N° D'ORDRE
212.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

M. CH. GALOPIN.

1re Thèse de Mécanique. — Sur l'équation de la surface des ondes lumineuses dans les milieux biréfringents.

2e Thèse. — Propositions d'Astronomie données par la Faculté.

Soutenues le 12 Juillet 1858 devant la Commission d'Examen.

MM. LAMÉ, *Président.*
LIOUVILLE, } *Examinateurs.*
PUISEUX, }

GENÈVE

IMPRIMERIE DE JULES-G^me FICK

1858

THÈSE DE MÉCANIQUE.

DE L'ÉQUATION DE LA SURFACE DES ONDES LUMINEUSES

DANS LES MILIEUX BIRÉFRINGENTS.

Ce travail a pour objet, ainsi que son titre l'indique, la suite des déductions par lesquelles on arrive à l'équation de la surface des ondes lumineuses donnée pour la première fois par Fresnel. Je le divise en deux parties : la première s'étend jusqu'à l'équation de la surface dite d'*élasticité* par plusieurs auteurs, dénomination que j'adopterai, bien qu'elle eût été appliquée par Fresnel à une autre surface; dans cette première partie, l'état de la science n'est, pour ainsi dire, que provisoire, et je me bornerai à exposer les différentes méthodes qui ont été proposées, en y joignant les explications nécessaires pour bien faire comprendre leurs différences et leurs rapports. Dans la seconde partie, qui se réduit à un problème de géométrie, je pourrai exposer d'abord la marche qui me semble pouvoir être adoptée; puis je passerai en revue dans l'ordre chronologique les divers procédés qui ont été employés pour parvenir au même résultat, et je terminerai en examinant quelques points spéciaux qui se rattachent à ce résultat.

J'aurai principalement en vue les phénomènes lumineux dans les cristaux biréfringents à deux axes, et je n'examinerai les corps monoréfringents ou biréfringents à un axe que lorsqu'ils fourniront des données utiles pour traiter le cas général. Je laisse également de côté tout ce qui tient à la dispersion, et je supposerai que la lumière dont il s'agit est homogène. Enfin j'emploierai fréquemment à l'exemple de M. Lamé, le signe S pour indiquer

2

une somme de 3 termes qui jouent le même rôle par rapport aux 3 axes; ainsi S x^2 pour $x^2 + y^2 + z^2$; S x Cos α pour x Cos $\alpha + y$ Cos $\beta + z$ Cos γ, etc., tandis que le signe Σ sera réservé pour une somme de termes qui se rapportent à diverses molécules.

PREMIÈRE PARTIE.

Pour arriver à connaître la surface de l'onde produite par l'ébranlement d'un seul point d'un corps biréfringent, il faut d'abord considérer des ondes planes, comme celles que produit dans l'éther un point lumineux très éloigné, et chercher quelles seront dans le milieu biréfringent qu'on considère, les vitesses de propagation de ces ondes planes en fonction : 1° des constantes qui dépendent de la constitution du milieu; 2° des quantités qui fixent la position de l'onde par rapport à certaines lignes remarquables de ce milieu. C'est cette recherche qui fait l'objet de notre première partie. Nous commencerons par rappeler la méthode de Fresnel, que nous exposerons avec les perfectionnements qu'y ont apporté divers auteurs, et principalement M. de Sénarmont; puis nous passerons aux méthodes que j'appellerai analytiques, parce qu'elles suivent la marche ordinaire des problèmes de mécanique, en commençant par établir les équations différentielles du mouvement; ces méthodes seront divisées en deux groupes.

I. *Méthode de Fresnel* [1].

Le fait de la non-interférence de rayons polarisés à angle droit, et l'existence même de la polarisation démontrent que les vibrations lumineuses

[1] Voir pour cette méthode le mémoire de Fresnel dans le tome VII des Mémoires de l'Académie des sciences, le commentaire de M. de Sénarmont sur ce mémoire dans le 35e cahier du journal de l'école polytechnique, le cours de physique de M. Lamé, tome II, et le cours d'optique autographié de M. Regnault au collége de France, 1841-1842.

sont transversales, c'est-à-dire s'exercent perpendiculairement à la direction de propagation. Fresnel admet ensuite que les actions mutuelles des molécules, inégales en intensité dans les diverses directions, varient de la même manière avec la distance dans toutes les directions, et il déduit de là que dans un mouvement par ondes planes, l'élasticité, ou force résultant d'un déplacement d'une molécule égal à l'unité, force qui tend à la ramener à sa position première, ne dépend que de la direction du déplacement et non de la direction du plan des ondes. C'est cette hypothèse, dont la base est contestable, qui constitue la principale différence entre la théorie de Fresnel et celles que nous examinerons ensuite. Puis il suppose que, dans toute l'étendue d'un cristal, l'élasticité varie de la même manière en passant d'une direction à une autre. Enfin il démontre, par l'analogie avec le pendule et avec les cordes vibrantes, que la vitesse de propagation des ondes planes est proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité, en se bornant au cas où la direction des vibrations et l'élasticité restent constantes en passant d'une onde à une autre; autrement la loi ne serait plus vraie.

Soit une molécule d'éther M (x, y, z) écartée de sa position d'équilibre dans une direction quelconque, d'une quantité σ très petite par rapport aux intervalles moléculaires. Ce déplacement troublant les actions mutuelles de cette molécule et des molécules voisines, celles-ci seront sollicitées à se mouvoir, et par suite les plus éloignées; l'ébranlement se communique donc de proche en proche. Pour que la direction du premier déplacement soit conservée, lors de cette propagation, en tous sens autour du centre d'ébranlement, il faut que la force élastique mise en jeu ait la même direction que le déplacement. Nous allons voir que cela ne peut avoir lieu que pour trois directions rectangulaires du déplacement, directions qui constituent ce qu'on appelle les *axes d'élasticité* au point M.

Lemme. La force élastique, engendrée par un déplacement σ de M., est la résultante de celles qu'engendreraient les déplacements $u, v, w,$ projections de σ sur les axes coordonnés qui sont rectangulaires, mais d'ailleurs quelconques. En effet soit M' une molécule voisine de M; x' y' z' ses coordonnées dans l'état d'équilibre; $\rho = \mathrm{MM}' = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$

et $f(\rho)$ l'action de M' sur M; dans l'équilibre les composantes de cette action sont :

$$f(\rho)\frac{x'-x}{\rho},\ f(\rho)\frac{y'-y}{\rho},\ f(\rho)\frac{z'-z}{\rho}$$

et l'on a

$$\Sigma\, f(\rho)\,\frac{x'-x}{\rho} = 0, \text{etc.},$$

le signe Σ se rapprochant aux diverses molécules telles que M'. Après le déplacement σ de M, les composantes de l'action de M' sur M deviendront :

$$f(\rho)\frac{x'-x}{\rho} + f'(\rho)\frac{x'-x}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dx}u + \frac{d\rho}{dy}v + \frac{d\rho}{dx}w\right)$$

$$- \frac{f(\rho)(x'-x)}{\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}u + \frac{d\rho}{dy}v + \frac{d\rho}{dz}w\right) - \frac{f(\rho)}{\rho}u$$

ou

$$f(\rho)\frac{x'-x}{\rho} - f'(\rho)\frac{x'-x}{\rho}\left(\frac{x'-x}{\rho}u + \frac{y'-y}{\rho}v + \frac{z'-z}{\rho}w\right)$$

$$+ \frac{f(\rho)(x'-x)}{\rho^2}\left(\frac{x'-x}{\rho}u + \frac{y'-y}{\rho}v + \frac{z'-z}{\rho}w\right) - \frac{f(\rho)}{\rho}u$$

et deux autres expressions analogues; les composantes de la résultante de toutes les actions exercées sur M seront donc, en ayant égard aux équations de l'équilibre :

$$X = -\Sigma f'(\rho)\left[\frac{(x'-x)^2}{\rho^2}u + \frac{(x'-x)(y'-y)}{\rho^2}v + \frac{(x'-x)(z'-z)}{\rho^2}w\right]$$

$$+ \Sigma\frac{f(\rho)}{\rho}\left[\frac{(x'-x)^2}{\rho^2} + \frac{(x'-x)(y'-y)}{\rho^2}v + \frac{(x'-x)(z'-z)}{\rho^2}w\right] - \Sigma\frac{f(\rho)}{\rho}u$$

$Y = \ldots\ldots$ $Z = \ldots\ldots$ ce qu'on peut écrire :

$$X = Au + Dv + Ew$$

$$(1)\qquad Y = Du + Bv + Fw$$

$$Z = Eu + Fv + Cw$$

en posant : $A = \Sigma\left[\frac{f(\rho)}{\rho} - f'(\rho)\right]\frac{(x'-x)^2}{\rho^2} - \Sigma\frac{f(\rho)}{\rho}$ $\quad D = \Sigma\left[\frac{f(\rho)}{\rho} - f'(\rho)\right]\frac{(x'-x)(y'-y)}{\rho^2}$

$$B = \Sigma\left[\frac{f(\rho)}{\rho} - f'(\rho)\right]\frac{(y'-y)^2}{\rho^2} - \Sigma\frac{f(\rho)}{\rho} \quad E = \Sigma\left[\frac{f(\rho)}{\rho} - f'(\rho)\right]\frac{(x'-x)(z'-z)}{\rho^2}$$

$$C = \Sigma\left[\frac{f(\rho)}{\rho} - f'(\rho)\right]\frac{(z'-z)^2}{\rho^2} - \Sigma\frac{f(\rho)}{\rho} \quad F = \Sigma\left[\frac{f(\rho)}{\rho} - f'(\rho)\right]\frac{(y'-y)(z'-z)}{\rho^2}$$

Or si l'on fait v es w nuls, X se réduit à A u; A u est donc la composante suivant l'axe des x de la force élastique excitée par un déplacement u de M; Dv, Ew, etc., ont une signification analogue; donc les valeurs (1) justifient le lemme énoncé.

Théorème. Existence des 3 axes d'élasticité. Les valeurs (1) donnent :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = u^2(A^2 + D^2 + E^2) + v^2(D^2 + B^2 + F^2) +$$
$$w^2(E^2 + F^2 + C^2) + 2uv(AD + BD + EF) + \ldots\ldots = K^2\sigma^2$$

en appelant K le rapport de la force élastique au déplacement; car, pour des déplacements très petits, les forces peuvent être regardées comme proportionnelles à ces déplacements. Soient d'ailleurs λ, μ, ν les angles de la force avec les axes coordonnés, et α, β, γ ceux du déplacement; d'où

$$\text{Cos}\,\lambda = \frac{X}{K\sigma}, \text{Cos}\,\mu = \frac{Y}{K\sigma}, \text{Cos}\,\nu = \frac{Z}{K\sigma}, \text{Cos}\,\alpha = \frac{u}{\sigma}, \text{Cos}\,\beta = \frac{v}{\sigma}, \text{Cos}\,\gamma = \frac{w}{\sigma},$$

donc

$$K\,\text{Cos}\,\lambda = \frac{X}{\sigma} = \frac{X\,\text{Cos}\,\alpha}{u} = A\,\text{Cos}\,\alpha + D\,\frac{v}{u}\,\text{Cos}\,\alpha + E\,\frac{w}{u}\,\text{Cos}\,\alpha =$$

$$A\,\text{Cos}\,\alpha + D\,\text{Cos}\,\beta + E\,\text{Cos}\,\gamma,$$

et de même

$$K\,\text{Cos}\,\mu = D\,\text{Cos}\,\alpha + B\,\text{Cos}\,\beta + F\,\text{Cos}\,\gamma;$$
$$K\,\text{Cos}\,\nu = E\,\text{Cos}\,\alpha + F\,\text{Cos}\,\beta + C\,\text{Cos}\,\gamma.$$

Donc pour que

$$\alpha = \lambda,\ \beta = \mu,\ \gamma = \nu,$$

il faut et il suffit que

$$K \cos \alpha = A \cos \alpha + D \cos \beta + E \cos \gamma,$$
$$K \cos \beta = D \cos \alpha + B \cos \beta + F \cos \gamma,$$
$$K \cos \gamma = E \cos \alpha + F \cos \beta + C \cos \gamma,$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}(A\text{-}K) \cos \alpha + D \cos \beta + E \cos \gamma = 0 \\ D \cos \alpha + (B\text{-}K) \cos \beta + F \cos \gamma = 0 \\ E \cos \alpha + F \cos \beta + (C\text{-}K) \cos \gamma = 0\end{array}\right.$$

Or ces trois équations sont identiques à celles qui servent à déterminer les axes de la surface du second degré

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2 D x y + 2 E x z + 2 F y z + \ldots = 0$$

K dépendant des longueurs des axes. Comme A, B, C ne sont jamais nuls, cette surface est toujours douée de centre.

Supposant, comme nous l'avons dit, que les axes d'élasticité, dont on vient de démontrer l'existence pour le point M, ont la même direction dans tous les points du corps, prenons des axes coordonnés qui leur soient parallèles; alors D, E, F seront nuls, et Au, Bv, Cw seront les forces élastiques excitées suivant chaque axe par des déplacements u, v, w parallèles à ces axes. Appelons a, b, c les vitesses de propagation qui correspondent aux déplacements suivant les axes des x, y, z; les forces élastiques étant proportionnelles aux carrés de ces vitesses, nous pouvons poser

$$A = \mu a^2, B = \mu b^2. C = \mu c^2.$$

On suppose $a > b > c$, c'est-à-dire que l'axe des x est l'axe de plus grande élasticité.

Les composantes de la force élastique $K \sigma$ développée par un déplacement σ faisant avec les axes des angles α, β, γ, sont $K \sigma \cos \lambda = X = A u = \mu a^2 \sigma \cos \alpha$, puis $\mu b^2 \sigma \cos \beta$ et $\mu c^2 \sigma \cos \gamma$

d'où $K \sigma = \mu \sigma \sqrt{a^4 \cos^2 \alpha + b^4 \cos^2 \beta + c^4 \cos^2 \gamma}$

$$\text{ou } K^2 = \mu^2 (a^4 \cos^2 \alpha + b^4 \cos^2 \beta + c^4 \cos^2 \gamma).$$

Désignons le radical ci-dessus par H ; l'angle ε de la force avec le déplacement sera donné par

$$\frac{a^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \beta + c^2 \operatorname{Cos}^2 \gamma}{H} = \operatorname{Cos} \varepsilon.$$

Si on décompose la force K σ en deux autres, l'une K σ Cos ε suivant la ligne M G du déplacement et l'autre K σ Sin ε suivant une ligne M S normale à M G, le mouvement se propagera en tous sens autour de M G, mais ce n'est que dans le sens de propagation M S que la direction primitive du déplacement sera conservée. La vitesse V de cette propagation normale, qui est alors proportionnelle à la racine carrée de la force, sera donnée par

$$K \sigma \operatorname{Cos} \varepsilon = \mu \sigma V^2$$

$$\text{d'où } V^2 = \frac{K \operatorname{Cos} \varepsilon}{\mu} = a^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha + b^2 \operatorname{Cos}^2 \beta + c^2 \operatorname{Cos} \gamma.$$

Cette équation, en prenant V pour le rayon vecteur aux angles α, β, γ, représente la surface dite d'élasticité par Fresnel.

Ce qui a été démontré pour le mouvement d'une seule molécule pourra s'appliquer à l'action que reçoit une molécule fixe de la part du milieu environnant qui se déplace, ce qui mène au cas des ondes planes.

Considérons donc des ondes planes qni se propagent dans un milieu indéfini, et pour cela supposons que toutes les molécules d'éther situées dans un plan P passant par l'origine O des coordonnées, soient écartées à la fois de leurs positions d'équilibre d'une quantité σ et parallèlement à une même direction située dans ce plan, comme si le plan glissait tout d'une pièce; le mouvement qui en résultera sera différent suivant la position du plan :

1° Si ce plan est perpendiculaire à un axe, comme Ox, et que le glissement soit parallèle à un autre axe Oy, la force élastique développée sera parallèle à Oy et le mouvement se propagera suivant Ox avec la vitesse b. Donc des ondes lumineuses planes, normales à un des trois axes d'élasticité, et polarisées suivant un plan perpendiculaire à un des autres axes, se propagent sans se décomposer, en conservant leur plan de polarisation.

2° Si le plan P est perpendiculaire à Ox et que le glissement fasse dans le plan y O z un angle i avec O z, le mouvement qui aura lieu sera la résultante de deux mouvements partiels dus l'un au glissement σ Cos$i$ parallèle à O z l'autre à σ Sin$i$ parallèle à O y. Ainsi une onde plane lumineuse normale à un des axes d'élasticité et polarisée suivant un plan quelconque se décomposera en deux ondes polarisées à angle droit et qui se propagent dans une même direction avec des vitesses différentes.

3° Si le plan P est quelconque et a pour équation x Cos l + y Cos m + z Cos $n = 0$, l, m, n étant les angles de sa normale avec les axes, nous allons prouver que parmi toutes les directions de σ (angles α β, γ,) il y en a deux rectangulaires et seulement deux telles que leur direction et celle de la force élastique développée soient dans un même plan normal à P. En effet les angles de la force avec les axes étant λ, μ, ν, on aura en exprimant que la force, la normale au plan et le déplacement sont trois droites perpendiculaires à une même droite aux angles φ, χ, ψ :

$$\text{Cos}\,\lambda\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,\mu\,\text{Cos}\,\chi + \text{Cos}\,\nu\,\text{Cos}\,\psi = 0$$

ou $$a^2\,\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\varphi + b^2\,\text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\chi + c^2\,\text{Cos}\,\gamma\,\text{Cos}\,\psi = o$$

puis : $$\text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,\beta\,\text{Cos}\,\chi + \text{Cos}\,\gamma\,\text{Cos}\,\psi = o$$

$$\text{Cos}\,l\,\text{Cos}\,\varphi + \text{Cos}\,m\,\text{Cos}\,\chi + \text{Cos}\,n\,\text{Cos}\,\psi = o$$

Or, ces équations sont par rapport à Cos φ, Cos χ, Cos ψ, quantités à éliminer, ce que sont par rapport à d Cos α, d Cos β, d Cos γ les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} a^2\,\text{Cos}\,\alpha\,d\,\text{Cos}\,\alpha + b^2\,\text{Cos}\,\beta\,d\,\text{Cos}\,\beta + c^2\,\text{Cos}\,\gamma\,d\,\text{Cos}\,\gamma = o \\ \text{Cos}\,\alpha\,d\,\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,\beta\,d\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,\gamma\,d\,\text{Cos}\,\gamma = o \\ \text{Cos}\,l\,d\,\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,m\,d\,\text{Cos}\,\beta + \text{Cos}\,n\,d\,\text{Cos}\,\gamma = o \end{array}\right.$$

qui expriment que la direction (α, β, γ) est celle des axes de la section faite dans l'ellipsoïde $\frac{1}{r^2} = a^2\,\text{Cos}^2\,\alpha + b^2\,\text{Cos}^2\,\beta + c^2\,\text{Cos}^2\,\gamma$ par le plan P. Donc toute onde plane lumineuse parallèle à P et polarisée suivant un plan normal à une de ces deux directions se propagera suivant la normale à P en conservant son plan de polarisation, tandis qu'une onde plane lumineuse parallèle à P et polarisée suivant un plan quelconque donnera lieu à deux systèmes d'ondes planes polarisées à angle droit, qui se propageront suivant la même direction avec des vitesses différentes données par

$$V^2 = a^2 \text{Cos}^2 \alpha + b^2 \text{Cos}^2 \beta + c^2 \text{Cos}^2 \gamma,$$

et qui cesseront d'être parallèles au sortir du cristal, si la surface d'émergence est oblique à celle des ondes, de manière que la différence des vitesses entraîne une différence de réfraction.

Pour avoir la valeur des vitesses en fonction de a^2, b^2, c^2, $l, m, n,$ éliminons φ, χ, ψ entre les trois équations de la page 12. Pour cela ajoutons-les en les multipliant respectivement par A, B, 1 ; nous aurons :

$$\text{Cos}\, l + (B + A\,a^2)\,\text{Cos}\,\alpha = 0,$$

$$\text{Cos}\, m + (B + A\,b^2)\,\text{Cos}\,\beta = 0,$$

$$\text{Cos}\, n + (B + A\,c^2)\,\text{Cos}\,\gamma = 0.$$

Ajoutons ces trois dernières multipliées par

$$\text{Cos}\,\alpha,\ \text{Cos}\,\beta,\ \text{Cos}\,\gamma\,;$$

il viendra

$$B + A\,V^2 = 0;$$

donc

$$\frac{\text{Cos}\, l}{V^2 - a^2} - A\,\text{Cos}\,\alpha = 0,$$

$$\frac{\text{Cos}\, m}{V^2 - b^2} - A\,\text{Cos}\,\beta = 0,$$

$$\frac{\text{Cos}\, n}{V^2 - c^2} - A\,\text{Cos}\,\gamma = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\text{Cos}^2 l}{V^2 - a^2} + \frac{\text{Cos}^2 m}{V^2 - b^2} + \frac{\text{Cos}^2 n}{V^2 - c^2} = 0,$$

ou

$$S\,\frac{\text{Cos}^2 l}{V^2 - a^2} = 0.$$

C'est la surface représentée par cette équation lorsqu'on regarde V comme le rayon vecteur aux angles l, m, n que nous appellerons *surface d'élasticité.*

La théorie de Fresnel s'applique indifféremment à la supposition qui attribue la propagation de la lumière à l'éther seul, ou à celle qui y fait participer les molécules du milieu lui-même.

II. *Méthodes analytiques.*

PREMIER GROUPE.

Méthode de Cauchy [1].

Equations différentielles du mouvement. Soit une molécule d'éther M (x,y,z) de masse m, écartée de sa position d'équilibre dans une direction quelconque d'une quantité σ très petite par rapport aux intervalles moléculaires et dont les projections sur 3 axes rectangulaires sont $u, v, w,$ fonctions de $x, y, z.$ Soit M' une molécule voisine de M; x' y' z' ses coordonnées dans l'état d'équilibre et m' sa masse; soit $\varrho = \mathrm{MM'} = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$ Supposons l'attraction ou répulsion mutuelle de M et M' représentée par $mm' f(\varrho)$; la résultante des actions exercées sur M aura pour projections sur les axes, dans l'état d'équilibre :

$$m\,\Sigma \pm m' \frac{x'-x}{\varrho} f(\varrho),$$

et deux expressions semblables, Σ se rapportant aux diverses molécules telles que M', + indiquant l'attraction et — la répulsion. Après le déplacement, les coordonnées de M seront

$$x+u,\ y+v,\ z+w, \text{ celles de M'}: x'+u',\ y'+v',\ z'+w',$$

[1] Exercices mathématiques, tomes III, IV et V.

et l'on aura

$$(3) \qquad u' = u + \frac{du}{dx}(x'-x) + \frac{du}{dy}(y'-y) + \frac{du}{dz}(z'-z) + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x'-x)^2 + ...$$

$$v' = v + ... \quad w' = w + ...$$

la distance MM' deviendra $\varrho + \Delta\varrho$,

et on aura

$$(\varrho + \Delta\varrho)^2 = (x' + u' - x - u)^2 + (y' + v' - y - v)^2 + (z' + w' - z - w)^2$$

$$= \varrho^2 + 2\left[(x' - x)(u' - u) + (y' - y)(v' - v) + (z' - z)(w' - w)\right] +$$

$$(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2,$$

d'où l'on tire :

$$\Delta\varrho = \frac{x'-x}{\varrho}(u'-u) + \frac{y'-y}{\varrho}(v'-v) + \frac{z'-z}{\varrho}(w'-w) +$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(u'-u)^2}{\varrho} + \frac{(v'-v)^2}{\varrho} + \frac{(w'-w)^2}{\varrho}\right] + ...;$$

les projections de la résultante deviendront

$$m\,\Sigma \pm m'\,\frac{x'+u'-x-u}{\varrho + \Delta\varrho}\,f(\varrho + \Delta\varrho) \text{ et deux expressions semblables;}$$

nous les désignerons par m X, m Y, m Z, de sorte que X, Y, Z seront les projections de la force accélératrice qui sollicite M et qui est due aux actions des autres molécules.

Si u, v, w sont infiniment petits du 1er ordre et qu'on néglige ceux du second, on aura :

$$\Delta\varrho = \frac{x'-x}{\varrho}(u'-u) + \frac{y'-y}{\varrho}(v'-v) + \frac{z'-z}{\varrho}(w'-w)$$

et

$$\frac{f(\varrho + \Delta\varrho)}{\varrho + \Delta\varrho} = \left(1 - \frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right)\frac{f(\varrho) + \Delta\varrho\, f'(\varrho)}{\varrho} = \frac{f(\varrho)}{\varrho} + \frac{\Delta\varrho}{\varrho}\cdot\frac{\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)}{\varrho}$$

d'où

$$X = \Sigma \pm m' \left[\frac{x'-x}{\varrho} f(\varrho) + \frac{\Delta\varrho}{\varrho}(x'-x) \cdot \frac{\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)}{\varrho} + \frac{u'-u}{\varrho} f(\varrho) \right]$$

ou en remplaçant $\Delta\varrho$ par sa valeur :

$$X = \Sigma \pm m' \left[\frac{x'-x}{\varrho} f(\varrho) + \frac{u'-u}{\varrho} f(\varrho) + \left(\frac{x'-x}{\varrho}\right)^2 (u'-u) \cdot \frac{\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)}{\varrho} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{x'-x}{\varrho}\right)\left(\frac{y'-y}{\varrho}\right)(v'-v) \cdot \frac{\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)}{\varrho} + \left(\frac{x'-x}{\varrho}\right)\left(\frac{z'-z}{\varrho}\right)(w'-w) \frac{\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)}{\varrho} \right],$$

et deux expressions semblables pour Y et Z.

Si on suppose que $f(\varrho)$ n'est sensible que pour de très petites valeurs de ϱ ou de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, on pourra, dans les valeurs (3), négliger les puissances de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ supérieures au carré, de sorte que X, Y, Z deviendront des fonctions linéaires de

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy} \dots \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2} \dots$$

Posons pour abréger

$$\pm [\varrho f'(\varrho) - f(\varrho)] = f(\varrho)$$

et désignons par ξ, η, ζ les angles que fait, avec les axes, la droite MM' dans l'état d'équilibre, de sorte que

$$\frac{x'-x}{\varrho} = \text{Cos}\, \xi, \frac{y'-y}{\varrho} = \text{Cos}\, \eta, \frac{z'-z}{\varrho} = \text{Cos}\, \zeta;$$

on aura :

$$X = \Sigma \pm m' \,\text{Cos}\, \xi f(\varrho) + \frac{du}{dx} \Sigma \pm m' \,\text{Cos}\, \xi f(\varrho) +$$

$$\frac{du}{dy} \Sigma \pm m' \,\text{Cos}\, \eta f(\varrho) + \frac{du}{dz} \Sigma \pm m' \,\text{Cos}\, \zeta f(\varrho) +$$

$$\frac{du}{dx}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos}^3 \xi f(\varrho) + \frac{du}{dy}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) +$$

$$\frac{du}{dz}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{dv}{dx}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) +$$

$$\frac{dv}{dy}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos}^2 \eta f(\varrho) + \frac{dv}{dz}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) +$$

$$\frac{dw}{dx}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{dw}{dy}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) +$$

$$\frac{dw}{dz}\, \Sigma\, m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos}^2 \zeta f(\varrho) + \frac{d^2u}{dx^2}\, \Sigma \pm \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^2 \xi f(\varrho) +$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}\, \Sigma \pm \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^2 \eta f(\varrho) + \frac{d^2u}{dz^2}\, \Sigma \pm \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^2 \zeta f(\varrho) +$$

$$2\, \frac{d^2u}{dydz}\, \Sigma \pm \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + 2\, \frac{d^2u}{dxdz}\, \Sigma \pm \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) +$$

$$2\, \frac{d^2u}{dxdy}\, \Sigma \pm \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) + \frac{d^2u}{dx^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^4 \xi f(\varrho) +$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos}^2 \eta f(\varrho) + \frac{d^2u}{dz^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos}^2 \zeta f(\varrho) +$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^3 \xi \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) + \frac{d^2v}{dy^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^3 \eta \operatorname{Cos} \xi f(\varrho) +$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos}^2 \zeta f(\varrho) + \frac{d^2w}{dx^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^3 \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) +$$

$$\frac{d^2w}{dy^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos}^2 \eta \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{d^2w}{dz^2}\, \Sigma\, \frac{m'\varrho}{2} \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos}^3 \zeta f(\varrho) +$$

$$2\frac{d^2u}{dydz}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho) + 2\frac{d^2u}{dxdz}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^3\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho) +$$

$$2\frac{d^2u}{dxdy}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^3\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta f(\varrho) + 2\frac{d^2v}{dydz}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho) +$$

$$2\frac{d^2v}{dxdz}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho) + 2\frac{d^2v}{dxdy}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\xi\,\mathrm{Cos}^2\,\eta f(\varrho) +$$

$$2\frac{d^2w}{dydz}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}^2\,\zeta f(\varrho) + 2\frac{d^2w}{dxdz}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\xi\,\mathrm{Cos}^2\,\zeta f(\varrho) +$$

$$2\frac{d^2w}{dxdy}\,\Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,\mathrm{Cos}^2\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)$$

et deux expressions semblables pour Y et Z.

Les équations de l'équilibre annulent les 4 premiers termes de la valeur de X; admettons de plus que, dans l'état primitif, les molécules M', M '.... sont deux à deux de masses égales et symétriquement placées par rapport à M; alors les Σ de degré impair par rapport à l'ensemble des trois cosinus seront nulles. Ainsi on pourra écrire :

$$X = \mathcal{A}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathcal{B}\frac{d^2u}{dy^2} + \mathcal{C}\frac{d^2u}{dz^2} + 2\,\mathcal{D}\frac{d^2u}{dydz} + 2\,\mathcal{E}\frac{d^2u}{dxdz} +$$

$$2\,\mathcal{F}\frac{d^2u}{dxdy} + L\frac{d^2u}{dx^2} + R\frac{d^2u}{dy^2} + Q\frac{d^2u}{dz^2} + W\frac{d^2v}{dx^2} +$$

$$W'\frac{d^2v}{dy^2} + W''\frac{d^2v}{dz^2} + V\frac{d^2w}{dx^2} + V'\frac{d^2w}{dy^2} + V''\frac{d^2w}{dz^2} +$$

$$2\left(U\frac{d^2u}{dydz} + V\frac{d^2u}{dxdz} + W\frac{d^2u}{dxdy} + V'\frac{d^2v}{dydz} + U\frac{d^2v}{dxdz} +\right.$$

$$\left.R\frac{d^2v}{dxdy} + W''\frac{d^2w}{dydz} + Q\frac{d^2w}{dxdz} + U\frac{d^2w}{dxdy}\right)$$

$$Y = \mathfrak{A} \frac{d^2v}{dx^2} + \mathfrak{B} \frac{d^2v}{dy^2} + \mathfrak{C} \frac{d^2v}{dz^2} + 2\,\mathfrak{D} \frac{d^2v}{dydz} + 2\,\mathfrak{E} \frac{d^2v}{dxdy} +$$

$$2\,\mathfrak{F} \frac{d^2v}{dxdy} + W \frac{d^2u}{dx^2} + W' \frac{d^2u}{dy^2} + W'' \frac{d^2u}{dz^2} + R \frac{d^2v}{dx^2} +$$

$$M \frac{d^2v}{dy^2} + P \frac{d^2v}{dz^2} + U \frac{d^2w}{dx^2} + U' \frac{d^2w}{dy^2} + U'' \frac{d^2w}{dz^2} +$$

$$2\Big(V' \frac{d^2u}{dydz} + U \frac{d^2u}{dxdz} + R \frac{d^2u}{dxdy} + U' \frac{d^2v}{dydz} + V' \frac{d^2v}{dxdz} +$$

$$W' \frac{d^2v}{dxdy} + P \frac{d^2w}{dydz} + W'' \frac{d^2w}{dxdz} + V' \frac{d^2w}{dydx}\Big)$$

$$Z = \mathfrak{A} \frac{d^2w}{dx^2} + \mathfrak{B} \frac{d^2w}{dy^2} + \mathfrak{C} \frac{d^2w}{dz^2} + 2\,\mathfrak{D} \frac{d^2w}{dydz} + 2\,\mathfrak{E} \frac{d^2w}{dxdz} +$$

$$2\,\mathfrak{F} \frac{d^2w}{dzdy} + V \frac{d^2u}{dx^2} + V' \frac{d^2u}{dy^2} + V'' \frac{d^2u}{dz^2} + U \frac{d^2v}{dx^2} +$$

$$U' \frac{d^2v}{dy^2} + U'' \frac{d^2v}{dz^2} + Q \frac{d^2w}{dx^2} + P \frac{d^2w}{dy^2} + N \frac{d^2w}{dz^2} +$$

$$2\Big(W'' \frac{d^2u}{dydz} + Q \frac{d^2u}{dxdz} + U \frac{d^2u}{dxdy} + P \frac{d^2v}{dydz} + W'' \frac{d^2v}{dxdz} +$$

$$V' \frac{d^2v}{dxdy} + U'' \frac{d^2w}{dydz} + V'' \frac{d^2w}{dxdz} + W'' \frac{d^2w}{dxdy}\Big)$$

en posant pour abréger :

$$\mathfrak{A} = \Sigma \pm \frac{m'\rho}{2} \operatorname{Cos}^2 \xi f(\rho) \quad \mathfrak{B} = \Sigma \pm \frac{m'\rho}{2} \operatorname{Cos}^2 \eta f(\rho) \quad \mathfrak{C} = \Sigma \pm \frac{m'\rho}{2} \operatorname{Cos}^2 \zeta f(\rho)$$

$$\mathfrak{D}=\Sigma\pm\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)\quad \mathfrak{E}=\Sigma\pm\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)\quad \mathfrak{F}=\Sigma\pm\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta f(\varrho)$$

$$\mathrm{L}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^4\xi f(\varrho)\quad \mathrm{M}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^4\eta f(\varrho)\quad \mathrm{N}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^4\zeta f(\varrho)$$

$$\mathrm{P}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^2\eta\,\mathrm{Cos}^2\zeta f(\varrho)\quad \mathrm{Q}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^2\xi\,\mathrm{Cos}^2\zeta f(\varrho)\quad \mathrm{R}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^2\xi\,\mathrm{Cos}^2\eta f(\varrho)$$

$$\mathrm{U}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^2\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)\quad \mathrm{V}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^3\xi\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)\quad \mathrm{W}=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^3\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta f(\varrho)$$

$$\mathrm{U}'=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^3\eta\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)\quad \mathrm{V}'=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^2\eta\,\mathrm{Cos}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\zeta f(\varrho)\quad \mathrm{W}'=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^3\eta\,\mathrm{Cos}\,\xi f(\varrho)$$

$$\mathrm{U}''=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^3\zeta\,\mathrm{Cos}\,\eta f(\varrho)\quad \mathrm{V}''=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^3\zeta\,\mathrm{Cos}\,\xi f(\varrho)\quad \mathrm{W}''=\Sigma\frac{m'\varrho}{2}\mathrm{Cos}^2\zeta\,\mathrm{Cos}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\eta f(\varrho)$$

En supposant qu'il n'y ait pas de force extérieure agissant sur les molécules, les équations du mouvement seront donc :

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\mathrm{A}\frac{d^2u}{dx^2}+\mathrm{B}\frac{d^2u}{dy^2}+\mathrm{C}\frac{d^2u}{dz^2}+2\,\mathrm{D}\frac{d^2u}{dydz}+2\,\mathrm{E}\frac{d^2u}{dxdz}+2\,\mathrm{F}\frac{d^2u}{dxdy}+\mathrm{L}\frac{d^2u}{dx^2}+$$

$$\mathrm{R}\frac{d^2u}{dy^2}+\mathrm{Q}\frac{d^2u}{dz^2}+\mathrm{W}\frac{d^2v}{dx^2}+\mathrm{W}'\frac{d^2v}{dy^2}+\mathrm{W}''\frac{d^2v}{dz^2}+\mathrm{V}\frac{d^2w}{dx^2}+\mathrm{V}'\frac{d^2u}{dy^2}+\mathrm{V}''\frac{d^2w}{dz^2}+$$

$$(4)\qquad 2\left(\mathrm{U}\frac{d^2u}{dydz}+\mathrm{V}\frac{d^2u}{dxdz}+\mathrm{W}\frac{d^2u}{dxdy}+\mathrm{V}'\frac{d^2v}{dydz}+\mathrm{U}\frac{d^2v}{dxdz}+\right.$$

$$\left.\mathrm{R}\frac{d^2v}{dxdy}+\mathrm{W}''\frac{d^2w}{dydz}+\mathrm{Q}\frac{d^2w}{dxdz}+\mathrm{U}\frac{d^2w}{dxdy}\right)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \mathcal{A}\,\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots.$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \mathcal{A}\,\frac{d^2w}{dx^2} + \ldots. \quad (^1).$$

Ces équations peuvent se mettre sur la forme connue :

$$\omega\,\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz},$$

$$\omega\,\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz},$$

$$\omega\,\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz},$$

ω étant la densité du système de molécules dans l'état d'équilibre et N_1, T_3.... les composantes suivant les axes de la pression exercée sur un élément-plan perpendiculaire à un de ces axes. Mais quelques développements sont nécessaires pour bien comprendre quelles relations ont ces composantes avec les quantités considérées jusqu'ici.

Des pressions ou tensions. Nous avons vu que les composantes de l'action exercée sur la molécule M, dans l'état de repos, par toutes les autres molécules du milieu sont $m\,\Sigma \pm m' \operatorname{Cos}\xi\, f(\rho)$, $m\,\Sigma \pm m' \operatorname{Cos}\eta\, f(\rho)$, $m\,\Sigma \pm m' \operatorname{Cos}\zeta\, f(\rho)$. Si on en déduit les composantes de la pression exercée en M sur un élément-plan perpendiculaire à l'axe des *x*, puis à celui des *y* et à celui des *z*, composantes que nous appellerons A, F, E — F, B, D — E, D, C, on trouve avec Cauchy (Mémoire sur la pression ou tension dans un système de points matériels, Exerc. Math. III) que :

$$A = \frac{\omega}{2}\,\Sigma \pm m'\rho \operatorname{Cos}^2\xi f(\rho) \quad B = \frac{\omega}{2}\,\Sigma \pm m'\rho \operatorname{Cos}^2\eta f(\rho) \quad C = \frac{\omega}{2}\,\Sigma \pm \operatorname{Cos}^2\zeta f(\rho)$$

$$D = \frac{\omega}{2}\Sigma \pm m'\rho \operatorname{Cos}\eta \operatorname{Cos}\zeta f(\rho) \quad E = \frac{\omega}{2}\Sigma \pm m'\rho \operatorname{Cos}\xi \operatorname{Cos}\zeta f(\rho) \quad F = \frac{\omega}{2}\Sigma \pm m'\rho \operatorname{Cos}\xi \operatorname{Cos}\eta f(\rho)$$

(1) On arrive aux mêmes équations en considérant deux systèmes de molécules qui se pénètrent l'un étant le fluide éthéré et l'autre les molécules mêmes du corps, et en supposant ces dernières inférieures en nombre, mais douées de masses bien supérieures à celles des molécules de l'éther.
(Voir Cauchy. Mém. de l'Acad. des sciences, XXII.)

De sa démonstration résulte donc que la composante suivant l'axe des x de la pression exercée sur un élément-plan perpendiculaire aux x se déduit de la composante suivant l'axe des x de l'action exercée sur M, en remplaçant m par la densité ω, divisant par 2 et multipliant sous le signe Σ par ϱ Cos ξ; les autres composantes se forment d'une manière analogue.

Passons à l'état de mouvement, dans lequel la densité ne sera plus ω mais ω'. Les composantes de l'action exercée sur M, divisées par m sont alors :

$$X = \Sigma \pm m' \frac{x' + u' - x\ u}{\varrho + \Delta\varrho} f(\varrho + \Delta\varrho)$$

ce qui devient, comme nous l'avons vu :

$$X = \Sigma \pm m' \operatorname{Cos} \xi f(\varrho) + \frac{du}{dx} \Sigma \pm m' \operatorname{Cos} \xi f(\varrho) + \frac{du}{dy} \Sigma \pm m' \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) +$$

$$\frac{du}{dz} \Sigma \pm m' \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{du}{dx} \Sigma m' \operatorname{Cos}^3 \xi f(\varrho) + \frac{du}{dy} \Sigma m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) +$$

$$\frac{du}{dz} \Sigma m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{dv}{dx} \Sigma m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \eta f(\varrho) + \frac{dv}{dy} \Sigma u' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos}^2 \eta f(\varrho) +$$

$$\frac{dv}{dz} \Sigma m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{dw}{dx} \Sigma m' \operatorname{Cos}^2 \xi \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) +$$

$$\frac{dw}{dy} \Sigma m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \zeta f(\varrho) + \frac{dw}{dz} \Sigma m' \operatorname{Cos} \xi \operatorname{Cos}^2 \zeta f(\varrho) +$$

$$\mathfrak{A} \frac{d^2u}{dx^2} + \mathfrak{B} \frac{d^2u}{dy^2} + \mathfrak{C} \frac{d^2u}{dz^2} + 2\, \mathfrak{D} \frac{d^2u}{dydz} + 2\, \mathfrak{E} \frac{d^2u}{dxdz} +$$

$$2\, \mathfrak{F} \frac{d^2u}{dxdy} + L \frac{d^2u}{dx^2} + R \frac{d^2u}{dy^2} + Q \frac{d^2u}{dz^2} + W \frac{d^2v}{dx^2} +$$

$$W' \frac{d^2v}{dy^2} + W'' \frac{d^2v}{dz^2} + V \frac{d^2w}{dx^2} + V' \frac{d^2w}{dy^2} + V'' \frac{d^2w}{dz^2} +$$

$$2\left(U\frac{d^2u}{dydz}+V\frac{d^2u}{dxdz}+W\frac{d^2u}{dxdy}+V'\frac{d^2v}{dydz}+U\frac{d^2v}{dxdz}+\right.$$

$$\left.R\frac{d^2v}{dxdy}+W''\frac{d^2w}{dydz}+Q\frac{d^2w}{dxdz}+U\frac{d^2w}{dxdy}\right)$$

et deux expressions analogues. De même les composantes de la pression, que nous appelons N_1, T_3, T_2, $-T_3$, N_2, T_1, $-T_2$, T_1, N_3, seront, d'après A, D,... :

$$N_1=\frac{\omega'}{2}\Sigma\pm m'(\varrho+\Delta\varrho)\left(\frac{x'+u'-x-u}{\varrho+\Delta\varrho}\right)^2 f(\varrho+\Delta\varrho)=$$

$$\frac{\omega'}{2}\Sigma\pm m'\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{\Delta\varrho}{\varrho^2}\right)\left[(x'-x)^2+2(x'-x)(u'-u)\right]\left[f(\varrho)+\Delta\varrho f'(\varrho)\right]=$$

$$\frac{\omega'}{2}\Sigma\pm m'\varrho\operatorname{Cos}^2\xi f(\varrho)+\frac{\omega'}{2}\Sigma\pm m'\Delta\varrho\operatorname{Cos}^2\xi\left[\varrho f'(\varrho)-f(\varrho)\right]+$$

$$\omega'\Sigma\pm m'\varrho f(\varrho)\operatorname{Cos}\xi\left(\frac{u'-u}{\varrho}\right),\text{ ou, en développant :}$$

$$N_1=\frac{\omega'}{\omega}A\left(1+2\frac{du}{dx}\right)+2\frac{\omega'}{\omega}\frac{du}{dy}F+2\frac{\omega'}{\omega}\frac{du}{dz}E+$$

$$\omega' L\frac{du}{dx}+\omega' R\frac{dv}{dy}+\omega' Q\frac{dw}{dz}+\omega' U\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+$$

$$\omega' V\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+\omega' W\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right);\text{ puis :}$$

$$T_3=\frac{\omega'}{\omega}F\left(1+2\frac{du}{dz}\right)+2\frac{\omega'}{\omega}\frac{du}{dy}B+2\frac{\omega'}{\omega}\frac{du}{dz}E+\omega' W\frac{du}{dx}+$$

$$\omega' W'\frac{dv}{dy}+\omega' W''\frac{dw}{dz}+\omega' R\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)+$$

$$\omega' \mathrm{U}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) + \omega' \mathrm{V}'\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \text{ et ainsi de suite.}$$

On voit par là que N_1 se déduit de X en multipliant par ω', divisant par 2 tous les termes, sauf le 2e, le 3e et le 4e de X, et multipliant sous chaque somme par ρ Cos ξ, pourvu qu'ensuite on suppose nulles toutes les sommes de degré impair par rapport à l'ensemble des trois cosinus. De même T_3 se déduit de X en multipliant par ρ Cos η, etc. Ainsi la même loi de dérivation qui a été démontrée pour l'état de repos, s'applique à l'état de mouvement.

Dans sa *Théorie de l'Elasticité des corps solides,* page 33, M. Lamé trouve la forme des quantités N_1, T_3..., mais sans donner les valeurs des coëfficients de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$....; or il est facile de s'assurer que ces coëfficients ont bien les valeurs que nous leur assignons. En effet, d'après la règle indiquée il faut, pour avoir N_1 par exemple, multiplier $\Sigma \pm m' \frac{x'+u'-x-u}{\rho+\Delta\rho} [f(\rho) + \Delta\rho\, f'(\rho)]$ par ρ Cos ξ sous le signe Σ, en multipliant aussi par $\frac{\omega'}{2}$; mais M. Lamé, supposant nulle l'action mutuelle de deux molécules dans l'état de repos, $f(\rho)$ disparaît et $\pm f'(\rho)$ peut se remplacer par $\frac{f(\rho)}{\rho}$; alors $\Delta\rho$ étant facteur, on peut réduire $\frac{x'-x+u'-u}{\rho+\Delta\rho}$ à $\frac{x'-x}{\rho}$ ou Cos ξ et on aura $N_1 = \frac{\omega'}{2} \Sigma m' \operatorname{Cos}^2 \xi f(\rho) \Delta\rho$

$$\text{ou } N_1 = \omega' \mathrm{L} \frac{du}{dx} + \omega' \mathrm{R} \frac{dv}{dy} + \omega' \mathrm{Q} \frac{dw}{dz} + \omega' \mathrm{U}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) +$$
$$\omega' \mathrm{V}\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + \omega' \mathrm{W}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

valeur qui coïncide avec celle qui a été donnée plus haut, puisque la supposition qui annule $f(\rho)$, fait disparaître A, B, C, D, E, F.

Si on veut exprimer les pressions au moyen de la densité primitive ω, on remarque que

$$\omega' = \frac{\omega}{1+\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}} \text{ (Cauchy, mémoire cité) ou } \omega' = \omega\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right).$$

Donc on aura

$$N_1 = A\left(1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + 2\frac{du}{dy}F + 2\frac{du}{dz}E +$$

$$\omega L\frac{du}{dx} + \omega R\frac{dv}{dy} + \omega Q\frac{dw}{dz} + \omega U\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) +$$

$$\omega V\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + \omega W\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

Ainsi lorsque A, B, C, D, E, F sont nuls, on peut indifféremment mettre ω' ou ω dans N_1, T_3....

Prenant pour N_1 cette dernière valeur, moins les termes en A, F, E, et pour T_3, T_2... les valeurs analogues, et les substituant dans les équations

$$\omega\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}, \text{ etc.}$$

on verra qu'elles reproduisent les équations (4) de la page 20, dans lesquelles on supposerait nuls A, B, C, D, E, F qui disparaissent avec $f(\varrho)$; c'était ce que nous voulions montrer.

Il résulte aussi de ce qui précède, que les coëfficients désignés par M. Lamé (endroit cité) par A_1, B_1, C_1..... correspondent à ceux que nous avons appelés, d'après Cauchy, L, M, N, P..... suivant le tableau ci-après, lorsqu'on suppose nul $f(\varrho)$, et par conséquent $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$:

$A_1 = \omega L$	$A_2 = \omega R$	$A_3 = \omega Q$
$B_1 = \omega R$	$B_2 = \omega M$	$B_3 = \omega P$
$C_1 = \omega Q$	$C_2 = \omega P$	$C_3 = \omega N$
$D_1 = \omega U$	$D_2 = \omega U'$	$D_3 = \omega U''$
$E_1 = \omega V$	$E_2 = \omega V'$	$E_3 = \omega V''$
$F_1 = \omega W$	$F_2 = \omega W'$	$F_3 = \omega W''$
$\mathfrak{A}_1 = \omega U$	$\mathfrak{A}_2 = \omega V$	$\mathfrak{A}_3 = \omega W$
$\mathfrak{B}_1 = \omega U'$	$\mathfrak{B}_2 = \omega V'$	$\mathfrak{B}_3 = \omega W'$
$\Gamma_1 = \omega U''$	$\Gamma_2 = \omega V''$	$\Gamma_3 = \omega W''$
$\Delta_1 = \omega P$	$\Delta_2 = \omega W''$	$\Delta_3 = \omega V'$
$\mathfrak{E}_1 = \omega W''$	$\mathfrak{E}_2 = \omega Q$	$\mathfrak{E}_3 = \omega U$
$\mathfrak{F}_1 = \omega V'$	$\mathfrak{F}_2 = \omega U$	$\mathfrak{F}_3 = \omega R$

Ainsi les 36 coëfficients introduits par M. Lamé doivent être réduits à 15, indépendamment même des considérations développées, pages 227 et suivantes de la *Théorie de l'Elasticité*.

Intégration des équations; vitesses des ondes planes. Après cette digression revenons aux équations (4) de la page 20. Pour les simplifier, considérons un plan mené par la position primitive de M, et dont la normale fasse avec les axes des angles l, m, n; l'équation de ce plan sera $x \operatorname{Cos} l + y \operatorname{Cos} m + z \operatorname{Cos} n = r$. Supposons que les déplacements et les vitesses initiales soient les mêmes pour toutes les molécules de ce plan, et que, pour les autres molécules, les déplacements et les vitesses initiales ne soient fonctions que de leur distance r à ce plan; alors les valeurs de u, v, w après un temps quelconque ne seront fonctions que de r et t. On aura donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{du}{dr} \operatorname{Cos} l, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dr} \operatorname{Cos} m, \ldots \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dr^2} \operatorname{Cos}^2 l, \ldots$$

Supposons d'ailleurs que les sommes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, L, M, N, P... soient constantes, c'est-à-dire conservent les mêmes valeurs en tout point du milieu, et posons pour abréger :

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{A} + \mathrm{L}) \operatorname{Cos}^2 l + (\mathfrak{B} + \mathrm{R}) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathfrak{C} + \mathrm{Q}) \operatorname{Cos}^2 n + 2(\mathfrak{D} + \mathrm{U}) \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + 2(\mathfrak{E} + \mathrm{V}) \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n + 2(\mathfrak{F} + \mathrm{W}) \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m.$$

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{A} + \mathrm{R}) \operatorname{Cos}^2 l + (\mathfrak{B} + \mathrm{M}) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathfrak{C} + \mathrm{P}) \operatorname{Cos}^2 n + 2(\mathfrak{D} + \mathrm{U}') \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + 2(\mathfrak{E} + \mathrm{V}') \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n + 2(\mathfrak{F} + \mathrm{W}') \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m$$

$$\mathfrak{N} = (\mathfrak{A} + \mathrm{Q}) \operatorname{Cos}^2 l + (\mathfrak{B} + \mathrm{P}) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathfrak{C} + \mathrm{N}) \operatorname{Cos}^2 n + 2(\mathfrak{D} + \mathrm{U}'') \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + 2(\mathfrak{E} + \mathrm{V}'') \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n + 2(\mathfrak{F} + \mathrm{W}'') \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m.$$

$$\mathfrak{P} = \mathrm{U} \operatorname{Cos}^2 l + \mathrm{U}' \operatorname{Cos}^2 m + \mathrm{U}'' \operatorname{Cos}^2 n + 2\,\mathrm{P} \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + 2\,\mathrm{W}'' \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n + 2\,\mathrm{V}' \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m.$$

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{V} \operatorname{Cos}^2 l + \mathrm{V}' \operatorname{Cos}^2 m + \mathrm{V}'' \operatorname{Cos}^2 n + 2\,\mathrm{W}'' \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + 2\,\mathrm{Q} \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n + 2\,\mathrm{U} \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m.$$

$$\mathfrak{R} = \mathrm{W} \operatorname{Cos}^2 l + \mathrm{W}' \operatorname{Cos}^2 m + \mathrm{W}'' \operatorname{Cos}^2 n + 2\,\mathrm{V}' \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n + 2\,\mathrm{U} \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n + 2\,\mathrm{R} \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m.$$

Les équations du mouvement se réduiront à :

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \mathfrak{L}\frac{d^2u}{dr^2} + \mathfrak{R}\frac{d^2v}{dr^2} + \mathfrak{Q}\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \mathfrak{R}\frac{d^2u}{dr^2} + \mathfrak{M}\frac{d^2v}{dr^2} + \mathfrak{P}\frac{d^2w}{dr},$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \mathfrak{Q}\frac{d^2u}{dr^2} + \mathfrak{P}\frac{d^2v}{dr^2} + \mathfrak{N}\frac{d^2w}{dr^2}.$$

L'intégration générale de ces équations a été donnée par Cauchy (comptes rendus, VIII), par M. Blanchet (Journal de Liouville, V) et par M. Newmann (Annales de Poggendorf, XXV); mais elle est inutile au but que nous poursuivons; bornons-nous donc à poser avec Cauchy :

$$u = A \operatorname{Cos}(kr - ht + \varpi) \quad v = B \operatorname{Cos}(kr - ht + \varpi) \quad w = C \operatorname{Cos}(kr - ht + \varpi),$$

k étant égal à $\frac{2\pi}{l}$ et h à $\frac{2\pi}{T}$, l étant la longueur d'ondulation et T la durée d'une vibration; de cette manière le mouvement que nous considérons aura les caractères de la polarisation rectiligne, avec une vitesse de propagation $s = \frac{l}{T} = \frac{h}{k}$. La substitution de ces valeurs de u, v, w dans les équations du mouvement donne :

$$(6) \quad (\mathfrak{L}-s^2)A + \mathfrak{R}B + \mathfrak{Q}C = 0, \quad \mathfrak{R}A + (\mathfrak{M}-s^2)B + \mathfrak{P}C = 0, \quad \mathfrak{Q}A + \mathfrak{P}B + (\mathfrak{N}-s^2)C = 0$$

En éliminant A, B, C qui ne peuvent être nuls tous trois, on obtient l'équation en s^2 :

$$(7) \quad (\mathfrak{L}-s^2)(\mathfrak{M}-s^2)(\mathfrak{N}-s^2) - \mathfrak{P}^2(\mathfrak{L}-s^2) - \mathfrak{Q}^2(\mathfrak{M}-s^2) - \mathfrak{R}^2(\mathfrak{N}-s^2) + 2\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{R} = 0.$$

qui donne pour s^2 3 valeurs et par conséquent pour s six valeurs égales deux à deux avec des signes contraires. D'ailleurs A, B, C étant proportionnels aux cosinus des angles α, β, γ que fait avec les axes la direction de la vibration, on a :

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{L}-s^2)\operatorname{Cos}\alpha + \mathfrak{R}\operatorname{Cos}\beta + \mathfrak{Q}\operatorname{Cos}\gamma = 0 \\ (6\,a) \qquad &\mathfrak{R}\operatorname{Cos}\alpha + (\mathfrak{M}-s^2)\operatorname{Cos}\beta + \mathfrak{P}\operatorname{Cos}\gamma = 0 \\ &\mathfrak{Q}\operatorname{Cos}\alpha + \mathfrak{P}\operatorname{Cos}\beta + (\mathfrak{N}-s^2)\operatorname{Cos}\gamma = 0. \end{aligned}$$

Ces 3 équations, jointes à $\text{Cos}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \beta + \text{Cos}^2 \gamma = 1$ déterminent α, β, γ pour chaque valeur de s.

On voit que les 3 directions ainsi obtenues pour la vibration sont celles des axes de la surface $\mathfrak{L} x^2 + \mathfrak{M} y^2 + \mathfrak{N} z^2 + 2 \mathfrak{P} y z + 2 \mathfrak{Q} x z + 2 \mathfrak{R} x y = 1$ et que les 3 valeurs de s^2 sont les inverses des carrés des demi-axes de cette surface, si toutefois c'est un ellipsoïde, ce qui aura toujours lieu, comme le démontre Cauchy (Ex. math. V), lorsque $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, U, V, W, V'..... étant nuls, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont positifs ou nuls, et L, M, N, P, Q, R positifs. Or on verra bientôt que nous nous bornons aux cas où ces conditions sont remplies.

Si on pose $\Upsilon = u \,\text{Cos}\, \alpha + v \,\text{Cos}\, \beta + w \,\text{Cos}\, \gamma$, de sorte que Υ soit le déplacement même de la molécule vibrante, les équations du mouvement multipliées par Cos α, Cos β, Cos γ et ajoutées, donnent

$$\frac{d^2\Upsilon}{dt^2} = s^2 \frac{d^2\Upsilon}{dr^2} \text{ d'où, en intégrant,}$$

$$\Upsilon = \frac{f_0\,(r-st) + f_0\,(r+st)}{2} + \int_0^t \frac{f_1\,(r-st) + f_1\,(r+st)}{2}\, dt,\ f_0\,(r)$$

et $f_1\,(r)$ étant les valeurs initiales du déplacement Υ et de la vitesse $\frac{d\Upsilon}{dt}$. Si on suppose que ces deux fonctions de r fussent nulles pour toute valeur de r, sauf $r = o$, on en conclura que Υ est nul pour toute valeur de r, sauf $r = \pm st$, et comme s a six valeurs différentes, il en résulte qu'un mouvement excité originairement dans un plan donne naissance à six ondes planes qui se propagent avec des vitesses généralement inégales, trois en avant, et trois en arrière. Avant de voir comment on peut, parmi les trois ondes propagées du même côté, retrouver les deux ondes qui appartiennent aux phénomènes lumineux, il convient d'examiner de plus près les coëfficients constants qui entrent dans l'équation (7).

Considérations sur les coëfficients. Supposons que, dans l'état d'équilibre, les molécules soient disposées symétriquement par rapport à 3 plans rectangulaires qu'on prend pour plans coordonnés; les quantités $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, U, V, W, U'.... qui contiennent des puissances impaires de Cos ξ, Cos η ou Cos ζ seront nulles, et le milieu aura ce qu'on appelle 3 axes d'élasticité. Ces axes ont alors, par rapport à l'ensemble des molécules, une propriété analogue à celle par laquelle on les définissait dans la méthode de Fresnel relativement à une seule molécule, c'est que toute vibration dirigée suivant un de ces axes et se propageant suivant un des deux autres, donne lieu à une force dirigée suivant ce même axe. En effet, supposons, par exemple, que le mouvement ait lieu parallèlement à l'axe des x et se propage suivant l'axe des z; alors v et w sont nuls et u ne dépend que de z; on a donc

$$X = (\mathfrak{C} + Q)\frac{d^2u}{dz^2}, Y = 0, Z = 0.$$

Nous supposerons à l'avenir que $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, U, V.... sont nuls. Quant aux autres coëfficients, examinons d'abord les conditions qui se réalisent dans les milieux monoréfringents, ou biréfringents à un axe.

Dans un milieu monoréfringent, le seul fait qu'on puisse échanger les 3 axes entre eux, c'est-à-dire les angles ξ, η, ζ l'un contre l'autre, exige que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $L = M = N$, $P = Q = R$. Puis, comme on peut remplacer les axes par des axes rectangulaires quelconques, c'est-à-dire Cos ξ par Cos ξ Cos α_1 + Cos η Cos β_1 + Cos ζ Cos γ_1, Cos η par Cos ξ Cos α_2 + Cos η Cos β_2 + Cos ζ Cos γ_2, Cos ζ par Cos ξ Cos α_3 + Cos η Cos β_3 + Cos ζ Cos γ_3, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 étant les angles que font avec les axes primitifs 3 droites rectangulaires quelconques, il viendra

$L = \Sigma \frac{m'\rho}{2}(\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_1 + \text{Cos}\,\eta\,\text{Cos}\,\beta_1 + \text{Cos}\,\zeta\,\text{Cos}\,\gamma_1)^4 f(\rho) = L(\text{Cos}^4\alpha_1 + \text{Cos}^4\beta_1 + \text{Cos}^4\gamma_1) + 6R(\text{Cos}^2\beta_1\,\text{Cos}^2\gamma_1 + \text{Cos}^2\alpha_1\,\text{Cos}^2\gamma_1 + \text{Cos}^2\alpha_1\,\text{Cos}^2\beta_1)$, ou

$L(1 - \text{Cos}^4\alpha_1 - \text{Cos}^4\beta_1 - \text{Cos}^4\gamma_1) = 6R(\text{Cos}^2\beta_1\,\text{Cos}^2\gamma_1 + \ldots)$; or le multiplicateur de L vaut $(\text{Cos}^2\alpha_1 + \text{Cos}^2\beta_1 + \text{Cos}^2\gamma_1)^2 - \text{Cos}^4\alpha_1 - \text{Cos}^4\beta_1 - \text{Cos}^4\gamma_1$ ou $2(\text{Cos}^2\beta_1\,\text{Cos}^2\gamma_1 + \ldots)$; l'égalité se réduit donc à $L = 3R$.

De même $R = \Sigma \frac{m'\rho}{2}(\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_1 + \text{Cos}\,\eta\,\text{Cos}\,\beta_1 + \text{Cos}\,\zeta\,\text{Cos}\,\gamma_1)^2 (\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_2 + \ldots)^2 f(\rho) = R(\text{Cos}^2\beta_1\,\text{Cos}^2\gamma_2 + \text{Cos}^2\beta_2\,\text{Cos}^2\gamma_1 +$

$\text{Cos}^2\,\gamma_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 + \text{Cos}^2\,\gamma_2\,\text{Cos}^2\,\alpha_1 + \text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2 + \text{Cos}^2\,\alpha_2\,\text{Cos}^2\,\beta_1) +$ $4\,\text{R}\,(\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2\,\text{Cos}\,\gamma_1\,\text{Cos}\,\gamma_2 + \text{Cos}\,\gamma_1\,\text{Cos}\,\gamma_2\,\text{Cos}\,\alpha_1\,\text{Cos}\,\alpha_2 + \text{Cos}\,\alpha_1$ $\text{Cos}\,\alpha_2\,\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2) + (\text{L}\,\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 + \text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2 +$ $\text{Cos}^2\,\gamma_1\,\text{Cos}^2\,\gamma_2)$ ou $\text{R}\,(1 - \text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\gamma_2 - \text{Cos}^2\,\beta_2\,\text{Cos}^2\,\gamma_1 - \text{Cos}^2\,\gamma_1$ $\text{Cos}^2\,\alpha_2 - \ldots\ldots) = 4\,\text{R}\,(\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2\,\text{Cos}\,\gamma_1\,\text{Cos}\,\gamma_2 + \ldots.) +$ $\text{L}\,(\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 + \ldots.)$; or le multiplicateur de R dans le 1er membre vaut $(\text{Cos}^2\,\alpha_1 + \text{Cos}^2\,\beta_1 + \text{Cos}^2\,\gamma_1)^2\,(\text{Cos}^2\,\alpha_2 + \text{Cos}^2\,\beta_2 +$ $\text{Cos}^2\,\gamma_2)^2 - \text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\gamma_2 - \ldots.$ ou $\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 + \text{Cos}^2\,\beta_1$ $\text{Cos}^2\,\beta_2 + \text{Cos}^2\,\gamma_1\,\text{Cos}^2\,\gamma_2$; on a donc $(\text{R}-\text{L})\,(\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 +$ $\text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2 + \text{Cos}^2\,\gamma_1\,\text{Cos}^2\,\gamma_2) = 4\,\text{R}\,(\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2\,\text{Cos}\,\gamma_1\,\text{Cos}\,\gamma_2 +$ $\text{Cos}\,\gamma_1\,\text{Cos}\,\gamma_2\,\text{Cos}\,\alpha_1\,\text{Cos}\,\alpha_2 + \text{Cos}\,\alpha_1\,\text{Cos}\,\alpha_2\,\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2)$ et comme le multiplicateur de R–L est égal à $-2\,(\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2\,\text{Cos}\,\gamma_1\,\text{Cos}\,\gamma_2 + \ldots.)$ cela se réduit à $\text{R}-\text{L} = -2\,\text{R}$ ou $\text{L} = 3\,\text{R}$.

Dans les milieux biréfringents à un axe, que nous supposerons celui des z, on a d'abord $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\text{L} = \text{M}$, $\text{P} = \text{Q}$; puis comme les axes des x et des y sont arbitraires dans le plan des xy, on peut remplacer $\text{Cos}\,\xi$ par $\text{Cos}\,\xi$ $\text{Cos}\,\alpha_1 + \text{Cos}\,\eta\,\text{Cos}\,\beta_1$ et $\text{Cos}\,\eta$ par $\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_2 + \text{Cos}\,\eta\,\text{Cos}\,\beta_2$; α_1, β_1, 90° et α_2, β_2, 90° étant les angles que font avec les axes deux droites rectangulaires quelconques du plan xy.

On a donc $\text{L} = \Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,(\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_1 + \text{Cos}\,\eta\,\text{Cos}\,\beta_1)^4 f(\varrho) = \text{L}\,(\text{Cos}^4\,\alpha_1 +$ $\text{Cos}^4\,\beta_1) + 6\,\text{R}\,\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_1$, ou $\text{L}\,(1 - \text{Cos}^4\,\alpha_1 - \text{Cos}^4\,\beta_1) =$ $6\,\text{R}\,\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_1$; mais le multiplicateur de L vaut $(\text{Cos}^2\,\alpha_1 +$ $\text{Cos}^2\,\beta_1)^2 - \text{Cos}^4\,\alpha_1 - \text{Cos}^4\,\beta_1$ ou $2\,\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_1$; donc $\text{L} = 3\,\text{R}$. De même $\text{R} = \Sigma\,\frac{m'\varrho}{2}\,(\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_1 + \text{Cos}\,\eta\,\text{Cos}\,\beta_1)^2\,(\text{Cos}\,\xi\,\text{Cos}\,\alpha_2 - \text{Cos}\,\eta$ $\text{Cos}\,\beta_2)^2 f(\varrho) = \text{L}\,(\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 + \text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\beta^2) + \text{R}\,(\text{Cos}^2\,\alpha_2$ $\text{Cos}^2\,\beta_1 + \text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2) + 4\,\text{R}\,\text{Cos}\,\alpha_1\,\text{Cos}\,\alpha_2\,\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2$ ou : $\text{R}\,(1 - \text{Cos}^2\,\alpha_2\,\text{Cos}^2\,\beta_1 - \text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2) = \text{L}\,(\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 +$ $\text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2) + 4\,\text{R}\,\text{Cos}\,\alpha_1\,\text{Cos}\,\alpha_2\,\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2$; mais le multiplicateur de R dans le 1er membre vaut $(\text{Cos}^2\,\alpha_1 + \text{Cos}^2\,\beta_1)\,(\text{Cos}^2\,\alpha_2 +$ $\text{Cos}^2\,\beta_2) - \text{Cos}^2\,\alpha_2\,\text{Cos}^2\,\beta_1 - \text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2$ ou $\text{Cos}^2\,\alpha_1\,\text{Cos}^2\,\alpha_2 +$ $\text{Cos}^2\,\beta_1\,\text{Cos}^2\,\beta_2$ ou $-2\,(\text{Cos}\,\alpha_1\,\text{Cos}\,\alpha_2\,\text{Cos}\,\beta_1\,\text{Cos}\,\beta_2)$; on a donc encore $\text{L} = 3\,\text{R}$.

Cherchons maintenant quelles relations on peut établir dans un milieu biréfringent à deux axes entre L, M, N, P, Q, R. Nous pouvons supposer nuls $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, car on a déjà vu que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ sont nuls lorsque les pressions s'évanouissent dans l'état d'équilibre du système de molécules. L'équation (7) se réduit ainsi en mettant pour $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ leurs valeurs, à :

$$(\mathrm{L}\,\mathrm{Cos}^2 l + \mathrm{R}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{Q}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2)(\mathrm{R}\,\mathrm{Cos}^2 l + \mathrm{M}\,\mathrm{Cos}^2 m +$$

$$\mathrm{P}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2)(\mathrm{Q}\,\mathrm{Cos}^3 l + \mathrm{P}.\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{N}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2).$$

$$(8) \qquad -4\,\mathrm{P}^2\,\mathrm{Cos}^2 m\,\mathrm{Cos}^2 n\,(\mathrm{L}\,\mathrm{Cos}^2 l + \mathrm{R}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{Q}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2)$$

$$-4\,\mathrm{Q}^2\,\mathrm{Cos}^2 l\,\mathrm{Cos}^2 n\,(\mathrm{R}\,\mathrm{Cos}^2 l + \mathrm{M}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{P}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2).$$

$$-4\,\mathrm{R}^2\,\mathrm{Cos.}^2 l\,\mathrm{Cos}^2 m\,(\mathrm{Q}\,\mathrm{Cos}^2 l + \mathrm{P}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{N}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2) +$$

$$16\,\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{R}\,\mathrm{Cos}^2 l\,\mathrm{Cos}^2 m\,\mathrm{Cos}^2 n = 0.$$

Faisons $\mathrm{Cos}\, l = 0$ pour avoir des ondes planes parallèles à l'axe des x, ou, pour emprunter le langage de l'optique, des rayons incidents contenus dans le plan $z\,y$; l'équation devient alors un produit de deux facteurs et donne :

$$(9) \qquad s^2 = \mathrm{R}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{Q}\,\mathrm{Cos}^2 n.$$

$$(10) \qquad (\mathrm{M}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{P}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2)(\mathrm{P}\,\mathrm{Cos}^2 m + \mathrm{N}\,\mathrm{Cos}^2 n - s^2)$$

$$-4\,\mathrm{P}^2\,\mathrm{Cos}^2 m\,\mathrm{Cos}^2 n = 0.$$

Or l'expérience apprend que quand les deux rayons réfractés sont dans le plan $z\,y$ (section principale) l'un a une vitesse constante quelle que soit sa direction dans cette section. De plus, lorsque le milieu est monoréfringent, c'est-à-dire que $\mathrm{L}=\mathrm{M}=\mathrm{N}=3\,\mathrm{P}=3\,\mathrm{Q}=3\,\mathrm{R}$, et que l'onde plane est perpendiculaire à l'axe des z, c'est-à-dire que $\mathrm{Cos}\, m = 0$ $\mathrm{Cos}\, n = 1$, l'équation (9) donne $s^2 = \mathrm{Q}$, et (10) : $s^2 = \mathrm{Q}$, $s^2 = 3\,\mathrm{Q}$; donc les deux valeurs de s^2 répondant aux rayons lumineux observés sont celle de (9) et une de celles de (10). Or (9) ne donnant pas pour s une valeur constante quels que soient m et n, il faut qu'une des valeurs de s tirées de (10) remplisse cette condition. Mais (10) peut s'écrire :

$$[(M-P)\operatorname{Cos}^2 m + P(\operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Cos}^2 n) - s^2]$$
$$[(N-P)\operatorname{Cos}^2 n + P(\operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Cos}^2 n) - s^2]$$
$$-4P^2\operatorname{Cos}^2 m\operatorname{Cos}^2 n = 0$$

ou

$$[P(\operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Cos}^2 n) - s^2]\,[M\operatorname{Cos}^2 m + N\operatorname{Cos}^2 n - s^2] +$$
$$[(M-P)(N-P) - 4P^2]\operatorname{Cos}^2 m\operatorname{Cos}^2 n = 0,$$

et si l'on suppose

$$(M-P)(N-P) = 4P^2,$$

elle se décompose en deux facteurs qui donnent :

(11) $\quad s^2 = P.$

(12) $\quad s^2 = M\operatorname{Cos}^2 m + N\operatorname{Cos}^2 n,$

de sorte qu'on a bien pour s une valeur indépendante de m et de n.

En raisonnant de même pour l'axe des y et celui des z, on voit qu'il faut admettre les 3 conditions :

$$(13)\qquad \begin{aligned}(M-P)(N-P) &= 4P^2\\ (N-Q)(L-Q) &= 4Q^2\\ (L-R)(M-R) &= 4R^2\end{aligned}$$

La direction des vibrations est donnée pour chaque valeur de s^2 par les équations (6 a) de la page 27 ou

$$(14)\qquad \begin{aligned}&(L\operatorname{Cos}^2 l + R\operatorname{Cos}^2 m + Q\operatorname{Cos}^2 n - s^2)\operatorname{Cos}\alpha + 2R\operatorname{Cos} l\operatorname{Cos} m\operatorname{Cos}\beta\\ &\quad + 2Q\operatorname{Cos} l\operatorname{Cos} n\operatorname{Cos}\gamma = 0\\ &2R\operatorname{Cos} l\operatorname{Cos} m\operatorname{Cos}\alpha + (R\operatorname{Cos}^2 l + M\operatorname{Cos}^2 m + P\operatorname{Cos}^2 n - s^2)\operatorname{Cos}\beta\\ &\quad + 2P\operatorname{Cos} m\operatorname{Cos} n\operatorname{Cos}\gamma = 0\\ &2Q\operatorname{Cos} l\operatorname{Cos} n\operatorname{Cos}\alpha + 2P\operatorname{Cos} m\operatorname{Cos} n\operatorname{Cos}\beta +\\ &\quad (Q\operatorname{Cos}^2 l + P\operatorname{Cos}^2 m + N\operatorname{Cos}^2 n - s^2)\operatorname{Cos}\gamma = 0\end{aligned}$$

Si on y fait Cos $l = 0$ et qu'on mette pour s^2 la valeur (11) ou (12), la première de ces équations donne Cos $\alpha = 0$; ainsi pour ces deux valeurs de s la vibration est dans le plan $y\,z$; donc pour la valeur de s donné par (9) (rayon extraordinaire) la vibration est perpendiculaire au plan $y\,z$. Ce qui, pour le dire en passant, démontre, dans ce cas particulier, la perpendicularité des vibrations sur les rayons.

Des relations (13) on peut en déduire d'autres lorsque le milieu ne diffère pas beaucoup des corps monoréfringents, ce qui est le cas pour tous les cristaux connus. A cet effet, posons :

(15) $$M - P = 2\,P\,e^{\vartheta} \qquad N - Q = 2\,Q\,e^{\varepsilon} \qquad L - R = 2\,R\,e^{\delta},$$

d'où l'on tire par (13)

(16) $$N - P = 2\,P\,e^{-\vartheta} \qquad L - Q = 2\,Q\,e^{-\varepsilon} \qquad M - R = 2\,R\,e^{-\delta}.$$

(17) $$\text{Donc } M = P\,(1 + 2\,e^{\vartheta}),\ N = Q\,(1 + 2\,e^{\varepsilon}),\ L = R\,(1 + 2\,e^{\delta}),$$
$$N = P\,(1 + 2\,e^{-\delta}),\ L = Q\,(1 + 2\,e^{-\varepsilon}),\ M = R\,(1 + 2\,e^{-\delta}).$$

Dans les milieux monoréfringents, ϑ, ε, δ sont nuls; supposons-les seulement infiniment petits du 1er ordre, et nous verrons d'abord que leur somme sera nulle en ne négligeant que des infiniment petits du 3e ordre. En effet

$$LMN = PQR\,(1 + 2\,e^{\vartheta})\,(1 + 2\,e^{\varepsilon})\,(1 + 2\,e^{\delta}) =$$
$$PQR\,(1 + 2\,e^{-\vartheta})\,(1 + 2\,e^{-\varepsilon})\,(1 + 2\,e^{-\delta})$$

d'où :

$$lg\,(1 + 2\,e^{\vartheta}) + lg\,(1 + 2\,e^{\varepsilon}) + lg\,(1 + 2\,e^{\delta}) =$$
$$lg\,(1 + 2\,e^{-\vartheta}) + lg\,(1 + 2\,e^{-\varepsilon}) + lg\,(1 + 2\,e^{-\vartheta})$$

ou

$$lg\,(3 + 2\,\vartheta + \vartheta^2) + lg\,(3 + 2\,\varepsilon + \varepsilon^2) + lg\,(3 + 2\,\delta + \delta^2) =$$
$$lg\,(3 - 2\,\vartheta + \vartheta^2) + lg\,(3 - 2\,\varepsilon + \varepsilon^2) + lg\,(3 - 2\,\delta + \delta^2)$$

ou

$$lg\,3 + lg\left(1 + \frac{2\,\vartheta + \vartheta^2}{3}\right) + lg\,3 + lg\left(1 + \frac{2\,\varepsilon + \varepsilon^2}{3}\right) + \ldots.$$
$$= lg\,3 + lg\left(1 - \frac{2\,\vartheta - \vartheta^2}{3}\right) + \ldots.$$

ou

$$lg\,3 + \frac{2\,\vartheta}{3} + \frac{\vartheta^2}{9} + lg\,3 + \frac{2\,\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} + \ldots = lg\,3 - \frac{2\,\vartheta}{3} + \frac{\vartheta^2}{9} + \ldots$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{3}(\vartheta+\varepsilon+\delta)+\frac{1}{9}(\vartheta^2+\varepsilon^2+\delta^2)=-\frac{2}{3}(\vartheta+\varepsilon+\delta)+\frac{1}{9}(\vartheta^2+\varepsilon^2+\delta^2)$$

d'où $\vartheta+\varepsilon+\delta=0.$

Cela posé, les égalités (15) donneront (M-P) (N-Q) (L-R) $=$ 8 PQR et les égalités (16) donneront (N-P) (L-Q) (M-R) $=$ 8 PQR; de la on tire la nouvelle relation :

(18) $\quad (L-Q)(M-R)(N-P)+(L-R)(M-P)(N-Q)=16\,PQR.$

On peut encore tirer des formules (17)

$$\frac{M}{N}=\frac{1+2e^{\vartheta}}{1+2e^{-\varepsilon}}=\frac{3+2\vartheta}{3-2\vartheta}=1+\frac{4\vartheta}{3},$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre;

$$\text{donc } M\text{-}N=\frac{4}{3}\vartheta N.$$

$$\text{De même } N-L=\frac{4}{3}\varepsilon L \text{ et } L-M=\frac{4}{3}\delta M.$$

Puis on tire de la 3^e et la 5^e des formules (17) :

$$\frac{R}{Q}=\frac{1+2e^{-\varepsilon}}{1+2e^{\delta}}=\frac{3-2\varepsilon}{3+2\delta}=1-\frac{2}{3}(\varepsilon+\delta)=1+\frac{2\vartheta}{3},$$

puisque $\vartheta+\varepsilon+\zeta=0$; donc $R-Q=\frac{2}{2}\vartheta Q$; de même $P-R=\frac{2}{3}\varepsilon R$,

et $Q-P=\frac{2}{3}\delta P$; ainsi les différences M-N, N-L, L-M, R-Q, P-R, Q-P

sont du même ordre que ϑ, ε, δ. On tire de là $\vartheta=\frac{3}{2}\frac{R\text{-}Q}{Q}$ ou $\vartheta=\frac{3}{2}\frac{R\text{-}Q}{P}$,

en négligeant la quantité du second ordre $\frac{3}{2}\frac{(R\text{-}Q)\ (P\text{-}Q)}{PQ}$; de même $\varepsilon=\frac{3}{2}\frac{P\text{-}R}{Q}$

et $\delta = \frac{3}{2}\frac{Q\text{-}P}{R}$. De là on déduit que $L = R(1 + 2e^{\delta}) = R(3 + 2\delta) = R\left(3 + \frac{3Q\text{-}3P}{R}\right)$

ou

(19) $L = 3(Q + R - P)$, de même $M = 3(P + R - Q)$, $N = 3(P + Q - R)$

Ces relations, qui existent approximativement dans tous les milieux, nous serviront dans la suite. On peut les mettre encore sous une autre forme. En effet

$$L = 3(Q + R - P) = Q + R - P + 2\left(Q + R - P - \frac{QR}{P}\right) +$$

$$\frac{2QR}{P} = Q + R - P + \frac{2(P-R)(Q-P)}{P} + \frac{2QR}{P},$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

(20) $$L = Q + R - P + \frac{2QR}{P}.$$

De même $M = P + R - Q + \frac{2PR}{Q}$; $N = P + Q - R + \frac{2PQ}{R}$.

Enfin les équations (19) peuvent aussi s'écrire comme suit :

(21) $L + M = 6R, \qquad L + N = 6Q \qquad M + N = 6P.$

Réduction au second degré de l'équation aux vitesses des ondes planes. En supposant nuls les coëfficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, U, V, W, U'...., l'équation qui donne les valeurs de s^2, se réduit, comme nous l'avons vu, à l'équation (8) de la page 31. Remplaçons $L\cos^2 l + R\cos^2 m + Q\cos^2 n - s^2$ par $L\cos^2 l + M\cos^2 m + N\cos^2 n - s^2 - (M\text{-}R)\cos^2 m - (N\text{-}Q)\cos^2 n$, $R\cos^2 l + M\cos^2 m + P\cos^2 n - s^2$ par $L\cos^2 l + M\cos^2 m + N\cos^2 n - s^2 - (L-R)\cos^2 l - (N-P)\cos^2 n$, $Q\cos^2 l + P\cos^2 m + N\cos^2 n - s^2$ par $L\cos^2 l + M\cos^2 m + N\cos^2 n - s^2 - (L\text{-}Q)\cos^2 l - (M\text{-}P)\cos^2 m$, et développons par rapport aux puissance de $L\cos^2 l + M\cos^2 m + N\cos^2 n - s^2$.

On aura :

$(L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2)^3 - (L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2)^2 [(2L - Q - R) \cos^2 l + (2M - P - R) \cos^2 m + (2N - P - Q) \cos^2 n] + (L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2) [(L-Q)(L-R) \cos^4 l + (M-P)(M-R) \cos^4 m + (N-P)(N-Q) \cos^4 n + [(M-R)(N-P) + (M-P)(N-Q) + (M-P)(N-P) - 4P^2] \cos^2 m \cos^2 n + [(L-R)(N-Q) + (L-Q)(N-P) + (L-Q)(N-Q) - 4Q^2] \cos^2 l \cos^2 n + [(L-R)(M-P) + (L-Q)(M-R) + (L-R)(M-R) - 4R^2] \cos^2 l \cos^2 m + [16PQR - (L-Q)(N-P)(M-R) - (L-R)(M-P)(N-Q)] \cos^2 l \cos^2 m \cos^2 n + (L-Q)[4R^2 - (L-R)(M-R)] \cos^4 l \cos^2 m + (L-R)[4Q^2 - (L-Q)(N-Q)] \cos^4 l \cos^2 n + (M-P)[4R^2 - (L-R)(M-R)] \cos^4 m \cos^2 l + (M-R)[4P^2 - (M-P)(N-P)] \cos^4 m \cos^2 n + (N-P)[4Q^2 - (L-Q)(N-Q)] \cos^4 n \cos^2 l + (N-Q)[4P^2 - (M-P)(N-P)] \cos^4 n \cos^2 m = 0.$

Les relations (13) et (18) font disparaître les termes indépendants de $(L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2)$ et réduisent l'équation à :

$(L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2) \{ (L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2)^2 - (L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n - s^2) [(2L-Q-R) \cos^2 l + (2M-P-R) \cos^2 m + (2N-P-Q) \cos^2 n] + (L-Q)(L-R) \cos^4 l + (M-P)(M-R) \cos^4 m + (N-P)(N-Q) \cos^4 n + (M-R)(N-P) \cos^2 m \cos^2 n + (M-P)(N-Q) \cos^2 m \cos^2 n + (L-R)(N-Q) \cos^2 l \cos^2 n + (L-Q)(N-P) \cos^2 l \cos^2 n + (L-R)(M-P) \cos^2 l \cos^2 m + (L-Q)(M-R) \cos^2 l \cos^2 m \} = 0.$

Elle se partage ainsi en deux équations dont l'une est

(22) $$s^2 = L \cos^2 l + M \cos^2 m + N \cos^2 n$$

et l'autre se réduit à :

$QR \cos^4 l + PR \cos^4 m + PQ \cos^4 n + R(P+Q) \cos^2 l \cos^2 m + Q(P+R) \cos^2 l \cos^2 n + P(Q+R) \cos^2 m \cos^2 n - s^2 [(Q+R) \cos^2 l +$

$(P+R)\cos^2 m + (P+Q)\cos^2 n] + s^4 = 0$, ou encore, le terme indépendant de s^2 étant le produit de $\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n$ par $QR\cos^2 l + PR\cos^2 m + PQ\cos^2 n$, à $s^4 - s^2[(Q+R)\cos^2 l + (P+R)\cos^2 m + (P+Q)\cos^2 n] + QR\cos^2 l + PR\cos^2 m + PQ\cos^2 n = 0$.

Cette équation peut s'écrire

$$(23)\qquad \frac{\cos^2 l}{s^2 - P} + \frac{\cos^2 m}{s^2 - Q} + \frac{\cos^2 n}{s^2 - R} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}\,\frac{\cos^2 l}{s^2 - P} = 0,$$

et elle paraît de même forme que l'équation de Fresnel

$$\mathbf{S}\,\frac{\cos^2 l}{V^2 - a^2} = 0.$$

Si en effet on cherche la direction des vibrations qui correspondent à la valeur (22) de s^2 les équations (14) deviennent alors :

$$[(R-M)\cos^2 m + (Q-N)\cos^2 n]\cos\alpha +$$
$$2R\cos l\cos m\cos\beta + 2Q\cos l\cos n\cos\gamma = 0$$
$$2R\cos l\cos m\cos\alpha + [(R-L)\cos^2 l +$$
$$(P-N)\cos^2 n]\cos\beta + 2P\cos m\cos n\cos\gamma = 0$$
$$2Q\cos l\cos n\cos\alpha + 2P\cos m\cos n\cos\beta +$$
$$[(Q-L)\cos^2 l + (P-M)\cos^2 m]\cos\gamma = 0$$

ou :

$$\cos m\,[2R\cos l\cos\beta - (M-R)\cos m\cos\alpha] +$$
$$\cos n\,[2Q\cos l\cos\gamma - (N-Q)\cos n\cos\alpha] = 0$$
$$\cos l\,[2R\cos m\cos\alpha - (L-R)\cos l\cos\beta] +$$
$$\cos n\,[2P\cos m\cos\gamma - (N-P)\cos n\cos\beta] = 0$$
$$\cos l\,[2Q\cos n\cos\alpha - (L-Q)\cos l\cos\gamma] +$$
$$\cos m\,[2P\cos n\cos\beta - (M-P)\cos m\cos\gamma] = 0$$

qu'on satisfera en posant d'après les conditions (13) :

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\beta}=\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{Cos}\,m}\cdot\frac{2\,\mathrm{R}}{\mathrm{M-R}}=\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{Cos}\,m}\cdot\frac{\mathrm{L-R}}{2\,\mathrm{R}},$$

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\gamma}=\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{Cos}\,n}\cdot\frac{2\,\mathrm{Q}}{\mathrm{N-Q}}=\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{Cos}\,n}\cdot\frac{\mathrm{L-Q}}{2\,\mathrm{Q}},$$

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\beta}{\mathrm{Cos}\,\gamma}=\frac{\mathrm{Cos}\,m}{\mathrm{Cos}\,n}\cdot\frac{2\,\mathrm{P}}{\mathrm{N-P}}=\frac{\mathrm{Cos}\,m}{\mathrm{Cos}\,n}\cdot\frac{\mathrm{M-P}}{2\,\mathrm{P}}.$$

Cela peut aussi s'écrire d'après (15) et (16) :

$$\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\beta}=\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{Cos}\,m}\,e^{\delta},\quad \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\gamma}=\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{Cos}\,n}\,e^{-\varepsilon},\quad \frac{\mathrm{Cos}\,\beta}{\mathrm{Cos}\,\gamma}=\frac{\mathrm{Cos}\,m}{\mathrm{Cos}\,n}\,e^{\vartheta}.$$

Comme δ, ε, ϑ sont nuls dans les milieux monoréfringents, et très-petits dans tous les milieux connus, on aura dans les premiers exactement et dans les autres très-approximativement : $\mathrm{Cos}\,\alpha : \mathrm{Cos}\,l = \mathrm{Cos}\,\beta : \mathrm{Cos}\,m = \mathrm{Cos}\,\gamma : \mathrm{Cos}\,n$, d'où $\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,l$, $\mathrm{Cos}\,\beta = \mathrm{Cos}\,m$, $\mathrm{Cos}\,\gamma = \mathrm{Cos}\,n$, ce qui indique une vibration dirigée perpendiculairement au plan de l'onde. Donc les vibrations correspondant aux deux valeurs de s^2 données par (23) seront à très-peu près contenues dans le plan de l'onde, d'où résulte que c'est bien cette équation qui donne les deux valeurs de s^2 répondant aux rayons lumineux observés.

Mais il ne faudrait pas croire que cette équation (23) se déduise de celle de Fresnel, en remplaçant respectivement a^2, b^2, c^2 par P, Q, R; la signification de P, par exemple, n'est pas la même que celle de a^2. En effet a^2 représentait dans Fresnel le carré de la vitesse de propagation d'ondes perpendiculaires à l'axe des y ou à l'axe des z et effectuant leurs vibrations parallèlement aux x, $\mathrm{A} = \mu\, a^2$ étant la force élastique qui produit ces vibrations; au contraire P est dans la méthode de Cauchy le carré de la vitesse de propagation d'ondes perpendiculaires à l'axe des y et vibrant suivant l'axe des z, ou d'ondes perpendiculaires à l'axe des z et vibrant suivant l'axe des y, car pour Cos $l = 0$, Cos $m = 0$, Cos $n = 1$ l'équation (23) donne $s^2 = P$, $s^2 = Q$, et si l'on fait Cos $n = 1$, $s^2 = P$ dans les équations (14) on trouve Cos $\beta = 1$, Cos $\alpha = 0$, Cos $\gamma = 0$. Cette différence provient de ce que les deux théories placent différemment les vibrations par rapport au plan de polarisation, comme nous l'expliquerons plus loin en détail. On sait par l'expérience que les ondes planes, qui ont pour plan de polarisation un même plan coordonné, ont la même vitesse de propagation. Or, dans Fresnel, qui suppose les vibrations perpendiculaires au plan de polarisation, il faut, par exemple, qu'une onde plane perpendiculaire à l'axe des y et vibrant suivant l'axe des x ait la même vitesse de propagation (a) qu'une onde plane perpendiculaire aux z et vibrant suivant les x, puisqu'elles ont toutes deux le plan zy pour plan de polarisation. Dans la méthode de Cauchy, où les vibrations sont supposées parallèles au plan de polarisation, il faut, par exemple, qu'une onde plane perpendiculaire aux z et vibrant suivant les x ait la même vitesse de propagation ($\sqrt{Q}$) qu'une onde plane perpendiculaire aux x et vibrant suivant les z, puisqu'elles ont le même plan de polarisation zx.

Autre méthode.

On peut employer, pour passer des équations différentielles du mouvement à l'équation de la surface d'élasticité, une méthode plus rapide qui m'est suggérée par les travaux de M. Lamé [1]. Supposons que le milieu soit peu éloigné d'être monoréfringent, et qu'on se borne à chercher les vibrations contenues dans le plan de l'onde. En faisant nuls les coëfficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, U, V... les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathrm{L}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{R}\frac{d^2u}{dy^2} + \mathrm{Q}\frac{d^2u}{dz^2} + 2\,\mathrm{R}\frac{d^2v}{dxdy} + 2\,\mathrm{Q}\frac{d^2w}{dxdz}$$

[1] Théorie de l'Elasticité, page 234.

et deux équations de même forme; et comme on peut remplacer sans erreur sensible L par 3 Q ou 3 R, M par 3 P ou 3 R, etc., on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} = L\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dxdy} + \frac{d^2w}{dxdz}\right) + R\left(\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d^2v}{dxdy}\right) + Q\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2w}{dxdz}\right)$$

ou

$$\frac{d^2u}{dt^2} = L\frac{d\varpi}{dx} + R\left(\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d^2v}{dxdy}\right) + Q\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{d^2w}{dxdz}\right)$$

en posant

$$\varpi = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Prenons maintenant comme ci-dessus $u = A \operatorname{Cos}(kr\text{-}ht + \mu)$, $v = B \operatorname{Cos}(kr\text{-}ht + \mu)$, $w = G \operatorname{Cos}(kr\text{-}ht + \mu)$; A, B, C étant proportionnels aux cosinus des angles de la vibration avec les axes, on devra avoir $A \operatorname{Cos} l + B \operatorname{Cos} m + C \operatorname{Cos} n = 0$, et comme $r = x \operatorname{Cos} l + y \operatorname{Cos} m + z \operatorname{Cos} n$, les valeurs de u, v, w annulent ϖ, et en les substituant dans les équations différentielles, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} (R \operatorname{Cos}^2 m + Q \operatorname{Cos}^2 n - s^2) A - R \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m\, B - Q \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n\, C = 0 \\ - R \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m\, A + (P \operatorname{Cos}^2 n + R \operatorname{Cos}^2 l - s^2) B - P \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\, C = 0 \\ - Q \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n\, A - P \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\, B + (Q \operatorname{Cos}^2 l + P \operatorname{Cos}^2 m - s^2) C = 0 \end{array}\right.$$

L'élimination de A, B, C entre ces équations donne :

$(R \operatorname{Cos}^2 m + Q \operatorname{Cos}^2 n - s^2)(P \operatorname{Cos}^2 n + R \operatorname{Cos}^2 l - s^2)(Q \operatorname{Cos}^2 l + P \operatorname{Cos}^2 m - s^2) - P^2 \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n (R \operatorname{Cos}^2 m + Q \operatorname{Cos}^2 n - s^2) - Q^2 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 n (P \operatorname{Cos}^2 n + R \operatorname{Cos}^2 l - s^2) - R^2 \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 l (Q \operatorname{Cos}^2 l + P \operatorname{Cos}^2 m - s^2) - 2\, PQR \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n = 0$, ou en changeant les signes : $s^6 - s^4 [(Q + R) \operatorname{Cos}^2 l + (P + R) \operatorname{Cos}^2 m + (P + Q) \operatorname{Cos}^2 n] + s^2 [QR \operatorname{Cos}^4 l + PR \operatorname{Cos}^4 m + PQ \operatorname{Cos}^4 n + R (P + Q) \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m +$

$Q(P+R)\operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 n + P(Q+R)\operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n] = 0$, les termes indépendants de s^2 se détruisant. Le coëfficient de s^2 est le produit de $\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Cos}^2 n$ par $QR \operatorname{Cos}^2 l + PR \operatorname{Cos}^2 m + PQ \operatorname{Cos}^2 n$; on a donc en divisant tous les termes par s^2 : $s^4 - s^2[(Q+R)\operatorname{Cos}^2 l + (P+R)\operatorname{Cos}^2 m + (P+Q)\operatorname{Cos}^2 n] + QR \operatorname{Cos}^2 l + PR \operatorname{Cos}^2 m + PQ \operatorname{Cos}^2 n = 0$,

ou

$$\mathbf{S}\,\frac{\operatorname{Cos}^2 l}{s^2 - P} = 0, \text{ comme ci-dessus.}$$

SECOND GROUPE [1].

Je comprends sous ce titre les méthodes dans lesquelles, en partant des équations différentielles, on arrive à un résultat identique à celui de Fresnel pour la surface d'élasticité. Telle est la méthode que Cauchy a employée dans le vol. XVIII des Mémoires de l'Académie, et que je vais développer. On commence comme dans la première méthode de Cauchy, et on arrive aux équations (6) page 27; on suppose nuls $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, U, V.... mais non $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, de sorte qu'on a :

$$\mathcal{L} = (\mathcal{A} + L)\operatorname{Cos}^2 l + (\mathcal{B} + R)\operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + Q)\operatorname{Cos}^2 n$$
$$\mathcal{F} = 2P \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n$$

$$\mathcal{M} = (\mathcal{A} + R)\operatorname{Cos}^2 l + (\mathcal{B} + M)\operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + P)\operatorname{Cos}^2 n$$
$$\mathcal{G} = 2Q \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n$$

$$\mathcal{N} = (\mathcal{A} + Q)\operatorname{Cos}^2 l + (\mathcal{B} + P)\operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + N)\operatorname{Cos}^2 n$$
$$\mathcal{H} = 2R \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m$$

(1) Je n'emploie pas d'autre désignation, parce qu'il faudrait une phrase entière pour indiquer en quoi ces deux groupes diffèrent l'un de l'autre.

Faisons maintenant

$$\mathcal{G} = \mathcal{L} - \frac{\mathcal{Q}\,\mathcal{R}}{\mathcal{P}},\ \mathcal{H} = \mathcal{M} - \frac{\mathcal{R}\,\mathcal{P}}{\mathcal{Q}},\ \mathcal{J} = \mathcal{N} - \frac{\mathcal{P}\,\mathcal{Q}}{\mathcal{R}},$$

et les équations 6 deviendront :

$$(s^2 - \mathcal{G})\,A = \mathcal{Q}\,\mathcal{R}\left(\frac{A}{\mathcal{P}} + \frac{B}{\mathcal{Q}} + \frac{C}{\mathcal{R}}\right) \qquad (s^2 - \mathcal{H})\,B = \mathcal{R}\,\mathcal{P}\left(\frac{A}{\mathcal{P}} + \frac{B}{\mathcal{Q}} + \frac{C}{\mathcal{R}}\right)$$

$$(s^2 - \mathcal{J})\,C = \mathcal{P}\,\mathcal{Q}\left(\frac{A}{\mathcal{P}} + \frac{B}{\mathcal{Q}} + \frac{C}{\mathcal{R}}\right)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\mathcal{R}\,\mathcal{Q}}{\mathcal{P}(s^2-\mathcal{G})} + \frac{\mathcal{R}\,\mathcal{P}}{\mathcal{Q}(s^2-\mathcal{H})} + \frac{\mathcal{P}\,\mathcal{Q}}{\mathcal{R}(s^2-\mathcal{J})} = 1,$$

ou, en remplaçant $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ par leurs valeurs :

$$\frac{2\,Q\,R\,\mathrm{Cos}^2 l}{P\,(s^2 - \mathcal{G})} + \frac{2\,R\,P\,\mathrm{Cos}^2 m}{Q\,(s^2 - \mathcal{H})} + \frac{2\,P\,Q\,\mathrm{Cos}^2 n}{R\,(s^2 - \mathcal{J})} = 1,$$

ou encore

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{Cos}\,l}{P}\right)^2}{s^2 - \mathcal{G}} + \frac{\left(\frac{\mathrm{Cos}\,m}{Q}\right)^2}{s^2 - \mathcal{H}} + \frac{\left(\frac{\mathrm{Cos}\,n}{R}\right)^2}{s^2 - \mathcal{J}} = \frac{1}{2\,P\,Q\,R}\,;$$

voilà l'équation aux vitesses des ondes planes. Pour la réduire à une équation qui donne approximativement les deux valeurs de s^2 répondant aux rayons lumineux observés, remarquons que, dans un milieu monoréfringent, on aurait

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}, \quad P = Q = R, \quad L = M = N = 3\,P$$

d'où

$$\mathcal{L} = 2\,P\,\mathrm{Cos}^2 l + P + \mathcal{A} \quad \mathcal{M} = 2\,P\,\mathrm{Cos}^2 m + P + \mathcal{A} \quad \mathcal{N} = 2\,P\,\mathrm{Cos}^2 n + P + \mathcal{A}$$

$$\mathcal{G} = P + \mathcal{A} \qquad \mathcal{H} = P + \mathcal{A} \qquad \mathcal{J} = P + \mathcal{A}$$

et, dans ce cas, les deux valeurs de s^2, que nous voulons obtenir, se réduiraient à $P + \mathcal{A}$; on peut donc admettre, si le milieu ne diffère pas beaucoup d'un milieu monoréfringent, que P, Q, R diffèrent peu l'un de l'autre, de même que $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$, s^2; donc les trois fractions du 1er membre de l'équation ci-dessus, ont de très-petits dénominateurs; elles sont donc très-grandes par rapport au second membre $\frac{1}{2\,PQR}$ qu'on pourra négliger sans erreur sensible; on a donc l'équation du second degré en s^2 :

$$\frac{\left(\frac{\text{Cos}\, l}{P}\right)^2}{s^2 - \mathcal{G}} + \frac{\left(\frac{\text{Cos}\, m}{Q}\right)^2}{s^2 - \mathcal{H}} + \frac{\left(\frac{\text{Cos}\, n}{R}\right)^2}{s^2 - \mathcal{I}} = 0,$$

ou, approximativement

$$\frac{\text{Cos}^2\, l}{s^2 - \mathcal{G}} + \frac{\text{Cos}^2\, m}{s^2 - \mathcal{H}} + \frac{\text{Cos}^2\, n}{s^2 - \mathcal{I}} = 0.$$

Si dans cette équation on fait $\text{Cos}\, n = 1$, on aura $s^2 = \mathcal{G} = \mathcal{C} + Q$ pour les vibrations parallèles à l'axe des x, car les équations (6) de la page 27 donnent alors $B = 0$, $C = 0$ d'où $\text{Cos}\, \beta = 0$, $\text{Cos}\, \gamma = 0$, $\text{Cos}\, \alpha = 1$, et $s^2 = \mathcal{H} = \mathcal{C} + P$ pour les vibrations parallèles aux y; de même en faisant $\text{Cos}\, m = 1$, on trouve $s^2 = \mathcal{B} + R$ et $s^2 = \mathcal{B} + P$, etc.; or si on admet avec Fresnel que la vitesse de propagation est la même lorsque les vibrations sont dirigées suivant la même droite, on doit avoir $Q + \mathcal{C} = R + \mathcal{B}$, $R + \mathcal{A} = P + \mathcal{C}$, $P + \mathcal{B} = Q + \mathcal{A}$. On voit par là que la supposition qui annule $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, entraîne avec elle l'adoption d'une hypothèse contraire à celle de Fresnel sur les vibrations, à moins que $P = Q = R$; c'est-à-dire que le milieu soit monoréfringent.

Posons donc :

$$Q + \mathcal{C} = R + \mathcal{B} = a^2, \quad R + \mathcal{A} = P + \mathcal{C} = b^2, \quad P + \mathcal{B} = Q + \mathcal{A} = c^2,$$

posons de plus :

$$L - \frac{2\,QR}{P} + \mathcal{A} = a^2 + G, \quad M - \frac{2\,PR}{Q} + \mathcal{B} = b^2 + H, \quad N - \frac{2\,PQ}{R} + \mathcal{C} = c^2 + I,$$

d'où :

$$\mathcal{G} = a^2 + G\, \text{Cos}^2\, l \quad \mathcal{H} = b^2 + \mathcal{H}\, \text{Cos}^2\, m \quad \mathcal{I} = c^2 + I\, \text{Cos}^2\, n.$$

Dans un milieu monoréfringent, où $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$, $L = M = N = 3P = 3Q = 3R$, on aura

$$a^2 = b^2 = c^2 = R + \mathcal{A},\ G = 0,\ H = 0,\ I = 0.$$

Dans un milieu biréfringent à un axe (l'axe des x) où $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $M = N = 3P$, $Q = R$, on aura :

$a^2 = R + \mathcal{B}$, $b^2 = c^2 = R + \mathcal{A} = P + \mathcal{B}$, $G = L - \frac{2R^2}{P} + \mathcal{A} - a^2$, $H = 0$, $I = 0$, d'où

$\mathcal{G} = a^2 + G \operatorname{Cos}^2 l$, $\mathcal{H} = \mathcal{I} = b^2 = c^2$; donc l'équation $S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{s^2 - \mathcal{G}} = 0$ devient

$(s^2 - b^2)[s^2 - b^2 \operatorname{Cos}^2 l - (a^2 + G \operatorname{Cos}^2 l)(\operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Cos}^2 n)] = 0$, et donne pour s^2 deux valeurs, l'une b^2 comme dans les milieux monoréfringents (rayon ordinaire); l'autre $b^2 \operatorname{Cos}^2 l + (a^2 + G \operatorname{Cos}^2 l)(\operatorname{Cos}^2 m + \operatorname{Cos}^2 n)$ qui se réduit à a^2 lorsqu'on fait $\operatorname{Cos} l = 0$ pour avoir une onde plane parallèle à l'axe des x. Cette valeur de s^2 peut aussi s'écrire $b^2 \operatorname{Cos}^2 l + (a^2 + G \operatorname{Cos}^2 l) \operatorname{Sin}^2 l$, et comme l'expérience apprend que $s^2 = b^2 \operatorname{Cos}^2 l + a^2 \operatorname{Sin}^2 l$, il faut que $G = 0$ comme dans les milieux monoréfringents; il est donc naturel d'admettre que dans tous les milieux G, H, I sont nuls; donc $\mathcal{G} = a^2$, $\mathcal{H} = b^2$, $\mathcal{I} = c^2$ et l'équation

$$S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{s^2 - \mathcal{G}} = 0 \text{ devient } S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{s^2 - a^2} = 0, \text{ comme celle de Fresnel.}$$

Les relations entre les coëfficients auxquelles nous venons d'arriver, savoir :

(24)
$$L - \frac{2QR}{P} + \mathcal{A} = Q + \mathcal{C} = R + \mathcal{B},$$

$$M - \frac{2PR}{Q} + \mathcal{B} = R + \mathcal{A} = P + \mathcal{C},$$

$$N - \frac{2PQ}{R} + \mathcal{C} = P + \mathcal{B} = Q + \mathcal{A}$$

ne contiennent que cinq équations distinctes, et non six, parce que $P + \mathcal{B} = Q + \mathcal{A}$ se déduit de $Q + \mathcal{C} = R + \mathcal{B}$ et $R + \mathcal{A} = P + \mathcal{C}$.

En les combinant par soustraction, on obtient

$$L - \frac{2\,Q\,R}{P} - R = Q - P = R + \frac{2\,R\,P}{Q} - M,$$

$$L - \frac{2\,Q\,R}{P} - Q = R - P = Q = \frac{2\,P\,Q}{R} - N,$$

d'où

$$L = Q + R - P + \frac{2\,Q\,R}{P}, \quad M = R + P - Q + \frac{2\,R\,P}{Q},$$

$$N = Q + P - R + \frac{2\,P\,Q}{R},$$

relations déjà obtenues, et qui reviennent en négligeant les infiniment petits du second ordre, à :

$$L = 3\,(Q + R - P), \quad M = 3\,(R + P - Q) \quad N = 3\,(Q + P - R)$$

Ainsi les seules relations établies entre $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, L, M, N, P, Q, R par les égalités (24) sont les cinq suivantes :

$$Q + \mathcal{C} = R + \mathcal{B}, \quad R + \mathcal{A} = P + \mathcal{C}, \quad L = 3\,(Q + R - P),$$

$$M = 3\,(R + P - Q), \quad N = 3\,(Q + P - R).$$

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME

DÉPENDANT DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Nous avons vu que, dans la première méthode de Cauchy, l'ellipsoïde représenté par

$$(L \operatorname{Cos}^2 l + R \operatorname{Cos}^2 m + Q \operatorname{Cos}^2 n)\, x^2 + (R \operatorname{Cos}^2 l + M \operatorname{Cos}^2 m) +$$

$P \operatorname{Cos}^2 n) y^2 + (Q \operatorname{Cos}^2 l + P \operatorname{Cos}^2 m + N \operatorname{Cos}^2 n) z^2 + 4 P \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\, yz +$ $4 Q \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n\, xz + 4 R \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m\, xy = 1$ a pour demi-axes les inverses des vitesses de propagation des 3 ondes planes et qu'un de ces axes donné par $s^2 = L \operatorname{Cos}^2 l + M \operatorname{Cos}^2 m + N \operatorname{Cos}^2 n$, est à très peu près perpendiculaire au plan de l'onde; les deux autres donnés par $S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{s^2 - P} = 0$ sont donc approximativement situés dans le plan de l'onde. Or ces deux axes sont les mêmes que ceux de l'ellipse qu'on obtiendrait en coupant par le plan de l'onde l'ellipsoïde $P x^2 + Q y^2 + R z^2 = 1$. En effet les formules de transformation pour obtenir l'équation de cette section dans son plan sont, en appelant η et ζ les coordonnées de cette ellipse (l'axe des η étant l'intersection du plan de l'onde $S x \operatorname{Cos} l = 0$ avec le plan xy) :

$$x = \frac{\eta \operatorname{Cos} m - \zeta \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m}}, \quad y = \frac{\eta \operatorname{Cos} l + \zeta \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m}}, \quad z = \zeta \sqrt{\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m};$$

en substituant ces valeurs dans $P x^2 + Q y^2 + R z^2 = 1$, on trouve pour équation de l'ellipse :

$$\eta^2 \left(\frac{P \operatorname{Cos}^2 m + Q \operatorname{Cos}^2 l}{\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m} \right) + 2 n \zeta (Q - P) \frac{\operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n}{\operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m} +$$

$$\zeta^2 \left(\frac{P \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 n + Q \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n}{\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m} + R \operatorname{Cos}^2 l + R \operatorname{Cos}^2 m \right) = 1.$$

Or, par une formule connue, les axes d'une pareille ellipse sont donnés, en appelant s l'inverse d'un demi-axe, par l'équation :

$$s^4 - s^2 \left[\frac{P (1 - \operatorname{Cos}^2 l)(1 - \operatorname{Cos}^2 n) + Q (1 - \operatorname{Cos}^2 m)(1 - \operatorname{Cos}^2 n)}{\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m} + R \operatorname{Cos}^2 l + R \operatorname{Cos}^2 m \right]$$

$$+ \frac{(P^2 + Q^2) \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n + P Q \operatorname{Cos}^2 n (\operatorname{Cos}^4 l + \operatorname{Cos}^4 m)}{(\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m)^2} +$$

$$P R \operatorname{Cos}^2 m + Q R \operatorname{Cos}^2 l - (Q - P)^2 \frac{\operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n}{(\operatorname{Cos}^2 l + \operatorname{Cos}^2 m)^2} = 0,$$

qui se réduit à :

$$s^4 - s^2 [P \operatorname{Cos}^2 m + P \operatorname{Cos}^2 n + Q \operatorname{Cos}^2 l + Q \operatorname{Cos}^2 n + R \operatorname{Cos}^2 l + R \operatorname{Cos}^2 m]$$

$+ P\,Q \operatorname{Cos}^2 n + P\,R \operatorname{Cos}^2 m + Q\,R \operatorname{Cos}^2 l = 0$ identique à l'équation $S\, \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{s^2 - P} = 0$. Ainsi, pour obtenir les deux vitesses de propagation correspondant à une onde plane donnée, ou, ce qui revient au même, *pour construire la surface d'élasticité, il suffit de porter normalement à l'onde plane deux longueurs inverses aux demi-axes de la section faite par ce plan dans l'ellipsoïde* $P x^2 + Q y^2 + R z^2 = 1$. Ce résultat est d'accord avec celui de Fresnel; et on y parvient aussi dans la méthode du second groupe (1); en effet l'ellipsoïde dont les 3 axes donnent les vitesses de propagation des ondes planes est alors :

$$\begin{aligned}
&[(\mathcal{A} + L) \operatorname{Cos}^2 l + (\mathcal{B} + R) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + Q) \operatorname{Cos}^2 n]\, x^2 + \\
&[(\mathcal{A} + R) \operatorname{Cos}^2 l + (\mathcal{B} + M) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + P) \operatorname{Cos}^2 n]\, y^2 + \\
&[(\mathcal{A} + Q) \operatorname{Cos}^2 l + (\mathcal{B} + P) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + N) \operatorname{Cos}^2 n]\, z^2 + \\
&4 P \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\, y z + 4 Q \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n\, x z + 4 R \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m\, x y = 1,
\end{aligned}$$

et les conditions

$$\mathcal{B} + R = \mathcal{C} + Q, \quad \mathcal{A} + R = \mathcal{C} + P, \quad \mathcal{A} + Q = \mathcal{B} + P$$

réduisent cette équation à :

$$\begin{aligned}
&[(\mathcal{A} + L - \mathcal{B} - R) \operatorname{Cos}^2 l + \mathcal{B} + R]\, x^2 + [(\mathcal{B} + M - \mathcal{C} - P) \operatorname{Cos}^2 m + \mathcal{C} + P]\, y^2 + \\
&[(\mathcal{C} + N - \mathcal{A} - Q) \operatorname{Cos}^2 n + \mathcal{A} + Q]\, z^2 + 4 P \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\, y z + \ldots\ldots = 1.
\end{aligned}$$

L'expérience montrant que deux axes de cet ellipsoïde sont à très peu près situés dans le plan de l'onde : on peut substituer à ces axes ceux de l'ellipse qu'on obtient en coupant l'ellipsoïde par le plan de l'onde; or cette section projetée sur le plan zy a pour équation :

$$[(\mathcal{A} - \mathcal{C} + L + M - P - 5R) \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{B} + R) \operatorname{Cos}^2 m + (\mathcal{C} + P) \operatorname{Cos}^2 n]\, y^2$$

(1) Voir dans le 34me volume des Annales de chimie et de physique, une note de M. Beer.

$$+[(\mathcal{C}-\mathcal{B}+L+N-R-5Q)\,\mathrm{Cos}^2 l\,\mathrm{Cos}^2 n+(\mathcal{B}+R)\,\mathrm{Cos}^2 n+(\mathcal{A}+Q)\,\mathrm{Cos}^2 l]\,z^2$$
$$+\,2\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n\,[(\mathcal{A}-\mathcal{B}+L+2P-2Q-3R)\,\mathrm{Cos}^2 l+\mathcal{B}+R]\,yz=1.$$

En remplaçant

$$L+M \text{ par } 6R,\; L+N \text{ par } 6Q \text{ et } L \text{ par } 3Q+3R-3P,$$

on aura :

$$[(\mathcal{B}+R)\,\mathrm{Cos}^2 m+(\mathcal{C}+P)\,\mathrm{Cos}^2 n]\,y^2+[(\mathcal{B}+R)\,\mathrm{Cos}^2 n+(\mathcal{A}+Q)\,\mathrm{Cos}^2 l]$$
$$z^2+2\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n\,(\mathcal{B}+R)\,yz=1,$$

projection sur le plan yz de l'ellipse qu'on obtient en coupant par le même plan $x\,\mathrm{Cos}\,l+y\,\mathrm{Cos}\,m+z\,\mathrm{Cos}\,n=0$ l'ellipsoïde

$$(\mathcal{B}+R)\,x^2+(\mathcal{C}+P)\,y^2+(\mathcal{A}+Q)\,z^2=1$$

ou

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1.$$

CONCLUSION.

Comme nous l'avons dit en commençant, aucune des méthodes que nous venons d'exposer n'est absolument satisfaisante; celle de Fresnel repose sur quelques hypothèses qu'on peut contester; les autres font usage de conditions approximatives. Nous ne pensons pas cependant que les résultats auxquels on parvient puissent être mis en doute; l'accord même de ces différentes théories, quelque imparfaites qu'elles soient, et surtout les preuves que fournit l'expérience, les confirment suffisamment. Ce sera donc un intéressant sujet d'études pour les géomètres que de chercher à perfectionner cette théorie, et d'en former un ensemble rigoureux.

SECONDE PARTIE.

Lorsqu'un point de la surface d'un milieu biréfringent est ébranlé par un rayon lumineux incident, il devient le centre d'ondes dont on veut trouver la forme; or toute onde plane passant par ce point serait, au bout d'un temps donné, transportée parallèlement à elle-même à une distance que nous savons calculer et tangentiellement à la surface cherchée; donc cette surface est l'enveloppe des différents plans analogues à celui qu'on vient de considérer. Pour plus d'uniformité dans la notation, je désignerai partout par V la vitesse de propagation représentée précédemment par s; souvent aussi V sera remplacé par r lorsqu'on considérera l'équation $S\,\frac{\text{Cos}^2 l}{V^2-a^2}=0$ comme celle d'une surface. Enfin, au lieu de P, Q, R, je mettrai a^2, b^2, c^2; on se rappellera seulement que ces dernières quantités offrent deux sens différents suivant la théorie qu'on adopte.

Je commence par exposer la méthode la plus directe pour arriver à l'équation de la surface des ondes [1].

L'équation $S\,\frac{\text{Cos}^2 l}{V^2-a^2}=0$ donnant pour V deux valeurs, qui sont les vitesses des deux ondes planes parallèles au plan $S\,x\,\text{Cos}\,l=0$, la position de chacune de ces ondes au bout du temps t sera représentée par l'équation $S\,x\,\text{Cos}\,l=V\,t$. On cherche donc l'enveloppe de ce dernier plan lorsque l, m, n varient, V étant une des racines de $S\,\frac{\text{Cos}^2 l}{V^2-a^2}=0$, et l, m, n étant liés par la condition $S\,\text{Cos}^2 l=1$.

[1] Je tire cette méthode, en partie du Commentaire de M. de Sénarmont, déjà cité, en partie d'un mémoire de M. Newmann dans le 7me volume du Journal de Liouville.

En différentiant l'équation $S\,x \operatorname{Cos} l = V\,t$ par rapport à $\operatorname{Cos} l$, puis par rapport à $\operatorname{Cos} m$, on a :

$$x + z\,\frac{d \operatorname{Cos} n}{d \operatorname{Cos} l} = t\,\frac{d\,V}{d \operatorname{Cos} l},\quad y + z\,\frac{d \operatorname{Cos} n}{d \operatorname{Cos} m} = t\,\frac{d\,V}{d \operatorname{Cos} m};$$

or les valeurs de $\frac{d \operatorname{Cos} n}{d \operatorname{Cos} l}$ et $\frac{d \operatorname{Cos} n}{d \operatorname{Cos} m}$ se tirent de $S \operatorname{Cos}^2 l = 1$

qui donne $\frac{d \operatorname{Cos} n}{d \operatorname{Cos} l} = -\frac{\operatorname{Cos} l}{\operatorname{Cos} n}$ et $\frac{d \operatorname{Cos} n}{d \operatorname{Cos} m} = -\frac{\operatorname{Cos} m}{\operatorname{Cos} n}$,

celles de $\frac{d\,V}{d \operatorname{Cos} l}$ et $\frac{d\,V}{d \operatorname{Cos} m}$ se tient de $S\,\frac{\operatorname{Cos}^2 l}{V^2 - a^2} = 0$, qui, en posant

$E^2 = S\,\frac{\operatorname{Cos}^2 l}{(V^2-a^2)^2}$ donne $V\,E^2\,\frac{d\,V}{d \operatorname{Cos} l} = \frac{\operatorname{Cos} l}{V^2 - a^2} - \frac{\operatorname{Cos} l}{V^2 - c^2}$

et $V\,E^2\,\frac{d\,V}{d \operatorname{Cos} m} = \frac{\operatorname{Cos} m}{V^2 - b^2} - \frac{\operatorname{Cos} m}{V^2 - c^2}$. On aura donc

$$x - \frac{\operatorname{Cos} l}{\operatorname{Cos} n}\,z = \frac{t \operatorname{Cos} l}{V\,E^2}\left(\frac{1}{V^2 - a^2} - \frac{1}{V^2 - c^2}\right) \text{ et}$$

$$y - \frac{\operatorname{Cos} m}{\operatorname{Cos} n}\,z = \frac{t \operatorname{Cos} m}{V\,E^2}\left(\frac{1}{V^2 - b^2} - \frac{1}{V^2 - c^2}\right),$$

et on peut y joindre l'identité

$$z - \frac{\operatorname{Cos} n}{\operatorname{Cos} n}\,z = \frac{t \operatorname{Cos} n}{V\,E^2}\left(\frac{1}{V^2 - c^2} - \frac{1}{V^2 - c^2}\right).$$

Multiplions respectivement ces trois égalités par $\operatorname{Cos} l$, $\operatorname{Cos} m$, $\operatorname{Cos} n$ et ajoutons-les; on aura

$$V\,t - \frac{z}{\operatorname{Cos} n} = \frac{-t}{V\,E^2}\left(\frac{1}{V^2 - c^2}\right)$$

d'où l'on tire :

$$z = t \operatorname{Cos} n \left[\mathrm{V} + \frac{1}{\mathrm{V E^2 (V^2 - c^2)}} \right],$$

et par suite :

$$x = t \operatorname{Cos} l \left[\mathrm{V} + \frac{1}{\mathrm{V E^2 (V^2 - a^2)}} \right], \quad y = t \operatorname{Cos} m \left[\mathrm{V} + \frac{1}{\mathrm{V E^2 (V^2 - b^2)}} \right].$$

Entre ces trois valeurs et les équations

$$\mathrm{S} \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{\mathrm{V}^2 - a^2} = 0, \ \mathrm{S}\, x \operatorname{Cos} l = \mathrm{V}\, t, \ \mathrm{S} \operatorname{Cos}^2 l = 1,$$

il faut éliminer V, E, et les trois cosinus, pour avoir l'équation de la surface des ondes. On trouve d'abord que :

$$\mathrm{S}\, x^2 = \mathrm{V}^2 t^2 + \frac{t^2}{\mathrm{V^2 E^4}} \mathrm{E}^2 = \mathrm{V}^2 t^2 + \frac{t^2}{\mathrm{V^2 E^2}} \text{ d'où } \frac{1}{\mathrm{V^2 E^2}} = \frac{\mathrm{S}\, x^2}{t^2} - \mathrm{V}^2.$$

De là on tire :

$$x = \mathrm{V}\, t \operatorname{Cos} l \left[1 + \frac{\mathrm{S}\, x^2}{t^2 (\mathrm{V}^2 - a^2)} - \frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{V}^2 - a^2} \right] = \frac{\mathrm{V} \operatorname{Cos} l}{t (\mathrm{V}^2 - a^2)} [\mathrm{S}\, x^2 - a^2 t^2]$$

et de même :

$$y = \frac{\mathrm{V} \operatorname{Cos} m}{t (\mathrm{V}^2 - b^2)} [\mathrm{S}\, x^2 - b^2 t^2], \ z = \frac{\mathrm{V} \operatorname{Cos} n}{t (\mathrm{V}^2 - c^2)} [\mathrm{S}\, x^2 - c^2 t^2].$$

Par suite

$$\mathrm{S} \frac{a^2 x}{\mathrm{S}\, x^2 - a^2 t^2} = \frac{\mathrm{V}}{t} \mathrm{S} \frac{a^2 \operatorname{Cos} l}{\mathrm{V}^2 - a^2} = \frac{\mathrm{V}^3}{t} \mathrm{S} \frac{\operatorname{Cos} l}{\mathrm{V}^2 - a^2} - \frac{\mathrm{V}}{t} \mathrm{S} \operatorname{Cos} l,$$

ou

$$\mathrm{S} \frac{a^2 x^2}{\mathrm{S}\, x^2 - a^2 t^2} = \frac{\mathrm{V}^3}{t} \mathrm{S} \frac{x \operatorname{Cos} l}{\mathrm{V}^2 - a^2} - \mathrm{V}^2.$$

Or

$$S\,\frac{x\,\mathrm{Cos}\,l}{V^2-a^2}=V\,t\,S\,\frac{\mathrm{Cos}^2\,l}{V^2-a^2}+\frac{t}{V\,E^2}\,S\,\frac{\mathrm{Cos}^2\,l}{(V^2-a^2)^2}=\frac{t}{V};$$

on a donc :

$$S\,\frac{a^2\,x^2}{S\,x^2-a^2\,t^2}=0.$$

Telle est, en coordonnées rectangulaires, l'équation de la surface des ondes au bout du temps t.

Cette équation peut se mettre sous une autre forme ; écrivons-la

$$S\,\frac{a^2\,t^2\,\frac{x^2}{S\,x^2}}{S\,x^2-a^2\,t^2}=0$$

et ajoutons-lui membre à membre l'identité

$$S\,\frac{x^2}{S\,x^2}=1;$$

nous aurons

$$S\,\frac{x^2}{S\,x^2-a^2\,t^2}=1.$$

REVUE HISTORIQUE.

Dans son mémoire sur la double réfraction, Fresnel n'a développé aucune méthode pour arriver à l'équation de la surface des ondes ; il se borne à en indiquer plusieurs, toutes également impraticables par leur longueur. Ce fut Ampère qui, le premier, en 1828, résolut le problème dont nous venons de nous occuper. Nous ne rapporterons pas son procédé, parce qu'il est excessivement long, et peu susceptible de perfectionnements. On le trouve dans le 39me volume des Annales de Physique et de Chimie.

A son tour, Cauchy a donné la méthode suivante: (1)

L'équation aux vitesses des ondes planes étant:

(1) $(\mathfrak{L}-V^2)(\mathfrak{M}-V^2)(\mathfrak{N}-V^2)-\mathfrak{P}^2(\mathfrak{L}-V^2)-\mathfrak{Q}^2(\mathfrak{M}-V^2)-\mathfrak{R}^2(\mathfrak{N}-V^2)+2\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}=$ $F(V, \operatorname{Cos} l, \operatorname{Cos} m, \operatorname{Cos} n)=0$ et le plan tangent à l'onde au bout du temps t étant $S\, x \operatorname{Cos} l = Vt$, on cherche quelles sont au bout du temps t, les coordonnées x, y, z du point d'intersection de plusieurs ondes planes peu inclinées les unes sur les autres, et passant en même temps par l'origine, les vibrations étant supposées assez petites pour être insensibles dans chaque onde séparément, et ne devenir sensibles que par leur superposition. Il faut pour cela éliminer l, m, n entre $S\, x \operatorname{Cos} l = Vt$ et les équations $x = t\frac{dV}{d\operatorname{Cos} l}$ $y = t\frac{dV}{d\operatorname{Cos} m}$ $z = t\frac{dV}{d\operatorname{Cos} n}$, qu'on en déduit en faisant varier l, m, n. Or $\frac{dV}{d\operatorname{Cos} l}$, $\frac{dV}{d\operatorname{Cos} m}$, $\frac{dV}{d\operatorname{Cos} n}$ sont par la nature de l'équation (1) fonctions de $\frac{\operatorname{Cos} l}{\operatorname{Cos} n}$ et $\frac{\operatorname{Cos} m}{\operatorname{Cos} n}$; éliminant ces deux rapports entre les trois équations $x = t\frac{dV}{d\operatorname{Cos} l}$, $y = t\frac{dV}{d\operatorname{Cos} m}$, $z = t\frac{dV}{d\operatorname{Cos} n}$ on aura une équation $\Pi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)=0$ qui est celle de la surface des ondes.

Considérons la surface représentée par $F(t, x, y, z) = 0$, et soit r la longueur du rayon vecteur de cette surface qui fait avec les axes des angles l, m, n; les extrémités de ce rayon vecteur auront pour coordonnées $x = r \operatorname{Cos} l$, $y = r \operatorname{Cos} m$, $z = r \operatorname{Cos} n$ et l'équation peut s'écrire :

$F(t, r \operatorname{Cos} l, r \operatorname{Cos} m, r \operatorname{Cos} n) = 0$, ou $F\left(\frac{t}{r}, \operatorname{Cos} l, \operatorname{Cos} m, \operatorname{Cos} n\right) = 0$,

car F est homogène en t, x, y, z; on en tire donc pour $\frac{t}{r}$ les mêmes valeurs que donne pour V l'équation $F(V, \operatorname{Cos} l, \operatorname{Cos} m, \operatorname{Cos} n) = 0$. L'équation du plan tangent peut donc s'écrire $S x \operatorname{Cos} l = \frac{t^2}{r}$, ou encore $S\, x\, \mathrm{x} = t^2$.

Soit maintenant $V^2 = \mathfrak{F}(\operatorname{Cos} l, \operatorname{Cos} m, \operatorname{Cos} n)$ une des trois valeurs de V^2 tirées de (1), on aura pour t^2 la valeur correspondante $t^2 = \mathfrak{F}(x, y, z)$,

(1) Exercices mathématiques, V.

$\mathfrak{F}$ étant homogène du second degré en x, y, z. La nappe de la surface des ondes correspondant à cette valeur de V sera l'enveloppe du plan mobile dont les coordonnées x, y, z satisfont l'équation $\mathrm{x}\,x + \mathrm{y}\,y + \mathrm{z}\,z = t^2$, en regardant x, y, z comme des paramètres variables qui vérifient l'équation $t^2 = \mathfrak{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. En différentiant ces deux équations, on obtient :

$$x\,d\mathrm{x} + y\,d\mathrm{y} + z\,d\mathrm{z} = 0$$

$$\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,d\mathrm{x} + \mathrm{X}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,d\mathrm{y} + \Psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\,d\mathrm{z} = 0,$$

en appelant Φ, X, Ψ les demi-dérivées de la fonction $\mathfrak{F}$ par rapport à x, y, z. Les valeurs de $\frac{d\mathrm{z}}{d\mathrm{y}}$ et de $\frac{d\mathrm{z}}{d\mathrm{x}}$ devant être les mêmes dans les deux équations on en tire que :

$$\frac{\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{x} = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{y} = \frac{\Psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{z}$$

Or $\mathfrak{F}$ étant une fonction homogène on a :

$$\mathrm{x}\,\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) + \mathrm{y}\,\mathrm{X}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) + \mathrm{z}\,\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \mathfrak{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

Donc :

$$\frac{\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{x} = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{y} = \frac{\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{z} = \frac{\mathfrak{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})}{x\mathrm{x} + y\mathrm{y} + z\mathrm{z}} = 1,$$

ou :

$$\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = x,\ \psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = y,\ \Psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = z.$$

On aura donc l'équation de la surface des ondes en éliminant x, y, z entre ces trois équations et l'équation $\mathrm{S}\,x\,\mathrm{x} = t^2$ ou $t^2 = \mathfrak{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

Appliquons cette méthode générale aux valeurs de V^2 données par l'équation :

$$(2) \quad \mathrm{V}^4 - [(b^2 + c^2)\,\mathrm{Cos}^2\,l + (a^2 + c^2)\,\mathrm{Cos}^2\,m + (a^2 + b^2)\,\mathrm{Cos}^2\,n]\,\mathrm{V}^2$$
$$+ (b^2c^2\,\mathrm{Cos}^2\,l + a^2c^2\,\mathrm{Cos}^2\,m + a^2b^2\,\mathrm{Cos}^2\,n)(\mathrm{Cos}^2\,l + \mathrm{Cos}^2\,m + \mathrm{Cos}^2\,n) = 0$$

d'où :

$$V^2 = \frac{1}{2} S (b^2 + c^2) \operatorname{Cos}^2 l \pm$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{S (b^2-c^2)^2 \operatorname{Cos}^4 l + 2 S (a^2-b^2)(a^2-c^2) \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos}^2 n,}$$

et par conséquent :

$$t^2 = \frac{1}{2} S (b^2 + c^2) x^2 \pm$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{S (b^2-c^2)^2 x^4 + 2 S (a^2-b^2)(a^2-c^2) y^2 z^2.}$$

En supposant que les conditions $a^2 = b^2 = c^2$ sont à peu près remplies, et que, par conséquent les différences a^2-b^2, a^2-c^2, b^2-c^2 peuvent se négliger, on aura :

$$\Phi (x, y, z) = \frac{b^2 + c^2}{2} x = bc x, \quad X (x, y, z) = ac y, \quad \Psi (x, y, z) = ab z.$$

Il faut donc substituer les valeurs $x = \frac{x}{bc}$, $y = \frac{y}{ac}$, $z = \frac{z}{ab}$ dans la valeur de t^2, ou, ce qui revient au même, remplacer l'équation (2) V par t, et Cos l, Cos m, Cos n par $\frac{x}{bc}$, $\frac{y}{ac}$, $\frac{z}{ab}$, ce qui donne :

$$t^4 - \left[\frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} x^2 + \frac{a^2 + c^2}{a^2 c^2} y^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} z^2 \right] t^2$$

$$+ (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{x^2}{b^2c^2} + \frac{y^2}{a^2c^2} + \frac{z^2}{a^2b^2} \right) = 0,$$

ou

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) -$$
$$[a^2 (b^2 + c^2) x^2 + b^2 (a^2 + c^2) y^2 + c^2 (a^2 + b^2) z^2] t^2$$
$$+ a^2 b^2 c^2 t^4 = 0$$

ce qui revient à :

$$\mathbf{S} \frac{a^2 x^2}{S\ x^2 - a^2 t^2} = 0.$$

Si on cherche par le même procédé la surface de l'onde répondant à la valeur $V^2 = L \operatorname{Cos}^2 l + M \operatorname{Cos}^2 m + N \operatorname{Cos}^2 n$, on trouve l'ellipsoïde $\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 1$, qui joint à la surface $\mathbf{S} \frac{x^2 a^2}{S x^2 - a^2 t^2}$ constitue une surface à 3 nappes répondant au cas général.

M. Plücker a donné dans le journal de Crelle, tome XIX, une méthode fondée sur la théorie des surfaces polaires réciproques. Si dans l'équation $\mathbf{S} \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{V^2 - a^2} = 0$, on veut que V soit la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface des ondes après l'unité de temps, plan tangent dont l'équation sera représentée par $Ax + By + Cz + 1 = 0$, on doit remplacer V^2 par $\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2}$ et $\operatorname{Cos}^2 l, \operatorname{Cos}^2 m, \operatorname{Cos}^2 n$ par $\frac{A^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{B^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2}$,

ce qui donne :

$$\mathbf{S} \frac{A^2}{1 - a^2 (A^2 + B^2 + C^2)} = 0,$$

ou

$$(A^2 + B^2 + C^2)(A^2 b^2 c^2 + B^2 a^2 c^2 + C^2 a^2 b^2) -$$
$$[A^2 (b^2 + c^2) + B^2 (a^2 + c^2) + C^2 (a^2 + b^2)] + 1 = 0,$$

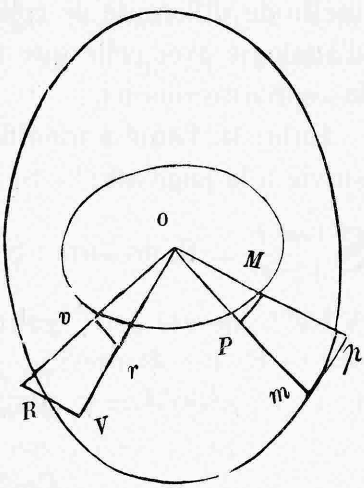
équation propre à déterminer la surface des ondes au moyen de ses plans tangents.

Cela posé, on a vu que les valeurs de V^2 qui expriment les deux vitesses des ondes planes dans une direction donnée sont inverses aux deux demi-axes de la section diamétrale faite dans l'ellipsoïde $S a^2 x^2 = 1$ ou $\frac{1}{r^2} = a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \chi + c^2 \operatorname{Cos}^2 \psi$ par un plan perpendiculaire à la direction donnée; ou, ce qui est la même chose, elles sont égales aux deux demi-axes de la section diamétrale faite par le même plan dans la surface $(S x^2)^2 = S a^2 x^2$ ou $r^2 = a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + b^2 \operatorname{Cos}^2 \chi + c^2 \operatorname{Cos}^2 \psi$; car ces deux surfaces sont telles que leurs points situés sur le même rayon vecteur sont des points conjugués par rapport à une sphère de rayon 1. Démontrons maintenant deux lemmes :

1er Lemme. Si une surface est représentée par l'équation $F(A, B, C) = 0$ entre les trois constantes A, B, C de l'équation de son plan tangent $Ax + By + Cz + 1 = 0$, la surface polaire par rapport à une sphère de rayon 1 aura pour équation $F(-x, -y, -z) = 0$. En effet, si (x', y', z') est un point de cette seconde surface, il est le pôle du plan $xx' + yy' + zz' = 1$ et pour que ce plan soit tangent à la première surface, il faut que $x' = -A$, $y' = -B$, $z' = -C$.

2me Lemme. La surface de l'onde lumineuse, au bout de l'unité de temps est polaire, par rapport à une sphère de rayon 1, de la surface qu'on obtient en remplaçant, dans son équation, a^2, b^2, c^2 par $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$.

En effet soit M un point de l'ellipsoïde $S a^2 x^2 = 1$, et OP la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en M; le plan polaire de M, perpendiculaire au plan de la figure, sera tangent en m, à l'ellipsoïde $S \frac{x^2}{a^2} = 1$, qui est polaire de $S a^2 x^2 = 1$ par rapport à une sphère de rayon 1; et ce point m sera le pôle du plan tangent en M; donc OP prolongé passe en m, et OM prolongé est perpendiculaire à mp; $Op = \frac{1}{OM}$ et $OP = \frac{1}{Om}$. Un plan passant par OM et perpendiculaire à celui de la figure coupera l'ellipsoïde $S a^2 x^2 = 1$ de manière que OM soit un des demi-axes de la section. Faisons tourner les plans tangents et leurs perpendiculaires de 90° autour d'un axe mené par O perpendiculairement à la figure; cela ne change rien aux relations entre les points et les plans qu'on a considérés. Ainsi les points m, p, M, P viendront en R, V, r, v; le plan RV sera, d'après ce qu'on a vu, tangent à la surface de l'onde, et le plan rv à une autre surface qui en dérive en remplaçant l'ellipsoïde $S a^2 x^2 = 1$, par l'ellipsoïde $S \frac{x^2}{a^2} = 1$, c'est-à-dire en remplaçant a^2, b^2, c^2 par $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$. En donnant à M et par suite à R, V, etc., toutes les positions possibles, on voit que tous les plans tangents RV à la



surface de l'onde contiennent les pôles R des plans tangents rv à l'autre surface, et réciproquement; donc ces deux surfaces sont polaires réciproques.

Maintenant remplaçons A, B, C par $-x, -y, -z$ dans l'équation qui représente la surface de l'onde par ses plans tangents, et nous aurons l'équation de la surface polaire : $\mathbf{S}\,\dfrac{x^2}{1 - a^2\,\mathrm{S}\,x^2} = 0$; en y mettant $\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{b^2}, \dfrac{1}{c^2}$ à la place de a^2, b^2, c^2, nous aurons $\mathbf{S}\,\dfrac{a^2\,x^2}{a^2 - \mathrm{S}\,x^2} = 0$, ou $\mathbf{S}\,\dfrac{a^2\,x^2}{\mathrm{S}\,x^2 - a^2} = 0$, pour l'équation de la surface des ondes au bout de l'unité de temps. Il est facile d'en conclure que l'équation de la surface des ondes au bout d'un temps t, sera

$$\mathbf{S}\,\frac{a^2\,x^2}{\mathrm{S}\,x^2 - a^2\,t^2} = 0.$$

Dans le tome XVIII des Mémoires de l'Académie, Cauchy a donné une méthode différente de celle des Exercices mathématiques; mais elle a trop d'analogie avec celle que nous avons développée page 50, pour que nous la reproduisions ici.

Enfin M. Lamé a modifié, quant à la forme, la marche que nous avons suivie à la page 50 ([1]). Si on appelle V' et V'' les deux racines de l'équation $\mathbf{S}\,\dfrac{\mathrm{Cos}^2\,l}{\mathrm{V}^2 - a^2} = 0$, on aura : $\mathrm{S}\,(b^2 + c^2)\,\mathrm{Cos}^2\,l = \mathrm{V}'^2 + \mathrm{V}''^2$ et $\mathrm{S}\,b^2\,c^2\,\mathrm{Cos}^2\,l = \mathrm{V}'^2\,\mathrm{V}''^2$; de ces deux égalités jointes à $\mathrm{S}\,\mathrm{Cos}^2\,l = 1$, on tire :

$$\mathrm{Cos}^2\,l = -\frac{(\mathrm{V}'^2 - a^2)\,(\mathrm{V}''^2 - a^2)}{(c^2 - a^2)\,(a^2 - b^2)} \qquad \mathrm{Cos}^2\,m = -\frac{(\mathrm{V}'^2 - b^2)\,(\mathrm{V}''^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2)}$$

$$\mathrm{Cos}^2\,n = -\frac{(\mathrm{V}'^2 - c^2)\,(\mathrm{V}''^2 - c^2)}{(b^2 - c^2)\,(c^2 - a^2)}$$

ce qui montre que $a > \mathrm{V}' > b$, et $b > \mathrm{V}'' > c$. Ainsi l, m, n étant des fonctions connues de V' et V'' on peut obtenir l'équation de la surface enveloppe du plan $\mathrm{S}\,x\,\mathrm{Cos}\,l = \mathrm{V}'\,t$, en éliminant V' et V'' entre $\mathrm{S}\,x\,\mathrm{Cos}\,l = \mathrm{V}'\,t$

(1) Théorie de l'élasticité, page 243.

et ses dérivées: $S\, x \frac{d \operatorname{Cos} l}{d V'} = t$, $S\, x \frac{d \operatorname{Cos} l}{d V''} = 0$, ou à cause des différentielles logarithmiques de $\operatorname{Cos}^2 l$, $\operatorname{Cos}^2 m$, $\operatorname{Cos}^2 n$, qui donnent $\frac{d \operatorname{Cos} l}{d V'} = \frac{V' \operatorname{Cos} l}{V'^2 - a^2}$ $\frac{d \operatorname{Cos} l}{d V''} = \frac{V'' \operatorname{Cos} l}{V'' - a^2}$, entre les équations :

$$S x \operatorname{Cos} l = V' t,\ S \frac{x \operatorname{Cos} l}{V'^2 - a^2} = \frac{t}{V'},\ S \frac{x \operatorname{Cos} l}{V''^2 - a^2} = 0.$$

Or, ces trois équations sont vérifiées par les valeurs:

$$x = V' t \operatorname{Cos} l + \frac{t \operatorname{Cos} l}{V' E'^2 (V'^2 - a^2)},\ y = V' t \operatorname{Cos} m + \frac{t \operatorname{Cos} m}{V' E'^2 (V'^2 - b^2)},$$

$$z = V' t \operatorname{Cos} n + \frac{t \operatorname{Cos} n}{V' E'^2 (V'^2 - c^2)},$$

$$\text{en posant } E'^2 = S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{(V'^2 - a^2)^2}.$$

On s'en assure aisément par la substitution, en remarquant que

$$S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{V'^2 - a^2} = 0,\quad S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{V''^2 - a^2} = 0,\quad S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{(V'^2 - a^2)(V''^2 - a^2)} = 0,$$

cette dernière relation provenant de la soustraction des deux autres. Alors on a pour x, y, z les mêmes valeurs qu'à la page 51, et on pourra achever comme ci-dessus.

NOUVELLE MÉTHODE.

La méthode que je vais indiquer pour arriver à l'équation de la surface des ondes est une modification de celle de M. Plüker; c'est la plus rapide de toutes ; cependant, comme elle est fondée sur des considérations géométriques, je ne l'ai pas jugée préférable à la méthode purement analytique de la page 51.

On se rappelle que la surface d'élasticité $S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{r^2 - a^2} = 0$ se construit en portant normalement au plan de l'onde deux longueurs égales aux inverses des demi-axes de la section diamétrale faite par ce plan dans l'ellipsoïde $S\, a^2 x^2 = 1$.

Lemme. La surface des ondes au bout de l'unité de temps, est polaire réciproque par rapport à une sphère de rayon 1, de la surface qu'on obtient en remplaçant dans son équation a^2, b^2, c^2 par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. (Voir la démonstration à la page 57.)

Cela posé, reportons-nous à la figure de la page 57. On peut passer de la surface (V) c'est-à-dire de la surface dont V est un des points, à la surface (R) par l'intermédiaire de la surface *(r)*, polaire de (R) et qui doit se déduire de (V) en remplaçant dans son équation r par $\frac{1}{r}$. Donc, si l'on remplace dans l'équation de la surface d'élasticité (V), c'est-à-dire dans $S\,\frac{\text{Cos}^2 l}{r^2 - a^2} = 0$, r^2, a^2, b^2, c^2 par $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, on aura l'équation de la surface des ondes; c'est donc $S\,\frac{a^2\,\text{Cos}^2\,\varphi}{r^2 - a^2} = 0$, en coordonnées polaires (r, φ, χ, ψ) ou $S\,\frac{a^2\,x^2}{Sx^2 - a^2}$, en coordonnées rectangulaires.

DE LA DIRECTION DES VIBRATIONS.

C'est maintenant, et avec les données que fournit notre seconde partie, que nous pourrons faire ressortir ce qui distingue les différentes méthodes exposées dans la première partie. Lorsqu'on suit la marche de Fresnel, on trouve que la direction des vibrations qui correspondent à un rayon vecteur de la surface des ondes est la projection de ce rayon vecteur sur le plan de l'onde. En effet, V' et V'' étant les valeurs de V qui répondent à une direction donnée (l, m, n) et $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, $\alpha''\,\beta''\,\gamma''$ les valeurs correspondantes des angles α, β, γ qui fixent la direction de la vibration, on aura, d'après ce qu'on a vu à la page 13 :

$$\frac{\text{Cos}\,\alpha'}{\left(\frac{\text{Cos}\,l}{V'^2 - a^2}\right)} = \frac{\text{Cos}\,\beta'}{\left(\frac{\text{Cos}\,m}{V'^2 - b^2}\right)} = \frac{\text{Cos}\,\gamma'}{\left(\frac{\text{Cos}\,n}{V'^2 - c^2}\right)}$$

d'où

$$\operatorname{Cos} \alpha' = \frac{\operatorname{Cos} l}{V'^2 - a^2} \cdot \frac{1}{E'}, \quad \operatorname{Cos} \beta' = \frac{\operatorname{Cos} m}{V'^2 - b^2} \cdot \frac{1}{E'}, \text{ etc.,}$$

$$\text{en posant } E'^2 = S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{(V'^2 - a^2)^2}.$$

De même

$$\operatorname{Cos} \alpha'' = \frac{\operatorname{Cos} l}{V''^2 - a^2} \cdot \frac{1}{E''}, \quad \operatorname{Cos} \beta'' = \frac{\operatorname{Cos} m}{V''^2 - b^2} \cdot \frac{1}{E''}, \text{ etc.,}$$

$$\text{en posant } E''^2 = S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{(V''^2 - a^2)^2}$$

D'ailleurs en appelant x', y', z' les coordonnées de l'extrémité du rayon vecteur de la surface des ondes qui aboutit au point de contact du plan tangent $S\, x \operatorname{Cos} l = V'\, t$, et x'', y'', z'' celles de l'extrémité du rayon vecteur qui correspond au plan tangent $S\, x \operatorname{Cos} l = V''\, t$, on aura, d'après la page 51 :

$$x' = t \operatorname{Cos} l \left[V' + \frac{1}{V' E'^2 (V'^2 - a^2)} \right],$$

$$y' = t \operatorname{Cos} m \left[V' + \frac{1}{V' E'^2 (V'^2 - b^2)} \right], \text{ etc.,}$$

$$\text{et } x'' = t \operatorname{Cos} l \left[V'' + \frac{1}{V'' E''^2 (V''^2 - a^2)} \right],$$

$$y'' = t \operatorname{Cos} m \left[V'' + \frac{1}{V'' E''^2 (V''^2 - b^2)} \right], \text{ etc.}$$

Donc

$$S\, x' \operatorname{Cos} \alpha'' = \frac{V' t}{E''} S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{V''^2 - a^2} + \frac{t}{V' E'' E'^2} S \frac{\operatorname{Cos}^2 l}{(V'^2 - a^2)(V''^2 - a^2)} = 0;$$

et de même $S x'' \cos \alpha' = 0$; ainsi chacun des deux rayons vecteurs est perpendiculaire aux vibrations de l'autre, et par conséquent se projette sur le plan de l'onde suivant la direction de ses propres vibrations. En d'autres termes, les vibrations sont perpendiculaires au plan de polarisation. En effet si l'on considère un cristal à un axe, dans lequel la surface se décompose en une sphère et un ellipsoïde de révolution, et qu'on coupe cette surface par un plan mené par l'axe, on obtient un cercle et une ellipse; menons à ces deux courbes deux tangentes parallèles et considérons les rayons vecteurs menés du centre aux deux points de contact; celui du cercle représente le rayon ordinaire, et celui de l'ellipse le rayon extraordinaire; les vibrations de ce dernier seront, d'après ce qu'on vient de démontrer, dirigées suivant la tangente à l'ellipse; donc celles du rayon ordinaire seront perpendiculaires au plan du cercle et de l'ellipse; mais ce plan est ce qu'on appelle le plan de polarisation du rayon ordinaire; ainsi dans chaque rayon les vibrations sont perpendiculaires au plan de polarisation.

La méthode du second groupe (page 41) considérant les vibrations à la manière de Fresnel, arrive au même résultat.

Dans les méthodes du premier groupe, le résultat est tout-à-fait différent.

Suivons d'abord celle de Cauchy. Soient $\left\{ \begin{array}{l} x = pz \\ y = qz \end{array} \right.$ les équations d'un rayon vecteur de la section faite par le plan de l'onde $S x \cos l = 0$ dans la surface $S a^2 x^2 = (S x^2)^2$ ou $r^2 = S a^2 \cos^2 \varphi$; en remplaçant $\cos \varphi$, $\cos \chi$, $\cos \psi$

$$\text{par} \quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

cette dernière équation devient :

$$r^2(1 + p^2 + q^2) = a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2,$$

ou

$$p^2(r^2 - a^2) + q^2(r^2 - b^2) + r^2 - c^2 = 0;$$

celle du plan de l'onde devient en remplaçant x et y par $p\,z$ et $q\,z$: p Cos l $+ q$ Cos $m +$ Cos $n = 0$. Si on veut que p et q prennent les valeurs qui conviennent aux deux axes de la section, on aura par les conditions du maximum ou du minimum de r, que :

$$p\,(r^2 - a^2) + q\,(r^2 - b^2)\,\frac{dq}{dp} = 0 \text{ et } \mathrm{Cos}\,l + \mathrm{Cos}\,m\,\frac{dq}{dp} = 0,$$

$$\text{d'où } 0 = \mathrm{Cos}\,m\,(r^2 - a^2)\,p. - \mathrm{Cos}\,l\,(r^2 - b^2)\,q.$$

De cette équation et de p Cos $l + q$ Cos $m +$ Cos $n = 0$, on tire :

$$p = \frac{-\,\mathrm{Cos}\,l\,\mathrm{Cos}\,n\,(r^2 - b^2)}{\mathrm{Cos}^2 m\,(r^2 - a^2) + \mathrm{Cos}^2 l\,(r^2 - b^2)} \quad q = \frac{-\,\mathrm{Cos}\,m\,\mathrm{Cos}\,n\,(r^2 - a^2)}{\mathrm{Cos}^2 m\,(r^2 - a^2) + \mathrm{Cos}^2 l\,(r^2 - b^2)},$$

valeurs qui, substituées dans $p^2\,(r^2 - a^2) + q^2\,(r^2 - b^2) + r^2 - c^2 = 0$, donnent bien $\mathrm{S}\,\frac{\mathrm{Cos}^2 l}{r^2 - a^2} = 0$, comme on l'a déjà démontré. Mais on tire de cette dernière équation :

$$r^2 - c^2 = \frac{-\,\mathrm{Cos}^2 n\,(r^2 - a^2)\,(r^2 - b^2)}{\mathrm{Cos}^2 m\,(r^2 - a^2) + \mathrm{Cos}^2 l\,(r^2 - b^2)};$$

donc

$$\frac{p}{r^2 - c^2} = \frac{\mathrm{Cos}\;l}{\mathrm{Cos}\,n}\cdot\frac{1}{r^2 - a^2}, \text{ d'où } p = \frac{\mathrm{Cos}\;l}{\mathrm{Cos}\,n}\cdot\frac{r^2 - c^2}{r^2 - a^2} \text{ et } q = \frac{\mathrm{Cos}\,m}{\mathrm{Cos}\;n}\cdot\frac{r^2 - c^2}{r^2 - b^2}.$$

Donc les cosinus des angles que font avec les axes les directions de ces deux rayons de la section diamétrale seront, en reprenant V au lieu de r: pour l'un :

$$\frac{\mathrm{Cos}\;l.\,\frac{\mathrm{V}'^2 - c^2}{\mathrm{V}'^2 - a^2}}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2 l\left(\frac{\mathrm{V}'^2 - c^2}{\mathrm{V}'^2 - a^2}\right)^2 + \mathrm{Cos}^2 m\left(\frac{\mathrm{V}'^2 - c^2}{\mathrm{V}'^2 - b^2}\right)^2 + \mathrm{Cos}^2 n\left(\frac{\mathrm{V}'^2 - c^2}{\mathrm{V}'^2 - c^2}\right)^2}}$$

$$\text{ou } \frac{\left(\frac{\mathrm{Cos}\,l}{\mathrm{V}'^2 - a^2}\right)}{\sqrt{\mathrm{S}\,\frac{\mathrm{Cos}^2 l}{(\mathrm{V}'^2 - a^2)^2}}} \quad \text{ou } \left(\frac{\mathrm{Cos}\;l}{\mathrm{V}'^2 - a^2}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{E}'}$$

et deux expressions analogues; pour l'autre: $\frac{\text{Cos}\, l}{V'^2 - a^2} \cdot \frac{1}{E''}$ et deux expressions analogues. Ainsi la direction que Fresnel assigne dans le plan de l'onde à la vibration correspondant à V' est simplement ici la direction de celui des rayons vecteurs de la section qui donne la valeur de V'.

Appelons δ, ε, ϑ les angles que fait avec les axes une droite perpendiculaire à la normale à l'onde et à un des deux rayons vecteurs déterminés ci-dessus, droite qui se confond par conséquent avec l'autre; on aura

$$\text{S Cos}\, \delta \,\text{Cos}\, l = 0 \text{ et S} \frac{\text{Cos}\, \delta \,\text{Cos}\, l}{V^2 - a^2} = 0,$$

d'où:

$$\text{Cos}\, \delta \,\text{Cos}\, l \left(\frac{1}{V^2 - a^2} - \frac{1}{V^2 - c^2} \right) + \text{Cos}\, \varepsilon \,\text{Cos}\, m \left(\frac{1}{V^2 - b^2} - \frac{1}{V^2 - c^2} \right) = 0$$

$$\text{et Cos}\, \delta \,\text{Cos}\, l \left(\frac{1}{V^2 - a^2} - \frac{1}{V^2 - b^2} \right) + \text{Cos}\, \vartheta \,\text{Cos}\, n \left(\frac{1}{V^2 - c^2} - \frac{1}{V^2 - b^2} \right) = 0$$

ou encore :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\text{Cos}\, \delta \,\text{Cos}\, l \frac{a^2 - c^2}{V^2 - a^2} + \text{Cos}\, \varepsilon \,\text{Cos}\, m \frac{b^2 - c^2}{V^2 - b^2} = 0 \\ &\text{Cos}\, \delta \,\text{Cos}\, l \frac{a^2 - b^2}{V^2 - a^2} + \text{Cos}\, \vartheta \,\text{Cos}\, n \frac{c^2 - b^2}{V^2 - c^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

équations qui déterminent δ, ε, ϑ; si l'on y fait $V = V'$, δ, ε, ϑ représenteront la direction de celui des deux rayons vecteurs ci-dessus qui répond à $V = V'$, et réciproquement.

Maintenant les angles α, β, γ qui déterminent la direction des vibrations sont donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} &(\text{L Cos}^2 l + c^2 \text{Cos}^2 m + b^2 \text{Cos}^2 n - V^2) \text{Cos}\, \alpha + \\ &2\, c^2 \text{Cos}\, l \,\text{Cos}\, m \,\text{Cos}\, \beta + 2\, b^2 \text{Cos}\, l \,\text{Cos}\, n \,\text{Cos}\, \gamma = 0 \\ &2\, c^2 \text{Cos}\, l \,\text{Cos}\, m \,\text{Cos}\, \alpha + (c^2 \text{Cos}^2 l + \text{M Cos}^2 m + \\ &a^2 \text{Cos}^2 n - V^2) \text{Cos}\, \beta + 2\, a^2 \text{Cos}\, m \,\text{Cos}\, n \,\text{Cos}\, \gamma = 0 \\ &2\, b^2 \text{Cos}\, l \,\text{Cos}\, n \,\text{Cos}\, \alpha + 2\, a^2 \text{Cos}\, m \,\text{Cos}\, n \,\text{Cos}\, \beta + \\ &(b^2 \text{Cos}^2 l + a^2 \text{Cos}^2 m + \text{N Cos}^2 n - V^2) \text{Cos}\, \gamma = 0 \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Cos}\gamma} = \frac{\left\{\begin{array}{l} -2\,b^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n\,(c^2 \operatorname{Cos}^2 l + \mathrm{M} \operatorname{Cos}^2 m + \\ a^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) + 4\,a^2 c^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos} n \end{array}\right.}{\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{L} \operatorname{Cos}^2 l + c^2 \operatorname{Cos}^2 m + b^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2)\,(c^2 \operatorname{Cos}^2 l + \\ \mathrm{M} \operatorname{Cos}^2 m + a^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) - 4\,c^4 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m \end{array}\right.}$$

$$\frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\gamma} = \frac{\left\{\begin{array}{l} -2\,a^2 \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\,(\mathrm{L} \operatorname{Cos}^2 l + c^2 \operatorname{Cos}^2 m + \\ b^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) + 4\,b^2 c^2 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n \end{array}\right.}{\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{L} \operatorname{Cos}^2 l + c^2 \operatorname{Cos}^2 m + b^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2)\,(c^2 \operatorname{Cos}^2 l + \\ \mathrm{M} \operatorname{Cos}^2 m + a^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) - 4\,c^4 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos}^2 m. \end{array}\right.}$$

On satisfait les mêmes équations en posant :

$\operatorname{Cos}\alpha\,[(\mathrm{L} \operatorname{Cos}^2 l + c^2 \operatorname{Cos}^2 m + b^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2)\,a^2 \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n - 2\,b^2 c^2 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n] = \operatorname{Cos}\beta\,[(c^2 \operatorname{Cos}^2 l + \mathrm{M} \operatorname{Cos}^2 m + a^2 \operatorname{Cos} n^2 - \mathrm{V}^2)\, b^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n - 2\,a^2 c^2 \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} n] = \operatorname{Cos}\gamma\,[(b^2 \operatorname{Cos}^2 l + a^2 \operatorname{Cos}^2 m + \mathrm{N} \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2)\,c^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m - 2\,a^2 b^2 \operatorname{Cos}^2 n \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m]$, car, en égalant les deux valeurs de $\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Cos}\gamma}$ et chassant les dénominateurs, on obtient : $4\,a^4 c^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos}^3 m \operatorname{Cos}^2 n\,(\mathrm{L} \operatorname{Cos}^2 l + c^2 \operatorname{Cos}^2 m + b^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) + 4\,b^4 c^2 \operatorname{Cos}^3 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos}^2 n\,(c^2 \operatorname{Cos}^2 l + \mathrm{M} \operatorname{Cos}^2 m + a^2 \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) + 4\,c^6 \operatorname{Cos}^3 l \operatorname{Cos}^3 m\,(b^2 \operatorname{Cos}^2 l + a^2 \operatorname{Cos}^2 m + \mathrm{N} \operatorname{Cos}^2 n - \mathrm{V}^2) - 8\,a^2 b^2 c^4 \operatorname{Cos}^3 l \operatorname{Cos}^3 m \operatorname{Cos}^2 n - c^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m\,(\mathrm{L} \operatorname{Cos}^2 l + \ldots)\,(c^2 \operatorname{Cos}^2 l + \ldots)\,(b^2 \operatorname{Cos}^2 l + \ldots) = 0$, ce qui est une identité, puisqu'en divisant tous les termes par $-c^2 \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m$, on retrouve l'équation du 3me degré qui donne les trois valeurs de V^2.

Si nous remplaçons L, M, N par leurs valeurs approchées $b^2 + c^2 - a^2 + \frac{2\,b^2 c^2}{a^2}$, etc., le multiplicateur de $\operatorname{Cos}\alpha$ devient $[a^2 \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n\,(b^2 \operatorname{Cos}^2 l +$

$c^2 \operatorname{Cos}^2 l - a^2 \operatorname{Cos}^2 l + \frac{2 b^2 c^2}{a^2} \operatorname{Cos}^2 l + c^2 \operatorname{Cos}^2 m + b^2 \operatorname{Cos}^2 n -$
$V^2 \operatorname{Cos}^2 l - V^2 \operatorname{Cos}^2 m - V^2 \operatorname{Cos}^2 n) - 2 b^2 c^2 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n]$

ou

$$a^2 \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n \left[\operatorname{Cos}^2 l (c^2 - V^2) + \operatorname{Cos}^2 m (c^2 - V^2) + \operatorname{Cos}^2 n (b^2 - V^2) + (b^2 - a^2) \operatorname{Cos}^2 l\right]$$

ou :

$$a^2 \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n \left[\operatorname{Cos}^2 l (c^2 - V)^2 - \frac{\operatorname{Cos}^2 l (c^2 - V^2)(b^2 - V^2)}{a^2 - V^2} + (b^2 - a^2) \operatorname{Cos}^2 l\right]$$

ou encore :

$$a^2 \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n \left[(c^2 - V^2)(b^2 - V^2) \left\{\frac{1}{b^2 - V^2} - \frac{1}{a^2 - V^2}\right\} + b^2 - a^2\right]$$

ou enfin :

$$a^2 (a^2 - b^2) \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n \left[\frac{c^2 - V^2}{a^2 - V^2} - 1\right].$$

En transformant de même les multiplicateurs de $\operatorname{Cos} \beta$ et $\operatorname{Cos} \gamma$, on aura :

$$\operatorname{Cos} \alpha \,.\, a^2 (a^2 - b^2) \operatorname{Cos}^2 l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos} n \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2 - V^2}\right) =$$

$$\operatorname{Cos} \beta \,.\, b^2 (b^2 - c^2) \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos}^2 m \operatorname{Cos} n \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 - V^2}\right) =$$

$$\operatorname{Cos} \gamma \,.\, c^2 (c^2 - a^2) \operatorname{Cos} l \operatorname{Cos} m \operatorname{Cos}^2 n \left(\frac{b^2 - c^2}{c^2 - V^2}\right)$$

ou

$$a^2 \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} l \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2)}{V^2 - a^2} = b^2 \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} m \frac{(b^2 - c^2)(a^2 - b^2)}{V^2 - b^2} =$$

$$c^2 \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} n \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{V^2 - c^2}.$$

Comparant avec les équations (2) de la page précédente, on en tire :

$$\frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}-\frac{\operatorname{Cos}\varepsilon}{\operatorname{Cos}\delta}=\frac{\operatorname{Cos} l}{\operatorname{Cos} m}\left[\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2}\cdot\frac{V^2-b^2}{V^2-a^2}-\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2}\cdot\frac{V^2-b^2}{V^2-a^2}\right]$$

$$=\frac{\operatorname{Cos} l}{\operatorname{Cos} m}\cdot\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2}\cdot\frac{V^2-b^2}{V^2-a^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

et de même

$$\frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\alpha}-\frac{\operatorname{Cos}\vartheta}{\operatorname{Cos}\delta}=\frac{\operatorname{Cos} l}{\operatorname{Cos} n}\cdot\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}\cdot\frac{V^2-c^2}{V^2-a^2}\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Ainsi, les différences a^2-b^2, a^2-c^2 étant très petites,

$$\frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha}\text{ diffère peu de }\frac{\operatorname{Cos}\varepsilon}{\operatorname{Cos}\delta}\text{ et }\frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\alpha}\text{ de }\frac{\operatorname{Cos}\vartheta}{\operatorname{Cos}\delta},$$

c'est-à-dire que la direction (α, β, γ) diffère très peu de la direction (δ, ε, ϑ) pour la même valeur de V; ainsi les vibrations répondant à V' sont dirigées presque perpendiculairement au rayon vecteur de la section qui donne la valeur de V', ou parallèlement à celui qui donne V'', et qui, d'après Fresnel, représentait la direction des vibrations répondant à V''. Il en résulte que les vibrations qui répondent à un rayon vecteur de la surface des ondes lui sont perpendiculaires [1].

Si l'on suit la méthode de la page 39, la démonstration sera plus aisée. On a l'équation:

$$(c^2\operatorname{Cos}^2 m+b^2\operatorname{Cos}^2 n-V^2)\operatorname{Cos}\alpha-c^2\operatorname{Cos} l\operatorname{Cos} m\operatorname{Cos}\beta-$$
$$b^2\operatorname{Cos} l\operatorname{Cos} n\operatorname{Cos}\gamma=0,$$

qui donne :

$$a^2c^2\operatorname{Cos}^2 m\operatorname{Cos}\alpha'+a^2b^2\operatorname{Cos}^2 n\operatorname{Cos}\alpha'-a^2V'^2\operatorname{Cos}\alpha'=$$
$$\operatorname{Cos} l\,(a^2c^2\operatorname{Cos} m\operatorname{Cos}\beta'+a^2b^2\operatorname{Cos} n\operatorname{Cos}\gamma')$$

[1] Cauchy, Exercices mathématiques, V; Newmann, dans les Annales de Poggendorf, XXV.

ou :

$$\text{Cos}\,\alpha'\ \text{S}\ b^2 c^2\ \text{Cos}^2 l - a^2\ \text{V}'^2\ \text{Cos}\,\alpha' = \text{Cos}\,l\ \text{S}\ b^2\ c^2\ \text{Cos}\,l\ \text{Cos}\,\alpha',$$

ou encore

$$\text{Cos}\,\alpha'\,(\text{V}'^2\,\text{V}''^2 - a^2\,\text{V}'^2) = \text{Cos}\,l\ \text{S}\ b^2\ c^2\ \text{Cos}\,l\ \text{Cos}\,\alpha',$$

et deux équations analogues, d'où l'on tire :

$$\frac{\text{Cos}\,\alpha'}{\left(\dfrac{\text{Cos}\,l}{\text{V}''^2 - a^2}\right)} = \frac{\text{Cos}\,\beta'}{\left(\dfrac{\text{Cos}\,m}{\text{V}''^2 - b^2}\right)} = \frac{\text{Cos}\,\gamma'}{\left(\dfrac{\text{Cos}\,n}{\text{V}''^2 - c^2}\right)}$$

ou

$$\text{Cos}\,\alpha' = \frac{\text{Cos}\,l}{\text{V}''^2 - a^2} \cdot \frac{1}{\text{E}''}, \text{ etc.}$$

Rapprochant ce résultat des valeurs de x', y', z', x'', y'', z'' données page 51, on obtient :

S x' Cos $\alpha' = 0$, et de même S x'' Cos $\alpha'' = 0$. Ainsi les vibrations sont perpendiculaires au rayon vecteur corespondant, ce qu'on voulait prouver [1].

On peut dire aussi que dans les méthodes du premier groupe, les vibrations sont parallèles au plan de polarisation.

RÉSUMÉ ET REMARQUES.

Il n'entre pas dans notre plan d'étudier toutes les propriétés de la surface des ondes ; cela donnerait trop d'étendue à ce travail. Nous nous bornerons à quelques rapprochements qui, à notre connaissance, n'ont pas été tous signalés, et qui sont utiles pour bien comprendre les relations entre les diverses surfaces dont il a été question. Rassemblons d'abord les équations de ces surfaces ; ce sont les suivantes, en supposant que la surface des

[1] Théorie de l'Elasticité des corps solides, pages 239 et seq.

ondes est prise après l'unité de temps. La lettre qui accompagne chaque équation est celle du point appartenant à la surface dans la figure de la page 57.

En coordonnées rectangulaires :

(1) $$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1 \quad (M)$$

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (m)$$

(3) $$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad (p)$$

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad (P)$$

(5) $$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - (x^2 + y^2 + z^2)\, S\,(b^2 + c^2)\, x^2 + S\, b^2 c^2 x^2 = 0 \quad (V)$$

(6) $$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - (x^2 + y^2 + z^2)\, S \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 + S\, \frac{x^2}{b^2 c^2} = 0 \quad (v)$$

(7) $$(x^2 + y^2 + z^2)\, S\, a^2 x^2 - S\, a^2 (b^2 + c^2)\, x^2 + a^2 b^2 c^2 = 0 \quad (R)$$

(8) $$(x^2 + y^2 + z^2)\, S\, \frac{x^2}{a^2} - S\, \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \frac{1}{a^2 b^2 c^2} = 0 \quad (r)$$

En coordonnées polaires (r, φ, χ, ψ)

(1) $$\frac{1}{r^2} = S\, a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi \quad (M)$$

(2) $$\frac{1}{r^2} = S\, \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{a^2} \quad (m)$$

(3) $$r^2 = S\, a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi \quad (p)$$

(4) $$r^2 = S\, \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{a^2} \quad (P)$$

(5) $$S\, \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{r^2 - a^2} = 0 \quad (V)$$

(6) $$S\, \frac{a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}{a^2 r^2 - 1} = 0 \quad (v)$$

(7) $$S\, \frac{a^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi}{r^2 - a^2} = 0 \quad (R)$$

(8) $$S\, \frac{\operatorname{Cos}^2 \varphi}{a^2 r^2 - 1} = 0 \quad (r)$$

(1) et (2) sont deux ellipsoïdes, (3) est la surface du 4e degré dite d'élasticité par Fresnel; (5) est la surface du 6e que nous avons appelée surface d'élasticité; (7) est la surface des ondes; (8) est la surface polaire de (7) par rapport à une sphère de rayon 1; (4) se déduit de (2) en remplaçant r par $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire que deux points de ces deux surfaces pris en ligne droite avec le centre sont des points conjugués par rapport à une sphère de rayon 1; il en est de même pour (6) par rapport à (7). On voit que les surfaces (2), (4), (6), (8) se déduisent respectivement de (1), (3), (5), (7) en remplaçant a, b, c par $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$; (3), (4), (8), (7) se déduisent de (1), (2), (5), (6) en remplaçant r par $\frac{1}{r}$; et par conséquent (3), (4), (7), (8) se déduisent de (2), (1), (5), (6) en remplaçant à la fois r, a, b, c par $\frac{1}{r}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

Si l'on cherche ce que représente, dans chaque équation en coordonnées polaires, le rayon vecteur r qui fait avec les axes des angles φ, χ, ψ, on trouve facilement, en considérant la figure de la page 57 que :

Dans (1) le rayon vecteur r aux angles φ, χ, ψ est inverse de la vitesse de propagation correspondante aux vibrations suivant (φ, χ, ψ) d'après Fresnel, correspondante aux vibrations perpendiculaires à la direction (φ, χ, ψ) et à celle de la propagation, d'après la méthode de Cauchy.

Dans (3) le rayon vecteur r est égal à cette vitesse.

Dans (5) le rayon vecteur r aux angles φ, χ, ψ est égal à la vitesse de propagation suivant (φ, χ, ψ).

Dans (8) r est inverse à cette vitesse.

Dans (4) le rayon vecteur r aux angles φ, χ, ψ est inverse du rayon vecteur de la surface des ondes qui correspond aux vibrations dirigées suivant (φ, χ, ψ) d'après Fresnel, perpendiculairement d'après Cauchy.

Dans (2) r est égal à ce rayon vecteur de la surface des ondes, que nous pouvons appeler rayon lumineux.

Dans (7) r est égal au rayon lumineux dirigé suivant (φ, χ, ψ).

Dans (6) r est inverse à ce rayon.

On voit donc que les surfaces (2), (4), (6), (7) jouent par rapport aux rayons lumineux le même rôle respectivement que (3), (1), (8), (5) par rapport aux vitesses de propagation.

Considérons les axes de nos huit surfaces. (2), (3), (5), (7) ont pour demi-axes a, b, c, savoir pour (2) et (3), a sur l'axe des x, b sur celui des y, c sur celui des z; pour (5) et (7) b et c sur l'axe des x, a et c sur celui des y, a et b sur celui des z. De même (1), (4), (6), (8) ont pour demi-axes $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, savoir (1) et (4), $\frac{1}{a}$ sur l'axe des x, etc., (6) et (8) $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$ sur l'axe des x, etc.

Les surfaces (1), (2), (3), (4) ont une seule nappe; (5), (6), (7), (8) en ont deux.

Cherchons ce que représentent dans les quatre surfaces à une nappe, les demi-axes d'une section diamétrale.

Dans (1), ils sont inverses aux vitesses de propagation des ondes parallèles à la section, comme on l'a démontré page 46.

Dans (3) ils sont par conséquent égaux à ces vitesses.

Dans (4) ils sont inverses aux rayons lumineux perpendiculaires à la section, car la surface (4) est pour ces rayons ce qu'est la surface (1) pour les vitesses de propagation; on pourrait d'ailleurs sans peine le démontrer directement.

Dans (2) ils sont égaux à ces rayons lumineux.

De là résultent les constructions suivantes pour les surfaces à deux nappes :

La surface (5) se construit en prenant sur une droite quelconque menée à partir du centre deux longueurs inverses aux demi-axes de la section faite dans (1) par un plan perpendiculaire à cette droite, ou égales aux demi-axes de la section faite dans (3).

(8) se construit en prenant des longueurs inverses aux demi-axes de (3) ou égales à ceux de (1).

(7) se construit en prenant des longueurs inverses aux demi-axes de (4) ou égales à ceux de (2)

(6) se construit en prenant des longueurs inverses aux demi-axes de (2) ou égales à ceux de (4).

On peut dire aussi que (4) est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents à (1); il en est de même de (3) par rapport à (2), de (6) par rapport à (8), de (5) par rapport à (7). C'est ce que montre évidemment la figure de la page 57.

Réciproquement (1) est l'enveloppe des plans menés perpendiculairement aux extrémités des rayons vecteurs de (4); de même (2) par rapport à (3), etc.

Enfin (1) et (2) sont deux surfaces polaires réciproques, de même que (7) et (8); les surfaces (1) et (3) sont telles que leurs points en ligne droite avec le centre sont conjugués, et il en est de même pour (2) et (4), pour (5) et (8), pour (6) et (7).

Les sections principales de la surface des ondes (7) se composent chacune, comme on sait, d'un cercle et d'une ellipse; ces ellipses ne sont pas autre chose que les sections principales de (2) tournées de 90° dans leur plan.

La surface (8) a été distinguée par plusieurs auteurs; c'est celle que Hamilton appelle *of wawe slowness,* et que Mac-Cullagh nomme surface des indices; en effet O r (voir la figure) est l'indice de réfraction correspondant à l'onde plane R V, la vitesse dans le milieu extérieur étant 1; car cet indice vaut $\frac{1}{OV} = Or$.

La manière dont les quatre surfaces à deux nappes se construisent au moyen des quatre surfaces à une nappe montre que les sections circulaires de ces dernières surfaces donneront dans les autres des points singuliers, c'est-à-dire des points appartenant à la fois aux deux nappes, et dans lesquels il y a une infinité de plans tangents. Pour avoir les sections circulaires de l'ellipsoïde (1), coupons-le par la sphère $b^2\, S\, x^2 = 1$; les deux équations combinées donnent $x^2 (a^2 - b^2) - z^2 (b^2 - c^2) = 0$, ce qui revient à :

$$\left(x - z\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\right)\left(x + z\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\right) = 0\,;$$

les intersections sont donc situées dans deux plans, et sont par conséquent deux cercles; ils ont pour rayon $\frac{1}{b}$ et leurs plans sont représentés par

$$x = \pm z\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\,.$$

On ferait de même pour la surface (3) avec la sphère $S x^2 = b^2$; on trouve deux sections circulaires dans les mêmes plans que les précédentes et ayant pour rayon b. Les rayons vecteurs perpendiculaires à ces plans aboutiront dans les surfaces (5) et (8) à des points singuliers dont la distance au centre sera b pour (5), $\frac{1}{b}$ pour (8); ces rayons vecteurs sont dans le plan $x z$ et ont pour équations

$$x = \pm z \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

On peut encore remarquer que les plans des sections circulaires de (1) et de (3) sont parallèles aux tangentes communes du cercle $x^2 + z^2 = b^2$ et de l'ellipse $a^2 x^2 + c^2 z^2 = a^2 c^2$, sections de la surface des ondes par le plan xz; en effet, ces tangentes ont pour équations

$$x \sqrt{a^2 - b^2} \pm z \sqrt{b^2 - c^2} \pm b \sqrt{a^2 - c^2} = 0.$$

On trouvera de même les sections circulaires de (2), par la sphère $S x^2 = b^2$ et celles de (4) par la sphère $b^2 S x^2 = 1$; ces sections sont dans les plans

$$x = \pm \frac{a}{c} z \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$$

et ont pour rayon b dans (2), $\frac{1}{b}$ dans (4). Les rayons vecteurs perpendiculaires à ces plans aboutiront dans les surfaces (7) et (6) à des points singuliers dont la distance au centre sera b pour (7), $\frac{1}{b}$ pour (6); ces rayons vecteurs sont dans le plan $x z$ et ont pour équations :

$$x = \pm \frac{c}{a} z \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}};$$

ce sont les *axes optiques*. On voit d'ailleurs facilement qu'ils joignent les points communs au cercle $x^2 + z^2 = b^2$ et à l'ellipse $a^2 x^2 + c^2 z^2 = a^2 c^2$.

Aux points singuliers de (7) répondent dans (8) des plans singuliers dont ils sont les pôles, un plan singulier étant un plan tangent en une infinité de points d'une surface; et réciproquement, aux points singuliers de (8) répondent dans (7) des plans singuliers parallèles à

$$x = \pm z \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}$$

ou ayant pour équations

$$x \sqrt{a^2 - b^2} \pm z \sqrt{b^2 - c^2} \pm b \sqrt{a^2 - c^2} = 0.$$

Les diamètres perpendiculaires à ces plans ont été souvent confondus à tort avec les axes optiques; M. Lamé les a très bien désignés sous le nom d'*axes de réfraction cônique;* ce sont les directions dans lesquelles il n'y a qu'une seule valeur pour la vitesse de propagation V, tandis que les axes optiques sont les directions dans lesquelles il n'y a qu'une seule valeur pour le rayon lumineux.

Il n'a été question jusqu'ici que de surfaces polaires par rapport à une sphère de rayon 1; si on remplace cette sphère par l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ac} + \frac{z^2}{ab} = 1,$$

on trouvera que la surface de l'onde est alors à elle-même sa propre polaire réciproque; par conséquent à chacun de ses points correspond un de ses plans tangents et à chacun de ses points singuliers, un plan singulier. Mais, pour ces considérations, je ne puis que m'en référer à l'ouvrage de M. Lamé, qui les a traitées avec beaucoup d'élégance [1].

[1] Théorie de l'Elasticité, pages 246 et seq.

Vu et approuvé,
Le 26 Avril 1858,
Le Doyen,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,
Le 28 Avril 1858,
Le Vice-Recteur,
CAYX.

DEUXIÈME THÈSE.

PROPOSITIONS

DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

1° Intégrer les équations du mouvement elliptique d'une planète autour du soleil.

2° Trouver les différentielles des éléments elliptiques d'une planète, dans le cas où elle est soumise à une force perturbatrice.

3° Démontrer l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes en ayant égard seulement à la 1re puissance de la force perturbatrice.

Vu et approuvé :
Le 26 avril 1858.

Le Doyen,
MILNE EDWARDS.

Vu :
Le 28 avril 1858.

Le vice-Recteur,
CAYX.

ERRATA.

Page 9, ligne 4,		au lieu de : es,	lisez : et
» 9, » 7, en remontant,	»	$D \frac{}{u}$	» $D \frac{v}{u}$
» 10, » 8, en remontant,	»	$\mu\, b^2 .\, C$	» $\mu\, b^2,\, C$
» 20, » 4, en remontant,	»	A, B, C, D, E, F	» $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$
» 21, » 2, en remontant,	»	$\text{Cos}^2 \zeta$	» $m' \rho \,\text{Cos}^2 \zeta$
» 25, » 3,	»	$\frac{dw}{dx}$	» $\frac{dw}{dy}$
» 25, » 11,	»	A, B, C, D, E, F	» $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$
» 27, » 2,	»	$\frac{d^2w}{dr}$	» $\frac{d^2w}{dr^2}$
» 28, » 9, en remontant,	»	$+$	» $\pm$
» 29, » 7, en remontant,	»	Cos_2	» Cos^2
» 30, » 3,	»	(L	» L (
» 30, » 7 et 8,	»	$)^2$	»)
» 30, » 9 en remontant,	»	$-$	» $+$
» 30, » 8 en remontant,	»	β^2	» β_2
» 31, » 8	»	$\text{Cos}^3 l$	» $\text{Cos}^2 l$
» 33, » 14	»	$P(1 + 2e^{-\delta})$	» $P(1 + 2e^{-\vartheta})$
» 34, » 10	»	$e^{-\varepsilon}$	» $e^{-\vartheta}$
» 34, » 4 en remontant,	»	$\frac{2}{2}$	» $\frac{2}{3}$
» 36, lignes 5 à 8.		Mettez ces 4 lignes entre deux	$\left\{ \right\}$
» 38, ligne 2,		au lieu de : M R,	lisez : M-R
» 40, » 9,	»	G	» C
» 43, dernière ligne,	»	$\mathcal{H}$	» H
» 45, ligne 5,	»	$= \frac{2\,PQ}{R}$	» $+ \frac{2\,PQ}{R}$
» 45, dernière ligne,	»	$M\, \text{Cos}^2 m)$	» $M\, \text{Cos}^2 m$
» 55, ligne 12,	»	l'équation	» dans l'équation
» 66, » 7,	»	$V)^2$	» $V^2)$