule élastique de Lamé qui suppose *uniformes* les pressions intérieure et extérieure au cylindre, ce qui n'est pas le cas ici : les pressions

⁽¹⁾ KORTEWEG, *Note à propos du phénomène observé par M. Duter*, (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 338; 1879). QUINCKE, *Electrische Untersuchungen*. (*Wied. Ann.*, t. XIX, p. 573; 1883. BOUTY (*Cours de Physique*, 4^e édition, t. IV, 1^{re} partie, p. 239).

⁽²⁾ A propos des déformations du condensateur sphérique dues aux pressions électriques, je tiens à rectifier nettement une erreur commise par plusieurs auteurs [VASCHY (*Traité d'Élect. et de Magn.*, t. I, p. 107; 1890); DÜTER (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 828; 1878)]: « Ces pressions électrostatiques devraient produire, disent-ils, une diminution de volume de la cavité au lieu de l'augmentation observée. » Ceci ne serait exact que si ces pressions électrostatiques étaient les mêmes sur les deux faces; or on a, au contraire, $P > P'$ puisque $H > H'$; par suite, les pressions électrostatiques doivent bien produire la dilatation de la cavité calculée précédemment.

⁽³⁾ QUINCKE, *Electrische Untersuchungen* (*Wied. Ann.*, t. XIX, p. 569; 1883).

électrostatiques p'_1, p'_2 sur les faces des calottes terminales étant différentes des pressions électrostatiques p_1, p_2 sur les parois latérales cylindriques.

II. — Déformations correspondantes aux termes en (k_1, k_2, k) .

Nous avons vu que les formules des déformations électriques comprennent deux sortes de termes :

Les premiers (indépendants des coefficients k_1, k_2, k) sont essentiellement variables, selon que le diélectrique est en contact ou non avec les armatures, les déborde ou est compris entre elles, conditions qui sont celles qui font varier les forces extérieures que nous savons agir sur ce diélectrique et auxquelles on doit attribuer ces déformations.

Les autres termes (en k_1, k_2, k) sont, au contraire, toujours les mêmes, quelles que soient ces conditions; ils dépendent uniquement du diélectrique et de l'intensité du champ qui y est créé; en outre, les forces extérieures connues qui agissent sur la matière diélectrique ne les font pas prévoir; il semble donc tout naturel de chercher leur explication dans une modification de l'état moléculaire de la matière diélectrique; nous admettrons donc que :

La modification de l'éther qui constitue la production du champ électrique est accompagnée d'une modification de l'état moléculaire de la matière superposée à l'éther, en vertu de laquelle l'élément de volume matériel situé en un point où l'intensité du champ est H , tend à se contracter de $\left(-k_2 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ dans la direction du champ et à se dilater de $\left(k_1 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ dans les directions perpendiculaires ⁽¹⁾.

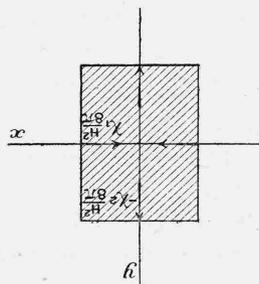
(1) Lorsqu'on expose un corps à un rayonnement calorifique, le mouvement vibratoire de l'éther produit un changement dans l'état

Remarque. — Il est facile de voir que, pour produire mécaniquement la même déformation de l'élément de volume matériel, il faudrait lui appliquer :

Une force de contraction $\left(\chi_1 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ dans la direction du champ ;

Une force d'extension $\left(-\chi_2 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ dans les directions per-

Fig. 17.



pendiculaires; χ_1 et χ_2 désignant les coefficients définis dans l'étude préliminaire et dont nous avons donné, à ce moment, l'expression en fonction de k_1 et k_2 .

Les déformations produites par ces forces seraient, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{y} &= +a\sigma\chi_1 \frac{H^2}{8\pi} - (a - a\sigma)\chi_2 \frac{H^2}{8\pi} \\ &= \frac{H^2}{8\pi} a[\sigma(\chi_1 + \chi_2) - \chi_2] = k_1 \frac{KH^2}{8\pi} \end{aligned}$$

d'après la valeur de k_1 donnée par la formule (1) de l'étude préliminaire;

$$\frac{\Delta x}{x} = -a\chi_1 \frac{H^2}{8\pi} + 2a\sigma\chi_2 \frac{H^2}{8\pi} = \frac{H^2}{8\pi} a(2\sigma\chi_2 - \chi_1) = k_2 \frac{KH^2}{8\pi}$$

d'après la valeur de k_2 donnée par la formule (2) de l'étude préliminaire.

moléculaire du corps (qui constitue l'élévation de température) en vertu duquel chaque élément de volume tend à se dilater également dans toutes les directions.

TROISIÈME PARTIE.

REVUE ET DISCUSSION DES THÉORIES
PRÉCÉDEMMENT FAITES.

Les travaux théoriques concernant ces phénomènes peuvent être classés en deux catégories (à part les notes de M. Moutier que nous analyserons en commençant) :

Première catégorie. — La plupart des auteurs qui ont fait l'étude des pressions au sein des diélectriques solides polarisés en ont déduit les déformations correspondantes.

Nous verrons que les résultats ainsi obtenus sont en général exacts; mais on peut trouver défectueux de faire dépendre le calcul des déformations (mesurables directement par l'expérience) de celui des pressions (inaccessibles à l'expérience); en outre ces pressions sont d'un calcul laborieux, leur application à l'étude des déformations est délicate, ce qui a donné lieu parfois à des erreurs; enfin et surtout, la *polarisation des diélectriques*, base même de ces théories, est sujette à bien des controverses.

Deuxième catégorie. — C'est justement pour se mettre à l'abri des critiques dont peuvent être l'objet les théories précédentes, fondées sur la polarisation des diélectriques, que des essais de *théorie thermodynamique* de ces phénomènes ont été tentés par divers physiciens; mais, parmi ces essais, les uns n'ont pas abouti; les autres (où du reste on n'abordait que les cas les plus simples, et encore en négligeant les variations des constantes diélectriques par les déformations) avaient conduit à des résultats en désaccord soit entre eux, soit avec ceux obtenus par la méthode précédente (1).

(1) Je conserverai dans ce qui suit les notations employées dans les parties précédentes; je transformerai avec ces notations les formules des divers auteurs.

Nous expliquerons les motifs de ces contradictions à mesure que celles-ci se présenteront.

M. MOUTIER énonce dans une première Note ⁽¹⁾ le théorème suivant :

Un conducteur doit éprouver, quand on l'électrise à température et pression constantes, une augmentation de volume $\Delta U = \frac{\gamma}{3} W$.

Dans une deuxième Note ⁽²⁾ il ajoute :

On pourrait voir de même que la dilatation électrique d'un condensateur est proportionnelle à l'énergie électrique; pour un condensateur mince on a donc

$$\Delta U = \frac{\gamma}{3} \frac{S}{8\pi} \frac{V^2}{e}.$$

Je ferai remarquer en passant qu'il faut faire une petite distinction entre les deux cas : dans le premier il s'agit de la variation de volume du conducteur, γ désigne le coefficient de compressibilité de la matière conductrice; dans le deuxième cas, on étudie la déformation électrique du diélectrique du condensateur, γ devra désigner le coefficient de compressibilité de cette matière diélectrique et non celle du métal des armatures.

La démonstration de M. Moutier est basée sur le *théorème de Clausius sur le mouvement stationnaire d'un système de points matériels*, c'est-à-dire, en somme, sur une simple hypothèse concernant la nature du mouvement qui constitue la chaleur.

Il n'est fait mention nulle part de la constante diélectrique (qui est prise implicitement égale à 1); dans le cas du conducteur, cela revient à imaginer ce conducteur

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 7^e série, t. III, p. 88; 1878-1879.

⁽²⁾ *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 7^e série, t. IV, p. 182; 1879-1880.

placé dans le vide, ce qui est plausible; mais dans le cas du condensateur on ne peut plus faire abstraction de la constante diélectrique du diélectrique solide, ni de ses variations : c'est ce qui nous a conduit à la formule (IV'') au lieu de celle de M. Moutier. Enfin la seconde Note se termine par ces mots :

« Les lois ci-dessus sont bien celles trouvées expérimentalement par M. Duter. » Or il y a là une confusion de termes que nous retrouverons du reste chez plusieurs auteurs (1).

Dans sa démonstration M. Moutier a en effet étudié uniquement la variation de volume de la matière diélectrique, tandis que M. Duter a mesuré expérimentalement la variation de volume de la cavité de son condensateur sphérique; et c'est par une simple coïncidence que les lois expérimentales (erronées) de la variation de volume de la cavité, trouvées par M. Duter, semblaient être confirmées par les lois (exactes) de la variation de volume de la matière diélectrique, établies par M. Moutier.

PREMIÈRE CATÉGORIE.

Dans cette catégorie sont comprises, en particulier, les théories de ces phénomènes faites par les physiciens allemands : Korteweg (2), Lorberg (3), Kirchhoff (4). En étendant aux diélectriques la théorie de Poisson sur le magnétisme induit, ils ont trouvé simultanément et indépendamment, par des voies différentes (Lorberg : p. 305 à 315; Kirchhoff : p. 52 à 63) les résultats suivants :

(1) VASCHY, *Théorie de l'électricité*, p. 71; *Comptes rendus*, t. CIV, p. 52, 1887; *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 107-108. DUHEM, *Le potentiel thermodynamique*, p. 215, et *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. II, p. 447-448.

(2) KORTEWEG, *Wied. Ann.*, Band IX, p. 48 et suiv.; 1880.

(3) LORBERG, *Wied. Ann.*, Band XXI, p. 300 et suiv.; 1884.

(4) KIRCHHOFF, *Wied. Ann.*, Band XXIV, p. 52 et suiv.; 1885.

Un élément de surface pris à l'intérieur du diélectrique doit être soumis à une traction normale $\frac{K + \chi_1}{8\pi} H^2$ s'il est perpendiculaire aux lignes de force; une pression normale $\frac{K - \chi_2}{8\pi} H^2$ s'il est parallèle aux lignes de force; ces formules redonnent du reste celles trouvées par Maxwell, à condition de négliger, comme il l'avait fait, la variation de la constante diélectrique avec les déformations (c'est-à-dire χ_1 et χ_2); on retrouve ainsi celles établies par Helmholtz pour les fluides en faisant $\chi_1 = \chi_2$, c'est-à-dire en supposant que les variations de la constante diélectrique ne dépendent que des variations de volume ou de densité.

Ceci posé : en appliquant les formules de Lamé sur l'élasticité, ils calculent les déformations du diélectrique sous l'action de ces forces.

Par cette méthode, *Korteweg* (1) a pu établir les formules de déformation électrique de la sphère infiniment mince; *Kirchhoff* (2), celles de la sphère d'épaisseur quelconque, et *Lorberg* (3), celles qui donnent les variations de capacité du condensateur sphérique ainsi que les variations de capacité et de longueur du condensateur cylindrique.

Les formules qu'ils obtiennent pour le condensateur sphérique s'accordent avec celles trouvées dans notre théorie, mais sont d'apparence plus compliquée; ce qui résulte en partie de l'emploi des coefficients χ_1 , χ_2 au lieu de k_1 , k_2 que j'ai définis au début.

Quant aux formules établies par M. Lorberg pour le condensateur cylindrique, elles sont inexactes.

Pour le condensateur cylindrique infiniment mince avec

(1) *Loc. cit.*, p. 53 à 57.

(2) *Loc. cit.*, p. 66 à 74.

(3) *Loc. cit.*, p. 315 à 322.

calottes terminales, on aurait, d'après lui,

$$\frac{\Delta L}{L} = a \left[(1 + h^2) \left(\frac{K}{8\pi} + \frac{\alpha}{2} \right) - (1 - \sigma) \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \frac{V^2}{e^2}$$

avec

$$\alpha = \frac{\chi_1}{4\pi}, \quad \beta = \frac{\chi_2}{4\pi};$$

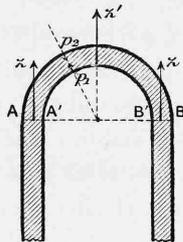
h^2 étant un coefficient qui dépend de la calotte terminale et serait nul pour une calotte d'épaisseur grande par rapport à celle du tube (ou pour un cylindre ouvert); égal à 1 si la calotte a même épaisseur que le tube; tandis qu'il faut faire $h^2 \equiv 0$ pour retrouver la formule que j'ai établie

$$(I) \quad \frac{\Delta L}{L} = (a + k_1) \frac{KV^2}{8\pi e^2},$$

Cette divergence est due à l'erreur suivante, commise par Lorberg :

A la page 318, en écrivant les conditions d'équilibre élastique du cylindre supposé d'abord ouvert aux deux bouts, il introduit les forces $z = \frac{KH^2}{8\pi}$ qui doivent agir sur les éléments AA' , BB' de surface de discontinuité du diélectrique.

Fig. 18.



A la page 320, en voulant tenir compte de l'influence de la calotte terminale, il montre que les pressions électrostatiques $p_1 > p_2$ donnent une résultante de traction z'

parallèle à l'axe : $z' = h^2 \frac{KH^2}{8\pi}$, $h^2 = 0$ si la calotte est très épaisse, et alors $z' = 0$; $h^2 = 1$ si la calotte a même épaisseur que le cylindre, et alors $z' = \frac{KH^2}{8\pi}$; et il tient compte de l'action déformante de z' agissant sur la partie cylindrique; c'est là où est l'erreur; en effet, si la calotte a même épaisseur que le cylindre, on doit bien tenir compte de z' , mais comme il n'y a plus discontinuité en AA' , on doit supprimer les forces z .

Si, au contraire, la calotte est très épaisse par rapport au cylindre, le champ passe de H à 0 quand on traverse AA' , les forces z existent, mais $z' = 0$.

En résumé, Lorberg a introduit doublement, sous deux formes différentes, l'influence de la calotte terminale; il est donc naturel qu'en supprimant z' , c'est-à-dire en faisant $h^2 \equiv 0$, on retombe sur la formule exacte (I).

Dans le même ordre d'idées, signalons encore deux Notes de

M. Vaschy ⁽¹⁾ dans lesquelles, en se basant sur la valeur $\frac{KH^2}{8\pi}$ donnée par Maxwell pour les forces agissant à l'intérieur des diélectriques, et en admettant que la matière pondérable subit l'action, non de la force totale, mais d'une fraction α de cette force (le reste s'exerçant sur l'éther), il arrive, pour la variation de volume de la matière diélectrique, à la formule $\Delta U = \alpha \frac{2}{3} W$; il fait ensuite l'hypothèse $\alpha = \frac{K-1}{K}$, tandis que, en réalité, il faut faire $\alpha = 1$ pour retrouver la formule (1') (abstraction faite de k).

M. Duhem ⁽²⁾, après avoir fait une étude complète des

(1) VASCHY, *Comptes rendus*, t. CIII, p. 1186; 1886; t. CIV, p. 51; 1887. Voir aussi : *Traité d'Élect. et de Mag.*, t. I, p. 106.

(2) *Leçons sur l'Élect. et le Mag.*, t. II, liv. XII.

pressions au sein des solides polarisés, en déduit les équations générales des déformations; le seul cas particulier qu'il traite ⁽¹⁾ est celui du diélectrique d'un condensateur plan (non en contact avec les armatures) pour lequel il conclut que :

« Le diélectrique doit se dilater uniformément dans toutes les directions, la variation de volume unitaire étant $\frac{\Delta U}{U} = \gamma c \frac{V^2}{2e^2}$ »;

c désignant l'analogie pour les diélectriques du coefficient d'aimantation des substances magnétiques.

Ces résultats sont inexacts [formules (26') et (27')], ce qui n'est pas étonnant, car, pour traiter ce cas, M. Duhem lui applique une formule établie en supposant le coefficient d'aimantation très petit, ce qui reviendrait à admettre que, pour le diélectrique, $\frac{K-1}{4\pi}$ est très petit, hypothèse évidemment inadmissible pour les diélectriques solides ⁽²⁾.

DEUXIÈME CATÉGORIE.

Arrivons maintenant aux essais de théorie thermodynamique de ces phénomènes.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 446-448.

⁽²⁾ Une fois l'hypothèse admise malgré son inexactitude, nos formules nous conduiraient bien aux mêmes résultats; en effet (26') et (27') deviennent, si l'on néglige les puissances de $(K-1)$ supérieures à la première :

$$(26'') \quad \frac{\Delta l}{l} = a(1-2\sigma)(K-1) \frac{H^2}{8\pi},$$

$$(27'') \quad \frac{\Delta e}{e} = a(1-2\sigma)(K-1) \frac{H^2}{8\pi}$$

On a donc

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta e}{e},$$

et, par suite,

$$\frac{\Delta U}{U} = 3 \frac{\Delta l}{l} = \gamma \frac{K-1}{4\pi} \frac{H^2}{2}.$$

Ce sont bien là les résultats obtenus par M. Duhem.

M. Vaschy ⁽¹⁾ avait ébauché cette étude en abordant le cas simple d'une *lame diélectrique plane*; mais, par suite d'erreurs faciles à apercevoir, il arrive, en particulier (p. 121), à ce résultat inexact [voir notre formule (19)] que Δl serait proportionnelle à l'énergie électrique du condensateur, c'est-à-dire à $\frac{V^2}{e}$.

M. Duhem ⁽²⁾ a appliqué à ces phénomènes sa théorie du potentiel thermodynamique; voici les résultats auxquels il arrive :

1° Une *lame diélectrique*, couverte sur ses deux faces d'une couche métallique infiniment mince, doit éprouver par la charge une augmentation de *volume*

$$\Delta U = \frac{\gamma}{3} W \quad \text{ou} \quad \Delta U = \frac{\gamma}{3} \frac{K}{8\pi} S \frac{V^2}{e},$$

si la lame est infiniment mince. Ces résultats sont *exact*s; ils correspondent à nos formules (1'), (1'''), mais *au coefficient k près*, car il n'est fait mention nulle part des variations de la constante diélectrique par la déformation; ajoutons que, lorsque M. Duhem conclut de là (p. 215) que les résultats des expériences de M. Duter sur le condensateur sphérique se trouvent ainsi confirmés par la théorie, il commet la même confusion de termes (entre *volume de la matière diélectrique* et *volume de la cavité*) déjà signalée à propos du travail de M. Moutier;

2° Il se propose ensuite de calculer les déformations (variations de $L e R$) d'une *lame cylindrique infiniment mince*; mais là, je suis obligé de faire une objection capitale à sa démonstration : *il suppose implicitement* (p. 216) *que toute ligne perpendiculaire à l'axe du cylindre subit*

(1) *Traité d'Élect. et de Mag.*, t. I, p. 119 et suiv.

(2) *Le Potentiel thermodynamique*, éditions 1886 et 1895, p. 210 à 220.

la même déformation électrique unitaire; ceci n'est pas évident, et j'ajouterai même est *inexact*. Nos formules (I) et (II) montrent, en effet, que la déformation n'est pas la même pour les lignes circulaires et pour l'épaisseur du cylindre; il y a, en outre, une petite erreur dans les formules de déformation élastique du cylindre employées (p. 219) (1).

De ces deux causes il résulte que les formules obtenues (page 220) sont erronées.

En reprenant la démonstration de M. Duhem par le potentiel thermodynamique, mais en m'affranchissant de l'hypothèse signalée plus haut et en rectifiant les données élastiques, j'ai bien retrouvé les mêmes formules (9), (10), (12) que j'ai établies dans ma théorie par des raisonnements plus simples, fondés uniquement sur les principes élémentaires de la Thermodynamique.

Enfin, signalons encore un article de revue critique de M. Curie (2), et rappelons que M. Lippmann (3), sans se proposer de faire une théorie des déformations électriques des diélectriques, a montré que l'existence de ces phénomènes entraîne comme réciproque celle des variations de la constante diélectrique par les déformations (mais en

(1) M. Duhem indique (p. 218) qu'il a emprunté ces formules au *Mémoire sur la torsion des prismes*, de M. de Saint-Venant (*Mém. des Savants étrangers à l'Académie*, t. XIV, p. 288-293; 1856). En ayant recours à ce Mémoire, j'ai vu qu'il avait dû faire des transformations de notations assez longues qui expliquent très bien l'erreur commise; je rappelle que j'ai indiqué récemment une méthode permettant de retrouver par des calculs très simples ces formules de déformation élastique du cylindre et de la sphère (*Journal de Physique*, septembre 1898 et avril 1899); les formules que j'obtenais différaient légèrement de celles employées par M. Duhem, c'est ce qui m'a amené à contrôler celles-ci en refaisant les transformations d'après le Mémoire même de M. de Saint-Venant.

(2) *Lumière électrique*, t. XXX, p. 423; 1888.

(3) *Annales de Chimie et de Physique*, 5^e série, t. XXIV, p. 159; 1881.

négligeant les variations de la capacité électrique par déformation mécanique) : nous reviendrons, du reste, ultérieurement sur ce point.

En résumé : *Toutes les divergences n'étaient dues qu'à des erreurs, et, une fois celles-ci rectifiées, tous les résultats partiels précédemment obtenus redonnent des formules comprises dans la théorie plus complète que nous avons établie au début ; ce qui devait être, puisque cette théorie est basée sur des principes définitivement acquis à la Science.*

QUATRIÈME PARTIE.

REVUE ET DISCUSSION DES TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX.

Preliminaire. — Toutes les expériences qui ont été faites se rapportent aux deux types suivants :

1° On prend un condensateur fermé (sphérique ou cylindrique) dont la cavité interne remplie de liquide communique à un tube capillaire, et l'on observe le changement du niveau du liquide dans le tube qui se produit au moment de la charge et disparaît par la décharge (*fig. 1 et 2 de la fig. 19*) ;

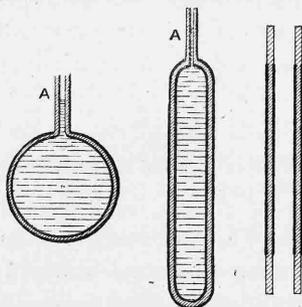
2° On mesure les variations de longueur d'un condensateur cylindrique pour la charge ou la décharge (*fig. 2 et 3 de la fig. 19*).

Ces deux séries d'expériences ne mettent en évidence que la *dilatation dans les directions perpendiculaires aux lignes de force*, soit directement (2^e expérience), soit indirectement (1^{re} expérience) par la variation de capacité qui en résulte.

Aucune expérience n'a encore été tentée pour mettre en évidence la *déformation dans la direction des lignes de force*, ni la *variation de volume de la matière diélectrique*, et j'ajouterai qu'il me semble bien difficile, sinon impossible, qu'on y arrive : en effet, d'après nos formules (I),

(II), (III'), (IV'), $\frac{\Delta e}{e}$ et $\frac{\Delta U}{U}$ sont du même ordre de grandeur que $\frac{\Delta L}{L}$ et $\frac{\Delta U_1}{U_1}$; mais e et U sont toujours très petits par rapport à L et U_1 , il s'ensuit que Δe et ΔU seront très inférieurs à ΔL et ΔU_1 , dont la petitesse est déjà telle que les physiciens habiles qui les ont mesurées ont rencontré de très grandes difficultés dans leurs expériences.

Fig. 19.



Ces expériences ont conduit aux résultats suivants pour la déformation dans les directions normales aux lignes de force :

1° La dilatation est proportionnelle au carré de la différence de potentiel, conformément à la théorie;

2° Quant à l'influence de l'épaisseur de la lame diélectrique, les unes (expérience de MM. *Duter, Righi*) ont indiqué assez nettement la *loi de l'inverse de l'épaisseur*, et les autres (expériences de MM. *Quincke, Cantone*), la *loi de l'inverse du carré de l'épaisseur*, mais avec des écarts considérables; il était difficile de choisir entre ces deux lois établies par des physiciens également réputés comme habiles expérimentateurs, d'autant plus que les essais de théorie de ces phénomènes qui avaient été faits indiquaient, d'après leurs auteurs, tantôt l'une, tantôt l'autre de ces deux lois.

La théorie que nous avons exposée et qui repose sur des principes universellement admis nous a montré que *c'est*

la loi de l'inverse du carré de l'épaisseur qui est la vraie; nous avons vu, en outre, que dans toutes les théories antérieures on n'avait été amené à formuler la loi de l'inverse de l'épaisseur que par suite d'erreurs, et que, celles-ci rectifiées, elles conduisaient sans exception à cette même loi de l'inverse du carré de l'épaisseur.

Il nous reste à montrer par suite de quelles circonstances certaines de ces expériences avaient pu conduire à une loi erronée et pourquoi leurs résultats numériques présentent entre eux d'énormes divergences : c'est ce dont nous allons maintenant nous occuper.

En outre de certaines critiques particulières à chaque expérience et que nous formulerons à propos de chacune d'elles, nous pouvons indiquer comme causes générales de ces divergences :

1° La difficulté et l'incertitude que présente toujours la mesure des déformations aussi faibles (quelle que soit la perfection des appareils amplificateurs employés par Righi, Quincke);

2° L'influence de la durée de la charge, qui semble être considérable d'après M. Cantone;

3° Les phénomènes calorifiques qui peuvent se produire dans le diélectrique par la charge ou la décharge et dont l'effet se superposera à la déformation électrique proprement dite;

4° Le contact plus ou moins parfait entre les armatures et le diélectrique peut aussi intervenir dans certaines expériences (interposition de bulles d'air entre le liquide et la paroi).

Parmi les causes qui viendront troubler les recherches sur l'influence de l'épaisseur citons :

1° La nature chimique des diélectriques (en général le verre, le caoutchouc), qui est mal déterminée et varie d'un échantillon à un autre;

2° L'état physique de ce diélectrique, et en particulier la trempe, qui peut varier beaucoup, notamment avec l'é-

paisseur du verre employé; cette dernière cause doit influencer beaucoup sur les valeurs des coefficients (K, k_1, a) qui entrent dans les formules;

3° La presque impossibilité de se procurer des ballons ou de longs tubes de verre d'épaisseur uniforme et les procédés forcément défectueux employés pour déterminer cette épaisseur⁽¹⁾;

4° Enfin il est bon de rappeler que notre théorie nous a montré qu'il n'y a de loi simple à énoncer pour l'influence de l'épaisseur que lorsque le diélectrique est assez mince pour que l'on puisse négliger $\left(\frac{e}{R}\right)$: condition qui paraît n'avoir pas été suffisamment bien remplie dans quelques-unes des expériences.

Nous ne ferons que rappeler les anciennes expériences de **Fontana, Volpicelli, Govi** ⁽²⁾: elles ont mis en évidence la variation du niveau A du liquide par la charge, mais leurs résultats contradictoires avaient conduit à des fausses interprétations du phénomène.

M. Duter ⁽³⁾ est le premier qui ait nettement montré qu'il y a non seulement augmentation de capacité interne mais accroissement du volume extérieur par suite d'une déformation de la lame diélectrique.

Résumé des expériences. — Voir à ce sujet son expérience de la double bouteille (*fig. 20*): le niveau A baisse et le niveau B monte d'une quantité sensiblement égale.

Il a ensuite opéré sur trois condensateurs sphériques (*fig. 20*), formés avec des ballons de verre d'épaisseurs $e = 4^{\text{mm}}$, $e' = 0^{\text{mm}}$, 3, $e'' = 0^{\text{mm}}$, 5, remplis d'eau formant l'armature interne et couverts d'une couche d'étain à l'ex-

(1) Duter et Righi n'indiquent pas comment ils ont déterminé ces épaisseurs; mais nous reviendrons sur ce point à propos des expériences de MM. Quincke et Cantone.

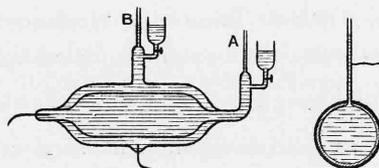
(2) Voir la Bibliographie, à la fin.

(3) *Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 828, 1036; 1878.

térieur comme armature externe; la communication de l'armature interne à la machine électrique porte une dérivation allant à l'une des boules d'un micromètre à étincelles qui sert à apprécier le potentiel auquel on charge le condensateur.

Résultats. — Au point de vue qualitatif les expériences

Fig. 20.



de M. Duter sont probantes, mais *quantitativement elles doivent être entièrement rejetées*; en effet : dans une première Note ⁽¹⁾ il indique qu'il a observé un changement de niveau *imperceptible avec le premier ballon*, notable avec le deuxième et de plus de 30^{mm} avec le troisième, et que les mesures lui ont indiqué la *proportionnalité entre ΔU , et $\frac{1}{e^2}$* ⁽²⁾.

Dans une Note postérieure ⁽³⁾ il énonce au contraire la *proportionnalité entre ΔU et $\frac{1}{e}$* , qui résulte, en effet, des résultats ⁽⁴⁾ qu'il donne, à ce moment, pour les deux ballons d'épaisseur e' et e'' .

Enfin signalons encore une autre contradiction : puisque le ballon d'épaisseur $e'' = 0^{\text{mm}}, 5$ avait donné une dénivel-

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 960; 1878.

⁽²⁾ A quelques lignes d'intervalle, il indique aussi la loi $\frac{1}{\sqrt{e}}$, mais cela m'a semblé être une erreur d'impression.

⁽³⁾ *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 1260; 1879.

⁽⁴⁾ Voir à la fin de cette quatrième partie les Tableaux des *Résultats numériques*.

lation de 30^{mm} , le ballon d'épaisseur $e = 4^{\text{mm}}$, c'est-à-dire huit fois plus épais, aurait dû donner, avec la loi $\frac{1}{e}$, une dénivellation de $\frac{30^{\text{mm}}}{8}$, c'est-à-dire plus de 3^{mm} , par conséquent *parfaitement perceptible*.

Résultats numériques de M. Duter. — A la suite du résumé de chacun des travaux expérimentaux, nous donnerons un Tableau des résultats numériques obtenus; mais pour qu'on puisse plus facilement voir avec quel degré de précision les lois de la proportionnalité à V^2 et à $\frac{1}{e^2}$ se trouvent vérifiées par ces expériences, nous indiquerons, non pas les variations unitaires de volume $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)$ ou de longueur $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ observées, mais les quantités $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$ et $\left(\frac{\Delta L}{L} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$, c'est-à-dire que nous ramènerons ces déformations à ce qu'elles seraient pour un champ d'intensité $H = \frac{V}{e} = 1$.

Pour un même récipient ou pour des récipients de *substances identiques*, toutes les valeurs, soit de $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$, soit de $\left(\frac{\Delta L}{L} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$, devraient être égales entre elles, les valeurs de la première expression étant, en outre, le triple de celles de l'autre.

Variations de volumes de condensateurs sphériques en verre.

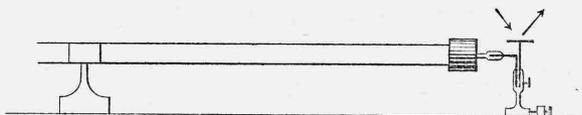
	R.	e.	$\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$ pour des distances explosives de d^{mm} (1)											
			$d=4^{\text{mm}}$ V=47,7.	$d=5^{\text{mm}}$ V=56,3.	$d=6^{\text{mm}}$ V=64,9.	$d=7^{\text{mm}}$ V=71,6.	$d=8^{\text{mm}}$ V=77.	$d=9^{\text{mm}}$ V=81,6.	$d=10^{\text{mm}}$ V=84,7.	$d=11^{\text{mm}}$ V=88,7.	$d=12^{\text{mm}}$ V=91,3.	$d=13^{\text{mm}}$ V=93,3.	$d=14^{\text{mm}}$ V=95,8.	$d=15^{\text{mm}}$ V=97,8.
A.....	$4^{\text{cm}},315$	$0^{\text{cm}},05$	$8,1 \times 10^{-13}$	8,8	9,7	10,9	11,9	13,9	15,5	17,1	19,1	21,1	»	»
B.....	$4^{\text{cm}},309$	$0^{\text{cm}},08$	»	13,5	15,8	16,7	19,3	21,5	24,9	27,3	31,5	33,9	37,9	42,4

(1) M. Duter ne donne pas les rayons des boules de son micromètre; j'ai admis $r = 1^{\text{cm}}$: ce rayon n'a du reste qu'une influence minime sur les valeurs de V correspondantes à celle de d , valeurs que j'ai empruntées aux Tables de Bichat et Blondlot (*Journal de Physique*, 2^e série, t. V, p. 457; 1886) et qui sont exprimées en (U. E. S.).

M. Righi ⁽¹⁾ a mesuré l'allongement, par la charge, de tubes de verre armés en condensateurs cylindriques sur la plus grande partie de leur longueur.

Résumé des expériences. — Cette mesure était faite au moyen d'un système de leviers optiques ingénieusement disposés (*fig. 21*), et comme on détermine expérimentale-

Fig. 21.



ment le rapport d'amplification, je ne crois pas que ce soit à ce système qu'on puisse attribuer les erreurs que nous allons signaler; les armatures du condensateur étaient reliées aux conducteurs d'une machine de Holtz, ainsi qu'à un électromètre à réflexion de Righi qui indique le potentiel de charge.

Résultats. — Il a ainsi trouvé la loi du carré du potentiel, mais aussi, très nettement, celle de l'inverse de l'épaisseur; une des causes principales qui ont dû fausser ces recherches sur l'influence de l'épaisseur est facile à apercevoir: M. Righi a opéré avec deux tubes de verre seulement, de 75^{cm} de longueur environ, et d'épaisseurs 1^{mm},33 et 1^{mm},65; or on sait qu'il est impossible de se procurer de longs tubes de verre d'épaisseur uniforme; malgré un choix minutieux, de pareils tubes présentent, entre leurs différentes régions, des différences d'épaisseurs qui peuvent atteindre $\frac{1}{10}$ ou $\frac{2}{10}$ de millimètre: en opérant avec deux tubes d'épaisseurs aussi voisines que 1^{mm},33

(¹) *Sulla dilatazione dei coibenti armati par effetto della carica* (Bologna, 1879): Extrait (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 1262; 1879); analyse (*Journal de Physique*, 1^{re} série, t. IX, p. 204).

et 1^{mm} , 65 la loi a pu se trouver complètement faussée par suite des inégalités de chacun d'eux.

Résultats numériques de M. Righi : Variations de longueur de condensateurs cylindriques en verre. — M. Righi indique bien les allongements observés avec ses deux tubes, mais il ne dit pas quelles sont les différences de potentiels employées; il donne seulement les lectures (en millimètres) faites à la lunette de l'électromètre; ces allongements ne pourraient donc nous servir à aucune comparaison de ses résultats avec ceux des autres expériences, si heureusement il n'ajoutait plus loin :

On déduit des résultats précédents qu'un tube de verre de 1^{m} , épais de 1^{mm} , chargé à la différence de potentiel correspondant à 1^{cm} d'étincelle entre des boules de laiton de 15^{mm} de diamètre s'allongerait de 2 microns.

Mais il faut bien remarquer que *cet énoncé ne peut être employé par nous tel quel*, puisqu'il est déduit des résultats expérimentaux directs par l'application des lois exactes (proportionnalité à V^2 et à l), mais aussi d'une *loi fausse* (proportionnalité à $\frac{1}{e}$); la difficulté est facile à tourner : il suffit de revenir aux épaisseurs réelles en appliquant la loi fausse en sens inverse, ce qui donne pour les allongements

$$\frac{2\mu}{1,33} = 1^{\mu}, 50 \quad \text{et} \quad \frac{2\mu}{1,65} = 1^{\mu}, 21;$$

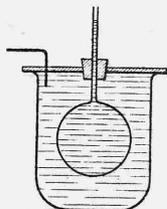
nous prendrons $V = 90$ (U. E. S.) comme valeur du potentiel correspondant à 1^{cm} d'étincelle; on a ainsi :

	l .	e .	$\left(\frac{\Delta l}{l} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$
A.....	100^{cm}	$0^{\text{cm}}, 133$	pour $V = 90$. 33×10^{-13}
B.....	100^{cm}	$0^{\text{cm}}, 165$	41

M. Quincke a fait sur ces phénomènes une longue série de recherches pendant plusieurs années et dont voici un rapide résumé :

1° *Thermomètres condensateurs en boules* ⁽¹⁾ (fig. 22).
— Il observe les variations de capacité par la charge et la

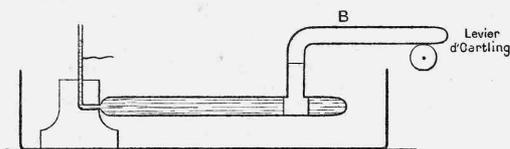
Fig. 22.



décharge de condensateurs sphériques, à armatures métalliques ou liquides, dont le diélectrique est formé par des ballons de verre de différents diamètres et de différentes épaisseurs, les uns en flint, les autres en verre de Thuringe; le thermomètre est maintenu à température constante dans la glace fondante, et les variations de niveau dans le tube capillaire sont observées au moyen d'un microscope horizontal à oculaire micrométrique qui permet d'apprécier des variations de volume de 10^{-8} du volume du ballon.

2° *Thermomètres condensateurs cylindriques* ⁽²⁾

Fig. 23.



(fig. 23). — Le réservoir du thermomètre, au lieu d'être

⁽¹⁾ *Wied. Ann.*, t. X, p. 161-202; 1880.

⁽²⁾ *Wied. Ann.*, t. X, p. 515-520; 1880.

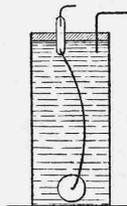
sphérique, est formé d'un long tube de verre cylindrique fermé à un bout, et à l'autre extrémité duquel est soudé un tube capillaire; les armatures sont : le liquide intérieur et la glace fondante extérieure, ou une couche métallique déposée à l'extérieur du tube. Il en observe les variations de capacité par les déplacements du niveau du liquide; il en mesure également les variations de longueur au moyen d'un levier de contact d'Oertling ⁽¹⁾, appareil dans lequel les variations de longueur du cylindre produisent la rotation d'un niveau à bulle d'air, et ces variations de longueur seront appréciées par le déplacement de cette bulle d'air observé au moyen d'une lunette; à cet effet, un bâton de verre B, rigidement fixé au cylindre, vient s'appuyer sur le levier de l'appareil d'Oertling : on peut ainsi apprécier une variation de longueur de $0^{\mu},008$ ⁽²⁾??

⁽¹⁾ *Wied. Ann.*, t. X, p. 374-380; 1880.

⁽²⁾ M. Quincke a aussi opéré avec des *fil de verre creux* étirés à la lampe, argentés intérieurement et extérieurement pour former condensateur (*Wied. Ann.*, t. X, p. 374-384; 1880); pour mesurer l'allongement par la charge, une extrémité du fil est fixe et l'autre attachée au levier de contact d'Oertling.

Enfin, M. Quincke a réalisé une expérience très intéressante sous le nom d'*électromètre à fil de verre* (*Wied. Ann.*, t. X, p. 385-401; 1880) :

Fig. 24.



on étire à la lampe un fil de verre mince à cavité excentrique; après refroidissement, il est courbé, la paroi mince du côté convexe, car la paroi épaisse s'est refroidie plus lentement et contractée plus fort que la mince; on remplit ce fil de verre de liquide qui constitue l'armature interne, et on le plonge dans une éprouvette d'eau qui forme l'arma-

Détermination des épaisseurs de paroi des divers condensateurs. — Quincke prend un tube de verre épais de poids P , et s'en sert pour souffler la boule qui formera le *condensateur sphérique*, et dont il détermine le rayon R ; puis il pose $e = \frac{P}{4\pi R^2 d}$, d étant le poids spécifique du verre employé; il est vraisemblable que les nombres ainsi obtenus seront trop forts, car le tube n'a pas été entièrement converti en boule; et, en effet, il cite (*Wied. Ann.*, t. X, p. 171) que le thermomètre condensateur n° 2 s'étant cassé, il en a mesuré l'épaisseur en différents points et a trouvé de $0^{\text{mm}},082$ à $0^{\text{mm}},180$, au lieu de l'épaisseur calculée $0^{\text{mm}},220$.

Pour les *condensateurs cylindriques*, il a déterminé l'épaisseur des tubes qui servent à les fabriquer par la formule $e = \frac{P}{2\pi R l d}$; P étant le poids du tube, l sa longueur, R son rayon déterminé au sphéromètre à cinq places différentes, d le poids spécifique du verre employé.

Détermination des capacités électriques des divers thermomètres condensateurs. — Nous en verrons plus loin l'emploi (*Wied. Ann.*, t. X, p. 186; 1880).

Les armatures du thermomètre condensateur peuvent être mises en communication par un commutateur à bascule (le temps de bascule était inférieur à une demi-seconde), soit avec les pôles d'une pile de 44 éléments au bichromate, soit avec un multiplicateur très sensible à 18000 tours de fil; les impulsions du multiplicateur sont alors proportionnelles à la capacité du thermomètre et à la force électromotrice de la pile qui est constante.

ture externe; l'éprouvette porte une ouverture obturée par une glace plane qui permet d'observer l'extrémité du fil avec une lunette; si on relie les deux armatures liquides de ce condensateur avec une batterie de Leyde, le fil de verre se courbe encore plus par suite de la dilatation électrique inégale des parois inégalement épaisses, et le déplacement de l'extrémité du fil peut atteindre plusieurs millimètres.

Il compare ainsi successivement tous ses thermomètres condensateurs à celui n° 17, dont la capacité est prise pour unité.

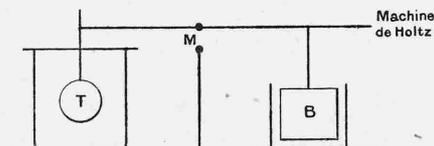
Il a ensuite déterminé la valeur absolue de la capacité de ce thermomètre n° 17 en la comparant (par la même méthode) à celle d'un condensateur étalon (condensateur plan à lame d'air, de dimensions connues) : $C_{17} = 2138^{\text{cm}}$ ⁽¹⁾.

Mode de charge des condensateurs : mesure du potentiel. — Quincke a employé pour cela plusieurs procédés :

1° *Méthode de la batterie.* — On charge une batterie de $s = 3$ ou $s = 6$ bouteilles de Leyde au moyen de q étincelles d'une bouteille de Lane; puis on relie, au moyen d'un appareil à bascule, les armatures de cette batterie à celles du thermomètre condensateur et l'on observe la dénivellation du liquide.

2° *Méthode des distances explosives.* — On relie les

Fig. 25.



armatures du thermomètre condensateur avec les conducteurs d'une machine de Holtz et les boules d'un micro-mètre à étincelles M; on fait fonctionner la machine jusqu'à ce que l'étincelle jaillisse en M, et on lit à ce moment la dénivellation du liquide (la batterie B sert à rendre les étincelles moins fréquentes et plus marquées).

3° *Méthode de l'électromètre à vis (de Thomson).* — Le thermomètre condensateur est relié, par l'intermédiaire

(1) Quincke a aussi déterminé les *coefficients élastiques* de ses thermomètres condensateurs; ils ne nous sont ici d'aucune utilité; mais nous reviendrons sur leur emploi dans la cinquième partie.

d'une batterie de Leyde, avec l'électromètre et avec une machine de Holtz (*Wied. Ann.*, t. XIX, p. 559-566; 1883).

Dans cette troisième méthode, le potentiel de charge est estimé directement à l'électromètre par le nombre de tours r à donner à la tête de la vis, et le potentiel se calcule ensuite par la formule suivante, dont les constantes ont été mesurées par Quincke :

$$V = 1,1415 (2,445 + r) \text{ (U. E. S.)}.$$

Avec le même électromètre, il a aussi mesuré les potentiels correspondant aux différentes distances explosives de la deuxième méthode (*voir* les Tables numériques).

Enfin, il a en outre déterminé, avec ce même électromètre, que :

Cinq étincelles de la bouteille de Lane amènent la batterie de trois bouteilles à un potentiel de 20,44 (U. E. S.);

Dix étincelles de la bouteille de Lane portent la batterie de six bouteilles au potentiel de 18,90 (U. E. S.).

En outre, comme il a déterminé, par la méthode déjà décrite, le rapport des capacités de ces deux batteries $\frac{C_3}{C_6} = 0,4416$ et la valeur absolue de l'une d'elles

$$C_6 = 5,569 C_{17},$$

il déduit de là, pour le calcul du potentiel de charge par la méthode de la batterie, les formules

$$V_6 = \frac{5,569}{5,569 + c} \frac{q}{10} 18,90 \text{ (U. E. S.)},$$

si l'on emploie la batterie de six bouteilles ;

$$V_3 = \frac{2,460}{2,460 + c} \frac{q}{5} 20,44 \text{ (U. E. S.)},$$

si l'on emploie la batterie de trois bouteilles ;

q désigne le nombre des étincelles qui ont jailli à la bouteille de Lane et c la capacité électrique du thermomètre condensateur employé, par rapport à celle du n° 17.

La mesure du potentiel par cette méthode de la batterie doit être assez défectueuse par suite de la déperdition de ces batteries.

Résultats. — L'ensemble de ces expériences, dont les résultats numériques sont résumés dans les Tableaux ci-joints, a conduit Quincke à énoncer les lois suivantes :

1° Les accroissements unitaires de capacité ou de longueur des thermomètres condensateurs sphériques ou cylindriques sont sensiblement proportionnels à V^2 et à $\frac{1}{e^2}$ (ce sont bien là les lois théoriques que nous avons formulées).

2° En outre, on a, entre les variations unitaires de volume et de longueur d'un même condensateur cylindrique, la relation $\frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \frac{\Delta l}{l}$ [c'est notre formule (III)].

Si l'on consulte les Tableaux numériques, l'on voit, en effet, que les nombres situés sur une même ligne horizontale ne diffèrent pas trop les uns des autres, en général, surtout si l'on ne compare que ceux qui correspondent à un même mode d'estimation du potentiel et à condition de laisser de côté ceux obtenus par la méthode défectueuse de la batterie. Avec ces restrictions, la loi de V^2 est donc assez bien vérifiée.

Pour la loi de $\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right)$, nous ne pouvons avoir recours aux condensateurs sphériques dont nous avons dit que l'épaisseur est très variable aux différents points et est estimée d'une façon incertaine; si nous examinons les nombres relatifs aux condensateurs cylindriques, nous voyons que ceux situés dans une même colonne verticale sont en général peu différents, comme le veut la proportionnalité à $\frac{1}{\epsilon^2}$, les écarts étant du reste bien explicables par la non-identité physique et chimique des verres de ces divers condensateurs.

Quincke a ensuite le tort de se laisser entraîner par l'analogie de la formule

$$(II) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \frac{\Delta l}{l}$$

avec celle de la dilatation thermique et d'en conclure que :

« Le verre se dilate probablement également dans toutes les directions quand on le place dans un champ électrique. »

Nous avons vu, en effet, que cette relation (III) est tout à fait indépendante de la déformation dans la direction du champ, comme M. Curie (1) l'avait du reste déjà fait remarquer.

(1) CURIE, *loc. cit.* Mais où je ne suis plus d'accord avec M. Curie, c'est lorsqu'il a l'air de considérer cette formule (III) comme à peu près évidente; elle l'est, une fois démontré que la déformation est la même dans toutes les directions perpendiculaires aux lignes de force (génératrices aussi bien que lignes circulaires du cylindre); mais c'est cela qui n'est nullement évident, tout en étant exact, comme nous l'avons montré dans notre théorie.

Résultats de M. Quincke sur les variations de volume des condensateurs sphériques.

	NUMÉRO de l'appareil.	DIAMÈTRE extérieur.	ÉPAISSEUR de paroi.	CAPACITÉ électrique (U.E.S.).	BATTERIES de six bouteilles.				BATTERIES de trois bouteilles.			$\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$															
												pour des distances explosives de d^{mm} .								pour r révolutions de la vis de l'électromètre Thomson.							
					$q = 5.$	$q = 10.$	$q = 20.$	$q = 40.$	$q = 5.$	$q = 10.$	$q = 20.$	$d = 1.$	$d = 2.$	$d = 3.$	$d = 4.$	$d = 5.$	$d = 6.$	$d = 7.$	$d = 8.$	$r = 10.$	$r = 20.$	$r = 30.$	$r = 40.$	$r = 50.$	$r = 60.$		
FLINT-GLASS ANGLAIS.	30	4,65	0,0142	4179	"	$30,7 \times 10^{-13}$	25,4	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	10,7	24,3	"	"	"	"				
	32	5,12	0,0207	3273	73,0	52,0	44,1	"	47,4	49,6	"	34,5	45,8	49,0	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	18	5,645	0,0258	4511	93,3	81,6	64,5	"	85,8	74,3	"	39,9	37,8	38,6	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	10	4,467	0,0321	"	"	60,5	46,3	"	64,1	42,4	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	25	6,020	0,0297	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	23	5,5	0,0271	3891	"	57,9	41,3	"	"	49,0	"	33,0	31,8	32,2	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	21	5,2	0,0319	"	"	49,5	38,5	"	"	44,4	"	28,1	28,8	29,9	31,0	"	"	"	"	"	"	"	"				
	22	6,21	0,0286	4544	"	"	35,5	"	"	"	"	27,7	31,3	41,3	44,1	"	"	"	"	"	"	"	"				
	17	4,71	0,0346	2138	52,2	44,0	36,8	37,5	"	42,5	37,2	40,7	35,1	31,0	32,3	32,4	"	"	"	"	"	"	"				
	61	5,61	0,0407	2066	"	18,3	13,8	13,9	20,2	13,9	12,8	11,3	17,5	19,7	23,4	22,8	22,6	"	"	"	"	"	"				
60	5,795	0,0591	1304	"	8,3	8,2	8,7	10,7	9,1	8,3	9,3	9,5	13,9	11,9	11,3	12,0	13,9	12,9	13,3	13,3	14,1	14,3	"	13,7			
VERRE DE THURINGE.	2	3,835	0,0220	4169	132,4	95,9	74,5	"	107,9	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	27	7,250	0,0238	"	"	25,7	24,2	"	14,6	14,0	"	30,3	38,8	40,6	"	"	"	"	"	"	"	"	"				
	8	4,441	0,0283	1796	"	19,4	31,6	"	"	"	"	16,2	20,1	23,4	30,3	"	"	"	"	14,9	17,0	26,6	30,9	"	"		
	9	4,200	0,0294	1864	57,7	56,8	44,4	"	55,1	40,5	"	21,7	28,5	32,8	31,2	"	"	"	"	23	28,4	34,3	41,7	"	"		
	11	4,187	0,0494	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"			
	4	2,660	0,0590	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"			
16	4,910	0,0700	"	"	"	29,9	27,6	"	31,2	26,4	22,9	25,2	25,2	27,1	27,5	27,0	28,9	"	"	"	"	"	"				

Résultats de M. Quincke sur les variations de volume et de longueur des condensateurs cylindriques.

	NUMÉRO de l'appareil.	DIAMÈTRE extérieur.	LONGUEUR.	ÉPAISSEUR de paroi.	CAPACITÉ électrique (U.E.S.).	BATTERIE DE 6 BOUTEILLES									DISTANCE EXPLOSIVE DE d^{mm}						$\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$ pour $r^{\text{év}}$ de la vis de l'électromètre Thomson.				
						$\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$			$\left(\frac{\Delta l}{l} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$			$\left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$			$\left(\frac{\Delta l}{l} \times \frac{e^2}{V^2}\right)$										
						$q=20.$	$q=40.$	$q=60.$	$q=20.$	$q=40.$	$q=60.$	$d=4.$	$d=5.$	$d=6.$	$d=4.$	$d=5.$	$d=6.$	$r=20.$	$r=30.$	$r=40.$	$r=50.$	$r=60.$			
						cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm	cm			
FLINT-GLASS.	57	1,087	79	0,0376	2587	"	$6,3 \times 10^{-13}$	4,4	"	1,9	1,3	4,3	5,0	5,8	1,3	2,0	2,3	4,7	"	6,6	"	6,3			
	55	1,172	98,3	0,0430	3548	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	5,9	6,0	7,5	6,9	"			
	58	1,180	107,2	0,0443	3489	8,2	5,6	3,4	2,5	1,8	1,2	"	"	"	"	"	"	5,8	"	7,0	"	7,4			
	54	1,117	108,9	0,0473	3341	7,4	4,9	3,9	2,4	1,6	1,2	"	"	"	"	"	"	6,9	"	8,5	"	9,4			
	59	1,120	184,3	0,0567	3145	"	"	3,0	"	"	0,9	"	"	"	"	"	"	5,7	"	7,6	"	"			
	56	1,204	190,5	0,0656	5820	8,6	6,9	6,6	2,5	2,5	2,1	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"		

Résultats de M. Quincke sur les différences de potentiel (U.E.S.) correspondantes à des distances explosives de d^{mm} entre deux sphères de laiton de 20^{mm} de diamètre.

Distances explosives en millimètres.	Différences de potentiel (U.E.S.).
1	14,78
2	26,39
3	37,31
4	46,69
5	56,35
6	66,62
7	75,25
8	83,89

MM. Korteweg et Julius ⁽¹⁾ ont mesuré les déformations électriques du caoutchouc : ils forment un condensateur au moyen d'un tube de caoutchouc fermé à une extrémité et à l'autre extrémité duquel est mastiqué un tube de verre capillaire; on remplit de liquide qui constituera l'armature interne et dont les variations de niveau indiqueront les changements de capacité; on immerge dans un vase d'eau qui formera l'armature externe.

Ils ont trouvé que les déformations sont proportionnelles à $\frac{V^2}{e^2}$ et sont, à champ électrique égal, environ 40000 fois plus grandes que celles observées pour le flint par Quincke, c'est-à-dire à peu près dans le rapport des coefficients d'élasticité des deux substances ⁽²⁾.

⁽¹⁾ *Wied. Ann.*, t. XII, p. 647-665; 1881.

⁽²⁾ M. Quincke avait déjà effectué quelques mesures sur le caoutchouc, il avait trouvé qu'il ne se déformait guère plus que le verre; mais il avait opéré avec du caoutchouc noir, qui, au contact de l'eau, devient conducteur au point qu'il ne peut être chargé par une machine de Holtz et qu'il décharge une batterie de Leyde en quelques secondes. MM. Korteweg et Julius ont, au contraire, employé du caoutchouc blanc vulcanisé qu'ils faisaient séjourner vingt-quatre heures dans l'huile avant de l'immerger dans l'eau : il conserve alors très bien les charges électriques.

Résultats de MM. Korteweg et Julius sur les variations de capacité
des condensateurs cylindriques en caoutchouc.

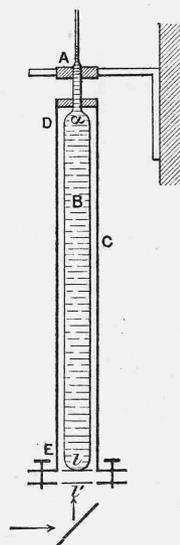
	LONGUEUR.	DIAMÈTRE extérieur.	ÉPAISSEUR de paroi.	$\frac{U \Delta_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}$ POUR DES DISTANCES EXPLOSIVES DE				
				1 ^{mm} V = 16,1.	2 ^{mm} V = 27,5.	4 ^{mm} V = 47,7.	5 ^{mm} V = 56,3.	6 ^{mm} V = 64,9.
Premier tube.....	106 ^{cm}	1 ^{cm} , 3	0 ^{cm} , 225	»	34,8.40 ⁻⁹	49,6	60,4	Percé.
Second tube.....	108 ^{cm}	0 ^{cm} , 85	0 ^{cm} , 095	31,3	43,8	»	»	»

M. Cantone ⁽¹⁾ a mesuré les variations de capacité et de longueur de condensateurs cylindriques en verre.

Les *variations de capacité* sont toujours estimées par les variations du niveau A ⁽²⁾ de l'eau qui forme l'armature interne (le tube est argenté extérieurement en guise d'armature externe).

Les *variations de longueur* sont mesurées directement par le déplacement des franges d'interférence produites par double réflexion d'un faisceau de lumière (compre-

Fig. 26.



nant des radiations de deux longueurs d'onde différentes), entre deux petites lames ll' fixées, l'une à l'extrémité inférieure du thermomètre condensateur B, l'autre au tube C relié à l'extrémité supérieure de ce même tube condensa-

⁽¹⁾ *Rendi conti della R. Accademia dei Lincei*, t. IV; 1888.

⁽²⁾ M. Cantone prend la précaution de souder successivement aux divers récipients le même tube capillaire calibré avec soin au moyen d'une colonne de mercure.

teur; cette méthode de mesure directe est évidemment supérieure aux méthodes d'amplification employées par les autres expérimentateurs.

La charge s'effectue en reliant l'armature interne du condensateur à une machine électrique, par un conducteur qui porte une dérivation allant à l'une des boules d'un micromètre à étincelles dont l'autre est au sol; les potentiels correspondant aux distances explosives étaient pris dans les Tables de Baille (1), les boules du micromètre étaient en laiton et avaient 2^{cm} de diamètre.

Résultats. — M. Cantone a ainsi trouvé que, conformément à la théorie :

Les variations de capacité et de longueur sont sensiblement proportionnelles à V^2 (les nombres situés sur une même ligne horizontale du Tableau sont à peu près égaux).

La dilatation cubique est triple de la dilatation linéaire.

Quant à la vérification de la loi sur l'influence de l'épaisseur des parois (2), il ne s'en est pas occupé; mais, en utilisant les résultats qu'il a obtenus avec ses trois (3) récipients, on arrive aux nombres inscrits dans le Tableau, et comme ceux situés dans une même colonne verticale diffèrent peu les uns des autres, la loi $\left(\frac{1}{e^2}\right)$ se trouve ainsi vérifiée aussi bien qu'on peut l'espérer, eu égard aux différences inévitables entre les natures physique et chimique des divers récipients.

(1) BAILLE, *loc. cit.*

(2) M. Cantone détermine l'épaisseur de ses condensateurs en prenant la moyenne des épaisseurs mesurées aux deux extrémités des tubes qui servaient à les fabriquer; quant au rayon interne, il est calculé

par la formule $R = \sqrt{\frac{V}{\pi \left(L_1 + \frac{2}{3} L_2\right)}}$, où V désigne le volume d'eau con-

tenu de α en V , L_1 la longueur de la partie cylindrique et L_2 la somme des flèches des deux calottes terminales.

(3) M. Cantone a opéré sur un quatrième récipient, mais il conseille lui-même de ne pas en tenir compte.

Variations de capacité et de longueur de condensateurs cylindriques en verre.

NUMÉRO.	LONGUEUR des tubes.	RAYON interne.	ÉPAISSEUR de paroi.	$\frac{\Delta U_1}{U_1} \times \frac{e^2}{V^2}$					$\frac{\Delta L}{L} \times \frac{e^2}{V^2}$				
				POUR DES DISTANCES EXPLOSIVES DE					POUR DES DISTANCES EXPLOSIVES DE				
				3 ^{mm} V = 37 (1).	4 ^{mm} V = 45.	5 ^{mm} V = 53.	6 ^{mm} V = 65,2	7 ^{mm} V = 73.	3 ^{mm} V = 37.	4 ^{mm} V = 45.	5 ^{mm} V = 53.	6 ^{mm} V = 65,2.	7 ^{mm} V = 73.
I.....	66,7 ^{cm}	0,4205 ^{cm}	0,0394 ^{cm}	14,4 × 10 ⁻¹³	19,2	19,9	19,4	»	5,4	6,9	6,9	7,0	»
II.....	63,1	0,4327	0,0394	13,8	15,8	16,1	15,2	18,0	4,6	5,1	5,3	5,0	5,8
III.....	73,5	0,7593	0,0617	13,9	16,4	15,9	15,4	18,7	4,9	5,4	5,7	5,6	7,1

(1) Nombres de Baillé adoptés par M. Cantone.

En résumé :

La loi de la proportionnalité de la déformation au carré du potentiel a été à peu près confirmée par toutes les expériences ⁽¹⁾.

La relation $\frac{\Delta U_1}{U_1} = 3 \frac{\Delta l}{l}$ établie expérimentalement par Quincke et contrôlée par Cantone est indiquée dans notre théorie [formule (III)].

Quant à la loi de proportionnalité entre la déformation et l'inverse du carré de l'épaisseur, elle n'était contredite que par les expériences de M. Duter, que nous avons montrées ne pouvoir être conservées qu'au point de vue qualitatif, et par les expériences de M. Righi dans lesquelles nous avons signalé une cause d'erreur qui a pu fausser complètement la recherche sur l'influence de l'épaisseur.

Au contraire, cette proportionnalité de la déformation à l'inverse du carré de l'épaisseur a été vérifiée par toutes les expériences postérieures de Quincke, Korteweg et Julius, Cantone, avec des écarts parfois considérables, il est vrai; mais ces écarts ne doivent pas nous surprendre : nous avons, en effet, insisté sur les nombreuses et importantes causes de divergences qui s'opposent à toute vérification rigoureuse de cette loi et qui sont pour la plupart insurmontables.

CINQUIÈME PARTIE.

CALCUL DU COEFFICIENT k_1 PAR L'EMPLOI DES RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES SUR LES DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES DIÉLECTRIQUES.

Considérons notre formule théorique :

$$(1) \quad \left(\frac{\Delta U_1}{U_1} \right) = 3 \left(\frac{\Delta l}{l} \right) = 3(\alpha + k_1) \frac{KV^2}{8\pi e^2}$$

⁽¹⁾ De l'ensemble des expériences il semblerait cependant résulter que la déformation croît un peu plus vite que le carré du potentiel.

Les expériences sur les déformations électriques des condensateurs nous en donnent les premiers membres $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)$ ou $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ pour des valeurs de V et de e connues.

Si l'on a également déterminé le coefficient élastique a et la constante diélectrique K de la substance qui forme le diélectrique du condensateur, la formule ci-dessus *permettra de calculer la valeur de k_1* : coefficient de variation de la constante diélectrique par une traction perpendiculaire aux lignes de force, coefficient qui n'a encore été l'objet d'aucune mesure directe.

Nous ne pourrions utiliser dans ce but les résultats des expériences sur les condensateurs sphériques, car la trop grande inégalité d'épaisseur des parois et les procédés défectueux qui permettent de mesurer cette épaisseur rendraient un pareil calcul tout à fait illusoire. Nous ne nous servirons que des résultats obtenus avec des condensateurs cylindriques.

Ceux de M. Quincke ne pourront nous servir, car au point de vue élastique il s'est contenté d'étudier la déformation par pression hydrostatique interne et de déduire de là a en supposant $\sigma = \frac{1}{4}$ ⁽¹⁾ : supposition que l'on n'est pas en droit de faire et qui est contredite par d'autres expériences de M. Quincke lui-même ⁽²⁾.

⁽¹⁾ M. Quincke avait déterminé les valeurs de K et de a dans le but de voir si les pressions électrostatiques suffisent à expliquer les déformations électriques; il avait calculé l'effet de ces pressions et était arrivé à des formules où non seulement le coefficient k_1 manque, mais encore dont l'une était inexacte comme nous l'avons montré dans la deuxième Partie. L'absence de k_1 lui permettait de calculer les deux membres de la formule pour lesquels il trouvait naturellement des valeurs inégales.

⁽²⁾ M. Quincke a, en effet, aussi déterminé les déformations élastiques de ses condensateurs sphériques par pression interne seule et par pression sur les deux faces; de ces deux résultats on peut alors déduire (voir LORBERG, *loc. cit.*) les valeurs de σ et de a : celles de σ oscillaient entre 0,20 et 0,35.

EMPLOI DES RÉSULTATS DE M. CANTONE.

M. Cantone a également déterminé les a et les K de ses récipients, dans le but de comparer les résultats de ses expériences sur les déformations électriques avec la formule de Lorberg.

. *Détermination de K* (1). — Après avoir terminé ces expériences il enlève les calottes terminales de ses cylindres et argente ceux-ci intérieurement et extérieurement, puis il détermine la capacité c des condensateurs, obtenue en la comparant comme il suit avec celle c' d'un condensateur à air de dimensions connues : un commutateur établit pendant une seconde la communication de c avec une pile voltaïque, puis relie c , c' et l'une des paires de quadrants d'un électromètre dont l'autre paire est au sol et l'aiguille à un potentiel élevé : on lit la déviation α . On opère de même en chargeant c' puis le reliant à c et à l'électromètre ; soit α' la nouvelle déviation lue :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\frac{c}{c+c'}}{\frac{c'}{c+c}} = \frac{c}{c'}$$

d'où c connaissant c' , α , α' ; de la capacité et des dimensions du condensateur ou déduit facilement la constante diélectrique du verre.

Détermination de a (2). — Il détermine la diminution de capacité du cylindre par pression externe et son augmentation de longueur par pression interne ; de ce double résultat on peut déduire les valeurs de σ (qui ont été trouvées sensiblement égales à $\frac{1}{4}$) et de a .

(1) CANTONE, *loc. cit.*

(2) CANTONE. *Nuovo metodo per la determinazione delle due costanti di elasticità* (C. R. della R. Accademia dei Lincei, vol. IV ; 1888).

Les conséquences auxquelles M. Cantone est arrivé en utilisant la formule de Lorberg sont en partie erronées puisque cette formule est inexacte, ainsi que nous l'avons montré dans la troisième Partie.

C'est au moyen de ces résultats de M. Cantone et de notre formule (I) que nous allons calculer k_1 : nous emploierons les résultats des mesures d'allongement $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ de préférence à celles de capacité $\left(\frac{\Delta U_1}{U_1}\right)$ car la mesure de ΔL faite directement par la méthode des franges nous a paru présenter toutes les garanties désirables.

	Épaisseur de		Moyenne des valeurs de		a ⁽¹⁾ en C. G. S.	k_1 en C. G. S.
	Rayon. cm	paroi. cm	$\frac{\Delta L}{L} \times \frac{e^2}{V^2}$	K.		
I.....	0,4205	0,0394	$6,5 \times 10^{-13}$	6,10	$1,62 \times 10^{-12}$	$1,06 \times 10^{-12}$
II.....	0,4327	0,0394	5,2	5,39	1,50	0,92
III.....	0,7593	0,0617	5,7	5,66	1,45	1,08

En résumé, le coefficient k_1 , qui doit évidemment varier d'un récipient à un autre puisqu'il est certainement fonction de l'état physique et chimique du verre est de l'ordre de $k_1 = 1 \times 10^{-12}$ C. G. S. (même ordre de grandeur que a).

Note relative au coefficient k_2 . — Quant au coefficient k_2 on ne peut le déduire de ces expériences relatives à la dilatation électrique dans les directions normales aux lignes de force.

Il semblerait cependant, puisque les cylindres employés ne sont pas infiniment minces et qu'on doit par suite appliquer aux variations de capacité la formule plus complète

$$(17) \quad \frac{\Delta U_1}{U_1} = \left\{ 3(a + k_1) + \frac{e}{R} [2a(1 + \sigma) + k_1 - k_2] \right\} \frac{KV^2}{8\pi e^2}$$

(¹) M. Cantone donne les valeurs de $E = \frac{\alpha}{1}$ en $\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$: (6277) (6783) (7023).

qu'on aurait là un moyen de calculer k_2 tout le reste étant commun dans cette formule, même k_1 qui vient d'être déterminé pour les mêmes récipients par leur variation électrique de longueur.

Mais une pareille détermination de k_2 serait *illusoire*, à cause de la petitesse du coefficient $\left(\frac{e}{R}\right)$ (environ $\frac{1}{10}$ dans les expériences de M. Cantone) et par suite des erreurs d'expérience qui sont relativement grandes dans des recherches aussi délicates.

Note. — Nous venons de montrer qu'il résulte des expériences de M. Cantone que :

La constante diélectrique du verre augmente par traction perpendiculaire aux lignes de force

$$[k_1 = +1 \times 10^{-12} \text{ C.G.S.}]$$

M. Lippmann ⁽¹⁾ avait déjà montré que le fait expérimental établi pour le verre, d'une dilatation électrique proportionnelle à V^2 entraînait comme réciproque que :

La capacité électrique d'un condensateur à lame de verre doit augmenter par traction et proportionnellement à celle-ci.

Ce résultat de M. Lippmann n'entraînait *pas forcément* l'existence d'une variation de la constante diélectrique; en effet :

La capacité électrique dépend :

- 1° De la constante diélectrique;
- 2° Des dimensions.

Or, justement, dans toutes les expériences de dilatation électrique, on a opéré avec des armatures adhérentes au diélectrique; par suite, l'effet de la traction est d'augmenter la surface et de diminuer la distance de ces arma-

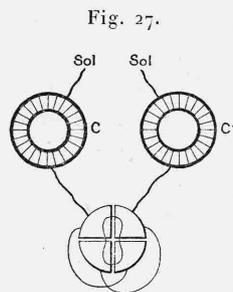
⁽¹⁾ *Principe de la conservation de l'électricité* (Ann. de Chim. et de Phys., 5^e série, t. XXIV, p. 159; 1881).

tures; autrement dit, d'accroître la capacité électrique, il se pouvait donc que la variation de capacité électrique prévue par M. Lippmann fût due uniquement à cette cause.

Expériences récentes sur les variations de capacité électrique des condensateurs soumis à une traction.

Avant de quitter ce sujet je veux résumer rapidement quelques expériences *toutes récentes*, dans lesquelles on a essayé de mettre en évidence tantôt la *variation de capacité électrique tantôt la variation de constante diélectrique* produite par la traction de l'isolant d'un condensateur.

M. Dessau ⁽¹⁾ constitue son condensateur C par un long tube de verre argenté intérieurement et extérieure-



ment; un deuxième condensateur *de compensation* C' est aussi identique que possible au premier; ils sont reliés respectivement aux deux paires de quadrants d'un électromètre; on charge les condensateurs (et les quadrants) par communication avec un pôle d'une pile de 100 éléments Volta, puis on ôte cette communication.

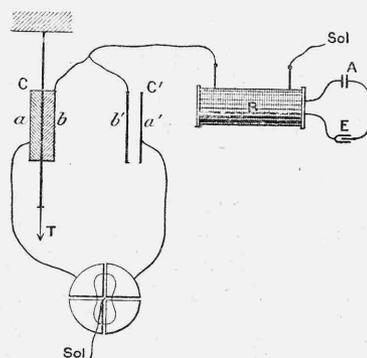
Si la déperdition électrique était la même pour les deux

⁽¹⁾ *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 5^e série, t. III, p. 488-494; 1894.

condensateurs, les potentiels des deux paires de quadrants resteraient égaux et l'aiguille immobile; malgré toutes les précautions on voit l'aiguille de l'électromètre se déplacer mais *lentement* et régulièrement; on suit sa marche. En soumettant alors le condensateur C à une traction on constate que le mouvement de l'aiguille s'accélère pendant les quelques minutes qui suivent, puis redevient régulier; en faisant cesser la traction ce mouvement se ralentit pendant quelques minutes puis redevient régulier; l'effet du poids tenseur est donc un abaissement du potentiel de C, c'est-à-dire un *accroissement de capacité du condensateur*; l'effet inverse ayant du reste lieu quand on ôte ce poids.

M. O.-M. Corbino ⁽¹⁾ constitue son condensateur C par une lame de verre sur les deux faces de laquelle sont ap-

Fig. 28.



pliqués deux plateaux de laiton, au moyen d'une légère couche de paraffine; C' est un condensateur à air dont les plateaux sont à distance variable l'un de l'autre.

Les armatures *b*, *b'* sont reliées à l'un des pôles (l'autre est au sol) du secondaire d'une bobine de Ruhmkorff B

⁽¹⁾ *Rivista scientifica e industriale*, 29^e année, nos 8-9; septembre 1897.

dans le primaire de laquelle circule le courant d'un accumulateur A interrompu par un électro-diapason E à 250 vibrations par seconde.

Les armatures aa' communiquent respectivement aux deux paires de quadrants d'un électromètre dont l'aiguille est au sol. L'aiguille de l'électromètre étant dans la position symétrique on fait fonctionner la bobine, l'aiguille dévie; on déplace alors l'un des plateaux C' jusqu'à ce que l'aiguille de l'électromètre reprenne sa première position: l'induction de b' sur a' est alors la même que celle de b sur a . En soumettant alors la lame de verre de C à une traction T on voit aussitôt l'aiguille de l'électromètre se déplacer dans le même sens que lorsqu'on rapproche l'un de l'autre les plateaux de C' : la traction a donc diminué la capacité du condensateur, résultat contraire à celui obtenu par M. Dessau.

Ces deux expériences sont sujettes à de nombreuses critiques.

M. Ercolini (¹), après les avoir discutées, conclut qu'on n'en peut rien déduire de décisif.

Il a alors fait lui-même sur ce sujet une série d'expériences :

Les armatures de son condensateur sont constituées par une canne I et un manchon E de laiton entre lesquelles se trouve un long tube de verre A: un intervalle d'air de 2^{mm} environ sépare le diélectrique de chaque armature. Des dispositions trop longues à décrire ici maintiennent ces trois pièces dans des positions respectives rigoureusement invariables même quand on soumet le tube de verre à la traction, et il s'est assuré par des procédés très sensibles que cette fixité était obtenue. Tout le condensateur est protégé par un écran conducteur au sol.

(¹) *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5^e série, t. VII, p. 172-177 et 183-189; 1898.

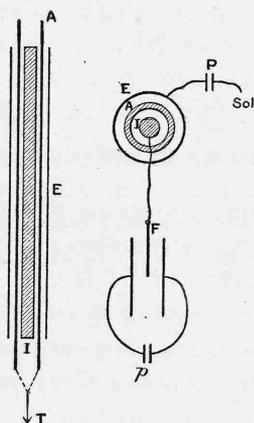
Il Nuovo Cimento, 4^e série, t. VIII; 1898.

L'électromètre employé est celui de Hankel à cause de sa grande sensibilité et de sa faible capacité électrique.

Il a opéré de différentes façons ; nous ne retiendrons ⁽¹⁾ que les expériences dans lesquelles il procède à potentiel constant :

On relie l'armature E avec le pôle d'une pile de charge P de 300 éléments Volta ; l'armature I communique à la

Fig. 29.



feuille d'or de l'électromètre dont les plateaux sont portés à des potentiels égaux et contraires par une pile sèche *p*.

On met la feuille F au sol puis on l'isole et l'on soumet le tube A à des tractions croissantes depuis 20^{kg} jusqu'à 120^{kg} : la déviation de la feuille F indique une *augmentation de capacité proportionnelle au poids tenseur, sauf pour les charges faibles où elle est d'abord un peu plus rapide.*

De cette augmentation de *capacité électrique* on peut

⁽¹⁾ M. O.-M. Corbino a tout récemment fait une critique des expériences de M. Ercolini d'où il résulte, en effet, que certaines de ces expériences sont défectueuses. (*Rendiconti della R. Acc. d. Lincei*, Vol. VIII, 2^e sem.; 5 novembre 1899.)

déduire ici qu'il y a *accroissement de la constante diélectrique par la traction*, puisque le verre étant distant des armatures, l'effet de son amincissement par la traction serait une diminution de capacité et non une augmentation.

En résumé : les expériences de M. Ercolini semblent mettre hors de doute l'accroissement de la constante diélectrique du verre par traction normale aux lignes de force ⁽¹⁾.

Elles viennent donc confirmer la conséquence $k_1 > 0$ que j'ai déduite des expériences sur la dilatation électrique, de M. Cantone.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

La théorie des phénomènes des déformations électriques des diélectriques solides isotropes avait été abordée par deux voies différentes :

1° De l'étude des pressions au sein des solides polarisés on déduisait les déformations correspondantes (Korteweg, Lorberg, Kirchhoff, Duhem). Cette marche était défec- tueuse en ce qu'elle faisait dépendre les calculs des défor- mations (directement mesurables par l'expérience) de celui des pressions au sein des solides polarisés (inaccessibles à l'expérience); en outre, ces pressions étaient d'un calcul laborieux et leur application à l'étude des déformations était délicate; enfin et surtout la *polarisation des diélectriques, base même de ces théories, est sujette à bien des contro- verses?*

⁽¹⁾ Citons encore que la *constante diélectrique diminuerait par la traction* pour le caoutchouc et pour l'ébonite.

O. CARBINO et F. CANNIZZO, *Sulla variazione della costante dielettrica del caoutchouc per la trazione* (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 5^e série, t. VII; 1898. *Nuovo Cimento*, 4^e série, t. VIII).

UGO PANICHI, *Sulle variazioni del potere induttore specifico dei coibenti armati* (*Il nuovo Cimento*, 4^e série, t. VIII; 1898).

2° Des essais de théories thermodynamiques avaient alors été tentés (MM. Vaschy, Duhem); mais les uns n'avaient pas abouti, et les autres, dans lesquels on n'avait abordé que *les cas les plus simples*, et encore *en faisant abstraction des variations de la constante diélectrique par les déformations*, avaient conduit à des résultats en partie en contradiction avec ceux des théories précédentes.

Dans le présent travail :

I. *J'ai établi les formules des déformations électriques des diélectriques solides isotropes en me basant uniquement sur les principes fondamentaux de la Thermodynamique* (et de la conservation de l'électricité);

Après avoir traité le *cas général* d'un condensateur fermé de forme quelconque, j'ai poussé à fond le calcul pour les condensateurs *sphérique, cylindrique et plan*, non seulement *infinitement minces*, mais aussi *d'épaisseurs quelconques*.

Dans cette théorie, *j'ai introduit*, comme cela est absolument nécessaire, *les variations qu'éprouve la constante diélectrique d'un solide isotrope lorsqu'on le déforme mécaniquement*; et pour cela, dans une étude préliminaire, j'ai défini des coefficients :

k_1 : coefficient de variation de la constante diélectrique par une traction perpendiculaire aux lignes de force ;

k_2 : coefficient de variation de la constante diélectrique par traction parallèle aux lignes de force ,

et j'ai établi à leur sujet quelques relations fondamentales ; ces coefficients k_1, k_2 sont différents de ceux (χ_1, χ_2) usités dans les théories allemandes, et ils ont sur eux l'avantage de conduire, pour les déformations électriques, à des formules beaucoup plus simples.

De l'ensemble des formules obtenues, *j'ai ensuite dégagé, pour les condensateurs infinitement minces, des lois des déformations excessivement simples.*

II. En cherchant ensuite quelles sont les *causes des déformations électriques* des diélectriques solides isotropes, j'ai montré que, dans ces déformations, il faut distinguer :

a. D'une part, les déformations élastiques dues aux forces qui s'exercent sur un diélectrique non électrisé placé dans un champ électrique (forces mises en évidence par les expériences de M. Pellat et qui deviennent les *pressions électrostatiques* pour les portions de surface où le diélectrique est au contact des armatures);

b. D'autre part, une déformation due à une modification de l'état moléculaire de la matière diélectrique, modification corrélative de la perturbation de l'éther, qui constitue la création du champ électrique.

De même que, lorsqu'on expose un corps à un rayonnement calorifique, le mouvement vibratoire de l'éther qui constitue ce rayonnement produit un changement dans l'état moléculaire du corps (qui constitue l'élévation de température) et en vertu duquel chaque élément de volume du corps se dilate également dans toutes les directions.

Comme je l'ai indiqué dans la Note B, *cette seconde cause subsiste seule pour les diélectriques gazeux et produit leur contraction électrique.*

III. La revue et la discussion des théories précédemment faites m'a conduit au résultat suivant :

Toutes les divergences constatées n'étaient dues qu'à des erreurs et, une fois celles-ci rectifiées, tous les résultats partiels précédemment obtenus redonnent des formules comprises dans la théorie que j'ai exposée, ce qui devait être puisque cette théorie est basée uniquement sur des principes définitivement acquis à la Science.

La discussion des travaux expérimentaux nous a montré, dans les quelques expériences dont les résultats étaient en contradiction avec la théorie, des causes d'erreurs qui ne permettent de conserver ces expériences qu'au point de

vue qualitatif; toutes les autres expériences confirment la théorie.

IV. Enfin en introduisant, dans les formules, les résultats des expériences de M. Cantone sur l'allongement électrique des tubes de verre, j'en ai pu déduire que : *pour le verre le coefficient k_1 , doit être positif et de l'ordre de 1×10^{-12} C.G.S.* (et par suite du même ordre de grandeur que le coefficient élastique a) : cette déduction est confirmée, au point de vue du signe, par des expériences récentes de M. Ercolini.

NOTE A.

SUR LA THÉORIE DE MAXWELL.

Je vais maintenant rappeler, en la précisant sur certains points, l'hypothèse de Maxwell sur la nature du champ électrique, et montrer qu'elle permet de prévoir l'existence de toutes les forces dont nous avons parlé dans la deuxième Partie, aussi bien des forces agissant sur le diélectrique isolé des armatures que des pressions électrostatiques, et même d'en trouver les valeurs dans la plupart des cas; elle nous facilitera en outre la compréhension du mécanisme de certaines expériences et de leurs particularités.

L'éther du vide pénètre les corps diélectriques; les molécules d'éther et de matière pouvant du reste réagir les unes sur les autres (comme dans les corps transparents).

La production d'un champ électrique dans le vide ou dans un diélectrique consiste en une modification de l'état de l'éther en vertu de laquelle, en chaque point, cet éther tend à se contracter dans une direction qui sera celle du champ, avec une force $\left(\frac{KH^2}{8\pi}\right)$ et à se dilater avec la même force dans les directions perpendiculaires : H désignant l'intensité du champ en ce point et K un coefficient qui dépend de la matière qui y est superposée à l'éther et qui est égal à 1 pour le vide.

J'ajoute que cette modification de l'état de l'éther est accompagnée, comme je l'ai déjà dit, d'une modification de l'état moléculaire de la matière en vertu de laquelle l'élément de volume

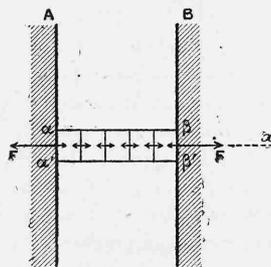
matériel tend à se contracter avec une force $\left(\chi_1 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ dans la direction du champ et à se dilater dans les directions perpendiculaires avec une force $\left(-\chi_2 \frac{H^2}{8\pi}\right)$.

En outre, un élément de surface matérielle est soumis à la différence des tensions des éléments de volume d'éther qui sont situés de part et d'autre.

Nous allons maintenant examiner, pour un certain nombre de cas, les résultats auxquels conduisent ces hypothèses.

1° *Condensateur plan dont le diélectrique est le vide (ou un fluide)*. — Soient A, B les armatures; chacun des éléments de volume d'éther d'un filet $\alpha\alpha'\beta\beta'$ tend à se contracter dans la direction x du champ avec une force $\frac{H^2}{8\pi}$; ce filet est donc, selon l'expression usitée, dans l'état d'un *fil élastique tendu* mais, et

Fig. 30.



c'est une chose à bien noter, *ce filet est dans un état de tension, non pas parce qu'il a été étiré, mais parce que, dans sa configuration primitive, chacun de ses éléments tend à se contracter.*

Si les armatures A, B sont libres, elles se précipiteront l'une sur l'autre, entraînées par une force $\frac{H^2}{8\pi}$, ce qui est bien la valeur connue de la pression électrostatique dans ce cas.

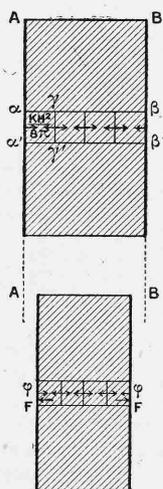
Si on veut les maintenir immobiles, il faudra leur appliquer des forces extérieures F qui équilibreront les forces de contraction de l'éther.

Si au lieu du vide, nous avons un gaz entre les armatures, il ne sera soumis à aucune force extérieure, mais uniquement aux

forces intérieures $\left(\chi_1 \frac{H^2}{8\pi}\right) \left(-\chi_2 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ dues au changement de l'état moléculaire de la matière; mais pour les gaz on a évidemment $\chi_1 = \chi_2$ d'après les définitions de ces coefficients, et en outre $\chi_1 > 0$ puisque la constante diélectrique des gaz augmente par la compression : par conséquent chaque élément de volume du gaz tendra à se contracter dans toutes les directions avec la force $\left(\chi_1 \frac{H^2}{8\pi}\right)$: c'est la *contraction électrique des gaz*.

2° *Condensateur plan à diélectrique solide, en contact avec les armatures* (celles-ci étant du reste abandonnées à elles-

Fig. 31.



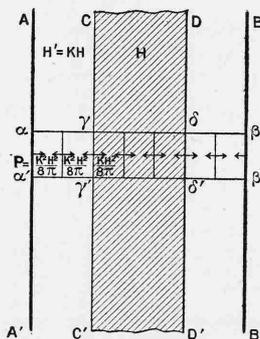
mêmes). — Chaque élément de volume du filet d'éther $\alpha\alpha'\beta\beta'$ tend, comme précédemment, à se contracter avec une force ici égale à $\frac{KH^2}{8\pi}$; un élément de surface matérielle tel que $\gamma\gamma'$, ne sera sollicité par aucune action de la part de l'éther, puisque les deux éléments de volume d'éther, situés de part et d'autre, sont dans le même état de tension; mais il n'en sera plus de même pour les éléments terminaux $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ qui seront sollicités par des forces extérieures φ dues à l'inégale tension de l'éther sur leurs deux faces, forces φ égales à $\frac{KH^2}{8\pi}$, qui maintiendront les arma-

tures appliquées sur le diélectrique (c'est bien la valeur connue de la pression électrostatique dans ce cas). En outre, sous l'action de ces forces extérieures φ , le diélectrique se déformera jusqu'à ce que les réactions élastiques F (fig. 31), développées par la déformation, fassent équilibre aux forces φ .

A ces déformations du diélectrique dues aux forces extérieures φ provenant de l'éther, s'ajoutent les déformations dues à $\left(\chi_1 \frac{H^2}{8\pi}\right)$ et $\left(-\chi_2 \frac{H^2}{8\pi}\right)$, c'est-à-dire dues au changement de l'état moléculaire de la matière.

3°. *Condensateur plan à diélectrique solide, non au contact des armatures.* — Soit H l'intensité du champ dans le diélec-

Fig. 32.



trique, $H' = KH$ l'intensité de ce champ dans l'intervalle d'air; les éléments de volume du filet d'éther $\alpha\alpha'\beta\beta'$ tendront à se contracter avec des forces : $\frac{1 \times H'^2}{8\pi} = \frac{K^2 H^2}{8\pi}$ pour ceux situés dans l'air; $\frac{KH^2}{8\pi}$ pour ceux situés dans le diélectrique; d'où il suit immédiatement que :

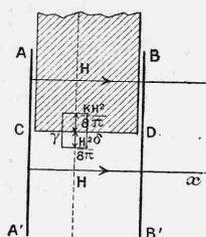
Les armatures seront sollicitées par des forces $P = \frac{K^2 H^2}{8\pi}$ (pression électrostatique) et, si on ne les maintient pas immobiles, elles viendront s'appliquer sur le diélectrique.

Les surfaces CC' , DD' du diélectrique seront soumises à des tractions $q = \frac{K^2 H^2}{8\pi} - \frac{KH^2}{8\pi} = \frac{K(K-1)H^2}{8\pi}$ (forces mises en évidence par M. Pellat) qui déformeront le diélectrique jusqu'à ce

que les réactions élastiques développées par ces déformations leur fassent équilibre.

4° *Condensateur plan dont le diélectrique solide ne couvre qu'une partie des armatures.* — Dans tout l'espace compris

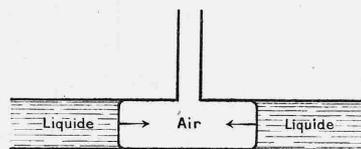
Fig. 33.



entre les armatures, aussi bien là où il y a le diélectrique que là où il est remplacé par l'air, le champ a la même direction x et la même intensité H .

Considérons un élément $\gamma\delta$ de surface limite du diélectrique; les molécules d'éther situées de part et d'autre sont soumises à

Fig. 34.



des forces d'extension dans les directions perpendiculaires à x , égales à $\frac{KH^2}{8\pi}$ et $\frac{H^2}{8\pi}$ et dont la différence $\frac{(K-1)H^2}{8\pi}$ tendra à enfoncer le diélectrique entre les armatures (expériences de M. Pellat) (*fig. 33*) ou à faire contracter la bulle d'air contenue entre les armatures d'un condensateur à diélectrique liquide (expérience de M. Quincke) (*fig. 34*).

NOTE B.

SUR LA CONTRACTION ÉLECTRIQUE DES GAZ.

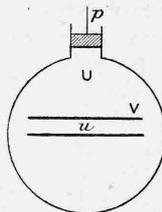
Soit un récipient contenant un gaz de volume U sous la pression p ; dans ce récipient, un condensateur dont ce gaz est le diélectrique. Maintenons la température constante; l'état du gaz sera fonction des deux variables, la pression p est la différence des potentiels V entre les armatures du condensateur.

Pour produire une transformation (dp , dV) il faudra fournir un travail

$$dT = V dM - p dU,$$

M désignant la charge électrique des armatures; $M = CV$ si C représente la capacité électrique du condensateur.

Fig. 35.



Les mêmes calculs déjà répétés pour les condensateurs à diélectrique solide nous amènerons à la relation

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -V \frac{\partial C}{\partial p}$$

ou en intégrant

$$\Delta U = -\frac{CV^2}{2} \left(\frac{1}{C} \frac{dC}{dp} \right);$$

mais $\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial p} = \frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p}$, puisque les dimensions géométriques du condensateur restent invariables; posons

$$\frac{1}{K} \frac{\partial K}{\partial p} = k,$$

k sera le coefficient de variation de la constante diélectrique du gaz par la pression ⁽¹⁾

$$\Delta U = (-k) \frac{CV^2}{2} = (-k)W,$$

si W désigne l'énergie dite *électrique du condensateur*.

Enfin, représentons par u le volume du gaz compris entre les armatures; comme $\frac{W}{u} = \frac{KH^2}{8\pi}$, on a

$$(\alpha) \quad \frac{\Delta U}{u} = (-k) \frac{KH^2}{8\pi} \quad (2).$$

Des expériences de M. Boltzmann ⁽³⁾ ayant montré que la constante diélectrique des gaz augmente avec la pression; on a : $k > 0$, donc $\Delta U < 0$, c'est-à-dire il y a *contraction électrique des gaz* ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾.

J'arrive maintenant au point sur lequel je tiens à insister :

Si nous comparons la formule (α) que nous venons d'obtenir à celles établies précédemment pour les déformations électriques des solides, nous remarquons une différence essentielle : ici, *les termes contenant les coefficients élastiques manquent complètement*; par conséquent :

Tandis que les déformations électriques des solides sont dues, comme nous l'avons montré, à une double cause :

1° *Aux forces électriques qui agissent sur le diélectrique solide;*

⁽¹⁾ Pour les solides nous avons vu qu'on doit distinguer deux coefficients k_1 et k_2 selon qu'on exerce une traction normale ou parallèle aux lignes de forces et, en outre, qu'à une traction superficielle uniforme correspondait un coefficient de variation $k = 2k_1 + k_2$; pour les gaz on a évidemment $k_1 = k_2$.

⁽²⁾ Le signe de k est changé par rapport à celui qui existe dans les formules relatives aux diélectriques solides par ce qu'ici k désigne le coefficient de variation par *pression* au lieu de *traction* superficielle uniforme.

⁽³⁾ BOLTZMANN, *Journal de Physique*, t. V, p. 23; 1876. — GARDON, *Traité d'Électricité*, vol. I, p. 198.

⁽⁴⁾ Le raisonnement précédent est à peu près la reproduction de celui donné par M. LIPPMANN, *Principe de la conservation de l'électricité (Annales de Physique et de Chimie, 5^e série, t. XXIV, 1881)*.

⁽⁵⁾ Contraction électrique mise en évidence par les expériences de Quincke pour CO_2 (au moyen d'un petit manomètre à alcool); pour l'air il n'a rien observé.

2° *Au changement d'état moléculaire* de ce diélectrique dû à la création du champ,

Pour les gaz, au contraire, la contraction électrique est uniquement due au changement d'état moléculaire corrélatif de la perturbation de l'éther en laquelle consiste la production du champ électrique.

NOTE C.

SUR LES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DES VASES MINCES ⁽¹⁾.

Je me propose de montrer qu'on peut trouver, par des *calculs très simples*, la déformation qu'éprouve un vase sphérique ou cylindrique, mince, lorsqu'il est soumis à des pressions différentes sur ses deux faces.

Rappelons rapidement que, si un cube solide isotrope d'arêtes x, y, z est soumis à une traction dans une seule direction x , les lignes parallèles à cette direction s'allongent et celles perpendiculaires se contractent. Je désignerai par

a , le coefficient d'allongement ;

b , le coefficient de contraction ;

$\frac{b}{a} = \sigma$ (coefficient de Poisson).

Si le solide est soumis à des tractions égales dans deux directions x, y : toute ligne parallèle au plan xy s'allonge [coefficient $(a - b)$]; toute ligne perpendiculaire à ce plan se contracte (coefficient $2b$).

Enfin, s'il y a traction égale dans toutes les directions, il y a allongement linéaire avec coefficient $(a - 2b)$ et augmentation de volume avec coefficient $3(a - 2b)$.

I. — VASE SPHÉRIQUE.

Soient R son rayon, e son épaisseur (faible par rapport à R); p, p' les pressions qui s'exercent sur les faces externe et interne.

On peut imaginer que le vase est soumis sur ses deux faces à la pression p' et, en outre, à une pression interne $(p - p')$.

⁽¹⁾ SACERDOTE, *Sur les déformations élastiques des vases minces.* (Extrait du *Journal de Physique*, septembre 1898.)

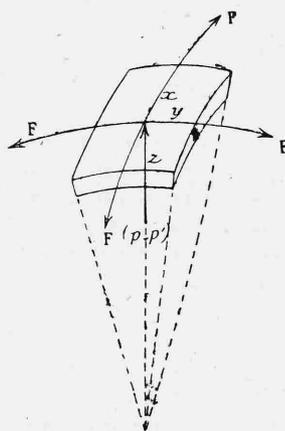


1° *Effet des pressions p' qui s'exercent sur les deux faces.*
 — Le vase se comprime comme un solide plein : la contraction linéaire unitaire est $(a - 2b)p'$, c'est-à-dire

$$(1) \quad \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -(a - 2b)p' = -a(1 - 2\sigma)p'.$$

2° *Effet de la pression interne ($p - p'$).* — Soient un élément de volume, x, y les directions sur la sphère (*fig. 36*), z celle dirigée suivant le rayon ; l'équilibre de l'élément exige une sorte de

Fig. 36.



tension superficielle dans les directions x, y (F par unité de longueur) donnée par la formule de Laplace

$$(p - p') = \frac{2F}{R};$$

d'où

$$F = \frac{R}{2}(p - p').$$

et, par *unité de surface*,

$$\left(\frac{F}{e}\right) = \frac{R}{2e}(p - p').$$

Sous l'action de cette traction, il y aura allongement dans les directions x, y (c'est-à-dire augmentation du rayon) et contrac-

tion suivant z (diminution d'épaisseur), suivant les formules

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\Delta R}{R} \right) &= (a - b) \frac{R}{2e} (p - p') = a(1 - \sigma) \frac{R}{2e} (p - p'), \\ \left(\frac{\Delta e}{e} \right) &= -2b \frac{R}{2e} (p - p') = -a\sigma \frac{R}{e} (p - p'). \end{aligned} \right.$$

Résumé. — En superposant les effets (1), (2) on aura la *déformation du vase*

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\Delta R}{R} \right) &= -a \left[(1 - 2\sigma)p' - (1 - \sigma) \frac{R}{2e} (p - p') \right], \\ \left(\frac{\Delta e}{e} \right) &= -a \left[(1 - 2\sigma)p' + \sigma \frac{R}{e} (p - p') \right]. \end{aligned} \right.$$

On déduirait facilement de là : la *variation de la capacité interne* (ΔV_1), car $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3$, d'où

$$\left(\frac{\Delta V_1}{V_1} \right) = 3 \left(\frac{\Delta R}{R} \right) = -3a \left[(1 - 2\sigma)p' - (1 - \sigma) \frac{R}{2e} (p - p') \right];$$

et la *variation de volume du solide* (ΔV), car $V = 4 \pi R^2 e$, d'où

$$\left(\frac{\Delta V}{V} \right) = 2 \left(\frac{\Delta R}{R} \right) + \left(\frac{\Delta e}{e} \right) = -a(1 - 2\sigma) \left[3p' - \frac{R}{e} (p - p') \right].$$

Remarque. — Si $(p - p') \neq 0$, comme $\frac{R}{e}$ est très grand, les termes en p' disparaissent devant ceux en $(p - p')$.

Au contraire, si $(p - p') = 0$, les formules (1) se réduisent à leurs termes en p' .

II. — VASE CYLINDRIQUE.

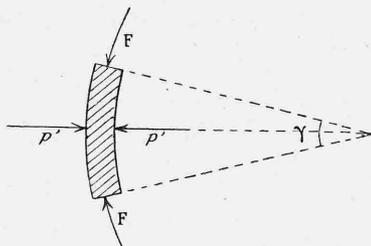
Soit un cylindre de rayon R , épaisseur e (négligeable devant R), longueur l , terminé par deux bases planes infiniment minces et parfaitement rigides, et soumis à des pressions p' sur la face externe, p sur la face interne [pressions que nous décomposerons comme précédemment en p' et $(p - p')$], et enfin p'' sur les bases.

1° *Effet des pressions latérales p' .* — Découpons un élément de volume compris entre deux plans passant par l'axe et faisant entre eux un angle α et par deux plans perpendiculaires à l'axe et distants de l'unité de longueur.

Ces pressions p' s'exerçant sur deux surfaces différentes, l'équilibre de l'élément exige une pression superficielle (F par unité de longueur) telle que

$$p'(R + e)\alpha - p'R\alpha = 2F \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{ou} \quad F = p'e,$$

Fig. 37.



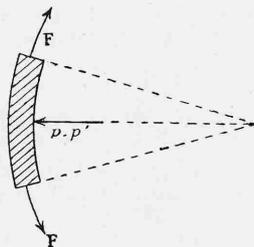
et, par unité de surface,

$$\left(\frac{F}{e}\right) = p'.$$

L'élément de volume est donc soumis à des pressions p' dans deux directions, et l'on a

$$(3) \quad \begin{cases} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = 2bp' & = 2\alpha\sigma p', \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = -(a-b)p' = -\alpha(1-\sigma)p', \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -(a-b)p' = -\alpha(1-\sigma)p'. \end{cases}$$

Fig. 38.



2° *Effet de la pression interne* ($p - p'$). — L'équilibre de l'élément de volume exige une tension superficielle telle que $(p - p') = \frac{F}{R}$; la traction $\left(\frac{F}{e}\right) = \frac{R}{e}(p - p')$ par unité de sur-

face, qui s'exerce dans une seule direction produit les déformations :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = -b \frac{R}{e} (p-p') = -a\sigma \frac{R}{e} (p-p'), \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = a \frac{R}{e} (p-p') = a \frac{R}{e} (p-p'), \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -b \frac{R}{e} (p-p') = -a\sigma \frac{R}{e} (p-p'). \end{array} \right.$$

3° *Effet de la pression p'' sur les bases.* — Elle donne évidemment :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = -ap'' = -ap'', \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = +bp'' = a\sigma p'', \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = +bp'' = a\sigma p''. \end{array} \right.$$

Résumé. — En superposant les résultats (3), (4), (5), on a finalement pour la *déformation du vase cylindrique mince* :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = a \left[2\sigma p' - \sigma \frac{R}{e} (p-p') - p'' \right], \\ \left(\frac{\Delta R}{R}\right) = -a \left[(1-\sigma) p' - \frac{R}{e} (p-p') - \sigma p'' \right], \\ \left(\frac{\Delta e}{e}\right) = -a \left[(1-\sigma) p' + \sigma \frac{R}{e} (p-p') - \sigma p'' \right]; \end{array} \right.$$

et, si l'on veut la *variation de la capacité interne* (ΔV_1), on a :

$$V_1 = \pi R^2 l, \quad \left(\frac{\Delta V_1}{V_1}\right) = 2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta l}{l}\right);$$

d'où :

$$\left(\frac{\Delta V_1}{V_1}\right) = -a \left[2(1-2\sigma) p' - (2-\sigma) \frac{R}{e} (p-p') + (1-2\sigma) p'' \right];$$

et pour la *variation du volume de la matière solide* :

$$V = 2\pi R e l, \quad \left(\frac{\Delta V}{V}\right) = \left(\frac{\Delta R}{R}\right) + \left(\frac{\Delta e}{e}\right) + \left(\frac{\Delta l}{l}\right),$$

d'où :

$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = -a(1-2\sigma) \left[2p' - \frac{R}{e} (p-p') + p'' \right].$$

Toutes les formules que nous venons d'obtenir, (I), (II), sont en parfait accord avec celles que l'on obtient en appliquant les résultats de la théorie générale de l'élasticité et en regardant ϵ comme négligeable par rapport à R, ce qui est le cas usuel.

BIBLIOGRAPHIE.

THÉORIE.

MOUTIER. — *Sur le volume des corps électrisés* (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 7^e série, t. III; p. 88; 1878-79).

Sur la dilatation électrique (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 7^e série, t. IV; p. 182; 1879-80).

KORTEWEG. — *Note à propos du phénomène observé par M. Duter* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII; p. 338; 1879).

Ueber die Veränderung der Form und des Volumens dielectricischer Körper unter Einwirkung electricischer Kräfte (*Wied. Ann.*, Band. IX, p. 48; 1880).

BOLTZMANN. — *Wien. Ber.*, t. LXXXII, p. 826 et 1157; 1880; *Wien. Anz.*, t. XXIII, p. 211; 1880.

LORBERG. — *Ueber Elektrostriction* (*Wied. Ann.*, t. XXI, p. 300; 1884).

KIRCHOFF. — *Ueber die Formänderung die ein fester elastischer Körper erfährt wenn er magnetisch oder dielectrisch polarisirt wird* (*Wied. Ann.*, t. XXIV, p. 52; 1885). (*Sitzungsberichte der Berl. Akad. d. Wiss.*, t. I, p. 137; 1884.) (*G. Kirschhoff's Abhandlungen Nachtrag.*, p. 91). (*Analysé au Journal de Physique*, 2^e série, t. V; 1886.)

VASCHY. — *Sur la nature des actions électriques dans un milieu isolant* (*Comptes rendus*, t. CIII, p. 1186; 1886; t. CIV, p. 51; 1887).

Traité d'Électricité et de Magnétisme, t. I, p. 106, 107, 119; 1890).

Théorie de l'Électricité, p. 71.

DUHEM. — *Le potentiel thermodynamique* (éditions 1886 et 1895, p. 210-220.)

Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme, t. II. Liv. XII; p. 405-447.

CURIE. — *Sur les déformations électriques des diélectriques*, (*Lumière électrique*, t. XXX, p. 423; 1888.)

POCKELS. — *Ueber die durch dielectrische und magnetische Polarisation hervorgerufenen Volum- und Formänderungen.* (*Grüner's Archiv.*, 2^e série, t. XII, p. 57-95; 1893. — Analysé aux *Beiblätter*, t. XVII, p. 766; 1893.)

LIPPMANN. — *Principe de la conservation de l'électricité* (*Annales de Physique et de Chimie*, 5^e série, t. XXIV, p. 159; 1881).

H. POINCARÉ. — *Sur l'équilibre des diélectriques dans un champ électrique* (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 555; 1891).

EXPÉRIENCES.

FONTANA. — *Lettere inedite di Alessandro Volta.* Pesaro, 1834 (*Lettera di Alessandro Volta diretta al prof. Landriani*, il 27 gennaio 1776).

VOLPICELLI. — *Archives des Sciences physiques et naturelles*, nouvelle série, t. XXXII, p. 318; 1862.

GOVI. — *Sur un nouveau phénomène d'électricité statique* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 829, 857; 1878. — *Il nuovo Cimento*, t. XXI-XXII; 1865-66. — *Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino.* Torino, vol. I, p. 206-217-230).

DUTER. — *Sur un phénomène nouveau d'électricité statique* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII, p. 828, 960, 1036; 1878; t. LXXXVIII, p. 1260; 1879. — *Journal de Physique*, 1^{re} série, t. VIII, p. 82; 1879).

RIGHI. — *Sulla dilatazione dei coibenti armati per effetto della carica.* Bologna, 1879 (*Mém. di Bologna*, t. X, p. 407; 1879). — Extrait : *Sur la dilatation du verre des condensateurs pendant la charge* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 1262; 1879). — Analyse : *Journal de Physique*, 1^{re} série, t. IX, p. 204).

BOUTY. — *Cours de Physique*, 4^e édition, t. IV, 1^{re} Partie, p. 239.

QUINCKE. — *Ueber electrische Ausdehnung* (*Wied. Ann.* folge II, t. X, p. 161-202, 374-414, 513-520, 1880; t. XIX, p. 545-588; 1883. — *Philosophical Magazine*, 5^e série, t. X, p. 30-39; 1880 : *On electrical expansion.* — *Berichte der Königl. Akademie des Wissenschaften Berlin*, 19 février 1880, 5 avril 1883).

RÖNTGEN. — *Wied. Ann.*, t. XI, p. 771-786; 1880.

KORTEWEG et JULIUS. — *Wied. Ann.*, t. XII, p. 647-654; 1881.

MICHELE CANTONE. — *Ricerche intorno alle deformazioni*

de condensatori (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 4^e série, vol. IV, p. 344-353, 471-477; 1888).

WIEDEMANN. — *Die Lehre von Elektrizität*, t. II, p. 104 à 125.

DESSAU. — *Sul compartamento di un coibente sottoposto ad una trazione meccanica* (*Atti della Reale Accademia dei Lincei*, 5^e série, vol. III, p. 488-494; 1894).

O.-M. CORBINO. — *Sulla variazione della costante dielettrica per la trazione del coibente* (*Rivista scientifica e industriale*, année XXIX, n^{os} 8-9, p. 242-253; septembre 1897). — *Variatione della costante dielettrica del vetro per la trazione* (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. VIII, 2^e sem., 5 novembre 1899).

ERCOLINI. — *Variatione della costante dielettrica del vetro per la trazione meccanica* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5^e série, vol. VII, p. 172-177, 183-189; 1898). — *Il nuovo Cimento*, 4^e série, t. VIII; novembre 1898).

UGO PANICHI. — *Sulle variazioni del potere induttore specifico nei coibenti armati* (*Il nuovo Cimento*, 4^e série, t. VIII, p. 89-96; août 1898).

O.-M. CORBINO et F. CANNIZZO. — *Sulla variazione della costante dielettrica del caoutchouc per la trazione* (*Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 5^e série, t. VII; 1898). — *Il nuovo Cimento*, 4^e série, t. VIII; novembre 1898).

Vu et approuvé :

Paris, le 16 novembre 1899.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 16 novembre 1899.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Sur les principes de la théorie mathématique de l'élasticité.

Vu et approuvé :

Paris, le 16 novembre 1899.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 16 novembre 1899.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE THÈSE.

DÉFORMATIONS ÉLECTRIQUES DES DIÉLECTRIQUES SOLIDES ISOTROPES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	1
Étude préliminaire sur les coefficients (k_1, k_2, k).....	2

PREMIÈRE PARTIE. — *Théorie.*

Étude du cas général.....	8
Cas du condensateur sphérique infiniment mince.....	12
» sphérique d'épaisseur quelconque.....	14
» cylindrique infiniment mince.....	18
» cylindrique d'épaisseur quelconque.....	22
» plan.....	26
Tableau résumé des formules obtenues.....	28
Énoncés des lois.....	30
Complément : cas où les armatures sont indépendantes du diélectrique.....	33

DEUXIÈME PARTIE. — *Causes des déformations électriques.*

Déformations correspondantes aux formules, abstraction faite de (k_1, k_2, k).....	40
Déformations correspondantes aux termes en (k_1, k_2, k).....	47

TROISIÈME PARTIE. — *Revue et discussion des théories précédemment faites.*

Première catégorie : Théories basées sur l'étude des pressions au sein des diélectriques solides polarisés (Korteweg, Lorberg, Kirchhoff, Duhem)..	51
Deuxième catégorie : Essais de théorie thermodynamique (Vaschy, Duhem).....	55

QUATRIÈME PARTIE. — *Revue et discussion des travaux expérimentaux.*

Préliminaires.....	58
Expérience de M. Duter.....	61
» Righi.....	65
» Quincke.....	67
» Korteweg et Julius.....	76
» Cantone.....	78

CINQUIÈME PARTIE. — *Calcul du coefficient k_1 au moyen des résultats des expériences sur les déformations électriques des diélectriques.*

Calcul de k_1	81
Expériences récentes sur les variations de capacité électrique des condensateurs soumis à une traction (Dessau, Corbino, Ercolini). ..	86
RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.....	90

Notes.

A. Sur la théorie de Maxwell.....	93
B. Sur la contraction électrique des gaz.....	98
C. Sur les déformations élastiques des vases minces.....	100
BIBLIOGRAPHIE.....	105

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.....	109
TABLE DES MATIÈRES.....	111

