N° D'ORDRE
414.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

LE DOCTORAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. Ch. BIEHLER,
Directeur des Études à l'École préparatoire du Collége Stanislas.

THÈSE D'ALGÈBRE. — Sur la théorie des équations.
THÈSE D'ANALYSE.

Soutenues le 8 Avril 1879, devant la Commission d'Examen.

MM. HERMITE, *Président*.
BOUQUET, DARBOUX, *Examinateurs*.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1879

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

5030 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55.

A MON MAITRE

M. CHARLES HERMITE

Membre de l'Institut, Professeur à la Sorbonne.

HOMMAGE

DE RECONNAISSANCE ET DE RESPECTUEUSE AFFECTION.

CHARLES BIEHLER.

THÈSE D'ALGÈBRE.

INTRODUCTION.

Ce travail a pour objet de présenter sous une forme simple quelques résultats importants relatifs à la théorie des équations. Il comprend la résolution et la discussion des équations linéaires, le problème général de l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques données, c'est-à-dire la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations algébriques données aient un nombre quelconque de racines communes, et la formation de l'équation qui admet pour racines le groupe des racines communes.

Cette première étude met en évidence une série de polynômes qui jouissent des propriétés des fonctions de Sturm, dont ils ne diffèrent d'ailleurs que par un facteur positif.

L'identité algébrique dont les polynômes en question forment l'un des membres fournit l'expression des fonctions de Sturm sous forme de déterminants, et elle donne aussi un coefficient quelconque de ces fonctions sous la même forme.

Il en résulte une méthode pour trouver le nombre des racines réelles d'une équation, comprises entre deux limites données x_0, x_1.

Dans cette méthode, on peut introduire les limites x_0 et x_1 dans l'expression de la fonction de Sturm dont on veut calculer le signe, et profiter de toutes les simplifications qui se présenteront dans le courant du calcul, qui porte alors, non plus sur des polynômes comme dans la méthode directe de Sturm, mais sur des quantités numériques.

J'obtiens ensuite, comme conséquence, les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation donnée, et, en rapprochant ces résultats de ceux que fournit la méthode de M. Hermite, je montre leur identité.

M. Sylvester a donné également les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation, dans ses travaux sur le théorème de Sturm, et M. Borchardt a mis ces conditions sous une forme extrêmement élégante. On sait que dans les expressions de M. Borchardt ne figurent que les sommes des puissances semblables des racines de l'équation proposée, de la puissance 1 à la puissance $2m-2$, m étant le degré de l'équation; elles ne peuvent donc pas être évaluées directement en fonction des coefficients. J'obtiens ces expressions sous une forme très-simple, le déterminant qui les représente étant d'un ordre inférieur d'une unité à l'ordre des déterminants de M. Borchardt.

Je passe ensuite à une autre application de la formule fondamentale dont j'ai tiré les résultats précédents; cette formule fournit l'expression des deux fonctions entières qui forment les premiers membres de deux équations jouissant de la propriété de séparer les racines de l'équation proposée. C'est M. Maleyx qui, le premier, a indiqué cette propriété dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIII, 1872); j'établis, à l'égard de ces deux équations, qu'elles ne jouent pas complètement le rôle de la dérivée dans la séparation des racines.

Je généralise, en terminant, la formule qui a servi de point de départ à ces diverses applications, et j'établis les conditions que doivent remplir les coefficients d'un nombre quelconque d'équations à une seule inconnue pour que ces équations admettent un nombre déterminé de racines communes, et je forme l'équation qui donne le groupe des racines communes.

M. Rouché a traité complètement la question de la discussion des équations linéaires, et il serait difficile de le faire avec plus d'élégance et de simplicité. J'ai commencé ce travail par la résolution et la discussion des équations linéaires, non pas que je croie à l'avantage de ma méthode sur celle de M. Rouché, mais parce que la propriété élémentaire des déterminants, qui en est la base, est celle dont je fais usage pour établir tout ce qui suit.

M. Rouché a également publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XV, mars 1877) un article dans lequel il trouve les conditions pour que deux équations algébriques données aient un nombre quelconque de racines communes.

M. Ventéjol a donné, en février 1877, une théorie de l'élimination, dans laquelle il arrive également à établir les conditions pour que deux équations données aient un nombre quelconque de racines communes.

Je regrette de n'avoir pas eu connaissance de ces publications assez tôt; elles eussent beaucoup simplifié mon propre travail. Enfin, M. Lemonnier vient de publier, dans le numéro de mars 1878 des *Annales de l'École Normale*, un Mémoire remarquable sur le même sujet. Il montre la liaison qui existe entre les méthodes dites d'Euler, de Sylvester, de Bezout, de Cauchy, de Cayley, et il arrive également à la détermination des conditions pour que deux équations à une inconnue aient un nombre quelconque de racines communes.

Mon but n'a pas été le même; je ne fais usage que du déterminant de Bezout-Cauchy, qui est de l'ordre le moins élevé et qui a l'avantage d'être symétrique. Je passe sous silence plusieurs points intéressants de la théorie de l'élimination, pour arriver au théorème de Sturm et aux conséquences qu'on peut tirer de la formule que j'ai appelée *fondamentale*. Je suis donc loin de présenter un Traité complet sur l'élimination. M. Lemonnier promet une deuxième Partie, devant faire suite à son Mémoire; il annonce qu'il a trouvé l'expression générale des fonctions de Sturm; mais cette deuxième Partie n'est pas publiée.

Tels sont les auteurs qui, dans ces derniers temps, se sont occupés du problème général de l'élimination d'une inconnue entre deux équations. La méthode dont j'ai fait usage m'a permis d'arriver d'une manière plus simple aux mêmes résultats; elle m'a donné, en outre, la solution de cette question : *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre quelconque d'équations aient un nombre quelconque de racines communes.*

BIEHLER.

Paris, le 17 avril 1878.

SUR LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

RÉSOLUTION ET DISCUSSION D'UN SYSTÈME DE n ÉQUATIONS LINÉAIRES A n INCONNUES.

1. Soient

$$
\begin{aligned}
X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,\nu}x_\nu + \ldots + a_{1,n} + K_1 = 0,\\
X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,\nu}x_\nu + \ldots + a_{2,n} + K_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
X_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,\nu}x_\nu + \ldots + a_{n,n} + K_n = 0
\end{aligned}
$$

les n équations linéaires entre les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Appelons Δ le déterminant des n^2 coefficients des inconnues :

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu} & \ldots & a_{1,n}\\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu} & \ldots & a_{2,n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu} & \ldots & a_{n,n}
\end{vmatrix},
$$

et supposons $\Delta \gtrless 0$.

Multiplions les éléments de la première colonne de Δ par x_1, ceux de la deuxième par x_2, ceux de la troisième par x_3, ..., ceux de la dernière par x_n ; ajoutons par rangées horizontales les éléments ainsi modifiés, et substituons aux éléments de la colonne d'ordre ν, dans Δ, les sommes ainsi obtenues; le déterminant Δ sera multiplié par x_ν, et l'on aura

$$
\Delta x_\nu = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,\nu-1} & X_1 - K_1 & a_{1,\nu+1} & \ldots & a_{1,n}\\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,\nu-1} & X_2 - K_2 & a_{2,\nu+1} & \ldots & a_{2,n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,\nu-1} & X_n - K_n & a_{n,\nu+1} & \ldots & a_{n,n}
\end{vmatrix}.
$$

Le déterminant qui figure dans le second membre peut être décomposé en deux autres, savoir :

$$\Delta x_\nu = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\nu-1} & X_1 & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\nu-1} & X_2 & a_{2,\nu+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,\nu-1} & X_n & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\nu-1} & K_1 & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\nu-1} & K_2 & a_{2,\nu+1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,\nu-1} & K_n & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\Delta_\nu(X)$ ce que devient Δ quand on y remplace les éléments $a_{1,\nu}$ $a_{2,\nu}$, ..., $a_{n,\nu}$ de la colonne d'ordre ν respectivement par X_1, X_2, ..., X_n, et soit $\Delta_\nu(K)$ ce que devient le même déterminant Δ quand on y remplace les éléments de la même colonne par les quantités K_1, K_2, ..., K_n ; l'égalité précédente prendra la forme

$$\Delta x_\nu + \Delta_\nu(K) = \Delta_\nu(X).$$

En faisant successivement $\nu = 1$, $\nu = 2$, ..., $\nu = n$ dans la formule précédente, on obtiendra la série des identités

$$\Delta x_1 + \Delta_1(K) = \Delta_1(X), \quad \Delta x_2 + \Delta_2(K) = \Delta_2(X), \quad \dots, \quad \Delta x_n + \Delta_n(K) = \Delta_n(X).$$

Les quantités $\Delta_\nu(X)$ sont des fonctions linéaires et homogènes de X_1, X_2, ..., X_n ; par suite, toute solution du système

$$(1) \qquad X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots, \quad X_n = 0$$

annule les déterminants $\Delta_\nu(X)$ et, par suite, satisfait au système

$$(2) \qquad \Delta x_1 + \Delta_1(K) = 0, \quad \Delta x_2 + \Delta_2(K) = 0, \quad \dots, \quad \Delta x_n + \Delta_n(K) = 0.$$

Inversement, dans l'hypothèse admise de $\Delta \gtrless 0$, la solution du système (2) satisfait au système (1).

Car, si l'on multiplie la première équation du système (2) par $a_{\mu,1}$, la deuxième par $a_{\mu,2}$, ..., la dernière par $a_{\mu,n}$, en ajoutant membre à membre les équations obtenues, il viendra

$$\Delta(a_{\mu,1} x_1 + a_{\mu,2} x_2 + \dots + a_{\mu,n} x_n) + a_{\mu,1} \Delta_1(K) + a_{\mu,2} \Delta_2(K) + \dots + a_{\mu,n} \Delta_n(K) = 0,$$

ou bien

$$\Delta(X_\mu - K_\mu) + a_{\mu,1} \Delta_1(K) + a_{\mu,2} \Delta_2(K) + \dots + a_{\mu,n} \Delta_n(K) = 0 ;$$

mais

$$a_{\mu,1} \Delta_1(K) + a_{\mu 2} \Delta_2(K) + \dots + a_{\mu,n} \Delta_n(K) - K_\mu \Delta$$

est, au signe près, le déterminant d'ordre $(n+1)$

$$\begin{vmatrix} a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \dots & a_{\mu,n} & K_\mu \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mu,1} & a_{\mu,2} & \dots & a_{\mu,n} & K_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & K_n \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, comme ayant deux rangées identiques; l'équation précédente devient donc

$$\Delta X_\mu = 0,$$

et, comme $\Delta \lesseqgtr 0$, on a $X_\mu = 0$ pour toutes les valeurs de μ depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = n$.

On voit donc que, si $\Delta \lesseqgtr 0$, les systèmes (1) et (2) sont équivalents, et le système (2) donne pour les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ des valeurs uniques et déterminées.

Discussion.

2. Considérons actuellement le cas où le déterminant Δ est égal à zéro, et supposons en outre que tous les déterminants mineurs d'ordre supérieur à p $(p < n)$ soient nuls.

L'un des déterminants mineurs d'ordre p est supposé différent de zéro; supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}.$$

Alors le système des équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_p = 0$ sera satisfait pour des valeurs uniques et déterminées de $x_1, x_2, \dots, x_p$, quand on aura attribué aux inconnues $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ des valeurs arbitraires, mais déterminées.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & a_{1,p+\beta} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & a_{2,p+\beta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & a_{p,p+\beta} \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & a_{p+\alpha,p+\beta} \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant d'ordre $p+1$, qui, par hypothèse, est nul.

Multiplions les éléments de la première colonne de ce déterminant par x_1, ceux de la deuxième par x_2, ..., ceux de la $p^{\text{ième}}$ par x_p, ceux de la dernière par 1; ajoutons par rangées horizontales les éléments ainsi modifiés, et substituons aux éléments de la dernière colonne les sommes ainsi obtenues, le déterminant ne changera pas, et l'on aura

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & (X_1 - a_{1,p+1}\,x_{p+1} - a_{1,p+2}\,x_{p+2} - \dots - a_{1,n}\,x_n + a_{1,p+\beta} - K_1) \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & (X_2 - a_{2,p+1}\,x_{p+1} - a_{2,p+2}\,x_{p+2} - \dots - a_{2,n}\,x_n + a_{2,p+\beta} - K_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & (X_p - a_{p,p+1}\,x_{p+1} - a_{p,p+2}\,x_{p+2} - \dots - a_{p,n}\,x_n + a_{p,p+\beta} - K_p) \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & (X_{p+\alpha} - a_{p+\alpha,p+1}\,x_{p+1} - a_{p+\alpha,p+2}\,x_{p+2} - \dots - a_{p+\alpha,n}\,x_n + a_{p+\alpha,p+\beta} - K_{p+\alpha}) \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients de x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n sont des déterminants mineurs d'ordre $p+1$, qui, par hypothèse, sont tous nuls; par suite, l'équation se réduira à la forme simple

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on considère un système de valeurs de x_1, x_2, ..., x_p, ..., x_n qui annulent $X_1, X_2, \dots, X_p$ (ce système est formé, comme nous l'avons vu, par des valeurs arbitraires de x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n et par des valeurs correspondantes déterminées de x_1, x_2, ..., x_p), pour ces valeurs, l'équation précédente se réduira à

$$X_{p+\alpha} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \dots & \dots & \cdot\ \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

et, comme le multiplicateur de $X_{p+\alpha}$ est, par hypothèse, différent de zéro, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ ne pourra être satisfaite pour les valeurs des inconnues qui annulent X_1, X_2, ..., X_p que si le déterminant

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} & K_1 \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \dots & a_{2,p} & K_2 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \dots & \dots & \cdot\ \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} & K_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \dots & a_{p+\alpha,p} & K_{p+\alpha} \end{vmatrix}$$

est nul. Si ce déterminant n'est pas nul, l'équation $X_{p+\alpha} = 0$ est incompatible avec les p premières équations; il y aura donc, dans le système proposé, autant d'équations incompatibles avec $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_p = 0$, qu'il y aura de déterminants (α) différents de zéro.

Cas où le système proposé est homogène.

3. Ce qui précède montre que, dans le cas où $\Delta \gtrless 0$, un système linéaire et homogène ne peut être satisfait que pour des valeurs nulles des inconnues.

Si $\Delta = 0$ et si en outre tous les déterminants mineurs d'ordre $p+1$ sont nuls, sans que tous les déterminants d'ordre p soient nuls, la discussion précédente montre que, si

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$ sont satisfaites pour des valeurs arbitraires de x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n et des valeurs déterminées correspondantes de x_1, x_2, ..., x_p; les équations $X_{p+\alpha} = 0$ pour toutes les valeurs de α depuis $\alpha = 1$ jusqu'à $\alpha = n - p$ seront satisfaites pour les mêmes valeurs des inconnues. Ces $n - p$ équations sont donc des conséquences des p premières. Il n'y a jamais incompatibilité, puisque les déterminants tels que (α) sont identiquement nuls.

Le degré d'indétermination est marqué par le nombre des déterminants mineurs de Δ d'ordres différents qui se sont tous annulés.

Les quantités $X_{p+\alpha}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de X_1, X_2, ..., X_p, car on aura d'une manière générale

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} & X_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} & X_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} & X_p \\ a_{p+\alpha,1} & a_{p+\alpha,2} & \ldots & a_{p+\alpha,p} & X_{p+\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

THÉORIE DE L'ÉLIMINATION.

Conditions pour que deux équations aient une racine commune.

4. Considérons d'abord le cas de deux équations du même degré

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$
$$\varphi(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m = 0,$$

et cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune.

Formons pour cela les équations de Cauchy, dont la forme générale est

$$\frac{A_0 x^{\mu-1} + A_1 x^{\mu-2} + \ldots + A_{\mu-1}}{B_0 x^{\mu-1} + B_1 x^{\mu-2} + \ldots + B_{\mu-1}} = \frac{A_\mu x^{m-\mu} + A_{\mu+1} x^{m-\mu+1} + \ldots + A_m}{B_\mu x^{m-\mu} + B_{\mu+1} x^{m-\mu+1} + \ldots + B_m}.$$

Désignons par $G_{\mu\nu}$ le coefficient de $x^{m-\nu}$ dans cette équation mise sous forme entière; elle pourra s'écrire

$$G_{\mu,1} x^{m-1} + G_{\mu,2} x^{m-2} + \ldots + G_{\mu,\nu} x^{m-\nu} + \ldots + G_{\mu,m-1} x + G_{\mu,m} = 0.$$

Appelons f_μ et φ_μ les polynômes de degré μ

$$f_\mu = A_0\, x^\mu + A_1\, x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu,$$
$$\varphi_\mu = B_0\, x^\mu + B_1\, x^{\mu-1} + \ldots + B_\mu\,;$$

on sait que l'équation précédente peut aussi se mettre sous la forme

$$G_{\mu,1}\, x^{m-1} + G_{\mu,2}\, x^{m-2} + \ldots + G_{\mu,m} = f_{\mu-1}(x) - \varphi_{\mu-1} f(x) = 0.$$

Cela posé, considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} & \ldots & G_{1,m-1} & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} & \ldots & G_{2,m-1} & G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & G_{m,3} & \ldots & G_{m,m-1} & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première colonne de Δ par x^{m-1}, ceux de la seconde par x^{m-2}, ..., ceux de l'avant-dernière par x et ceux de la dernière par 1 ; faisons la somme des produits par rangées et substituons aux éléments de la dernière colonne de Δ les sommes trouvées; le déterminant Δ ne changera pas, et l'on aura identiquement

$$\Delta = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-1} & f_0\,\varphi(x) - \varphi_0\, f(x) \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-1} & f_1\,\varphi(x) - \varphi_1\, f(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{\mu,1} & G_{\mu,2} & \ldots & G_{\mu,m-1} & f_{\mu-1}\,\varphi(x) - \varphi_{\mu-1}\, f(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & f_{m-1}\,\varphi(x) - \varphi_{m-1}\, f(x) \end{vmatrix},$$

ou bien, en séparant,

$$\Delta = \varphi(x) \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-1} & f_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-1} & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & f_{m-1} \end{vmatrix} - f(x) \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-1} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-1} & \varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \ldots & G_{m,m-1} & \varphi_{m-1} \end{vmatrix}.$$

Les polynômes que multiplient respectivement $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont de degré $m-1$. Soit, pour abréger, U_{m-1} le premier et V_{m-1} le second, l'identité précédente deviendra

$$\Delta = U_{m-1}\, \varphi(x) - V_{m-1} f(x).$$

Cela posé, si $\varphi(x) = 0$ et $f(x) = 0$ admettent une racine commune, et que l'on mette à la place de x, dans le second membre de l'égalité précédente, cette racine commune, le second membre s'évanouira, et, comme cette équation est une identité, Δ devra être nul.

Réciproquement, si $\Delta = 0$, on a identiquement

$$U_{m-1}\,\varphi(x) - V_{m-1} f(x) = 0;$$

comme $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont de degré m, U_{m-1} et V_{m-1} de degré $m-1$, il y aura au moins un facteur de la forme $x - a$, commun à $f(x)$ et à $\varphi(x)$, et, par suite, les deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ auront au moins une racine commune. On voit donc que $\Delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations proposées aient une racine commune.

Calcul de la racine commune.

5. Supposons que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ n'admettent qu'une seule racine commune, et proposons-nous de la calculer.

Désignons généralement par $\Delta(p, q)$ le déterminant mineur obtenu en supprimant dans Δ la rangée d'ordre p et la colonne d'ordre q, et considérons le déterminant

$$\Delta(m, m) = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-1} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-1} \end{vmatrix},$$

obtenu en supprimant dans Δ la dernière rangée et la dernière colonne; multiplions les éléments de la première colonne par x^{m-1}, ceux de la deuxième par x^{m-2}, ceux de la dernière par x, et remplaçons les éléments de la dernière colonne de $\Delta(m, m)$ par les sommes obtenues, en ajoutant par rangées les produits précédents; ces sommes ne seront autre chose que les premiers membres des équations de Cauchy, diminués de leurs derniers termes, c'est-à-dire

$$f_0\,\varphi(x) - \varphi_0 f(x) - G_{1,m}, \quad f_1\,\varphi(x) - \varphi_1 f(x) - G_{2,m}, \quad \dots;$$

le déterminant $\Delta(m, m)$, par suite de cette opération, sera multiplié par x, et l'on aura la nouvelle identité

$$x\,\Delta(m, m) = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & f_0 & \varphi(x) - \varphi_0 & f(x) - G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & f_1 & \varphi(x) - \varphi_1 & f(x) - G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & f_{m-2} & \varphi(x) - \varphi_{m-2} & f(x) - G_{m-1,m} \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette identité peut se mettre sous la forme d'une somme de trois déterminants, savoir

$$x\,\Delta(m, m) = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & f_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & f_{m-2} \end{vmatrix} \varphi(x)$$

$$- \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & \varphi_{m-2} \end{vmatrix} f(x)$$

$$- \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & G_{m-1,m} \end{vmatrix},$$

ou bien, d'après la notation adoptée,

$$x\,\Delta(m, m) + \Delta(m, m-1)$$

$$= \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & f_0 \\ G_{2,2} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & f_{m-2} \end{vmatrix} \varphi(x) - \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{2,m-2} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & \varphi_{m-2} \end{vmatrix} f(x).$$

Si donc $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ admettent une racine commune, la fonction $x\,\Delta(m, m) + \Delta(m, m-1)$ devra s'annuler quand on substituera à x cette racine commune dans l'identité précédente.

La racine commune sera donc donnée par l'équation du premier degré

$$x\,\Delta(m, m) + \Delta(m, m-1) = 0.$$

Il convient de faire ici une remarque importante.

L'expression précédente de la racine commune n'est pas la seule qu'on peut obtenir; si, au lieu d'opérer sur le déterminant $\Delta(m, m)$, comme nous venons de le faire, nous avions considéré le déterminant $\Delta(\mu, m)$, en répétant sur ce déterminant les mêmes opérations que sur le premier, nous serions arrivés à l'équation

$$x\Delta(\mu, m) + \Delta(\mu, m-1)$$
$$= \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & f_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \\ G_{\mu-1,1} & G_{\mu-1,2} & \dots & G_{\mu-1,m-2} & f_{\mu-2} \\ G_{\mu+1,1} & G_{\mu+1,2} & \dots & G_{\mu+1,m-2} & f_{\mu} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-2} & f_{m-1} \end{vmatrix} \varphi(x) - \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \\ G_{\mu-1,1} & G_{\mu-1,2} & \dots & G_{\mu-1,m-2} & \varphi_{\mu-2} \\ G_{\mu+1,1} & G_{\mu+1,2} & \dots & G_{\mu+1,m-2} & \varphi_{\mu} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,m-2} & \varphi_{m-1} \end{vmatrix} f(x);$$

on voit que la racine commune à $\varphi(x) = 0$ et à $f(x) = 0$ doit annuler $x\Delta(\mu, m) + \Delta(\mu, m-1)$; et cela doit avoir lieu quelle que soit la valeur de μ, depuis $\mu = 1$ jusqu'à $\mu = m$.

Les équations

$$\begin{aligned} x\Delta(1, m) + \Delta(1, m-1) &= 0, \\ x\Delta(2, m) + \Delta(2, m-1) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots, \\ x\Delta(m, m) + \Delta(m, m-1) &= 0, \end{aligned}$$

au nombre de m, admettent donc la même racine.

Calcul des puissances de la racine commune depuis la puissance 1 jusqu'à la puissance $m-1$.

6. On peut calculer de la même manière une puissance quelconque $x^{m-\nu}$ de la racine commune, ν étant moindre que m. Considérons, à cet

effet, le déterminant

$$\Delta(\mu,\nu)=\begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,\nu-1} & G_{1,\nu+1} & \dots & G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,\nu-1} & G_{2,\nu+1} & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ G_{\mu-1,1} & G_{\mu-1,2} & \dots & G_{\mu-1,\nu-1} & G_{\mu-1,\nu+1} & \dots & G_{\mu-1,m} \\ G_{\mu+1,1} & G_{\mu+1,2} & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & G_{\mu+1,m} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ G_{m,1} & G_{m,2} & \dots & G_{m,\nu-1} & G_{m,\nu+1} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première colonne par x^{m-1}, ceux de la deuxième par x^{m-2}, ..., ceux de la colonne d'ordre $\nu-1$ par $x^{m-\nu+1}$, ceux de la colonne d'ordre $\nu+1$ par $x^{m-\nu-1}$, ..., ceux de la dernière colonne par 1, et ajoutons par rangées les éléments modifiés; nous reformerons les premiers membres des équations de Cauchy, moins les termes $G_{1,\nu}x^{m-\nu}$, $G_{2,\nu}x^{m-\nu}$, ..., $G_{m,\nu}x^{m-\nu}$; remplaçant dans $\Delta(\mu,\nu)$ les éléments de la dernière colonne par les sommes obtenues, et simplifiant comme précédemment, on arrivera à l'équation

$$\Delta(\mu,\nu)+(-1)^{m-\nu-1}\Delta(\mu,m)x^{m-\nu}=U_{m-1}^{(\mu)}\varphi(x)-V_{m-1}^{(\mu)}f(x);$$

dans cette équation, $U_{m-1}^{(\mu)}$ et $V_{m-1}^{(\mu)}$ sont des polynômes de degré $m-1$ en x, dont il est aisé de voir la loi de formation.

Si $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$ ont une racine commune, on voit que l'équation

$$\Delta(\mu,\nu)+(-1)^{m-\nu-1}\Delta(\mu,m)x^{m-\nu}=0$$

donne la puissance $m-\nu$ de la racine commune.

Cette formule nous donne m expressions de la puissance $m-\nu$ de la racine commune; il suffit d'y faire $\mu=1, 2, \dots, m$ pour les obtenir.

Une fonction rationnelle quelconque d'une racine d'une équation $f(x)=0$ étant une fonction entière de degré $(m-1)$ de cette racine, on voit que cette fonction se réduit à une fonction linéaire des quantités $\Delta(\mu,m)$, $\Delta(\mu,m-1)$, $\Delta(\mu,m-2)$, ..., $\Delta(\mu,1)$.

Dans le cas de $\mu=m$, les fonctions $U_{m-1}^{(\mu)}$ et $V_{m-1}^{(\mu)}$ ne sont plus que de degré $m-2$. Nous allons tirer des formules obtenues cette conséquence importante :

Si $\Delta=0$ et si le déterminant mineur de Δ obtenu en supprimant *dans Δ la dernière rangée et la dernière colonne, c'est-à-dire $\Delta(m, m)$ est aussi nul, tous les déterminants mineurs d'ordre $m-1$ de Δ sont nuls.*

En effet, l'équation

$$x\Delta(m, m) + \Delta(m, m-1)$$
$$= \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & f_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & f_{m-2} \end{vmatrix} \varphi(x) - \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-2} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-2} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots & \\ G_{m-1,1} & G_{m-1,2} & \dots & G_{m-1,m-2} & \varphi_{m-2} \end{vmatrix} f(x),$$

obtenue précédemment, nous montre que, si $\Delta(m, m) = 0$ et $\Delta = 0$, il faut que l'on ait aussi $\Delta(m, m-1) = 0$; car, si $\Delta(m, m) = 0$, le premier membre de l'identité précédente se réduit à $\Delta(m, m-1)$, et, comme les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune, d'après l'hypothèse $\Delta = 0$, le second membre de l'identité précédente s'évanouira quand on mettra à la place de x cette racine commune; il faut donc que $\Delta(m, m-1)$ soit aussi nul. Dans ce cas, il existe deux polynômes de degré $m-2$ qui, multipliés respectivement par $\varphi(x)$ et $f(x)$, donnent une somme identiquement nulle; c'est, d'après le théorème connu d'Euler, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient deux racines communes.

Or l'équation

$$\Delta(\mu, \nu) + (-1)^{m-\nu-1}\Delta(\mu, m)x^{m-\nu} = U^{(\mu)}_{m-1}\varphi(x) - V^{(\mu)}_{m-1}f(x)$$

donne, dans le premier membre, un polynôme du premier degré en x pour $\nu = m-1$; ce polynôme doit s'annuler lorsqu'on y remplace x par les deux racines communes; par suite, il doit être identiquement nul, et l'on a, quel que soit μ,

$$\Delta(\mu, m) = 0.$$

L'équation précédente nous montre que l'on a aussi, et quels que soient μ et ν,

$$\Delta(\mu, \nu) = 0.$$

On voit donc que, si $\Delta = 0$ et $\Delta(m, m) = 0$, les deux équations proposées ont deux racines communes et tous les déterminants mineurs $\Delta(\mu, \nu)$ d'ordre $m-1$ de Δ sont nuls.

On peut établir également que, si $\Delta(m, m) = 0$ et $\Delta(m, m-1) = 0$, tous les déterminants mineurs d'ordre $m-1$ de Δ sont nuls, et par suite $\Delta = 0$, et les deux équations admettent deux racines communes; car nous avons établi l'identité

$$x\,\Delta(m, m) + \Delta(m, m-1) = U_{m-2}\,\varphi(x) - V_{m-2} f(x),$$

où U_{m-2} et V_{m-2} désignent des polynômes de degré $m-2$.

Si $\Delta(m, m) = 0$ et $\Delta(m, m-1) = 0$, d'après le théorème d'Euler $\varphi(x) = 0$, $f(x) = 0$ ont deux racines communes; par suite, $\Delta = 0$ et $\Delta(\mu, \nu) = 0$.

On peut donc dire que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations proposées aient deux racines communes sont $\Delta = 0$ avec $\Delta(m,m) = 0$, ou bien $\Delta(m,m) = 0$ et $\Delta(m, m-1) = 0$.

Si nous nous reportons à l'équation

$$\Delta = U_{m-1}\,\varphi(x) - V_{m-1} f(x),$$

nous voyons que, dans le cas où les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont deux racines communes, les deux polynômes U_{m-1} et V_{m-1} sont identiquement nuls, car les coefficients de $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ sont des déterminants mineurs d'ordre $m-1$ de Δ, et, d'après ce qui précède, ces déterminants sont nuls.

L'équation du second degré qui donne les deux racines communes peut être formée aisément; nous ne ferons pas ce calcul, et nous aborderons immédiatement le problème général de la recherche des conditions que doivent remplir les coefficients de deux équations de degré m pour qu'elles aient un nombre p quelconque de racines communes; nous formerons l'équation de degré p qui donne les p racines communes; l'équation du second degré dont nous venons de parler n'en est évidemment qu'un cas particulier.

Recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux équations de degré *m* aient un nombre quelconque *p* de racines communes.

7. Considérons à cet effet le déterminant mineur d'ordre $m-p+1$ de Δ

$$\Delta^{(p-1)} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-p} & G_{1,m-p+1} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-p} & G_{2,m-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & \dots & G_{m-p+1,m-p+1} \end{vmatrix};$$

multiplions les éléments de la première colonne de ce déterminant par par x^{m-1}, ceux de la deuxième par x^{m-2}, ..., ceux de la dernière par x^{p-1} ; ajoutons par rangées les éléments modifiés ainsi, et substituons aux éléments de la dernière colonne de $\Delta^{(p-1)}$ les sommes obtenues; nous reformerons les premiers membres des équations de Cauchy, moins les termes en x^{p-2}, x^{p-3}, ..., x^0, et $\Delta^{(p-1)}$ sera multiplié par x^{p-1}; on aura donc identiquement

$$\Delta^{(p-1)} x^{p-1} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-p} & f_0\,\varphi(x) - \varphi_0\,f(x) - G_{1,m-p+2}\,x^{p-2} - \dots - G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-p} & f_1\,\varphi(x) - \varphi_1\,f(x) - G_{2,m-p+2}\,x^{p-2} - \dots - G_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & G_{m-p+1,m-p} & f_{m-p}\,\varphi(x) - \varphi_{m-p}\,f(x) - G_{m-p+1,m-p+2}\,x^{p-2} - \dots - G_{m-p+1,m} \end{vmatrix}.$$

Si nous appelons généralement $\Delta_\mu^{(p-1)}$ le déterminant

$$\Delta_\mu^{(p-1)} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-p} & G_{1,m-p+\mu+1} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-p} & G_{2,m-p+\mu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & \dots & G_{m-p+1,m-p+\mu+1} \end{vmatrix},$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\Delta^{(p-1)} x^{p-1} + \Delta_1^{(p-1)} x^{p-2} + \dots + \Delta_{p-1}^{(p-1)}$$

$$= \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-p} & f_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-p} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & \dots & \dots & G_{m-p+1,m-p} & f_{m-p} \end{vmatrix} \varphi(x) - \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-p} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-p} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & G_{m-p+1,m-p} & \varphi_{m-p} \end{vmatrix} f(x)$$

ou bien

$$\Delta^{(p-1)}x^{p-1} + \Delta_1^{(p-1)}x^{p-2} + \ldots + \Delta_{p-1}^{(p-1)} = \mathrm{U}_{m-p}\,\varphi(x) - \mathrm{V}_{m-p}f(x),$$

U_{m-p} et V_{m-p} étant des polynômes de degré $m - p$ en x.

Cela posé, si $\varphi(x) = 0$ et $f(x) = 0$ ont p racines communes, ces p racines devront annuler le premier membre, qui n'est que de degré $p - 1$; il faudra donc que l'on ait

$$\Delta^{(p-1)} = 0, \quad \Delta_1^{(p-1)} = 0, \quad \Delta_2^{(p-1)} = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{p-1}^{(p-1)} = 0,$$

et réciproquement, si ces conditions sont remplies, le premier membre de l'équation est identiquement nul; on aura donc identiquement

$$\mathrm{U}_{m-p}\,\varphi(x) - \mathrm{V}_{m-p}f(x) = 0,$$

et, d'après le théorème d'Euler, les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ auront au moins p racines communes, ce qui se voit d'ailleurs immédiatement. On peut donc énoncer cette proposition :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ *de degré* m *aient* p *racines communes sont*

$$\Delta^{(p-1)} = 0, \quad \Delta_1^{(p-1)} = 0, \quad \Delta_2^{(p-1)} = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{p-1}^{(p-1)} = 0,$$

les quantités $\Delta_\mu^{(p-1)}$ *ayant la signification indiquée plus haut. Ces conditions sont au nombre de* p.

Formation de l'équation de degré p qui admet les p racines communes.

8. Pour cela, considérons le déterminant d'ordre $m - p$

$$\Delta^{(p)} = \begin{vmatrix} \mathrm{G}_{1,1} & \mathrm{G}_{1,2} & \ldots & \mathrm{G}_{1,m-p-1} & \mathrm{G}_{1,m-p} \\ \mathrm{G}_{2,1} & \mathrm{G}_{2,2} & \ldots & \mathrm{G}_{2,m-p-1} & \mathrm{G}_{2,m-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \mathrm{G}_{m-p,1} & \ldots & \ldots & \mathrm{G}_{m-p,m-p-1} & \mathrm{G}_{m-p,m-p} \end{vmatrix}$$

et opérons sur $\Delta^{(p)}$ comme nous l'avons fait sur $\Delta^{(p-1)}$; le déterminant $\Delta^{(p)}$ sera multiplié par x^p, et, en désignant généralement par $\Delta_\mu^{(p)}$ l'expression

$$\Delta_\mu^{(p)} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-p-1} & G_{1,m-p+\mu} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-p-1} & G_{2,m-p+\mu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ G_{m-p,1} & G_{m-p,2} & \ldots & G_{m-p,m-p-1} & G_{m-p,m-p+\mu} \end{vmatrix},$$

on aura, comme précédemment,

$$\Delta^{(p)} x^p + \Delta_1^{(p)} x^{p-1} + \ldots + \Delta_p^{(p)}$$
$$= \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-p-1} & f_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-p-1} & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ G_{m-p,1} & \ldots & \ldots & G_{m-p,m-p-1} & f_{m-p-1} \end{vmatrix} \varphi(x) - \begin{vmatrix} G_{2,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-p-1} & \varphi_0 \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-p-1} & \varphi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ G_{m-p,1} & \ldots & \ldots & G_{m-p,m-p-1} & \varphi_{m-p-1} \end{vmatrix} f(x)$$

ou bien

$$\Delta^{(p)} x^p + \Delta_1^{(p)} x^{p-1} + \ldots + \Delta_p^{(p)} = U_{m-p-1}\,\varphi(x) - V_{m-p-1}\, f(x).$$

On voit par cette équation que, si $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont p racines communes, ces p racines doivent annuler le premier membre; par suite,

$$\Delta^{(p)} x^p + \Delta_1^{(p)} x^{p-1} + \ldots + \Delta_p^{(p)} = 0$$

est l'équation de degré p qui donne les p racines communes.

Discussion générale.

9. Supposons satisfaites les conditions qui expriment que les deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ admettent p racines communes, et supposons en outre le déterminant d'ordre $m - p$, désigné par $\Delta^{(p)}$, nul; nous allons démontrer que tous les déterminants mineurs d'ordre $m - p$ de Δ sont nuls.

Soit $\Delta(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ le déterminant mineur d'ordre $m - p$ obtenu en supprimant dans Δ les rangées d'ordre $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ et les colonnes d'ordre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$. Opérons sur $\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ comme nous avons opéré sur $\Delta^{(p-1)}$ et sur $\Delta^{(p)}$, c'est-à-dire, multiplions les éléments de la première colonne par x^{m-1}, ceux de la deuxième par x^{m-2}, ... (les colonnes de ce déterminant conservant les numéros qu'elles avaient dans Δ) ; ajoutons par rangées et remplaçons les éléments de la colonne d'ordre ν par les sommes obtenues; le déterminant $\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ sera multiplié par $x^{m-\nu}$, et l'on arrivera, comme précédemment, à une équation de la forme

$$(a)\left\{\begin{array}{l} x^{m-\nu}\Delta(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p) \pm x^{m-\nu_1}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu, \nu_2, \ldots, \nu_p) \\ \quad \pm x^{m-\nu_2}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu, \nu_3, \ldots, \nu_p) \pm \ldots \\ \quad \pm x^{m-\nu_p}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{p-1}, \nu) = \mathrm{U}\varphi(x) - \mathrm{V}f(x), \end{array}\right.$$

U et V étant des polynômes en x dont le degré en x est au plus $m-1$; c'est de cette identité que nous allons nous servir pour faire la discussion complète.

I. Supposons, en effet, que nous fassions dans cette formule

$$\begin{array}{l} \nu = m-p, \quad \nu_1 = m-p+1, \quad \ldots, \quad \nu_{p-1} = m-1, \quad \nu_p = m, \\ \qquad\qquad \mu_1 = m-p+1, \quad \ldots, \quad \mu_{p-1} = m-1, \quad \mu_p = m; \end{array}$$

$\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p)$ ne sera autre chose que le déterminant que nous avons désigné par $\Delta^{(p)}$, puisqu'il résulte de Δ par la suppression des p dernières rangées et des p dernières colonnes de celui-ci; de plus, le polynôme qui forme le premier membre de l'identité est de degré $p-1$, puisque le coefficient du terme de degré p est nul par hypothèse; dans ce cas, les polynômes désignés par U et V ne sont que de degré $m-p-1$; par suite, on peut affirmer, d'après le théorème d'Euler, que les deux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ont $p+1$ racines communes, le premier membre de l'identité devenant zéro.

II. Laissons actuellement arbitraires les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, et faisons

$$\nu = m-p, \quad \nu_1 = m-p+1, \quad \ldots, \quad \nu_p = m;$$

l'identité (a) deviendra

$$\begin{array}{l} x^p\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, m-p+2, \ldots, m) \\ \quad \pm x^{p-1}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p, m-p+2, \ldots, m) \pm \ldots \\ \quad \pm \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, m-p+2, \ldots, m-1, m-p) = \mathrm{U}_1\varphi(x) - \mathrm{V}_1 f(x). \end{array}$$

Le premier membre est de degré p; il doit s'annuler quand on substitue à x les $p+1$ racines communes; par suite, il est identiquement nul.

On a donc, en particulier,

$$\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, m-p+2, \ldots, m) = 0,$$

quels que soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$.

III. Laissons arbitraires les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ et ν, et faisons

$$\nu_1 = m-p+1, \quad \nu_2 = m-p+2, \quad \ldots, \quad \nu_p = m;$$

l'identité (a) deviendra

$$\begin{aligned} & x^{m-\nu}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, m-p+2, \ldots, m) \\ & \quad \pm x^{p-1}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu, m-p+2, \ldots, m) \\ & \quad \pm x^{p-2}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, \nu, m-p+3, \ldots, m) \pm \ldots \\ & \quad \pm \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, \ldots, m-1, \nu) = U_2\varphi(x) - V_2 f(x). \end{aligned}$$

Le coefficient de $x^{m-\nu}$ est nul d'après ce qui précède, et le premier membre, s'annulant pour plus de $p-1$ valeurs de x, est identiquement nul, de telle sorte que l'on a

$$\begin{aligned} & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu, m-p+2, m-p+3, \ldots, m) = 0, \\ & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, m-p+1, \nu, m-p+3, \ldots, m) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \Delta(\mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_p, m-p+1, m-p+2, \ldots, m-1, \nu) = 0. \end{aligned}$$

IV. Laissons maintenant $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, ainsi que ν et ν_1, arbitraires; l'identité (a) prendra la forme

$$\begin{aligned} & x^{m-\nu}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, m-p+2, \ldots, m) \\ & \quad \pm x^{m-\nu_1}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu, m-p+2, \ldots, m) \\ & \quad \pm x^{p-2}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu, m-p+3, \ldots, m) \pm \ldots \\ & \quad \pm \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, m-p+2, \ldots, m-1, \nu) = U_3\varphi(x) - V_3 f(x). \end{aligned}$$

Les coefficients de $x^{m-\nu}$, $x^{m-\nu_1}$ sont identiquement nuls d'après ce qui précède; par suite,

$$\begin{aligned} & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu, m-p+3, \ldots, m) = 0, \\ & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, m-p+1, \nu, \ldots, m) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, m-p+1, \ldots, m-1, \nu) = 0. \end{aligned}$$

V. Si on laisse $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu, \nu_1, \nu_2$ arbitraires, et si l'on fait

$$\nu_3 = m - p + 3, \;\ldots,\; \nu_4 = m - p + 4, \;\ldots,\; \nu_p = m,$$

l'identité (a) prendra la forme

$$\begin{aligned} & x^{m-\nu}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, m-p+3, \ldots, m) \\ & \pm x^{m-\nu_1}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu, \nu_2, m-p+3, \ldots, m) \\ & \pm x^{m-\nu_2}\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu, m-p+3, \ldots, m) \\ & \pm x^{p-3}\,\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \nu, m-p+4, \ldots, m) \\ & \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, m-p+3, \ldots, m-1, \nu) = U_4\,\varphi(x) - V_4 f(x); \end{aligned}$$

les coefficients de $x^{m-\nu}$, $x^{m-\nu_1}$, $x^{m-\nu_2}$ sont nuls, donc tous les autres coefficients sont nuls : donc

$$\begin{aligned} & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \nu, m-p+4, \ldots, m) = 0, \\ & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \quad m-p+3, \nu, \ldots, m) = 0, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & \Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \quad m-p+3, \ldots, m-1, \nu) = 0. \end{aligned}$$

En laissant ensuite $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu$ arbitraires, on démontrerait de même que

$$\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu, m-p+5, \ldots, m) = 0,$$

et ainsi de suite.

En continuant, on arriverait à faire voir que généralement

$$\Delta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p) = 0,$$

quelles que soient les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$, c'est-à-dire que tous les déterminants mineurs d'ordre $m-p$ de Δ sont nuls.

Cas où les équations ne sont pas de même degré.

10. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ sont toutes deux de degré m; mais les résultats précédents subsistent quand les équations proposées ne sont pas de même degré.

Considérons deux équations, l'une $f(x) = 0$ de degré m, l'autre

$\varphi(x)=0$ de degré n, et supposons, pour fixer les idées, que n soit moindre que m.

Soit

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0,$$
$$\varphi(x)=B_{m-n}x^n+B_{m-n+1}x^{n-1}+\ldots+B_m=0.$$

On démontrerait, comme nous l'avons fait dans le cas de deux équations de même degré, que, si l'on désigne par Δ le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & B_{m-n} & \ldots & & B_{m-1} & B_m\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & B_{m-n} & B_{m-n+1} & \ldots & & B_m & 0\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & B_{m-n} & B_{m-n+1} & B_{m-n+2} & \ldots & B_m & 0 & 0\\
. & . & . & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & .\\
0 & B_{m-n} & B_{m-n+1} & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & .\\
B_{m-n} & B_{m-n+1} & B_{m-n+2} & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0\\
G_{m-n+1,1} & G_{m-n+1,2} & G_{m-n+1,3} & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & G_{m-n+1,m}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots\\
G_{m,1} & G_{m,2} & G_{m,3} & \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & G_{m,m}
\end{vmatrix},$$

où les quantités $G_{m-n+\mu,\nu}$ sont les coefficients des n dernières équations de Cauchy relatives à $f(x)=0$ et à $\varphi(x)=0$, formées à la manière ordinaire; $\Delta=0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ aient une racine commune. Désignons par Δ_1 le déterminant obtenu en formant les m équations de Cauchy relatives à $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$; les équations étant mises sous la forme

$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-n-1}x^{n+1}+A_{m-n}x^n+\ldots+A_m=0,$$
$$\varphi(x)=0.x^m+0.x^{m-1}+\ldots+0.x^{n+1}\qquad+B_{m-n}x^n+\ldots+B_m=0,$$

nous allons démontrer que

$$\Delta_1=\Delta A_0^{m-n}.$$

Il est aisé de se rendre compte de la manière dont le facteur A_0 s'introduit dans Δ_1, car l'hypothèse $A_0=0$ donne aux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$, écrites sous la forme indiquée, une racine commune infinie; le facteur A_0 ne doit pas figurer dans le premier membre de l'équation qui donne la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ aient une racine commune, car l'hypothèse $A_0=0$ ne donne pas en réalité aux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ une racine commune infinie.

Pour démontrer l'égalité en question, savoir

$$\Delta_1 = \Delta . A_0^{m-n},$$

formons le déterminant Δ_1 ; considérons, à cet effet, les équations

$$\begin{aligned}
&A_0(B_{m-n}x^n + B_{m-n+1}x^{n-1} + \ldots + B_m) = 0,\\
&(A_0 x + A_1)(B_{m-n}x^n + B_{m-n+1}x^{n-1} + \ldots + B_m) = 0,\\
&(A_0 x^2 + A_1 x + A_2)(B_{m-n}x^n + B_{m-n+1}x^{n-1} + \ldots + B_m) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(A_0 x^{m-n-1} + A_1 x^{m-n-2} + \ldots + A_{m-n-1})(B_{m-n}x^n + \ldots + B_m) = 0,\\
&(A_0 x^{m-n} + A_1 x^{m-n-1} + \ldots + A_{m-n})(B_{m-n+1}x^{n-1} + \ldots + B_m) - B_{m-n}(A_{m-n+1}x^{n-1} + \ldots + A_m) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1})B_m - (B_{m-n}x^{n-1} + B_{m-n+1}x^{n-2} + \ldots + B_{m-1})A_m = 0.
\end{aligned}$$

Les n dernières sont celles qui ont été désignées par

$$\begin{aligned}
&G_{m-n+1,1}x^{m-1} + G_{m-n+1,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m-n+1,m} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&G_{m,1}x^{m-1} + G_{m,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m,m} = 0.
\end{aligned}$$

Considérons l'une quelconque des premières, celle qui occupe le rang q, par exemple,

$$(A_0 x^{q-1} + A_1 x^{q-2} + \ldots + A_{q-1})(B_{m-n}x^n + B_{m-n+1}x^{n-1} + \ldots + B_m) = 0.$$

Elle peut s'écrire

$$A_0 B_{m-n} \left| x^{n+q-1} + \begin{matrix} A_1 B_{m-n} \\ + A_0 B_{m-n+1} \end{matrix} \right| x^{n+q-2} + \left.\begin{matrix} A_2 B_{m-n} \\ + A_1 B_{m-n+1} \\ + A_0 B_{m-n+2} \end{matrix}\right| x^{n+q-3} + \ldots + \left.\begin{matrix} A_r B_{m-n} \\ + A_{r-1} B_{m-n+1} \\ + A_{r-2} B_{m-n+2} \\ + \ldots\ldots \\ + A_0 B_{m-n+r} \end{matrix}\right| x^{n+q-r-1} + \ldots + A_{q-1} B_m$$

et fournit dans le déterminant Δ_1 la rangée

$$0,\ 0,\ \ldots,\ 0 \;\Big|\; A_0 B_{m-n} \;\Big|\; \begin{matrix} A_1 B_{m-n} \\ A_0 B_{m-n+1} \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} A_2 B_{m-n} \\ + A_1 B_{m-n+1} \\ + A_0 B_{m-n+2} \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix} \;\Big|\; \begin{matrix} A_r B_{m-n} \\ + A_{r-1} B_{m-n+1} \\ + A_{r-2} B_{m-n+2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ + A_0 B_{m-n+r} \end{matrix} \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; A_{q-1} B_m.$$

Si l'on multiplie la première rangée de Δ par A_{q-1}, la deuxième par A_{q-2}, ..., la $q^{\text{ième}}$ par A_0, et si l'on ajoute les éléments modifiés par colonne, on pourra substituer à la $q^{\text{ième}}$ rangée la somme ainsi obtenue; le déterminant Δ est alors multiplié par A_0 et la $q^{\text{ième}}$ rangée de Δ est devenue, par cette opération, identique à la $q^{\text{ième}}$ rangée de Δ_1. Si donc on opère ainsi sur la $(m-n)^{\text{ième}}$ rangée, puis sur la $(m-n-1)^{\text{ième}}$, ..., à chaque opération une ligne de Δ sera remplacée par une ligne de Δ_1, et chaque opération équivaut à la multiplication de Δ par A_0. Après avoir fait les $m-n$ opérations analogues, Δ sera devenu identique à Δ_1; on aura donc

$$\Delta_1 = \Delta . A_0^{m-n}.$$

Cela posé, on voit que, si les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ne sont pas de même degré, on pourra faire sur le déterminant de Cauchy et sur les déterminants mineurs qui s'en déduisent tous les calculs que nous avons faits dans le cas où les équations sont de même degré. En faisant usage du déterminant Δ_1, qui est symétrique, on n'introduit que le facteur A_0 dans les deux membres; les formules précédentes peuvent donc être appliquées encore dans le cas où les équations ne sont pas de même degré.

Si $\varphi(x) = 0$ est de degré n, n étant moindre que m, il suffira de supposer $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, ..., $\varphi_{m-n-1} = 0$ dans les formules précédentes; φ_{m-n} sera le terme B_{m-n} de degré zéro, ..., φ_{m-p} de degré $n-p$; par suite, l'équation

$$\Delta^{(p-1)} x^{p-1} + \Delta_1^{(p-1)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_{p-1}^{(p-1)} = U_{m-p}\,\varphi(x) - V_{m-p} f(x),$$

qui résume toute la théorie précédente, se réduit à une équation de la forme

$$\Delta^{(p-1)} x^{p-1} + \Delta_1^{(p-1)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_{p-1}^{(p-1)} = U_{m-p}\,\varphi(x) - V_{n-p} f(x),$$

V_{n-p} étant un polynôme de degré $n-p$.

On voit sur cette équation que

$$\Delta^{(p-1)} = 0, \quad \Delta_1^{(p-2)} = 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{p-1}^{(p-1)} = 0$$

sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations de degrés m et n, $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, aient p racines communes.

L'équation qui donne les p racines communes s'obtient comme précédemment.

Nous désignerons par $\Theta_{p-1}(x)$ le premier membre de l'identité précédente, et nous allons actuellement étudier les propriétés des fonctions Θ.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS Θ.

I.

11. *La fonction $\Theta_{p-1}(x)$ est le reste de la division du polynôme $f(x)$ par le polynôme $\varphi(x)$ à un facteur indépendant de x près, si $\varphi(x)$ est de degré p et $f(x)$ de degré m, $m > p$.*

En effet, si nous faisons, dans l'identité

$$\Theta_{p-1}(x) = \mathrm{U}_{m-p}\,\varphi(x) - \mathrm{V}_{n-p} f(x),$$

$n = p$, V_{n-p} ne renfermera plus la variable x et deviendra le produit du déterminant que nous avons désigné par $\Delta^{(p)}$ par le coefficient de x^p dans $\varphi(x)$, soit B_{m-p}.

L'équation précédente deviendra donc

$$\mathrm{B}_{m-p}\,\Delta^{(p)} f(x) = \mathrm{U}_{m-p}\,\varphi(x) - \Theta_{p-1}(x).$$

Cette égalité montre que le déterminant

$$\mathrm{U}_{m-p} = \begin{vmatrix} \mathrm{G}_{1,1} & \mathrm{G}_{1,2} & \dots & \mathrm{G}_{1,m-p} & f_0 \\ \mathrm{G}_{2,1} & \mathrm{G}_{2,2} & \dots & \mathrm{G}_{2,m-p} & f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & .. \\ \mathrm{G}_{m-p+1,1} & \mathrm{G}_{m-p+1,2} & \dots & \mathrm{G}_{m-p+1,m-p} & f_{m-p} \end{vmatrix},$$

qui est une fonction de degré $m - p$ en x, est le quotient de $f(x)$ par $\varphi(x)$, au facteur $\mathrm{B}_{m-p}\Delta^{(p)}$ près, et que le polynôme de degré $p - 1$ $\Theta_{p-1}(x)$ est le reste de la division de $f(x)$ par $\varphi(x)$, au facteur $-\mathrm{B}_{m-p}\Delta^{(p)}$ près.

Les conditions de divisibilité de $f(x)$ par $\varphi(x)$ sont donc

$$\Delta^{(p-1)} = 0, \quad \Delta_1^{(p-1)} = 0, \quad \dots, \quad \Delta_{p-1}^{(p-1)} = 0,$$

et U_{m-p} représente encore le quotient de $f(x)$ par $\varphi(x)$, si ces conditions sont remplies.

$\Delta^{(p)}$ est nécessairement différent de zéro, dans le cas où $n = p$.

4.

II.

12. *La fonction $\Theta_{p-1}(x)$ représente, à un facteur positif près, la fonction de Sturm de degré $p-1$ lorsqu'on prend pour $\varphi(x)$ la dérivée $f'(x)$ du premier membre de l'équation $f(x)=0$.*

Pour établir cette propriété des fonctions Θ, nous allons faire usage de la proposition suivante :

Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des polynômes de degrés m et n et premiers entre eux, et si X_{m-p}, X_{n-p}, X_{p-1}, Y_{m-p}, Y_{n-p}, Y_{p-1} sont des fonctions de x dont le degré en x est marqué, pour chaque fonction, par son indice, les deux identités

$$X_{m-p}\varphi(x) - X_{n-p}f(x) = X_{p-1},$$
$$Y_{m-p}\varphi(x) - Y_{n-p}f(x) = Y_{p-1}$$

ne peuvent subsister simultanément, à moins que l'on n'ait, quel que soit x,

$$\frac{X_{m-p}}{Y_{m-p}} = \frac{X_{n-p}}{Y_{n-p}} = \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit d'envisager l'identité

$$(X_{m-p}Y_{p-1} - Y_{m-p}X_{p-1})\varphi(x) - (X_{n-p}Y_{p-1} - Y_{n-p}X_{p-1})f(x) = 0,$$

qui se déduit des deux égalités données. Le multiplicateur de $\varphi(x)$ est de degré $m-1$; il ne peut donc être divisible par $f(x)$, qui est de degré m; par suite, on a identiquement

$$X_{m-p}Y_{p-1} - Y_{m-p}X_{p-1} = 0,$$
$$X_{n-p}Y_{p-1} - Y_{n-p}X_{p-1} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{X_{m-p}}{Y_{m-p}} = \frac{X_{n-p}}{Y_{n-p}} = \frac{X_{p-1}}{Y_{p-1}}.$$

Pour de grandes valeurs de x, chacune des fractions se réduit au rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé du numérateur et du dénominateur; comme l'égalité doit subsister pour toutes les valeurs de x, on voit que les coefficients des termes de plus haut degré dans les fonctions X sont proportionnels aux coefficients des termes de plus haut degré dans les fonctions Y correspondantes.

On sait que, si l'on désigne par V et V_1 une fonction entière et sa dérivée, la fonction de Sturm de degré $p-1$, V_{m-p+1} peut se mettre sous la forme

$$V_{m-p+1} = V_1(Q_1 Q_2 \ldots Q_{m-p} + \ldots) - V(Q_2 Q_3 \ldots Q_{m-p} + \ldots);$$

les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-p}$ sont les quotients obtenus dans les divisions successives, et dans chaque parenthèse le produit indiqué fournit les termes de plus haut degré. Si donc $q_1, q_2, \ldots, q_{m-p}$ sont les coefficients de x dans les binômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-p}$, les termes de plus haut degré en x dans les parenthèses sont respectivement

$$q_1 q_2 \ldots q_{m-p} x^{m-p}, \quad q_2 q_3 \ldots q_{m-p} x^{m-p-1};$$

on a donc

$$V_{m-p+1} = V_1(q_1 q_2 \ldots q_{m-p} x^{m-p} + \ldots) - V(q_2 q_3 \ldots q_{m-p} x^{m-p-1} + \ldots).$$

D'autre part, l'équation générale

$$\Theta_{p-1}(x) = U_{m-p}\varphi(x) - V_{n-p}f(x)$$

devient dans ce cas

$$\Delta^{(p-1)} x^{p-1} + \ldots + \Delta_{p-1}^{(p-1)} = V_1(A_0 \Delta^{(p)} x^{m-p} + \ldots) - V(m A_0 \Delta^{(p)} x^{m-p-1} + \ldots),$$

en faisant

$$f(x) = V, \quad \varphi(x) = V_1.$$

Si donc la fonction de Sturm de degré $p-1$, V_{m-p+1}, est désignée par

$$V_{m-p+1} = a_{m-p+1} x^{p-1} + b_{m-p+1} x^{p-2} + \ldots,$$

d'après la proposition démontrée précédemment, on aura

$$\frac{a_{m-p+1}}{\Delta^{(p-1)}} = \frac{q_1 q_2 \ldots q_{m-p}}{A_0 \Delta^{(p)}} = \frac{q_2 q_3 \ldots q_{m-p}}{m A_0 \Delta^{(p)}}.$$

Cette double égalité se réduit à

$$\frac{a_{m-p+1}}{\Delta^{(p-1)}} = \frac{q_1 q_2 \ldots q_{m-p}}{A_0 \Delta^{(p)}},$$

car $q_1 = \frac{1}{m}$.

Calculons le produit $q_1 q_2 \ldots q_{m-p}$; les égalités

$$a_{m-p-1} = a_{m-p}\, q_{m-p},$$
$$a_{m-p-2} = a_{m-p-1}\, q_{m-p-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_1 = a_2\, q_2,$$
$$a_0 = a_1\, q_1$$

donnent par multiplication

$$a_0 = a_{m-p} \times q_1 q_2 \ldots q_{m-p};$$

donc

$$a_{m-p+1}\, a_{m-p} = \frac{\Delta^{(p-1)}}{\Delta^{(p)}},$$

et, par suite,

$$a_{m-p}\, a_{m-p-1} = \frac{\Delta^{(p)}}{\Delta^{(p+1)}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_2 a_1 = \frac{\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(m-1)}},$$
$$a_1 a_0 = \frac{\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m)}}.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, il vient

$$a_{m-p+1}(a_1 a_2 \ldots a_{m-p})^2\, a_0 = \frac{\Delta^{(p-1)}}{\Delta^{(m)}}:$$

on voit aisément que $\Delta^{(m)}$ doit être pris égal à l'unité, et, comme $A_0 = a_0$, on aura

$$a_{m-p+1}(a_0 a_1 a_2 \ldots a_{m-p})^2 = A_0\, \Delta^{(p-1)}.$$

Au moyen des relations précédentes, il est aisé d'exprimer la valeur des produits $a_0 a_1 \ldots a_{m-p}$ en fonction des quantités $\Delta^{(\mu)}$; on trouve

$$a_{m-p+1} = \Delta^{(p-1)} \left(\frac{\Delta^{(p+1)}\Delta^{(p+3)}\ldots\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(p)}\Delta^{(p+2)}\ldots\Delta^{(m-1)}}\right)^2 A^0$$

pour les valeurs paires de l'indice $m-p+1$ et

$$a_{m-p+1} = \Delta^{(p-1)} \left(\frac{\Delta^{(p+1)}\Delta^{(p+3)}\ldots\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(p)}\Delta^{(p+2)}\ldots\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \frac{1}{A_0}$$

pour les valeurs impaires de l'indice $m-p+1$.

Les fonctions de Sturm sont donc les polynômes

$$V_{m-p+1} = A_0 \left(\frac{\Delta^{(p+1)}\,\Delta^{(p+3)} \ldots \Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(p)}\,\Delta^{(p+2)} \ldots \Delta^{(m-1)}} \right)^2 \left(\Delta^{(p-1)} x^{p-1} + \Delta_1^{(p-1)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_{p-1}^{(p-1)} \right),$$

ou bien

$$V_{m-p+1} = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\Delta^{(p+1)}\,\Delta^{(p+3)} \ldots \Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(p)}\,\Delta^{(p+2)} \ldots \Delta^{(m-2)}} \right)^2 \left(\Delta^{(p-1)} x^{p-1} + \Delta_1^{(p-1)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_{p-1}^{(p-1)} \right).$$

La première de ces formules convient au cas où $m - p + 1$ est pair, et la seconde au cas où $m - p + 1$ est impair.

Si donc nous supposons A_0 positif, ce qui est toujours permis, nous pouvons substituer aux fonctions de Sturm les fonctions Θ, qui n'en diffèrent que par un facteur essentiellement positif.

13. On peut simplifier les coefficients des fonctions Θ et substituer aux déterminants qui y figurent des déterminants d'un ordre moindre d'une unité. Les déterminants qui forment les coefficients sont tirés du déterminant de Cauchy relatif aux équations $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$; on peut leur substituer des déterminants d'un ordre moindre d'une unité, tirés d'une manière analogue du déterminant de Cauchy relatif aux deux équations $\psi(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $\psi(x)$ étant la dérivée par rapport à y du polynôme $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$, rendu homogène par rapport à x et à y, et quand on y fait $y = 1$. Cela résulte d'une proposition générale ainsi conçue :

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ désignent des polynômes de degré $m - 1$,

$$\varphi(x) = A_0 x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$
$$\psi(x) = B_0 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots + B_{m-1},$$

le déterminant d'ordre m de Cauchy, relatif aux deux équations

$$x\,\varphi(x) + \psi(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0$$

est égal au déterminant d'ordre $(m - 1)$ relatif aux deux équations

$$\psi(x) = 0, \quad \varphi(x) = 0,$$

multiplié par A_0^2.

Les équations de Cauchy relatives au système $x\varphi(x)+\psi(x)=0$, $\varphi(x)=0$ sont, en effet,

$$\begin{aligned}
&G_{1,1}x^{m-1}+G_{1,2}x^{m-2}+\ldots+G_{1,m}=A_0\varphi(x)=0,\\
&G_{2,1}x^{m-1}+G_{2,2}x^{m-2}+\ldots+G_{2,m}=(B_0\quad+A_1)\varphi(x)-A_0\psi(x)=0,\\
&G_{3,1}x^{m-1}+G_{3,2}x^{m-2}+\ldots+G_{3,m}=(B_0x+B_1+A_2)\varphi(x)-(A_0x+A_1)\psi(x)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&G_{m,1}x^{m-1}+G_{m,2}x^{m-2}+\ldots+G_{m,m}=(B_0x^{m-2}+\ldots+A_{m-1})\varphi(x)-(A_0x^{m-2}+\ldots+A_{m-2})\psi(x)=0.
\end{aligned}$$

Les équations de Cauchy relatives au système $\psi(x)=0$, $\varphi(x)=0$ sont

$$\begin{aligned}
&H_{1,1}x^{m-2}+H_{1,2}x^{m-3}+\ldots+H_{1,m-1}=B_0\varphi(x)-A_0\psi(x)=0,\\
&H_{2,1}x^{m-2}+H_{2,2}x^{m-3}+\ldots+H_{2,m-1}=(B_0x+B_1)\varphi(x)-(A_0x+A_1)\psi(x)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&H_{m-1,1}x^{m-2}+H_{m-1,2}x^{m-3}+\ldots+H_{m-1,m-1}=(B_0x^{m-2}+\ldots+B_{m-2})\varphi(x)-(A_0x^{m-2}+\ldots+A_{m-2})\psi(x)=0.
\end{aligned}$$

De la comparaison de ces deux systèmes on tire les relations

$$\begin{array}{lll}
G_{2,1}-A_1A_0=0, & G_{3,1}-A_2A_0=0, & G_{4,1}-A_3A_0=0,\\
H_{1,1}=G_{2,2}-A_1A_1, & H_{2,1}=G_{3,2}-A_2A_1, & H_{3,1}=G_{4,2}-A_3A_1,\\
H_{1,2}=G_{2,3}-A_1A_2, & H_{2,2}=G_{3,3}-A_2A_2, & H_{3,2}=G_{4,3}-A_3A_2,\\
H_{1,3}=G_{2,4}-A_1A_3, & H_{2,3}=G_{3,4}-A_2A_3, & H_{3,3}=G_{4,4}-A_3A_3,\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,\\
H_{1,\mu}=G_{2,\mu+1}-A_1A_\mu, & H_{2,\mu}=G_{3,\mu+1}-A_2A_\mu, & H_{3,\mu}=G_{4,\mu+1}-A_3A_\mu, \text{ etc.}\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Or, si l'on désigne par Δ le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix}
A_0^2 & A_0A_1 & A_0A_2 & \ldots & A_0A_{m-1}\\
A_0A_1 & G_{2,2} & G_{2,3} & \ldots & G_{2,m}\\
A_0A_2 & G_{3,2} & G_{3,3} & \ldots & G_{3,m}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
A_0A_{m-1} & G_{m,2} & G_{m,3} & \ldots & G_{m,m}
\end{vmatrix},$$

on peut mettre A_0^2 en facteur dans Δ, ce qui donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \dots & A_{m-1} \\ A_1 & G_{2,2} & G_{2,3} & \dots & G_{2,m} \\ A_2 & G_{3,2} & G_{3,3} & \dots & G_{3,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1} & G_{m,2} & G_{m,3} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix} \times A_0^2.$$

Multipliant les éléments de la première colonne par A_1, et retranchant ces éléments ainsi modifiés de la deuxième colonne, il viendra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & A_2 & A_3 & \dots & A_{m-1} \\ A_1 & G_{2,2} - A_1^2 & G_{2,3} & \dots & \dots & G_{2,m} \\ A_2 & G_{3,2} - A_1 A_2 & G_{3,3} & \dots & \dots & G_{2,m} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1} & G_{m,2} - A_1 A_{m-1} & G_{m,3} & \dots & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix} \times A_0^2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & A_2 & \dots & A_{m-1} \\ A_1 & H_{1,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m} \\ A_2 & H_{2,1} & G_{3,3} & \dots & G_{3,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1} & H_{m-1,1} & G_{m,3} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix} \times A_0^2;$$

si l'on multiplie les éléments de la première colonne par A_2, et si l'on retranche les produits obtenus de la troisième colonne, il viendra

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & A_3 & \dots & A_{m-1} \\ A_1 & H_{1,1} & H_{1,2} & G_{2,4} & \dots & G_{2,m} \\ A_2 & H_{2,1} & H_{2,2} & G_{3,4} & \dots & G_{3,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1} & H_{m-1,1} & H_{m-1,2} & G_{m,4} & \dots & G_{m,m} \end{vmatrix} \times A_0^2,$$

et ainsi de suite; en continuant, on voit qu'on peut substituer à la colonne $G_{1,\nu+1}$, $G_{2,\nu+1}$, ..., $G_{m,\nu+1}$ la colonne 0, $H_{1,\nu}$, $H_{2,\nu}$, ..., $H_{m,\nu}$; on aura donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & H_{1,1} & H_{1,2} & \dots & H_{1,m-1} \\ A_2 & H_{2,1} & H_{2,2} & \dots & H_{2,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1} & H_{m-1,1} & H_{m-1,2} & \dots & H_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \times A_0^2$$

$$= \begin{vmatrix} H_{1,1} & H_1 & \dots & H_{1,m-1} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \dots & H_{2,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m-1,1} & H_{m-1,2} & \dots & H_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \times A_0^2.$$

C'est la relation qu'il s'agissait d'établir.

Il est essentiel de remarquer que la démonstration précédente s'applique de point en point à un déterminant mineur quelconque de Δ, par exemple au déterminant

$$\Delta_\mu^{(p-1)} = \begin{vmatrix} G_1 & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-p} & G_{1,m-p+\mu+1} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-p} & G_{2,m-p+\mu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{m-p+1,1} & G_{m-p+1,2} & \dots & G_{m-p+1,m-p} & G_{m-p+1,m-p+\mu+1} \end{vmatrix},$$

qui est le coefficient de $x^{p-\mu-1}$ dans la fonction $\Theta_{p-1}(x)$; par conséquent,

$$\Delta_\mu^{(p-1)} = \begin{vmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \dots & H_{1,m-p-1} & H_{1,m-p+\mu} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \dots & H_{2,m-p-1} & H_{2,m-p+\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{m-p,1} & H_{m-p,2} & \dots & H_{m-p,m-p-1} & H_{m-p,m-p+\mu} \end{vmatrix} \times A_0^2,$$

en prenant pour $\psi(x)$ la fonction définie plus haut.

Remarquons encore que les coefficients $\Delta_\mu^{(p-1)}$ de la fonction de degré $p-1$ de Sturm sont des fonctions linéaires des quantités

$$H_{1,m-p+\mu}, \quad H_{2,m-p+\mu}, \quad \dots, \quad H_{m-p,m-p+\mu},$$

et que les coeffficients des quantités $H_{1,m-p+\mu}$, ..., $H_{m-p,m-p+\mu}$ sont les mêmes pour la même fonction $\Theta_{p-1}(x)$; ce sont des déterminants mineurs d'ordre $(m-p+\mu-1)$.

Nous supposerons donc désormais qu'on ait substitué aux expressions obtenues primitivement pour les coefficients $\Delta_\mu^{(p-1)}$ les déterminants mineurs d'ordre $m-p$, fonctions des éléments H_{rs}.

14. Nous allons maintenant développer quelques conséquences de ce qui précède.

I. La fonction $\Theta_{p-1}(x)$ étant à un facteur positif près la fonction de Sturm de degré $p-1$, le nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$ comprises entre a et b sera la différence entre le nombre de variations présentées par les deux suites

$$\begin{array}{l}\Theta_0,\ \Theta_1(a),\ \Theta_2(a),\ \ldots,\ \Theta_{p-1}(a),\ \ldots,\ \Theta_m(a),\\ \Theta_0,\ \Theta_1(b),\ \Theta_2(b),\ \ldots,\ \Theta_{p-1}(b),\ \ldots,\ \Theta_m(b),\end{array}$$

où Θ_m et Θ_{m-1} sont, pour plus de symétrie, les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$.

II. Pour avoir le nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$, il suffit de former les deux suites

$$\begin{array}{llllll}\Delta, & \Delta^{(1)}(-1), & \Delta^{(2)}(-1)^2, & \ldots, \Delta^{(p-1)}(-1)^{p-1}, & \ldots, \Delta^{(m-1)}(-1)^{m-1},\\ \Delta, & \Delta^{(1)}, & \Delta^{(2)}, & \ldots, \Delta^{(p-)1}, & \ldots, \Delta^{(m-1)},\end{array}$$

et de compter le nombre de variations perdues en passant de la première à la seconde; ce nombre représente le nombre de racines réelles de l'équation.

III. Pour trouver les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation, il suffit d'exprimer que les coefficients de la plus haute puissance de x dans les fonctions Θ sont de mêmes signes, et, dans l'hypothèse de $A_0 > 0$, il suffit d'écrire qu'ils sont positifs. On arrive donc à cette règle simple :

Pour qu'une équation $f(x)=0$ de degré m ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que le déterminant Δ d'ordre $(m-1)$ de Cauchy relatif aux deux équations $\psi(x)=0$, $f'(x)=0$, $\psi(x)$ étant la dérivée par rapport à y de $y^m f\left(\frac{x}{y}\right)$ et $y=1$, ainsi que les déterminants mineurs de Δ, qu'on obtient en supprimant dans Δ la dernière rangée et la dernière colonne, puis les deux dernières rangées et les deux dernières colonnes, etc., enfin les $m-2$ dernières rangées et les $m-2$ dernières *colonnes, soient tous positifs, le coefficient de x^m dans $f(x)$ étant supposé positif.*

Appliquons ce résultat à quelques exemples.

Considérons l'équation du troisième degré

$$ax^3 + 3bx^2 + 3b'x + a' = 0.$$

D'après la règle précédente, il faut former le déterminant de Cauchy relatif aux deux équations

$$bx^2 + 2b'x + a' = 0,$$
$$ax^2 + 2bx + b' = 0.$$

Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} 2(b^2 - ab') & bb' - aa' \\ bb' - aa' & 2(b'^2 - a'b) \end{vmatrix};$$

par suite, les conditions de réalité de toutes les racines de l'équation du troisième degré proposée sont

$$b^2 - ab' > 0, \quad 4(b^2 - ab')(b'^2 - a'b) - (bb' - aa')^2 > 0.$$

On sait que la première rentre dans la seconde : on a donc la condition unique

$$4(b^2 - ab')(b'^2 - a'b) - (bb' - aa')^2 > 0.$$

Considérons en second lieu l'équation générale du quatrième degré

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a' = 0.$$

Formons le déterminant de Cauchy relatif aux deux équations

$$bx^3 + 3cx^2 + 3b'x + a' = 0,$$
$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + b' = 0.$$

Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} 3(b^2 - ac) & 3(bc - ab') & bb' - aa' \\ 3(bc - ab') & 9(c^2 - bb') + bb' - aa' & 3(b'c - a'b) \\ bb' - aa' & 3(b'c - a'b) & 3(b'^2 - a'c) \end{vmatrix};$$

on obtient, par suite, les conditions

$$b^2 - ac > 0$$

$$\begin{vmatrix} 3(b^2 - ac) & 3(bc - ab') \\ 3(bc - ab') & 9(c^2 - bb') + bb' - aa' \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3(b^2 - ac) & 3(bc - ab') & bb' - aa' \\ 3(bc - ab') & 9(c^2 - bb') + bb' - aa' & 3(b'c - a'b) \\ bb' - aa' & 3(b'c - a'b) & 3(b'^2 - a'c) \end{vmatrix} > 0,$$

avec la restriction $a > 0$.

On peut donner à ces conditions une autre forme. Si l'on désigne par I et J les invariants de la fonction du quatrième degré qui forme le premier membre de l'équation

$$\mathrm{I} = aa' - 4bb' + 3c^2,$$
$$\mathrm{J} = aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3,$$

les conditions précédentes deviennent

$$b^2 - ac > 0, \quad 2(b^2 - ac)\mathrm{I} + 3a\mathrm{J} > 0, \quad \mathrm{I}^3 - 27\mathrm{J}^2 > 0,$$

et l'on voit aisément que, si $\mathrm{I}^3 - 27\mathrm{J}^2 > 0$, il y a zéro ou quatre racines réelles; il n'y a pas de racines réelles si l'une des deux premières inégalités n'est pas satisfaite ou si aucune des deux n'est satisfaite; dans le cas où $\mathrm{I}^3 - 27\mathrm{J}^2 < 0$, il y a toujours deux racines imaginaires et deux réelles.

Nous allons montrer actuellement l'identité de ces résultats avec ceux qu'a donnés M. Hermite, sous une forme différente, et auxquels il est arrivé par la considération des formes quadratiques et leur décomposition en sommes de carrés.

15. La méthode pratique indiquée par M. Hermite, dans le but de trouver le nombre de racines réelles d'une équation $f(x) = 0$ comprises entre deux limites t_0 et t_1, se résume dans la règle suivante :

On considère la fonction

$$\mathrm{F} = \frac{(t-y)f'(y)f(x) - (t-x)f'(x)f(y)}{y-x};$$

on met l'expression de F *sous la forme d'un polynôme ordonné suivant les puissances de y et de x; on remplace ensuite chaque puissance x^μ ou y^μ par x_μ, et l'on obtient une fonction homogène qu'on ramènera à une somme de carrés par la méthode connue. Si l'on désigne par (t) le nombre total des carrés affectés de coefficients positifs, le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ comprises entre t_0 et t_1, $t_1 > t_0$, sera égal à $(t_0) - (t_1)$.*

Calculons d'abord la fonction F, et, pour simplifier la notation, appelons $\varphi(x)$ la dérivée $f'(x)$; nous avons

$$\mathrm{F} = \frac{(t-y)\,\varphi(y) f(x) - (t-x)\,\varphi(x) f(y)}{y-x};$$

nous pouvons mettre F sous la forme

$$\mathrm{F} = t\left[\frac{\varphi(y) f(x) - \varphi(x) f(y)}{y-x}\right] + \frac{x\,\varphi(x) f(y) - y\,\varphi(y) f(x)}{y-x}.$$

Nous allons mettre successivement le coefficient de t et le terme indépendant sous forme d'un polynôme entier; on a

$$\frac{\varphi(y) f(x) - \varphi(x) f(y)}{y-x} = f(x)\left[\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\right] - \varphi(x)\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right],$$

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} = \varphi_0 y^{m-2} + \varphi_1 y^{m-3} + \ldots + \varphi_{m-2},$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f_0 y^{m-1} + f_1 y^{m-2} + \ldots + f_{m-1};$$

les quantités $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-2}, f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ ont dans ces formules la signification indiquée plus haut; ce sont des polynômes en x dont le degré est marqué par l'indice. L'équation précédente devient, en introduisant ces fonctions,

$$\frac{\varphi(y) f(x) - \varphi(x) f(y)}{y-x} = f(x)\,(\varphi_0 y^{m-2} + \varphi_1 y^{m-3} + \ldots + \varphi_{m-2}) - \varphi(x)\,(f_0 y^{m-1} + \ldots + f_{m-1})$$

ou bien

$$\frac{\varphi(y) f(x) - \varphi(x) f(y)}{y-x} = -\,\varphi(x) f_0 y^{m-1} + [f(x)\,\varphi_0 - \varphi(x) f_1]\,y^{m-2} + \ldots + [f(x)\,\varphi_{m-2} - \varphi(x) f_{m-1}].$$

On reconnaît dans les coefficients de $y^{m-1}, y^{m-2}, \ldots, y^0$ les premiers membres des équations de Cauchy *relatives à* $\varphi(x) = 0$ *de degré* $m-1$ *et* $f(x) = 0$ *de degré* m.

Soient $G_{\mu,\nu}$ les coefficients de ces équations, *changés de signes;* on aura

$$-\frac{\varphi(y)f(x)-\varphi(x)f(y)}{y-x} = \left\{\begin{array}{l} (G_{1,1}x^{m-1} + G_{1,2}x^{m-2} + \ldots + G_{1,m})y^{m-1} \\ + (G_{2,1}x^{m-1} + G_{2,2}x^{m-2} + \ldots + G_{2,m})y^{m-2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (G_{m,1}x^{m-1} + G_{m,2}x^{m-2} + \ldots + G_{m,m})y^0. \end{array}\right.$$

Calculons de même le terme indépendant de t :

$$\frac{x\varphi(x)f(y)-y\varphi(y)f(x)}{y-x} = x\varphi(x)\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right] + f(x)\left[\frac{x\varphi(x)-y\varphi(y)}{y-x}\right],$$

$$x\varphi(x)\left[\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right] = x\varphi(x)(f_0y^{m-1} + f_1y^{m-2} + \ldots + f_{m-1}),$$

$$f(x)\left[\frac{y\varphi(y)-x\varphi(x)}{y-x}\right] = f(x)(\varphi_0y^{m-1} + \varphi_1y^{m-2} + \ldots + \varphi_{m-1}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{x\varphi(x)f(y)-y\varphi(y)f(x)}{y-x} = {} & [x\varphi(x)f_0 - f(x)\varphi_0]y^{m-1} \\ & + [x\varphi(x)f_1 - f(x)\varphi_1]y^{m-2} + \ldots \\ & + [x\varphi(x)f_{m-1} - f(x)\varphi_{m-1}]y^0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{x\varphi(x)f(y)-y\varphi(y)f(x)}{y-x} = -\left\{\begin{array}{l} (H_{1,1}x^{m-1} + H_{1,2}x^{m-2} + \ldots + H_{1,m})y^{m-1} \\ + (H_{2,1}x^{m-1} + H_{2,2}x^{m-2} + \ldots + H_{2,m})y^{m-2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (H_{m,1}x^{m-1} + H_{m,2}x^{m-2} + \ldots + H_{m,m})y^0, \end{array}\right.$$

et, par suite, la fonction homogène du second degré sera

$$\begin{aligned}F = & -[(G_{1,1}t + H_{1,1})x_{m-1} + (G_{1,2}t + H_{1,2})x_{m-2} + \ldots + (G_{1,m}t + H_{1,m})x_0]x_{m-1} \\ & -[(G_{2,1}t + H_{2,1})x_{m-1} + (G_{2,2}t + H_{2,2})x_{m-2} + \ldots + (G_{2,m}t + H_{2,m})x_0]x_{m-2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -[(G_{m,1}t + H_{m,1})x_{m-1} + (G_{m,2}t + H_{m,2})x_{m-2} + \ldots + (G_{m,m}t + H_{m,m})x_0]x_0.\end{aligned}$$

Remarquons que le déterminant des quantités $G_{\mu,\nu}$ est symétrique par rapport à la diagonale principale, ainsi que le déterminant des quantités $H_{\mu,\nu}$; par suite, le déterminant des éléments $G_{\mu,\nu}t + H_{\mu,\nu}$ est également symétrique par rapport à la diagonale principale; ce déterminant

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} -(G_{1,1}t + H_{1,1}) & -(G_{1,2}t + H_{1,2}) & \cdots & -(G_{1,m}t + H_{1,m}) \\ -(G_{2,1}t + H_{2,1}) & -(G_{2,2}t + H_{2,2}) & \cdots & -(G_{2,m}t + H_{2,m}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ -(G_{m,1}t + H_{m,1}) & -(G_{m,2}t + H_{m,2}) & \cdots & -(G_{m,m}t + H_{m,m}) \end{vmatrix}$$

n'est autre chose que l'invariant de la fonction homogène F de m variables et du deuxième degré après y avoir fait $x = y$, selon la règle indiquée.

Or, si l'on désigne généralement par $\Delta_\mu(t)$ le déterminant qu'on obtient en supprimant dans $\Delta(t)$ les μ dernières rangées et les μ dernières colonnes, on sait que la fonction F, ramenée à une somme de carrés, aura une expression de la forme

$$+ F = \Delta_{m-1}(t) X_0^2 + \frac{\Delta_{m-2}(t)}{\Delta_{m-1}(t)} X_1^2 + \ldots + \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} X_{m-2}^2 + \frac{\Delta(t)}{\Delta_1(t)} X_{m-1}^2,$$

et le symbole (t) sera le nombre des quantités $\dfrac{\Delta_\mu(t)}{\Delta_{\mu+1}(t)}$, qui sont positives.

La fonction $(-1)^m \Delta(t)$ est un polynôme entier de degré m en t; le coefficient de la plus haute puissance de t est précisément le déterminant de Cauchy relatif à $f(x)$ et à $f'(x)$: c'est donc la fonction que nous avons désignée par Δ; et, d'une manière générale, le coefficient de la plus haute puissance de t dans le déterminant $(-1)^{m-\mu}\Delta_\mu(t)$ est le déterminant mineur $\Delta^{(\mu)}$ qui figure comme coefficient de la plus haute puissance de x dans la fonction de Sturm de degré μ.

Cela posé, si l'on donne à t une valeur très-grande, le coefficient $\dfrac{\Delta_\mu(t)}{\Delta_{\mu+1}(t)}$ se réduit sensiblement à $-\dfrac{\Delta^{(\mu)}}{\Delta^{(\mu+1)}} \times t$; pour $t = +\infty$, la fonction $\dfrac{\Delta_\mu(t)}{\Delta_{\mu+1}(t)}$ aura le signe de $-\dfrac{\Delta^{(\mu)}}{\Delta^{(\mu+1)}}$, et, pour $t = -\infty$, elle aura un signe contraire.

D'après la règle donnée par M. Hermite, le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ sera égal au nombre des quantités

$\frac{\Delta^{(\mu)}}{\Delta^{(\mu+1)}}$, qui sont positives, diminué du nombre de ces quantités qui sont négatives.

Par suite, pour trouver les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation de degré m, il suffit d'exprimer que la différence précédente est égale à m. Or les quantités $\frac{\Delta^{(\mu)}}{\Delta^{(\mu+1)}}$ sont au nombre de m; il faut donc que

$$\Delta^{(m-1)},\quad \frac{\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(m-1)}},\quad \frac{\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m-2)}},\quad \ldots,\quad \frac{\Delta}{\Delta^{(1)}}$$

soient des quantités toutes positives; $\Delta^{(m-1)}$ étant une constante positive, il faut que toutes les quantités

$$\Delta^{(m-1)},\quad \Delta^{(m-2)},\quad \Delta^{(m-3)},\quad \ldots,\quad \Delta^{(1)},\quad \Delta$$

soient positives.

Ces conditions sont précisément celles que nous avons déjà trouvées, en faisant usage des expressions données plus haut, pour les fonctions de Sturm.

16. Nous allons actuellement comparer les expressions des fonctions de Sturm données par M. Sylvester (*Philosophical Magazine*, décembre 1839) aux expressions trouvées précédemment comme conséquences de la théorie de l'élimination.

Cette comparaison nous donnera la valeur des déterminants

$$p_\mu = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \ldots & S_{\mu-1} \\ S_1 & S_2 & \ldots & \ldots & S_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{\mu-1} & S_\mu & \ldots & \ldots & S_{2\mu-1} \end{vmatrix}$$

en fonction des coefficients de l'équation proposée. On sait que M. Borchardt a démontré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII) que le nombre de couples de racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$ est égal au nombre des variations de signes que présente la suite des quantités

$$1,\quad p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_m,$$

et, par conséquent, pour que l'équation proposée ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que ces quantités soient toutes positives.

Le théorème de M. Sylvester peut être énoncé comme il suit :

Soit $V = 0$ *une équation quelconque de degré* m, *dans laquelle nous supposerons le coefficient de* x^m *égal à l'unité, et les racines* $a, b, c, \ldots, l$ *inégales ; soit* V_1 *la dérivée de* V. *Cherchons par le procédé ordinaire les fonctions de Sturm* $V_2, V_3, \ldots, V_m$, *en ayant soin de n'introduire et de ne supprimer aucun facteur indépendant de* x ; *les polynômes* $V, V_1, V_2, \ldots, V_m$ *s'exprimeront en fonction de* x *et des racines de l'équation* $V = 0$ *de la manière suivante :*

$$V = (x - a)(x - b)\ldots(x - l),$$
$$V_1 = \Sigma (x - b)(x - c)\ldots(x - l),$$
$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2} \Sigma (a - b)^2 (x - c)\ldots(x - l),$$
$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 (x - d)\ldots(x - l),$$
$$V_4 = \frac{1}{\lambda_4} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 (a - d)^2 (b - d)^2 (c - d)^2 (x - e)\ldots(x - l),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$V_m = \frac{1}{\lambda_m} (a - b)^2 (a - c)^2 \ldots (a - l)^2 (b - c)^2 \ldots (k - l)^2,$$

les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ *étant déterminées par les formules*

$$\lambda_2 = p_1^2,$$
$$\lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2,$$
$$\lambda_4 = \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2,$$
$$\lambda_5 = \left(\frac{p_2 p_4}{p_1 p_3}\right)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_1 = m,$$
$$p_2 = \Sigma (a - b)^2,$$
$$p_3 = \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2,$$
$$p_4 = \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (a - d)^2 (b - c)^2 (b - d)^2 (c - d)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_m = (a - b)^2 (a - c)^2 \ldots (a - l)^2 (b - c)^2 \ldots (k - l)^2,$$

et chaque somme Σ *représentant une fonction symétrique des racines dont* *tous les termes se déduisent, par des substitutions, de celui qui est écrit sous le signe.*

D'autre part, nous avons établi les formules générales

$$V_{m-\mu+1} = \left(\frac{\Delta^{(\mu+1)}\,\Delta^{(\mu+3)}\ldots\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(\mu)}\,\Delta^{(\mu+2)}\ldots\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \left(\Delta^{(\mu-1)}\,x^{\mu-1} + \Delta_1^{(\mu-1)}\,x^{\mu-2} + \ldots\right)$$

et

$$V_{m-\mu+1} = \left(\frac{\Delta^{(\mu+1)}\,\Delta^{(\mu+3)}\ldots\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(\mu)}\,\Delta^{(\mu+2)}\ldots\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \left(\Delta^{(\mu-1)}\,x^{\mu-1} + \Delta_1^{(\mu-1)}\,x^{\mu-2} + \ldots\right),$$

la première convenant pour des valeurs paires de l'indice $m-\mu+1$, et la seconde pour des valeurs impaires de l'indice.

On tire de ces formules les valeurs suivantes pour $V_2, V_3, V_4, \ldots$:

$$V_2 = \left(\frac{1}{\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \left(\Delta^{(m-2)}\,x^{m-2} + \Delta_1^{(m-2)}\,x^{m-3} + \ldots\right),$$

$$V_3 = \left(\frac{\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \left(\Delta^{(m-3)}\,x^{m-3} + \Delta_1^{(m-3)}\,x^{m-4} + \ldots\right),$$

$$V_4 = \left(\frac{\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(m-3)}\,\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \left(\Delta^{(m-4)}\,x^{m-4} + \Delta_1^{(m-4)}\,x^{m-5} + \ldots\right),$$

$$V_5 = \left(\frac{\Delta^{(m-3)}\,\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m-4)}\,\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \left(\Delta^{(m-5)}\,x^{m-5} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on compare ces expressions de $V_2, V_3, V_4, \ldots$ aux expressions de ces quantités données par M. Sylvester, après avoir mis préalablement ces expressions sous la forme

$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2}\left(p_2\,x^{m-2} + \ldots\right),$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3}\left(p_3\,x^{m-3} + \ldots\right),$$

$$V_4 = \frac{1}{\lambda_4}\left(p_4\,x^{m-4} + \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$V_{m-\mu+1} = \frac{1}{\lambda_{m-\mu+1}}\left(p_{m-\mu+1}\,x^{\mu-1} + \ldots\right),$$

6.

il vient

$$\left(\frac{1}{\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \Delta^{(m-2)} = \frac{p_2}{\lambda_2},$$

$$\left(\frac{\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \Delta^{(m-3)} = \frac{p_3}{\lambda_3},$$

$$\left(\frac{\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(m-3)}\,\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \Delta^{(m-4)} = \frac{p_4}{\lambda_4},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Si l'on remplace les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$ par leurs valeurs données plus haut, il viendra

$$\left(\frac{1}{\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \Delta^{(m-2)} = \frac{1}{(p_1)^2}\, p_2,$$

$$\left(\frac{\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \Delta^{(m-3)} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 p_3,$$

$$\left(\frac{\Delta^{(m-2)}}{\Delta^{(m-3)}\,\Delta^{(m-1)}}\right)^2 \Delta^{(m-4)} = \left(\frac{p_2}{p_3\, p_1}\right)^2 p_4,$$

$$\left(\frac{\Delta^{(m-3)}\,\Delta^{(m-1)}}{\Delta^{(m-4)}\,\Delta^{(m-2)}}\right)^2 \Delta^{(m-5)} = \left(\frac{p_3\, p_1}{p_4\, p_2}\right)^2 p_5,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

Or, on a

$$\Delta^{(m-1)} = m = p_1,$$

par suite

$$\Delta^{(m-2)} = p_2,$$

$$\Delta^{(m-3)} = p_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

et en général

$$\Delta^{(\mu-1)} = p_{m-\mu+1}.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-\mu} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{m-\mu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ S_{m-\mu} & \dots & \dots & S_{2m-2\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \dots & G_{1,m-\mu+1} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \dots & G_{2,m-\mu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ G_{m-\mu+1,1} & \dots & \dots & G_{m-\mu+1,m-\mu+1} \end{vmatrix}.$$

Les fonctions $p_{m-\mu+1}$ de M. Borchardt sont ainsi évaluées au moyen des quantités $G_{\mu\nu}$, qui s'expriment simplement en fonction des coefficients.

17. Nous allons, en terminant ce sujet, faire une remarque importante qui s'applique aux expressions trouvées plus haut des fonctions de Sturm, sous la forme

$$V_{m-\mu+1} = K^2 A_0 \left(\Delta^{(\mu-1)} x^{\mu-1} + \Delta_1^{(\mu-1)} x^{\mu-2} + \ldots + \Delta_{\mu-1}^{(\mu-1)}\right),$$

qu'on peut écrire aussi

$$V_{m-\mu+1} = K^2 A_0 \times \begin{vmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & \ldots & G_{1,m-\mu} & G_{1,m-\mu+1}\, x^{\mu-1} + G_{1,m-\mu+2}\, x^{\mu-2} + \ldots + G_{1,m} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & \ldots & G_{2,m-\mu} & G_{2,m-\mu+1}\, x^{\mu-1} + G_{2,m-\mu+2}\, x^{\mu-2} + \ldots + G_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_{m-\mu+1,1} & G_{m-\mu+1,2} & \ldots & G_{m-\mu+1,m-\mu} & G_{m-\mu+1,m-\mu+1}\, x^{\mu-1} + G_{m-\mu+1,m-\mu+2}\, x^{\mu-2} + \ldots + G_{m-\mu+1,m} \end{vmatrix}$$

le signe de $V_{m-\mu+1}$, pour toute valeur réelle de x, est celui du déterminant (A_0 étant supposé positif). Comme il suffit de connaître les signes que prendra ce déterminant quand on y substituera à x les valeurs x_0, x_1 numériques, on pourra introduire successivement ces valeurs dans le déterminant et profiter de toutes les simplifications qui se présenteront; on n'aura plus qu'à opérer sur des quantités numériques. La méthode de M. Hermite présente les mêmes avantages sur celle qui consisterait à former les fonctions de Sturm au moyen de divisions successives.

III.

18. Comme troisième application de la formule

$$(\alpha) \qquad \Theta_{p-1}(x) = U_{m-p}\, \varphi(x) - V_{n-p} f(x),$$

nous citerons la formation de tous les groupes d'équations qui, d'après un théorème remarquable démontré pour la première fois par M. Maleyx (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XI et XIII, 1872 et 1874), séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$.

Ce théorème, appliqué aux équations algébriques, consiste dans la propriété suivante :

Si les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ séparent les racines de l'équation $f(x) = 0$, les racines de cette dernière équation seront aussi séparées par les racines de $U_{m-p} = 0$, jointes aux racines de $\Theta_{p-1}(x) = 0$.

Pour avoir une équation $\varphi(x) = 0$ dont les racines séparent celles de $f(x) = 0$, il suffit de prendre pour $\varphi(x)$ la dérivée $f'(x)$; c'est ce que nous supposerons à l'avenir.

Il est aisé de se rendre compte de cette nouvelle propriété de la fonction $\Theta_{p-1}(x)$. Soient en effet $a, b, c, \ldots, l$ les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ rangées par ordre de grandeur.

Substituons-les dans l'identité (α); il viendra

$$\begin{aligned}
\Theta_{p-1}(a) &= U_{m-p}(a)\,\varphi(a),\\
\Theta_{p-1}(b) &= U_{m-p}(b)\,\varphi(b),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Theta_{p-1}(l) &= U_{m-p}(l)\,\varphi(l);
\end{aligned}$$

par hypothèse $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont de signes contraires; par suite, si $U_{m-p}(a)$ et $U_{m-p}(b)$ sont de mêmes signes, $\Theta_{p-1}(a)$ et $\Theta_{p-1}(b)$ devront être de signes contraires; il y aura donc un nombre impair de racines de l'équation $\Theta_{p-1}(x) = 0$ entre a et b.

Si, au contraire, $U_{m-p}(a)$ et $U_{m-p}(b)$ sont de signes contraires, $\Theta_{p-1}(a)$ et $\Theta_{p-1}(b)$ seront de mêmes signes, et il y aura un nombre impair de racines réelles de $U_{m-p}(x) = 0$ entre a et b.

On voit donc que les racines réunies des deux équations $\Theta_{p-1}(x) = 0$ et $U_{m-p}(x) = 0$, l'une de degré $p - 1$, l'autre de degré p, séparent les racines de $f(x) = 0$ à la manière des racines de la dérivée.

Si les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont toutes réelles, il n'y a qu'une racine de l'une ou de l'autre des équations

$$U_{m-p} = 0, \quad \Theta_{p-1}(x) = 0$$

entre deux racines consécutives de $f(x) = 0$; dans ce cas, les racines des équations

$$U_{m-p} = 0, \quad \Theta_{p-1}(x) = 0$$

sont toutes réelles, et, si on les range par ordre de grandeur, il y aura une seule racine de $f(x) = 0$ entre deux termes de la suite formée; $-\infty$ et la plus petite de ces quantités, $+\infty$ et la plus grande comprennent les autres racines.

Le système des deux équations $U_{m-p} = 0$, $\Theta_{p-1}(x) = 0$ joue donc le rôle de la dérivée dont le degré est la somme des degrés de ces deux équations.

On comprend toute l'importance de cette propriété, qui permet de substituer à une équation de degré $m - 1$ deux équations dont les degrés donnent une somme égale à $m - 1$.

19. La dérivée jouit d'une propriété importante que ne partage pas le système des équations $U_{m-p} = 0$, $\Theta_{p-1}(x) = 0$, savoir :

Si les racines de la dérivée sont réelles et si, substituées dans le premier membre de la proposée, par ordre de grandeur, elles donnent des résultats de substitution alternativement de signes contraires, toutes les racines de la proposée sont réelles.

L'analogie ne se poursuit pas ; si les racines de $U_{m-p} = 0$ et celles de $\Theta_{p-1}(x) = 0$ sont toutes réelles, et si, rangées par ordre de grandeur, elles donnent, quand on les substitue dans le premier membre de la proposée, des résultats alternativement de signes contraires, on ne peut pas en conclure que les racines de la proposée sont toutes réelles.

Soient, en effet, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-p}$ les racines de $U_{m-p} = 0$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}$ celles de $\Theta_{p-1}(x) = 0$, et supposons ces $m - 1$ quantités réelles.

Soient α_k, α_{k+1} deux racines consécutives de $U_{m-p} = 0$ comprenant entre elles un nombre pair de racines de l'équation $\Theta_{p-1}(x) = 0$; on aura

$$\begin{aligned} -V_{n-p}(\alpha_k)\, f(\alpha_k) &= \Theta_{p-1}(\alpha_k), \\ -V_{n-p}(\alpha_{k+1})\, f(\alpha_{k+1}) &= \Theta_{p-1}(\alpha_{k+1}). \end{aligned}$$

$\Theta_{p-1}(\alpha_k)$ et $\Theta_{p-1}(\alpha_{k+1})$ sont de mêmes signes, $f(\alpha_k)$ et $f(\alpha_{k+1})$ sont de signes contraires ; donc $V_{n-p}(\alpha_k)$ et $V_{n-p}(\alpha_{k+1})$ sont de signes contraires ; il y a donc un nombre impair de racines de l'équation $V_{n-p}(x) = 0$ entre α_k et α_{k+1}. Si entre α_k et α_{k+1} il y avait un nombre impair de racines de $\Theta_{p-1}(x) = 0$, $f(\alpha_k)$ et $f(\alpha_{k+1})$ seraient de mêmes signes, mais $\Theta_{p-1}(\alpha_k)$ et $\Theta_{p-1}(\alpha_{k+1})$ seraient de signes contraires et $V_{n-p}(\alpha_k)$, $V_{n-p}(\alpha_{k+1})$ seraient encore de signes contraires. On a donc cette proposition :

Si toutes les racines de $U_{m-p} = 0$ *et de* $\Theta_{p-1}(x) = 0$ *sont réelles et inégales, et si, substituées dans* $f(x)$ *par ordre de grandeur, elles donnent des résultats alternativement de signes contraires, toutes les racines de* $V_{n-p} = 0$ *sont réelles et séparent les racines de* $U_{m-p} = 0$. [Nous supposons toujours $\varphi(x) = f'(x)$, $n = m - 1$.]

On en conclut que, si α_1 est la plus petite racine de $U_{m-p} = 0$, $V_{n-p}(\alpha_1)$ et $V_{n-p}(-\infty)$ sont de mêmes signes.

On a d'ailleurs

$$f(\alpha_1) = -\frac{\Theta_{p-1}(\alpha_1)}{V_{n-p}(\alpha_1)};$$

le dénominateur a le signe de $V_{n-p}(-\infty)$, qui est celui de $(-1)^{m-p-1}A_0\Delta^{(p)}$. Cherchons celui du numérateur.

Si, entre α_1 et $-\infty$, $\Theta_{p-1}(x)$ a un nombre pair de racines réelles, $\Theta_{p-1}(\alpha_1)$ et $\Theta_{p-1}(-\infty)$ auront même signe, qui est celui de $(-1)^{p-1}\Delta^{(p-1)}$; par suite, $f(\alpha_1)$ aura le signe de $\frac{-(-1)^{p-1}\Delta^{(p-1)}}{(-1)^{m-p-1}\Delta^{(p)}A_0}$ ou de $\frac{(-1)^{m-1}\Delta^{(p-1)}}{A_0\Delta^{(p)}}$; $f(-\infty)$ a le signe de $(-1)^m A_0$; par suite, $f(\alpha_1)$ et $f(-\infty)$ seront de signes contraires si $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\Delta^{(p)}}$ est positif, et, en appelant β_1 la plus petite racine de $\Theta_{p-1}(x) = 0$, $f(\alpha_1)$ et $f(\beta_1)$ seront de mêmes signes; par suite, $f(-\infty)$ et $f(\beta_1)$ seront de signes contraires si $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\Delta^{(p)}} > 0$, et il y aura une racine de $f(x) = 0$ entre $-\infty$ et α_1 ou entre $-\infty$ et β_1, si $\beta_1 < \alpha_1$.

On démontrerait de la même manière que si, entre α_1 et $-\infty$, $\Theta_{p-1}(x)$ avait un nombre impair de racines réelles, $f(\beta_1)$ et $f(-\infty)$ seraient de signes contraires si $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\Delta^{(p)}} > 0$ et de mêmes signes si $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\Delta^{(p)}}$ était négatif. Si $f(\beta_1)$ et $f(-\infty)$ étaient de mêmes signes, l'équation $f(x) = 0$ aurait forcément des racines imaginaires, car il ne peut y avoir deux racines réelles de $f(x) = 0$ entre β_1 et $-\infty$; il y aurait une racine réelle de $U_{m-p} = 0$ ou de $\Theta_{p-1}(x) = 0$ moindre que β_1; il ne peut y avoir trois racines de $f(x) = 0$ entre deux racines consécutives des équations $U_{m-p} = 0$, $\Theta_{p-1}(x) = 0$, car entre ces racines il y aurait une racine de l'une ou l'autre des équations $U_{m-p} = 0$, $\Theta_{p-1} = 0$, et, pour une raison analogue, il ne saurait y avoir deux racines de $f(x) = 0$ entre la plus grande des racines du groupe $U_{m-p} = 0$, $\Theta_{p-1}(x) = 0$ et $+\infty$. D'ailleurs, la condition que nous venons d'obtenir est une de celles que fournit le théorème de Sturm.

On voit que, parmi le groupe d'équations $U_{m-p} = 0$, $\Theta_{p-1}(x) = 0$, qui séparent les racines de $f(x) = 0$, il figure, quel que soit p, une des fonctions de Sturm.

Les groupes d'équations qui, d'après le théorème de M. Maleyx, fournissent des racines qui séparent les racines de $f(x) = 0$ seront tous donnés par la formule

$$\Theta_{p-1}(x) = \mathrm{U}_{m-p}\varphi(x) - \mathrm{V}_{n-p}f(x).$$

On peut conclure de ce qui précède :

1° Si toutes les racines de $f(x) = 0$ sont réelles et inégales, les racines de toutes ses fonctions de Sturm seront aussi réelles et inégales.

2° L'équation $f(x) = 0$ a au moins autant de racines imaginaires que l'une quelconque de ses fonctions de Sturm.

3° Si l'une des fonctions de Sturm a des racines égales que l'équation proposée n'admet pas, l'équation proposée a nécessairement des racines imaginaires. Nous formerons, en terminant ce sujet, les deux équations du deuxième degré qui séparent les racines de l'équation générale du cinquième degré.

20. L'équation générale du cinquième degré étant mise sous la forme

$$ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10c'x^2 + 5b'x + a' = 0,$$

les équations de Cauchy dont les coefficients figurent dans les deux fonctions U_2 et Θ_2, qui, égalées à zéro, donnent les quantités qui séparent les racines de la proposée, sont

$$a^2x^4 + 4abx^3 + 6acx^2 + 4ac'x + ab' = 0,$$
$$4abx^4 + 4(5b^2 - ac)x^3 + 6(5bc - ac')x^2 + 4(5bc' - ab')x + 5bb' - aa' = 0,$$
$$\begin{aligned}6acx^4 + 6(5bc - ac')x^3 &+ (60c^2 - 20bc' - 4ab')x^2 \\ &+ (40cc' - 15bb' - aa')x + 10cb' - 4ba' = 0;\end{aligned}$$

par suite, U_2 devient, après la suppression du facteur a^2,

$$\frac{1}{a^2}\mathrm{U}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4b & 1 \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & ax + 5b \\ 6c & 6(5bc - ac') & ax^2 + 5bx + 10c \end{vmatrix};$$

l'équation $\mathrm{U}_2 = 0$ peut donc s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 4b & 0 \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & 0 \\ 6c & 6(5bc - ac') & a \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} 1 & 4b & 0 \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & a \\ 6c & 6(5bc - ac') & 5b \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 4b & 1 \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & 5b \\ 6c & 6(5bc - ac') & 10c \end{vmatrix} = 0;$$

l'équation $\Theta_2 = 0$ est d'ailleurs

$$\left.\begin{array}{l} \left|\begin{array}{ccc} 1 & 4b & 6c \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & 6(5bc - ac') \\ 6c & 6(5bc - ac') & (60c^2 - 20bc' - 4ab') \end{array}\right| x^2 \\ + \left|\begin{array}{ccc} 1 & 4b & 4c' \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & 4(5bc' - ab') \\ 6c & 6(5bc - ac') & (40cc' - 15bb' - aa') \end{array}\right| x \\ + \left|\begin{array}{ccc} 1 & 4b & b' \\ 4b & 4(5b^2 - ac) & (5bb' - aa') \\ 6c & 6(5bc - ac') & (10cb' - 4ba') \end{array}\right| \end{array}\right\} = 0.$$

Comme seconde application, nous allons former les deux équations du deuxième degré dont les racines séparent les racines de l'équation du cinquième degré en z, obtenue en faisant dans l'équation $x^{11} - 1 = 0$, préalablement débarrassée de la racine $x = 1$, la substitution $z = x + \frac{1}{x}$. Cette équation est

$$z^5 + z^4 - 4z^3 - 3z^2 + 3z + 1 = 0.$$

L'équation $U_2 = 0$ est, après la suppression du facteur 11, commun à tous ses termes,

$$4z^2 + z - 7 = 0,$$

et $\Theta_2 = 0$, après la suppression du facteur 121, devient

$$3z^2 + 2z - 2 = 0.$$

Les racines de ces deux équations, rangées par ordre de grandeur, sont

$$\frac{-1-\sqrt{113}}{8},\quad \frac{-1-\sqrt{7}}{3},\quad \frac{-1+\sqrt{7}}{3},\quad \frac{-1+\sqrt{113}}{8};$$

ces quantités, avec -2 et $+2$, séparent les racines de l'équation du cinquième degré.

Conditions pour que n équations données à une seule variable aient une racine commune.

21. Supposons les équations données de même degré, et soient

$$
\begin{aligned}
f(x) &= A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,\\
\varphi(x) &= B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m = 0,\\
\psi(x) &= C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \ldots + C_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Theta(x) &= L_0 x^m + L_1 x^{m-1} + \ldots + L_m = 0
\end{aligned}
$$

ces équations en nombre quelconque n; désignons par

$$
\begin{aligned}
&B_{1,1} x^{m-1} + B_{1,2} x^{m-2} + \ldots + B_{1,m} = 0,\\
&B_{2,1} x^{m-1} + B_{2,2} x^{m-2} + \ldots + B_{2,m} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&B_{m,1} x^{m-1} + B_{m,2} x^{m-2} + \ldots + B_{m,m} = 0
\end{aligned}
$$

les équations de Cauchy relatives à la première et à la deuxième équation; par

$$
\begin{aligned}
&C_{1,1} x^{m-1} + C_{1,2} x^{-m2} + \ldots + C_{1,m} = 0,\\
&C_{2,1} x^{m-1} + C_{2,2} x^{m-2} + \ldots + C_{2,m} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&C_{m,1} x^{m-1} + C_{m,2} x^{m-2} + \ldots + C_{m,m} = 0
\end{aligned}
$$

les équations de Cauchy relatives à la première et à la troisième équation, etc.; enfin par

$$
\begin{aligned}
&L_{1,1} x^{m-1} + L_{1,2} x^{m-2} + \ldots + L_{1,m} = 0,\\
&L_{2,1} x^{m-1} + L_{2,2} x^{m-2} + \ldots + L_{2,m} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&L_{m,1} x^{m-1} + L_{m,2} x^{m-2} + \ldots + L_{m,m} = 0
\end{aligned}
$$

les mêmes équations relatives à la première et à la dernière des équations proposées. Nous allons démontrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les n équations aient une racine commune sont

$$\begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix} = 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix} = 0.$$

Désignons par Δ_B le premier de ces déterminants, par Δ_C le deuxième, etc., par Δ_L le dernier, et considérons l'égalité

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première colonne de Δ_C par x^{m-1}, ceux de la deuxième par x^{m-2}, etc.; ceux de la dernière par 1; ajoutons par rangées horizontales les éléments ainsi modifiés, et substituons aux éléments de la dernière colonne les sommes obtenues, nous aurons, en employant la même notation que précédemment,

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-1} & f_0\psi(x) - \psi_0 f(x) \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-1} & f_1\varphi(x) - \varphi_1 f(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m-1} & f_{m-1}\varphi(x) - \varphi_{m-1} f(x) \end{vmatrix},$$

ou bien, en séparant,

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-1} & f_0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-1} & 0 \\ B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & B_{3,m-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m-1} & 0 \end{vmatrix} \psi(x) + \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-1} & 0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-1} & f_1 \\ B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & B_{3,m-1} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m-1} & f_{m-1} \end{vmatrix} \varphi(x) - \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-1} & \psi_0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-1} & \varphi_1 \\ B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & B_{3,m-1} & \varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m-1} & \varphi_{m-1} \end{vmatrix} f(x),$$

ou encore

$$\Delta_C = \Delta\psi(x) + U_C\,\varphi(x) - V_C\,f(x),$$

Δ étant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-1} f_0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-1}\, 0 \\ B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & B_{3,m-1}\, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m-1}\, 0 \end{vmatrix},$$

U_C et V_C des polynômes de degré $m - 1$ en x. Supposons $\Delta \gtrless 0$, et opérons de même sur tous les déterminants Δ_B, Δ_D, ..., Δ_L; on aura la suite des identités

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \Delta \varphi(x) + U_B \varphi(x) - V_B f(x), \\ \Delta_C &= \Delta \psi(x) + U_C \varphi(x) - V_C f(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta_L &= \Delta \Theta(x) + U_L \varphi(x) - V_L f(x). \end{aligned}$$

Si les équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, ..., $\Theta(x) = 0$ ont une racine commune, les seconds membres des identités précédentes s'évanouiront quand on mettra à la place de x cette racine commune; par suite, il faudra que l'on ait

$$\Delta_B = 0, \quad \Delta_C = 0, \quad \dots, \quad \Delta_L = 0.$$

Inversement, si ces conditions sont remplies, les équations proposées auront au moins une racine commune, car la première équation

$$0 = \Delta \varphi(x) + U_B \varphi(x) - V_B f(x)$$

nous montre que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ ont une racine commune; si l'on substitue cette racine dans les suivantes, savoir :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \psi(x) + U_C \varphi(x) - V_C f(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 &= \Delta \Theta(x) + U_L \varphi(x) - V_L f(x), \end{aligned}$$

on voit qu'elles se réduisent à leur premier terme, et par suite, comme Δ est supposé différent de zéro, la racine commune à $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ annule $\psi(x)$, ... et $\Theta(x)$.

On peut donc dire :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$f(x)=0,\quad \varphi(x)=0,\quad \psi(x)=0,\quad \ldots,\quad \Theta(x)=0,$$

au nombre de n, aient une racine commune, sont les $(n-1)$ conditions

$$\Delta_B=0,\quad \Delta_C=0,\quad \ldots,\quad \Delta_L=0.$$

22. On voit que l'équation $\Delta_B=0$ n'est autre chose que la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$ aient une racine commune ; les équations $\Delta_C=0$, ..., $\Delta_L=0$ indiquent que cette racine commune satisfait aux équations

$$\begin{gathered} f_0\,\psi(x)-\psi_0 f(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_0\,\Theta(x)-\Theta_0 f(x), \end{gathered}$$

et, par suite, à $\psi(x)=0$, ..., $\Theta(x)=0$.

On aurait pu trouver les conditions précédentes en exprimant que $f(x)=0$ et $\varphi(x)=0$ ont une racine commune; en formant, par la méthode indiquée plus haut, les puissances successives de la racine commune et en substituant ces valeurs dans les équations

$$\begin{gathered} f_0\,\psi(x)-\psi_0 f(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_0\,\Theta(x)-\Theta_0 f(x)=0, \end{gathered}$$

on trouve ainsi immédiatement les conditions $\Delta_C=0$, ..., $\Delta_L=0$.

23. La théorie précédente suppose le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \ldots & C_{1,m-1} & f_0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \ldots & B_{2,m-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \ldots & B_{m,m-1} & 0 \end{vmatrix}$$

différent de zéro ; ce déterminant est égal à

$$(-1)^{m-1} f_0 \begin{vmatrix} B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-1} \\ B_{3,1} & B_{3,2} & \dots & B_{3,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m-1} \end{vmatrix}.$$

Nous allons présenter la méthode d'une manière plus générale, qui permet de maintenir les conclusions précédentes, quand même $\Delta = 0$. Considérons le déterminant Δ_C :

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première colonne par x^{m-1}, ceux de la deuxième par x^{m-2}, etc. ; ajoutons par rangées et remplaçons les éléments de la colonne d'ordre ν par les sommes formées. Δ_C sera multiplié par $x^{m-\nu}$, et l'on aura

$$x^{m-\nu} \Delta_C = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,\nu-1} & f_0\,\psi(x) - \psi_0\, f(x) & C_{1,\nu+1} & \dots & C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,\nu-1} & f_1\,\varphi(x) - \varphi_1\, f(x) & B_{2,\nu+1} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,\nu-1} & f_{m-1}\,\varphi(x) - \varphi_{m-1}\, f(x) & B_{m,\nu+1} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix}$$

en développant, il viendra

$$\Delta_C\, x^m = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,\nu-1} & f_0 & C_{1,\nu+1} & \dots & C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,\nu-1} & 0 & B_{2,\nu+1} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,\nu-1} & 0 & B_{m,\nu+1} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix} \psi\,(x$$

$$+ \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,\nu-1} & 0 & C_{1,\nu+1} & \dots & C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,\nu-1} & f_1 & B_{2,\nu+1} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,\nu-1} & f_{m-1} & B_{m,\nu+1} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix} \varphi(x)$$

$$- \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,\nu-1} & \psi_0 & C_{1,\nu+1} & \dots & C_{1,m} \\ B_{1,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,\nu-1} & \varphi_1 & B_{2,\nu+1} & \dots & B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{m,1} & B_{m,2} & \dots & B_{m,\nu-1} & \varphi_{m-1} & B_{m,\nu+1} & \dots & B_{m,m} \end{vmatrix} f(x),$$

ou bien

$$\Delta_C x^{m-\nu} = f_0 \Delta_\nu \psi(x) + U_C^{(\nu)} \varphi(x) - V_C^{(\nu)} f(x).$$

On aura, en opérant de même sur les autres déterminants Δ_B, ..., Δ_L,

$$\begin{aligned}
\Delta_B x^{m-\nu} &= f_0 \Delta_\nu \varphi(x) + U_B^{(\nu)} \varphi(x) - V_B^{(\nu)} f(x),\\
\Delta_C x^{m-\nu} &= f_0 \Delta_\nu \psi(x) + U_C^{(\nu)} \varphi(x) - V_C^{(\nu)} f(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\Delta_L x^{m-\nu} &= f_0 \Delta_\nu \Theta(x) + U_L^{(\nu)} \varphi(x) - V_L^{(\nu)} f(x).
\end{aligned}$$

Le raisonnement fait précédemment nous montre que, si Δ_ν est différent de zéro, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient une racine commune sont

$$\Delta_B = 0, \quad \Delta_C = 0, \quad \dots, \quad \Delta_L = 0.$$

Il n'y a d'exception que si tous les déterminants Δ_ν qu'on obtient en faisant $\nu = 1, 2, \dots, m$ sont nuls; or Δ_ν sont, au signe près, les déterminants mineurs de Δ_B obtenus en ordonnant Δ_B par rapport aux éléments de la première rangée.

Si donc tous ces déterminants sont nuls, Δ_B lui-même est nul, et alors les équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont au moins une racine commune. On peut montrer qu'elles ont même deux racines communes dans ce cas.

Nous avons établi (n° 6) la formule

$$\Delta(\mu,\nu) + (-1)^{m-\nu-1} \Delta(\mu,m)\, x^{m-\nu} = U_{m-1}^{(\mu)} \varphi(x) - V_{m-1}^{(\mu)} f(x);$$

$f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ayant une racine commune, cette racine doit annuler le premier membre

$$\Delta(\mu,\nu) + (-1)^{m-\nu-1} \Delta(\mu,m)\, x^{m-\nu}.$$

Or, par hypothèse,

$$\Delta(1,1) = 0, \quad \Delta(1,2) = 0, \quad \dots, \quad \Delta(1,m) = 0;$$

par suite,

$$\Delta(2,1) = 0, \quad \Delta(3,1) = 0, \quad \dots, \quad \Delta(m,1) = 0,$$

car, à cause de la symétrie du déterminant Δ, on a

$$\Delta(\mu,\nu) = \Delta(\nu,\mu).$$

On voit donc que $\Delta(\mu,\nu)$ est nul pour $\nu = 1$, $\mu = m$; par suite $\Delta(m,m) = 0$, et, d'après ce qui a été démontré, les équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ont au moins deux racines communes.

La théorie précédente ne tombe donc en défaut que si tous les groupes d'équation $[f(x) = 0,\ \varphi(x) = 0]$, $[f(x) = 0,\ \psi(x) = 0]$, $[f(x) = 0,\ \Theta(x) = 0]$ admettent deux racines communes, car, tant que cette circonstance ne se présente pas, tous les déterminants mineurs d'ordre $(m-1)$ de Δ_B Δ_C, ..., Δ_L ne sont pas nuls.

Les équations proposées se décomposent chacune en une équation du second degré et une équation de degré $m-2$, dans le cas où elles admettent deux racines communes avec $f(x) = 0$; on pourra dès lors appliquer à ces groupes les considérations précédentes.

Nous allons passer maintenant au cas où l'on aurait à exprimer que n équations ont p racines communes.

Conditions pour que n équations aient un nombre quelconque p de racines communes.

24. Conservons les mêmes notations que précédemment, et soit

$$\Delta_C^{(1)} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-p+1} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ B_{m-p+1,1} & B_{m-p+1,2} & \dots & B_{m-p+1,m-p+1} \end{vmatrix}$$

le déterminant mineur d'ordre $m-p+1$ de Δ_C obtenu en supprimant dans Δ_C les $p-1$ dernières rangées et les $p-1$ dernières colonnes. Multiplions les éléments de la première colonne de $\Delta_C^{(1)}$ par x^{m-1}, ceux de la seconde par x^{m-2}, ceux de la dernière par x^{p-1}; ajoutons par rangées les termes obtenus, et remplaçons les éléments de la dernière colonne de $\Delta_C^{(1)}$ par les sommes obtenues; le déterminant $\Delta_C^{(1)}$ sera multiplié par x^{p-1}, et l'on aura

$$\Delta_C^{(1)} x^{p-1} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-p} & f_0\,\psi(x) - \psi_0 f(x) - C_{1,m-p+2}\,x^{p-2} - C_{1,m-p+3}\,x^{p-3} - \dots - C_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-p} & f_1\,\varphi(x) - \varphi_1 f(x) - B_{2,m-p+2}\,x^{p-2} - B_{2,m-p+3}\,x^{p-3} - \dots - B_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ B_{m-p+1,1} & \dots & \dots & B_{m-p+1,m-p} & f_{m-p}\,\varphi(x) - \varphi_{m-p} f(x) - B_{m-p+1,m-p+2}\,x^{p-2} - \dots - B_{m-p+1,m} \end{vmatrix}.$$

Si nous désignons généralement par $\Delta_C^{(\mu)}$ le déterminant

$$\Delta_C^{(\mu)} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-p} & C_{1,m-p+\mu} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{1,m-p} & B_{2,m-p+\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ B_{m-p+1,1} & B_{m-p+1,2} & \dots & B_{m-p+1,m-p} & B_{m-p+1,m-p+\mu} \end{vmatrix},$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\Delta_C^{(1)} x^{p-1} + \Delta_C^{(2)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_C^{(p-1)} x + \Delta_C^{(p)} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-p} & f_0 \psi(x) - \psi_0 f(x) \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-p} & f_1 \varphi(x) - \varphi_1 f(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ B_{m-p+1,1} & B_{m-p+1,2} & \dots & B_{m-p+1,m-p} & f_{m-p} \varphi(x) - \varphi_{m-p} f(x) \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\Delta_C^{(1)} x^{p-1} + \Delta_C^{(2)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_C^{(p)} = \Delta \psi(x) + U_C \varphi(x) - V_C f(x),$$

en désignant par U_C et V_C des polynômes de degré $m-p$ en x et par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,m-p} & f_0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-p} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ B_{m-p+1,1} & \dots & \dots & B_{m-p+1,m-p} & 0 \end{vmatrix}.$$

En opérant de même sur tous les déterminants

$$\Delta_B^{(1)} = \begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,m-p+1} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ B_{m-p+1,1} & \dots & \dots & B_{m-p+1,m-p+1} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_L^{(1)} = \begin{vmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \dots & L_{1,m-p+1} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots \\ B_{m-p+1,1} & \dots & \dots & B_{m-p+1,m-p+1} \end{vmatrix},$$

on trouvera la série des identités

$$\begin{aligned} \Delta_B^{(1)} x^{p-1} + \Delta_B^{(2)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_B^{(p)} &= \Delta \varphi(x) + U_B \varphi(x) - V_B f(x), \\ \Delta_C^{(1)} x^{p-1} + \Delta_C^{(2)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_C^{(p)} &= \Delta \psi(x) + U_C \varphi(x) - V_C f(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_L^{(1)} x^{p-1} + \Delta_L^{(2)} x^{p-2} + \ldots + \Delta_L^{(p)} &= \Delta \Theta(x) + U_L \varphi(x) - V_L f(x). \end{aligned}$$

Si $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $\ldots$, $\Theta(x) = 0$ admettent p racines communes, ces p racines communes annuleront les premiers membres de ces égalités, qui ne sont que de degré $p-1$; par suite, tous les coefficients de ces fonctions de degré $p-1$ sont nuls. On a donc

$$\begin{array}{llll} \Delta_B^{(1)}=0, & \Delta_B^{(2)}=0, & \ldots, & \Delta_B^{(p)}=0,\\ \Delta_C^{(1)}=0, & \Delta_C^{(2)}=0, & \ldots, & \Delta_C^{(p)}=0,\\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots,\\ \Delta_L^{(1)}=0, & \Delta_L^{(2)}=0, & \ldots, & \Delta_L^{(p)}=0. \end{array}$$

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, les équations proposées auront p racines communes, car on a alors les identités

$$\begin{gathered} 0=\Delta\varphi(x)+U_B\varphi(x)-V_Bf(x),\\ 0=\Delta\psi(x)+U_C\varphi(x)-V_Cf(x),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 0=\Delta\Theta(x)+U_L\varphi(x)-V_Lf(x); \end{gathered}$$

la première équation nous montre que $\varphi(x)=0$, $f(x)=0$ ont p racines communes, et les équations suivantes, qui sont également des identités, nous montrent que ces p racines communes à $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ annulent $\psi(x)$, …, $\Theta(x)$. On peut donc dire que *le groupe des* $(n-1)p$ *équations*

$$\begin{array}{llll} \Delta_B^{(1)}=0, & \Delta_B^{(2)}=0, & \ldots, & \Delta_B^{(p)}=0,\\ \Delta_C^{(1)}=0, & \Delta_C^{(2)}=0, & \ldots, & \Delta_L^{(p)}=0,\\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots,\\ \Delta_L^{(1)}=0, & \Delta_L^{(2)}=0, & \ldots, & \Delta_L^{(p)}=0 \end{array}$$

représente les conditions nécessaires et suffisantes pour que les n *équations proposées aient* p *racines communes.*

25. L'équation qui donne les p racines communes s'obtient aisément : il suffit de considérer l'un des déterminants mineurs d'ordre $m-p$ de l'un des déterminants Δ_B, Δ_C, … ou Δ_L à volonté, et d'opérer sur ce déterminant comme nous l'avons fait pour $\Delta_B^{(1)}$, $\Delta_C^{(1)}$, …, $\Delta_L^{(1)}$; et, si l'on désigne par $\mathfrak{D}_B^{(\mu)}$ le déterminant

$$\mathfrak{D}_B^{(\mu)}=\begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \ldots & B_{1,m-p-1} & B_{1,m-p+\mu}\\ B_{2,1} & B_{2,2} & \ldots & B_{2,m-p-1} & B_{2,m-p+\mu}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ B_{m-p,1} & B_{m-p,2} & \ldots & B_{m-p,m-p-1} & B_{m-p,m-p+\mu} \end{vmatrix},$$

l'équation de degré p qui donne les p racines communes sera

$$\mathfrak{D}_B^{(0)} x^p + \mathfrak{D}_B^{(1)} x^{p-1} + \ldots + \mathfrak{D}_B^{(p)} = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{D}_C^{(0)} x^p + \mathfrak{D}_C^{(1)} x^{p-1} + \ldots + \mathfrak{D}_C^{(p)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathfrak{D}_L^{(0)} x^p + \mathfrak{D}_L^{(1)} x^{p-1} + \ldots + \mathfrak{D}_L^{(p)} = 0;$$

elle affecte ainsi diverses formes, ce qui nous montre que les déterminants qui figurent dans les équations comme coefficients des mêmes puissances de x sont proportionnels. La manière dont les conditions précédentes ont été obtenues nous montre que l'on aurait pu leur donner des formes diverses, en prenant, pour les éléments qui figurent dans les déterminants à partir de la seconde rangée, les éléments des déterminants de Cauchy relatifs aux équations qu'on obtient en associant successivement toutes les équations données à chacune d'entre elles, au lieu d'associer, comme nous l'avons fait, la première équation $f(x) = 0$ à toutes les autres.

26. Comme application de la théorie précédente, je mentionnerai la recherche des conditions que doivent remplir les coefficients d'une équation de degré m pour qu'elle ait n racines égales. On sait que la question se ramène à exprimer que n équations de degré $m - n + 1$ ont une racine commune.

Comme seconde application, nous citerons la recherche des conditions pour qu'un polynôme de degré mp soit la puissance $m^{\text{ième}}$ exacte d'un polynôme de degré p et la formation de ce polynôme.

Ces deux dernières questions sont des applications immédiates de la théorie précédente; nous ne nous y arrêterons pas.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 décembre 1878.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 21 décembre 1878.

Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

THÈSE D'ANALYSE[1].

SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

DES

FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 décembre 1878.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer :

Paris, le 21 décembre 1878.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

(1) Cette Thèse d'Analyse est imprimée à part.

5030 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.