HF uf 166. (4)
43(4)

N° D'ORDRE :
1183.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. POTRON,

1re THÈSE. — LES GROUPES D'ORDRE p^6.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 Juin 1904 devant la Commission d'Examen.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM. APPELL, *Président.*
PICARD, POINCARÉ, } *Examinateurs.*

BIUS JUSSIEU THÈSES PARIS

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1904

DONS
N° 49332

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	P. APPELL	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, Prof	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES	L. TROOST.	
	Ch. WOLF.	
PROFESSEURS	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	G. BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN	Histologie.
	PELLAT	Physique.
	HALLER	Chimie organique.
	H. MOISSAN	Chimie.
	JOANNIS	Chimie (Ens^{nt} P.C.N.).
	P. JANET	Physique (Ens^{nt} P.C.N.).
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG	Géologie.
	N.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	RIBAN	Chimie analytique.
	RAFFY	Analyse et Mécanique.
	LEDUC	Physique.
	HADAMARD	Calcul différentiel et Calcul intégral.
SECRÉTAIRE	A. GUILLET.	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

PREMIÈRE THÈSE.

LES GROUPES D'ORDRE p^6.

INTRODUCTION.

1. Un groupe d'ordre kp^m (p premier, k premier à p), contient toujours [1] un groupe d'ordre p^m. Ce théorème met en évidence l'importance des groupes d'ordre p^m (p premier). Les groupes d'ordre p sont cycliques; les groupes d'ordre p^2 (nécessairement abéliens), p^3, p^4 [2] et p^5 [3] ont été déterminés, ainsi que plusieurs types de groupes d'ordre p^m (m quelconque), par exemple ceux qui contiennent un groupe cyclique d'ordre p^{m-1} [4]. Je me suis proposé de déterminer ici tous les groupes d'ordre p^6 en même temps que de nouveaux types de groupes d'ordre p^m.

Tout groupe d'ordre p^m est résoluble [5]. On sait [6] construire tous les groupes résolubles de degré donné, transitifs qui ne sont contenus dans aucun groupe résoluble transitif d'ordre plus grand et de même degré. Ici le problème est différent. Il s'agit de déterminer, non des groupes de *substitutions* de *degré* donné, mais des *types* de groupes *abstraits* d'*ordre* donné, définis seulement par leurs *équations*, c'est-à-dire par un ensemble quelconque de relations entre certains de leurs éléments, dits *générateurs*, équivalant à la Table de multiplication [7] du groupe.

2. Pour la solution de ce problème, je me servirai principalement des théorèmes suivants.

---

(1) Sylow, *M. A.*, t. V, 1872, p. 584.
(2) Hölder, *M. A.*, t. XLIII, 1893, p. 301; Young, *A. J.*, t. XV, 1893, p. 132.
(3) Bagnera, *A. D. M.*, 3e série, t. I, 1898, p. 137; t. II, 1899, p. 263.
(4) Burnside, *Theory of groups*, n° 65.
(5) Sylow, *loc. cit.*
(6) Jordan, *Traité des substitutions*.
(7) *Voir* par exemple Burnside, *Theory*, p. 20. Cayley, *Phil. Mag.*, t. II, 1854; *A. J.*, t. I.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Supposons [1] que, dans les équations définissant un groupe G d'ordre fini, figurent deux séries de générateurs $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_r$ et désignons d'une manière générale par $X(a)$, $X(b)$ des produits des a seuls ou des b seuls. *Supposons* en outre *que les équations de* G *aient la forme*

$$A_i(a) = 1, \qquad B_j(b) = A'_j(a), \qquad b_k^{-1} a_l b_k = A_l^{b_k}(a)$$
$$(i = 1, \ldots, s, \qquad j = 1, \ldots, t, \qquad l = 1, \ldots, q, \qquad k = 1, \ldots, r).$$

Désignons par A le groupe défini par les équations $A_i(a) = 1$ et par B le groupe défini par les équations $B_j(b) = 1$.

I. *On a chaque élément de* G *une fois et une seule fois dans la forme* $\alpha(a)\beta(b)$, $\beta(b)$ *parcourant les éléments distincts de* B, *c'est-à-dire les produits que les équations* $B_j(b) = 1$ *laissent distincts, et* $\alpha(a)$ *parcourant les produits que les équations de* G *laissent distincts, c'est-à-dire les éléments distincts d'un groupe* A' *contenu dans* G *et défini par toutes les équations entre les* a *seuls qui résultent des équations de* G. En sorte que l'*ordre de* G *est au plus égal au produit des ordres de* A *et de* B *et lui est égal toujours et seulement si* G *contient* A.

II. *Si* G *contient* A *et si l'on désigne par* $A\beta(b)$ *le complexe des éléments* $\alpha(a)\beta(b)$ *où* $\beta(b)$ *reste fixe, les complexes* $A\beta(b)$ *forment un groupe engendré par les complexes* Ab *et défini au point de vue abstrait par* $AB_j(b) = A$ ou $B_j(b) \equiv 1 \bmod A$, *c'est-à-dire isomorphe à* B. On appelle ce groupe *groupe quotient de* G *par* A et l'on désigne par le symbole $G \mid A$. *A tout diviseur* B_1 de B *correspond un diviseur* A_1 *de* G *contenant* A *et tel que* $A_1 \mid A$ *soit isomorphe à* B_1.

III. *Si* B *est cyclique,* c'est-à-dire si les équations de G ont la forme

$$A_i(a) = 1, \qquad b^m = A'(a), \qquad b^{-1} a_l b = A_l(a),$$

pour que G *contienne* A *il faut et il suffit que les équations*

$$A_i[A_l(\alpha)] = 1, \qquad A'^{-1}(a)\, a_l A'(a) = A_l^{(m)}(a), \qquad A'[A_l(a)] = A'(a)$$

($A_l^{(y)}(a)$ *désignant* $b^{-y} a_l b^y$) *soient conséquences des seules équations* $A_i(a) = 1$. Ces trois conditions seront dites respectivement conditions d'*automorphisme* [2], *de fermeture,* de *permutabilité,* et en général conditions d'*ordre,* car elles expriment que l'ordre de G est m fois celui de A.

IV [3]. Un g_{p^m} [4] G a toujours des éléments *normaux* (c'est-à-dire permutables à tous

---

(1) Hölder, *M. A.*, t. XLIII, 1893, p. 301. De Séguier, *J. M.*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 253.

(2) x et y parcourant les éléments d'un groupe G, on appelle *automorphisme* de G toute substitution (x, fx) des éléments de G, telle que $fxfy = fxy$.

(3) Sylow, *loc. cit.*

(4) Voici les principales notations dont je me servirai au cours de ce travail. J'écrirai un g_N pour un groupe d'ordre N, p. p. c. m. pour un plus petit commun multiple, p. g. c. d. pour plus grand commun diviseur.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

les éléments de G) autres que l'unité et forment un groupe abélien appelé le *central* de G.

V (¹). Un g_{p^m} abélien G est toujours *produit direct* de groupes cycliques, c'est-à-dire *produit de groupes* cycliques *n'ayant deux à deux aucun élément commun et tels que tout élément de l'un quelconque d'entre eux est permutable aux éléments de tous les autres*. Les générateurs de ces groupes cycliques forment une *base* de G.

3. Je distinguerai d'abord les g_{p^m} d'ordre déterminé par leur *figure*. Voici le sens de ce terme.

Soit $A_1 = A$ le central de G. Le groupe quotient $G \mid A$ a de même un central $A_2 \mid A_1$, A_2 étant $\leqq G$. Si A_2 est $< G$, $G \mid A_2$ a un central $A_3 \mid A_2$, A_3 étant $\leqq G$, et ainsi de suite. Si $G \mid A_{\mu-1}$ est abélien, on a $A_{\mu-1} = G$. Considérons alors la série

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = A, \qquad A_2, \qquad \ldots, \qquad A_{\mu-1}, \qquad A_\mu = G$$

dite série *spéciale* de G, et désignons par $A_{i-1} a_{ij_i} (i = 1, \ldots, \mu; j_i = 1, \ldots, \nu_i)$ une base du groupe abélien $A_i \mid A_{i-1}$.

Soit, pour simplifier l'écriture, $a_{1j_1} = a_j$. Si a_{ij_i} est d'ordre $p^{\alpha_{ij_i}} \bmod A_{i-1}$, c'est-à-dire si la première puissance de a_{ij_i} qui est dans A_{i-1} a pour exposant $p^{\alpha_{ij_i}}$, on appelle *figure* du groupe abélien $A_i \mid A_{i-1}$ le symbole

$$(\alpha_{i1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{i\nu_i}) \qquad \alpha_{i1} \geqq \alpha_{i2} \geqq \ldots \geqq \alpha_{i\nu_i},$$

et *figure* de G le symbole

$$\prod_{i=1}^{i=\mu} (\alpha_{i1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{i\nu_i}).$$

Il est clair que la figure de $G \mid A_h$ est $\prod_{i=h}^{i=\mu} (\alpha_{i1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{i\nu_i})$ et que A_h $(h = 1, \ldots, \mu)$ a pour générateurs les a_{ij_i} où i est $\leqq h$. On sait que l'on a $\nu_\mu \geqq 2$ (²), et, si i est $< k$, $\alpha_{ij_i} \geqq \alpha_{kj_k}$ (³), quels que soient j_i, j_k.

Si A, B, ... désignent des complexes d'éléments appartenant à un groupe G, j'appellerai p. p. c. m. de A, B, ... et je désignerai par le symbole $\{A, B, \ldots\}$ le groupe que forment dans G tous les produits d'éléments appartenant à A, B, ... Le produit $x^{-1}y^{-1}xy$, x et y étant deux éléments de G, est un *commutateur*, j'appellerai *commutant* et je désignerai par C le p. p. c. m. des commutateurs. Si G contient un groupe A, je désignerai par le symbole (G, A) l'*indice* de A dans G.

Lorsque le module d'une congruence sera p, je le sous-entendrai toujours. Je désignerai par ε l'unité pour $p = 2$ et o pour p impair, par ε' l'unité pour $p = 3$ et o pour $p \neq 3$, par ε'' l'unité pour $p = 5$ et o pour $p \neq 5$, par i une racine primitive de p, par N un nombre arbitraire non carré mod p.

(¹) Frobenius et Stickelberger, *Cr.*, t. 86, 1879, p. 217.

(²) Young, *loc cit.*

(³) De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 94.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

L'ordre d'un groupe de figure $\prod_{i=1}^{i=\mu}(\alpha_{i1}\alpha_{i2}\ldots\alpha_{i\nu_i})$ étant p^m, $m=\sum_{i,j_i}\alpha_{ij_i}$, on obtiendra toutes les figures possibles d'un groupe d'ordre p^m donné, en faisant prendre à μ successivement toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $m-1$, puis pour chaque valeur de μ faisant prendre aux ν_i et aux α_{ij_i} tous les systèmes de valeurs compatibles avec les conditions

$$\nu_\mu \geqq 2, \qquad \alpha_{ij_i} \geqq \alpha_{kj_k}(i<k), \qquad \alpha_{i1} \geqq \alpha_{i2} \geqq \ldots \geqq \alpha_{i\nu_i}, \qquad \sum_{i,j_i}\alpha_{ij_i}=m.$$

4. Supposons donnée la figure de G, on en déduit un système (S) de relations nécessaires entre les a_{ij_i}. En effet, quels que soient i et j_i, $a_{ij_i}^{p^{\alpha_{ij_i}}}$ est égal à un produit d'éléments de A_{i-1}; et, comme $A_i|A_{i-1}$ est central de $G|A_{i-1}$, tout produit $a_{ij_i}^{-1}a_{kj_k}^{-1}a_{ij_i}a_{kj_k}(i\leqq k)$ est égal à un produit d'éléments de A_{i-1}. Alors, en appliquant les théorèmes I et III, on voit que l'ordre de G sera p^m toujours et seulement si les conditions d'automorphisme, fermeture, permutabilité sont vérifiées dans l'adjonction de chacun des a_{ij_i} au groupe défini par les équations de (S) où ne figurent que les précédents.

Ces conditions étant supposées remplies, G sera d'ordre p^m et défini par (S). Pour que G soit bien de la figure donnée, il faut et il suffit que, quel que soit i, tout élément normal de $G|A_{i-1}$ appartienne en vertu de (S) à $A_i|A_{i-1}$. Cette condition sera dite *condition de figure*.

La remarque suivante permet de simplifier les calculs. Les équations (S′) de $G|A$ s'obtiennent en remplaçant dans (S) tous les a_j par 1. Supposons connus les divers systèmes (S'_ρ) définissant tous les types distincts de figure $\prod_{i=2}^{i=\mu}(\alpha_{i1}\alpha_{i2}\ldots\alpha_{i\nu_i})$. On peut toujours supposer que les $Aa_{ij_i}(i>1)$ ont été choisis de manière que (S′) soit l'un des systèmes (S′). Le système (S) se compose alors :

1° Des équations obtenues en multipliant les seconds membres des équations de (S′) par des produits quelconques des a_j, je les appellerai équations (I);

2° Des équations $a_j^{p^{\alpha_j}}=1$ et des équations exprimant que chaque a_j est permutable à tous les a_{ij_i}, je les appellerai équations (II).

Les seuls exposants indéterminés sont ceux des a_j dans les équations (I). Les conditions d'ordre étant supposées vérifiées, comme $G|A$ est déjà de figure donnée, la condition de figure s'obtiendra en exprimant simplement que tout élément normal de G appartient à A, en vertu des équations (I).

En écrivant le système (S), je sous-entendrai ordinairement les équations (II).

Chaque type de $G|A$ pour lequel les conditions d'ordre et de figure sont compatibles, conduit ainsi à une forme générale de (S) où les exposants de a_j restent indéterminés dans des limites fixées par les conditions d'ordre et de figure. Aux diverses déterminations du système (Σ) des exposants des a_j correspondent divers types de G, distincts ou non.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Deux types de G correspondant à deux types de G | A étant évidemment distincts, il ne reste à distinguer que les types correspondant à un même type de G | A.

Considérons un type déterminé de G correspondant à un système déterminé (Σ_a) d'exposants. Prenons de nouveaux générateurs $b_{kl_k}(k=1, \ldots, \mu; l_k=1, \ldots, \nu_k)$ tels que les $A_{k-1}b_{kl_k}$ forment une base de $A_k | A_{k-1}$ quel que soit k, et que les équations de G | A ne changent pas. Soit (Σ_b) le système des exposants des équations (S) transformées; pendant que le système des b parcourt tous les systèmes de générateurs satisfaisant aux deux conditions énoncées, (Σ_b) parcourt tous les systèmes (Σ) correspondant au type donné de G.

Or les b s'expriment en fonction des a par des relations qui, en vertu de la première condition, auront nécessairement la forme

$$b_{kl_k}=\prod_{i=1}^{i=k}\prod_{j_i} a_{ij_i}^{x_{ij_i kl_k}}.$$

L'expression des deux conditions introduit entre les x un système de relations (C), et les exposants de (Σ_b) s'expriment en fonction des x et des exposants de (Σ_a) par un système de formules (T). La condition nécessaire et suffisante pour que (Σ_a) et (Σ_b) définissent le même type de G est que les formules (C) et (T) soient compatibles ([1]).

La détermination des types revient en somme à chercher les invariants de la transformation définie par (C) et (T). J'ai rencontré par exemple dans les figures $(r11)(111)$, $(11)(1111)$, $(11)(11)(11)$ des expressions dont le caractère quadratique est invariant, et j'ai indiqué, pour les deux premières figures citées, la propriété du groupe à laquelle correspond cette invariance.

5. Au début de ce Travail j'ai donné l'expression la plus générale des générateurs basiques d'un g_{p^m} abélien en fonction des générateurs d'une base déterminée. Cette expression est utile pour la formation des conditions (C). J'ai cherché ensuite toutes les figures possibles des g_{p^6}, en supposant successivement que le central est d'ordre p^4, p^3, p^2, p. Dans les figures où certains des α_{ij_i} sont >1 en peut les remplacer par des entiers arbitraires sans compliquer les calculs. J'ai déterminé ainsi tous les types des figures

$$(rs)(11),\quad (r11)(11),\quad (r1)(111),$$
$$(s)(11)(11),\quad (s)(1)(1)(11),\quad (s1)(1)(11),\quad (s)(s)(11).$$

Certains types de figure $(rs)(11)$, $(r11)(11)$ ont tous leurs diviseurs abéliens. La détermination des groupes ayant tous leurs diviseurs abéliens a déjà été faite ([2]). J'ai repris

---

([1]) *Cf.* De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

([2]) Burnside, *Theory*, n° 75; Miller et Moreno, *Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. IV, 1903, p. 398.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

cette question pour les groupes d'ordre p^m, ce qui m'a conduit à déterminer certains types de figure $(rs1)(11)$ et incidemment à chercher l'expression la plus générale d'un système de générateurs quelconques d'un g_{p^m} abélien en fonction de générateurs basiques.

Certains types de figure $(r1)(111)$ ayant tous leurs $g_{p^{m-2}}$ abéliens, je me suis proposé de déterminer tous les g_{p^m} métabéliens [1] dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens; j'ai été amené ainsi à étudier les figures $(rs)(111)$, $(rs1)(111)$, $(rs)(22)$.

Tel est l'objet de la première Partie. Dans une deuxième Partie, j'ai étudié les figures restantes des g_{p^6}.

Certaines de ces figures ont présenté quelque difficulté, à cause de la présence, dans le système (T) de congruences quadratiques. Aussi n'a-t-il pas toujours été possible, notamment dans la figure $(11)(1111)$, de distinguer les types par une méthode purement arithmétique. Dans ce cas j'ai eu recours à des considérations théoriques pour simplifier d'avance autant que possible les équations de G, considérations qui m'ont d'ailleurs conduit à trouver une forme irréductible d'un nombre quelconque de variables, pour $p = 2$ [2]. On trouvera au contraire dans la figure $(11)(11)(11)$ un exemple d'une discussion purement arithmétique.

On trouvera, à la fin de ce travail, une liste des équations des groupes qui y ont été déterminés.

6. J'ajouterai deux remarques indiquant le lien entre ce Travail et des travaux faits à d'autres points de vue.

L'ensemble des opérations consistant à remplacer les a_{ij_i} par les b_{kl_k} dans les conditions indiquées (4) constitue un groupe, car l'inverse de chacune d'elles et le produit de deux quelconques d'entre elles appartiennent à cet ensemble. L'ordre de ce groupe est le nombre des systèmes de valeurs des x solutions de (C). Ce groupe est représentable en groupe de substitutions opérant sur les (Σ) et à chaque système d'intransitivité correspond un type distinct de G [3].

Si, dans les formules (C), (T) on suppose

$$(\Sigma_a) = (\Sigma_b), \qquad a_{ij_i} = b_{kl_k} = 1 \qquad \text{pour} \qquad i, k \leqq h \qquad (h \geqq 0),$$

ces formules déterminent alors le changement de générateurs le plus général conservant les équations de $G \mid A_h$. L'opération consistant à remplacer les a_{ij_i} par les $b_{kl_k} (i, k > h)$ définit alors un automorphisme de $G \mid A_h$. Le nombre des systèmes de valeurs des $x_{ij_ikl_k}$ $(i, k > h)$ solutions des formules (C), (T) ainsi modifiées est l'ordre du groupe des automorphismes de $G \mid A_h$.

---

(1) FITE, *Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. III, 1902, p. 331.

(2) *Cf.* n° 22.

(3) *Cf.* figure $(11)(1111)$, $(111)(111$ pour $p = 2$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

PREMIÈRE PARTIE.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX RELATIFS AUX GROUPES D'ORDRE p^m.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système d'éléments d'un g_{p^6} abélien G forme une base de G.

7. Désignons par a_{ij_i} $(i = 1, \ldots, \nu; j_i = 1, \ldots, n_i)$ une base d'un g_{p^m} abélien G; soit p^{α_i} $(\alpha_i > \alpha_{i+1}, \alpha_{\nu+1} = 0)$ l'ordre des a_{ij_i}. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'éléments de G forme une base de G.

A cause de l'invariance du nombre et des ordres des générateurs basiques [1], nous pourrons désigner les nouveaux générateurs basiques par

$$b_{kl_k} = \prod_{i, j_i} a_{ij_i}^{x_{ij_ikl_k}} \qquad (k = 1, \ldots, \nu;\ l_k = 1, \ldots, n_k),$$

b_{kl_k} étant d'ordre p^{α_k}. D'où une première condition nécessaire : *si i est $< k$, on doit avoir, quels que soient j_i, l_k,*

$$\text{(C)} \qquad x_{ij_ikl_k} \equiv 0 \mod p^{\alpha_i - \alpha_k}.$$

Cette condition étant supposée remplie, pour que les b_{kl_k} forment une base de G, il faut et il suffit que l'équation

$$(1) \qquad \prod_{k, l_k} b_{kl_k}^{y_{kl_k}} = 1$$

n'admette pas d'autres solutions que $y_{kl_k} \equiv 0 \mod p^{\alpha_k}$. Or, les a_{ij_i} formant une base de G, l'équation (1) équivaut au système de congruences

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k, l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} \equiv 0 \mod p^{\alpha_i}.$$

[1] Frobenius et Stickelberger, *Loc. cit.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Donc, pour que les b_{kl_k} forment une base de G, il faut et il suffit que le système (I) n'admette pas d'autres solutions que $y_{kl_k} \equiv 0 \bmod p^{\alpha_k}$.

Désignons en général par Δ_k le déterminant des $x_{kj_kkl_k}$, je dis d'abord que si l'on a $\Delta_h \equiv 0$ $(h \leqq \nu)$, le système

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=1}^{k=h} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i}$$

admet des solutions autres que $y_{kl_k} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_k}}$. En effet, le système (II) peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^{k=i-1} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} + \sum_{k=i}^{k=h} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i}, \quad (i = 1, \ldots, \nu).$$

On aura des solutions de ce système en posant $y_{kl_k} = z_{kl_k} p^{\alpha_h - 1}$, les z_{kl_k} étant solutions de

$$\text{(III)} \qquad \sum_{k=1}^{k=i-1} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} z_{kl_k} + \sum_{k=i}^{k=h} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} z_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i - \alpha_h + 1}, \quad (i = 1, \ldots, h).$$

En posant, d'après (C), pour $k \geqq i$, $x_{ij_ikl_k} = x'_{ij_ikl_k} p^{\alpha_i - \alpha_k}$, on voit que l'on obtient des solution de (III) en prenant $z_{kl_k} = u_{kl_k} p^{\alpha_k - \alpha_h}$, les u_{kl_k} étant solutions de

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{k=1}^{k=i-1} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} p^{\alpha_k - \alpha_i} u_{kl_k} + \sum_{k=i}^{k=h} \sum_{l_k} x'_{ij_ikl_k} u_{kl_k} \equiv 0, \qquad (i = 1, \ldots, h).$$

Le déterminant de ces équations est $\equiv \prod_{k=1}^{k=h} \Delta_k \equiv 0$. Donc le système (IV) admet d'autres solutions que $u_{kl_k} \equiv 0$ et, par suite, le système (II) admet d'autres solutions que $y_{kl_k} \equiv 0 \bmod p^{\alpha_k}$. *Ainsi, pour que les b_{kl_k} forment une base de* G, *il faut que tous les Δ_k soient $\not\equiv 0$, la condition* C *étant vérifiée.*

Je dis que *ces conditions sont suffisantes*. En effet, si Δ_1 est $\not\equiv 0$, le système

$$\sum_{l_1} x_{ij_i1l_1} y_{1l_1} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i}$$

n'admet pas d'autres solutions que $y_{1l_1} \equiv 0 \bmod p^{\alpha_1}$, comme on le voit en considérant les équations où $i = 1$. Supposons démontré pour tout nombre $h' < h$ le théorème suivant : *si* $\prod_{k=1}^{k=h'} \Delta_k$ *est* $\not\equiv 0$, *le système*

$$\sum_{k=1}^{k=h'} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i} \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

n'admet pas d'autres solutions que $y_{kl_k} \equiv 0 \bmod p^{\alpha_k}$. Je dis que ce théorème est encore vrai pour $h' = h$. En effet, le système (II) peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^{k=h-1} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} + \sum_{l_h} x_{ij_ihl_h} y_{hl_h} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i},$$

d'où, en tenant compte de (C),

$$\sum_{k=1}^{k=h-1} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} y_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_i - \alpha_h} \qquad (i = 1, \ldots, h),$$

donc, d'après le théorème admis, on a $y_{kl_k} \equiv 0 \bmod p^{\alpha_k - \alpha_h}$. Posons

$$y_{kl_k} = z_{kl_k} p^{\alpha_k - \alpha_h},$$

le système (II) donne, en transformant comme précédemment,

$$\sum_{k=1}^{k=i-1} \sum_{l_k} x_{ij_ikl_k} p^{\alpha_k - \alpha_i} z_{kl_k} + \sum_{k=i}^{k=h} \sum_{l_k} x'_{ij_ikl_k} z_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_h} \qquad (i = 1, \ldots, h),$$

le déterminant de ces équations étant $\equiv \prod_{k=1}^{k=h} \Delta_k$, donc $\not\equiv 0$ par hypothèse, ces équations entraînent

$$z_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_h},$$

donc, quel que soit k,

$$y_{kl_k} \equiv 0 \qquad \bmod p^{\alpha_k}.$$

Comme en vertu de (C) le déterminant $\Delta = |x_{ij_ikl_k}|$ des $x_{ij_ikl_k}$ est $\equiv \prod \Delta_k$ on peut énoncer le théorème :

Pour que les b_{kl_k} *forment une base il faut et il suffit que l'on ait* $x_{ij_ikl_k} \equiv 0 \bmod p^{\alpha_i - \alpha_k}$ $(i < k)$ *et* $|x_{ij_ikl_k}| \not\equiv 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Détermination des figures des g_{p^6}.

8. Si G n'est pas abélien, l'ordre du central A est au plus p^4. En ce cas, A étant de l'un des cinq types

$$(4),\quad (31),\quad (22),\quad (211),\quad (1111),$$

et G|A de type (11), G sera de l'une des cinq figures

$$(4)(11),\quad (31)(11),\quad (22)(11,\quad (211)(11),\quad (1111)(11).$$

Si A est d'ordre p^3, A est de l'un des trois types

$$(3),\quad (21),\quad (111),$$

et G|A, aussi d'ordre p_3 et non cyclique, est, d'après la détermination des g_{p^3}, de l'une des trois figures

$$(21),\quad (111),\quad (1)(11);$$

G sera donc de l'une des neuf figures

$$(3)(21),\quad (3)(111),\quad (3)(1)(11),\quad (21)(21),\quad (21)(111),\quad (21)(1)(11),\quad (111)(21),\quad (111)(111),$$
$$(111)(1)(11).$$

Si A est un g_{p^2}, donc G|A un g_{p^4} non cyclique, A est de l'un des deux types

$$(2),\quad (11)$$

et G|A qui ne peut être cyclique est, d'après la détermination des g_{p^4}, de l'une des sept figures

$$(31),\quad (22),\quad (211),\quad (1111),\quad (2)(11),\quad (11)(11),\quad (1)(1)(11).$$

G sera donc de l'une des quatorze figures

$$(2)(31),\quad (11)(31),\quad (2)(22),\quad (11)(22),\quad (2)(211),\quad (11)(211),\quad (2)(1111),\quad (11)(1111),$$
$$(2)(2)(11),\quad (11)(2)(11),\quad (2)(11)(11),\quad (11)(11)(11),\quad (2)(1)(1)(11),\quad (11)(1)(1)(11).$$

Si A est un g_p, G|A est un g_{p^5} non cyclique, qui a, d'après la détermination des g_{p^5}, quinze figures donnant pour G les quinze figures

$$(1)(41),\quad (1)(32),\quad (1)(311),\quad (1)(221),\quad (1)(2111),\quad (1)(11111),$$
$$(1)(1)(1111),\quad (1)(3)(11),\quad (1)(21)(11),\quad (1)(2)(1)(11),\quad (1)(111)(11),\quad (1)(11)(1)(11),$$
$$(1)(11)(111),\quad (1)(1)(11)(11),\quad (1)(1)(1)(1)(11).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Or, toute figure présentant dans une parenthèse un chiffre plus fort qu'un chiffre quelconque d'une des précédentes est impossible. De même si G est métabélien et A cyclique, le commutant étant métabélien, les figures où il y a, dans la deuxième parenthèse, un nombre impair de chiffres égaux sont impossibles [1]. Enfin nous n'avons pas à nous occuper de la figure $(1111)(11)$ ni des figures de la forme

$$(s)(11),\quad (s)(22),\quad (s)(1111),\quad (s1)(11),\quad (s)(1)(11),$$

qui ont déjà été traitées [2].

Figure $(s)(1)(11)$ $s > 1$.

9. D'après les types connus de figure $(1)(11)$, G aura pour équations, en sous-entendant celles qui expriment que a et b sont normaux,

$$a^{p^s} = b^p = 1,\quad c^p = b^\beta a^\alpha,\quad d^p = c^\gamma b^{\beta'} a^{\alpha'},\quad e^p = c^\delta b^{\beta''} a^{\alpha''},\quad d^{-1}cd = cb^\mu a^\lambda,\quad e^{-1}ce = cb^{\mu'} a^{\lambda'},$$
$$e^{-1}de = dc;\quad (\gamma = 0,\quad \delta = 0, 1 \text{ si } p \text{ est } \geqq 3;\quad \gamma = \delta = 0,\quad \gamma = \delta = 1 \text{ si } p = 2).$$

Les conditions d'automorphisme donnent d'abord $\alpha \equiv \lambda \equiv \lambda' \equiv 0 \bmod p^{s-1}$, puis, en remplaçant $\alpha, \lambda, \lambda'$ par $p^{s-1}\alpha$, $p^{s-1}\lambda$, $p^{s-1}\lambda'$ les conditions d'ordre et de figure donnent

$$\gamma\mu \equiv \gamma\lambda \equiv \alpha - \gamma\lambda' + \varepsilon\lambda \equiv \beta - \gamma\mu' + \varepsilon\mu,\qquad \equiv \alpha + \delta\lambda + \varepsilon\lambda' \equiv \beta + \delta\mu + \varepsilon\mu' \equiv \delta\lambda' \equiv \delta\mu' \equiv 0,$$

et l'on ne peut avoir $\lambda \equiv \mu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv 0$.

Or, si p est $\geqq 3$, en supposant $\gamma = 0$, $\delta = 1$, on a

$$\alpha \equiv \beta \equiv \alpha + \lambda \equiv \beta + \mu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv 0,\qquad \text{donc}\qquad \lambda \equiv \mu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv 0,$$

et si $p = 2$, en supposant $\gamma = \delta = 1$, on a

$$\lambda \equiv \mu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv 0,$$

il faut donc $\gamma = \delta = 0$, alors on a comme conditions

$$\alpha \equiv \varepsilon\lambda \equiv \varepsilon\lambda',\qquad \beta \equiv \varepsilon\mu \equiv \varepsilon\mu',$$

---

(1) Fite, *Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. III, 1902, p. 331.
(2) De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et les équations de G seront :

$$a^{p^s} = b^p = 1, \qquad c^p = b^{\varepsilon\mu} a^{\varepsilon\lambda p^{s-1}}, \qquad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^p = b^{\beta''} a^{\alpha''}, \qquad d^{-1}cd = cb^{\mu} a^{\lambda p^{s-1}},$$
$$e^{-1}ce = cb^{\mu'} a^{\lambda p^{s-1}}, \qquad e^{-1}de = dc.$$

On trouve, par un calcul direct, $e^{z'} d^{y'} c^{x'} e^z d^y c^x = e^{Z'} d^{Y'} c^{X'} b^{K'} a^{p^{s-1}H'}$ avec

$$Z' = z' + z, \qquad Y' = y' + y, \qquad X' = y'z + x' + x, \qquad K' = \mu\left[y(y'z + x') + z\binom{y'}{2}\right] + \mu'\left[x'z + y'\binom{z}{2}\right],$$
$$H' = \lambda\left[y(y'z + x') + z\binom{y'}{2}\right] + \lambda'\left[x'z + y'\binom{z}{2}\right],$$

d'où, le commutant $\{a, b, c\}$ étant abélien,

$$(e^z d^y c^x)^{-1} (e^{z'} d^{y'} c^{x'})^{-1} e^z d^y c^x e^{z'} d^{y'} c^{x'} = c^{X''} b^{K''} a^{p^{s-1}H''}.$$

H'', K'', X'' s'obtiennent en retranchant H', K', X' de ce que deviennent ces expressions quand on y permute les lettres accentuées et non accentuées de même nom. On trouve ensuite, par récurrence, $(e^z d^y c^x)^u = e^{Z_u} d^{Y_u} c^{X_u} b^{K_u} a^{p^{s-1}H_u}$ avec

$$Z_u = uz, \qquad Y_u = uy, \qquad X_u = ux + yz\Sigma_1^{u-1} t,$$
$$K_u = \mu\left[xy\Sigma_1^{u-1} t + z\Sigma_1^{u-1}\binom{ty}{2} + y^2 z\Sigma_1^{u-1}\Sigma_1^t t\right] + \mu'\left\{\left[xz + y\binom{z}{2}\right]\Sigma_1^{u-1} t + yz^2\Sigma_1^{u-2}\Sigma_1^t t\right\},$$
$$H_u = \lambda\left[xy\Sigma_1^{u-1} t + z\Sigma_1^{u-1}\binom{ty}{2} + y^2 z\Sigma_1^{u-1}\Sigma_1^t t\right] + \lambda'\left\{\left[xz + y\binom{z}{2}\right]\Sigma_1^{u-1} t + yz^2\Sigma_1^{u-2}\Sigma_1^t t\right\},$$

d'où, pour $u = p$, x, y, z étant $< p$, $(e^z d^y c^x)^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p}$, avec

$$C_p = \varepsilon yz, \qquad B_p = \beta' y + \beta'' z + \varepsilon' yz(-\mu y + \mu' z) + \varepsilon\mu[x(1 + y + z) + yz],$$
$$A_p = \alpha' y + \alpha'' z + p^{s-1}\varepsilon' yz(-\lambda y + \lambda' z) + p^{s-1}\varepsilon\lambda[x(1 + y + z) + yz].$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G, qui est de la forme

$$a_1 = b^{\eta} a^{\xi}, \quad b_1 = b^{\eta'} a^{p^{s-1}\xi'}, \quad c_1 = c^{\zeta} b^s a^r, \quad d_1 = e^z d^y c^x b^k a^h, \quad e_1 = e^{z'} d^{y'} c^{x'} b^{k'} a^{h'}, \quad \xi\eta'(yz - zy') \not\equiv 0,$$

et où nous supposons $x, y, z, x', y', z' < p$, doit vérifier les conditions

$$\varepsilon yz \equiv \varepsilon y' z' \equiv 0, \qquad \zeta \equiv yz' - zy', \qquad s \equiv K'', \qquad r \equiv p^{s-1} H''$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et fournit sur les exposants des équations de G la transformation

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi\lambda_1+\xi'\mu_1\equiv\zeta(\lambda y+\lambda' z),\\ \xi\lambda'_1+\xi'\mu'_1\equiv\zeta(\lambda y'+\lambda' z');\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \eta'\mu_1\equiv\zeta(\mu y+\mu' z),\\ \eta'\mu'_1\equiv\zeta(\mu y'+\mu' z');\end{cases}$$

$$(3)\qquad \xi\alpha'_1+p^{s-1}\xi'\beta'_1+ph\equiv A_p,\qquad \xi\alpha''_1+p^{s-1}\xi'\beta''_1+ph'\equiv A'_{p'}\qquad \bmod p^s;$$

$$(4)\qquad \eta\alpha'_1+\eta'\beta'_1\equiv B_p,\qquad \eta\alpha''_1+\eta'\beta''_1\equiv B'_p.$$

Remarquons que h et h' permettront toujours de vérifier (3), pourvu que l'on ait

$$(5)\qquad \xi\alpha'_1\equiv\alpha' y+\alpha'' z,\qquad \xi\alpha''_1\equiv\alpha' y'+\alpha'' z'.$$

Soit d'abord $p\geqq 3$, les formules (1) et (2) montrent que l'on peut toujours faire l'une des trois hypothèses suivantes, qui sont *distinctes :*

$$\mu=\mu'=0,\quad \lambda=0,\quad \lambda'=1;\qquad \mu=0,\quad \mu'=1,\quad \lambda=0,1,\quad \lambda'=0,$$

en ayant toujours $\lambda_1=\lambda$, $\mu_1=\mu$, $\lambda'_1=\lambda'$, $\mu'_1=\mu'$.

La première hypothèse donne $z\equiv 0$, $\xi\equiv yz'^2$, puis

$$(5)\qquad z'^2\alpha'_1\equiv\alpha',\qquad yz'^2\alpha''_1\equiv\alpha' y'+\alpha'' z';$$

$$(4)\qquad \eta\alpha'_1+\eta'\beta'_1\equiv\beta' y,\qquad \eta\alpha''_1+\eta'\beta''_1\equiv\beta' y'+\beta'' z';$$

d'où, pour $p\geqq 3$, les huit types

$$\alpha'=\alpha''=0,\quad \beta'=0,\quad \beta''=0,1;\qquad \alpha'=0,\quad \alpha''=1,\quad \beta'=0,1,\quad \beta''=0;\qquad \alpha'=1,N,\quad \alpha''=\beta'=0,\quad \beta''=0,1;$$

La deuxième hypothèse donne $z\equiv\xi'\equiv 0$, $\eta'\equiv yz'^2$, puis

$$(5)\qquad \xi\alpha'_1\equiv\alpha' y,\qquad \xi\alpha''_1\equiv\alpha' y'+\alpha'' z';$$

$$(4)\qquad \eta\alpha'_1+yz'^2\beta'_1\equiv\beta' y,\qquad \eta\alpha''_1+yz'^2\beta''_1\equiv\beta' y'+\beta'' z'+\varepsilon' y';$$

d'où, pour $p\geqq 5$, les six types

$$\alpha'=\alpha''=0,\quad \beta'=0,\quad \beta''=0,1;\qquad \alpha'=\alpha''=0,\quad \beta'=1,N,\quad \beta''=0;\qquad \alpha'=1,\quad \alpha''=0,\quad \beta'=0,\quad \beta''=0,1;$$

et, pour $p=3$, les six types

$$\alpha'=\alpha''=0,\quad \beta'=0,1,\quad \beta''=0;\qquad \alpha'=\alpha''=0,\quad \beta'=-1,\quad \beta''=0,1;\qquad \alpha'=1,\quad \alpha''=0,\quad \beta'=0,\quad \beta''=0,1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

La troisième hypothèse donne $z \equiv 0$, $\eta' \equiv yz'^2$, $\xi \equiv y^2 z'$, $\xi' \equiv yy'z'$, puis

$$(5) \qquad yz'\alpha'_1 \equiv \alpha', \qquad y^2 z'\alpha''_1 \equiv \alpha' y' + \alpha'' z';$$

$$(4) \qquad \eta\alpha'_1 + yz'^2\beta'_1 \equiv \beta' y, \qquad \eta\alpha''_1 + yz'^2\beta''_1 \equiv \beta' y' + \beta'' z' + \varepsilon' y';$$

d'où, pour $p \geqq 5$, les $10 + p$ types

$$\alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0, 1; \qquad \alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = 1, N, \quad \beta'' = 0;$$
$$\alpha' = 0, \quad \alpha'' = 1, N, \quad \beta' = 0, 1, N, \quad \beta'' = 0; \qquad \alpha' = 1, \quad \alpha'' = \beta' = 0, \quad \beta'' = 0, 1, \ldots, p-1.$$

et, pour $p = 3$, les treize types

$$\alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = 0, 1, \quad \beta'' = 0; \qquad \alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = -1, \quad \beta'' = 0, 1;$$
$$\alpha' = 0, \quad \alpha'' = 1, -1, \quad \beta' = 0, 1, -1, \quad \beta'' = 0; \qquad \alpha' = 1, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0, 1, -1.$$

Soit maintenant $p = 2$, les formules (1) et (2), qui se réduisent à

$$\lambda_1 + \xi'\mu_1 \equiv \lambda, \qquad \mu_1 \equiv \mu,$$

montrent que l'on peut toujours faire l'une des deux hypothèses suivantes, qui sont *distinctes :*

$$\mu = 0, \quad \lambda = 1; \qquad \mu = 1, \quad \lambda = 0,$$

en ayant toujours $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$.

Dans le premier cas on a

$$(5) \qquad \alpha'_1 \equiv \alpha' y + \alpha'' z, \qquad \alpha''_1 \equiv \alpha' y' + \alpha'' z', \qquad yz \equiv y'z' \equiv 0;$$

$$(4) \qquad \eta\alpha' + \beta'_1 \equiv \beta' y + \beta'' z, \qquad \eta\alpha''_1 + \beta''_1 \equiv \beta' y' + \beta'' z';$$

d'où les sept types

$$\alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0, 1, \qquad \alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta' = \beta'' = 1;$$
$$\alpha' = 0, \quad \alpha'' = 1, \quad \beta' = 0, 1, \quad \beta'' = 0; \qquad \alpha' = \alpha'' = 1, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0, 1.$$

Dans le deuxième cas, on a les mêmes formules et, par suite, sept nouveaux types correspondant aux mêmes valeurs de α', β', α'', β''.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure (s)(s)(11) s>1.

10. D'après les types connus de figure $(s)(11)$ $s>1$, G aura des équations de la forme

$$a^{p^s}=1, \qquad b^{p^s}=a^{\beta}, \qquad c^p=a^{\gamma}, \qquad d^p=b^{\alpha}a^{\delta}, \qquad c^{-1}bc=ba^{\lambda}$$
$$d^{-1}bd=ba^{\mu}, \qquad d^{-1}cd=cb^{p^{s-1}}a^{\nu}; \qquad (\alpha=0,1).$$

Les conditions d'automorphisme, fermeture et permutabilité donnent

$$\lambda\equiv\mu\equiv\nu\equiv 0 \qquad \bmod p^{s-1},$$
$$\mu\alpha\equiv\lambda\alpha+\beta=0 \qquad \bmod p^s,$$

en remplaçant λ, μ, ν par $p^{s-1}\lambda$, $p^{s-1}\mu$, $p^{s-1}\nu$, et prenant ba^{ν} pour b, les équations de G deviennent

$$a^{p^s}=1, \qquad b^{p^s}=a^{-p^{s-1}\lambda\alpha}, \qquad c^p=a^{\gamma}, \qquad d^p=b^{\alpha}a^{\delta}, \qquad b^{-1}ab=c^{-1}ac=d^{-1}ad=a,$$
$$c^{-1}bc=ba^{p^{s-1}\lambda}, \qquad d^{-1}bd=ba^{p^{s-1}\mu}, \qquad d^{-1}cd=cb^{p^{s-1}}; \qquad (\alpha=0,1).$$

La condition d'ordre est $\mu\alpha\equiv 0$, et la condition de figure est que l'on n'ait pas $\lambda\equiv\mu\equiv 0$.

On a $d^{z'}c^{y'}b^{x'}d^{z}c^{y}b^{x}=d^{Z'}c^{Y'}b^{X'}a^{p^{s-1}H'}$ avec

$$Z'=z'+z, \qquad Y'=y'+y, \qquad X'=x'+x+p^{s-1}zy', \qquad H'=x'(\lambda y+\mu z),$$

d'où, le commutant étant abélien,

$$(d^{z}c^{y}b^{x})^{-1}(d^{z'}c^{y'}b^{x'})^{-1}d^{z}c^{y}b^{x}d^{z'}c^{y'}b^{x'}=b^{(yz'-zy')p^{s-1}}a^{H''p^{s-1}},$$

avec $H''=\lambda(xy'-yx')+\mu(xz'+zx')$, et l'on a par récurrence $(d^{z}c^{y}b^{x})^{p}=b^{B_p}a^{A_p}$ avec

$$B_p=\alpha z+p(x+\varepsilon p^{s-2}yz), \qquad A_p=\gamma y+\delta z+(1-\varepsilon)\tfrac{1}{2}p^{s-1}\lambda\alpha yz+p^{s-1}\varepsilon x(\lambda y+\mu z).$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est

$$a_1=a^{\xi}, \qquad b_1=b^{\eta'}a^{\xi'}, \qquad c_1=d^{z}c^{y}b^{x}a^{h}, \qquad d_1=d^{z'}c^{y'}b^{x'}a^{h'},$$

avec les conditions

$$\xi\eta'(yz'-zy')\not\equiv 0, \qquad \eta'+pj=yz'-zy', \qquad \xi'+\alpha\lambda j\equiv\lambda(xy'-yx')+\mu(xz'-zx')$$
$$B_p=j_1p^2, \qquad B'_p=\eta'\alpha+p^2j'_1$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

((j, j_1, j'_1) désignant des entiers arbitraires), et fournit sur les exposants des équations de G la transformation

$$\alpha(\xi\lambda_1 - \eta'\lambda) \equiv 0, \qquad \xi\lambda_1 \equiv \eta'(\lambda y + \mu z), \qquad \xi\mu_1 \equiv \eta'(\lambda y' + \mu z');$$
$$\xi\gamma_1 + pr\alpha\lambda \equiv A_p + ph, \qquad \xi\delta_1 + \xi'\alpha + pr'\alpha\lambda \equiv A'_p + ph', \qquad \bmod p^s;$$

la présence de h, h', dans les deux dernières, montre qu'elles peuvent être vérifiées pour $p \geqq 2$ toujours et seulement si l'on a

$$\xi\gamma_1 \equiv \gamma y + \delta z, \qquad \xi\delta_1 + \xi'\alpha \equiv \gamma y' + \delta z'.$$

1° *Type* $\alpha = 0$ *de* G | A.

On peut toujours faire $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 1$; et, en supposant $\lambda_1 = \lambda = 0$, $\mu_1 = \mu = 1$, on a $z \equiv 0$, $\xi \equiv \gamma z'^2$ et

$$z'^2\gamma_1 \equiv \gamma, \qquad \gamma z'^2\delta_1 \equiv \gamma y' + \delta z',$$

d'où les quatre types (les deux derniers se confondent pour $p = 2$)

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, 1; \qquad \gamma = (1, N), \qquad \delta = 0.$$

2° *Type* $\alpha = 1$ *de* G | A.

Les conditions d'ordre et de figure étant $\mu \equiv 0$, $\lambda \not\equiv 0$, on pourra, en prenant a^λ pour a, écrire les équations de G

$$a^{p^s} = 1, \quad b^{p^s} = a^{-p^{s-1}}, \quad c^p = a^\gamma, \quad d^p = ba^\delta, \quad c^{-1}bc = ba^{p^{s-1}}, \quad d^{-1}bd = b, \quad d^{-1}cd = cb^{p^{s-1}}.$$

Tout changement de générateurs conservant la forme des équations de G doit vérifier

$$\eta' + pj = z', \quad \xi' + j \equiv -x', \quad \xi \equiv \eta', \quad y \equiv 1, \quad y' \equiv 0, \quad px + z(1+p) = j_1 p^s, \quad x' + j = j'_1 p^{s-1}$$

et les formules mod p de la transformation sur les exposants de G sont

$$z'\gamma_1 \equiv \gamma, \qquad \delta_1 \equiv \delta,$$

d'où les $2p$ types

$$\gamma = 0, 1, \qquad \delta = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure (s)(11)(11) $s > 1$.

11. D'après les types connus de figure (11)(11), les équations de G auront la forme

$$a^{p^s} = 1, \quad b^p = a^\alpha, \quad c^p = a^{\alpha'}, \quad d^p = c^\mu a^\beta, \quad e^p = c^{\mu'} b^{\lambda'} a^{\beta'},$$
$$c^{-1}bc = ba^\gamma, \quad d^{-1}bd = ba^\delta, \quad e^{-1}be = ba^{\delta'}, \quad d^{-1}cd = ca^\varkappa, \quad e^{-1}ce = ca^{\varkappa'}, \quad e^{-1}de = dc,$$

les exposants des générateurs autres que a ayant les déterminations suivantes, correspondant aux types distincts de G|A,

$p \geq 3$	I.	II.	III.	IV.	$p = 2$	I'.	II'.	III'.	IV'.
λ'	0	0	1	1		0	0	1	1
μ	0	0	0	1		0	1	0	1
μ'	0	1	0	0		0	1	0	0

Les conditions d'automorphisme, fermeture et permutabilité donnent

$$\delta \equiv \varkappa \equiv \delta' \equiv \varkappa' \equiv 0 \mod p^{s-1},$$
$$\gamma \equiv \varkappa\mu \equiv \alpha' + \varepsilon\varkappa - \varkappa'\mu \equiv \alpha' + \varepsilon\varkappa' + \delta\lambda' + \varkappa\mu' \equiv \varkappa'\mu' + \delta'\lambda' \equiv 0 \mod p^s,$$

d'où l'on tire $\alpha' \equiv 0 \mod p^{s-1}$ et, en remplaçant δ, $\varkappa$, δ', $\varkappa'$, α' par leurs produits par p^{s-1}, les équations de G seront

$$a^{p^s} = 1, \quad b^p = a^\alpha, \quad c^p = a^{\alpha' p^{s-1}}, \quad d^p = c^\mu a^\beta, \quad e^p = c^{\mu'} b^{\lambda'} a^{\beta'},$$
$$c^{-1}bc = b, \quad d^{-1}bd = ba^{\delta p^{s-1}}, \quad e^{-1}be = ba^{\delta' p^{s-1}}, \quad d^{-1}cd = ca^{\varkappa p^{s-1}}, \quad e^{-1}ce = ca^{\varkappa' p^{s-1}}, \quad e^{-1}de = dc,$$

avec les conditions d'ordre

$$\alpha' + \varepsilon\varkappa - \varkappa'\mu \equiv \alpha' + \varepsilon\varkappa' + \delta\lambda' + \varkappa\mu' \equiv \varkappa'\mu' + \delta'\lambda' \equiv 0.$$

Les éléments normaux étant de la forme $c^y b^x$ avec $\delta x + \delta' y \equiv \varkappa x + \varkappa' y \equiv 0$, la condition de figure est $\delta\varkappa' - \varkappa\delta' \not\equiv 0$.

On voit alors que les types de G|A qui conviennent sont pour $p > 2$: le type I avec les conditions

$$\alpha' \equiv 0, \quad \delta\varkappa' - \varkappa\delta' \not\equiv 0,$$

le type II avec les conditions

$$\varkappa \equiv \delta' \equiv 0, \quad \alpha' \equiv -\delta \equiv \varkappa' \not\equiv 0;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et pour $p = 2$: le type I′ avec les conditions

$$\alpha' \equiv \varkappa \equiv \varkappa' \equiv 1, \qquad \delta + \delta' \equiv 1,$$

le type III′ avec les conditions

$$\alpha' \equiv \varkappa \equiv \varkappa' \equiv 1, \qquad \delta \equiv \varkappa' \equiv 1.$$

En partant des équations générales où l'on a fait $\mu' = 0$, et posant

$$g = e^u d^z c^y b^x, \qquad g' = e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} \qquad \text{(les exposants étant} < p),$$
$$g'g = e^{U'} d^{Z'} c^{Y'} b^{X'} a^{p^{s-1}H'}, \qquad g^\nu = e^{U_\nu} d^{Z_\nu} c^{Y_\nu} b^{X_\nu} a^{H_\nu p^{s-1}}, \qquad g^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p},$$

on a

$$U' = u' + u, \qquad Z' = z' + z, \qquad Y' = z'u + y' + y, \qquad X' = x' + x,$$
$$H' = \varkappa u \binom{z'}{2} + z' \left[\varkappa' \binom{u}{2} + \varkappa z u \right] + y'(\varkappa z + \varkappa' u) + x'(\delta z + \delta' u);$$

on en tire $g^{-1} g'^{-1} g g' = c^{Y'_1 - Y'} a^{H'_1 - H'}$, H'_1, Y'_1 se déduisant de H', Y' en y permutant les lettres accentuées et non accentuées de même nom; on a ensuite par récurrence

$$U_\nu = \nu u, \qquad Z_\nu = \nu z, \qquad Y_\nu = \nu y + z u \Sigma_1^{\nu-1} t, \qquad X_\nu = \nu x,$$
$$H_\nu = \varkappa u \Sigma_1^{\nu-1} \binom{tz}{2} + \left[\varkappa' z \binom{u}{2} + y(\varkappa z + \varkappa' u) + x(\delta z + \delta' u) \right] \Sigma_1^{\nu-1} t$$
$$+ \varkappa' z u^2 \Sigma_1^{\nu-2} \Sigma_1^{t} t + \varkappa z^2 u \Sigma_1^{\nu-1} \Sigma_1^{t} t,$$

et en faisant $\nu = p$

$$C_p = \mu z + \varepsilon z u, \qquad B_p = \lambda' u,$$
$$A_p = \alpha[y - \tfrac{1}{2}(1 - \varepsilon) z u] + \beta z + \beta' u + p^{s-1} \{ \varepsilon' z u(-\varkappa z + \varkappa' u) + \varepsilon[\varkappa z(y + u) + \varkappa' y u + x(\delta z + \delta' u)] \}.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations est de la forme

$$a_1 = a^\theta, \qquad b_1 = c^\eta b^\xi a^h, \qquad c_1 = c^{\eta'} b^{\xi'} a^{h'}, \qquad d_1 = e^u d^z c^y b^x a^k, \qquad e_1 = e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} a^{k'};$$

il doit, en supposant les exposants de b, c, d, e inférieurs à p, ceux de a inférieurs à p^2, vérifier les conditions appelées conditions (C)

$$\theta \xi \eta' \not\equiv 0 \qquad \eta' = z u' - u z' + p j, \qquad p^{s-1} j \alpha' + h' \equiv p^{s-1}(H'_1 - H') \qquad \bmod p^s,$$
$$\xi' \equiv \lambda' u \equiv \lambda'(\xi - u') \equiv 0, \qquad \mu \eta' = z(\mu + \varepsilon u) + p l, \qquad \lambda' \eta = z'(\mu + \varepsilon u') + p l',$$

j, l, l' désignant des entiers arbitraires; on en conclut $h' \equiv 0 \bmod p^{s-1}$; alors, en remplaçant h' par $h' p^{s-1}$, la troisième condition s'écrira $j\alpha' + h' \equiv H'_1 - H'$ et la transformation que fournit sur les exposants des équations de G un changement de générateurs ainsi

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

déterminé est définie par

$$(1)\qquad \theta\varkappa_1 \equiv \eta'(\varkappa z + \varkappa' u),$$
$$(2)\qquad \theta\varkappa'_1 \equiv \eta'(\varkappa z' + \varkappa' u'),$$
$$(3)\qquad \theta\delta_1 \equiv \xi(\delta z + \delta' u) + \eta(\varkappa z + \varkappa' u),$$
$$(4)\qquad \theta\delta'_1 \equiv \xi(\delta z' + \delta' u') + \eta(\varkappa z' + \varkappa' u'),$$
$$(5)\qquad \theta\alpha_1 \equiv \xi\alpha + \eta\alpha' p^{s-1} + ph \qquad \bmod p^s,$$
$$(6)\qquad \theta\alpha'_1 \equiv \eta'\alpha',$$
$$(7)\qquad (l\alpha' + \mu h')p^{s-1} + \theta\beta_1 \equiv A_p + pk \qquad \bmod p^s,$$
$$(8)\qquad l'\alpha' p^{s-1} + \lambda' h + \theta\beta'_1 \equiv A'_p + pk' \qquad \bmod p^s,$$

A'_p se déduisant de A_p en y accentuant les lettres x, y, z, u. Les trois congruences (5), (7), (8) entraînent

$$(5')\qquad \theta\alpha_2 \equiv \xi\alpha,$$
$$(7')\qquad \theta\beta_1 \equiv \alpha[y - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)zu] + \beta z + \beta' u,$$
$$(8')\qquad \lambda' h + \theta\beta'_1 \equiv \alpha[y' - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)z'u'] + \beta z' + \beta' u',$$

et, si (5′), (7′), (8′) sont vérifiées, on pourra toujours déterminer h, k, k' de manière à vérifier (5), (7), (8). Séparons maintenant les divers cas.

1° $p > 2$.

Type I de G | A.

En tenant compte de la condition de figure, on voit que les formules (1) et (2) permettent de faire $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa'_1 = 1$; et si l'on suppose $\varkappa_1 = \varkappa = 0$, $\varkappa'_1 = \varkappa' = 1$, donc $u \equiv 0$, $\eta' \equiv zu'$, $0 \equiv zu'^2$, les formules (3), (4) qui deviennent

$$u'^2\delta_1 \equiv \xi\delta, \qquad zu'^2\delta'_1 \equiv \xi(\delta z' + \delta' u') + \eta u'$$

montrent que l'on peut toujours faire $\delta_1 = 1$, $\delta'_1 = 0$. En supposant $\delta_1 = \delta = 1$, $\delta'_1 = \delta' = 0$, donc $\xi \equiv u'^2$, $\eta \equiv -z'u'$, les formules (5′), (7′), (8′) qui deviennent

$$z\alpha_1 \equiv \alpha, \qquad zu'^2\beta_1 \equiv \alpha y + \beta z, \qquad zu'^2\beta'_1 \equiv \alpha(y' - \tfrac{1}{2}z'u') + \beta z' + \beta' u',$$

donnent les cinq types

$$\alpha = \beta = 0, \quad \beta' = 0, 1; \qquad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \mathrm{N}, \quad \beta' = 0, \qquad \alpha = 1, \quad \beta = \beta' = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type IV de G | A.

Comme on a $\alpha' \equiv -\delta \equiv \varkappa' \not\equiv 0$, on peut prendre $a^{\alpha'}$ pour a et par suite supposer $\alpha' = -\delta = \varkappa' = 1$; comme on peut prendre $ba^{\beta'}$ pour b, on peut aussi supposer $\beta' = 0$. Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G doit alors vérifier :

$$\theta \equiv \eta' = z + pj, \quad j + h' \equiv H'_1 - H', \quad \xi \equiv u' \equiv 1, \quad \xi' \equiv u \equiv 0, \quad \alpha(y' - \tfrac{1}{2}z') + \beta z' \equiv 0, \quad z \not\equiv 0,$$

et fournit sur les deux exposants α, β la transformation

$$z\alpha_1 \equiv \alpha, \qquad z\beta_1 \equiv \alpha y + \beta z,$$

d'où les $p+1$ types

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \ldots, p-1; \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

$p = 2$.

Type I' de G | A.

Les conditions (C) deviennent

$$\xi' \equiv zu \equiv z'u' \equiv 0, \qquad h' \equiv H'_1 + H', \qquad \theta \equiv \xi \equiv \eta' \equiv z + u \equiv z' + u' \equiv 1,$$

et les formules de la transformation s'écrivent

$$\begin{aligned}
&(3) && \delta_1 \equiv \delta z + \delta' u + \eta, \\
&(4) && \delta'_1 \equiv \delta z' + \delta' u' + \eta', \\
&(5') && \alpha_1 \equiv \alpha, \\
&(7') && \beta_1 \equiv \alpha y + \beta z + \beta' u, \\
&(8') && \beta'_1 \equiv \alpha y' + \beta z' + \beta' u',
\end{aligned}$$

(3), (4) et la condition de figure permettent de faire toujours $\delta_1 = 0$, $\delta'_1 = 1$.

En supposant $\delta_1 = \delta = 0$, $\delta'_1 = \delta' = 1$, donc $\eta \equiv u$, (5'), (7'), (8') et les conditions $zu \equiv z'u' \equiv 0$, $z + u \equiv z' + u' \equiv 1$, donnent les quatre types

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, 1, \qquad \beta' = 0; \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = \beta' = 1; \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = \beta' = 0.$$

Type III' de G | A.

Comme on peut prendre $ba^{\beta'}$ pour b, on peut supposer $\beta' = 0$; aux conditions (C) qui

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

deviennent

$$\theta \equiv z \equiv u' \equiv \xi \equiv \eta' \equiv 1, \qquad u \equiv \xi' \equiv 0, \qquad \eta \equiv z', \qquad h' \equiv \mathrm{H}'_1 + \mathrm{H}'$$

il faut alors ajouter

$$\alpha y' + \beta z' \equiv 0,$$

et les formules de la transformation s'écrivent

$$\alpha_1 \equiv \alpha, \qquad \beta_1 \equiv \alpha y + \beta,$$

d'où les trois types

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, 1; \qquad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

Figure (s) (1) (1) (11) $s>1$.

12. D'après les types connus de figure (1) (1) (11), les équations de G auront la forme

$$a^{p^s} = 1, \qquad b^p = a^\alpha, \qquad c^p = b^\varepsilon a^\beta, \qquad d^p = c^\varepsilon b^\lambda a^\gamma, \qquad e^p = b^{\lambda'} a^{\gamma'},$$
$$c^{-1}bc = ba^\mu, \qquad d^{-1}bd = ba^{\mu'}, \qquad e^{-1}be = ba^{\mu''}, \qquad d^{-1}cd = ca^\nu, \qquad e^{-1}ce = cb, \qquad e^{-1}de = dc.$$

Les conditions d'automorphisme, de fermeture et de permutabilité résultant de l'adjonction successive de c, d, e, f sont

$$\mu \equiv \mu' \equiv \mu''\lambda' \equiv \varepsilon\nu \equiv \alpha + \varepsilon\mu'' \equiv \beta + \varepsilon'\mu'' \equiv \beta - \lambda\mu'' \equiv 0 \mod p^s \qquad \text{et} \qquad \nu \equiv \mu'' \equiv 0 \mod p^{s-1},$$

la condition de figure est $\mu'' \not\equiv 0 \mod p^s$; on peut donc prendre $a^{\mu''}$ pour $a^{p^{s-1}}$, c'est-à-dire supposer toujours $\mu'' = p^{s-1}$, donc $\lambda' \equiv 0$, $\alpha \equiv p^{s-1}\varepsilon$, $\beta \equiv p^{s-1}\lambda \equiv p^{s-1}\varepsilon' \mod p^s$, et les équations de G deviennent, en remplaçant ν par $p^{s-1}\nu$,

$$a^{p^s} = 1, \qquad b^p = a^{p^{s-1}\varepsilon}, \qquad c^p = b^\varepsilon a^{p^{s-1}\varepsilon'}, \qquad d^p = c^\varepsilon a^{\varepsilon'} a^\gamma, \qquad e^p = a^{\gamma'},$$
$$c^{-1}bc = b, \qquad d^{-1}bd = b, \qquad e^{-1}be = ba^{p^{s-1}}, \qquad d^{-1}cd = ca^{p^{s-1}\nu}, \qquad e^{-1}ce = cb, \qquad e^{-1}de = dc.$$

Un calcul direct donne $e^u d^z c^y b^x e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} = e^{\mathrm{U}'} d^{\mathrm{Z}'} c^{\mathrm{Y}'} b^{\mathrm{X}'} a^{\mathrm{H}' p^{s-1}}$, avec

$$\mathrm{U}' = u' + u, \qquad \mathrm{Z}' = z' + z, \qquad \mathrm{Y}' = z'u + y' + y, \qquad \mathrm{X}' = z'\binom{u}{2} + y'u + x' + x,$$
$$\mathrm{H}' = \nu u\binom{z'}{2} + z'\left[\nu z u + \binom{u}{3}\right] + y'\left[\nu z + \binom{u}{2}\right] + x'u;$$

le commutant $\{a, b, c\}$ étant abélien on a

$$(e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'})^{-1} e^u d^z c^y b^x e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} = e^u d^z c^y b^x e^{\mathrm{Y}''} b^{\mathrm{X}''} a^{\mathrm{H}'' p^{s-1}}$$

* Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

avec

$$Y'' = zu' - uz', \qquad X'' = z\binom{u'}{2} - z'\binom{u}{2} + yu' - uy',$$

$$H'' = \nu\left[u'\binom{z}{2} - u\binom{z'}{2}\right] + z\left[\nu z'u' + \binom{u'}{3}\right] - z'\left[\nu zu + \binom{u}{3}\right]$$
$$+ y\left[\nu z' + \binom{u'}{2}\right] - y'\left[\nu z + \binom{u}{2}\right] + xu' - ux'.$$

On trouve par récurrence

$$(e^u d^z c^y b^x)^v = e^{U_v} d^{Z_v} c^{Y_v} b^{X_v} a^{H_v p^{s-1}}$$

avec

$$U_v = vu, \qquad Z_v = vz, \qquad Y_v = vy + zu\Sigma_1^{v-1}t, \qquad X_v = vx + \left[yu + z\binom{u}{2}\right]\Sigma_1^{v-1}t + zu^2\Sigma_1^{v-2}\Sigma_1^t t,$$

$$H_v = \left[xu + \nu yz + y\binom{u}{2} + z\binom{u}{3}\right]\Sigma_1^{v-1}t + \nu u\Sigma_1^{v-1}\binom{tz}{2}$$
$$+ \nu z^2 u\Sigma_1^{v-1}\Sigma_1^t t + u\left[yu + 2z\binom{u}{2}\right]\Sigma_1^{v-2}\Sigma_1^t t + zu^3\Sigma_1^{v-3}\Sigma_1^t\Sigma_1^t t,$$

d'où l'on tire

$$(e^u d^z c^y b^x)^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p}$$

avec

$$C_p = \varepsilon z(u+1), \qquad B_p = \varepsilon' z(u^2-1) + \varepsilon[z + y(u+1)],$$
$$A_p = \gamma z + \gamma' u + 3^{s-1}\varepsilon'[y(u^2-1) - \nu z^2 u - zu^2] + 2^{s-1}\varepsilon[x(u-1) + y],$$

en supposant $x, y, z, u < p$.

On voit que le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1 = a^\theta, \qquad b_1 = b^\xi a^{hp^{s-1}}, \qquad c_1 = c^\eta b^{\xi'} a^{h'p^{s-1}}, \qquad d_1 = e^u d^z c^y b^x a^k, \qquad e_1 = e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} a^{k'},$$
$$\theta\xi\eta'(zu' - uz') \not\equiv 0,$$

avec les conditions

$$\theta \equiv \xi u' \qquad \xi \equiv \eta' u', \qquad h \equiv \eta'\binom{u'}{2} + \xi' u' + \nu\eta' z', \qquad \eta' \equiv zu', \qquad \xi' \equiv yu' + z\binom{u'}{2},$$
$$h' \equiv H'', \qquad u \equiv 0, \qquad \varepsilon(y - \xi') \equiv 0, \qquad \varepsilon z' \equiv 0.$$

Et la transformation (T) qui en résulte sur les exposants non déterminés des équations de G est définie par

$$u'^2\nu_1 \equiv \nu z,$$
$$\left.\begin{array}{l} zu'^3\gamma_1 \equiv A + kp \\ zu'^3\gamma'_1 \equiv A' + k'p \end{array}\right\} \mod p^2,$$

A'_p étant ce que devient A_p quand on y accentue x, y, z, u.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Premier cas. $p > 2$.

La transformation (T) est

$$\left.\begin{array}{l} zu'^3\gamma_1 \equiv \gamma z + pk \quad + \varepsilon'(\xi' - y)p^{s-1} \\ zu'^3\gamma'_1 \equiv \gamma z' + \gamma' u' + pk' - \varepsilon' z'(\nu u' - 1)p^{s-1} \end{array}\right\} \mod p^s, \qquad u'^2\nu_1 \equiv \nu z.$$

On voit aisément que les types distincts correspondent à

$$\nu = 0, \quad \gamma = 0, \quad \gamma' = 0, 1; \qquad \nu = 0, \quad \gamma = (1, i, i^2), \quad \gamma' = 0;$$
$$\nu = 1, \quad \gamma = 0, \quad \gamma' = (1, i^2), (i, i^3); \qquad \nu = 1, \quad \gamma = (1, i, i^2), \quad \gamma' = 0;$$

les valeurs de γ comprises dans une même parenthèse fournissent le même type si p est 3 ou $\equiv 2 \bmod 3$; il en est de même pour les valeurs de γ', si p est $\equiv 3 \bmod 4$.

Deuxième cas. $p = 2$ $\quad (\nu \equiv 0 \bmod 2^s)$.

La transformation (T) est

$$\gamma_1 \equiv \gamma + 2k + (x + y)2^{s-1}, \qquad \gamma'_1 \equiv \gamma z' + \gamma' + 2k' + y' 2^{s-1} \qquad (\bmod 2^s)$$

et montre qu'il y a trois types correspondant à

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, 1; \qquad \gamma = 1, \quad \gamma' = 0.$$

Remarquons que dans ce cas d est toujours un e_{16} qui avec a^2 engendre un g_{32} abélien de type (41); les g_{64} de figure (2)(1)(1)(11) rentrent dans les g_{p^m} ayant un $g_{p^{m-1}}$ abélien de type $(m - 2, 1)$ [1].

Les g_{p^m} ayant tous leurs diviseurs abéliens.

13. Quelques-uns des types des figures $(rs)(11)$, $(r11)(11)$ dont nous abordons maintenant l'étude, ont tous leurs diviseurs abéliens. Nous nous proposons de déterminer en même temps tous les g_{p^m} non abéliens dont tous les diviseurs sont abéliens.

Soient G *un* g_{p^m} *non abélien ayant tous ses diviseurs abéliens*, A le central de G, C le com-

---

[1] Miller, *Trans, of the Am. Math. Soc.*, 1901.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

mutant, P le p. p. c. m. des p-ièmes puissances des éléments de G, $CPx_1, CPx_2, \ldots, CPx_\nu$ une base du groupe abélien principal $G|CP$. Le groupe CP, p. g. c. d. des $g_{p^{m-1}}$ (1) est $<$ G donc abélien, et d'ordre $\leqq p^{m-2}$ car si CP était d'ordre p^{m-1}, G n'aurait qu'un $g_{p^{m-1}}$ et, m étant > 2, G serait cyclique (2). Donc ν est $\geqq 2$. Si ν était $\geqq 3$ tout $g_{p^{m-\nu+2}}\{CP, x_i, x_k\}$ serait $<$ G donc abélien et G serait abélien. On a donc $\nu = 2$; et, tout $g_{p^{m-1}}\{CP, x_i\}$ étant par hypothèse abélien, CP divise le central A de G. Mais G n'étant pas abélien, l'ordre de A ne peut surpasser p^{m-2}, ordre de CP, donc $CP = A$. *Ainsi* $G|A$ *est un* g_{p^2} *principal et l'on a* $CP = A$. *Ces conditions suffisent évidemment pour que* G *ait tous ses diviseurs abéliens.*

En désignant par Ad, Ae une base du g_{p^2} principal $G|A$, on peut remplacer la condition $CP = A$ par la condition équivalente

$$A = \{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}.$$

Supposons en effet $G|A$ principal d'ordre p^2 et soit $D = \{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$, $E = \{d, e\}$. Je dis que $(E, D) = p^2$. En effet d^p, e^p sont dans D; et, comme D d'après l'hypothèse divise A, d et e indépendants mod A le sont aussi mod D. On a donc $(E, 1) = (D, 1)p^2$ en même temps que $(G, 1) = (A, 1)p^2$. Alors *si* D *est* $<$ A, E *non abélien est* $<$ G. Si $D = A$, on a $E = G$ et $CP = D = A$. On peut donc dire : *pour qu'un* g_{p^m}G *non abélien ait tous ses diviseurs abéliens, il faut et il suffit que* $G|A$ *soit principal d'ordre* p^2, *et que, en désignant par* Ad, Ae *une base de* $G|A$, *on ait* $A = \{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$.

14. *Désignons en général par* $a_i (i = 1, \ldots, \nu)$ *une base de* G et cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'éléments représentés en notation additive par $b_k = \sum_i x_{ik} a_i$ engendre G. Tout d'abord, on sait qu'il faut $k \geqq \nu$ (3). Si la matrice des x_{ik} est de rang (4) ν mod p on pourra, en résolvant les équations, exprimer tous les a_i en fonction de ν des b_k et, par conséquent ces ν b_k engendrent G. Si la matrice des x_{ik} est mod p de rang $\rho < \nu$, $|x_{ij}| (i, j = 1, \ldots, \rho)$ étant par exemple $\not\equiv 0$, il existe des entiers $\lambda_h \not\equiv 0$, λ_{jh} et μ_{ih} tels que l'on ait

$$\lambda_h x_{ih} = \sum_{j=1}^{j=\rho} \lambda_{jh} x_{ij} + p\mu_{ih} \qquad (h = \rho + 1, \ldots, \nu),$$

d'où l'on tire

$$\lambda_h b_h = \sum_i \lambda_{jh} b_j + \sum_j p\mu_{ih} a_i \qquad (h = \rho + 1, \ldots, \nu).$$

---

(1) Bagnera, *R. A. L. R.*, 1898. *A. D. M.* (IIIe série), t. II, p. 264.

(2) Burnside, *Theory*, nos 62, 63.

(3) Frobenius et Stukelberger, *Cr.*, t. LXXXVI, 1879, p. 237. — De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes*, no 119.

(4) Le rang est le degré du déterminant $\not\equiv 0$ de degré le plus élevé.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Il est alors impossible que les b_k engendrent G; car, s'il en était ainsi, on aurait

$$a_i = \sum_k y_{ik} b_k$$

d'où

$$\lambda_h b_h - p \sum_{ik} \mu_{ih} y_{ik} b_k = \sum_j \lambda_{ih} b_j,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$b_h + \sum_{l_h} p \lambda_{l_h} b_{l_h} = \sum_{j=1}^{j=\rho} \lambda_{jh} b_j,$$

h prenant les valeurs $\rho + 1, \ldots, \nu$, et $\sum_{l_h}$ s'étendant aux valeurs $l_h = \rho + 1, \ldots, h - 1, h + 1, \ldots, \nu$. Le déterminant des coefficients des b_h étant $\equiv 1 \bmod p$, les b_h seraient exprimables en fonction des b_j et G serait engendré par moins de ν générateurs.

Ainsi, en reprenant la notation multiplicative, *la condition nécessaire et suffisante pour que les éléments* $\prod_i a_i^{x_{ik}}$ *engendrent* G *est qu'un déterminant d'ordre* ν *de la matrice des* x_{ik} *soit* $\not\equiv 0 \bmod p$.

La condition $A = \{d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de\}$ équivaut donc à celle-ci : A a au plus trois générateurs basiques et si l'on considère la matrice formée par les exposants des générateurs basiques de A dans les valeurs de d^p, e^p, $d^{-1}e^{-1}de$, un déterminant de cette matrice est $\not\equiv 0$.

Si A a trois générateurs basiques, comme $d^{-1}e^{-1}de$ est d'ordre p d'après les conditions d'automorphisme de G, la manière dont on forme une base normale montre que le troisième exposant basique sera 1. A sera donc de figure $(rs1)$. Si A a un ou deux générateurs basiques, les exposants basiques seront quelconques, G aura donc l'une des trois figures

$$(r)(11), \qquad (rs)(11), \qquad (rs1)(11).$$

Les g_{p^m} de figure $(r)(11)$, $(r1)(11)$, $(111)(11)$ sont tous connus. Nous allons étudier les figures $(rs)(11)$ $(s > 1)$ et $(rs1)(11)$.

Figure (rs)(11).

15. En tenant compte des conditions d'automorphisme, les équations de G auront la forme

$$a^{p^r} = b^{p^s} = 1, \qquad c^p = b^\mu a^\gamma, \qquad d^p = b^\nu a^\delta, \qquad c^{-1}bc = d^{-1}bd = b, \qquad d^{-1}cd = cb^{\sigma p^{s-1}} a^{\rho p^{r-1}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si l'on pose $g = d^y c^x$, $g' = d^{y'} c^{x'}$, $g^p = b^{B_p} a^{A_p}$ on trouve

$$g'g = d^{y'+y} c^{x'+x} (b^{\sigma p^{s-1}} a^{\rho p^{r-1}})^{yx'}, \qquad g^{-1} g'^{-1} g g' = (b^{\sigma p^{s-1}} a^{\rho p^{r-1}})^{xy'-yx'},$$
$$g^z = a^{zy} c^{zx} (b^{\sigma p^{s-1}} a^{\rho p^{r-1}})^{xy \Sigma_1^{z-1} t},$$
$$A_p = \gamma x + \delta y + \varepsilon \rho x y p^{r-1}, \qquad B_p = \mu x + \nu y + \varepsilon \sigma x y p^{s-1}.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1 = b^{\eta} a^{\xi}, \qquad b_1 = b^{\eta'} a^{\xi' p^{r-s}}, \qquad c_1 = d^y c^x b^k a^h, \qquad d_1 = d^{y'} c^{x'} b^{k'} a^{h'},$$

avec les conditions

$$(\xi \eta' - \eta \xi' p^{r-s})(xy' - yx') \not\equiv 0$$

et opère d'abord sur les exposants ρ, σ la transformation

$$\rho_1 \xi + \sigma_1 \xi' \equiv \rho (xy' - yx'), \qquad \rho_1 \eta p^{r-s} + \sigma_1 \eta' \equiv \sigma (xy' - yx').$$

Supposons $r > s$; la condition de figure étant σ ou $\rho \not\equiv 0$, on voit qu'on peut toujours faire sur ρ, σ l'une des deux hypothèses irréductibles l'une à l'autre

$$\rho_1 = \rho = 1, \qquad \sigma_1 = \sigma = 0; \qquad \rho_1 = \rho = 0, \qquad \sigma_1 = \sigma = 1.$$

L'hypothèse $\rho_1 = \rho = 1$, $\sigma_1 = \sigma = 0$ donne la condition $\xi \equiv xy' - yx'$ et le changement de générateurs le plus général conservant cette forme réduite opère sur les autres exposants la transformation

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 \xi + \mu_1 \xi' p^{r-s} &\equiv \gamma x + \delta y + ph + \varepsilon \rho x y p^{r-1} \\ \delta_1 \xi + \nu_1 \xi' p^{r-s} &\equiv \gamma x' + \delta y' + ph' + \varepsilon \rho x' y' p^{r-1} \end{aligned}\right\} \mod p^r,$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 \eta + \mu_1 \eta' &\equiv \mu x + \nu y + \varepsilon \sigma x y p^{s-1} + pk \\ \delta_1 \eta + \nu_1 \eta' &\equiv \mu x' + \nu y' + \varepsilon \sigma x' y' p^{s-1} + pk' \end{aligned}\right\} \mod p^s.$$

Tout système $x y x' y'$ solution de ces équations est aussi solution de ces équations prises mod p

$$\gamma_1 \xi \equiv \gamma x + \delta y, \qquad \gamma_1 \eta + \mu_1 \eta' \equiv \mu x + \nu y,$$
$$\delta_1 \xi \equiv \gamma x' + \delta y', \qquad \delta_1 \eta + \nu_1 \eta' \equiv \mu x' + \nu y';$$

la réciproque est vraie si l'on choisit convenablement h, h', k, k'. Or, les quatre dernières formules montrent que G a les quatre types

$$\gamma = \delta = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0, 1; \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 1, \qquad \mu = 0, 1, \qquad \nu = 0.$$

L'hypothèse $\rho_1 = \rho = 0$, $\sigma_1 = \sigma = 1$ donne les conditions $\xi' \equiv 0$, $\eta' \equiv xy' - yx'$, et le

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

changement de générateurs le plus général conservant cette forme réduite opère sur les autres exposants une transformation dont les formules prises mod p sont les mêmes que précédemment. D'où quatre nouveaux types correspondant aux mêmes valeurs de γ, δ, μ, ν.

Deux de ces huit types ont tous leurs diviseurs abéliens : ils ont pour équation

$$a^{p^r} = b^{p^s} = 1, \qquad c^p = b, \qquad d^p = a, \qquad d^{-1}cd = ca^{p^{r-1}},$$
$$a^{p^r} = b^{p^s} = 1, \qquad c^p = b, \qquad d^p = a, \qquad d^{-1}cd = cb^{p^{s-1}}.$$

Supposons $r = s$. On peut toujours faire l'hypothèse $\rho_1 = \rho = 0$, $\sigma_1 = \sigma = 1$ qui conduit aux mêmes calculs que pour $r > s$. G a donc seulement les quatre derniers types trouvés dans ce cas, et un seul a tous ses diviseurs abéliens; ses équations sont

$$a^{p^r} = b^{p^r} = 1, \qquad c^p = b, \qquad d^p = a, \qquad d^{-1}cd = cb^{p^{r-1}}.$$

Figure (rs1)(11).

16. En tenant compte des conditions d'automorphisme, G aura des équations de la forme

$$a^{p^r} = b^{p^s} = c^p = 1, \qquad d^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad e^p = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^{-1}de = dc^\nu b^{\mu p^{s-1}} a^{\lambda p^{r-1}}.$$

Si l'on pose $g = e^y d^x$, $g' = e^{y'} d^{x'}$, $g^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p}$, on trouve

$$g'g = e^{y'+y} d^{x'+x} (c^\nu b^{\mu p^{s-1}} a^{\lambda p^{r-1}})^{x'y}, \qquad g^{-1}g'^{-1}gg' = (c^\nu b^{\mu p^{s-1}} a^{\lambda p^{r-1}})^{xy'-yx'},$$
$$g^z = e^{zy} d^{zx} (c^\nu b^{\mu p^{s-1}} a^{\lambda p^{r-1}})^{xy \Sigma_1^{z-1} t},$$
$$A_p = \alpha x + \alpha' y + \varepsilon\lambda xy p^{r-1}, \qquad B_p = \beta x + \beta' y + \varepsilon\mu xy p^{s-1}, \qquad C_p = \gamma x + \gamma' y + \varepsilon\nu xy.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1 = c^\zeta b^\eta a^\xi, \qquad b_1 = c^{\zeta'} b^{\eta'} a^{\xi' p^{r-s}}, \qquad c_1 = c^{\zeta''} b^{\eta'' p^{s-1}} a^{\xi'' p^{r-1}}, \qquad d_1 = e^y d^x c^l b^k a^h, \qquad e_1 = e^{y'} d^{x'} c^{l'} b^{k'} a^{h'}.$$

avec les conditions

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' p^{r-s} & \xi'' p^{r-1} \\ \eta & \eta' & \eta'' p^{s-1} \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} (xy' - yx') \not\equiv 0$$

et opère d'abord sur les exposants λ, μ, ν la transformation

$$\xi\lambda_1 + \xi'\mu_1 + \xi''\nu_1 \equiv \lambda(xy' - yx'), \qquad \eta\lambda_1 p^{r-s} + \eta'\mu_1 + \eta''\nu_1 \equiv \mu(xy' - yx'),$$
$$\zeta' p^{s-1}\mu_1 + \zeta''\nu_1 \equiv \nu(xy' - yx').$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Premier cas. $r > s > 1$.

La condition de figure étant λ ou μ ou $\nu \not\equiv 0$, on peut toujours faire l'une des trois hypothèses, irréductibles l'une à l'autre :

$$\nu_1 = \nu = \mu_1 = \mu = 0,\ \lambda_1 = \lambda = 1;\ \nu_1 = \nu = 0,\ \mu_1 = \mu = 1,\ \lambda_1 = \lambda = 0;\ \nu_1 = \nu = 1,\ \mu_1 = \mu = \lambda_1 = \lambda = 0.$$

L'hypothèse $\nu_1 = \nu = \mu_1 = \mu = 0$, $\lambda_1 = \lambda = 1$ donne la condition $\xi \equiv xy' - yx'$ et le changement de générateurs le plus général conservant cette forme réduite opère sur les exposants restants la transformation

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\xi + \beta_1\xi' p^{r-s} + \gamma_1\xi'' p^{r-1} - A_p \equiv \alpha'_1\xi + \beta'_1\xi' p^{r-s} + \gamma'_1\xi'' p^{r-1} - A'_p \equiv 0 \quad \bmod p^r,\\
&\alpha_1\eta + \beta_1\eta' + \gamma_1\eta'' p^{s-1} - B_p \equiv \alpha'_1\eta + \beta'_1\eta' + \gamma'_1\eta'' p^{s-1} - B'_p \equiv 0 \quad \bmod p^s,\\
&\alpha_1\zeta + \beta_1\zeta' + \gamma_1\zeta'' - C_p \equiv \alpha'_1\zeta + \beta'_1\zeta' + \gamma'_1\zeta'' - C'_p \equiv 0.
\end{aligned}$$

Ces formules donnent

$$\begin{aligned}
\alpha_1\xi &\equiv \alpha x + \alpha' y, & \alpha'_1\xi &\equiv \alpha x' + \alpha' y',\\
\alpha_1\eta + \beta_1\eta' &\equiv \beta x + \beta' y, & \alpha'_1\eta + \beta'_1\eta' &\equiv \beta x' + \beta' y',\\
\alpha_1\zeta + \beta_1\zeta' + \gamma_1\zeta'' &\equiv \gamma x + \gamma' y, & \alpha'_1\zeta + \beta'_1\zeta' + \gamma'_1\zeta'' &\equiv \gamma x' + \gamma' y'.
\end{aligned}$$

L'hypothèse $\nu_1 = \nu = 0$, $\mu_1 = \mu = 1$, $\lambda_1 = \lambda = 0$ conduit à ces mêmes formules. G a donc les quatorze types correspondant à

$$\begin{aligned}
&\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0,\quad \gamma = 0,\quad \gamma' = 0, 1;\qquad \alpha = \alpha' = \beta = 0,\quad \beta' = 1,\quad \gamma = 0, 1,\quad \gamma' = 0,\\
&\alpha = 0,\quad \alpha' = 1,\quad \beta = \beta' = 0,\quad \gamma = 0, 1,\quad \gamma' = 0;\qquad \alpha = 0,\quad \alpha' = 1,\quad \beta = 1,\quad \beta' = \gamma = \gamma' = 0.
\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse $\nu_1 = \nu = 1$, $\mu_1 = \mu = \lambda_1 = \lambda = 0$, la transformation générale des exposants restants est définie par

$$\begin{aligned}
\alpha_1\xi &\equiv \alpha x + \alpha' y, & \alpha'_1\xi &\equiv \alpha x' + \alpha' y',\\
\alpha_1\eta + \beta_1\eta' &\equiv \beta x + \beta' y, & \alpha'_1\eta + \beta'_1\eta' &\equiv \beta x' + \beta' y',\\
\alpha_1\zeta + \beta_1\zeta' + \gamma_1\zeta'' &\equiv \gamma x + \gamma' y + \varepsilon xy, & \alpha'_1\zeta + \beta'_1\zeta' + \gamma'_1\zeta'' &\equiv \gamma x' + \gamma' y' + \varepsilon x'y',
\end{aligned}$$

et G a sept types dont deux correspondent à

$$\begin{aligned}
&\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0,\quad \gamma' = 0, 1 && \text{si } p > 2,\\
&\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0,\quad \gamma = 0, 1,\quad \gamma' = 0 && \text{si } p = 2,
\end{aligned}$$

les cinq autres correspondent aux cinq derniers systèmes α, α', β, β', γ, γ' trouvés dans les deux premières hypothèses faites sur λ, μ, ν. Seul le type correspondant à $\alpha = 0$, $\alpha' = \beta = 1$, $\beta' = \gamma = \gamma' = 0$ a tous ses diviseurs abéliens.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Deuxième. cas $r = s > 1$.

On peut toujours faire une des deux hypothèses irréductibles l'une à l'autre :

$$\nu_1 = \nu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda = 0, \quad \mu_1 = \mu = 1; \qquad \nu_1 = \nu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda = \mu_1 = \mu = 0.$$

La première conduit aux mêmes formules de transformation que pour $r > s$; d'où pour G les sept mêmes types. La deuxième conduit à

$$\begin{aligned} \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 &\equiv \alpha x + \alpha' y, & \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 &\equiv \alpha x' + \alpha' y', \\ \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 &\equiv \beta x + \beta' y, & \eta\alpha'_1 + \eta'\beta'_1 &\equiv \beta x' + \beta' y', \\ \zeta\alpha_1 + \zeta'\beta_1 + \zeta''\gamma_1 &\equiv \gamma x + \gamma' y + \varepsilon xy, & \zeta\alpha'_1 + \zeta'\beta'_1 + \zeta''\gamma'_1 &\equiv \gamma x' + \gamma' y' + \varepsilon x' y', \end{aligned}$$

d'où pour G les cinq types

$$\begin{array}{llll} \alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0 & \begin{cases} \gamma = 0, \\ \gamma = 0, 1, \end{cases} & \gamma' = 0, 1, & \text{si } p > 2, \\ & & \gamma' = 1, & \text{si } p = 2, \\ \alpha = \beta = \alpha' = 0, & \beta' = 1, & \gamma = 0, 1, & \gamma' = 0, \\ \alpha = \beta' = 1, & \alpha' = \beta = 0, & \gamma = \gamma' = 0. & \end{array}$$

Seul le dernier a tous ses diviseurs abéliens.

Troisième cas. $r > s = 1$.

La condition de figure étant λ ou μ ou $\nu \not\equiv 0$, on voit qu'on peut toujours faire sur λ, μ, ν une des deux hypothèses irréductibles l'une à l'autre :

$$\mu_1 = \mu = \nu_1 = \nu = 0, \quad \lambda_1 = \lambda = 1; \qquad \mu_1 = \mu = 0, \quad \nu_1 = \nu = 1, \quad \lambda_1 = \lambda = 0.$$

La première hypothèse donne la condition $\xi \equiv xy' - yx'$ et les formules prises mod p de la transformation la plus générale des exposants restants sont

$$\begin{aligned} \alpha_1\xi &\equiv \alpha x + \alpha' y, & \alpha'_1\xi &\equiv \alpha x' + \alpha' y', \\ \alpha_1\eta + \beta_1\eta' + \gamma_1\eta'' &\equiv \beta x + \beta' y, & \alpha'_1\eta + \beta'_1\eta' + \gamma'_1\eta'' &\equiv \beta x' + \beta' y', \\ \alpha_1\zeta + \beta_1\zeta' + \gamma_1\zeta'' &\equiv \gamma x + \gamma' y, & \alpha'_1\zeta + \beta'_1\zeta' + \gamma'_1\zeta'' &\equiv \gamma x' + \gamma' y'. \end{aligned}$$

On peut donc ramener α, α' à l'un des deux systèmes irréductibles entre eux : $\alpha = 0$, $\alpha' = 0, 1$. Si l'on a $\alpha = \alpha' = 0$, on voit que G a les trois types

$$\beta = \gamma = \beta' = 0, \quad \gamma' = 0, 1; \qquad \beta = \gamma' = 1; \quad \beta' = \gamma = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Le dernier, si l'on suppose $r = 2$, est un groupe que l'on retrouvera plus loin : le g_{p^6} de figure $(211)(11)$ dont tous les g_{p^4} sont abéliens. Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\alpha'_1 = \alpha' = 1$, donc $y \equiv 0$, $x \equiv 1$, $\xi \equiv y'$, on voit que G a les deux types

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 0, 1, \qquad \beta' = \gamma' = 0.$$

La deuxième hypothèse : $\mu_1 = \mu = 0$, $\nu_1 = \nu = 1$, $\lambda_1 = \lambda = 0$ donne les conditions $\xi'' \equiv \eta'' \equiv 0$, $\zeta'' \equiv xy' - yx'$ et les formules prises mod$p$ de la transformation la plus générale des exposants restants sont

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 \xi \equiv \alpha x + \alpha' y, & \alpha'_1 \xi \equiv \alpha x' + \alpha' y', \\
\alpha_1 \eta + \beta_1 \eta' \equiv \beta x + \beta' y, & \alpha'_1 \eta + \beta'_1 \eta' \equiv \beta x' + \beta' y', \\
\alpha_1 \zeta + \beta_1 \zeta' + \gamma_1 \zeta'' \equiv \gamma x + \gamma' y + \varepsilon xy, & \alpha'_1 \zeta + \beta'_1 \zeta' + \gamma'_1 \zeta'' \equiv \gamma x' + \gamma' y' + \varepsilon x' y'.
\end{array}$$

On voit de même que G a les sept types

$$\begin{array}{lllll}
\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0, & \gamma = 0, & \gamma' = 0, 1, & & \text{si } p > 2, \\
\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0, & \gamma = 0, 1, & \gamma' = 1, & & \text{si } p = 2, \\
\alpha = \alpha' = \beta = 0, & \beta' = 1, & \gamma = 0, 1, & \gamma' = 0, & \\
\alpha = 0, & \alpha' = 1, & \beta = 0, & \gamma = 0, 1, & \beta' = \gamma' = 0, \\
\alpha = 0, & \alpha' = 1, & \beta = 1, & \gamma = \beta' = \gamma' = 0. &
\end{array}$$

Le dernier est le seul groupe de figure $(r11)(11)$ $r > 1$, qui ait tous ses diviseurs abéliens.

Les g_{p^m} métabéliens ayant tous leurs $g_{p^{m-2}}$ abéliens.

17. Quelques-uns des types des figures $(r1)(111)$, qui nous restent à étudier, ayant tous leurs $g_{p^{m-2}}$ abéliens, proposons-nous de déterminer en outre tous les g_{p^m} métabéliens dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens, sans que tous leurs $g_{p^{m-1}}$ le soient.

Soit G *un* g_{p^m} *métabélien ayant tous ses* $g_{p^{m-2}}$ *abéliens sans que tous ses* $g_{p^{m-1}}$ *le soient*, A le central de G, $Az_1, \ldots, Az_\mu$ un système de générateurs indépendants [1] de G | A et $\{z_1, \ldots, z_\mu\} = E$. Comme E n'est pas abélien, il faut $(G, E) \leq p$.

Si l'on a $(G, E) = p$, A *a un élément d hors de* E, d^p *étant* dans E, donc *dans le central* D *de* E, *et l'on a* $G = \{E, d\}$, E *ayant tous ses diviseurs abéliens*. Inversement *si* E *a tous ses diviseurs abéliens et si d, d'ordre p mod* E *est permutable à tous les éléments de* E, je dis que

---

[1] Les Az_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ sont dits *indépendants* dans G | A ou mod A quand aucun des z_i n'est dans un complexe de la forme $Az_1^{\gamma_1} \ldots z_{i-1}^{\gamma_{i-1}} z_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \ldots z_\mu^{\gamma_\mu}$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

dans G *tout* $g_{p^{m-1}}$ G′ *autre que* E *est abélien*. En effet, soit (13) $E = \{e, f\}$, $D = \{e^p, f^p, e^{-1}f^{-1}ef\}$; le p. g. c. d. des $g_{p^{m-1}}$ de G est ici (13) $\{D, d^p\} = D$; si G′ est différent de E, G′ contient d, donc $G' = \{D, d, f^y e^x\}$. Or $\{D, f^y e^x\} < E$ est abélien et tous ses éléments sont permutables à d.

Cherchons les équations de G. On peut sans changer G remplacer d par un élément quelconque de Ed. *Supposons d'abord* E *de figure* $(rs1)(11)$, ses équations sont (16)

$$a^{p^r} = b^{p^s} = c^p = 1, \qquad e^p = a, \qquad f^p = b, \qquad f^{-1}ef = ec.$$

Soit $d^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha$. Si l'on prend $df^{-\beta}e^{-\alpha}$ pour d on aura $d^p = c^\gamma$, on peut donc toujours supposer d^p dans le commutant $\{c\}$ de E. Alors *si* γ *est* $\equiv 0$, G *est produit direct de* E par $\{d\}$; *si* γ *est* $\not\equiv 0$, en prenant $d^{\gamma^{-1}}$ pour d on aura $d^p = c$; comme $A = \{a, b, c\}$ est produit direct des groupes $\{a\}$, $\{b\}$, $\{d\}$, G *est de figure* $(rs2)(11)$ *et a pour équations*

$$a^{p^r} = b^{p^s} = d^{p^2} = 1, \qquad e^p = a, \qquad f^p = b, \qquad f^{-1}ef = ed^p.$$

Supposons ensuite E *de figure* $(rs)(11)$ *ou* $(r)(11)$; on pourra toujours, en prenant $df^y e^x$ pour d, déterminer x et y de manière à avoir $d^p = 1$; G *sera donc toujours produit direct de* E par $\{d\}$.

Soit maintenant $E = G$. Désignons par P le p. p. c. m. des p-ièmes puissances de G, par $CPx_1, \ldots, CPx_\nu$ une base du groupe abélien principal $G|CP$. On a vu qu'il faut $\nu > 1$, sans quoi G est cyclique (13). *Si* ν *est* > 3, tout $g_{p^{m-\nu+2}}\{CP, x_i, x_k\}$ est abélien, donc aussi G. Si $\nu = 3$, tout $g_{p^{m-\nu+1}}\{CP, x_i\}$ est abélien, donc CP *divise* A. Or A ne peut être $> CP$, car tout élément de G étant de la forme $g = c\prod_i z_i^{\gamma_i}$, c étant dans C et par suite dans A, g ne peut être dans A que si $\prod_i z_i^{\gamma_i}$ est dans A, c'est-à-dire si l'on a $\gamma_i \equiv 0$ quel que soit i (les z_i sont par hypothèse indépendants mod A). *Donc* $A = CP$; $G|A$ *est abélien principal d'ordre* p^3; A qui ne peut être cyclique (3) et doit être central des $g_{p^{m-1}}$ non abéliens de G ayant tous leurs diviseurs abéliens sera (13) de figure (rs) ou $(rs1)$, et G *sera de figure* $(rs)(111)$ ou $(rs1)(111)$.

Si l'on a $CP = A$, un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G sera $G' = \{A, g, g'\}$, un déterminant de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ étant $\not\equiv 0$. Si G′ n'est pas abélien, son central est A. $G'|A$ étant principal d'ordre p^2, la condition nécessaire et suffisante pour que G′ ait tous ses diviseurs abéliens est (13)

$$D' = \{g^p, g'^p, g^{-1}g'^{-1}gg'\} = A.$$

Donc, *pour que* G *ait tous ses* $g_{p^{m-2}}$ *abéliens, il faut et il suffit que dans tout* $g_{p^{m-1}}$ *non abélien* $\{A, g, g'\}$ *on ait* $\{g^p, g'^p, g^{-1}g'^{-1}gg'\} = A$. Le théorème du n° 14 fournit l'expression de cette condition.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si $\nu = 2$, le raisonnement fait tout à l'heure montre que A *divise* CP, *il faut d'ailleurs* $A < CP$ sans quoi tous les $g_{p^{m-1}}$ de G seraient abéliens. $G|A$ peut être engendré par deux seulement des Az_i, car si l'on avait toujours $G_{ik} = \{A, z_i, z_k\} < G$, G_{ik} serait abélien ou aurait tous ses diviseurs abéliens; dans les deux cas z_i^p serait permutable à z_k, donc dans A; et CP diviserait A. *On a donc* $G = \{A, z_1, z_2\}$, *le commutant est cyclique* et les deux exposants basiques de $G|A$ sont égaux (8); je dis que *leur valeur commune* (nécessairement > 1, sans quoi $CP = A$) *est* 2. En effet, tout $g_{p^{m-2}}$ étant d'indice p^2 dans G, $z_i^{p^2}$ appartient à tous les $g_{p^{m-2}}$; soit alors g un élément quelconque de G; si g est d'ordre $\leqq p^{m-2}$, g appartient à un $g_{p^{m-2}}$ (abélien) contenant aussi $z_i^{p^2}$; si g est d'ordre p^{m-1}, $z_i^{p^2}$ appartient au $g_{p^{m-2}}\{g^p\}$; dans les deux cas $z_i^{p^2}$ est permutable à g. A devant diviser les centraux de $g_{p^{m-1}}$ ayant tous leurs diviseurs abéliens, sera de figure (r) ou (rs) ou $(rs1)$ et *les seules figures possibles de* G *seront* $(r)(22)$ *ou* $(rs)(22)$, *avec* $r \geqq s \geqq 2$. Soit $G = \{A, e, f\}$, $G|A$ étant de figure (22), CP d'indice p^2 dans G et contenant A, et soit $f^{-1}ef = cc$. Le groupe $\{A, e^p, f^p\} \leqq CP$ est dans G d'indice $\leqq p^2$, donc $CP = \{A, e^p, f^p\}$. Le $g_{p^{m-1}}$ $G' = \{CP, e\} = \{A, f^p, e\}$ n'est pas abélien, sans quoi f^p, permutable à e, serait dans le central A de G; donc G' doit avoir tous ses diviseurs abéliens. Le central A' de G' contient $\{A, e^p\}$; et, comme $\{A, e^p\}$ est d'indice $\leqq p^2$ dans G', on a $A' = \{A, e^p\}$. $A'f^p, A'e$ formant une base de $G'|A'$ et le commutant de G' étant $\{c^p\}$, pour que G' ait tous ses diviseurs abéliens il faut que l'on ait $D' = \{e^p, f^{p^2}, c^p\} = A'$. Or si l'on pose $E' = \{e^{p^2}, f^{p^2}, c^p\}$, E' divise A et l'on a $(D', E') = (A', A) = p$; il faut donc que l'on ait $(E', 1) = (A, 1)$ donc $E' = A$. Ainsi *pour que* G *ait tous ses* $g_{p^{m-2}}$ *abéliens il faut que l'on ait* $\{e^{p^2}, f^{p^2}, c^p\} = A$. *Cette condition est d'ailleurs suffisante;* en effet E' divise tous les $g_{p^{m-2}}$ car e^p, f^p, c appartenant à tous les $g_{p^{m-1}}$, e^{p^2}, f^{p^2}, c^p appartiendront à tous leurs $g_{p^{m-2}}$. Un $g_{p^{m-2}}$ quelconque G'' s'obtiendra donc en adjoignant au $g_{p^{m-4}}$ A ou bien un élément d'ordre p^2 mod A et alors G'' est évidemment abélien, ou bien deux éléments d'ordre p mod A et alors, ces deux éléments étant nécessairement dans CP donc permutables, G'' est encore abélien.

Les types de figure $(r)(22)$ étant connus, nous allons déterminer ceux de figure $(rs)(22)$, $(rs)(111)$, $(rs1)(111)$, en nous bornant, sauf quand l'ordre du groupe est p^6, aux types dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens.

Figure (rs)(111) avec détermination des types de cette figure dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens.

18. En tenant compte des conditions d'automorphisme et de fermeture, les équations de G auront la forme

$$a^{p^r} = b^{p^s} = 1, \qquad c^p = b^\lambda a^\alpha, \qquad d^p = b^\mu a^\beta, \qquad e^p = b^\nu a^\gamma, \qquad d^{-1}cd = cb^{\sigma p^{s-1}} a^{\rho p^{r-1}},$$
$$e^{-1}ce = cb^{\sigma' p^{s-1}} a^{\rho' p^{r-1}}, \qquad e^{-1}de = db^{\sigma'' p^{s-1}} a^{\rho'' p^{r-1}}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Le commutant ne pouvant être cyclique (8), on peut toujours choisir d, e de manière que σ'' soit $\not\equiv 0$ et prendre $b^{\sigma''}a^{\rho''p^{r-s}}$ pour b, autrement dit, supposer $\rho''=0$, $\sigma''=1$. On peut ensuite toujours prendre $e^{\sigma}d^{-\sigma'}c$ pour c, c'est-à-dire supposer $\sigma=\sigma'=0$; puis $a^{\rho'}$ pour a ou $ed^{\rho^{-1}}$ pour e suivant que l'on a $\rho'\not\equiv$ ou $\equiv 0$, c'est-à-dire supposer $\rho'=1$; puis $e^{-\rho}d$ pour d, c'est-à-dire supposer $\rho=0$. Les trois dernières équations de G peuvent donc s'écrire

$$d^{-1}cd=c,\qquad e^{-1}ce=ca^{p^{r-1}},\qquad e^{-1}de=cb^{p^{s-1}}.$$

Si alors on pose

$$g=e^{z}d^{y}c^{x},\qquad g'=e^{z'}d^{y'}c^{x'},\qquad g^{u}=e^{Z_u}d^{Y_u}c^{X_u}b^{K_u p^{s-1}}a^{H_u p^{r-1}},\qquad g^{p}=b^{B_p}a^{A_p},$$

on a

$$g'g=e^{z'+z}d^{y'+y}c^{x'+x}b^{y'zp^{s-1}}a^{x'zp^{r-1}},\qquad g^{-1}g'^{-1}gg'=b^{(yz'-zy')p^{s-1}}a^{(xz'-zx')p^{r-1}},$$

$$Z_u=uz,\qquad Y_u=uy,\qquad X_u=ux,\qquad K_u=yz\binom{u}{2},\qquad H_u=xz\binom{u}{2},$$

$$B_p=\lambda x+\mu y+\nu z+\varepsilon yzp^{s-1},\qquad A_p=\alpha x+\beta y+\gamma z+\varepsilon xzp^{r-1}.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1=b^{\eta}a^{\xi},\qquad b_1=b^{\eta'}a^{\xi'p^{r-1}},\qquad c_1=e^{z}d^{y}c^{x}b^{k}a^{h},\qquad d_1=e^{z'}d^{y'}c^{x'}b^{k'}a^{h'},\qquad e_1=e^{z''}d^{y''}c^{x''}b^{k''}a^{h''},$$

avec les conditions

$$(C)\quad \xi\equiv xz'',\qquad \eta p^{r-s}\equiv yz'',\qquad \xi'\equiv x'z'',\qquad \eta'\equiv y'z'',\qquad z\equiv z'\equiv 0,\qquad z''(xy'-yx')\not\equiv 0,$$

et fournit sur les exposants des équations de G une transformation définie par

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} z''(\alpha_1 x+\lambda_1 x'p^{r-s}) &\equiv \alpha x+\beta\eta z''^{-1}p^{r-s}+ph\\ z''(\beta_1 x+\mu_1 x'p^{r-s}) &\equiv \alpha x'+\beta y'+ph'\\ z''(\gamma_1 x+\nu_1 x'p^{r-s}) &\equiv \alpha x''+\beta y''+\gamma z''+\varepsilon x''z''p^{r-1}+ph'' \end{aligned}\right\}\quad \text{mod } p^{r},$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1\eta+\lambda_1 y'z'' &\equiv \lambda x+\mu\eta z''^{-1}p^{r-s}+pk\\ \beta_1\eta+\mu_1 y'z'' &\equiv \lambda x'+\mu y''+pk'\\ \gamma_1\eta+\nu_1 y'z'' &\equiv \lambda x''+\mu y''+\nu z''+\varepsilon x''z''p^{s-1}+pk'' \end{aligned}\right\}\quad \text{mod } p^{s},$$

avec $z''(xy'-x'\eta p^{r-s})\not\equiv 0$.

Premier cas. $r>s>1$.

Les systèmes (1) et (2) entraînent

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} z''\alpha_1 &\equiv \alpha,\\ xz''\beta_1 &\equiv \alpha x'+\beta y',\\ xz''\gamma_1 &\equiv \alpha x''+\beta y''+\gamma z'' \end{aligned}\right.\qquad (2')\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1\eta+\lambda_1 y'z'' &\equiv \lambda x,\\ \beta_1\eta+\mu_1 y'z'' &\equiv \lambda x'+\mu y',\\ \gamma_1\eta+\nu_1 y'z'' &\equiv \lambda x''+\mu y''+\nu z'' \end{aligned}\right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et si (1′), (2′) sont vérifiés, on peut toujours déterminer h, k, h', k', h'', k'', de manière à vérifier (1) et (2).

Or les formules (1′) montrent que l'on peut toujours faire sur α, β, γ l'une des quatre hypothèses irréductibles l'une à l'autre

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, 1; \qquad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0; \qquad \alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0$$

avec $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$.

Si l'on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$, les formules (2′) montrent que G a les quatre types

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, 1; \qquad \lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad \nu = 0; \qquad \lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0.$$

Si l'on a $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, donc $x \equiv 1$, les formules (2′) qui deviennent

$$\lambda_1 y' z'' \equiv \lambda, \qquad \mu_1 y' z'' \equiv \lambda x' + \mu y', \qquad \eta + \nu_1 y' z'' \equiv \lambda x'' + \mu y'' + \nu z''$$

montrent que G a les trois types

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, 1, \quad \nu = 0; \qquad \lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0.$$

Si l'on a $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, donc $y' \equiv xz''$, $y'' \equiv 0$, les formules (2′) qui deviennent

$$\lambda_1 z''^2 \equiv \lambda, \qquad \eta + \mu_1 x z''^2 \equiv \lambda x' + \mu x z'', \qquad \nu_1 x z''^2 \equiv \lambda x'' + \nu z''$$

montrent que G a

pour $p > 2$, les quatre types : $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 1$, N, $\mu = \nu = 0$,
pour $p = 2$, les trois types : $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$.

Si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, donc $z'' \equiv 1$, $x' \equiv x'' \equiv 0$, les formules (2′) qui s'écrivent

$$\eta + \lambda_1 y' \equiv \lambda x, \qquad \mu_1 \equiv \mu, \qquad \nu_1 y' \equiv \mu y'' + \nu$$

montrent que G a les $p + 1$ types

$$\lambda = \mu = 0, \quad \nu = 0, 1; \qquad \lambda = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \nu = 0.$$

Deuxième cas. $r > s = 1$.

Les systèmes (1′) et (2′) sont maintenant

$$(1') \quad \begin{cases} z''\alpha_1 \equiv \alpha, \\ xz''\beta_1 \equiv \alpha x' + \beta y', \\ xz''\gamma_1 \equiv \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z''; \end{cases} \qquad (2') \quad \begin{cases} \eta\alpha_1 + y'z''\lambda_1 \equiv \lambda x, \\ \eta\beta_1 + y'z''\mu_1 \equiv \lambda x' + \mu y', \\ \eta\gamma_1 + y'z''\nu_1 \equiv \lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' + \varepsilon y''z''. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les formules (1′) étant les mêmes que dans le premier cas, il y a à faire sur α, β, γ les quatre mêmes hypothèses.

Si l'on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$, les formules (2′) montrent que G a quatre types qui sont

si $p > 2$: $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 0$; $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$,
si $p = 2$: $\lambda = \mu = \nu = 0$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$.

Si l'on a $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, donc $x \equiv 1$, les formules (2′) qui s'écrivent

$$y'z''\lambda_1 \equiv \lambda, \qquad y'z''\mu_1 \equiv \lambda x' + \mu y', \qquad \eta + y'z''\nu_1 \equiv \lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' + \varepsilon y'' z''$$

permettent de faire toujours $\nu_1 = 0$, et donnent pour G les trois types

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, 1, \quad \nu = 0; \qquad \lambda = 1, \quad \mu = \nu = 0.$$

Si l'on a $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, donc $xz'' \equiv y'$, $y'' \equiv 0$, les formules (2′) deviennent

$$z''^2\lambda_1 \equiv \lambda, \qquad \eta + y'z''\mu_1 \equiv \lambda x' + \mu y', \qquad xz''^2\nu_1 \equiv \lambda x'' + \nu z''$$

et donnent pour G

si p est > 2, les quatre types : $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 1$, N, $\mu = \nu = 0$;
si $p = 2$, les trois types : $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$.

Si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, donc $z'' \equiv 1$, $x' \equiv x'' \equiv 0$, les formules (2′) deviennent

$$\eta + y'\lambda_1 \equiv \lambda x, \qquad \mu_1 \equiv \mu, \qquad \nu_1 y' \equiv (\mu + \varepsilon) y'' + \nu$$

et donnent pour G $p + 1$ types qui sont

pour $p > 2$: $\lambda = \mu = 0$, $\nu = 0, 1$; $\lambda = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, p - 1$, $\nu = 0$;
pour $p = 2$: $\lambda = \mu = \nu = 0$; $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 0, 1$.

Troisième cas. $r = s > 1$.

Les systèmes (1′) et (2′) qui s'obtiennent en prenant mod p les systèmes (1) et (2) sont ici

$$(1') \quad \begin{cases} z''(\alpha_1 x + \lambda_1 x') \equiv \alpha x + \beta y, \\ z''(\beta_1 x + \mu_1 x') \equiv \alpha x' + \beta y', \\ z''(\gamma_1 x + \nu_1 x') \equiv \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z''; \end{cases} \qquad (2') \quad \begin{cases} z''(\alpha_1 y + \lambda_1 y') = \lambda x + \mu y, \\ z''(\beta_1 y + \mu_1 y') = \lambda x' + \mu y', \\ z''(\gamma_1 y + \nu_1 y') = \lambda x'' + \mu y'' + \nu z''. \end{cases}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Or si, dans l'étude [1] des g_{p^5} $(p > 2)$ de figure (11) (111), on échange d et e, et si l'on prend b^{-1} pour b, on est précisément amené à discuter les formules (1′) et (2′). Cette discussion fournit donc en même temps tous les types de g_{p^m} $(p > 2)$ de figure $(rr)(111)$ où r est > 1.

Si $p = 2$, il vient, en résolvant les deux premières de chaque système,

$$\alpha_1 \equiv y'(\alpha x + \beta y) + x'(\lambda x + \mu y), \qquad \lambda_1 \equiv \lambda x + \beta y + (\alpha + \mu)xy,$$
$$\mu_1 \equiv y(\alpha x' + \beta y') + x(\lambda x' + \mu y'), \qquad \beta_1 \equiv \lambda x' + \beta y' + (\alpha + \mu)x'y'.$$

On en tire $\alpha_1 + \mu_1 \equiv \alpha + \mu$, et l'on peut faire $\beta_1\lambda_1 = 0$ toujours et seulement si l'on a $\beta\lambda(\alpha + \mu) \equiv 0$.

Supposons $\beta = \lambda = \alpha + \mu = 1$. En prenant $x' = 0$, $x = y' = 1$, $y = \alpha$, on peut faire $\alpha_1 = 0$, donc $\mu_1 = 1$. Soit $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = \lambda_1 = \lambda = \mu_1 = \mu = 1$, donc

$$x' \equiv y, \qquad y' \equiv x + y, \qquad \gamma_1 x + \nu_1 y \equiv y'' + \gamma, \qquad \gamma_1 y + \nu_1(x + y) \equiv x'' + y'' + \nu,$$

on peut toujours déterminer x'', y'' de manière à faire $\gamma_1 = \nu_1 = 0$, d'où un seul type

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \lambda = \mu = 1, \qquad \gamma = \nu = 0.$$

Supposons $\alpha + \mu = 1$, $\beta\lambda = 0$. En prenant x' et y' solutions non toutes $\equiv 0$ de $\lambda x' + \beta y' + x'y' \equiv 0$, on peut faire $\beta_1 = 0$. Soit $\beta_1 = \beta = 0$, donc $0 \equiv x'(\lambda + y')$. En prenant $x' = 0$, $x = y' = 1$, $y = \lambda$, on peut faire $\lambda_1 = 0$. Soit $\lambda_1 = \lambda = 0$, donc $xy \equiv x'y' \equiv 0$; on peut faire $\alpha = 0$, donc $\mu_1 = 1$ en prenant $xy' = \mu$, $yx' = \alpha$. Soit $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\mu_1 = \mu = 1$, donc $y \equiv x' \equiv 0$, $x \equiv y' \equiv 1$; il reste

$$\gamma_1 \equiv \gamma, \qquad \nu_1 \equiv y'' + \nu,$$

d'où les deux types

$$\alpha = \beta = \lambda = 0, \qquad \mu = 1, \qquad \gamma = 0, 1, \qquad \nu = 0.$$

Supposons $\alpha + \mu = 0$. On a $\beta_1 = \lambda_1 = 0$ toujours et seulement si l'on a $\beta = \lambda = 0$. S'il en est ainsi, il reste $\alpha_1 \equiv \alpha$. En prenant $\alpha_1 = \alpha = 0$ on a

$$\gamma_1 x + \nu_1 x' \equiv \gamma, \qquad \gamma_1 y + \nu_1 y' \equiv \nu,$$

d'où les deux types

$$\alpha = \mu = \beta = \lambda = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \nu = 0, 1.$$

---

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits,* Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

En prenant $\alpha_1 = \alpha = 1$, on a

$$\gamma_1 x + \nu_1 x' \equiv x'' + \gamma, \qquad \gamma_1 y + \nu_1 y' \equiv y'' + \nu,$$

et l'on peut toujours faire $\gamma_1 = \nu_1 = 0$, d'où un seul type

$$\alpha = \mu = 1, \qquad \beta = \lambda = 0, \qquad \gamma = \nu = 0.$$

Si l'on n'a pas $\beta = \lambda = 0$, on peut, en prenant $x' = \beta$, $y' = \lambda$, $\lambda x + \beta y = 1$, faire $\beta_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$. Soit $\beta_1 = \beta = 0$, $\lambda_1 = \lambda = 1$, donc $x' \equiv 0$, $x \equiv y' \equiv 1$ et $\alpha_1 = \alpha$. En prenant $\alpha = \mu = 0$, on a

$$\gamma_1 \equiv \gamma, \qquad \gamma_1 y + \nu_1 \equiv x'' + \nu,$$

d'où les deux types

$$\alpha = \mu = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \gamma = 0, 1, \qquad \nu = 0.$$

En prenant $\alpha = \mu = 1$, on a

$$\gamma_1 \equiv x'' + \gamma, \qquad \gamma_1 y + \nu_1 \equiv x'' + y'' + \nu,$$

et l'on peut toujours faire $\gamma_1 = \nu_1 = 0$, d'où un seul type

$$\alpha = \mu = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \gamma = \nu = 0.$$

19. Cherchons à déterminer parmi les types trouvés ceux dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens, c'est-à-dire ceux pour lesquels, dans tout $g_{p^{m-2}}$ non abélien $\{A, g, g'\}$, on a $D' = \{g^p, g'^p, g^{-1}, g'^{-1}gg'\} = A$.

Les équations

$$c^p = b^\lambda a^\alpha, \qquad d^p = b^\mu a^\beta, \qquad e^p = b^\nu a^\gamma, \qquad d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = ca^{p^{r-1}}, \qquad e^{-1}de = db^{p^{s-1}}$$

sont communes à tous les types de figures $(rs)(111)$. On en tire

$$D' = \{b^{B_p} a^{A_p}, b^{B'_p} a^{A'_p}, b^{(yz'-zy')p^{s-1}} a^{(xz'-zx')p^{r-1}}\}.$$

Pour que l'on ait $D' = A$, il faut et il suffit qu'un déterminant de

$$\begin{vmatrix} A_p & A'_p & (xz'-zx')p^{r-1} \\ B_p & B'_p & (yz'-zy')p^{s-1} \end{vmatrix}$$

soit $\not\equiv 0$.

Soit $r > 1$. Si l'on n'a pas $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, $\gamma \not\equiv 0$, on peut prendre x, y, z, x', y', z' vérifiant

$$A_p \equiv A'_p \equiv 0$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et non

$$xz' - zx' \equiv yz' - zy' \equiv 0.$$

On obtient ainsi un $g_{p^{m-1}}\{A, g, g'\}$ non abélien, dans lequel D′ est $< A$ et qui, par suite, a un $g_{p^{m-1}}$ non abélien. Soit donc $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, $\gamma \not\equiv 0$.

Si s est > 1, on peut trouver x, y, z, x', y', z' vérifiant

$$0 \equiv \begin{vmatrix} A_p & A'_p \\ B_p & B'_p \end{vmatrix} \equiv \gamma[\lambda(zx' - xz') + \mu(zy' - yz')]$$

et non

$$xz' - zx' \equiv yz' - zy' \equiv 0.$$

On obtient ainsi encore un $g_{p^{m-1}}$ qui, comme précédemment, a un $g_{p^{m-2}}$ non abélien. Ainsi, *aucun g_{p^m} de figure $(rs)(111)$, $r \geqq s > 1$, n'a tous ses $g_{p^{m-2}}$ abéliens.*

Si $s = 1$ et $\lambda \equiv 0$, on a

$$\begin{vmatrix} A_p & A'_p \\ B_p & B'_p \end{vmatrix} \equiv \mu(yz' - zy') + \varepsilon zz'(y + y').$$

Si donc on prend

$$xz' - zx' \not\equiv 0, \qquad yz' - zy' \equiv 0, \qquad \text{donc} \qquad \varepsilon zz'(y + y') \equiv 0,$$

on a $D' < A$, par conséquent, le $g_{p^{m-1}}$ obtenu a un $g_{p^{m-2}}$ non abélien. Si λ est $\not\equiv 0$, un déterminant de la matrice de D′ est toujours $\not\equiv 0$, à moins que G′ ne soit abélien, car, si les trois déterminants sont $\equiv 0$, on a

$$0 \equiv z(yz' - zy') \equiv z'(yz' - zy') \equiv \lambda(xz' - zx') + \mu(yz' - zy') + \varepsilon zz'(y + y').$$

Si donc on prend $z \equiv z' \equiv 0$, G′ est abélien; si l'on prend $yz' - zy' \equiv 0$, donc $\varepsilon zz'(y + y') \equiv 0$, $xz' - zx' \equiv 0$, G′ est encore abélien. Ainsi, *le type de figure $(rs)(111)$ $(r > 1)$ correspondant à*

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = \lambda = 1, \qquad \mu = \nu = 0$$

est le seul qui ait tous ses $g_{p^{m-2}}$ abéliens.

Supposons $r = s = 1$, donc G d'ordre p^5 et de figure $(11)(111)$. Les types de G sont connus [1]; si les trois dernières équations de G sont mises sous la forme

$$d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = ca, \qquad e^{-1}de = db,$$

---

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

les équations caractérisant les divers types de G sont :

	$p > 2$.				$p = 2$.		
I.	$c^p = 1$,	$d^p = 1$,	$e^p = 1$.	I'.	$c^2 = 1$,	$d^2 = 1$,	$e^2 = 1$.
II.	$c^p = 1$,	$d^p = 1$,	$e^p = b^{-1}$.	II'.	$c^2 = b$,	$d^2 = 1$,	$e^2 = 1$.
III.	$c^p = 1$,	$d^p = a$,	$e^p = 1$.	III'.	$c^2 = a$,	$d^2 = 1$,	$e^2 = 1$.
IV.	$c^p = 1$,	$d^p = a$,	$e^p = b^{-1}$.	IV'.	$c^2 = a$,	$d^2 = 1$,	$e^2 = a$.
V.	$c^p = 1$,	$d^p = b^{-1}$,	$e^p = 1$.	V'.	$c^2 = b$,	$d^2 = a$,	$e^2 = 1$.
VI.	$c^p = 1$,	$d^p = b^{-1}$,	$e^p = a$.	VI'.	$c^2 = b$,	$d^2 = a$,	$e^2 = a$.
VII.	$c^p = a$,	$d^p = b$,	$e^p = 1$.	VII'.	$c^2 = b$,	$d^2 = ba$,	$e^2 = 1$.
VIII.	$c^p = a$,	$d^p = ba$,	$e^p = 1$.	VIII'.	$c^2 = a$,	$d^2 = b$,	$e^2 = 1$.
IX.	$c^p = b$,	$d^p = a^N$,	$e^p = 1$.	IX'.	$c^2 = a$,	$d^2 = b$,	$e^2 = a$.
X.	$c^p = a^{i^m}$,	$d^p = b$,	$e^p = 1$.				
XI.	$c^p = b$,	$d^p = ba^{\frac{1}{4}(i^{2n+1}-1)}$,	$e^p = 1$.				

On voit immédiatement que les types I, II, V, VI, VII, VIII, X, I', IV', VIII', IX' ont le g_{p^3} non abélien $\{a, c, e\}$, que les types II, II', III' ont le g_{p^3} non abélien $\{b, d, e\}$, que le type V' a le g_8 non abélien $\{ba, ec, ed\}$. Nous allons voir que *les types restants :* IV, IX, XI, VI', VII' *ont tous leurs* $g_{p^{m-2}}$ *abéliens*, c'est-à-dire que, pour chacun de ces types, un déterminant de

$$\begin{vmatrix} A_p & A'_p & xz' - zx' \\ B_p & B'_p & yz' - zy' \end{vmatrix}$$

est $\not\equiv 0$.

Pour le type IV la matrice est $\begin{vmatrix} y & y' & xz' - zx' \\ -z & -z' & yz' - zy' \end{vmatrix}$; si ses trois déterminants sont $\equiv 0$, on a

$$yz' - zy' \equiv z(xz' - zx') \equiv z'(xz' - zx') \equiv 0,$$

ce qui est impossible si G' n'est pas abélien.

Pour le type IX la matrice est $\begin{vmatrix} Ny & Ny' & xz' - zx' \\ x & x' & yz' - zy' \end{vmatrix}$; si ses trois déterminants sont $\equiv 0$, on a

$$xy' - yx' \equiv Ny(yz' - zy') - x(xz' - zx') \equiv Ny'(yz' - zy') - x'(xz' - zx') \equiv 0.$$

Si l'on n'a pas $x \equiv y \equiv 0$ il faut $x' \equiv \theta x$, $y' \equiv \theta y$, $z' \not\equiv \theta z$ d'où $x^2 - Ny^2 \equiv 0$, incompatible avec l'hypothèse. Si l'on a $x \equiv y \equiv 0$, donc $z \not\equiv 0$, x' ou $y' \not\equiv 0$, il faut $x'^2 - Ny'^2 \equiv 0$, incompatible avec l'hypothèse.

Le calcul est le même pour les types XI, la forme quadratique $x^2 - Ny^2$ étant remplacée par $x^2 + xy - \frac{1}{4}(i^{2n+1} - 1)y^2$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Pour le type VI′ la matrice est $\begin{vmatrix} y+z+xz & y'+z'+x'z' & xz'-zx' \\ x+yz & x'+y'z' & yz'-zy' \end{vmatrix}$; si ses trois déterminants sont nuls, on a

$$(xy'+yx')(1+zz')+(z+z')(xx'+yy')+(y+y')zz'+xz'+zx'\equiv 0,$$
$$z\,[(x+y)(x'+y')+y']+(x+y)z'+y'zz'\equiv 0,$$
$$z'[(x+y)(x'+y')+y]+(x'+y')z+y\,zz'\equiv 0.$$

En faisant successivement les deux hypothèses $zz'\equiv 1$ et $zz'\equiv 0$ donc $z+z'\equiv 1$, on trouve que ces trois équations ne peuvent être vérifiées que si les trois déterminants de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ sont $\equiv 0$.

Un calcul analogue donne le même résultat pour le type VII′ pour lequel la matrice est $\begin{vmatrix} y+xz & y'+x'z' & xz'-zx' \\ x+y+yz & x'+y'+y'z' & yz'-zy' \end{vmatrix}$.

Figure (r s 1)(111).

20. Un $g_{p^m}G$ de figure $(rs1)(111)$, $r\geqq s$, a, en tenant compte des conditions d'automorphisme, des équations de la forme

$$a^{p^r}=b^{p^s}=c^p=1,\qquad d^p=c^\gamma b^\beta a^\alpha,\qquad e^p=c^{\gamma'}b^{\beta'}a^{\alpha'},\qquad f^p=c^{\gamma''}b^{\beta''}a^{\alpha''},\qquad e^{-1}de=dc^\nu b^{\mu p^{s-1}}a^{\lambda p^{r-1}},$$
$$f^{-1}df=ec^{\nu'}b^{\mu' p^{s-1}}a^{\lambda' p^{r-1}},\qquad f^{-1}ef=ec^{\nu''}b^{\mu'' p^{s-1}}a^{\lambda'' p^{r-1}}.$$

Si l'on pose

$$g=f^z e^y d^x,\qquad g'=f^{z'}e^{y'}d^{x'},\qquad g^p=c^{C_p}b^{B_p}a^{A_p},$$

on trouve

$$g'g=f^{z'+z}e^{y'+y}d^{x'+x}(c^\nu b^{\mu p^{s-1}}a^{\lambda p^{r-1}})^{x'y}(c^{\nu'}b^{\mu' p^{s-1}}a^{\lambda' p^{r-1}})^{x'z}(c^{\nu''}b^{\mu'' p^{s-1}}a^{\lambda'' p^{r-1}})^{y'z},$$
$$g^{-1}g'^{-1}g\,g'=(c^\nu b^{\mu p^{s-1}}a^{\lambda p^{r-1}})^{xy'-yx'}(c^{\nu'}b^{\mu' p^{s-1}}a^{\lambda' p^{r-1}})^{xz'-zx'}(c^{\nu''}a^{\mu'' p^{s-1}}a^{\lambda'' p^{r-1}})^{yz'-zy'},$$
$$g^u=f^{uz}e^{uy}d^{ux}(c^\nu b^{\mu p^{s-1}}a^{\lambda p^{r-1}})^{\varepsilon xy}(c^{\nu'}b^{\mu' p^{s-1}}a^{\lambda' p^{r-1}})^{\varepsilon xz}(c^{\nu''}b^{\mu'' p^{s-1}}a^{\lambda'' p^{r-1}})^{\varepsilon yz};$$
$$A_p=\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z+\varepsilon(\lambda xy+\lambda' xz+\lambda'' xy)\,p^{r-1},$$
$$B_p=\beta x+\beta' y+\beta'' z+\varepsilon(\mu xy+\mu' xz+\mu'' xy)\,p^{s-1},$$
$$C_p=\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z+\varepsilon(\nu xy+\nu' xz+\nu'' xy).$$

Un élément normal $f^z e^y d^x$ étant défini par

$$\lambda' x+\lambda'' y\equiv\mu' x+\mu'' y\equiv\nu' x+\nu'' y\equiv 0,$$
$$\lambda x-\lambda'' z\equiv\mu x-\mu'' z\equiv\nu x-\nu'' z\equiv 0,$$
$$\lambda y+\lambda' z\equiv\mu y+\mu' z\equiv\nu y+\nu' z\equiv 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

la condition de figure est que ces équations aient pour unique solution

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0.$$

Le changement Θ de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1 = c^{\zeta} b^{\eta} a^{\xi}, \qquad b_1 = c^{\zeta'} b^{\eta'} a^{\xi' p^{r-s}}, \qquad c_1 = c^{\zeta''} b^{\eta'' p^{s-1}} a^{\xi'' p^{r-1}},$$
$$d_1 = f^z e^y d^x c^l b^h a^k, \qquad e_1 = f^{z'} e^{y'} d^{x'} c^{l'} b^{k'} a^{h'}, \qquad f_1 = f^{z''} e^{y''} d^{x''} c^{l''} b^{k''} a^{h''},$$

avec les conditions

$$\begin{vmatrix} \xi & \xi' p^{r-s} & \xi'' p^{r-1} \\ \eta & \eta' & \eta'' p^{s-1} \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

trouvées en examinant successivement les différentes hypothèses que l'on peut faire sur r et s. Du changement Θ résulte d'abord pour les exposants λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' une transformation définie par

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 \xi + \mu_1 \xi' + \nu_1 \xi'' \equiv \lambda(x y' - y x') + \lambda'(x z' - z x') + \lambda''(y z' - z y'), \\ \lambda'_1 \xi + \mu'_1 \xi' + \nu'_1 \xi'' \equiv \lambda(x y'' - y x'') + \lambda'(x z'' - z x'') + \lambda''(y z'' - z y''), \\ \lambda''_1 \xi + \mu''_1 \xi' + \nu''_1 \xi'' \equiv \lambda(x' y'' - y' x'') + \lambda'(x' z'' - z' x'') + \lambda''(y' z'' - z' y''); \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 \eta p^{r-s} + \mu_1 \eta' + \nu_1 \eta'' \equiv \mu(x y' - y x') + \mu'(x z' - z x') + \mu''(y z' - z y'), \\ \lambda'_1 \eta p^{r-s} + \mu'_1 \eta' + \nu'_1 \eta'' \equiv \mu(x y'' - y x'') + \mu'(x z'' - z x'') + \mu''(y z'' - z y''), \\ \lambda''_1 \eta p^{r-s} + \mu''_1 \eta' + \nu''_1 \eta'' \equiv \mu(x' y'' - y' x'') + \mu'(x' z'' - z' x'') + \mu''(y' z'' - z' y''); \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 \zeta p^{r-1} + \mu_1 \zeta' p^{s-1} + \nu_1 \zeta'' \equiv \nu(x y' - y x') + \nu'(x z' - z x') + \nu''(y z' - z y'), \\ \lambda'_1 \zeta p^{r-1} + \mu'_1 \zeta' p^{s-1} + \nu'_1 \zeta'' \equiv \nu(x y'' - y x'') + \nu'(x z'' - z x'') + \nu''(y z'' - z y''), \\ \lambda''_1 \zeta p^{r-1} + \mu''_1 \zeta p^{s-1} + \nu''_1 \zeta'' \equiv \nu(x' y'' - y' x'') + \nu'(x' z'' - z' x'') + \nu''(y' z'' - z' y''). \end{cases}$$

Premier cas. — $r > s > 1$.

Si l'on a $\nu \equiv \nu' \equiv \nu'' \equiv 0$, on a nécessairement $\nu_1 \equiv \nu'_1 \equiv \nu''_1 \equiv 0$; et si l'on n'a pas $\nu \equiv \nu' \equiv \nu'' \equiv 0$, en prenant

$$x = \nu'', \qquad y = -\nu', \qquad z = \nu, \qquad \zeta'' = \nu(x' y'' - y' x'') + \nu'(x' z'' - z' x'') + \nu''(y' z'' - z' y'') \not\equiv 0,$$

on obtient $\nu_1 \equiv \nu'_1 \equiv 0$, $\nu''_1 \equiv 1$.

En supposant $\nu \equiv \nu' \equiv \nu'' \equiv 0$, on ne peut avoir $\mu \equiv \mu' \equiv \mu'' \equiv 0$, sans quoi le commutant serait cyclique; en prenant alors

$$x = \mu'' \qquad y = -\mu', \qquad z = \mu, \qquad \eta' = \mu(x' y'' - y' x'') + \mu'(x' z'' - z' x'') + \mu''(y' z'' - z' y'') \not\equiv 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

on obtient $\mu_1 \equiv \mu'_1 \equiv 0$, $\mu''_1 \equiv 1$. Soit donc $\mu_1 = \mu = \mu'_1 = \mu' = 0$, $\mu_1 = \mu'_1 = 1$, donc $y \equiv z \equiv 0$, $\eta' \equiv y'z'' - z'y''$, les formules (1) deviennent

$$\lambda_1 \xi \equiv x(\lambda y' + \lambda' z'), \quad \lambda'_1 \xi \equiv x(\lambda y'' + \lambda' z''), \quad \lambda''_1 \xi + \xi' \equiv \lambda(x'y'' - y'x'') + \lambda'(xz'' - zx'') + \lambda''(x'z'' - z'x'');$$

la condition de figure étant alors λ ou $\lambda' \not\equiv 0$, on voit que l'on peut toujours faire $\lambda_1 = 0$, $\lambda'_1 = 1$, $\lambda''_1 = 0$.

En supposant $\nu_1 = \nu = \nu'_1 = \nu' = 0$, $\nu''_1 = \nu'' = 1$, donc $y \equiv z \equiv 0$, $\zeta'' \equiv y'z'' - z'y''$, on voit par un calcul analogue au précédent que l'on peut faire sur μ, μ', μ'' les deux hypothèses irréductibles l'une à l'autre

$$\mu_1 = \mu = 0, \qquad \mu'_1 = \mu' = 0, 1, \qquad \mu''_1 = \mu'' = 0.$$

Si l'on a $\mu_1 = \mu = \mu'_1 = \mu' = \mu''_1 = \mu'' = 0$, donc $\eta'' \not\equiv 0$, comme la condition de figure est λ ou $\lambda' \not\equiv 0$, on voit que l'on peut faire $\lambda_1 = 0$, $\lambda'_1 = 1$, $\lambda''_1 = 0$. Si l'on a $\mu_1 = \mu = 0$, $\mu'_1 = \mu' = 1$, $\mu''_1 = \mu'' = 0$, donc $z' \equiv 0$, $\eta' \equiv xz''$, $\eta'' \equiv x'z''$, on voit que l'on peut réduire λ, λ', λ'' à l'un des deux systèmes, irréductibles l'un à l'autre $\lambda_1 = 0, 1$, $\lambda'_1 = \lambda''_1 = 0$.

En résumé, on peut toujours ramener les trois dernières équations de G à l'une des quatre formes, irréductibles l'une à l'autre,

$$\begin{array}{lll}
e^{-1}de = d, & f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}ef = eb^{p^{s-1}}, \\
e^{-1}de = d, & f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}ef = ec, \\
e^{-1}de = d, & f^{-1}df = db^{p^{s-1}}, & f^{-1}ef = ec, \\
e^{-1}de = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}df = db^{p^{s-1}}, & f^{-1}ef = ec.
\end{array}$$

On peut remarquer *qu'aucun* g_{p^m}G *de figure* $(rs1)(111)$, $r > s > 1$ *n'a tous ses* $g_{p^{m-2}}$ *abéliens;* car il est toujours possible de trouver un $g_{p^{m-1}}$ non abélien $\{A, g, g'\} = G'$ où l'on a $D' = \{g^p, g'^p, g^{-1}g'^{-1}gg'\} < A$. En effet, les valeurs respectives de $g^{-1}g'^{-1}gg'$ dans les quatre cas ci-dessus sont :

$$b^{(yz'-zy')p^{s-1}}a^{(xz'-zx')p^{r-1}}, \quad c^{yz'-zy'}a^{(xz'-zx')p^{r-1}}, \quad c^{yz'-zy'}b^{(xz'-zx')p^{s-1}}, \quad c^{yz'-zy'}b^{(xz'-zx')p^{s-1}}a^{(xy'-yx')p^{r-1}}.$$

En formant le déterminant des exposants des générateurs de D', on voit que, dans le premier cas, il est toujours $\equiv 0$ et que, dans les trois autres cas, on peut le rendre $\equiv 0$ sans faire G' abélien en prenant $y \equiv y' \equiv 0$, $xz' - zx' \not\equiv 0$. Or on a vu (14) que, si ce déterminant est $\equiv 0$, on a $D' < A$.

Deuxième cas. — $r = s > 1$.

Comme dans le cas de $r > s$, les formules (2) montrent que l'on peut toujours faire sur ν, ν', ν'' les deux hypothèses irréductibles l'une à l'autre

$$\nu_1 = \nu = \nu'_1 = \nu = 0; \qquad \nu''_1 = \nu'' = 0, 1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

En supposant $\nu = \nu' = \nu'' = 0$, les trois dernières équations de G sont

$$e^{-1}de = d(b^{\mu}a^{\lambda})^{p^{r-1}}, \qquad f^{-1}df = d(b^{\mu'}a^{\lambda'})^{p^{r-1}}, \qquad f^{-1}ef = e(b^{\mu''}a^{\lambda''})^{p^{r-1}}.$$

Les déterminants de $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \end{vmatrix}$ n'étant pas tous $\equiv 0$, sans quoi le commutant serait cyclique, il y a toujours un des trois générateurs tel que le p. p. c. m. de ses commutateurs avec les éléments de G soit d'ordre p^2. Désignons-le par f en sorte que l'on a $\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' \not\equiv 0$ et que l'on peut prendre $b^{\mu'}a^{\lambda'}$ pour a, $b^{\mu''}a^{\lambda''}$ pour b. Si alors on prend $f^{-\lambda}e$ pour e, $f^{\mu}d$ pour d, on voit que les trois dernières équations de G sont ramenées à la forme

$$e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, \qquad f^{-1}ef = eb^{p^{r-1}}.$$

En supposant $\nu_1 = \nu = \nu'_1 = \nu' = 0$, $\nu''_1 = \nu'' = 1$, donc $y \equiv z \equiv 0$, $\zeta'' \equiv y'z'' - z'y''$, les formules (1) et (2) montrent que l'on peut toujours faire $\lambda''_1 = \mu''_1 = 0$, et si l'on a $\lambda''_1 = \lambda'' = \mu''_1 = \mu'' = 0$ il reste

$$\lambda_1\xi + \mu_1\xi' \equiv x(\lambda y' + \lambda' z'), \qquad \lambda'_1\xi + \mu'_1\xi' \equiv x(\lambda y'' + \lambda' z''),$$
$$\lambda_1\eta + \mu_1\eta' \equiv x(\mu y' + \mu' z'), \qquad \lambda'_1\eta + \mu'_1\eta' \equiv x(\mu y'' + \mu'' z''),$$

formules permettant de réduire toujours λ, μ, λ', ν' non tous $\equiv 0$ (condition de figure) à l'un des deux systèmes, irréductibles l'un à l'autre,

$$\lambda_1 = \mu_1 = \mu'_1 = 0, \qquad \lambda'_1 = 1; \qquad \lambda_1 = \mu'_1 = 1, \qquad \lambda'_1 = \mu_1 = 0.$$

En résumé, les trois dernières équations de G peuvent toujours se réduire à l'une des trois formes, irréductibles l'une à l'autre,

$$\begin{array}{lll} e^{-1}de = d, & f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}ef = eb^{p^{r-1}}, \\ e^{-1}de = d, & f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}ef = ec, \\ e^{-1}de = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}ef = eb^{p^{r-1}}, & f^{-1}ef = ec. \end{array}$$

On peut remarquer qu'*aucun* g_{p^m} *de figure* $(rr1)(111)$, $r > 1$, *n'a tous ses* $g_{p^{m-2}}$ *abéliens*, pour les mêmes raisons que précédemment.

Troisième cas. — $r > s = 1$.

On voit sur les formules (2) et (3) qu'il y a à distinguer deux cas, suivant que les déterminants de $\begin{vmatrix} \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}$ sont tous $\equiv 0$ ou non. (La condition de figure exige qu'un élément au moins de cette matrice soit $\not\equiv 0$.)

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Supposons les trois déterminants $\equiv 0$, choisissons e, f non permutables mod $\{a\}$ et prenons $c^{\nu''}b^{\mu''}$ pour c, les trois dernières équations de G s'écriront

$$e^{-1}de = c^{\nu}a^{\lambda p^{r-1}}, \qquad f^{-1}df = c^{\nu'}a^{\lambda' p^{r-1}}, \qquad f^{-1}ef = ca^{\lambda'' p^{r-1}};$$

en prenant $f^{\nu}e^{-\nu'}d$ pour d, $ca^{\lambda'' p^{r-1}}$ pour c on les ramène à la forme

$$e^{-1}de = da^{\lambda p^{r-1}}, \qquad f^{-1}df = da^{\lambda' p^{r-1}}, \qquad f^{-1}ef = ec.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme réduite doit vérifier

$$y \equiv z \equiv \eta'' \equiv 0, \qquad \zeta'' \equiv y'z'' - z'y'', \qquad \xi'' \equiv \lambda(x'y'' - y'x'') + \lambda'(x'z'' - z'x''),$$

et fournit la transformation

$$\lambda_1 \xi \equiv x(\lambda y' + \lambda' z'), \qquad \lambda'_1 \xi \equiv x(\lambda y'' + \lambda' z'').$$

La condition de figure étant λ ou $\lambda' \not\equiv 0$, on voit qu'on peut toujours faire $\lambda_1 = 0$, $\lambda'_1 = 1$, d'où une première forme réduite des trois dernières équations de G

$$e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, \qquad f^{-1}ef = ec.$$

Supposons qu'un déterminant de $\begin{vmatrix} \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}$ soit $\not\equiv 0$ et choisissons d, e, f de manière que ce soit $\mu'\nu'' - \nu'\mu''$; nous pouvons alors prendre $c^{\nu'}b^{\mu'}a^{\lambda' p^{r-1}}$ pour b, $c^{\nu''}b^{\mu''}a^{\lambda'' p^{r-1}}$ pour c, puis $f^{\nu}d$ pour d, $f^{-\mu}e$ pour e, ce qui donne

$$e^{-1}de = da^{\lambda p^{r-1}}, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ec.$$

Si le commutant est un g_{p^3} on a $\lambda \equiv 0$; si c'est un g_{p^3} on a $\lambda \not\equiv 0$ et, en prenant a^{λ} pour a, on peut supposer $\lambda = 1$. D'où deux nouvelles formes réduites des trois dernières équations de G

$$\begin{array}{lll} e^{-1}de = d, & f^{-1}df = db, & f^{-1}ef = ec, \\ e^{-1}de = da^{p^{r-1}}, & f^{-1}df = db, & f^{-1}ef = ec. \end{array}$$

Si l'on a $e^{-1}de = d, f^{-1}df = da^{p^{r-1}}, f^{-1}ef = ec$, donc $g^{-1}g'^{-1}gg' = c^{yz'-zy'}a^{(xz'-zx')p^{r-1}}$, en sorte que le déterminant des exposants des générateurs de D′ est $\equiv$ à $\begin{vmatrix} A_p & A'_p & 0 \\ B_p & B'_p & 0 \\ C_p & C'_p & yz'-zy' \end{vmatrix}$, on peut rendre ce déterminant $\equiv 0$ et par suite (14) avoir $D' < A$ sans que G′ soit abélien en prenant $y \equiv y' \equiv 0$, $xz' - zx' \equiv 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si l'on a $e^{-1}de = da^{p^{r-1}}$, $f^{-1}df = db$, $f^{-1}ef = ec$, on obtiendra de même $D' < A$, G' non abélien en prenant $z \equiv z' \equiv 0$, $xy' - yx' \not\equiv 0$.

Si l'on a $e^{-1}de = d$, $f^{-1}df = db$, $f^{-1}ef = ec$, donc $g^{-1}g'^{-1}gg' = c^{yz'-zy'}b^{xz'-zx'}$, le déterminant des exposants des générateurs de D' est $\begin{vmatrix} A_p & A'_p & 0 \\ B_p & B'_p & xz'-zx' \\ C_p & C'_p & yz'-zy' \end{vmatrix}$. Si l'on n'a pas $\alpha \equiv \alpha' \equiv 0$, $\alpha'' \not\equiv 0$, on peut rendre ce déterminant $\equiv 0$ et, par suite, avoir $D' < A$ sans que G' soit abélien en prenant $A_p \equiv A'_p \equiv 0$, $xz' - zx'$ ou $yz' - zy' \not\equiv 0$. Si l'on a $\alpha \equiv \alpha' \equiv 0$, $\alpha'' \not\equiv 0$, on a

$$\begin{vmatrix} A_p & A'_p & 0 \\ B_p & B'_p & xz'-zx' \\ C_p & C'_p & yz'-zy' \end{vmatrix} \equiv \alpha''[\gamma(xz'-zx')^2 + \beta'(yz'-zy')^2 + (\gamma'-\beta)(xz'-zx')(yz'-zy')],$$

car on a toujours $\varepsilon zz'(z+z')(xy'+yx') \equiv 0$. Si la forme quadratique entre crochets est réductible, le déterminant peut être $\equiv 0$ et par suite D' peut être $< A$ sans que G' soit abélien. Si la forme quadratique est irréductible, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{array}{ll} \text{pour } p > 2, & (\beta-\gamma')^2 + 4\gamma\beta' \text{ non carré}, \\ \text{pour } p = 2, & \gamma \equiv \beta' \equiv \beta + \gamma' \equiv 1, \end{array}$$

pour tout $g_{p^{m-1}}$ non abélien G', le déterminant est $\not\equiv 0$, donc $D' = A$. *Les types correspondants sont donc les seuls de figure* $(rs1)(111)$ $(r \geqq s, r > 1)$ *dont tous les* $g_{p^{m-2}}$ *soient abéliens.* Nous allons les déterminer.

21. Le changement de générateurs le plus général conservant la forme réduite des équations de G doit vérifier

$$z \equiv z' \equiv \xi' \equiv \xi'' \equiv 0, \qquad \eta' \equiv x'z'', \qquad \zeta' \equiv yz'', \qquad \eta'' \equiv x'z'', \qquad \zeta'' \equiv y'z'',$$

et fournit pour les autres exposants une transformation dont les formules mod p sont

$$\begin{gathered} \alpha_1\xi \equiv \alpha x + \alpha' y, \qquad \alpha'_1\xi \equiv \alpha x' + \alpha' y', \qquad \alpha''\xi \equiv \alpha x'' + \alpha' y'' + \alpha'' z'', \\ \alpha_1\eta + \beta_1 xz'' + \gamma_1 x'z'' \equiv \beta x + \beta' y, \qquad \alpha'_1\eta + \beta'_1 xz'' + \gamma'_1 x'z'' \equiv \beta x' + \beta' y', \\ \alpha_1\zeta + \beta_1 yz'' + \gamma_1 y'z'' \equiv \gamma x + \gamma' y, \qquad \alpha'_1\zeta + \beta'_1 yz'' + \gamma'_1 y'z'' \equiv \gamma x' + \gamma' y', \\ \alpha''_1\eta + \beta''_1 xz'' + \gamma''_1 x'z'' \equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \varepsilon x'', \\ \alpha''_1\zeta + \beta''_1 yz'' + \gamma''_1 y'z'' \equiv \gamma x'' + \gamma' y'' + \gamma'' z'' + \varepsilon y''. \end{gathered}$$

Les trois premières montrent que l'on peut toujours faire sur α, α', α'' l'une des quatre hypothèses irréductibles l'une à l'autre

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \alpha = \alpha'_1 = \alpha' = 0, \qquad \alpha''_1 = \alpha'' = 0, 1; \qquad \alpha_1 = \alpha = 0, \qquad \alpha'_1 = \alpha' = 0, \qquad \alpha''_1 = \alpha'' = 0; \\ \alpha_1 = \alpha = 0, \qquad \alpha'_1 = \alpha' = \alpha''_1 = \alpha'' = 0. \end{gathered}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les types ayant tous leurs $g_{p^{m-2}}$ abéliens correspondant à l'hypothèse $\alpha_1 = \alpha = \alpha'_1 = \alpha' = 0$, $\alpha''_1 = \alpha'' = 1$, qui ajoute la condition $\xi \equiv z''$. Les formules restantes permettent, en choisissant convenablement η et ζ, de faire $\beta''_1 = \gamma''_1 = 0$. En supposant $\beta''_1 = \beta'' = \gamma''_1 = \gamma'' = 0$, ce qui ajoute deux conditions déterminant η et ζ, il reste

$$z''(\beta_1 x + \gamma_1 x') \equiv \beta x + \beta y, \qquad z''(\beta'_1 x + \gamma'_1 x') \equiv \beta x' + \beta' y',$$
$$z''(\beta_1 y + \gamma_1 y') \equiv \gamma x + \gamma' y, \qquad z''(\beta'_1 y + \gamma'_1 y') \equiv \gamma x' + \gamma' y'.$$

Soit $p > 2$. Ces quatre formules sont de même forme que celles que l'on obtient [1] dans l'étude des g_{p^5} de figure (11) (111), si l'on y échange d et e et si l'on y remplace b par b^{-1}. Les calculs faits à cette occasion montrent ici que le caractère quadratique de $(\beta - \gamma')^2 + 4\gamma\beta'$ est précisément un invariant et qu'à la valeur -1 de ce caractère quadratique correspondent les $\frac{p+1}{2}$ types

$$\beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \beta' = N, \quad \gamma' = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \beta' = \tfrac{1}{4}(i^{2n+1} - 1), \quad \gamma' = 1, \quad \left(n = 0, 1, \ldots, \frac{p-3}{2}\right).$$

Soit $p = 2$. En faisant $\gamma_1 = \gamma = \beta'_1 = \beta' = \gamma'_1 + \beta_1 = \gamma' + \beta = 1$, il vient en résolvant

$$\beta_1 \equiv \beta x y' + \gamma' y x' + x x' + y y', \qquad \gamma'_1 \equiv \beta y x' + \gamma' x y' + x x' + y y'.$$

Si l'on a $\beta = 1$, donc $\gamma' = 0$, en prenant $x = y' = 0$, $x' = y = 1$, on obtient $\beta_1 = 1$, $\gamma'_1 = 0$, d'où un seul type

$$d^2 = c, \qquad e^2 = cb, \qquad f^2 = a, \qquad e^{-1} de = d, \qquad f^{-1} df = db, \qquad f^{-1} ef = ec.$$

Quatrième cas. — $r = s = 1$.

22. On voit sur les équations de G comme sur les formules (1), (2), (3) qu'il y a deux cas à distinguer suivant que le commutant, toujours abélien principal, est d'ordre p^3 ou p^2.

Le commutant est un G_{p^3}.

Le central A étant alors égal au commutant, on peut prendre pour a, b^{-1}, c les trois commutateurs des éléments d, e, f pris deux à deux et écrire les trois dernières équations de G

$$e^{-1} de = da, \qquad f^{-1} df = db^{-1}, \qquad f^{-1} ef = ec.$$

---

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les formules (1), (2), (3) donnent alors

$$\begin{array}{lll} \xi \equiv xy' - yx', & \xi' \equiv yx'' - xy'', & \xi'' \equiv x'y'' - y'x'', \\ \eta \equiv zx' - xz', & \eta' \equiv xz'' - zx'', & \eta'' \equiv z'x'' - x'z'', \\ \zeta \equiv yz' - zy', & \zeta' \equiv zy'' - yz'', & \zeta'' \equiv y'z'' - z'y'', \end{array}$$

en sorte que $\begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} = \Delta$ est l'adjoint de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \mathrm{D}$, d'où l'on tire

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\xi} = \mathrm{D}z'', \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\xi'} \equiv \mathrm{D}z', \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\xi''} \equiv \mathrm{D}z, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta} \equiv \mathrm{D}y'', \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta'} \equiv \mathrm{D}y', \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\eta''} \equiv \mathrm{D}y,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\zeta} \equiv \mathrm{D}x'', \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\zeta'} \equiv \mathrm{D}x', \quad \frac{\partial\Delta}{\partial\zeta''} \equiv \mathrm{D}x.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G opère alors sur les exposants restants la transformation

$$\begin{array}{lll} \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 + \xi''\gamma_1 \equiv \mathrm{A}_p, & \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 + \xi''\gamma'_1 \equiv \mathrm{A}'_p, & \xi\alpha''_1 + \xi'\beta''_1 + \xi''\gamma''_1 \equiv \mathrm{A}''_p, \\ \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 + \eta''\gamma_1 \equiv \mathrm{B}_p, & \eta\alpha'_1 + \eta'\beta'_1 + \eta''\gamma'_1 \equiv \mathrm{B}'_p, & \eta\alpha''_1 + \eta'\beta''_1 + \eta''\gamma''_1 \equiv \mathrm{B}''_p, \\ \zeta\alpha_1 + \zeta'\beta_1 + \zeta''\gamma_1 \equiv \mathrm{C}_p, & \zeta\alpha'_1 + \zeta'\beta'_1 + \zeta''\gamma'_1 \equiv \mathrm{C}'_p, & \zeta\alpha''_1 + \zeta'\beta''_1 + \zeta''\gamma''_1 \equiv \mathrm{C}''_p. \end{array}$$

En résolvant, il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\alpha_1 &\equiv (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \varepsilon xy)z'' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z - \varepsilon xz)y'' + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + \varepsilon yz)x'', \\ \mathrm{D}\beta_1 &\equiv (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \varepsilon xy)z' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z - \varepsilon xz)y' + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + \varepsilon yz)x', \\ \mathrm{D}\gamma_1 &\equiv (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \varepsilon xy)z + (\beta x + \beta' y + \beta'' z - \varepsilon xz)y + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z + \varepsilon yz)x, \end{aligned}$$

et six autres formules obtenues en ajoutant successivement deux accents aux lettres α_1, β_1, γ_1 et aux lettres x, y, z qui sont dans les parenthèses des seconds membres.

1° $p > 2$.

Ces formules définissant une substitution linéaire et homogène opérée sur les neuf exposants α, β, ... montrent que le rang de leur déterminant est un invariant et que $\mathrm{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha''_1 & \beta''_1 & \gamma''_1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$. D'où trois cas fournissant des types certainement distincts, suivant que le rang est 1, 2 ou 3.

On voit ensuite que α_1, β_1, ... sont tous $\equiv 0$ toujours et seulement si α, β, ... le sont. Il y a donc un premier type de G dont les équations sont, en sous-entendant les équations

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

communes aux autres types,

$$d^p = e^p = f^p = 1.$$

Tout élément est alors un e_p :

1° Ce type mis à part, supposons le déterminant des $\alpha, \beta, \ldots$ de rang 1. On peut trouver x, y, z, x', y', z', n'annulant pas tous les déterminants de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ et vérifiant

$$\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z \equiv \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \equiv 0,$$
$$\alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \equiv \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \equiv \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \equiv 0,$$

ce qui donne $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv \gamma_1 \equiv \alpha'_1 \equiv \beta'_1 \equiv \gamma'_1 \equiv 0$. Supposons donc que l'on ait constamment $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv \alpha' \equiv \beta' \equiv \gamma' \equiv 0$ (donc on n'a pas $\alpha'' \equiv \beta'' \equiv \gamma'' \equiv 0$), les six premières formules du système non résolu, deviennent

$$0 \equiv \alpha'' z \equiv \beta'' z \equiv \gamma'' z \equiv \alpha'' z' \equiv \beta'' z' \equiv \gamma'' z',$$

d'où

$$z \equiv z' \equiv 0, \qquad D \equiv z''(xy' - yx'),$$

et les trois dernières résolues donnent

$$(xy' - yx')\alpha''_1 \equiv \alpha'' z'' + \beta'' y'' + \gamma'' x'',$$
$$(xy' - yx')\beta''_1 \equiv \qquad \beta'' y' + \gamma'' x',$$
$$(xy' - yx')\gamma''_1 \equiv \qquad \beta'' y + \gamma'' x.$$

On a donc $\beta''_1 \equiv \gamma''_1 \equiv 0$ toujours et seulement si $\beta'' \equiv \gamma'' \equiv 0$. En ce cas, comme $(xy' - yx')\alpha''_1 \equiv \alpha'' z''$, $\alpha'' \not\equiv 0$, on peut toujours obtenir $\alpha''_1 \equiv 1$. D'où le type

$$d^p = 1, \qquad e^p = 1, \qquad f^p = a.$$

Si β'' ou γ'' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta''_1 = 0$, $\gamma''_1 = 1$. En supposant $\beta''_1 = \beta'' = 0$, $\gamma''_1 = \gamma'' = 1$, on a $0 \equiv x'$, $y' \equiv 1$, $x\alpha''_1 \equiv \alpha'' z'' + x''$. On peut donc toujours faire $\alpha''_1 = 0$, d'où le type

$$d^p = 1, \qquad e^p = 1, \qquad f^p = c.$$

2° Supposons le déterminant des $\alpha, \beta, \ldots$ de rang 2. On peut trouver x, y, z non tous nuls vérifiant $0 \equiv \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z \equiv \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z$, ce qui donne $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv \gamma_1 \equiv 0$. Soit donc $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \alpha = \beta = \gamma = 0$, les trois premières formules non résolues donnent $0 \equiv \alpha' y + \alpha'' z \equiv \beta' y + \beta'' z \equiv \gamma' y + \gamma'' z$, donc $y \equiv z \equiv 0$, $0 \equiv x(y'z'' - z'y'')$. Les six autres formules non résolues deviennent alors

$$xy'\alpha'_1 - xy''\beta'_1 + \xi''\gamma'_1 \equiv \alpha' y' + \alpha'' z', \qquad xy'\alpha''_1 - xy''\beta''_1 + \xi''\gamma''_1 \equiv \alpha' y'' + \alpha'' z'',$$
$$-xz'\alpha'_1 + xz''\beta'_1 + \eta''\gamma'_1 \equiv \beta' y' + \beta' z', \qquad -xz'\alpha''_1 + xz''\beta''_1 + \eta''\gamma''_1 \equiv \beta' y'' + \beta'' z'',$$
$$\zeta''\gamma'_1 \equiv \gamma' y' + \gamma'' z', \qquad \zeta''\gamma''_1 \equiv \gamma' y'' + \gamma'' z''.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

On a $\gamma'_1 \equiv \gamma''_1 \equiv 0$ toujours et seulement si $\gamma' \equiv \gamma'' \equiv 0$. En ce cas, les quatre premières formules deviennent identiques aux formules rencontrées [1] dans l'étude des g_{p^5} de figure $(111)(11)$, mais $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$ est $\not\equiv 0$. On a donc immédiatement tous les types de g_{p^6} correspondant à ce cas $\gamma' = \gamma'' = 0$.

Si γ' ou γ'' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\gamma'_1 = 0$, $\gamma''_1 = 1$. Soit donc $\gamma'_1 = \gamma' = 0$, $\gamma''_1 = \gamma'' = 1$, les deux dernières formules donnent $0 \equiv z'$, $1 \equiv y'$, et les quatre premières

$$\begin{aligned} x\alpha_1 - xy''\beta'_1 &\equiv \alpha', & x\alpha''_1 - xy''\beta''_1 + x'y'' - x'' &\equiv \alpha'y'' + \alpha''z'', \\ xz''\beta'_1 &\equiv \beta', & xz''\beta''_1 - x'z'' &\equiv \beta'y'' + \beta''z''. \end{aligned}$$

On a $\beta'_1 \equiv 0$ toujours et seulement si β' est $\equiv 0$. En ce cas on a $x\alpha'_1 \equiv \alpha'$, et comme α' est $\not\equiv 0$, sans quoi le déterminant est de rang 1, on peut toujours faire $\alpha'_1 = 1$. Soit donc $\alpha'_1 = \alpha' = 1$, donc $x \equiv 1$, il reste

$$\alpha''_1 - y''\beta''_1 + x'y'' - x'' \equiv y'' + \alpha''z'', \qquad \beta''_1 - x' \equiv \beta''.$$

On peut toujours faire $\alpha''_1 = \beta''_1 = 0$, d'où un type

$$d^p = 1, \qquad e^p = a, \qquad f^p = c.$$

Si β' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta'_1 = 1$. Soit $\beta'_1 = \beta' = 1$, donc $xz'' \equiv 1$. L'équation $x\alpha'_1 - xy'' \equiv \alpha'$ montre que l'on peut faire $\alpha'_1 = 0$. Soit $\alpha'_1 = \alpha' = 0$, donc $y'' \equiv 0$, l'équation $x\beta''_1 - x' \equiv \beta''$ montre que l'on peut faire $\beta''_1 = 0$. Soit $\beta''_1 = \beta'' = 0$, donc $x' \equiv 0$, l'équation $x\alpha''_1 - x'' \equiv \alpha''z''$ montre que l'on peut faire $\alpha''_1 = 0$. D'où un type

$$d^p = 1, \qquad e^p = b, \qquad f^p = c.$$

3° Supposons que le déterminant des α, β, ... est $\not\equiv 0$. Si P désigne le groupe des puissances p-ièmes des éléments de G, on a ici $P = A$. D'ailleurs si C désigne le commutant de G on a aussi $C = A$; et CP étant le p. g. c. d. des g_{p^5} de G, il s'ensuit que tout g_{p^5} de G contient A. Deux éléments quelconques de G, incongrus mod A, ne peuvent être permutables, sans quoi le commutant serait d'ordre $\leqq p^2$; leurs p-ièmes puissances ne sont pas dans un même g_p, sans quoi le déterminant des α, β, ... serait nul. En conséquence, tout g_{p^5} de G est de figure $(111)(11)$ n'ayant pas d'e_p hors du central. On sait qu'il n'y a que deux types de g_{p^5} jouissant de ces propriétés; les équations qui les distinguent sont

$$\begin{aligned} d^p &= b, & e^p &= c, & e^{-1}de &= da, \\ d^p &= a, & e^p &= b, & e^{-1}de &= da. \end{aligned}$$

G a toujours des g_{p^5} du deuxième type. Soit, en effet, G obtenu en adjoignant f à un g_{p^5}

---

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

du premier type, ses équations seront

$$d^p = b, \quad e^p = c, \quad f^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \quad (\alpha \not\equiv 0),$$
$$e^{-1}de = da, \quad f^{-1}df = dc^\nu b^\mu a^\lambda, \quad f^{-1}ef = ec^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}, \quad (\mu\nu' - \nu\mu' \not\equiv 0).$$

En prenant $f^{\alpha-1}e^{-\gamma\alpha-1}d^{-\beta\alpha-1}$ pour f, et posant $q = c^\nu b^\mu a^\lambda$, $q' = c^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}$, les équations deviennent

$$d^p = b, \quad e^p = c, \quad f^p = a, \quad e^{-1}de = da, \quad f^{-1}df = dq, \quad f^{-1}ef = eq'.$$

Un g_{p^5} quelconque sera $\{a, b, c, g, g'\}$; il sera du deuxième type si $g^{-1}g'^{-1}gg'$ est dans $\{g^p, g'^p\}$, c'est-à-dire si l'on a

$$\begin{vmatrix} y & y' & \nu(xz' - zx') + \nu'(yz' - zy') \\ x & x' & \mu(xz' - zx') + \mu'(yz' - zy') \\ z & z' & \lambda(xz' - zx') + \lambda'(yz' - zy') + xy' - yx' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ étant $\not\equiv 0$. Le premier membre est une fonction quadratique des déterminants ξ, η, ζ de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$. On trouvera des valeurs de x, y, z, x', y', z' vérifiant cette équation en prenant ξ, η, ζ non tous nuls annulant la forme quadratique, ce qui est toujours possible, puis x', y', z' vérifiant $\zeta x' + \eta y' + \xi z' \equiv 0$, puis x, y, z vérifiant les trois équations compatibles $xy' - yx' \equiv \xi$, $zx' - xz' \equiv \eta$, $yz' - zy' \equiv \zeta$.

Ainsi tous les types de G du cas actuel s'obtiendront en adjoignant f à un g_{p^5} du deuxième type, et auront par suite des équations de la forme

$$d^p = a, \quad e^p = b, \quad f^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \quad (\gamma \not\equiv 0).$$
$$e^{-1}de = da, \quad f^{-1}df = dc^\nu b^\mu a^\lambda, \quad f^{-1}ef = ec^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}, \quad (\mu\nu' - \nu\mu' \not\equiv 0).$$

En prenant $fe^{-\lambda}d^{\lambda'}$ pour f, on obtient $f^{-1}df = dc^\nu b^\mu$, $f^{-1}ef = ec^{\nu'} b^{\mu'}$. En prenant $c^{\nu'} b^{\mu'}$ pour c, on obtient $f^{-1}ef = ec$, $(\mu \not\equiv 0)$. En prenant $f^{\mu-1}$ pour f, $c^{\mu-1}$ pour c, on obtient $f^{-1}df = dc^\nu b$. En prenant $c^\nu b$ pour b^{-1} on obtient enfin

$$d^p = a, \quad e^p = c^{\gamma'} b^{-1}, \quad f^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \quad (\gamma + \beta\gamma' \not\equiv 0),$$
$$e^{-1}de = da, \quad f^{-1}df = db^{-1}, \quad f^{-1}ef = ec.$$

En conservant cette forme réduite, le système des formules de transformation résolues devient

$$\begin{aligned}
&(1) & \mathrm{D} &\equiv (x + \alpha z)z'' + (\beta z - y)y'' + (\gamma' y + \gamma z)x'', \\
&(2) & 0 &\equiv (x + \alpha z)z' + (\beta z - y)y' + (\gamma' y + \gamma z)x', \\
&(3) & 0 &\equiv (x + \alpha z)z + (\beta z - y)y + (\gamma' y + \gamma z)x, \\
&(4) & 0 &\equiv (x' + \alpha z')z'' + (\beta z' - y')y'' + (\gamma' y' + \gamma z')x'', \\
&(5) & -\mathrm{D} &\equiv (x' + \alpha z')z' + (\beta z' - y')y' + (\gamma' y' + \gamma z')x', \\
&(6) & \mathrm{D}\alpha_1 &\equiv (x'' + \alpha z'')z'' + (\beta z'' - y'')y'' + (\gamma' y'' + \gamma z'')x''.
\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les formules non écrites déterminent γ'_1, γ_1, β_1. On peut prendre $y'' \equiv z'' \equiv 0$, donc $D \equiv x(yz' - zy')$, x, y, z solutions de (3) et telles que $\gamma' y + \gamma z$ soit $\not\equiv 0$, x', y', z' solutions de (2), (4) et (1) qui ont pour déterminant $(\gamma' y + \gamma z)^2$, x'' solution de (5); on obtient ainsi $\alpha_1 = 0$.

La recherche des types par la discussion des formules ci-dessus étant trop compliquée, nous allons suivre une autre voie. Remarquons, en supposant $\alpha_1 = \alpha = 0$, que les équations de $G|\{c\}$ sont

$$\left.\begin{array}{lll} d^p \equiv a, & e^p \equiv b^{-1}, & f^p \equiv b^\beta, \\ e^{-1}de \equiv da, & f^{-1}df \equiv db^{-1}, & f^{-1}ef \equiv e, \end{array}\right\} \mod \{c\};$$

$G|\{c\}$ est donc un g_{p^5} de figure (11) (111) dans lequel le groupe des puissances p-ièmes est un g_{p^3} abélien principal, et qui contient un g_{p^4} de figure (11)(11) ayant des e_{p^2}. Or parmi les types de g_{p^5} de figure (11)(111), il n'y en a que deux qui jouissent de ces propriétés [1]; leurs équations sont, en désignant par a, c les générateurs du central, par d, e, f les autres générateurs du groupe,

$$\left.\begin{array}{lll} d^p = 1, & e^p = c, & f^p = a, \\ d^p = 1, & e^p = a, & f^p = c, \end{array}\right\} e^{-1}de = da, \quad f^{-1}df = d, \quad f^{-1}ef = ec.$$

Si G admet un groupe quotient $G|\{b\}$ du premier type, ses équations prennent la forme

$$d^p = b^\beta, \quad e^p = cb^{\beta'}, \quad f^p = b^{\beta''}a, \quad e^{-1}de = db^\mu a, \quad f^{-1}df = db^{\mu'}, \quad f^{-1}ef = ecb^{\mu''}.$$

En prenant $b^\mu a$ pour a, $b^{\mu'}$ pour b^{-1}, $cb^{\mu''}$ pour c, on ramène les équations à la forme

$$d^p = b^\beta, \quad e^p = c^{\beta'}, \quad f^p = b^{\beta''}a, \quad e^{-1}de = da, \quad f^{-1}df = db^{-1}, \quad f^{-1}ef = ec, \quad (\beta \not\equiv 0).$$

Du changement de générateurs le plus général conservant cette forme d'équations résulte une transformation d'exposants définie par

$$\begin{array}{ll}
(1) & 0 \equiv zz'' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)y'' + yx'', \\
(2) & D\beta_1 \equiv zz' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)y' + yx', \\
(3) & 0 \equiv z^2 + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)y + yx, \\
(4) & 0 \equiv z'z'' + (\beta x' + \beta' y' + \beta'' z')y'' + y'x'', \\
(5) & D\beta'_1 \equiv z'^2 + (\beta x' + \beta' y' + \beta'' z')y' + y'x', \\
(6) & D \equiv z'z + (\beta x' + \beta' y' + \beta'' z')y + y'x, \\
(7) & D \equiv z''^2 + (\beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'')y'' + y''x'', \\
(8) & D\beta''_1 \equiv z''z' + (\beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'')y' + y''x', \\
(9) & 0 \equiv z''z + (\beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'')y + y''x.
\end{array}$$

---

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les équations (2), (8), (9) en en retranchant respectivement (6), (4), (1) deviennent

$$(2') \qquad D(\beta_1 - 1) \equiv (\beta - 1)\xi - \beta''\zeta,$$
$$(8') \qquad D\beta''_1 \equiv -(\beta - 1)\xi'' + \beta''\zeta'',$$
$$(9') \qquad 0 \equiv -(\beta - 1)\xi' + \beta''\zeta'.$$

Elles montrent qu'on a $\beta_1 \equiv 1$, $\beta''_1 \equiv 0$ toujours et seulement si l'on a $\beta \equiv 1$, $\beta'' \equiv 0$.

Les équations (1), (4), (7) en y considérant x'', y'', z'' comme inconnues admettent un système de solutions et un seul tel que D soit $\not\equiv 0$, à savoir

$$(1') \qquad \beta x'' \equiv \beta(zx' - xz') + \beta'(zy' - yz') \equiv \beta\eta - \beta'\zeta,$$
$$(4') \qquad \beta y'' \equiv yz' - zy' \equiv \zeta,$$
$$(7') \qquad \beta z'' \equiv \beta(xy' - yx') + \beta''(zy' - yz') \equiv \beta\xi - \beta''\zeta.$$

En substituant dans (8) et (9) celles-ci deviennent

$$(8'') \qquad \begin{vmatrix} \beta y' & \beta' y' + x' & \beta'' y' + z' \\ y & \beta x + \beta' y + \beta'' z & z \\ y' & \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' & z' \end{vmatrix} + D\beta\beta''_1 \equiv 0,$$

$$(9'') \qquad \begin{vmatrix} \beta y & \beta' y + x & \beta'' y + z \\ y & \beta x + \beta' y + \beta'' z & z \\ y' & \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' & z' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Supposons d'abord $\beta \equiv 1$, $\beta'' \equiv 0$; les formules deviennent

$$(3) \qquad 0 \equiv z^2 + (x + \beta' y)y + yx,$$
$$(5) \qquad D\beta'_1 \equiv z'^2 + (x' + \beta' y')y' + y'x',$$
$$(6) \qquad D \equiv z'z + (x' + \beta' y')y + y'x,$$

(2), (8''), (9'') qui équivalent à (2), (8), (9) sont vérifiées identiquement. (1), (4), (7) déterminent x'', y'', z''. En prenant $y \equiv z \equiv z' \equiv 0$, $x' \equiv -(\beta' + 1)y'$, $x \equiv y'^{-1}$, on obtient $\beta'_1 \equiv 0$. On a donc le type

$$(\mathrm{I}) \qquad d^p = b, \qquad e^p = c, \qquad f^p = a.$$

Supposons que l'on n'ait pas simultanément $\beta \equiv 1$, $\beta'' \equiv 0$. Si l'on fait $\beta_1 \equiv 1$, (2') et (9') exigent $\xi\zeta' - \zeta\xi' \equiv 0$, donc $y \equiv 0$ alors (3) donne $z \equiv 0$, (2) donne $D \equiv \beta xy'$, (6) donne $D \equiv xy'$, d'où $\beta \equiv 1$. On ne peut donc faire $\beta_1 \equiv 1$ que si $\beta \equiv 1$. Si $\beta \not\equiv 1$ en prenant $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $y' = 1$, $(\beta - 1)z' \equiv \beta''$, d'où $x'' \equiv -z'$, $y'' \equiv 0$, $z'' \equiv 1$, $D = 1$, on obtient $\beta''_1 \equiv 0$. Soit donc $\beta''_1 = \beta'' = 0$; (8') et (9') donnent $\zeta' \equiv \xi'' \equiv 0$ donc $x'' \equiv y'' \equiv 0$, alors on a $\eta \equiv \zeta \equiv 0$, donc $z \equiv z' \equiv 0$, $z'' \equiv \xi$, $D \equiv \xi^2$, et les formules

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

restantes donnent

$$(2') \qquad z''(\beta_1 - 1) \equiv \beta - 1,$$
$$(3) \qquad 0 \equiv (\beta x + \beta' y)y + yx,$$
$$(5) \qquad z''^2\beta'_1 \equiv (\beta x' + \beta' y')y' + y'x',$$
$$(6) \qquad z''^2 \equiv (\beta x' + \beta' y')y + y'x.$$

La relation générale d'invariance indiquée au début et relative au déterminant des $\alpha, \beta, \ldots$ devient ici $z''^2\beta_1 \equiv \beta$; combinée avec $(2')$ elle donne $z''^2(\beta_1 + 1)^2 \equiv (\beta + 1)^2$.

On a donc $\beta_1 \equiv -1$ toujours et seulement si l'on a $\beta \equiv -1$. Soit d'abord $\beta + 1 \not\equiv 0$. En prenant $y \equiv 0$, $xy' \equiv 1$, $(\beta + 1)x' \equiv -\beta' y'$, d'où $z'' \equiv 1$, on obtient $\beta'_1 \equiv 0$. Soit donc $\beta'_1 = \beta' = 0$, les formules deviennent

$$xy \equiv x'y' \equiv 0 \qquad (xy' - yx')(\beta_1 - 1) \equiv \beta - 1, \qquad (xy' - yx')^2 \equiv \beta yx' + xy'.$$

Si l'on fait $x' \equiv y \equiv 0$ on a $xy' \equiv 1$, $\beta_1 \equiv \beta$. Si l'on fait $x \equiv y' \equiv 0$ et si l'on pose $\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \equiv \theta$ d'où $\beta \equiv \frac{1 + \theta}{1 - \theta}$ avec $\theta(\theta^2 - 1) \not\equiv 0$, on a

$$-yx' \frac{\theta_1}{1 - \theta_1} \equiv \frac{\theta}{1 - \theta}, \qquad yx' \equiv \frac{1 + \theta}{1 - \theta},$$

d'où $\theta + \theta_1 \equiv 0$.

On a donc $\frac{p - 3}{2}$ types distincts

$$(\mathrm{II}) \qquad d^p = b^{\frac{1+\theta}{1-\theta}}, \qquad e^p = c, \qquad f^p = a, \qquad \left(\theta = 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}\right).$$

Soit maintenant $\beta + 1 \equiv 0$, alors on a

$$xy' - yx' \equiv 1, \qquad 0 \equiv \beta' y^2, \qquad \beta'_1 \equiv \beta' y'^2, \qquad 0 \equiv \beta' yy'.$$

On a $\beta'_1 \equiv 0$ toujours et seulement si β' est $\equiv 0$, β'_1 carré toujours et seulement si β' est carré; et si β' est $\not\equiv 0$ on peut toujours faire suivant les cas $\beta'_1 = 1$ ou N non carré arbitraire. Donc trois types

$$(\mathrm{III}), (\mathrm{IV}), (\mathrm{V}) \qquad d^p = b^{-1}, \qquad e^p = cb^{\beta'}, \qquad f^p = a, \qquad (\beta' = 0, 1, \mathrm{N}).$$

Supposons maintenant $\beta \equiv 1$, donc $\beta'' \not\equiv 0$, alors $(2')$ et $(9')$ donnent $\zeta \equiv \zeta' \equiv 0$ donc $y \equiv z \equiv 0$, d'où $x'' \equiv -xz'$, $y'' \equiv 0$, $z'' \equiv xy'$, $\mathrm{D} \equiv (xy')^2$. (6) donne alors $xy' \equiv 1$ et il reste comme formules de transformation

$$(5) \qquad \beta'_1 \equiv z'^2 + 2x'y' + \beta' y'^2,$$
$$(8') \qquad \beta''_1 \equiv \beta'' y'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

En prenant $y' \equiv \beta''^{-1}$, $x \equiv \beta''$, $2x'y' \equiv -\beta' y'^2 - z'^2$, on obtient $\beta''_1 \equiv 1$, $\beta'_1 \equiv 0$, d'où le type

$$(\mathrm{VI}) \qquad d^p = b, \qquad e^p = c, \qquad f^p = ba.$$

Si G admet un groupe quotient $G/\{b\}$ du deuxième type, ses équations prennent la forme

$$d^p = b^\beta, \quad e^p = b^{\beta'} a, \quad f^p = cb^{\beta''}, \quad e^{-1} de = db^\mu a, \quad f^{-1} df = db^{\mu'}, \quad f^{-1} ef = ecb^{\mu''}, \quad (\beta \not\equiv 0).$$

Comme précédemment on peut les ramener à la forme

$$d^p = b^\beta, \quad e^p = b^{\beta'} a, \quad f^p = cb^{\beta''}, \quad e^{-1} de = da, \quad f^{-1} df = db^{-1}, \quad f^{-1} ef = ec, \quad (\beta \not\equiv 0).$$

Les formules de transformation de cette forme réduite sont

$$\begin{aligned}
&(1) & 0 &\equiv yz'' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)y'' + zx'',\\
&(2) & \mathrm{D}\beta_1 &\equiv yz' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)y' + zx',\\
&(3) & 0 &\equiv yz + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)y + zx,\\
&(4) & \mathrm{D} &\equiv y'z'' + (\beta x' + \beta' y' + \beta'' z'')y'' + z'x'',\\
&(5) & \mathrm{D}\beta'_1 &\equiv y'z' + (\beta x' + \beta' y' + \beta'' z')y' + z'x',\\
&(6) & 0 &\equiv y'z + (\beta x' + \beta' y' + \beta'' z')y + z'x,\\
&(7) & 0 &\equiv y''z'' + (\beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'')y'' + z''x'',\\
&(8) & \mathrm{D}\beta''_1 &\equiv y''z' + (\beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'')y' + z''x',\\
&(9) & \mathrm{D} &\equiv y''z + (\beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'')y + z''x.
\end{aligned}$$

Et l'invariance du déterminant des α, β, ... donne $\mathrm{D}\beta_1 \equiv \beta$. On peut remplacer (2), (8), (9) en en retranchant (6), (4), (1) par

$$\begin{aligned}
&(2') & \mathrm{D}\beta_1 &\equiv \xi\beta + \zeta(1-\beta'') + \eta,\\
&(8') & \mathrm{D}(1-\beta''_1) &\equiv \xi''\beta + \zeta''(1-\beta'') + \eta'',\\
&(9') & \mathrm{D} &\equiv \xi'\beta + \zeta'(1-\beta'') + \eta',
\end{aligned}$$

qui équivalent à

$$\begin{aligned}
&(2'') & z' + z''\beta_1 + z(1-\beta''_1) &\equiv \beta,\\
&(8'') & y' + y''\beta_1 + y(1-\beta''_1) &\equiv 1,\\
&(9'') & x' + x''\beta_1 + x(1-\beta''_1) &\equiv 1-\beta''.
\end{aligned}$$

En prenant $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $x' = 1 - \beta''$, $y' = 1$, $z' = 0$, $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = \beta$ on obtient $\beta_1 \equiv \beta''_1 \equiv 1$. Soit donc $\beta_1 = \beta''_1 = \beta = \beta'' = 1$, (2''), (8'') et (9'') donnent $z' + z'' \equiv 1$, $y' + y'' \equiv 1$, $x' + x'' \equiv 0$. Tenant compte de ces relations on trouve en ajou-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

tant (1) et (2), (4) et (5), (7) et (8)

$$(1') \qquad 1 \equiv x + (\beta' + 1)y + z,$$
$$(5') \qquad 1 + \beta'_1 \equiv x' + (\beta' + 1)y' + z',$$
$$(7') \qquad 0 \equiv \beta' + 1 - [x' + (\beta' + 1)y' + z'];$$

d'où en ajoutant (5′) et (7′) $\beta'_1 \equiv \beta'$. On a donc p types distincts entre eux

$$(\text{VII}) \qquad d^p = b, \qquad e^p = b^{\beta'}a, \qquad f^p = cb \qquad (\beta' = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Reste à savoir si ces types sont distincts de ceux précédemment trouvés. Les équations des types (I), (II), (III) pourront prendre la forme $d^p = b^\beta$, $e^p = b^{\beta'}a$, $f^p = cb^{\beta''}$ toujours et seulement si l'on peut vérifier avec $D \not\equiv 0$ les équations

$$(1) \qquad 0 \equiv zz'' + \beta xy'' + yx'',$$
$$(3) \qquad 0 \equiv z^2 + \beta xy + yx,$$
$$(4) \qquad D \equiv z'z'' + \beta x'y'' + y'x'',$$
$$(6) \qquad 0 \equiv z'z + \beta x'y + y'x,$$
$$(7) \qquad 0 \equiv z''^2 + \beta x''y' + y''x',$$
$$(9) \qquad D \equiv zz'' + \beta x''y + y''x.$$

Pour le type (I), $\beta = 1$, (1) et (9) donnent $D \equiv 0$.
Pour le type (III), $\beta = -1$ on a $z \equiv z'' \equiv yx'' - xy'' \equiv 0$, donc $D \equiv 0$.
Pour les types (II), $\beta(\beta^2 - 1) \not\equiv 0$, des équations (1), (3), (7) on tire

$$z^2 z''^2 \equiv (\beta + 1)^2 xyx''y'' \equiv (\beta xy'' + yx'')^2$$

ou, en posant $xy'' = u$, $yz'' = v$

$$\beta^2 u^2 - (\beta^2 + 1)uv + v^2 \equiv 0.$$

Les deux racines de l'équation en $\frac{v}{u}$ sont 1 et β^2. La racine 1 donne $D \equiv 0$. Soit donc $v \equiv \beta^2 u$; en remarquant que $D \equiv \zeta' x' + \eta' y' + \xi' z'$, on a pour déterminer x', y', z'

$$(4) \qquad (\beta y'' - \zeta')x' + (x'' - \eta')y' + (z'' - \xi')z' \equiv 0,$$
$$(6) \qquad \beta yx' + xy' + zz' \equiv 0,$$
$$(9') \qquad \zeta' x' + \eta' y' + \xi' z' \equiv (\beta - 1)\xi'.$$

L'équation (4) peut être remplacée par

$$\beta y''x' + x''y' + z''z' \equiv (\beta - 1)\xi'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Un simple calcul montre que le déterminant de ces trois équations est $\equiv 0$. Il a le mineur $\beta\xi' \not\equiv 0$ par hypothèse et le caractéristique correspondant $\begin{vmatrix} \beta y'' & x'' & (\beta-1)\xi' \\ \beta y & x & 0 \\ \zeta' & \eta' & (\beta-1)\xi' \end{vmatrix}$ est $\equiv 0$ en même temps que $z(\beta-1)+\beta$. Or, on peut prendre de manière à vérifier toutes les équations et la condition $D \not\equiv 0$

$$x \equiv 1, \quad y'' \equiv 1, \quad y \equiv -\frac{\beta}{(\beta-1)^2(\beta+1)}, \quad x'' \equiv -(\beta-1)^2(\beta+1), \quad z \equiv -\frac{\beta}{\beta-1}, \quad z'' \equiv \beta^2-1.$$

Les types (II) rentrent donc dans les types (VII).

Les équations à vérifier avec $D \not\equiv 0$ pour faire rentrer les types (IV) et (V) dans les types (VII) sont

$$\begin{aligned}
&(1) && 0 \equiv zz'' + (\beta' y - x)y'' + yx'', \\
&(3) && 0 \equiv z^2 + \beta' y^2, \\
&(4) && D \equiv z'z'' + (\beta' y' - x')y'' + y'x'', \\
&(6) && 0 \equiv z'z + (\beta' y' - x')y + y'x, \\
&(7) && 0 \equiv z''^2 + \beta' y''^2, \\
&(9) && D \equiv z''z + (\beta' y'' - x'')y + y''x.
\end{aligned} \qquad (\beta' = 1, N)$$

On voit immédiatement que si l'on a $\beta' = 1$ et $p \equiv 3 \bmod 4$, donc -1 non carré, ou $\beta' = N$ et $p \equiv 1 \bmod 4$, donc -1 carré, il est impossible de vérifier (3) et (7). Supposons donc $\beta' = 1$, $p \equiv 1 \bmod 4$ et remplaçons (9) en en retranchant (1) par

$$(9') \qquad D \equiv 2(xy'' - yx'') \equiv -2\xi'.$$

Pour vérifier (3) et (7), il faut prendre $z \equiv iy$, $z'' \equiv i''y''$, $i^2 \equiv i''^2 \equiv -1$, alors (1) devient

$$(ii''+1)yy'' - xy'' + yx'' \equiv 0$$

et comme il faut $xy'' - yx'' \equiv 0$, on doit avoir $i + i'' \equiv 0$. Alors x, y, x'' et y'' étant liés par

$$(1) \qquad 2yy'' - xy'' + yx'' \equiv 0, \qquad yy'' \not\equiv 0,$$

x', y', z' sont déterminés par un système qui équivaut à

$$\begin{aligned}
&(4') && -y''x' + (x''+y'')y' - iy''z' \equiv -2\xi'. \\
&(6) && -yx' + (x+y)y' + iyz' \equiv 0, \\
&(9') && \zeta' x' + \eta' y' + \xi' z' \equiv -2\xi'.
\end{aligned}$$

Or le calcul montre que le déterminant de ces trois équations est $\equiv 0$, qu'il a pour mineur ξ

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et qu'on peut annuler le caractéristique correspondant en prenant $2iy + 1 \equiv 0$. Donc pour $p \equiv 1 \bmod 4$ le type (IV) rentre dans les types (VII).

Supposons maintenant $p \equiv 3 \bmod 4$ et $\beta' = N$ que l'on peut prendre $= -1$. Un calcul analogue au précédent montre que pour vérifier les équations il faut

$$z \equiv iy, \qquad z'' \equiv -iy'' \quad (i = \pm 1), \qquad xy'' - yx'' + 2yy'' \equiv 0, \qquad yy'' \not\equiv 0,$$

$$\begin{aligned} -y''x' + (x'' - y'')y' + z''z' &\equiv -2\xi', \\ -yx' + (x - y)y' + zz' &\equiv 0, \\ \zeta'x' + \eta'y' \qquad + \xi'z' &\equiv -2\xi'. \end{aligned}$$

Le calcul montre encore que le déterminant de ces trois équations est $\equiv 0$, qu'il a pour mineur ξ' et qu'on peut rendre le caractéristique correspondant $\equiv 0$ en prenant

$$i(y + 2x) + 1 \equiv 0.$$

Donc pour $p \equiv 3 \bmod 4$ le type (V) rentre dans les types (VII).

Les équations à vérifier pour faire rentrer le type (VI) parmi les types (VII) sont

$$\begin{aligned} &(1) && 0 \equiv zz'' + (x + z)y'' + yx'', \\ &(3) && 0 \equiv z^2 + yz + 2xy, \\ &(4) && D \equiv z'z'' + (x' + z')y'' + y'x'', \\ &(6) && 0 \equiv z'z + (x' + z')y + y'x, \\ &(7) && 0 \equiv z''^2 + y''z'' + 2x''y'', \\ &(9) && D \equiv yz'' - zy''. \end{aligned}$$

Or, on peut satisfaire à ces équations et à $D \not\equiv 0$ en prenant, par exemple : $x \equiv 0$, $y \equiv -1$, $z \equiv 1$, $x' \equiv 0$, $y' \equiv 1$, $z' \equiv 0$, $x'' \equiv -3$, $y'' \equiv 1$, $z'' \equiv 2$. Donc le type (VI) rentre parmi les types (VII).

$$2^\circ \quad p = 2.$$

Il est impossible de déterminer les exposants α, β, ..., de manière que pour chacun des sept systèmes (x, y, z) autres que $(0, 0, 0)$ on ait $\gamma_1 \equiv 0$. Prenons donc x, y, z tels que $\gamma_1 \equiv 1$ et $x', y', z', x'', y'', z''$ tels qu'un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$ soit $\equiv 1$ et que l'on ait

$$A_p z' + B_p y' + C_p x' \equiv A_p z'' + B_p y'' + C_p x'' \equiv 0.$$

On définit bien ainsi un changement de générateurs, car on a

$$D \equiv A_p x + B_p y + C_p z \equiv 1,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et les équations de G se trouvent ramenées à la forme

$$d^2 = c, \qquad e^2 = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad f^2 = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^{-1}de = da, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ec.$$

Autrement dit, on peut toujours trouver un élément hors du central, tel que son carré soit hors du p. p. c. m. de ses commutateurs.

Nous allons d'abord déterminer les types de G qui n'ont aucun e_2 hors du central.

Pour que l'on ait $g^2 = 1$, il faut et il suffit $A_p \equiv B_p \equiv C_p \equiv 0$, ce qui équivaut (¹) à $A_p + B_p + C_p + B_pC_p + C_pA_p + A_pB_p + A_pB_pC_p \equiv 0$. Donc, pour qu'il n'y ait aucun e_2 hors du central, il faut et il suffit que, pour chacun des sept systèmes (x, y, z) autres que $(0, 0, 0)$, on ait $A_p + B_p + C_p + B_pC_p + C_pA_p + A_pB_p + A_pB_pC_p \equiv 1$. D'où sept relations entre les exposants α, β, ...

Pour conserver la forme réduite ci-dessus des équations de G, les conditions nécessaires et suffisantes sont, comme on le voit sur les formules résolues de la transformation

$$0 \equiv A_p z'' + B_p y'' + C_p x'' \equiv A_p z' + B_p y' + C_p x', \qquad 1 \equiv A_p z + B_p y + C_p x;$$

et, A'_p, B'_p, C'_p désignant ce que deviennent A_p, B_p, C_p quand on accentue les lettres x, y, z, on a $\beta'_1 \equiv A'_p z' + B'_p y' + C'_p x'$. Or on peut toujours trouver x, y, z vérifiant $C_p \equiv 0$, $A_p z + B_p y \equiv 1$. En effet, $C_p \equiv 0$ donne

$$A_p \equiv (\alpha + \gamma) y + \alpha' z + (\gamma' + 1) yz,$$
$$B_p \equiv \beta y + (\beta' + \gamma') z + (\beta' + 1) yz,$$

si alors on a $A_p z + B_p y \equiv 0$ pour tout système (y, z), il faut $\alpha \equiv \gamma$, $\beta \equiv \alpha' \equiv 0$, $\beta' \equiv \gamma' \equiv 1$. Puisqu'il n'y a pas d'$e_2$ hors du central, il faut $\alpha \equiv \gamma \equiv 1$; mais alors on voit que $(fed)^2 = 1$.

(¹) *L'équation*

$$X_n = 1 + \Sigma P_{1,n} + \Sigma P_{2,n} + \ldots + P_{n,n} \equiv 1 \qquad \text{mod } 2,$$

$P_{k,n}$ *parcourant les produits k à k de n variables $x_1, \ldots, x_n$, n'admet pas d'autres solutions que*

$$x_1 \equiv \ldots \equiv x_n \equiv 0.$$

Supposons que ce théorème, vrai pour deux variables, soit vérifié jusqu'au cas de $n - 1$ variables. Les relations

$$\Sigma P_{k,n} = x_n \Sigma P_{k-1,n-1} + \Sigma P_{k,n-1}, \qquad (k = 1, \ldots, n,\ \Sigma P_{0,n-1} = 1,\ \Sigma P_{n,n-1} = 0),$$

montrent que l'on a

$$X_n = x_n X_{n-1} + X_{n-1} = (x_n + 1) X_{n-1}.$$

L'équation $X_n \equiv 1$ équivaut donc à

$$X_{n-1} \equiv x_n + 1 \equiv 1,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème admis, à

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_n \equiv 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Une fois x, y, z ainsi déterminés, en prenant $x' \equiv 1$, $y' \equiv z' \equiv 0$, $y'' \equiv A_p$, $z'' \equiv B_p$, on a un changement de générateurs (car $D \equiv 1$) qui donne $\beta'_1 \equiv 0$.

Les équations de G peuvent donc se réduire à

$$d^2 = c, \quad c^2 = c^\gamma b a^\alpha, \quad f^2 = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \quad e^{-1} d e = d a, \quad f^{-1} d f = d b, \quad f^{-1} e f = e c,$$

et pour qu'il n'y ait pas d'e_2 hors du central il faut et il suffit que l'on ait

$$0 \equiv (\alpha + \alpha')(1 + \beta')(1 + \gamma + \gamma') \equiv (\beta'\gamma')(1 + \alpha') \equiv \beta'(\gamma + \gamma')(1 + \alpha + \alpha'),$$
$$1 \equiv \alpha + \gamma + \alpha\gamma \equiv \alpha' + \beta' + \gamma' + \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' + \alpha'\beta'\gamma'.$$

Les systèmes $(\alpha, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ solutions de ces équations sont

a $= (0, 1, 1, 0, 0)$,	**b** $= (1, 0, 1, 0, 0)$,	**c** $= (1, 1, 1, 0, 0)$,
d $= (0, 0, 0, 1, 0)$,	**e** $= (1, 0, 0, 1, 0)$,	**f** $= (1, 1, 0, 1, 0)$,
g $= (0, 0, 0, 0, 1)$,	**h** $= (0, 1, 0, 0, 1)$,	**i** $= (1, 0, 0, 0, 1)$,
j $= (0, 0, 1, 0, 1)$,	**k** $= (1, 0, 1, 0, 1)$,	**l** $= (1, 1, 1, 0, 1)$,
m $= (0, 0, 1, 1, 0)$,	**n** $= (0, 1, 1, 1, 0)$,	**p** $= (1, 0, 1, 1, 0)$,
q $= (0, 0, 1, 1, 1)$,	**r** $= (0, 1, 1, 1, 1)$,	**s** $= (1, 1, 1, 1, 1)$.

La transformation des exposants dans les équations de G résultant du changement de générateurs le plus général conservant la forme de ces équations, est définie par neuf équations, dont cinq seulement contiennent les nouvelles valeurs α_1, γ_1, ... Si l'on applique ce changement de générateurs au type **a**, il est facile de former tous les systèmes de valeurs de x, y, ..., qui satisfont aux quatre équations ne contenant pas α_1, γ_1, ... Chacun de ces systèmes x, y, ..., définit un système α_1, γ_1, ..., auquel correspond un type isomorphe au type **a**; et tous les types non obtenus de cette façon sont distincts du type **a**. On trouve ainsi que les types isomorphes au type **a** sont les types **a**, **f**, **j**, **e**, **q**, **b**, **c**, **n**, **m**, **k**, **h**, **s**.

On trouve de même que les types isomorphes au type **d** sont **d**, **i**, **g**, **p**; et enfin que les types isomorphes au type **l** sont **l**, **r**.

Ainsi il y a trois types distincts n'ayant pas d'e_2 hors du central, les équations qui les distinguent sont :

$$d^2 = c, \quad e^2 = cb, \quad f^2 = a; \qquad d^2 = c, \quad e^2 = b, \quad f^2 = b; \qquad d^2 = c, \quad e^2 = cba, \quad f^2 = ca.$$

Supposons maintenant que G ait un e_2 hors du central. Les équations étant ramenées à la forme toujours possible

$$d^2 = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \quad e^2 = b, \quad f^2 = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \quad e^{-1} d e = d a, \quad f^{-1} d f = d b, \quad f^{-1} e f = e c,$$

il existe x, y, z non tous $\equiv 0$, tels que $(f^z e^y d^x)^2 = 1$. Faisons le changement de

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

générateurs

$$d_1 = f^z e^y d^x, \qquad e_1 = e, \qquad f_1 = f^{z''} e^{y''} d^{x''}, \qquad xz'' + zx'' \equiv 1,$$

et les équations de G deviennent

$$d^2 = 1, \qquad e^2 = b, \qquad f^2 = c^{\gamma''} b^{\beta''} a^{\alpha''}, \qquad e^{-1}de = dc^z a^x, \qquad f^{-1}df = dc^y ba^\lambda, \qquad f^{-1}ef = ec^{z''} a^{x''}.$$

Prenons alors $c^z a^x$ pour a, $c^y ba^\lambda$ pour b, $c^{z''} a^{x''}$ pour c, les équations deviennent

$$d^2 = 1, \qquad e^2 = c^\gamma ba^\alpha, \qquad f^2 = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \quad e^{-1}de = da, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ec.$$

Nous allons d'abord examiner le cas où tout e_2 est $\equiv d \bmod A$, c'est-à-dire où $(f^z e^y d^x)^2$ est $\neq 1$, sauf si l'on a $y \equiv z \equiv 0$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que pour tout système (x, y, z) autre que $(x, 0, 0)$, on ait

$$A_p + B_p + C_p + A_p B_p + A_p C_p + B_p C_p + A_p B_p C_p \equiv 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' \equiv 1,$$
$$\beta'(\gamma + \gamma')(1 + \alpha + \alpha') \equiv \beta'(1 + \alpha')(1 + \gamma') \equiv (\alpha + \alpha')(1 + \beta')(\gamma + \gamma') \equiv 0.$$

Les systèmes $(\alpha, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ solutions de ces équations sont :

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{a} = (0,0,1,0,0), & \mathbf{b} = (1,0,1,0,0), & \mathbf{c} = (1,1,1,0,0), \\
\mathbf{d} = (0,0,0,0,1), & \mathbf{e} = (0,1,0,0,1), & \mathbf{f} = (1,1,0,0,1), \\
\mathbf{g} = (0,1,0,1,1), & \mathbf{h} = (1,0,0,1,1), & \mathbf{i} = (1,1,0,1,1), \\
\mathbf{j} = (0,1,1,0,1), & \mathbf{k} = (1,0,1,0,1), & \mathbf{l} = (1,1,1,0,1), \\
\mathbf{m} = (0,0,1,1,0), & \mathbf{n} = (0,1,1,1,0), & \mathbf{p} = (1,0,1,1,0), \\
\mathbf{q} = (0,0,1,1,1), & \mathbf{r} = (0,1,1,1,1), & \mathbf{s} = (1,1,1,1,1).
\end{array}$$

Par la même méthode que dans le cas précédent, on trouve que les types isomorphes au type **a** sont les types **a**, **b**, **d**, **p**, **q**, **n**, **c**, **h**, **m**, **k**, que les types isomorphes au type **e** sont les types **e**, **s**, que les types isomorphes au type **f** sont les types **f**, **g**, **r**, **l**, que les types isomorphes au type **i** sont les types **i**, **j**. Il y a donc quatre types distincts lorsque G a huit e_2 et seulement huit formant un complexe élément du cogrédient; les équations qui les distinguent sont :

$$e^2 = b, \quad f^2 = a; \qquad e^2 = cb, \quad f^2 = c; \qquad e^2 = cba, \quad f^2 = c; \qquad e^2 = cba, \quad f^2 = cb.$$

Considérons ensuite le cas où il y a des e_2 dans plus d'un complexe élément du cogrédient. Les équations étant ramenées à la forme toujours possible

$$d^2 = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad e^2 = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad f^2 = a, \qquad e^{-1}de = da, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ec,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

il existe, par hypothèse, un système x, y, z, x', y', z', tel que l'on ait $(f^z e^y d^x)^2 = (f^{z'} e^{y'} d^{x'})^2 = 1$ et qu'un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$ soit $\not\equiv 0$. Je dis que l'on a nécessairement $xy' + yx' \equiv 1$. Si, en effet, on a $xy' + yx' \equiv 0$, donc $x' \equiv x$, $y' \equiv y$, il faut nécessairement $z + z' \equiv 1$; on aura donc $(fe^y d^x)^2 \equiv (e^y d^x)^2 \equiv 1$; d'où, en annulant l'exposant de a, l'égalité impossible

$$\alpha x + \alpha' y + 1 + xy \equiv \alpha x + \alpha' y + xy \equiv 0.$$

On peut donc faire le changement de générateurs

$$d_1 = f^z e^y d^x, \qquad e_1 = f^{z'} e^{y'} d^{x'}, \qquad f_1 = f,$$

qui donne aux équations de G la forme

$$d^2 = e^2 = 1, \qquad f^2 = a, \qquad e^{-1} de = dc^\gamma b^\mu a, \qquad f^{-1} df = dc^\gamma b^x, \quad f^{-1} ef = ec^{\gamma'} b^{x'}.$$

En prenant $c^\gamma b^\mu a$ pour a, $c^\gamma b^x$ pour b, $c^{\gamma'} b^{x'}$ pour c, on ramène les équations à la forme

$$d^2 = e^2 = 1, \qquad f^2 = c^\gamma b^\beta a, \qquad e^{-1} de = da, \qquad f^{-1} df = db, \qquad f^{-1} ef = ec.$$

Considérons d'abord le cas où il n'y a d'e_2 que dans deux complexes éléments du cogrédient. Comme la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que, pour tout système (x, y, z) où z est $\equiv 1$, on ait

$$A_p + B_p + C_p + A_p B_p + A_p C_p + B_p C_p + A_p B_p C_p \equiv 1,$$

ce qui donne la seule condition $\beta\gamma \equiv 0$, les systèmes (β, γ) qui conviennent sont

$$\mathbf{a} = (0, 0), \qquad \mathbf{b} = (0, 1), \qquad \mathbf{c} = (1, 0).$$

Or, si sur le type **a** on fait les changements de générateurs $d_1 = d$, $e_1 = e$, $f_1 = fe$, fd on obtient les types **b**, **c**. Dans ce cas, G n'a donc qu'un type :

$$d^2 = e^2 = 1, \qquad f^2 = a.$$

Dans le cas où les e_2 appartiennent à plus de deux complexes distincts du cogrédient, on peut les prendre pour générateurs, il n'y a donc alors qu'un type :

$$d^2 = e^2 = f^2 = 1.$$

Le commutant est d'ordre p^2.

Le commutant n'étant pas cyclique, on peut réduire les trois dernières équations de G à la forme

$$e^{-1} de = db^\mu a^\lambda, \qquad f^{-1} df = da, \qquad f^{-1} ef = eb,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

puis, en prenant $f^{-\lambda}e$ pour e, $f^{\mu}d$ pour d, à la forme

$$e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = da, \qquad f^{-1}ef = eb.$$

Si alors on avait $\gamma \equiv \gamma' \equiv \gamma'' \equiv 0$, G serait produit direct de $\{c\}$ par un g_{p^5} de figure (11) (111). Supposons donc que l'on n'ait pas $\gamma \equiv \gamma' \equiv \gamma'' \equiv 0$.

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme réduite d'équations doit vérifier

$$z \equiv z' \equiv 0, \quad \xi \equiv xz'', \quad \eta \equiv yz'', \quad \zeta \equiv 0, \quad \xi' \equiv x'z'', \quad \eta' \equiv y'z'', \quad \zeta' \equiv 0, \quad z''\zeta''(xy' - yx') \not\equiv 0,$$

et opère sur les α, β, ... une transformation définie par

$$\begin{aligned}
z''(\alpha_1 x + \beta_1 x') + \gamma_1 \xi'' &\equiv \alpha x + \alpha' y, & z''(\alpha'_1 x + \beta'_1 x') + \gamma'_1 \xi'' &\equiv \alpha x' + \alpha' y',\\
z''(\alpha_1 y + \beta_1 y') + \gamma_1 \eta'' &\equiv \beta x + \beta' y, & z''(\alpha'_1 y + \beta'_1 y') + \gamma'_1 \eta'' &\equiv \beta x' + \beta' y',\\
\gamma_1 \zeta'' &\equiv \gamma x + \gamma' y, & \gamma'_1 \zeta'' &\equiv \gamma x' + \gamma' y',\\
z''(\alpha''_1 x + \beta''_1 x') + \gamma''_1 \xi'' &\equiv \alpha x'' + \alpha' y'' + \alpha'' z'' + \varepsilon x'' z'',\\
z''(\alpha''_1 y + \beta''_1 y') + \gamma''_1 \eta'' &\equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \varepsilon y'' z'',\\
\gamma''_1 \zeta'' &\equiv \gamma x'' + \gamma' y'' + \gamma'' z''.
\end{aligned}$$

Si l'on a $\gamma \equiv \gamma' \equiv 0$, donc $\gamma_1 \equiv \gamma'_1 \equiv 0$, $\gamma''\gamma''_1 \not\equiv 0$, on peut faire $\gamma''_1 = 1$. Si γ ou γ' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\gamma_1 = 0$, $\gamma'_1 = 1$, $\gamma''_1 = 0$.

Soit donc d'abord $\gamma_1 = \gamma = \gamma'_1 = \gamma' = 0$, $\gamma''_1 = \gamma'' = 1$, donc $\zeta'' \equiv z''$. On peut toujours déterminer ξ'' et η'' de manière à faire $\alpha''_1 = \beta''_1 = 0$; et en supposant $\alpha'' = \beta'' = 0$, donc $\xi'' \equiv \varepsilon x'' z''$, $\eta'' \equiv \varepsilon y'' z''$, il reste

$$\begin{aligned}
z''(\alpha_1 x + \beta_1 x') &\equiv \alpha x + \alpha' y, & z''(\alpha'_1 x + \beta'_1 x') &\equiv \alpha x' + \alpha' y',\\
z''(\alpha_1 y + \beta_1 y') &\equiv \beta x + \beta' y, & z''(\alpha'_1 y + \beta'_1 y') &\equiv \beta x' + \beta' y'.
\end{aligned}$$

La discussion de ces formules, qui a été effectuée [1] dans la recherche des g_{p^5} de figure (11) (111), conduit pour $p > 2$ aux $p + 5$ types distincts, pour lesquels les exposants α, β, α', β' ont, par exemple, les valeurs suivantes :

α	0	0	0	1	1	0	i^m	0	
β	0	0	0	0	0	1	0	1	
α'	0	1	0	0	1	N	0	$\frac{1}{4}(i^{2m-1} - 1)$	$\left(m = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$
β'	0	0	-1	1	1	0	1	-1,	

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et, pour $p = 2$, aux cinq types

$$\begin{array}{lccccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha' & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta' & 0 & 1 & 0 & 1 & 1. \end{array}$$

Soit maintenant $\gamma_1 = \gamma = 0$, $\gamma'_1 = \gamma' = 1$, $\gamma''_1 = \gamma'' = 0$, donc $y \equiv y'' \equiv 0$, $\zeta'' \equiv y'$. On peut toujours déterminer ξ'' et η'' de manière à faire $\alpha'_1 = \beta'_1 = 0$. Soit $\alpha'_1 = \alpha' = \beta'_1 = \beta' = 0$, donc $\xi'' \equiv \eta'' \equiv 0$, il reste

$$\begin{array}{ll} z''(\alpha_1 x + \beta_1 x') \equiv \alpha x & \beta_1 y' z'' \equiv \beta x, \\ z''(\alpha''_1 x + \beta''_1 x') \equiv \alpha x'' + \alpha'' z'' + \varepsilon x'' z'', & \beta''_1 y' z'' \equiv \beta x'' + \beta'' z''. \end{array}$$

On voit alors aisément que les types distincts de G sont

$$\begin{array}{lllll} \beta = 0, & \alpha = 0, & \beta'' = 0, & \alpha'' = 0, 1, & p > 2, \\ \beta = 0, & \alpha = 0, & \beta'' = 0, & \alpha'' = 0, & p = 2, \\ \beta = 0, & \alpha = 1, & \beta'' = 0, 1, & \alpha'' = 0, & p > 2, \\ \beta = 0, & \alpha = 1, & \beta'' = 0, 1, & \alpha'' = 0, 1, & p = 2, \\ \beta = 1, & \alpha = 0, & \beta'' = 0, & \alpha'' = 0, 1, & p \geqq 2. \end{array}$$

23. Cherchons s'il existe des g_{p^6} de figure $(111)(111)$ dont tous les $g_{p^{m-2}}$ soient abéliens. Si le commutant est d'ordre p^3, le déterminant des exposants des générateurs de D′ est $\begin{vmatrix} A_p & A'_p & xy' - yx' \\ B_p & B'_p & xz' - zx' \\ C_p & C'_p & yz' - zy' \end{vmatrix}$ ou, en posant : $xy' - yx' = \xi$, $xz' - zx' = \eta$, $yz' - zy' = \zeta$,

$$\begin{aligned} &(\beta\gamma' - \gamma\beta')\xi^2 + (\gamma\alpha'' - \alpha\gamma'')\eta^2 + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')\zeta^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma' + \beta\gamma'' - \gamma\beta'')\xi\eta \\ &\quad + (\alpha\beta' - \beta\alpha' + \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')\xi\zeta + (\alpha\beta'' - \beta\alpha'' + \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')\eta\zeta \\ &\quad + \varepsilon(xx'\zeta + yy'\eta + zz'\xi). \end{aligned}$$

Si p est > 2, il existe des valeurs de ξ, η, ζ non toutes $\equiv 0$ et rendant le déterminant $\equiv 0$. En prenant x, y, z tels que l'on ait

$$\zeta x - \eta y + \xi z \equiv 0,$$

puis x', y', z', tels que l'on ait

$$xy' - yx' \equiv \xi, \qquad xz' - zx' \equiv \eta, \qquad yz' - zy' \equiv \zeta,$$

on a D′ $<$ A. Aucun g_{p^5} n'étant abélien, il en résulte que *tout* g_{p^6} $(p > 2)$ *de figure* $(111)(111)$ *à commutant d'ordre* p^3 *à des* g_{p^4} *non abéliens.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si $p = 2$, écrivons le déterminant

$$K\xi + K'\eta + K''\zeta + L\xi\eta + L'\xi\zeta + L''\eta\zeta + xx'\zeta + yy'\eta + zz'\xi;$$

en remplaçant ξ par $\eta + \zeta$, la partie formée par les six premiers termes devient

$$\eta(K + K' + L) + \zeta(K + K'' + L') + \eta\zeta(L + L' + L''),$$

et l'on vérifie directement, en parcourant successivement les types distincts de g_{2^6} de figure (111)(111) à commutant d'ordre p^3, que cette forme quadratique n'est jamais irréductible. Si donc on prend ξ, η, ζ solutions non toutes $\equiv 0$ de

$$K\xi + K'\eta + K''\zeta + L\xi\eta + L'\xi\zeta + L''\eta\zeta \equiv \xi + \eta + \zeta \equiv 0,$$

puis $x = y = z = 1$, puis x', y', z' solutions de

$$x' + y' \equiv \xi, \qquad x' + z' \equiv \eta, \qquad y' + z' \equiv \zeta, \qquad \text{d'où} \qquad x'\zeta + y'\eta + z'\xi \equiv 1,$$

on voit que le déterminant sera $\equiv 0$. Dans le g_{2^5} correspondant à cette détermination du système x, y, z, x', y', z' on aura donc $D' < A$. Ainsi, *dans tout g_{2^6} de figure* (111) (111) *à commutant d'ordre p^3, il y a des g_{2^4} non abéliens.*

Supposons maintenant le commutant d'ordre p^2, le déterminant des exposants des générateurs de D' est

$$\begin{vmatrix} \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \varepsilon xz & \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' + \varepsilon x'z & xz' - zx' \\ \beta x + \beta' y + \beta'' z + \varepsilon yz & \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' + \varepsilon y'z & yz' - zy' \\ \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z & \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' & 0 \end{vmatrix}.$$

On sait (13, 14) que $G' = \{A, g, g'\}$ supposé non abélien a tous ses diviseurs abéliens toujours et seulement si ce déterminant est $\not\equiv 0$. Si l'on n'a pas $\gamma \equiv \gamma' \equiv 0$, $\gamma'' \not\equiv 0$, on peut prendre

$$\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \equiv \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \equiv 0, \qquad xz' - zx' \qquad \text{ou} \qquad yz' - zy' = 0,$$

alors le déterminant est $\equiv 0$ et G' non abélien à des $g_{p^{m-2}}$ non abéliens. Supposons donc $\gamma \equiv \gamma' \equiv 0$, $\gamma''' \not\equiv 0$, c'est-à-dire considérons seulement les types où l'on a $\gamma = \gamma' = 0$, $\gamma'' = 1$, le déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} \alpha x + \alpha' y + \varepsilon xz & \alpha x' + \alpha' y' + \varepsilon x'z' & xz' - zx' \\ \beta x + \beta' y + \varepsilon yz & \beta x' + \beta' y' + \varepsilon y'z' & yz' - zy' \\ z & z' & 0 \end{vmatrix}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

ou en développant mod$p$

$$\beta(xz'-zx')^2+(\beta'-\alpha)(xz'-zx')(yz'-zy')-\alpha'(yz'-zy')^2.$$

Ainsi, pour que tout $g_{p^{m-1}}$ G′ non abélien ait tous ses diviseurs abéliens, il faut et il suffit que la forme quadratique ci-dessus soit irréductible, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{array}{lll} (\beta'-\alpha)^2+4\alpha'\beta & \text{non carré} & \text{pour } p>2, \\ \beta=\alpha'=\alpha+\beta'=1, & & \text{pour } p=2. \end{array}$$

Les g_{p^6} de figure (111) (111) *à commutant d'ordre p^2 ayant tous leurs g_{p^4} abéliens sont donc donnés par*

$$\alpha=0,\qquad \beta=1,\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha'=\mathrm{N}, & \beta'=0, & \\ \alpha'=\frac{1}{4}(i^{2m-1}-1), & \beta'=-1, & \left(m=1,\ \ldots,\ \frac{1-p}{2}\right) \end{array}\right\}\ \text{pour } p>2,$$

$$\alpha=0,\qquad \beta=\alpha'=\beta'=1,\qquad \text{pour } p=2.$$

Figure (rs)(22).

24. En tenant compte des conditions d'automorphisme, les équations de G auront la forme

$$a^{p^r}=b^{p^s}=1,\qquad c^{p^2}=b^{\beta}a^{\alpha},\qquad d^{p^2}=b^{\beta'}a^{\alpha'},\qquad d^{-1}cd=c\,b^{\mu p^{s-2}}a^{\lambda p^{r-2}}.$$

La condition de figure est que λ ou μ soit $\not\equiv 0$. Si l'on pose

$$g=d^{y}c^{x},\qquad g'=d^{y'}c^{x'},$$

on trouve aisément

$$g'g=d^{y'+y}c^{x'+x}(b^{\mu p^{s-2}}a^{\lambda p^{r-2}})^{x'y},\qquad g^{-1}g'^{-1}gg'=(b^{\mu p^{s-2}}a^{\lambda p^{r-2}})^{xy'-yx'},$$

$$g^{z}=d^{zy}c^{zx}(b^{\mu p^{s-2}}a^{\lambda p^{r-2}})^{xy\binom{z}{2}},\qquad g^{p^2}=b^{\mathrm{B}_p}a^{\mathrm{A}_p}$$

avec

$$\mathrm{A}_p=\alpha x+\alpha' y+\varepsilon\lambda xy\,p^{r-1},\qquad \mathrm{B}_p=\beta x+\beta' y+\varepsilon\mu xy\,p^{s-1}.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1=b^{\eta}a^{\xi},\qquad b_1=b^{\eta'}a^{\xi'p^{r-s}},\qquad c_1=d^{y}c^{x}b^{k}a^{h},\qquad d_1=d^{y'}c^{x'}b^{k'}a^{h'},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

avec les conditions

$$(\xi\eta' - \eta\xi' p^{r-s})(xy' - yx') \not\equiv 0$$

et opère sur les exposants des équations de G une transformation définie par

$$\begin{array}{lll}
(1) & \lambda_1\xi + \mu_1\xi' - \lambda(xy' - yx') \equiv \lambda_1\eta p^{r-s} + \mu_1\eta' - \mu(xy' - yx') \equiv 0 & \bmod p^2, \\
(2) & \alpha_1\xi + \beta_1\xi' p^{r-s} - A_p - p^2 h \equiv \alpha'_1\xi + \beta'_1\xi' p^{r-s} - A'_p - p^2 h' \equiv 0 & \bmod p^r, \\
(3) & \alpha_1\eta + \beta_1\eta' \quad - B_p - p^2 k \equiv \alpha'_1\eta + \beta'_1\eta' \quad - B'_p - p^2 k' \equiv 0 & \bmod p^s.
\end{array}$$

Les formules (1) montrent qu'il faut distinguer les trois cas

$$r - 1 > s, \qquad r - 1 = s, \qquad r = s.$$

Supposons d'abord $r - 1 > s$. On a $\mu_1 \equiv 0$ toujours et seulement si μ est $\equiv 0$. Supposons $\mu = p\mu'$, donc (condition de figure) $\lambda \not\equiv 0$. En prenant a^λ pour a, on peut faire $\lambda = 1$; et en faisant $\lambda_1 = \lambda = 1$ dans les formules (1), il vient

$$\begin{gathered}
\xi + p\mu'_1\xi' \equiv xy' - yx' \qquad \bmod p^2, \\
\mu'_1\eta' \equiv \mu'(xy' - yx').
\end{gathered}$$

On a donc $\mu'_1 \equiv 0$ toujours et seulement si μ' est $\equiv 0$; si μ' est $\not\equiv 0$ on peut faire $\mu'_1 = 1$, donc $\mu_1 = p$. Supposons $\mu \not\equiv 0$, en prenant $b^\mu a^{\lambda p^{r-s}}$ pour a, on peut faire $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Ainsi on peut toujours ramener λ, μ à l'un des trois systèmes irréductibles l'un à l'autre

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 0, p; \qquad \lambda = 0, \qquad \mu = 1.$$

Supposons maintenant $r - 1 = s$. Comme précédemment, si μ est $\equiv 0$ on peut supposer $\lambda = 1$, et en faisant $\lambda_1 = \lambda = 1$, $\mu = p\mu'$, $\mu_1 = p\mu'_1$, les formules (1) deviennent

$$\begin{gathered}
\xi + p\mu'_1\xi' \equiv xy' - yx' \qquad \bmod p^2, \\
\eta + \mu'_1\eta' \equiv \mu'(xy' - yx'),
\end{gathered}$$

et permettent toujours de faire $\mu'_1 = 0$. Si μ est $\not\equiv 0$ on peut encore supposer $\mu = 1$, $\lambda = 0$. Dans ce cas il n'y a donc que les deux systèmes irréductibles

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 0; \qquad \lambda = 0, \qquad \mu = 1.$$

Supposons enfin $r = s$; on peut toujours prendre $b^\mu a^\lambda$ pour b, donc supposer $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

On a vu que G a tous ses $g_{p^{m-2}}$ abéliens toujours et seulement si l'on a

$$A = \{ c^{p^2}, d^{p^2}, (c^{-1}d^{-1}cd)^p \},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

c'est-à-dire si un déterminant au moins de

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \lambda p^{r-1} \\ \beta & \beta' & \mu p^{s-1} \end{vmatrix}$$

est $\not\equiv 0$, c'est-à-dire si $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ est $\not\equiv 0$. Je ne déterminerai que les types pour lesquels cette condition est remplie.

Soit donc $\lambda_1 = \lambda$, $\mu_1 = \mu$, λ et μ ayant l'un des systèmes de valeurs trouvés plus haut; on peut toujours, en prenant

$$x = \alpha', \qquad y = -\alpha, \qquad \xi' = 0, \qquad \xi - (xy' - yx') \equiv \lambda\eta p^{r-s} + \mu[\eta' - (xy' - yx')] \equiv 0 \qquad \bmod p^2$$

et choisissant convenablement h et h', faire dans les formules (2) $\alpha_1 = 0$, $\alpha'_1 = 1$. Soit donc $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\alpha'_1 = \alpha' = 1$, donc $\beta \not\equiv 0$; les formules (1), (2), (3) deviennent

$$\begin{array}{lll}
(1) & \lambda[\xi - (xy' - yx')] + \mu\xi' \equiv \lambda\eta p^{r-s} + \mu[\eta' - (xy' - yx') & \equiv 0 \quad \bmod p^2, \\
(2) & \beta_1\xi' p^{r-s} - (y + \varepsilon\lambda xy p^{r-1} + p^2 h) \equiv \xi + \beta'_1\xi' - (y' + \varepsilon\lambda x'y' p^{r-1} + p^2 h') & \equiv 0 \quad \bmod p^r, \\
(3) & \beta_1\eta' - B_p - p^2 k \equiv \eta + \beta'_1\eta' - B'_p - p^2 k' & \equiv 0 \quad \bmod p^s.
\end{array}$$

Séparons alors les différents cas.

1° $r - 1 > s$.

Si l'on prend $\lambda = 1$, $\mu = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{r}
\xi - (xy' - yx') \equiv 0 \\
y \equiv \xi + \beta'_1\xi' - y \equiv 0 \\
\beta_1\eta' - (\beta x + \beta' y) \equiv \eta + \beta'_1\eta' - (\beta x' + \beta' y') \equiv 0
\end{array}\right\} \bmod p^2.$$

On peut donc, en prenant $x' = y = 0$, $\xi = x = y' = 1$, $\eta' = \beta$, $\eta = \beta'$ et choisissant convenablement h, h', k, k', faire $\beta_1 = 1$, $\beta'_1 = 0$; d'où un seul type

$$c^{p^2} = b, \qquad d^{p^2} = a, \qquad d^{-1}cd = ca^{p^{r-2}}.$$

Si l'on prend $\lambda = 1$, $\mu = p$, on a

$$\left.\begin{array}{r}
\xi - (xy' - yx') + p\xi' \equiv p[\eta' - (xy' - yx')] \equiv 0 \\
y \equiv \xi + \beta'_1\xi' - y' \equiv 0 \\
\beta_1\eta' - (\beta x + \beta' y) \equiv \eta + \beta'_1\eta' - (\beta x' + \beta' y') \equiv 0
\end{array}\right\} \bmod p^2.$$

On peut, au moyen de h, h', k, k', faire $\beta_1 = 1$, $\beta'_1 = 0$ en prenant

$$\xi' = x' = y = 0, \qquad x = 1, \qquad \xi = \eta' = y' = \beta, \qquad \eta = \beta\beta',$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

d'où un seul type

$$c^{p^2} = b, \qquad d^{p^2} = a, \qquad d^{-1}cd = cb^{p^{s-1}}a^{p^{r-2}}.$$

Si l'on prend $\lambda = 0$, $\mu = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{rl} \xi' \equiv \eta' - (xy' - yx') & \equiv 0 \\ y \equiv \xi - y' & \equiv 0 \\ \beta_1\eta' - \beta x \equiv \eta + \beta'_1\eta' - (\beta x' + \beta' y') & \equiv 0 + \varepsilon x' y' p^{s-1} \end{array}\right\} \mod p^2.$$

On peut, au moyen de h, h', k, k', faire $\beta_1 = 1$, $\beta'_1 = 0$ en prenant

$$\xi' = x' = 0, \qquad x = 1, \qquad \xi = \eta' = y' = \beta, \qquad \eta = \beta\beta',$$

d'où un seul type

$$c^{p^2} = b, \qquad d^{p^2} = a, \qquad d^{-1}cd = cb^{p^{s-2}}.$$

2° $r - 1 = s$.

Si l'on prend $\lambda = 1$, $\mu = 0$, on a

$$\left.\begin{array}{rl} \xi - (xy' - yx') \equiv p\eta & \equiv 0 \\ \beta_1\xi' p - y \equiv \xi + \beta'_1\xi' - y' & \equiv 0 \\ \beta_1\eta' - (\beta x + \beta' y) \equiv \eta + \beta'_1\eta' - (\beta x' + \beta' y') & \equiv 0 \end{array}\right\} \mod p^2.$$

En prenant

$$\eta = \xi' = y = 0, \qquad \xi = x = y' = 1, \qquad \eta' = \beta, \qquad x' = \beta'\beta^{-1}$$

et choisissant convenablement h, h', k, k', on peut faire $\beta_1 = 1$, $\beta'_1 = 0$.

Si l'on prend $\lambda = 0$, $\mu = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{rl} \xi' \equiv \eta' - (xy' - yx') & \equiv 0 \\ y \equiv \xi + \beta'_1\xi' - y' & \equiv 0 \\ \beta_1\eta' - \beta x \equiv \eta + \beta'_1\eta' - (\beta x' + \beta' y' + \varepsilon x' y' p^{s-1}) & \equiv 0 \end{array}\right\} \mod p^2.$$

En prenant

$$\xi' = x' = y = 0, \qquad x = 1, \qquad \xi = \eta' = y' = \beta, \qquad \eta = \beta\beta',$$

et choisissant convenablement h, h', k, k', on peut faire $\beta_1 = 1$, $\beta'_1 = 0$. On a donc les premier et troisième types du cas $r - 1 > s$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

$$3^\circ \quad r = s. \qquad (\lambda = 0,\ \mu = 1).$$

On tire des formules (1), (2), (3)

$$\begin{aligned} \xi' &\equiv \eta' - (xy' - yx') \equiv 0, \\ y &\equiv \qquad\qquad \xi - y' \equiv 0, \\ \beta_1 \eta' - \beta x &\equiv \eta + \beta'_1 \eta' - (\beta x' + \beta' y' + \varepsilon x' y' p^{s-1}), \end{aligned}$$

en prenant

$$\xi' = x' = y = 0, \qquad x = 1, \qquad \xi = \eta' = y' = \beta, \qquad \eta = \beta\beta'$$

et choisissant convenablement h, h', k, k', on peut faire $\beta_1 = 1$, $\beta'_1 = 0$. On a donc un seul type, le troisième du cas $r - 1 > s$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

DEUXIÈME PARTIE.

DÉTERMINATION COMPLÈTE DES GROUPES D'ORDRE p^6.

Figure (111)(1)(11).

25. D'après les types connus de figure (1)(11), G aura des équations de la forme

$$a^p = b^p = c^p = 1, \qquad d^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad e^p = d^\delta c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad f^p = d^{\delta'} c^{\gamma''} b^{\beta''} a^{\alpha''},$$
$$e^{-1} de = dc^\nu b^\mu a^\lambda, \qquad f^{-1} df = dc^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}, \qquad f^{-1} ef = ed$$

et l'on a $\delta = 0$, $\delta' = 0, 1$ pour $p > 2$, $\delta = \delta' = 0$, ou $\delta = \delta' = 1$ pour $p = 2$. Les conditions d'ordre donnent

$$\alpha + \varepsilon\lambda - \delta\lambda' \equiv \beta + \varepsilon\mu - \delta\mu' \equiv \gamma + \varepsilon\nu - \delta\nu'$$
$$\equiv \alpha + \varepsilon\lambda' + \delta'\lambda \equiv \beta + \varepsilon\mu' + \delta'\mu \equiv \gamma + \varepsilon\nu' + \delta'\nu \equiv \delta'\lambda' \equiv \delta'\mu' \equiv \delta'\nu' \equiv 0$$

et la condition de figure est que l'on n'ait pas $\lambda \equiv \mu \equiv \nu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv \nu' \equiv 0$. Si l'on a $\delta = \delta' = 0$, les conditions deviennent

$$\alpha \equiv \varepsilon\lambda \equiv \varepsilon\lambda', \qquad \beta \equiv \varepsilon\mu \equiv \varepsilon\mu', \qquad \gamma \equiv \varepsilon\nu \equiv \varepsilon\nu'.$$

Si l'on a $p > 2$, $\delta = 0$, $\delta' = 1$, les conditions deviennent

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv \lambda \equiv \mu \equiv \nu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv \nu' \equiv 0$$

et la condition de figure n'est pas vérifiée. Si l'on a $p = 2$, $\delta = \delta' = 1$, les conditions deviennent

$$\alpha \equiv \lambda, \qquad \beta \equiv \mu, \qquad \gamma \equiv \nu, \qquad \lambda' \equiv \mu' \equiv \nu' \equiv 0;$$

On peut donc écrire toujours les équations de G

$$d^p = c^{\varepsilon\nu} b^{\varepsilon\mu} a^{\varepsilon\lambda}, \qquad e^p = d^{\varepsilon\delta} c^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad f^p = d^{\varepsilon\delta'} c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'},$$
$$e^{-1} de = dc^\nu b^\mu a^\lambda, \qquad f^{-1} df = dc^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}, \qquad f^{-1} ef = ed,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et l'on en tire $f^{z'}e^{y'}d^{x'}f^{z}e^{y}d^{x}=f^{Z'}e^{Y'}d^{X'}c^{L'}b^{K'}a^{H'}$ avec

$$\begin{aligned}
&Z'=z'+z, \qquad Y'=y'+y, \qquad X'=y'z+x'+x,\\
&L'=\nu\left[y(y'z+x')+z\binom{y'}{2}\right]+\nu'\left[x'z+y'\binom{z}{2}\right],\\
&K'=\mu\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+\mu'\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\right],\\
&H'=\lambda\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+\lambda'\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\right],
\end{aligned}$$

et $(f^{z}e^{y}d^{x})^{-1}(f^{z'}e^{y'}d^{x'})^{-1}f^{z}e^{y}d^{x}f^{z'}e^{y'}d^{x'}=d^{yz'-zy'}c^{L''}b^{K''}a^{H''}$, le commutant $\{a, b, c, d\}$ étant abélien, H'' ... s'obtiennent en retranchant H' ... des expressions obtenues en y permutant les lettres accentuées et non accentuées de même nom; puis en posant $(f^{z}e^{y}d^{x})^{u}=f^{Z_u}e^{Y_u}d^{X_u}c^{L_u}b^{K_u}a^{H_u}$, on trouve par récurrence

$$\begin{aligned}
&Z_u=uz, \qquad Y_u=uy, \qquad X_u=ux+yz\Sigma_1^{u-1}t,\\
&L_u=\nu\left[xy\Sigma_1^{u-1}t+y^2z\Sigma_1^{u-1}\Sigma_1^{t}t+x\Sigma_1^{u-1}\binom{ty}{2}\right]+\nu'\left[\left[yz+y\binom{z}{2}\Sigma_1^{u-1}t+yz^2\Sigma_1^{u-1}\Sigma_1^{t}t\right]\right],\\
&K_u=\mu\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+\mu'\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right],\\
&H_u=\lambda\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+\lambda'\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right];
\end{aligned}$$

d'où, pour $u=p$, $(f^{z}e^{y}d^{x})^{p}=d^{\varepsilon(yz+\delta y+\delta z)}c^{C_p}b^{B_p}a^{A_p}$

$$\begin{aligned}
C_p&=\gamma y+\gamma' z+\varepsilon' yz(-\nu y+\nu' z)+\varepsilon\nu\,[x(1+y)+yz]+\varepsilon\nu' xz,\\
B_p&=\beta y+\beta' z+\varepsilon' yz(-\mu y+\mu' z)+\varepsilon\mu[\ldots\ldots\ldots\ldots]+\varepsilon\mu' xz,\\
A_p&=\alpha y+\alpha' z+\varepsilon' yz(-\lambda y+\lambda' z)+\varepsilon\lambda\,[\ldots\ldots\ldots\ldots]+\varepsilon\lambda' xz,
\end{aligned}$$

en supposant $x, y, z<p$.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G, qui est

$$\begin{aligned}
&a_1=c^{\zeta}b^{\eta}a^{\xi}, \qquad b_1=c^{\zeta'}b^{\eta'}a^{\xi'}, \qquad c_1=c^{\zeta''}b^{\eta''}a^{\xi''},\\
&d_1=d^{\theta}c^{t}b^{s}a^{r}, \qquad e_1=f^{z}e^{y}d^{x}c^{l}b^{k}a^{h}, \qquad f_1=f^{z'}e^{y'}d^{x'}c^{l'}b^{k'}a^{h'},
\end{aligned}$$

avec $0\not\equiv\theta(xy'-zy')\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi' & \eta' & \zeta'\\ \xi'' & \eta'' & \zeta''\end{vmatrix}$ et où l'on suppose $x, y, z, x', y', z'<p$, doit vérifier en général (j, j', j_1 étant des entiers arbitraires $<p$),

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(yz+\delta y+\delta' z)=\varepsilon(\delta+2j), \qquad \varepsilon(y'z'+\delta y'+\delta' z')=\varepsilon(\delta'+2j'), \qquad \theta=yz'-zy'+pj_1\\
&t+\varepsilon\nu j_1\equiv L'', \qquad s+\varepsilon\mu j_1\equiv K'', \qquad r+\varepsilon\lambda j_1\equiv H''.
\end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

PREMIER CAS. — p IMPAIR.

La transformation des exposants des équations de G résultant du changement de générateurs précédent est définie par

$$(1)\quad \begin{cases} \xi\lambda_1 + \xi'\mu_1 + \xi''\nu_1 \equiv \theta(\lambda y + \lambda' z), \\ \eta\lambda_1 + \eta'\mu_1 + \eta''\nu_1 \equiv \theta(\mu y + \mu' z), \\ \zeta\lambda_1 + \zeta'\mu_1 + \zeta''\nu_1 \equiv \theta(\nu y + \nu' z); \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} \xi\lambda'_1 + \xi'\mu'_1 + \xi''\nu'_1 \equiv \theta(\lambda y' + \lambda' z'), \\ \eta\lambda'_1 + \eta'\mu'_1 + \eta''\nu'_1 \equiv \theta(\mu y' + \mu' z'), \\ \zeta\lambda'_1 + \zeta'\mu'_1 + \zeta''\nu'_1 \equiv \theta(\nu y' + \nu' z'); \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 + \xi''\gamma_1 \equiv A_p, \\ \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 + \eta''\gamma_1 \equiv B_p, \\ \zeta\alpha_1 + \zeta'\beta_1 + \zeta''\gamma_1 \equiv C_p; \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 + \xi''\gamma'_1 \equiv A'_p, \\ \eta\alpha'_1 + \eta'\beta'_1 + \eta''\gamma'_1 \equiv B'_p, \\ \zeta\alpha'_1 + \zeta'\beta'_1 + \zeta''\gamma'_1 \equiv C'_p. \end{cases}$$

A'_p, B'_p, C'_p désignant ce que deviennent A_p, B_p, C_p quand on y accentue x, y, z.

Remarquons que $C' = \{c^\nu b^\mu a^\lambda, c^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}\}$, plus grand commun diviseur du commutant et du central, est caractéristique dans G et, à cause de la condition de figure, d'ordre $\geqq p$. Il y aura deux cas à considérer suivant que C' est cyclique ou non.

1° C' *cyclique*.

En prenant f non permutable à d et $c^{\nu'} b^{\mu'} a^{\lambda'}$ pour b, on aura

$$e^{-1}de = db^\mu, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ed;$$

d'où, en prenant $f^{-\mu}e$ pour e,

$$e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ed,$$

et tout changement de générateurs conservant ces équations doit vérifier, en plus des conditions générales, les conditions suivantes, tirées des formules (1) et (2),

$$z \equiv \xi' \equiv \zeta' \equiv 0 \qquad \theta \equiv yz' \qquad \eta' \equiv yz'^2;$$

les formules (3) et (4) deviennent

$$\begin{aligned} &\xi\alpha_1 + \xi''\gamma_1 \equiv \alpha y, && \xi\alpha'_1 + \xi''\gamma'_1 \equiv \alpha y' + \alpha' z', \\ &\eta\alpha_1 + yz'^2\beta_1 + \eta''\gamma_1 \equiv \beta y, && \eta\alpha'_1 + yz'^2\beta'_1 + \eta''\gamma'_1 \equiv \beta y' + \beta' z' + \varepsilon' y', \\ &\zeta\alpha_1 + \zeta''\gamma_1 \equiv \gamma y, && \zeta\alpha'_1 + \zeta''\gamma'_1 \equiv \gamma y' + \gamma' z', \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et l'on voit aisément que les types de G correspondent à

$$p>3\left\{\begin{array}{l}\alpha=\gamma=\beta=0,\quad \alpha'=\gamma'=0,\quad \beta'=0,1;\quad \alpha=\gamma=\beta=0,\quad \alpha'=0,\quad \gamma'=1,\quad \beta'=0;\\ \alpha=\gamma=0,\quad \beta=1,N,\quad \alpha'=\gamma'=0,\quad \beta'=0;\\ \alpha=0,\quad \gamma=1,\quad \beta=0,\quad \alpha'=\gamma'=0,\quad \beta'=0,1;\\ \alpha=0,\quad \gamma=1,\quad \beta=0,\quad \alpha'=1\quad \gamma'=\beta'=0.\end{array}\right.$$

$$p=3\left\{\begin{array}{l}\alpha=\gamma=\beta=0,\quad \alpha'=0,\quad \gamma'=0,1,\quad \beta'=0;\quad \alpha=\gamma=\alpha'=\gamma'=\beta'=0,\quad \beta=1;\\ \alpha=\gamma=\alpha'=\gamma'=0,\quad \beta=-1,\quad \beta'=0,1;\\ \alpha=\gamma=0,\quad \beta=1,N,\quad \alpha'=1,\quad \gamma'=\beta'=0;\quad \alpha=0,\quad \gamma=1,\quad \beta=0,\quad \alpha'=\gamma'=0,\quad \beta'=0;\\ \alpha=0,\quad \gamma=1,\quad \beta=0,\quad \alpha'=1,\quad \gamma'=\beta'=0.\end{array}\right.$$

2° C′ *non cyclique.*

En prenant $c^{\nu}b^{\mu}a^{\lambda}$ pour a, $c^{\nu'}b^{\mu'}a^{\lambda'}$ pour b, on a

$$e^{-1}de=da,\qquad f^{-1}df=db;$$

des formules (1) et (2) se tirent les conditions suivantes :

$$\xi\equiv\theta y,\qquad \eta\equiv\theta z,\qquad \xi'\equiv\theta y',\qquad \eta'\equiv\theta z,\qquad \zeta\equiv\zeta'\equiv 0,$$

et les formules (3) et (4) deviennent

$$\begin{array}{ll}\theta(y\alpha_1+y'\beta_1)+\xi''\gamma_1\equiv\alpha y+\alpha' z-\varepsilon' y^2 z, & \theta(y\alpha'_1+y'\beta'_1)+\xi''\gamma'_1\equiv\alpha y'+\alpha' z'-\varepsilon' y'^2 z',\\ \theta(z\alpha_1+z'\beta_1)+\eta''\gamma_1\equiv\beta y+\beta' z+\varepsilon' yz^2, & \theta(z\alpha'_1+z'\beta'_1)+\eta''\gamma'_1\equiv\beta y'+\beta' z'+\varepsilon' y' z'^2,\\ \zeta''\gamma_1\equiv\gamma y+\gamma' z, & \zeta''\gamma'_1=\gamma y'+\gamma' z'.\end{array}\qquad \theta\equiv yz'-zy'$$

Si nous laissons de côté le cas $\gamma\equiv\gamma'\equiv 0$ où G est produit direct de $\{c\}$ par $\{a, b, d, e, f\}$, g_{p^5} de figure (11)(1)(11), nous pouvons toujours faire $\gamma_1=0, \gamma'_1=1$, et en supposant $\gamma_1=\gamma=0, \gamma'_1=\gamma'=1$, on a

$$\begin{array}{ll}z\equiv 0,\qquad \theta\equiv yz',\qquad \zeta''\equiv z', & \\ z'(y\alpha_1+y'\beta_1)\equiv\alpha y, & yz'(y\alpha'_1+y'\beta'_1)+\xi''\equiv\alpha y'+\alpha' z'-\varepsilon' y'^2 z',\\ z'^2\beta_1\equiv\beta, & yz'^2\beta'_1+\eta'\equiv\beta y'+\beta' z'+\varepsilon' y' z'^2\end{array}$$

et l'on voit que les types de G, pour $p>2$, correspondent à

$$\alpha=0,1,\qquad \beta=0,\qquad \alpha'=\beta'=0;\qquad \alpha=0,\qquad \beta=1,N,\qquad \alpha'=\beta'=0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

DEUXIÈME CAS : $p = 2$.

Type $\delta = \delta' = 0$ *de* G | A.

Comme on peut prendre $c^\nu b^\mu a^\lambda$ pour c, on peut toujours supposer $\lambda = \mu = 0, \nu = 1$; d'après les conditions d'ordre, les équations de G non communes à tous les types seront

$$d^2 = c, \qquad e^2 = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad f^2 = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^{-1} de = f^{-1} df = dc.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme des équations de G doit vérifier $\xi'' \equiv \eta'' \equiv 0$, $\zeta'' \equiv 1$, $yz \equiv y'z' \equiv 0$ et fournit sur les exposants des équations de G la transformation

$$\begin{aligned}
\xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 &\equiv \alpha y + \alpha' z, & \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 &\equiv \alpha y' + \alpha' z',\\
\eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 &\equiv \beta y' + \beta' z, & \eta\alpha'_1 + \eta'\beta'_1 &\equiv \beta y' + \beta' z',\\
\zeta\alpha_1 + \zeta'\beta_1 + \gamma_1 &\equiv \gamma y + \gamma' z, & \xi\alpha'_1 + \zeta'\beta'_1 + \gamma'_1 &\equiv \gamma y' + \gamma' z'.
\end{aligned}$$

Des quatre premières on tire : $\alpha_1\beta'_1 + \beta_1\alpha'_1 \equiv \alpha\beta' + \beta\alpha'$ et en remarquant que les deux seules hypothèses possibles sont : $y = z' = 1$, $y' = z = 0$ et $y = z' = 0$, $y' = z = 1$, on voit que l'on a $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 0$ toujours et seulement si l'on a $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ ou $\alpha' \equiv \beta' \equiv 0$. S'il n'en est pas ainsi, on peut faire $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, et en supposant $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, on a $\alpha'_1 \equiv \alpha'$. Si α' est $\equiv 1$, en prenant $\xi = z'$, $\eta = y' + \beta' z'$, $\xi' = z$, $\eta' = y + \beta' z$, on obtient $\beta'_1 = 0$; si α' est $\equiv 0$, on a $\xi' \equiv 0$, $1 \equiv y + \beta' z$, $\beta'_1 \equiv y' + \beta z'$, d'où, en ajoutant, $\beta'_1 \equiv \beta'$. Si l'on a $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ ou $\alpha' \equiv \beta' \equiv 0$, on peut faire $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 0$, et, en supposant $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 0$, on a

$$0 \equiv \alpha' z \equiv \beta' z, \qquad \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 \equiv \alpha' z', \qquad \eta\alpha'_1 + \eta'\beta'_1 \equiv \beta' z';$$

on a donc $\alpha'_1 \equiv \beta'_1 \equiv 0$ toujours et seulement si l'on a $\alpha' \equiv \beta' \equiv 0$, et si cette condition n'est pas remplie, on peut faire $\alpha'_1 = 0$, $\beta'_1 = 1$. On peut donc toujours faire sur α, β, α', β' l'une des cinq hypothèses

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1, \qquad \alpha' = 1, \qquad \beta' = 0; \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, 1, \qquad \alpha' = 0, \qquad \beta' = 0, 1,$$

avec $\alpha_1, \beta_1, \alpha'_1, \beta'_1 = \alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Dans l'hypothèse $\alpha = \beta' = 0$, $\beta = \alpha' = 1$ on peut toujours faire $\gamma_1 = \gamma'_1 = 0$, d'où le type

$$\alpha = \beta' = \gamma = \gamma' = 0, \qquad \beta = \alpha' = 1.$$

Dans l'hypothèse $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$, on a $\gamma_1 + \gamma'_1 \equiv \gamma + \gamma'$ et $\gamma_1\gamma'_1 \equiv \gamma\gamma'$, d'où les trois types

$$\gamma = \gamma' = 0; \qquad \gamma = 0, \qquad \gamma' = 1; \qquad \gamma = \gamma' = 1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Dans l'hypothèse $\alpha = \beta = \alpha' = 0$, $\beta' = 1$, on peut faire $\gamma'_1 = 0$, et en supposant $\gamma'_1 = \gamma' = 0$, on peut faire $\gamma_1 = 0$ en prenant $y = 0$, $y' = 1$, $\zeta' = \gamma$, d'où le type

$$\alpha = \beta = \alpha' = \gamma = \gamma' = 0, \qquad \beta' = 1.$$

Dans l'hypothèse $\alpha = \alpha' = \beta' = 0$, $\beta = 1$, on voit de même qu'il n'y a qu'un type

$$\alpha = \alpha' = \beta' = \gamma = \gamma' = 0, \qquad \beta = 1.$$

Dans l'hypothèse $\alpha = \alpha' = 0$, $\beta = \beta' = 1$, on peut faire $\gamma_1 = 0$ et, en supposant $\gamma_1 = \gamma = 0$, on a $\gamma'_1 \equiv \gamma'$, d'où les deux types

$$\alpha = \alpha' = 0, \qquad \beta = \beta' = 1, \qquad \gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, 1.$$

Type $\delta = \delta' = 1$ *de* G | A.

On voit comme pour le premier type de G | A qu'on peut toujours ramener les équations de G, non communes à tous les types, à la forme

$$d^2 = c, \qquad e^2 = dc^\gamma b^\beta a^\alpha, \qquad f^2 - dc^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^{-1} de = dc, \qquad f^{-1} df = d.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme d'équations est, en tenant compte des conditions,

$$a_1 = c^\zeta b^\eta a^\xi, \qquad b_1 = c^{\zeta'} b^{\eta'} a^{\xi'}, \qquad c_1 = c, \qquad d_1 = dc^{x'}, \qquad e_1 = f^z e d^x c^l b^k a^h,$$
$$f_1 = f d^{x'} c^{l'} b^{k'} a^{h'}, \qquad \xi\eta' - \eta\xi' \equiv 1$$

et fournit, pour les exposants des équations de G, la transformation

$$\begin{aligned} \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 &\equiv \alpha + \alpha' z, & \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 &\equiv \alpha', \\ \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 &\equiv \beta + \beta' z, & \eta\alpha'_1 + \eta'\beta'_1 &\equiv \beta', \\ x' + \gamma'_1 + \zeta\alpha_1 + \zeta'\beta_1 &\equiv \gamma + (\gamma' + 1) z, & \gamma'_1 + \zeta\alpha'_1 + \zeta'\beta'_1 &\equiv \gamma'; \end{aligned}$$

on voit alors qu'il y a six types de G correspondant à

$$\begin{aligned} &\alpha' = \beta' = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta = 0, 1, \qquad \gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, 1; \\ &\alpha = 0, \qquad \beta' = 1, \qquad \alpha = 0, 1, \qquad \beta = \gamma = \gamma' = 0. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure (11)(1111).

26. Les équations de G auront la forme

$$a^p = b^p = 1, \qquad c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^p = b^{\beta''} a^{\alpha''}, \qquad f^p = b^{\beta'''} a^{\alpha'''},$$
$$d^{-1}cd = cb^\lambda a^\gamma, \quad e^{-1}ce = cb^{\lambda'} a^{\gamma'}, \quad f^{-1}cf = cb^{\lambda''} a^{\gamma''}, \quad e^{-1}de = db^\mu a^\delta, \quad f^{-1}df = db^{\mu'} a^{\delta'}, \quad f^{-1}ef = eb^\nu a^\zeta.$$

Les conditions d'ordre sont toujours vérifiées, la condition de figure est qu'un déterminant au moins de la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma & \lambda & \gamma' & \lambda' & \gamma'' & \lambda'' \\ -\gamma & -\lambda & 0 & 0 & \delta & \mu & \delta' & \mu' \\ -\gamma' & -\lambda' & -\delta & -\mu & 0 & 0 & \zeta & \nu \\ -\gamma'' & -\lambda'' & -\delta' & -\mu' & -\zeta & -\nu & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

soit $\not\equiv 0$.

On établit facilement les formules

$$f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'} f^u e^z d^y c^x = f^{u'+u} e^{z'+z} d^{y'+y} c^{x'+x} b^{\mathrm{K}} a^{\mathrm{H}},$$
$$\mathrm{H} = \gamma x' y + \gamma' x' z + \gamma'' x' u + \delta y' z + \delta' y' u + \zeta z' u,$$
$$\mathrm{K} = \lambda x' y + \lambda' x' z + \lambda'' x' u + \mu y' z + \mu' y' u + \nu z' u,$$
$$(f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'})^{-1} (f^u e^z d^y c^x) (f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'}) = f^u e^z d^y c^x b^{\mathrm{K}'} a^{\mathrm{H}'},$$
$$\mathrm{H}' = \gamma(xy' - yx') + \gamma'(xz' - zx') + \gamma''(xu' - ux') + \delta(yz' - zy') + \delta'(yu' - uy') + \zeta(zu' - uz'),$$
$$\mathrm{K}' = \lambda(xy' - yx') + \lambda'(xz' - zx') + \lambda''(xu' - ux') + \mu(yz' - zy') + \mu'(yu' - uy') + \nu(zu' - uz').$$

(Nous formerons des expressions désignées par H'', K'', H''', K''' en remplaçant dans H' et K' x', y', z', u' par x'', y'', z'', u'', x''', y''', z''', u'''; des expressions désignées par $\mathrm{H}'''\mathrm{K}'''$ en remplaçant dans H'', K'', H''', K''' les quantités x, y, z, u par x', y', z', u' des expressions désignées par H'''', K'''' en remplaçant dans $\mathrm{H}'''\mathrm{K}'''$ les quantités x', y', z', u' par x'', y'', z'', u''.)

$$(f^u e^z d^y c^x)^p = b^{\mathrm{K}_p} a^{\mathrm{H}_p},$$
$$\mathrm{H}_p = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''' u + \varepsilon(\gamma xy + \gamma' xz + \gamma'' xu + \delta yz + \delta' yu + \zeta zu),$$
$$\mathrm{K}_p = \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u + \varepsilon(\lambda xy + \lambda' xz + \lambda'' xu + \mu yz + \mu' yu + \nu zu).$$

(Nous formerons successivement des expressions désignées par H'_p, K'_p, H''_p, K''_p, H'''_p, K'''_p en ajoutant chaque fois un accent aux lettres x, y, z, u de H_p, K_p.)

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations est

$$a_1 b^\eta a^\xi, \qquad b_1 = b^{\eta'} a^{\xi'}, \qquad c_1 = f^u e^z d^y c^x b^k a^h,$$
$$d_1 = f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'} b^{k'} a^{h'}, \qquad e_1 = f^{u''} e^{z''} d^{y''} c^{x''} b^{k''} a^{h''}, \qquad f_1 = f^{u'''} e^{z'''} d^{y'''} c^{x'''} b^{k'''} a^{h'''}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

avec

$$(\xi\eta' - \eta\xi') \not\equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \\ x'' & y'' & z'' & u'' \\ x''' & y''' & z''' & u''' \end{vmatrix} = \mathrm{D} \not\equiv 0;$$

les relations qui en résultent entre les anciennes et les nouvelles valeurs des exposants sont

$$\begin{array}{llll}
\xi\gamma_1 + \xi'\lambda_1 \equiv \mathrm{H}', & \xi\gamma'_1 + \xi'\lambda'_1 \equiv \mathrm{H}'', & \xi\gamma''_1 + \xi'\lambda''_1 \equiv \mathrm{A}''', & \\
\eta\gamma_1 + \eta'\lambda_1 \equiv \mathrm{K}', & \eta\gamma'_1 + \eta'\lambda'_1 \equiv \mathrm{K}'', & \eta\gamma''_1 + \eta'\lambda''_1 \equiv \mathrm{K}''', & \\
\xi\delta_1 + \xi'\mu_1 \equiv \mathrm{H}'''', & \xi\delta'_1 + \xi'\mu'_1 \equiv \mathrm{H}''''', & \xi\zeta_1 + \xi'\nu_1 \equiv \mathrm{H}''''', & \\
\eta\delta_1 + \eta'\mu_1 \equiv \mathrm{K}'''', & \eta\delta'_1 + \eta'\mu'_1 \equiv \mathrm{K}''''', & \eta\zeta_1 + \eta'\nu_1 \equiv \mathrm{K}''''', & \\
\xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 \equiv \mathrm{H}_p, & \xi\alpha'_1 + \xi'\beta'_1 \equiv \mathrm{H}'_p, & \xi\alpha''_1 + \xi'\beta''_1 \equiv \mathrm{H}''_p, & \xi\alpha'''_1 + \xi'\beta'''_1 \equiv \mathrm{H}'''_p, \\
\eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 \equiv \mathrm{K}_p, & \eta\alpha''_1 + \eta_1\beta'_1 \equiv \mathrm{K}'_p, & \eta\alpha''_1 + \eta'\beta''_1 \equiv \mathrm{K}''_p, & \eta\alpha'''_1 + \eta'\beta'''_1 \equiv \mathrm{K}'''_1.
\end{array}$$

La discussion directe de ces formules étant compliquée, nous allons d'abord séparer les types de G en classes distinctes, au moyen de considérations empruntées à la théorie générale des groupes.

Nous distinguerons d'abord entre les types de G où le commutant est cyclique et ceux où le commutant est le central; dans ce dernier cas, ou bien il existe un élément c non normal tel que le p. p. c. m. des commutateurs $c^{-1}g^{-1}cg$, g parcourant G soit d'ordre p, ou bien un tel élément n'existe pas. On peut voir que dans ces deux hypothèses G contient un g_{p^4} abélien. Soit, en effet, dans la première hypothèse, f un élément non permutable à c, on aura par un choix convenable de a

$$d^{-1}cd = ca^{\gamma}, \qquad e^{-1}ce = ca^{\gamma'}, \qquad f^{-1}cf = ca$$

et $\{a, b, c, f^{-\gamma}d\}$ est un g_{p^4} abélien. Dans la deuxième hypothèse, on aura quel que soit c

$$d^{-1}cd = cb^{\lambda}a^{\gamma}, \qquad e^{-1}ce = ca, \qquad f^{-1}cf = cb$$

et $\{a, b, c, f^{-\lambda}e^{-\gamma}d\}$ est un g_{p^4} abélien.

Les conditions de figure exigent d'ailleurs que G n'ait pas de g_{p^5} abélien, car, s'il en a un, ses équations peuvent prendre la forme

$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = ca, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db^{\mu}a^{\delta}, \qquad f^{-1}ef = eb^{\nu}a^{\zeta},$$

ou, si l'on prend $dc^{-\delta}$ pour d, $ec^{-\zeta}$ pour e,

$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = ca, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db^{\mu}, \qquad f^{-1}ef = eb^{\nu},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

ou, si l'on prend b^μ pour b (il faut $\mu\nu \not\equiv 0$),

$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = ca, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = eb^\nu,$$

mais alors $ed^{-\nu}$ est normal.

Lorsque le p. p. c. m. des commutateurs $c^{-1}g^{-1}cg$ est d'ordre p, le g_{p^5} non abélien $\{a, b, c, f^{-\gamma}d, d^{-\gamma'}e\}$ où c est normal est de figure $(111)(11)$. Inversement, si G contient un g_{p^5} de figure $(111)(11)\{a, b, c, d, e\}$ où c est normal, le p. p. c. m. des commutateurs $c^{-1}g^{-1}cg$, c parcourant G, est d'ordre p. La première hypothèse équivaut donc à celle-ci : G contient un g_{p^5} de figure $(111)(11)$.

Premier cas. — Le commutant de G est cyclique.

27. On sait [1] que les équations de G peuvent prendre la forme suivante :

$$a^p = b^p = 1, \qquad c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^p = b^{\beta''} a^{\alpha''}, \qquad f^p = b^{\beta'''} a^{\alpha'''},$$
$$d^{-1}cd = ca, \qquad e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = c, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = d, \qquad f^{-1}ef = ea.$$

Si l'on a $\beta \equiv \beta' \equiv \beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$, G est produit direct par $\{b\}$ du $g_{p^5}\{a, c, d, e, f\}$ de figure $(1)(1111)$ dont nous connaissons les deux types. Nous supposerons donc que l'on n'a pas $\beta \equiv \beta' \equiv \beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$. Comme $G|\{b\}$ est un g_{p^5} de figure $(1)(1111)$, les équations mod $\{b\}$ pourront être réduites à

$$c^p \equiv a^\alpha, \qquad d^p \equiv a^{\alpha'}, \qquad e^p \equiv f^p \equiv 1, \qquad \begin{cases} (\alpha = 0, 1, & \alpha' = 0 & \text{pour} \quad p \geqq 3), \\ (\alpha = \alpha' = 0, & \alpha = \alpha' = 1 & \text{pour} \quad p = 2), \end{cases}$$

et les équations absolues de G auront la forme

$$c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d_p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^p = b^{\beta''}, \qquad f^p = b^{\beta'''},$$
$$d^{-1}cd = cb^\lambda a, \qquad e^{-1}ce = cb^{\lambda'}, \qquad f^{-1}cf = cb^{\lambda''}, \qquad e^{-1}de = db^{\mu'}, \qquad f^{-1}df = db^\mu, \qquad f^{-1}ef = eb^\nu a$$

l'hypothèse exigeant $\lambda - \nu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv \lambda'' \equiv \mu'' \equiv 0$, les équations seront en prenant $b^\lambda \alpha$ pour a

$$c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^p = b^{\beta''}, \qquad f^p = b^{\beta'''},$$
$$d^{-1}cd = ca, \qquad e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = c, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = d, \qquad f^{-1}ef = ea,$$

et l'on peut toujours supposer $\alpha = 0$ ou 1, $\alpha' = 0$ pour $p > 2$, $\alpha = \alpha' = 0$ ou $\alpha = \alpha' = 1$ pour $p = 2$.

---

(1) De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, nos 143-146.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

1° $p > 2$.

En prenant $f^u e^z d^y c^x$ ($x \not\equiv 0$, $\beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u \equiv 1$) pour c, $ed^{ux^{-1}}$ pour e, $fd^{-zx^{-1}}$ pour f, puis e^x pour e, a^x pour a, on obtient $c^p = ba^\alpha$ tout en conservant la forme des autres équations. En prenant $f^{u''} e^{z''}$ pour e, $f^{u'''} e^{z'''}$ pour f ($\beta'' z'' + \beta''' u'' \equiv 0$, $z'' u''' - z''' u'' \equiv 1$), on obtient $e^p = 1$. Les équations de G non encore simplifiées prennent alors la forme

$$c^p = ba^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'}, \qquad e^p = 1, \qquad f^p = b^{\beta'''}, \qquad (\alpha = 0, 1).$$

Les formules de la transformation la plus générale résultant d'un changement de générateurs conservant les exposants déjà fixés sauf α sont

$$\begin{aligned}
&\xi \equiv xy' - yx' + zu' - uz' \equiv x''y''' - y''x''' + z''u''' - u''z''', \qquad \eta \equiv 0, \qquad \xi\eta' \not\equiv 0.\\
&0 \equiv xy'' - yx'' + zu'' - uz'' \equiv xy''' - yx''' + zu''' - uz''',\\
&0 \equiv x'y'' - y'x'' + z'u'' - u'z'' \equiv x'y''' - y'x''' + z'u''' - u''z''',\\
&\qquad \xi\alpha_1 + \xi' \equiv \alpha x, \qquad \eta' \equiv x + \beta' y + \beta''' u,\\
&\qquad \xi'\beta'_1 \equiv \alpha x', \qquad \eta'\beta'_1 \equiv x' + \beta' y' + \beta''' u',\\
&\qquad 0 \equiv \alpha x'', \qquad 0 \equiv x'' + \beta' y'' + \beta''' u'',\\
&\qquad \xi'\beta'''_1 \equiv \alpha x''', \qquad \eta'\beta'''_1 \equiv x''' + \beta' y''' + \beta''' u'''.
\end{aligned}$$

Ces formules montrent que, si l'on a $\alpha = 1$, $\beta' \equiv \beta''' \equiv 0$, on peut, en prenant $\xi' \equiv \eta'$, faire $\alpha_1 = 0$. Nous aurons donc à examiner deux cas seulement :

$\alpha = 0$, alors le groupe P des p-ièmes puissances des éléments de G est d'ordre $\leqq p$,

$\alpha = 1$, β', β''' n'étant pas tous deux $\equiv 0$, alors P est d'ordre p^2.

Soit d'abord $\alpha_1 = \alpha = 1$. Si β' est $\not\equiv 0$, on ne peut faire $\beta'_1 = 0$, car on aurait $x' \equiv y' \equiv u' \equiv x'' \equiv y'' \equiv u'' \equiv 0$, donc $D \equiv 0$; mais on voit directement que, en prenant $c^{\beta'}$ pour c, $e^{\beta'}$ pour e, $a^{\beta'}$ pour a, $b^{\beta'}$ pour b, on obtient $d^p = b$, puis qu'en prenant $fd^{-\beta'''}$ pour f, $e^{\beta'''} c$ pour c on obtient $f^p = 1$. On a donc le type

$$d^p = b, \qquad f^p = 1.$$

Si β' est $\equiv 0$, donc $\beta''' \not\equiv 0$, on peut, en prenant $f^{\beta'''^{-1}}$ pour f, $e^{\beta'''}$ pour e, obtenir $f^p = b$. On a donc le type

$$d^p = 1, \qquad f^p = b.$$

Soit maintenant $\alpha = 0$. Si l'on prend $dc^{-\beta'}$ pour d, on a $d^p = 1$; puis, en prenant $fc^{-\beta'''}$ pour f, $e^{-\beta'''} d$ pour d, on a $f^p = 1$, sans que les autres équations changent. On a donc un seul type :

$$c^p = b, \qquad d^p = e^p = f^p = 1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

2° $p = 2$.

Il y a trente systèmes $(\alpha\alpha'\beta\beta'\beta''\beta''')$ correspondant aux quinze systèmes $(\beta\beta'\beta''\beta''')$ autres que (0000). Nous désignerons les systèmes $(11\beta\beta'\beta''\beta''')$ par **a**, **b**, ..., les systèmes correspondants $(00\beta\beta'\beta''\beta''')$ par **a**′, **b**′, ... Soit, en sous-entendant $(\alpha\alpha')$,

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{a}=(1000), & \mathbf{b}=(0100), & \mathbf{c}=(0010), & \mathbf{d}=(0001), & \mathbf{e}=(1100), \\ \mathbf{f}=(1010), & \mathbf{g}=(1001), & \mathbf{h}=(0110), & \mathbf{i}=(0101), & \mathbf{j}=(0011), \\ \mathbf{k}=(0111), & \mathbf{l}=(1011), & \mathbf{m}=(1101), & \mathbf{n}=(1110), & \mathbf{p}=(1111), \end{array}$$

a, **b**, ..., **a**′, **b**′, ... désigneront aussi les types de G correspondant à ces divers systèmes d'exposants.

On voit directement sur les équations que, en prenant c pour d et d pour c, on ramène **b** à **a**, **b**′ à **a**′, **h** à **f**, **h**′ à **f**′, **i** à **g**, **i**′ à **g**′, **l** à **k**, **l**′ à **k**′; si l'on prend e pour f et f pour e, on ramène **d**, **d**′, **g**, **g**′, **n**, **n**′ respectivement à **c**, **c**′, **f**, **f**′, **m**, **m**′; si l'on prend c pour e, e pour c, d pour f, f pour d, on ramène **j**′, **m**′, **c**′ respectivement à **e**′, **k**′, **a**′; si l'on prend ba pour b, on ramène **e** à **e**′; si l'on prend dc pour d, on ramène **a**, **f**, **l** respectivement à **e**, **n**, **p**. Tous les types distincts sont donc obtenus en prenant seulement **a**, **c**, **f**, **j**, **k**, **a**′, **f**′, **k**′, **p**′.

En formant pour chacun de ces types les carrés de quinze éléments $\not\equiv 1$ et indépendants mod A, on voit que **c** et **k** ont mod A un seul e_2; **a**, **f**, **j**, **k**′ en ont trois; **a**′, **f**′, **p** en ont cinq.

Or le changement de générateurs

$$c_1 = c, \qquad d_1 = edc, \qquad e_1 = e, \qquad f_1 = fec$$

ramène **k** à **c**. Les changements de générateurs

$$\begin{array}{lllll} c_1 = c, & d_1 = fd, & e_1 = fec, & f_1 = f, & \\ c_1 \equiv fdc, & d_1 = fe, & e_1 = fed, & f_1 = fec, & \\ b_1 = ba, & c_1 = fc, & d_1 = fec, & e_1 = c, & f_1 = de \end{array}$$

ramènent respectivement **f**, **j**, **k**′ à **a**. Les changements

$$\begin{array}{lllll} b_1 = ba, & c_1 = dc, & d_1 = fd, & e_1 = fedc, & f_1 = f, \\ b_1 = b, & c_1 = c, & d_1 = fedc, & e_1 = ec, & f_1 = fc, \end{array}$$

ramènent respectivement **f**′, **p**′ à **a**′. Il y a donc trois types

$$c^2 = d^2 = a, \quad e^2 = 1, \quad f^2 = b; \qquad c^2 = 1, \quad d^2 = e^2 = f^2 = b; \qquad c^2 = b, \quad d^2 = e^2 = f^2 = 1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

DEUXIÈME CAS. — G A POUR COMMUTANT LE CENTRAL ET CONTIENT UN G_{p^5} DE FIGURE (111)(11).

28. En prenant pour cinq des générateurs de G les générateurs de ce g_{p^5} (qui contient le central, ici p. g. c. d. des g_{p^5}), les équations de G qui n'expriment pas les puissances p-ièmes sont

$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = cb^{\lambda}a^{\gamma}, \qquad e^{-1}de = da, \qquad f^{-1}df = db^{\mu}a^{\delta}, \qquad f^{-1}ef = eb^{\nu}a^{\zeta}.$$

Si l'on prend $fe^{-\delta}d^{\zeta}$ pour f, on obtient $f^{-1}df = db^{\mu}$, $f^{-1}ef = eb^{\nu}$. Le commutant n'étant pas cyclique on n'a pas $\lambda \equiv \mu \equiv \nu \equiv 0$, on peut donc prendre pour c un élément $e^{z}d^{y}c^{x}$ tel que l'on ait $x \not\equiv 0$, $\lambda x + \mu y + \nu z \equiv 1$; en prenant ensuite $dc^{-\mu}$ pour d, $ec^{-\nu}$ pour e, puis $fe^{-\delta}a$ pour f et enfin ba^{γ} pour b, on obtient

$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = da, \qquad f^{-1}df = d, \qquad f^{-1}ef = e.$$

Le changement de générateurs conservant la forme des équations doit vérifier l'un des deux systèmes de conditions

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} \xi \equiv yz' - zy' \equiv yz'' - zy'' \equiv y'z'' - z'y'' \equiv y'z''' - z'y''' \equiv y''z''' - z''y''' \equiv 0. \\ \eta' \equiv x \equiv u \equiv x''' \equiv u''' \equiv 0, \qquad \eta \equiv x'u'' - u'x'', \qquad \xi' \equiv yz''' - zy''', \qquad \eta\xi' \not\equiv 0. \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \eta \equiv xu' - ux' \equiv xu'' - ux'' \equiv x'u'' - u'x'' \equiv x'u''' - u'x''' \equiv x''u''' - u''x''' \equiv 0, \\ \xi' \equiv y \equiv z \equiv y''' \equiv z''' \equiv 0, \qquad \xi \equiv y'z'' - z'y'', \qquad \eta' \equiv xu''' - ux''', \qquad \xi\eta' \not\equiv 0, \end{cases}$$

et les relations entre les anciennes et les nouvelles valeurs des exposants sont, si l'on suppose (A) vérifié,

$$\begin{aligned} &\xi'\beta_1 \equiv \alpha'y + \alpha''z + \varepsilon yz, && \eta\alpha_1 \equiv \beta'y + \beta''z, \\ &\xi'\beta'_1 \equiv \alpha x' + \alpha'''u', && \eta\alpha'_1 \equiv \beta x' + \beta'''u' + \varepsilon x'u', \\ &\xi'\beta''_1 \equiv \alpha x'' + \alpha'''u'', && \eta\alpha''_1 \equiv \beta x'' + \beta'''u'' + \varepsilon x''u'', \\ &\xi'\beta'''_1 \equiv \alpha'y''' + \alpha''z''' + \varepsilon y'''z''', && \eta\alpha'''_1 \equiv \beta y''' + \beta''z''', \end{aligned}$$

et, si l'on suppose (B) vérifié,

$$\begin{aligned} &\xi\alpha_1 \equiv \alpha x + \alpha'''u, && \eta'\beta_1 \equiv \beta x + \beta'''u + \varepsilon xu, \\ &\xi\alpha'_1 \equiv \alpha'y' + \alpha''z' + \varepsilon y'z', && \eta'\beta'_1 \equiv \beta'y' + \beta''z', \\ &\xi\alpha''_1 \equiv \alpha'y'' + \alpha''z'' + \varepsilon y''z'', && \eta'\beta''_1 \equiv \beta y'' + \beta'z'', \\ &\xi\alpha'''_1 \equiv \alpha x''' + \alpha'''u''', && \eta'\beta'''_1 \equiv \beta x''' + \beta'''u''' + \varepsilon x'''u'''. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

$$p \geqq 3.$$

Pour que l'on puisse faire $\alpha_1 \equiv \alpha_1''' \equiv 0$, (A) exige $\beta' \equiv \beta'' \equiv 0$ et (B) exige $\alpha \equiv \alpha''' \equiv 0$.
1° Supposons qu'aucune de ces conditions ne soit remplie et prenons avec (B)

$$x \equiv h\alpha''', \qquad u \equiv h\alpha, \qquad y' \equiv h^{-1}\beta'', \qquad z' \equiv -h^{-1}\beta', \qquad (\beta' y'' + \beta'' z'')(\alpha x''' + \alpha''' u''') \not\equiv 0,$$
$$h(\alpha x''' + \alpha''' u''') \equiv \beta' y'' + \beta'' z'',$$

on obtient $\alpha_1 \equiv \beta_1' \equiv 0$, $\alpha_1''' \equiv \beta_1'' \equiv 1$. En supposant $\alpha_1 = \alpha = \beta_1' = \beta' = 0$, $\alpha_1''' = \alpha''' = \beta_1'' = \beta'' = 1$, on a avec (A)

$$z \equiv u' \equiv 0, \qquad \xi' \equiv u'' \equiv yz''', \qquad \eta \equiv z''' \equiv x' u'', \qquad x' y z''' u'' \not\equiv 0,$$
$$z'''\beta_1 \equiv \alpha', \qquad u''\alpha_1' \equiv \beta, \qquad u''\beta_1''' \equiv \alpha' y''' + \alpha'' z''', \qquad z'''\alpha_1'' \equiv \beta x'' + \beta''' u'',$$

et avec (B)

$$z' \equiv u \equiv 0, \qquad \xi \equiv u''' \equiv y' z'', \qquad \eta' \equiv z'' \equiv x u''', \qquad x y' z'' u''' \not\equiv 0,$$
$$z''\alpha_1' \equiv \alpha', \qquad u'''\beta_1 \equiv \beta, \qquad u'''\alpha_1'' \equiv \alpha' y'' + \alpha'' z'' \qquad z'''\beta_1''' \equiv \beta x''' + \beta''' u'''.$$

Pour que l'on puisse faire $\alpha_1' \equiv 0$, (A) exige $\beta \equiv 0$ et (B) $\alpha' \equiv 0$.
Supposons $\alpha'\beta \not\equiv 0$, et prenons avec (B) :

$$z'' \equiv \alpha', \qquad u''' \equiv \beta, \qquad x \equiv y'^{-1} \equiv \alpha'\beta^{-1}, \qquad y'' \equiv -\alpha'', \qquad x''' \equiv -\beta''', \qquad x' \equiv u' \equiv x'' \equiv u'' \equiv 0,$$

nous avons $\alpha_1' \equiv \beta_1 \equiv 1$, $\alpha_1'' \equiv \beta_1''' \equiv 0$, d'où le type

$$c^p = b, \qquad d^p = a, \qquad e^p = b, \qquad f^p = a.$$

Supposons $\alpha'\beta \equiv 0$, on peut faire $\alpha_1' = 0$, soit donc $\alpha_1' = \alpha' = 0$, on voit que β_1 est $\equiv 0$ toujours et seulement si β est $\equiv 0$. Supposons $\beta \not\equiv 0$, (A) est impossible, (B) exige $\beta_1 \not\equiv 0$; et, en prenant avec (B) $u''' \equiv \beta$, $x''' \equiv -\beta'''$, on obtient $\beta_1 \equiv 1$, $\beta_1''' \equiv 0$. Soit $\beta = \beta_1 = 1$, $\beta_1''' = \beta''' = 0$, donc $u''' \equiv 1$, $x''' \equiv 0$, $\alpha_1'' \equiv \alpha'' z''$. Si α'' est $\equiv 0$, on a $\alpha_1'' \equiv 0$, et si α'' est $\not\equiv 0$ en prenant avec (B) $z'' \equiv \alpha''^{-1}$, on obtient $\alpha_1'' \equiv 1$, d'où les deux types

$$c^p = b, \quad d^p = 1, \quad e^p = b, \quad f^p = a; \qquad c^p = b, \quad d^p = 1, \quad e^p = ba, \quad f^p = a.$$

Supposons β donc $\beta_1 \equiv 0$, on voit que les deux cas $\alpha''\beta''' \equiv 0$, $\alpha''\beta''' \not\equiv 0$, sont irréductibles l'un à l'autre. Si $\alpha''\beta'''$ est $\not\equiv 0$, on peut faire $\alpha_1'' \equiv 1$, et, en supposant $\alpha_1'' = \alpha'' = 1$, on a $\beta_1'' \equiv \beta'''$, d'où $p - 1$ types

$$c^p = d^p = 1, \qquad e^p = ba, \qquad f^p = b^{\beta'''} a, \qquad (\beta''' = 1, 2, \ldots, p - 1).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si $\alpha''\beta'''$ est $\equiv 0$, on voit les deux types

$$c^p = d^p = 1, \quad e^p = b, \quad f^p = ba; \qquad c^p = d^p = 1, \quad e^p = b, \quad f^p = a.$$

2° Supposons maintenant $\alpha \equiv \alpha''' \equiv 0$ ou $\beta' \equiv \beta'' \equiv 0$, on peut faire $\alpha_1 = \alpha'''_1 = 0$. Soit donc $\alpha_1 = \alpha = \alpha'''_1 = \alpha''' = 0$. Si l'on n'a pas $\beta' \equiv \beta'' \equiv 0$, (A) est impossible, et d'après (B) on trouve les types correspondant à

$$\beta' = 0, \quad \beta'' = 1, \quad \beta = 0, \quad \beta''' = 0,1, \quad \alpha' = 0, \quad \alpha'' = 0,1;$$
$$\beta' = 0, \quad \beta'' = 1, \quad \beta = 0, \quad \beta''' = 0,1, \quad \alpha' = 1, \quad \alpha'' = 0.$$

Si l'on a $\beta' \equiv \beta'' \equiv 0$, on trouve qu'il y a trois types distincts correspondant à

$$\alpha' = \beta = 0, \quad \alpha'' = \beta''' = 1; \qquad \alpha' = \alpha'' = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta''' = 1; \quad \alpha' = \alpha'' = \beta = \beta''' = 1.$$

2° $p = 2$.

Les formes quadratiques irréductibles qui se rencontrent dans les seconds membres montrent que, si l'on a $\alpha' \equiv \alpha'' \equiv \beta \equiv \beta''' \equiv 1$, on a nécessairement $\alpha'_1 \equiv \alpha''_1 \equiv \beta_1 \equiv \beta'''_1 \equiv 1$. Dans ce cas on trouve, comme précédemment, qu'il y a trois types distincts correspondant à

$$\alpha = \beta' = 0, \quad \alpha''' = \beta'' = 1; \qquad \alpha = \alpha''' = \beta' = 0, \quad \beta'' = 1; \qquad \alpha = \alpha''' = \beta' = \beta'' = 0.$$

En dehors de ce cas on peut faire $\alpha'_1 = \alpha''_1 = 0$. Soit donc $\alpha'_1 = \alpha' = \alpha''_1 = \alpha'' = 0$. Si l'on a $\beta \equiv \beta''' \equiv 1$, (A) est impossible, (B) exige $\beta_1 \equiv \beta'''_1 \equiv 1$, $y'z' \equiv y''z'' \equiv 0$ et montre qu'il y a six types distincts correspondant à

$$\alpha = 0, \quad \alpha''' = 0,1, \quad \beta' = \beta'' = 0; \qquad \alpha = 0, \quad \alpha''' = 0,1, \quad \beta' = 0,1, \quad \beta'' = 1.$$

Si l'on n'a pas $\beta \equiv \beta''' \equiv 1$, on peut faire $\beta_1 = \beta'''_1 = 0$; en supposant $\beta_1 = \beta = \beta'''_1 = \beta''' = 0$, et remarquant d'abord que tout système $(\alpha \quad \alpha''')$ peut se ramener à l'un des trois systèmes irréductibles entre eux $(1 \quad 1)$, $(0 \quad 1)$, $(0 \quad 0)$, on voit que les types distincts correspondent à :

$$\alpha = \alpha''' = \beta' = \beta'' = 1; \qquad \alpha = \alpha''' = 1, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0,1;$$
$$\alpha = 0, \quad \alpha''' = 1, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0,1; \qquad \alpha = 0, \quad \alpha''' = 1, \quad \beta' = \beta'' = 1;$$
$$\alpha = \alpha'' = 0, \quad \beta' = \beta'' = 0; \qquad \alpha = \alpha'' = 0, \quad \beta' = 0,1, \quad \beta'' = 1.$$

TROISIÈME CAS. — G A POUR COMMUTANT LE CENTRAL ET NE CONTIENT PAS DE G_{p^5} DE FIGURE (111)(11).

29. On a vu (26) que G contient toujours un g_{p^4} abélien contenant le central, et que l'hypothèse équivaut à celle-ci : les commutateurs de tout élément non normal, relativement aux autres éléments de G, engendrent tout le central.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les équations de G où n'entrent pas les puissances p-ièmes peuvent prendre la forme

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^{\mu}a^{\delta}, \quad f^{-1}df = db^{\mu'}a^{\delta'}, \quad f^{-1}ef = eb^{\nu}a^{\zeta},$$

avec les conditions nécessaires μ ou $\nu \not\equiv 0$, δ ou $\zeta \not\equiv 0$, $\mu\delta' - \delta\mu' \not\equiv 0$.

En prenant $fc^{-\zeta}$ pour f, $ec^{-\nu}$ pour f, on a $f^{-1}ef = e$, donc $\delta' \not\equiv 0$, on peut alors prendre $d^{\delta'^{-1}}$ pour d, ce qui donne $f^{-1}df = db^{\mu'}a$, puis $dc^{-\delta}$ pour d, ce qui donne $e^{-1}de = db^{\mu}$. Les équations de G sont alors ramenées à la forme

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^{\mu}, \quad f^{-1}df = db^{\mu'}a, \quad f^{-1}ef = e.$$

Cherchons la condition suffisante pour que l'hypothèse soit vérifiée. Le p. p. c. m. des commutateurs relatifs à tous les éléments de G et à un élément $f^u e^z d^y c^x$ est

$$\{ b^{-u}a^{-z}, \quad b^{-\mu z - \mu' u}a^{-u}, \quad b^{\mu y}a^{x}, \quad b^{x+\mu' y}a^{y} \}.$$

Pour que ce soit un g_p, il faut et il suffit que tous les déterminants de la matrice $\begin{vmatrix} -z & -u & x & y \\ -u & -\mu z - \mu' u & \mu y & x + \mu' y \end{vmatrix}$ soient $\equiv 0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a) \quad 0 \equiv \mu z^2 + \mu' zu - u^2 \equiv x^2 + \mu' xy - \mu y^2 \equiv \mu yz - xu \equiv z(x + \mu' y) - yu \equiv \mu yu - x(\mu z + \mu' u).$$

Pour que l'hypothèse soit vérifiée, il faut et il suffit que ces conditions entraînent $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv 0$.

1° $p = 2$.

On a comme condition nécessaire $\mu \equiv 1$, et, pour que les équations (a) n'aient pas d'autre solution que $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv 0$, il faut et il suffit que l'on ait $\mu' \equiv 1$ (si μ' est $\equiv 0$, on a la solution $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv 1$; si μ' est $\equiv 1$, les deux premières congruences quadratiques sont irréductibles). Les équations de G où n'entrent pas les carrés peuvent donc prendre la forme

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = dba, \quad f^{-1}ef = e,$$

et un changement de générateurs conservant ces équations doit vérifier

$$\begin{array}{lll}
(1) & 0 \equiv xz' - zx' + yu' - uy', & 0 \equiv xu' - ux' + yz' - zy' + yu' - uy', \quad D \equiv 1. \\
(2) & \xi \equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'', & \eta \equiv xu'' - ux'' + yz'' - zy'' + yu'' - uy'', \\
(3) & \xi' \equiv xz''' - zx''' + yu''' - uy''', & \eta' \equiv xu''' - ux''' + yz''' - zy''' + yu''' - uy''', \\
(4) & \xi' \equiv x'z'' - z'x'' + y'u'' - u'y'', & \eta' \equiv x'u'' - u'x'' + y'z'' - z'y'' + y'u'' - u'y'', \\
(5) & \xi + \xi' \equiv x'z''' - z'x''' + y'u''' - u'y''', & \eta + \eta' \equiv x'u''' - u'x''' + y'z''' - z'y''' + y'u''' - u'y''', \\
(6) & 0 \equiv x''z''' - z''x''' + y''u''' - u''y''', & 0 \equiv x''u''' - u''x''' + y''z''' - z''y''' + y''u''' - u''y'''.
\end{array}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Nous classerons d'abord les types de G d'après le nombre de leurs e_2 non normaux. Tout e_2 sera normal toujours et seulement si $H_2 \equiv K_2 \equiv 0$ a pour solution unique $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv 0$, c'est-à-dire si, pour chacun des quinze systèmes $(xyzu)$ autres que (0000), on a $H_2 + K_2 + H_2K_2 \equiv 1$, ce qui donne pour les exposants des équations de G :

$$\alpha + \beta\,\alpha\beta \equiv \alpha' + \beta' + \alpha'\beta' \equiv \alpha'' + \beta'' + \alpha''\beta'' \equiv \alpha''' + \beta''' + \alpha'''\beta''' \equiv \alpha\beta' + \alpha'\beta \equiv \alpha''\beta''' + \beta''\alpha''' \equiv 1,$$
$$(\alpha + \alpha'')(1 + \beta + \beta'') \equiv (\beta' + \beta'')(1 + \alpha' + \alpha'') \equiv (\beta + \beta''')(1 + \alpha + \alpha''') \equiv (\alpha' + \alpha''')(\beta' + \beta''') \equiv 0,$$
$$(\alpha' + \alpha'' + \alpha''')(1 + \beta' + \beta'' + \beta''') \equiv (\alpha + \alpha'' + \alpha''')(\beta + \beta'' + \beta''') \equiv (\alpha + \alpha' + \alpha'')(\beta + \beta' + \beta'') \equiv 0,$$
$$(\beta + \beta' + \beta'' + \beta''')(1 + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''') \equiv 0.$$

On trouve que les systèmes $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta & \beta' & \beta'' & \beta''' \end{pmatrix}$ vérifiant ces conditions sont :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, on voit que les changements de générateurs

$$\begin{array}{llll} c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = 1, & f_1 = fe, \\ c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = f, & f_1 = e, \\ c_1 = c, & d_1 = d, & e_1 = ec, & f_1 = fd, \\ c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = fdc, & f_1 = ed, \\ c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = ec, & f_1 = fedc \end{array}$$

ramènent **a** respectivement à **b**, **c**, **d**, **e**, **f**; d'où un seul type

$$c^2 = b, \quad d^2 = a, \quad e^2 = b, \quad f^2 = a.$$

Supposons qu'il y ait un e_2 c non normal. On sait (26) que c appartient à un g_{2^4} abélien, et que les commutateurs relatifs à c et aux autres éléments de G doivent engendrer tout le central. Les équations de G peuvent donc prendre la forme

$$c^2 = 1, \quad d^2 = b^\beta a^\alpha, \quad e^2 = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \quad f^2 = b^{\beta''} a^{\alpha''};$$
$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^\mu a^\delta, \quad f^{-1}df = db^{\mu'} a^{\delta'}, \quad f^{-1}ef = eb^{\nu} a^{\zeta}.$$

Les changements de générateurs déjà employés pour réduire les équations de la deuxième ligne, dont aucun ne change c, peuvent être répétés ici, et ils ramènent ces équations à la forme

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = dba, \quad f^{-1}ef = e.$$

Tout e_2 sera dans $\{a, b, c\}$ toujours et seulement si $H_2 \equiv K_2 \equiv 0$ exige $y \equiv z \equiv u \equiv 0$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

c'est-à-dire si, pour tout système $(xyzu)$ autre que $(x000)$, on a $H_2 + K_2 + H_2K_2 \equiv 1$, ce qui donne

$$\alpha + \beta + \alpha\beta \equiv \alpha' + \beta' + \alpha'\beta' \equiv \alpha'' + \beta'' + \alpha''\beta'' \equiv \alpha'\beta'' + \beta'\alpha'' \equiv 1,$$
$$\alpha'(1+\beta') \equiv \beta''(1+\alpha'') \equiv (\beta+\beta')(1+\alpha+\alpha') \equiv (\alpha+\alpha'')(\beta+\beta'') \equiv (\alpha+\alpha'+\alpha'')(1+\beta+\beta'+\beta'') \equiv 0,$$
$$(\alpha'+\alpha'')(\beta'+\beta'') \equiv (\alpha+\alpha'')(1+\beta+\beta'') \equiv (\alpha+\alpha')(\beta+\beta') \equiv (\beta+\beta'+\beta'')(1+\alpha+\alpha'+\alpha'') \equiv 0.$$

On trouve qu'il n'y a pas de systèmes $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \end{pmatrix}$ vérifiant ces équations. Ainsi il existe toujours un e_2 hors de $\{a, b, c\}$, permutable ou non à c. Si cet e_2 n'est pas permutable à c, les équations de G pourront prendre la forme

$$c^2 = 1, \quad d^2 = b^\beta a^\alpha, \quad e^2 = 1, \quad f^2 = b^{\beta'} a^{\alpha'};$$
$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^\mu a^\delta, \quad f^{-1}df = db^{\mu'} a^{\delta'}, \quad f^{-1}ef = eb^\nu a^\zeta,$$

avec les conditions nécessaires $\mu + \nu + \mu\nu \equiv \mu\delta' + \delta\mu' \equiv \zeta + \delta' + \zeta\delta' \equiv 1$. En prenant fc^ζ pour f, on a $f^{-1}ef = eb^\nu$ et il faut $\delta' \equiv 1$; en prenant $dc^{-\delta}$ pour d, on a $e^{-1}de = db^\mu$ et il faut $\mu \equiv 1$; en prenant alors fd^ν pour f on a $f^{-1}ef = e$, et l'on a vu qu'alors il faut $\mu' \equiv 1$; les équations de la deuxième ligne peuvent donc prendre la forme

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = dba, \quad f^{-1}ef = e.$$

Cherchons à exprimer qu'il n'existe pas deux e_2 indépendants mod $\{a, b\}$ qui soient permutables, autrement dit que G n'a pas de g_{16} abélien principal, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver $g = f^u e^z d^y c^x$, $g' = f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'}$ tels que l'on ait $g^2 = g'^2 = 1$, $g'^{-1} g g' = g$, un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \end{vmatrix}$ étant $\not\equiv 0$. La permutabilité de g, g' est exprimée par

$$xz' - zx' + yu' - uy' \equiv xu' - ux' + yz' - zy' + yu' - uy' \equiv 0,$$

équations vérifiées par trente systèmes $\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \end{vmatrix}$ ayant un déterminant au moins $\not\equiv 0$. Les conditions $g^2 = g'^2 = 1$ exigent que $(x\ y\ z\ u)$, $(x'\ y'\ z'\ u')$ soient deux systèmes de solutions de

$$\alpha y + \alpha' u + xz + yu \equiv \beta y + \beta' u + xu + yz + yu \equiv 0.$$

La condition cherchée est donc que ces deux équations n'aient pas deux systèmes de solutions formant une des trente matrices précédemment trouvées. On trouve que les systèmes $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}$ pour lesquels cette condition est remplie, sont :

$$\mathrm{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{d} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{g} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les changements de générateurs

$$\begin{array}{llllll}
a_1 = a, & b_1 = b, & c_1 = c, & d_1 = d, & e_1 = fc, & f_1 = fed, \\
a_1 = a, & b_1 = ba, & c_1 = fc, & d_1 = edc, & e_1 = e, & f_1 = fe, \\
a_1 = a, & b_1 = ba, & c_1 = c, & d_1 = de, & e_1 = ed, & f_1 = fec, \\
a_1 = a, & b_1 = ba, & c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = e, & f_1 = fe, \\
a_1 = a, & b_1 = b, & c_1 = c, & d_1 = d, & e_1 = ed, & f_1 = fdc
\end{array}$$

ramènent la forme d'équations **a** respectivement aux formes **b**, **d**, **e**, **f**, **g**. Un changement ramenant la forme **a** à la forme **c** doit vérifier, outre les équations (1) à (6),

$$\begin{array}{lll}
(7) & 0 \equiv xz + yu, & 0 \equiv y + u + xu + yz + yu, \\
(8) & \xi \equiv x'z' + y'u', & \eta \equiv y' + u' + x'u' + y'z' + y'u', \\
(9) & 0 \equiv x''z'' + y''u'', & 0 \equiv y'' + u'' + x''u'' + y''z'' + y''u'', \\
(10) & \xi \equiv x'''z''' + y'''u''', & \eta \equiv y''' + u''' + x'''u''' + y'''z''' + y'''u'''.
\end{array}$$

On trouve, en essayant les différents systèmes de solutions des équations (1), (7), (9), (2), (4), (3), (6), lesquelles déterminent complètement le changement de générateurs, qu'aucun de ces systèmes ne vérifie simultanément (8) et (10), Il y a donc deux types distincts de G,

$$c^2 = 1, \quad d^2 = b, \quad e^2 = 1, \quad f^2 = b; \qquad c^2 = 1, \quad d^2 = a, \quad e^2 = 1, \quad f^2 = a,$$

n'ayant aucun g_{16} abélien principal.

Supposons maintenant que G ait un g_{16} abélien principal $\{a, b, c, d\}$, les équations de G auront la forme

$$c^2 = d^2 = 1, \quad e^2 = b^\beta a^\alpha, \quad f^2 = b^{\beta'} a^{\alpha'},$$
$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^\mu a^\delta, \quad f^{-1}df = db^{\mu'} a^{\delta'}, \quad f^{-1}ef = eb^\nu a^\zeta$$

avec les conditions $\mu + \nu + \mu\nu \equiv \mu\delta' + \delta\mu' \equiv \zeta + \delta' + \zeta\delta' \equiv 1$. En prenant ec^ν pour e, fc^ζ pour f on a $f^{-1}ef = e$, donc $f^{-1}df = db^{\mu'}a$; en prenant dc^δ pour d on a $e^{-1}de = db^\mu$, donc $e^{-1}de = db$, et l'on voit comme précédemment qu'il faut $\mu' \equiv 1$ pour qu'il n'y ait pas de g_{32} de figure (111)(11); la deuxième ligne se ramène donc à

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = dba, \quad f^{-1}ef = e.$$

Un calcul déjà plusieurs fois répété montre qu'il y a toujours des e_2 hors de $\{a, b, c, d\}$, les équations de G peuvent donc se mettre sous la forme

$$c^2 = d^2 = e^2 = 1, \quad f^2 = b^\beta a^\alpha,$$
$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^\mu a^\delta, \quad f^{-1}df = db^{\mu'} a^{\delta'}, \quad f^{-1}ef = eb^\nu a^\zeta,$$
$$(\mu + \nu + \mu\nu \equiv \mu\delta' + \delta\mu' \equiv \zeta + \delta' + \zeta\delta' \equiv 1).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Le changement de générateurs fait dans le cas où il n'y a pas de g_{16} abélien principal ramène la deuxième ligne à la forme

$$d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = ca, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = db, \qquad f^{-1}df = dba, \qquad f^{-1}ef = e$$

sans changer la forme de la première.

Il y a quatre formes d'équations possibles, correspondant aux quatre systèmes (α, β) qui sont : $\mathbf{a} = (0\,0)$, $\mathbf{b} = (0\,1)$, $\mathbf{c} = (1\,0)$, $\mathbf{d} = (1\,1)$. Un changement de générateurs effectué sur la forme $\mathbf{a}$ et conservant la forme réduite des équations de G doit vérifier, outre les équations (1) à (6),

$$(7) \qquad \begin{cases} 0 \equiv xz + yu \equiv x'z' + y'u' \equiv x''u'' + y''u'', \\ 0 \equiv xu + yz + yu \equiv x'u' + y'z' + y'u' \equiv x''u'' + y''z'' + y''u'', \end{cases}$$

et il détermine α_1, β_1 par

$$(8) \qquad \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 \equiv x'''z''' + y'''u''', \qquad \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 \equiv x'''u''' + y'''z''' + y'''u''',$$

(7) et (6) montrent que les seules déterminations possibles de $(x'''y'''z'''u''')$ sont

$$(1000), \quad (0100) \quad (0010), \quad (0001), \quad (1100), \quad (0011),$$

donnant toutes $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 0$, donc conservant la forme $\mathbf{a}$.

On voit ensuite que les changements de générateurs

$$\begin{array}{llllll} a_1 = ab, & b_1 = b, & c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = fedc, & f_1 = fd, \\ a_1 = a, & b_1 = ba, & c_1 = c, & d_1 = dc, & e_1 = e, & f_1 = fe \end{array}$$

ramènent la forme $\mathbf{b}$ respectivement aux formes $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$. D'où deux types de G ayant un g_{16} abélien principal

$$c^2 = d^2 = e^2 = 1, \qquad f^2 = b^3; \qquad (\beta = 0, 1).$$

2° $p > 2$.

Si $\mu'^2 + 4\mu$ est non carré, les deux premières congruences (a) sont irréductibles; si $\mu'^2 + 4\mu$ est carré, on peut vérifier toutes les équations (a) en prenant $x \equiv -t_2 y$, $u \equiv t_1 z$, t_1 et t_2 étant les deux racines de $t^2 - \mu' t - \mu \equiv 0$. Donc l'hypothèse qu'il n'y a pas de g_{p^5} de figure (111)(11) est vérifiée toujours et seulement si $\mu'^2 + 4\mu$ est non carré.

Faisons le changement de générateurs le plus général conservant aux dernières équations de G la forme

$$d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = ca, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = db^{\mu}, \qquad f^{-1}df = db^{\mu'}a, \qquad f^{-1}ef = e,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

les douze premières formules de la transformation générale deviennent :

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 0 \equiv xz' - zx' + yu' - uy', \\
(2) & 0 \equiv xu' - ux' + \mu(yz' - zy') + \mu'(yu' - uy'), \\
(3) & \xi \equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'', \\
(4) & \eta \equiv xu'' - ux'' + \mu(yz'' - zy'') + \mu'(yu'' - uy''), \\
(5) & \xi' \equiv xz''' - zx''' + yu''' - uy''', \\
(6) & \eta' \equiv xu''' - ux''' + \mu(yz''' - zy''') + \mu'(yu''' - uy'''), \\
(7) & \xi'\mu_1 \equiv x'z'' - z'x'' + y'u'' - u'y'', \\
(8) & \eta'\mu_1 \equiv x'u'' - u'x'' + \mu(y'z'' - z'y'') + \mu'(y'u'' - u'y''), \\
(9) & \xi + \xi'\mu'_1 \equiv x'z''' - z'x''' + y'u''' - u'y''', \\
(10) & \eta + \eta'\mu'_1 \equiv x'u''' - u'x''' + \mu(y'z''' - z'y''') + \mu'(y'u''' - u'y'''), \\
(11) & 0 \equiv x''z''' - z''x''' + y''u''' - u''y''', \\
(12) & 0 \equiv x''u''' - u''x''' + \mu(y''z''' - z''y''') + \mu'(y''u''' - u''y''').
\end{array}
$$

Si l'on prend

$$
\begin{array}{llll}
\xi = 1, & \eta = \mu' 2^{-1}, & \xi' = 0, & \eta' = (\mu'^2 + 4\mu)(4\mu)^{-1}, \\
x = 1, & y = \mu'(2\mu)^{-1}, & z = 0, & u = 0, \\
x' = 0, & y' = 1, & z' = 0, & u' = 0, \\
x'' = 0, & y'' = 0, & z'' = 1, & u'' = 0, \\
x''' = 0, & y''' = 0, & z''' = -\mu'(2\mu)^{-1}, & u''' = 1,
\end{array}
$$

on obtient $\mu'_1 = 0$. Supposons donc $\mu'_1 = \mu' = 0$, donc μ non carré; en prenant

$$
\begin{array}{llll}
\xi = 1, & \eta = 0 & \xi' = 0, & \eta'^2 = \mu N^{-1}, \\
x = 1, & y = 0, & z = 0, & u = 0, \\
x' = 0, & y' = \eta'^{-1}, & z' = 0, & u' = 0, \\
x'' = 0, & y'' = 0, & z'' = \eta' N \mu^{-1}, & u'' = 0, \\
x''' = 0, & y''' = 0, & z''' = 0, & u''' = 1,
\end{array}
$$

on obtient $\mu_1 = N$, non carré arbitraire. On peut donc toujours réduire μ, μ' aux valeurs N, 0 par un changement de générateurs dans lequel on a $\xi = x = 1$, $\xi' = x' = x'' = x''' = 0$.

Le changement de générateurs le plus général conservant aux dernières équations de G la forme réduite

$$
d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = ca, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = db^N, \qquad f^{-1}df = da, \qquad f^{-1}ef = e
$$

vérifie les douze équations obtenues en faisant dans les formules (1) à (12) $\mu_1 = \mu = N$, $\mu'_1 = \mu' = 0$. Ces équations peuvent être simplifiées.

Comme on ne peut avoir $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv 0$, on ne peut avoir $x^2 - Ny^2 \equiv Nz^2 - u^2 \equiv 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Supposons, par exemple, $(x^2 - Ny^2) \not\equiv 0$; les équations (1) et (2) résolues en z' et u' donnent

$$(x^2 - Ny^2)z' \equiv \quad x(zx' + uy') - y(ux' + Nzy'),$$
$$(x^2 - Ny^2)u' \equiv - Ny(zx' + uy') + x(ux' + Nzy').$$

Ces valeurs portées dans les équations (7) et (8) donnent

$$(7)\ [-x(zx' + uy') + y(ux' + Nzy')]x''$$
$$+ [Ny(zx' + uy') - x(ux' + Nzy')]y'' + x'(x^2 - Ny^2)z'' + y'(x^2 - Ny^2)u'' \equiv N\xi'(x^2 - Ny^2),$$
$$(8)\ [Ny(zx' + uy') - x(ux' + Nzy')]x''$$
$$+ N[-x(zx' + uy') + y(ux' + Nzy')]y'' + Ny'(x^2 - Ny^2)^2 z'' + x'(x^2 - Ny^2)z'' \equiv N\eta'(x^2 - Ny^2).$$

En combinant linéairement les équations (3) et (4) avec chacune des équations (7) et (8), on trouve

$$(xx' - Nyy')\xi + (xy' - yx')\eta \equiv N\xi'(x^2 - Ny^2),$$
$$N(xy' - yx')\xi + (xx' - Nyy')\eta \equiv N\eta'(x^2 - Ny^2).$$

En opérant sur les équations (1), (2), (5), (6), (9), (10), comme on vient de le faire sur (1), (2), (3), (4), (7), (8), on trouve

$$(xx' - Nyy')\xi' + (xy' - yx')\eta' \equiv \xi(x^2 - Ny^2),$$
$$N(xy' - yx')\xi' + (xx' - Nyy')\eta' \equiv \eta(x^2 - Ny^2).$$

Les trois expressions $xx' - Nyy'$, $xy' - yx'$ et $x^2 - Ny^2 \not\equiv 0$ vérifiant quatre équations linéaires et homogènes, il faut que tous les déterminants de

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \xi' & \eta' \\ \eta & N\xi & \eta' & N\xi' \\ N\xi' & N\eta' & \xi & \eta \end{vmatrix}$$

soient $\equiv 0$. Donc, en remarquant que l'on doit avoir $\xi\eta' - \eta\xi' \not\equiv 0$, on a les deux conditions

$$N\xi'(\eta\eta' - N\xi\xi') + N\xi'(\eta\xi' - \xi\eta') + \xi(N\xi^2 - \eta^2),$$
$$N\eta'(\eta\eta' - N\xi\xi') + N^2\xi'(\eta\xi' - \xi\eta') + \eta(N\xi^2 - \eta^2)$$

qui donnent

$$\eta\eta' - N\xi\xi' \equiv 0, \qquad N\xi^2 - \eta^2 + N(N\xi'^2 - \eta'^2) \equiv 0,$$

et, par suite,

$$\xi' \equiv \omega\eta, \qquad \eta' \equiv \omega N\xi, \qquad \omega N = \pm 1.$$

On a donc entre ξ et η les deux relations

$$\xi(xx' - Nyy') + \eta[(xy' - yx') - \omega N(x^2 - Ny^2)] \equiv 0,$$
$$N\xi[(xy' - yx') - \omega N(x^2 - Ny^2)] + \eta(xx' - Nyy') \equiv 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Comme on n'a pas $\xi \equiv \eta \equiv 0$, le déterminant de ces deux équations est $\equiv 0$, ce qui exige

$$xx' - \mathrm{N}yy' \equiv 0, \qquad xy' - yx' - \omega\mathrm{N}(x^2 - \mathrm{N}y^2) \equiv 0,$$

et, par suite,

$$x' \equiv \omega\mathrm{N}^2 y, \qquad y' \equiv \omega\mathrm{N}x,$$

d'où l'on conclut

$$z' \equiv \omega\mathrm{N}u, \qquad u' \equiv \omega\mathrm{N}^2 u.$$

Si l'on était parti de l'hypothèse $\mathrm{N}z^2 - u^2 \not\equiv 0$, un calcul tout semblable aurait conduit aux mêmes résultats.

En opérant respectivement sur les équations (11), (12), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) comme on a fait sur les équations (1), (2), (3), (4), (7), (8), (5), (6), (9), (10) on trouve

$$x''' \equiv \omega\mathrm{N}y'', \qquad y''' \equiv \omega x'', \qquad z''' \equiv \omega u'', \qquad u''' \equiv \omega\mathrm{N}z''.$$

Les conditions (1) à (12) se réduisent alors aux deux seules équations (3) et (4), toutes les autres étant vérifiées; et les huit dernières formules de la transformation générale deviennent

$$\begin{aligned}
&(13) \qquad \xi\alpha_1 + \omega\eta\beta_1 \equiv \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z + \alpha''' u,\\
&(14) \qquad \eta\alpha_1 + \omega\mathrm{N}\xi\beta_1 \equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u,\\
&(15) \qquad \xi\alpha'_1 + \omega\eta\beta'_1 \equiv \omega\mathrm{N}(\alpha\mathrm{N}y + \alpha' x + \alpha'' u + \alpha'''\mathrm{N}z),\\
&(16) \qquad \eta\alpha'_1 + \omega\mathrm{N}\xi\beta'_1 \equiv \omega\mathrm{N}(\beta\mathrm{N}y + \beta' x + \beta'' u + \beta'''\mathrm{N}z),\\
&(17) \qquad \xi\alpha''_1 + \omega\eta\beta''_1 \equiv \alpha x'' + \alpha' y'' + \alpha'' z'' + \alpha''' u'',\\
&(18) \qquad \eta\alpha''_1 + \omega\mathrm{N}\xi\beta''_1 \equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \beta''' u'',\\
&(19) \qquad \xi\alpha'''_1 + \omega\eta\beta'''_1 \equiv \omega(\alpha\mathrm{N}y'' + \alpha' x'' + \alpha'' z'' + \alpha''' u''),\\
&(20) \qquad \eta\alpha'''_1 + \omega\mathrm{N}\xi\beta'''_1 \equiv \omega(\beta\mathrm{N}y'' + \beta' x'' + \beta'' u'' + \beta'''\mathrm{N}z''),
\end{aligned}$$

Le déterminant commun des seconds membres est

$$\mathrm{D} = \omega^2\mathrm{N}[(x^2 - \mathrm{N}y^2)(\mathrm{N}z''^2 - u''^2) + (x''^2 - \mathrm{N}y''^2)(\mathrm{N}z^2 - u^2) + 2\mathrm{N}(xy'' - yx'')(zu'' - uz'')].$$

Avant de discuter ces formules, remarquons qu'il est possible de simplifier les équations de G. Les équations du groupe quotient $\mathrm{G}|\{b\}$ sont en effet

$$\left.\begin{array}{l} a^p \equiv 1, \quad c^p \equiv a^\alpha, \quad d^p \equiv a^{\alpha'}, \quad e^p \equiv a^{\alpha''}, \quad f^p \equiv a^{\alpha'''},\\ d^{-1}cd \equiv c \quad e^{-1}ce \equiv ca, \quad f^{-1}cf \equiv e, \quad e^{-1}de \equiv d, \quad f^{-1}df \equiv da, \quad f^{-1}ef \equiv e \end{array}\right\} \bmod \{b\},$$

$\mathrm{G}|\{b\}$ est donc un g_{p^5} de figure (1)(1111) dont il existe deux types correspondant ici à

$$\alpha = 0, 1, \qquad a' = \alpha'' = \alpha''' = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les équations de G auront donc les deux formes générales

$$a^p = b^p = 1, \quad c^p = b^\beta a^\alpha, \quad d^p = b^{\beta'}, \quad e^p = b^{\beta''}, \quad f^p = b^{\beta'''} \quad (\alpha = 0, 1),$$
$$d^{-1}cd = cb^\lambda, \quad c^{-1}ce = cb^{\lambda'}a, \quad f^{-1}cf = cb^{\lambda''}, \quad e^{-1}de = db^\mu, \quad f^{-1}df = db^{\mu'}a, \quad f^{-1}ef = eb^\nu.$$

En prenant $b^{\lambda'}a$ pour a, on peut faire $\lambda' = 0$. On ne peut avoir $\lambda \equiv \lambda''' \equiv 0$, sans quoi le p. p. c. m. des commutateurs $c^{-1}g^{-1}cg$, g parcourant G, serait d'ordre p, donc, comme on l'a vu, G contiendrait un g_{p^5} de figure $(111)(11)$, contrairement à l'hypothèse. Si λ'' est $\not\equiv 0$, en prenant $b^{\lambda''}$ pour b, on peut faire $\lambda'' = 1$. Si λ'' est $\equiv 0$, donc $\lambda \not\equiv 0$, en prenant $fd^{\lambda^{-1}}$ pour f, on peut encore faire $\lambda'' = 1$. En prenant $f^{-\lambda}d$ pour d on peut faire $\lambda = 0$. Il faut $\mu \not\equiv 0$, sans quoi le p. p. c. m. des commutateurs $d^{-1}g^{-1}dg$, g parcourant G, serait d'ordre p; on peut donc, en prenant $fd^{\nu\mu^{-1}}$ pour f, faire $\nu = 0$. Aucun des changements de générateurs faits jusqu'ici ne change la valeur de α; il en est de même pour celui qui ramène μ μ' aux valeurs N, 0 et dans lequel on a $\xi = x = 1$, $\xi' = x' = x'' = x''' = 0$. Les deux formes générales des équations de G sont donc,

$$c^p = b^\beta a^\alpha, \quad d^p = b^{\beta'}, \quad e^p = b^{\beta''}, \quad f^p = b^{\beta'''}, \quad (\alpha = 0, 1),$$
$$d^{-1}cd = c, \quad c^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = cb, \quad e^{-1}de = db^N, \quad f^{-1}df = da, \quad f^{-1}ef = e.$$

Remarquons que le groupe P des puissances p-ièmes des éléments de G est d'ordre p toujours et seulement si l'on a $\alpha = 0$ ou bien $\alpha = 1$, $\beta' \equiv \beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$. Il est facile de voir que, en supposant $\alpha = 1$, $\beta' = \beta'' = \beta''' = 0$, on peut avoir $\alpha_1 = 0$, en sorte que le deuxième cas se ramène au premier. Faisons, en effet, dans les formules (13)-(20), $\alpha = 1$, $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \beta' = \beta'' = \beta''' = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha'_1 = \alpha''_1 = \alpha'''_1 = 0$, il vient

$$\begin{aligned} \omega\eta\beta_1 &\equiv x, & \omega N\xi\beta_1 &\equiv \beta x, \\ \eta\beta'_1 &\equiv N^2 y, & \xi\beta'_1 &\equiv N\beta y, \\ \omega\eta\beta''_1 &\equiv x'', & \omega N\xi\beta''_1 &\equiv \beta x, \\ \eta\beta'''_1 &\equiv N y'', & \xi\beta'''_1 &\equiv \beta y''. \end{aligned}$$

En éliminant β_1, β'_1, β''_1, β'''_1, on trouve la condition unique

$$\eta\beta - N\xi \equiv 0,$$

ou, en tenant compte des formules (3) et (4),

$$\beta[xu'' - ux'' + N(yz'' - zy'')] - N(xz'' - zx'' + yu'' - uy'') \equiv 0.$$

On peut la vérifier en prenant par exemple $x = 1$, $y = 0$, $z = u = 0 = x'' = y'' = 0$, $z'' = \beta$, $u'' = N$, ce qui donne $D = \beta^2 - N$. Nous avons donc seulement à considérer deux cas : 1° $\alpha = 0$, 2° $\alpha = 1$ sans que l'on ait $\beta' \equiv \beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$. Dans le premier cas, P est

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

d'ordre p; dans le deuxième cas, d'ordre p^2. Il y a donc distinction complète entre les deux cas.

Supposons d'abord $\alpha = 0$. On a $\beta_1 \equiv \beta'_1 \equiv \beta''_1 \equiv \beta'''_1 \equiv 0$ toujours et seulement si l'on a $\beta \equiv \beta' \equiv \beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$; d'où un premier type

$$\beta = \beta' = \beta'' = \beta''' = 0.$$

Supposons que l'on n'ait pas $\beta = \beta' = \beta'' = \beta''' = 0$. Les formules (13), (15), (17), (19) donnent $\eta \equiv 0$, et nous n'avons à nous occuper que des formules (14), (16), (18), (20), auxquelles il faut joindre

$$\xi \equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'' \not\equiv 0, \qquad xu'' - ux'' + N(yz'' - zy'') \equiv 0.$$

Si β est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta_1 = 0$ en prenant

$$z = u = 0, \qquad x = \beta', \qquad y = -\beta, \qquad z'' = \beta', \qquad u'' = N\beta,$$

ce qui donne bien

$$\xi \equiv \beta'^2 - N\beta^2 \not\equiv 0, \qquad D \equiv (\beta'^2 - N\beta^2)^2 \not\equiv 0.$$

Soit donc $\beta_1 = \beta = 0$, donc $0 \equiv \beta' y + \beta'' z + \beta''' u$. Si l'on a $\beta' \not\equiv 0$, on peut faire $\beta'_1 = 0$. Car, si l'on a $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$, on fera $\beta'_1 = 0$ en prenant $x = y = u = 0$, $z = 1$, $x'' = N$, $y'' = 0$, ce qui donne $\xi \equiv -N$, $D \equiv -N^2$; et, si l'on n'a pas $\beta' \equiv \beta'' \equiv 0$, on fera $\beta'_1 = 0$ en prenant $x'' = y'' = 0$, $x = \beta'^{-1}$, $y = 0$, $z'' = 1$, $u'' = 0$, z et u solutions de $\beta'' u + \beta''' N z \equiv 1$, $\beta'' z + \beta''' u \equiv 0$, ce qui donne $\xi \equiv -\beta'^{-1}$, $\beta'^2 D \equiv N$. Soit donc $\beta'_1 = \beta' = 0$, donc β'' ou $\beta''' \not\equiv 0$, en sorte que l'on a

$$z \equiv u \equiv 0, \qquad xu'' + Nyz'' = 0, \qquad \xi \equiv xz'' + yu'' \not\equiv 0, \qquad D = \omega^2 N(x^2 - Ny^2)(Nz''^2 - u''^2) \not\equiv 0,$$
$$\omega N \xi \beta''_1 \equiv \beta'' z'' + \beta''' u'', \qquad N\xi\beta'''_1 \equiv \beta'' u'' + \beta''' N z''.$$

On peut toujours faire $\beta''_1 = 0$, $\beta'''_1 = 1$, en prenant

$$z'' = \beta''', \qquad u'' = -\beta'', \qquad x = \beta''', \qquad y = \beta'' N^{-1},$$

ce qui donne

$$N\xi \equiv N\beta'''^2 - \beta''^2, \qquad D = \omega^2 (N\beta'''^2 - \beta''^2)^2.$$

Ainsi, lorsque P *est d'ordre* p, G *a les deux types*

$$\beta = \beta' = \beta'' = 0, \qquad \beta''' = 0, 1.$$

Supposons maintenant $\alpha = 1$, β', β'', β''' n'étant pas tous $\equiv 0$. En faisant dans les for-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

mules (13) à (20) $\alpha_1 = \alpha = 1$, $\alpha'_1 = \alpha' = \alpha''_1 = \alpha'' = \alpha'''_1 = \alpha''' = 0$, il vient

$$\begin{aligned}
\xi + \omega\eta\beta_1 &\equiv x, & \eta + \omega N\xi\beta_1 &\equiv \beta x + \beta' y + \beta'' z + \beta''' u,\\
\eta\beta'_1 &\equiv N^2 y, & \xi\beta'_1 &\equiv \beta N y + \beta' x + \beta'' u + \beta''' N z,\\
\omega\eta\beta''_1 &\equiv x'', & \omega N\xi\beta''_1 &\equiv \beta x'' + \beta' y'' + \beta'' z'' + \beta''' u'',\\
\eta\beta'''_1 &\equiv N y'', & N\xi\beta'_1 &\equiv \beta N y'' + \beta' x'' + \beta'' u'' + \beta''' N z'',
\end{aligned}$$

auxquelles il faut joindre les formules (3) et (4). Si β est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta_1 = 0$ en prenant $x = 1$, $y = z = u = 0$, $x'' = y'' = 0$, $z'' = 1$, $u'' = \beta$, ce qui donne $D = \omega^2 N(N - \beta^2)$, $\xi = 1$. En supposant $\beta_1 = \beta = 0$, on a

$$\xi \equiv x \equiv xz'' - zx'' + yu'' - uy'', \qquad \eta \equiv \beta' y + \beta'' z + \beta''' u \equiv xu'' - ux'' + N(yz'' - zy''), \qquad (\xi \text{ ou } \eta \not\equiv 0).$$

Si l'on fait $\beta''_1 \equiv \beta'''_1 \equiv 0$ il vient

$$x'' = y'' = \beta'' z'' + \beta''' u'' \equiv \beta'' u'' + \beta''' N z'',$$

et, comme on doit avoir $Nz''^2 - u''^2 \not\equiv 0$ sans quoi D est $\equiv 0$, il faut $\beta'' \equiv \beta''' \equiv 0$.

Supposons d'abord $\beta''_1 = \beta'' = \beta'''_1 = \beta''' = 0$, on a

$$\begin{gathered}
x'' \equiv y'' \equiv 0, \qquad \xi \equiv x \equiv xz'' + yu'', \qquad \eta \equiv \beta' y \equiv xu'' + Nyz'',\\
D = \omega^2 N(x^2 - Ny^2)(Nz''^2 - u''^2) \not\equiv 0, \qquad x(\beta'_1 - \beta') \equiv 0, \qquad y(\beta'_1\beta' - N^2) \equiv 0.
\end{gathered}$$

Si β' est $\equiv 0$ on a $y \equiv 0$, donc $x \not\equiv 0$, donc $\beta'_1 \equiv 0$. Si β' est $\not\equiv 0$ et $\beta'_1 \not\equiv \beta'$ on a $x \equiv 0$, donc $y \not\equiv 0$, donc $\beta'_1\beta' \equiv N^2$. Ainsi G a $\frac{p+3}{2}$ types qui, en prenant pour N une racine primitive i de p, correspondent à

$$\beta = 0, \qquad \beta' = 0, i, \ldots, i^{\frac{p+1}{2}}, \qquad \beta'' = \beta''' = 0.$$

Supposons maintenant β'' où $\beta''' \not\equiv 0$. Si β' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta'_1 = 0$ en prenant

$$y = x'' = y'' = 0, \qquad x = z'' = 1, \qquad u'' = \eta = 0, \qquad \beta'' z + \beta''' u \equiv 0, \qquad N\beta''' z + \beta'' u \equiv -\beta',$$

ce qui donne $D = 1$. Soit donc $\beta'_1 = \beta' = 0$, d'où

$$y \equiv 0, \qquad \xi \equiv x \equiv xz'' - zx'' - uy'', \qquad \eta \equiv \beta'' z + \beta''' u \equiv xu'' - ux'' - Nzy'', \qquad \beta'' u + \beta''' N z \equiv 0,$$

et en résolvant les formules (17) à (20)

$$\begin{gathered}
Nxx'' - \eta(\beta'' z'' + \beta''' u'') \equiv 0, \qquad N^2 xy'' - \eta(\beta'' u'' + \beta''' N z'') \equiv 0,\\
\omega(\eta^2 - Nx^2)\beta''_1 \equiv \eta x'' - x(\beta'' z'' + \beta''' u''), \qquad (\eta^2 - Nx^2)\beta'''_1 \equiv N\eta y'' - x(\beta'' u'' + \beta''' N z'').
\end{gathered}$$

Si β'' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta''_1 = 0$ en prenant $x'' = 0$, $z'' = \lambda\beta'''$, $u'' = -\lambda\beta''$, $z = \beta''$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

$u = -N\beta'''$, car les autres équations de condition deviennent

$$\beta'''(\lambda x + Ny'') - x \equiv 0, \qquad \beta''(\lambda x + Ny'') + \beta''^2 - N\beta'''^2 \equiv 0, \qquad N^2 xy'' + \lambda(\beta''^2 - N\beta'''^2) \equiv 0;$$

or on a un système équivalent en remplaçant la première par

$$\beta'' x + \beta'''(\beta''^2 - N\beta'''^2) \equiv 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant x et y'',

$$N\beta'''(\beta''^2 - N\beta'''^2) + \lambda\beta''^2 \equiv 0,$$

ce qui détermine λ. On a d'ailleurs $D = \omega^2 N\beta''^{-2}(\beta''^2 - N\beta'''^2)$. Supposons donc $\beta''_1 = \beta'' = 0$, donc $\beta'''_1\beta''' \not\equiv 0$, nous aurons

$$y \equiv \eta \equiv u \equiv u'' \equiv x'' \equiv y'' \equiv 0, \qquad \xi \equiv x \not\equiv 0, \qquad z'' \equiv 1, \qquad x\beta'''_1 \equiv \beta''',$$

et nous pourrons toujours faire $\beta'''_1 = 1$, d'où un type correspondant à

$$\beta = \beta' = \beta'' = 0, \qquad \beta''' = 1.$$

Figure (11)(11)(11).

30. D'après les types connus de figure (11)(11), G aura des équations de la forme

$$c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \qquad e^p = d^\mu b^\delta a^\gamma, \qquad f^p = d^{\mu'} c^{\lambda'} b^{\delta'} a^{\gamma'},$$
$$d^{-1}cd = cb^\sigma a^\rho, \qquad e^{-1}ce = cb^{\sigma'} a^{\rho'}, \qquad f^{-1}cf = cb^{\sigma''} a^{\rho''},$$
$$e^{-1}de = db^\nu a^\varkappa, \qquad f^{-1}df = db^{\nu'} a^{\varkappa'}, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

Les exposants λ', μ, μ' ont les déterminations suivantes, correspondant aux types distincts de G | A :

	$p > 2$.				$p = 2$.			
	I.	II.	III.	IV.	I'.	II'.	III'.	IV'.
λ'	0	0	1	1	0	0	1	1
μ	0	0	0	1	0	1	0	1
μ'	0	1	0	0	0	1	0	0

Les conditions d'ordre donnent

$$\sigma \equiv \rho \equiv \mu\nu \equiv \mu\varkappa \equiv 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

puis, en retranchant désormais un accent aux lettres ρ, σ,

$$\alpha' + \varepsilon\varkappa - \mu\varkappa' \equiv \alpha' + \varepsilon\varkappa' + \rho\lambda' + \varkappa\mu' \equiv \rho'\lambda' + \varkappa'\mu' \equiv 0,$$
$$\beta' + \varepsilon\nu - \mu\nu' \equiv \beta' + \varepsilon\nu' + \sigma\lambda' + \nu\mu' \equiv \sigma'\lambda' + \nu'\mu' \equiv 0,$$

et la condition de figure est que les déterminants de

$$\begin{vmatrix} \rho & \rho' & \sigma & \sigma' \\ \varkappa & \varkappa' & \nu & \nu' \end{vmatrix}$$

ne soient pas tous $\equiv 0$. On voit que les types I, IV, I′, III′ de G|A conviennent seuls.

Si l'on pose

$$g = f^u e^z d^y c^x, \qquad g' = f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'}, \qquad g'g = f^{U'} e^{Z'} d^{Y'} c^{X'} b^{K'} a^{H'},$$
$$g^\nu = f^{U_\nu} e^{Z_\nu} d^{Y_\nu} c^{X_\nu} b^{K_\nu} a^{H_\nu}, \qquad g^p = d^{D_p} c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p},$$

on trouve par récurrence

$$U' + u' + u, \qquad Z' = z' + z, \qquad Y' = z'u + y' + y, \qquad X' = x' + x,$$
$$H' = \rho z x' + \rho' u x' + \varkappa\left[y'z + z'zu + u\binom{z'}{2}\right] + \varkappa'\left[y'u + z'\binom{u}{2}\right],$$
$$K' = \sigma z x' + \sigma' u x' + \nu\left[y'z + z'zu + u\binom{z'}{2}\right] + \nu'\left[y'u + z'\binom{u}{2}\right],$$
$$U_\nu = \nu u, \qquad Z_\nu = \nu z, \qquad Y_\nu = \nu y + u z \Sigma_1^{\nu-1} t, \qquad X_\nu = \nu x,$$
$$H_\nu = \left[\rho x z + \rho' x u + \varkappa y z + \varkappa'\left[y u + z\binom{u}{2}\right]\right]\Sigma_1^{\nu-1} t + \varkappa z^2 u \Sigma_1^{\nu-1}\Sigma_1^t t + \varkappa u \Sigma_1^{\nu-1}\binom{tz}{2} + \varkappa' u^2 z \Sigma_1^{\nu-2}\Sigma_1^t t,$$
$$K_\nu = \left[\sigma x z + \sigma' x u + \nu y z + \nu'\left[y u + z\binom{u}{2}\right]\right]\Sigma_1^{\nu-1} t + \nu z^2 u \Sigma_1^{\nu-1}\Sigma_1^t t + \nu u \Sigma_1^{\nu-1}\binom{tz}{2} + \nu' u^2 z \Sigma_1^{\nu-2}\Sigma_1^t t,$$
$$D_p = \mu z + \varepsilon u z, \qquad C_p = \lambda' u,$$
$$A_p = \alpha x + \alpha' y + \gamma z + \gamma' u - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\alpha' z u + \varepsilon' z u(\varkappa' u - \varkappa z)$$
$$+ \varepsilon\left[\rho x z + \rho' x u + \varkappa\left[y z + z u + u\binom{z}{2}\right] + \varkappa'\left[y u + z\binom{u}{2}\right]\right],$$
$$B_p = \beta x + \beta' y + \delta z + \delta' u - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\beta' z u - \varepsilon' z u(\nu' u - \nu z)$$
$$+ \varepsilon\left[\sigma x z + \sigma' x u + \nu\left[y z + z u + u\binom{z}{2}\right] + \nu'\left[y u + z\binom{u}{2}\right]\right],$$

et l'on a $g^{-1}g'^{-1}gg' = d^{zu'-uz'} b^{K_1'-K'} a^{H_1'-H'}$, H_1', K_1' désignant ce que deviennent H', K' quand on y échange les lettres accentuées et non accentuées de même nom.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

est de la forme

$$a_1 = b^{\eta} a^{\xi}, \qquad b_1 = b^{\eta'} a^{\xi'}, \qquad c_1 = d^s c^r b^k a^h, \qquad d_1 = d^{s'} c^{r'} b^{k'} a^{h'},$$
$$e_1 = f^u e^z d^y c^x b^m a', \qquad f_1 = f^{u'} e^{z'} d^{y'} c^{x'} b^{m'} a'',$$

tous les exposants étant $< p$, avec les conditions

$$(\xi\eta' - \eta\xi') rs' \not\equiv 0, \qquad s' \equiv zu' - uz', \qquad r \equiv 0, \qquad k' \equiv K'_1 - K', \qquad h' \equiv H'_1 - H'.$$

Examinons séparément les différents cas.

1° $p > 2$.

Type 1 *de* G|A.

31. Les conditions d'ordre donnent $\alpha' \equiv \beta' \equiv 0$, et la transformation opérée sur les exposants par le changement de générateurs est définie par

$$(1) \qquad \begin{cases} \varkappa_1 \xi + \nu_1 \xi' \equiv s'(\varkappa z + \varkappa' u), & \varkappa_1 \eta + \nu_1 \eta' \equiv s'(\nu z + \nu' u), \\ \varkappa'_1 \xi + \nu'_1 \xi' \equiv s'(\varkappa z' + \varkappa' u'), & \varkappa'_1 \eta + \nu'_1 \eta' \equiv s'(\nu z' + \nu' u'), \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho_1 \xi + \sigma_1 \xi' \equiv r(\rho z + \rho' u) + s(\varkappa z + \varkappa' u), & \rho_1 \eta + \sigma_1 \eta' \equiv r(\sigma z + \sigma' u) + s(\nu z + \nu' u), \\ \rho'_1 \xi + \sigma'_1 \xi' \equiv r(\rho z' + \rho' u') + s(\varkappa z' + \varkappa' u'), & \rho'_1 \eta + \sigma'_1 \eta' \equiv r(\sigma z' + \sigma' u') + s(\nu z' + \nu' u'), \end{cases}$$

$$(3) \qquad \alpha_1 \xi + \beta_1 \xi' \equiv \alpha r, \qquad \alpha_1 \eta + \beta_1 \eta' \equiv \beta r,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \gamma_1 \xi + \delta_1 \xi' \equiv A_p, & \gamma_1 \eta + \delta_1 \eta' \equiv B_p, \\ \gamma'_1 \xi + \delta'_1 \xi' \equiv A'_p, & \gamma'_1 \eta + \delta'_1 \eta' \equiv B'_p, \end{cases}$$

A'_p, B'_p désignant ce que deviennent A_p, B_p quand on y accentue les lettres x, y, z, u.

On tire de (1)

$$(\xi\eta' - \eta\xi')(\varkappa_1 \nu'_1 - \nu_1 \varkappa'_1) \equiv s'^3 (\varkappa\nu' - \nu\varkappa').$$

Si l'on a $\varkappa\nu' - \nu\varkappa' \equiv 0$, comme on n'a pas $\varkappa \equiv \nu \equiv \varkappa' \equiv \nu' \equiv 0$, on peut toujours faire $\varkappa_1 = \nu_1 = \varkappa'_1 = 0$, $\nu'_1 = 1$. Si l'on a $\varkappa\nu' - \nu\varkappa' \not\equiv 0$, on peut toujours faire $\varkappa_1 = \nu'_1 = 1$, $\varkappa'_1 = \nu_1 = 0$.

32. Soit d'abord $\varkappa_1 = \varkappa = \nu_1 = \nu = \varkappa'_1 = \varkappa' = 0$, $\nu'_1 = \nu' = 1$, donc $\xi' \equiv u \equiv 0$, $\eta' \equiv s'u' \equiv zu'^2$; les formules (2) deviennent :

$$\rho_1 \xi \equiv \rho z r, \qquad \rho_1 \eta + \sigma_1 z u'^2 \equiv \sigma z r,$$
$$\rho'_1 \xi \equiv r(\rho z' + \rho' u'), \qquad \rho'_1 \eta + \sigma'_1 z u'^2 \equiv r(\sigma z' + \sigma' u') + s u'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

La condition de figure exigeant que l'on n'ait pas $\rho \equiv \sigma \equiv \rho' \equiv 0$, on peut toujours faire l'une des quatre hypothèses, irréductibles l'une à l'autre

$$\rho_1 = \sigma_1 = 0, \quad \rho'_1 = 1, \quad \sigma'_1 = 0; \qquad \rho_1 = 0, \quad \sigma_1 = 1, \quad \rho'_1 = 0, 1, \quad \sigma'_1 = 0;$$
$$\rho_1 = 1, \quad \rho'_1 = \sigma_1 = \sigma'_1 = 0.$$

Soit $\rho_1 = \rho = \sigma_1 = \sigma = \sigma'_1 = \sigma' = 0$, $\rho'_1 = \rho' = 1$, donc $\xi \equiv ru'$, $\eta \equiv su'$; les formules (3) deviennent

$$u'\alpha_1 \equiv \alpha, \qquad su'\alpha_1 + zu'^2\beta_1 \equiv \beta r$$

et permettent de faire toujours l'une des trois hypothèses, irréductibles l'une à l'autre :

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, 1; \qquad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0.$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 0$, les formules (4) deviennent

$$\gamma_1 ru' \equiv \gamma z, \qquad \gamma_1 su' + \delta_1 zu'^2 \equiv \delta z,$$
$$\gamma'_1 ru' \equiv \gamma z' + \gamma' u', \qquad \gamma'_1 su' + \delta'_1 zu'^2 \equiv \delta z' + \delta' u' + \varepsilon' z',$$

et donnent comme systèmes irréductibles auxquels correspondent les types distincts de G :

$$\begin{array}{llll}
\gamma = \gamma' = 0, & \delta = 0, & \delta' = 0, 1; & (p > 3), \\
\gamma = \gamma' = 0, & \delta = 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0; & (p > 3), \\
\gamma = \gamma' = 0, & \delta = 0, 1, & \delta' = 0; & (p = 3), \\
\gamma = \gamma' = 0, & \delta = -1, & \delta' = 0, 1; & (p = 3), \\
\gamma = 0, \quad \gamma' = 1, & \delta = 0, 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0; & (p \geqq 3), \\
\gamma = 1, \quad \gamma' = 0, & \delta = 0, & \delta' = 0; & (p \geqq 3), \\
\gamma = 1, \quad \gamma' = 0, & \delta = 0, & \delta' = 1; & (p > 3).
\end{array}$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, donc $r \equiv zu'^2$, les formules (4) deviennent

$$\gamma_1 u'^3 \equiv \gamma, \qquad \gamma_1 su' + \delta_1 zu'^2 \equiv x + \delta z,$$
$$\gamma'_1 zu'^3 \equiv \gamma z' + \gamma' u', \qquad \gamma'_1 su' + \delta'_1 zu'^2 \equiv x' + \delta z' + \delta' u' + \varepsilon' z'.$$

On peut toujours faire $\delta_1 = \delta'_1 = 0$; donc en supposant $\delta_1 = \delta = \delta'_1 = \delta' = 0$, $\gamma_1 su' \equiv x$, $\gamma'_1 su' \equiv x' + \varepsilon' z'$, on voit que les systèmes irréductibles auxquels correspondent les types distincts de G sont

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, 1; \qquad \gamma = (1, i, i^2), \quad \gamma' = 0, \quad (p \geqq 3);$$

les trois valeurs de γ comprises dans la parenthèse fournissent le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 3$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 1$, $\beta_1 = \beta = 0$, donc $u' \equiv 1$, $s \equiv 0$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 r &\equiv x + \gamma z', & \delta_1 &\equiv \delta, \\ \gamma'_1 r &\equiv x' + \gamma z' + \gamma', & \delta'_1 z &\equiv \delta z' + \delta' + \varepsilon' z'. \end{aligned}$$

On peut toujours faire $\gamma_1 = \gamma'_1 = 0$, et les types distincts de G correspondent à

$$\begin{array}{llll} \delta = 0, & \delta' = 0, 1; & \delta = 1, \ldots, p-1, & \delta' = 0; \quad (p > 3), \\ \delta = 0, 1, & \delta' = 0; & \delta = -1, & \delta' = 0, 1; \quad (p = 3). \end{array}$$

Soit $\rho_1 = \rho = 0$, $\sigma_1 = \sigma = 1$, $\rho'_1 = \rho' = \sigma'_1 = \sigma' = 0$, donc $r \equiv u'^2$, $s \equiv -z'u'$; les formules (3) deviennent

$$\alpha_1 \xi \equiv \alpha u'^2, \qquad \alpha_1 \eta + \beta_1 z u'^2 \equiv \beta u'^2$$

et conduisent pour α, β aux trois mêmes hypothèses irréductibles.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 0$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 \xi &\equiv \gamma z, & \gamma_1 \eta + \delta_1 z u'^2 &\equiv \delta z, \\ \gamma'_1 \xi &\equiv \gamma z' + \gamma' u', & \gamma'_1 \eta + \delta'_1 z u'^2 &\equiv \delta z' + \varepsilon' z'. \end{aligned}$$

Elles ont la même forme que dans le cas $\rho = \sigma = 0$, $\rho' = 1$, $\sigma' = 0$, $\alpha = \beta = 0$. Les types distincts de G correspondent donc aux mêmes systèmes irréductibles de valeurs de γ, δ, γ', δ'.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, donc $z \equiv 1$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 \xi &\equiv \gamma, & \gamma_1 \eta + \delta_1 u'^2 &\equiv x + \delta z, \\ \gamma'_1 \xi &\equiv \gamma z' + \gamma' u', & \gamma'_1 \eta + \delta'_1 u'^2 &\equiv x' + \delta z' + \delta' u' + \varepsilon' z'. \end{aligned}$$

On peut toujours faire $\delta_1 = \delta'_1 = 0$ et l'on voit que les types distincts de G correspondent aux trois systèmes

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, 1; \qquad \gamma = 1, \quad \gamma' = 0.$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 1$, $\beta_1 = \beta = 0$, donc $\xi \equiv u'^2$, $\eta \equiv 0$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 u'^2 &\equiv x + \gamma z, & \delta_1 u'^2 &\equiv \delta, \\ \gamma'_1 u'^2 &\equiv x' + \gamma z' + \gamma' u', & \delta'_1 z u'^2 &\equiv \delta z' + \delta' u' + \varepsilon' z'. \end{aligned}$$

On peut toujours faire $\gamma_1 = \gamma'_1 = 0$, et l'on voit que les types distincts de G correspondent aux quatre systèmes

$$\begin{array}{llll} \delta = 0, & \delta' = 0, \mathrm{N}; & \delta = 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0; \quad (p > 3), \\ \delta = 0, 1, & \delta' = 0; & \delta = -1, & \delta' = 0, 1; \quad (p = 3). \end{array}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Soit $\rho_1 = \rho = \sigma'_1 = \sigma' = 0$, $\sigma_1 = \sigma = \rho'_1 = \rho' = 1$, donc $\xi \equiv u'^3$, $r \equiv u'^2$, $\eta \equiv u'(z'u' + s)$. Les formules (3) conduisent encore aux trois mêmes hypothèses irréductibles sur α, β.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 0$, les formules (4) deviennent

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 u'^3 \equiv \gamma z & \gamma_1 u'(s + z'u') + \delta_1 z u'^2 \equiv \delta z, \\ \gamma'_1 u'^3 \equiv \gamma z' + \gamma' u', & \gamma'_1 u'(s + z'u') + \delta'_1 z u'^2 \equiv \delta z' + \delta' u' + \varepsilon' z', \end{array}$$

et l'on voit que les types distincts de G correspondent à

$$\begin{array}{llllll} & \gamma = \gamma' = 0, & \delta = 0, & \delta' = 0, 1; & (p > 3), \\ & \gamma = \gamma' = 0, & \delta = 0, 1, & \delta' = 0; & (p = 3), \\ & \gamma = \gamma' = 0, & \delta = 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0; & (p > 3), \\ & \gamma = \gamma' = 0, & \delta = -1, & \delta' = 0, 1; & (p = 3); \\ \gamma = 0, & \gamma' = 1, \mathrm{N}, & \delta = 0, 1, \ldots, p-1, & \delta' = 0; & (p \geqq 3), \\ \gamma = 1, & \gamma' = 0, & \delta = 0, & \delta' = 0; & (p \geqq 3), \\ \gamma = 1, & \gamma' = 0, & \delta = 0, & \delta' = (1, i^2), (i, i^3); & (p > 3); \end{array}$$

deux valeurs de δ' comprises dans une même parenthèse fournissent le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 4$.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, donc $z \equiv 1$, les formules (4) deviennent

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 u'^3 \equiv \gamma, & \gamma_1 u'(s + z'u') + \delta_1 u'^2 \equiv x + \delta, \\ \gamma'_1 u'^3 \equiv \gamma z' + \gamma' u', & \gamma'_1 u'(s + z'u') + \delta'_1 u'^2 \equiv x' + \delta z' + \delta' u' + \varepsilon' z'. \end{array}$$

On peut toujours faire $\delta_1 = \delta'_1 = 0$, et les types distincts de G correspondent aux systèmes

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0, 1; \quad \gamma = (1, i, i^2), \quad \gamma' = 0; \quad (p \geqq 3),$$

les valeurs de γ comprises dans la parenthèse fournissant le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 4$.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 1$, $\beta_1 = \beta = 0$, donc $u' \equiv 1$, $s + u'z' \equiv 0$, les formules (4) deviennent

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 \equiv x + \gamma z, & \delta_1 \equiv \delta, \\ \gamma'_1 \equiv x' + \gamma z' + \gamma', & \delta'_1 z \equiv \delta z' + \delta' + \varepsilon' z'. \end{array}$$

On peut toujours faire $\gamma_1 = \gamma'_1 = 0$, et les types distincts de G correspondent aux $p + 2$ systèmes

$$\begin{array}{lllll} \delta = 0, & \delta' = 0, 1; & \delta = 1, 2, \ldots, p-1, & \delta' = 0; & (p > 3), \\ \delta = 0, 1, & \delta' = 0; & \delta = -1, & \delta = 0, 1; & (p = 3). \end{array}$$

Soit $\rho_1 = \rho = 1$, $\sigma_1 = \sigma = \rho'_1 = \rho' = \sigma'_1 = \sigma' = 0$, donc $\xi \equiv rz$, $\eta \equiv s \equiv z' \equiv 0$, les for-

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

mules (3) deviennent

$$\alpha_1 z \equiv \alpha, \qquad \beta_1 z u'^2 \equiv \beta r$$

et permettent de réduire α, β aux quatre systèmes irréductibles

$$\alpha = 0, 1, \qquad \beta = 0, 1.$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 0$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 r &\equiv \gamma, & \delta_1 u'^2 &\equiv \delta, \\ \gamma'_1 r z &\equiv \gamma' u', & \delta'_1 z u' &\equiv \delta', \end{aligned}$$

et les types distincts de G correspondent aux $2p + 21$ systèmes

$$\begin{array}{lllll} \gamma = 0, & \gamma' = 0, 1, & \delta = 0, 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0, 1; & (p \geqq 3), \\ \gamma = 1, & \gamma' = 0, & \delta = 0, 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0, 1; & (p \geqq 3), \\ \gamma = 1, & \gamma' = 1, & \delta = 0, & \delta' = 0, 1, \mathrm{N}; & (p \geqq 3), \\ \gamma = 1, & \gamma' = 1, & \delta = 1, \mathrm{N}, & \delta' = 0, 1, \ldots, p-1; & (p \geqq 3). \end{array}$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, donc $r \equiv z u'^2$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 z u'^2 &\equiv \gamma, & \delta_1 z u'^2 &\equiv x + \delta z, \\ \gamma'_1 z^2 u' &\equiv \gamma', & \delta'_1 z u'^2 &\equiv x' + \delta' u'. \end{aligned}$$

On peut toujours faire $\delta_1 = \delta'_1 = 0$, et les types distincts de G correspondent aux systèmes

$$\begin{array}{llll} \gamma = 0, & \gamma' = 0, 1; & \gamma = 1, \quad \gamma' = 0, 1; & (p \geqq 3), \\ \gamma = 1, & \gamma' = i, i^2; & & (p \equiv 1 \bmod 3). \end{array}$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 1$, $\beta_1 = \beta = 0$, donc $z \equiv 1$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 r &\equiv x + \gamma, & \delta_1 u'^2 &\equiv \delta \\ \gamma'_1 r &\equiv x' + \gamma' u', & \delta'_1 u' &\equiv \delta'. \end{aligned}$$

On peut toujours faire $\gamma_1 = \gamma'_1 = 0$, et les types distincts de G correspondent aux $p + 3$ systèmes

$$\delta = 0, \qquad \delta' = 0, 1; \qquad \delta = 1, \mathrm{N}, \qquad \delta' = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}.$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 1$, donc $z \equiv 1$, $r \equiv u'^2$, les formules (4) deviennent

$$\begin{aligned} \gamma_1 u'^2 &\equiv x + \gamma, & \delta_1 u'^2 &\equiv x + \delta, \\ \gamma'_1 u'^2 &\equiv x' + \gamma' u', & \delta'_1 u'^2 &\equiv x' + \delta' u'. \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

On peut toujours faire $\gamma_1 = \gamma'_1 = 0$; en supposant $\gamma_1 = \gamma = \gamma'_1 = \gamma' = 0$, donc $x \equiv x' \equiv 0$, on a

$$\delta_1 u'^2 \equiv \delta, \qquad \delta'_1 u' \equiv \delta',$$

et les types distincts de G correspondent aux $p+3$ systèmes

$$\delta = 0, \qquad \delta' = 0, 1; \qquad \delta = 1, \mathrm{N}, \qquad \delta' = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}.$$

33. Supposons maintenant $\varkappa_1 = \varkappa = \nu'_1 = \nu' = 1$, $\varkappa'_1 = \varkappa' = \nu_1 = \nu = 0$, donc $\xi \equiv s'z$, $\xi' \equiv s'z'$, $\eta \equiv s'u$, $\eta' \equiv s'u'$, les formules (3) deviennent

$$s'(z\rho_1 + z'\sigma_1) \equiv r(\rho z + \rho' u) + sz, \qquad s'(u\rho_1 + u'\sigma_1) \equiv r(\sigma z + \sigma' u) + su,$$
$$s'(z\rho'_1 + z'\sigma'_1) \equiv r(\rho z' + \rho' u') + sz', \qquad s'(u\rho'_1 + u'\sigma'_1) \equiv r(\sigma z' + \sigma' u') + s'u'$$

et donnent, en résolvant et tenant compte de $s' \equiv zu' - uz'$,

$$s'^2\rho_1 \equiv ru'(\rho z + \rho' u) - rz'(\sigma z + \sigma' u) + ss',$$
$$s'^2\sigma_1 \equiv r[\sigma z^2 + (\sigma' - \rho)uz - \rho' u^2], \qquad s'^2\rho'_1 \equiv r[\rho' u'^2 + (\rho - \sigma')u'z' - \sigma z'^2],$$
$$s'^2\sigma'_1 \equiv rz(\sigma z' + \sigma' u') - ru(\rho z' + \rho' u') + ss'.$$

Les deux formes quadratiques σ_1 et ρ'_1 ont pour discriminant commun $(\rho - \sigma')^2 + 4\rho'\sigma$; on peut donc avoir $\rho'_1\sigma_1 \equiv 0$ toujours et seulement si $(\rho - \sigma')^2 + 4\rho'\sigma$ est carré.

Supposons d'abord $(\rho - \sigma')^2 + 4\rho'\sigma$ non carré, ce qui implique $\rho'\sigma \not\equiv 0$, les équations résolues donnent par addition

$$s'(\rho_1 + \sigma'_1) \equiv r(\rho + \sigma) + 2s.$$

En prenant $s \equiv 0$, $u' \equiv 0$, $\sigma z + \sigma' u \equiv 0$, $uz' \not\equiv 0$, on obtient $\rho_1 \equiv 0$. Soit donc $\rho_1 = \rho = 0$, donc $\sigma'^2 + 4\rho'\sigma$ non carré et

$$0 \equiv ruu'\rho' - rz'(\sigma z + \sigma' u) + ss',$$
$$s'^2\sigma_1 \equiv r(\sigma z^2 + \sigma' uz - \rho' u^2), \qquad s'^2\rho'_1 \equiv r(\rho' u'^2 - \sigma' u'z' - \sigma z'^2),$$
$$s'^2\sigma'_1 \equiv r[2\sigma zz' - 2\rho' uu' + \sigma'(zu' + uz')];$$

en prenant $z' \equiv 0$, $z \equiv u' \equiv 1$, $\sigma' - 2\rho' u \equiv 0$, $r \equiv 1$, $u\rho' + s \equiv 0$, on obtient $\sigma'_1 \equiv 0$. Soit donc $\sigma'_1 = \sigma' = 0$, donc $\rho'\sigma$ non carré et

$$0 \equiv uu'\rho' - zz'\sigma \equiv s,$$
$$s'^2\sigma_1 \equiv r(\sigma z^2 - \rho' u^2), \qquad s'^2\rho'_1 \equiv r(\rho' u'^2 - \sigma z'^2);$$

en prenant $u \equiv z' \equiv 0$, $z \equiv u' \equiv 1$, $r\rho' \equiv 1$, on obtient $\rho'_1 = 1$. Soit donc $\rho'_1 = \rho' = 1$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

donc σ non carré et

$$0 \equiv uu' - zz'\sigma' \equiv s,$$
$$s'^2\sigma_1 \equiv r(\sigma z^2 - u^2), \qquad s'^2 \equiv r(u'^2 - \sigma z'^2);$$

en prenant $u \equiv z' \equiv 0$, $u'^2 N \equiv \sigma$, $z \equiv 1$, on obtient $\sigma_1 \equiv N$ non carré arbitraire. Ainsi tous les systèmes $(\rho\sigma\rho'\sigma')$ où $(\rho - \sigma')^2 + 4\rho'\sigma$ est non carré et ceux-là seulement sont réductibles à $(0N10)$.

Supposons maintenant $(\rho - \sigma')^2 + 4\rho'\sigma$ carré, on peut faire $\rho'_1 = 0$; et si $\rho'_1 = \rho' = 0$, les formules résolues donnent

$$s'^2\rho_1 \equiv r[\rho z u' - z'(\sigma z + \sigma' u)] + ss', \qquad 0 \equiv z'[(\rho - \sigma')u' - \sigma z'],$$
$$s'^2\sigma'_1 \equiv r[z(\sigma z' + \sigma' u') - \rho u z'] + ss', \qquad s'^2\sigma_1 \equiv rz[\sigma z + (\sigma' - \rho)u],$$

d'où

$$s'^2(\rho_1 + \sigma'_1) \equiv r(\rho + \sigma') + 2s.$$

En disposant de s on peut faire $\rho_1 = 0$; soit donc $\rho_1 = \rho = 0$, donc

$$0 \equiv rz'(\sigma z + \sigma' u) - ss' \equiv z'(\sigma z' + \sigma' u'),$$
$$s'^2\sigma'_1 \equiv r[z(\sigma z' + \sigma' u') + z'(\sigma z + \sigma' u)], \qquad s'^2\sigma_1 \equiv rz[\sigma z + \sigma' u].$$

Si l'on a $\sigma' \not\equiv 0$, on ne peut avoir $\sigma'_1 \equiv 0$, car il faudrait pour cela

$$0 \equiv z'(\sigma z' + \sigma' u') \equiv z(\sigma z' + \sigma' u') + z'(\sigma z + \sigma' u),$$

donc ou bien $z' \equiv zu' \equiv 0$, ou bien $\sigma z' + \sigma' u' \equiv \sigma z + \sigma' u \equiv 0$, donc dans les deux cas $zu' - uz' \equiv 0$. Mais en prenant $z' \equiv s \equiv 0$, $z \equiv 1$, $\sigma' u \equiv -\sigma$, $\sigma' r \equiv u'$, on obtient $\sigma_1 \equiv 0$, $\sigma'_1 \equiv 1$.

Si l'on a $\sigma'_1 = \sigma' = 0$, donc $0 \equiv \sigma z'^2 \equiv s$, $s'^2\sigma_1 \equiv rz^2\sigma$, les conditions de figure exigeant $\sigma \not\equiv 0$, il faut $z' \equiv 0$, donc $z \not\equiv 0$, donc $\sigma_1 \not\equiv 0$; en prenant $r\sigma \equiv u'^2$ on peut faire $\sigma_1 = 1$. Ainsi, tout système $(\rho\sigma\rho'\sigma')$ pour lequel $(\rho - \sigma')^2 + 4\rho'\sigma$ est carré est réductible à (0001) ou à (0100), ces deux systèmes étant irréductibles l'un à l'autre.

Soit $(\rho_1\sigma_1\rho'_1\sigma'_1) = (\rho\sigma\rho'\sigma') = (0001)$, donc $sz \equiv (r+s)u \equiv z'(s'-s) \equiv u'(r+s-s') \equiv 0$, d'où, en éliminant r, s, s' $(rs' \not\equiv 0)$, $zz' \equiv uu' \equiv zu \equiv z'u' \equiv 0$. Les formules (3) deviennent

$$s'(z\alpha_1 + z'\beta_1) \equiv \alpha r, \qquad s'(u\alpha_1 + u'\beta_1) \equiv \beta r,$$

d'où, par multiplication, $(zu' + uz')^3\alpha_1\beta_1 \equiv r^2\alpha\beta$. Comme on a $(zu' + uz')^2 \equiv s'^2 \not\equiv 0$, on voit que $\alpha_1\beta_1$ est $\equiv 0$ toujours et seulement si $\alpha\beta$ est $\equiv 0$. Supposons $\alpha\beta' \equiv 0$, on peut toujours faire $\alpha_1 = 0$ (si l'on a $\alpha \not\equiv 0$, $\beta \equiv 0$, on prendra $u' \equiv z \equiv 0$, $-s \equiv r \equiv uz' \not\equiv 0$); soit donc $\alpha_1 = \alpha = 0$, donc $s'z'\beta_1 \equiv 0$, $s'u'\beta_1 \equiv \beta r$. On a $\beta_1 \equiv 0$ toujours et seulement si β est $\equiv 0$; si β est $\not\equiv 0$, en prenant $z' \equiv u \equiv s \equiv 0$, $u' \equiv \beta$, $r \equiv zu'$, on obtient $\beta_1 \equiv 1$. Supposons $\alpha\beta \not\equiv 0$, en prenant $u \equiv z' \equiv s \equiv 0$, $z \equiv \alpha$, $u' \equiv \beta$, $r \equiv \alpha\beta$, on obtient $\alpha_1 \equiv \beta_1 \equiv 1$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Tout système $(\alpha\beta)$ est donc réductible à l'un des trois systèmes irréductibles entre eux : (00), (01), (11).

Si l'on a $(\alpha_1\beta_1) = (\alpha\beta) = (00)$, les formules (4) rencontrées dans l'étude des g_{p^5} de figure $(11)(1)(11)$ donnent en les résolvant

$$s'^2\gamma_1 \equiv \gamma z u' - \delta' u z', \qquad s'^2\delta_1 \equiv -\gamma' u^2 + \delta z^2,$$
$$s'^2\delta'_1 \equiv -\gamma u z' + \delta' z u', \qquad s'^2\gamma'_1 \equiv \gamma' u'^2 - \delta z'^2;$$

on en tire

$$s'(\gamma_1 + \delta'_1) \equiv \gamma + \delta', \qquad s'^2\gamma_1\delta'_1 \equiv \gamma\delta', \qquad s'^2\delta_1\gamma'_1 \equiv \delta\gamma'.$$

Remarquant que le déterminant commun des deux couples de formules ayant pour carré s'^4 est $\not\equiv 0$, on trouve aisément les systèmes irréductibles auxquels peuvent être ramenés les systèmes $(\gamma\delta\gamma'\delta')$ pour $p \geqq 3$. Il y a d'abord

$$\gamma = \delta = \gamma' = \delta' = 0;$$

puis, si l'on a $\gamma \equiv \delta' \equiv 0$, $\delta\gamma' \equiv 0$, mais δ ou $\gamma' \not\equiv 0$,

$$\gamma = 0, \qquad \delta = 1, N, \qquad \gamma' = \delta' = 0;$$

si l'on a $\gamma\delta' \equiv 0$, mais γ' ou $\delta \not\equiv 0$ et $\delta \equiv \gamma' \equiv 0$,

$$\gamma = \delta = \gamma' = 0, \qquad \delta' = 1;$$

si l'on a $\gamma\delta' \equiv 0$, γ ou $\delta' \not\equiv 0$, $\delta\gamma' \equiv 0$, δ ou $\gamma' \not\equiv 0$,

$$\gamma = \delta = 0, \qquad \gamma' = 1, N, \qquad \delta' = 1;$$
$$\gamma = 0, \qquad \delta = 1, N, \qquad \gamma' = 0, \qquad \delta' = 1;$$

si l'on a $\delta\gamma' \not\equiv 0$ et carré, $\gamma \equiv \delta' \equiv 0$,

$$\gamma = 0, \qquad \delta = 1, \qquad \gamma' = 1, \qquad \delta' = 0;$$
$$\gamma = 0, \qquad \delta = N, \qquad \gamma' = N, \qquad \delta' = 0; \qquad (p \equiv 1 \bmod 4);$$

si l'on a $\delta\gamma' \not\equiv 0$ et non carré, $\gamma \equiv \delta' \equiv 0$,

$$\gamma = 0, \qquad \delta = N, \qquad \gamma' = 1, \qquad \delta' = 0;$$
$$\gamma = 0, \qquad \delta = 1, \qquad \gamma' = N, \qquad \delta' = 0; \qquad (p \not\equiv 1 \bmod 4);$$

si l'on a $\delta\gamma' \not\equiv 0$, $\gamma\delta' \equiv 0$, γ ou $\delta' \not\equiv 0$,

$$\gamma = 0, \qquad \delta = 1, N, \qquad \gamma' = 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \delta' = 1;$$

si l'on a $\gamma\delta' \not\equiv 0$, $\delta \equiv \gamma' \equiv 0$, en prenant $u \equiv z' \equiv 0$, $zu' \equiv \gamma$, on obtient $\gamma_1 \equiv 1$; soit

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

donc $\gamma_1 = \gamma = 1$, donc

$$s'^2 \equiv zu' - \delta' uz', \qquad s'^2 \delta'_1 \equiv -uz' + \delta' zu',$$

on en tire ou bien $z \equiv u' \equiv 0$, d'où $\delta' \delta'_1 \equiv 1$, ou bien $u \equiv z' \equiv 0$, d'où $\delta' \equiv \delta'_1$. Les systèmes irréductibles sont donc

$$\gamma = 1, \qquad \delta = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \delta' = 1, i, i^2, \ldots, i^{\frac{p-1}{2}};$$

si l'on a $\gamma\delta' \not\equiv 0$, $\delta\gamma' \equiv 0$, δ ou $\gamma' \not\equiv 0$, les systèmes irréductibles sont

$$\gamma = 1, \qquad \delta = 1, \qquad \gamma' = 0, \qquad \delta' = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Si l'on a $\gamma\delta'\delta\gamma' \not\equiv 0$, on peut comme précédemment faire $\gamma_1 = 1$, $\delta'_1 = 1, i, \ldots, i^{\frac{p-1}{2}}$. Soit donc $\gamma_1 = \gamma = 1$, $\delta'_1 = \delta'$, donc

$$\begin{aligned} s'^2 &\equiv zu' - \delta' uz', & s'^2 \delta_1 &\equiv -\gamma' u^2 + \delta z^2, \\ s'^2 \delta' &\equiv -uz' + \delta' zu', & s'^2 \gamma'_1 &\equiv \gamma' u'^2 - \delta z'^2 \end{aligned}$$

on en tire ou bien $z \equiv u' \equiv 0$, donc $s' \equiv -uz'$ et

$$\begin{aligned} uz' &\equiv -\delta', & z'^2 \delta_1 &\equiv -\gamma' \\ uz'\delta' &\equiv -1, & u^2 \gamma'_1 &\equiv -\delta \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad u^2 z'^2 \equiv \delta'^2 \equiv 1, \qquad \delta_1 \gamma'_1 \equiv \delta\gamma'$$

ou bien $u \equiv z' \equiv 0$, donc $s' \equiv zu'$ et

$$zu' \equiv 1, \qquad u'^2 \delta_1 \equiv \delta, \qquad z^2 \gamma'_1 \equiv \gamma', \qquad \text{d'où} \qquad \delta_1 \gamma'_1 \equiv \delta\gamma'.$$

Ainsi, pour toute valeur de δ' autre que 1 ou -1, on doit nécessairement faire $u \equiv z' \equiv 0$ et l'on trouve alors comme systèmes irréductibles

$$\gamma = 1, \qquad \delta = 1, \mathrm{N}, \qquad \gamma' = 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \delta' = i, i^2, \ldots, i^{\frac{p-3}{2}}.$$

Pour $\delta' = \pm 1$, si $\delta\gamma'$ est carré, on trouve pour $p \equiv 1 \bmod 4$: $\delta = 1$, $\gamma' = 1, i^2, \ldots i^{p-3}$ et $\delta = \mathrm{N}$, $\gamma' = i, i^3, \ldots, i^{p-2}$; pour $p \not\equiv 1 \bmod 4$, la deuxième série se ramène à la première. Si $\delta\gamma'$ est non carré, on trouve pour $p \not\equiv 1 \bmod 4$: $\delta = 1$, $\gamma' = i, i^3, \ldots, i^{p-2}$ et $\delta = \mathrm{N}$, $\gamma' = 1, i^2, \ldots, i^{p-3}$; pour $p \equiv 1 \bmod 4$, la deuxième série se ramène à la première. Ainsi on a comme systèmes irréductibles

$$\begin{aligned} &\delta = 1, \quad \gamma' = 1, 2, \ldots, p-1; \qquad &&\delta = \mathrm{N}, \quad \gamma' = i, i^3, \ldots, i^{p-2}; \qquad &&(p \equiv 1 \bmod 4); \\ &\delta = 1, \quad \gamma' = 1, 2, \ldots, p-1 \qquad &&\delta = \mathrm{N}, \quad \gamma' = 1, i^2, \ldots, i^{p-3}; \qquad &&(p \equiv 3 \bmod 4). \end{aligned}$$

Si l'on a $(\alpha_1 \beta_1) = (\alpha\beta) = (0\ 1)$, on a $z' \equiv u \equiv 0$, $z \equiv 1$, $r \equiv s' \equiv u'$ et sur les for-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

mules (4) simplifiées on voit immédiatement que les systèmes irréductibles sont

$$\gamma = 0, 1, \qquad \delta = 0, \qquad \gamma' = 0, 1, \ldots, p-1, \qquad \delta' = 0.$$

Si l'on a $(\alpha_1 \beta_1) = (\alpha\beta) = (1\,1)$, on a $z' \equiv u$, $u' \equiv z$, $zu \equiv 0$. On voit sur les formules (4) qu'on peut alors, en faisant $u \equiv 0$ et disposant de x et x', obtenir $\gamma_1 \equiv \gamma'_1 \equiv 0$. Soit donc $\gamma_1 = \gamma = \gamma'_1 = \gamma' = 0$, on a

$$s'(z-u)\delta_1 \equiv \delta z + \delta' u, \qquad s'(z-u)\delta'_1 \equiv \delta u + \delta' z, \qquad uz \equiv 0, \qquad s' \equiv z^2 - u^2.$$

Remarquant que l'on en tire $s'^2 \delta_1 \delta'_1 \equiv \delta\delta'$, on voit aisément que les systèmes irréductibles sont, si $\delta\delta'$ est $\equiv 0$

$$\gamma = \delta = \gamma' = 0, \qquad \delta' = 0, 1, \mathrm{N};$$

si $\delta\delta' \not\equiv 0$ est carré,

$$\gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = 1, i^2; \qquad \gamma = 0, \quad \delta = \mathrm{N}, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = i, i^3; \qquad (p \equiv 1 \bmod 4),$$
$$\gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = 1; \qquad (p \equiv 3 \bmod 4),$$

si $\delta\delta' \not\equiv 0$ est non carré,

$$\gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = i, i^3; \qquad (p \equiv 1 \bmod 4);$$
$$\gamma = 0, \quad \delta = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = \mathrm{N}; \qquad \gamma = 0, \quad \delta = \mathrm{N}, \quad \gamma' = 0, \quad \delta' = 1; \qquad (p \equiv 3 \bmod 4).$$

Soit $(\rho_1 \sigma_1 \rho'_1 \sigma'_1) = (\rho\sigma\rho'\sigma') = (0\,1\,0\,0)$, donc $s'z' \equiv sz$, $s'u' \equiv rz + su$, $sz' \equiv rz' + su' \equiv 0$, d'où $z' \equiv s \equiv 0$, $r \equiv u'^2$, $\xi' \equiv z^2 u'$, $\eta \equiv zuu'$, $\xi' \equiv 0$, $\gamma' \equiv zu'^2$, on voit sur les formules (3) qui deviennent

$$z^2 \alpha_1 \equiv \alpha u', \qquad z(u\alpha_1 + u'\beta_1) \equiv u'\beta,$$

que tout système $(\alpha\beta)$ est réductible à l'un des trois systèmes irréductibles $(0\,0)$, $(0\,1)$, $(1\,0)$.

Si l'on a $(\alpha_1 \beta_1) = (\alpha\beta) = 0$, on voit sur les formules (4) qui deviennent

$$z^2 u' \gamma_1 \equiv \gamma z + \gamma' u - \varepsilon' z^2 u, \qquad z u u' \gamma_1 + z u'^2 \delta_1 \equiv \delta z + \delta' u + \varepsilon' z u^2,$$
$$z^2 \gamma'_1 \equiv \gamma', \qquad z(u\gamma'_1 + u'\delta'_1) \equiv \delta',$$

que les systèmes $(\gamma\delta\gamma'\delta')$ irréductibles sont

$$\left.\begin{array}{l} \gamma' = \delta' = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, 1, \mathrm{N}, \qquad \gamma' = \delta' = 0, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma' = 0, \quad \delta' = 1, \quad \gamma = 0, 2, 3, \ldots, p-1, \quad \delta = 0; \qquad \gamma' = 0, \quad \delta' = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0, 1, \mathrm{N}; \end{array}\right\} (p > 3),$$
$$\gamma' = 0, \quad \delta' = 0, 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, 1, -1; \qquad (p = 3),$$
$$\gamma' = 1, \mathrm{N}, \quad \delta' = 0, \quad \gamma = 0, 1, \quad \delta = 0, 1, \mathrm{N}; \qquad (p \geqq 3).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si $(\alpha_1\beta_1)=(\alpha\beta)=(01)$, on voit de même que les systèmes irréductibles sont

$$\gamma=0,1,\quad \gamma'=0,\quad \delta=\delta'=0;\qquad \gamma=0,\quad \gamma'=1,2,\ldots,p-1,\quad \delta=\delta'=0;\qquad (p<3);$$
$$\gamma=0,\quad \gamma'=0,1,\quad \delta=\delta'=0;\qquad \gamma=0,1,\quad \gamma'=-1,\quad \gamma=\delta'=0;\qquad (p=3).$$

Si $(\alpha_1\beta_1)=(\alpha\beta)=(10)$ donc $u'\equiv z^2$, $u\equiv 0$ on trouve pour système irréductibles

$$\gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,1,i,i^2,i^3,\quad \delta'=0;\qquad \gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,\quad \delta'=1,i,i^2;\qquad (p\equiv 1 \bmod 12)$$
$$\gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,1,i,i^2,i^3,\quad \delta'=0;\qquad \gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,\quad \delta'=1;\qquad \left(p\equiv \begin{matrix}1 \bmod 4\\ 2 \bmod 3\end{matrix}\right);$$
$$\gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,1,i,\quad \delta'=0;\qquad \gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,\quad \delta'=1,i,i^2;\qquad \left(p\equiv \begin{matrix}3 \bmod 4\\ 1 \bmod 3\end{matrix}\right);$$
$$\gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,1,i,\quad \delta'=0;\qquad \gamma=\gamma'=0,\quad \delta=0,\quad \delta'=1;\qquad \left(p\begin{matrix}\equiv 3 \bmod 4\\ \not\equiv 1 \bmod 3\end{matrix}\right).$$

Soit $(\rho_1\sigma_1\rho'_1\sigma'_1)=(\rho\sigma\rho'\sigma')=(0\mathrm{N}10)$ donc $\mathrm{N}s'z'\equiv ru+sz$, $s'z\equiv ru'+sz'$, $\mathrm{N}s'u'\equiv \mathrm{N}rz+su$, $s'u\equiv \mathrm{N}rz'+su'$, d'où $\mathrm{N}r\equiv \mathrm{N}(z^2-\mathrm{N}z'^2)\equiv \mathrm{N}u'^2-u^2$, $s\equiv uz-\mathrm{N}u'z'\equiv 0$, d'où enfin $\mathrm{N}z^2+u^2\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}z'^2+u'^2)$. En examinant séparément les trois cas seuls possibles : $uzu'z'\not\equiv 0$, $u\equiv z'\equiv 0$, $z\equiv u'\equiv 0$, on voit que ces relations équivalent à $z\equiv \omega u'$, $u\equiv \omega \mathrm{N}z'$, $r\equiv u'^2-\mathrm{N}z'^2$, $s'\equiv \omega(u'^2-\mathrm{N}z'^2)$, $s\equiv 0$, ω désignant ± 1. Nous supprimerons désormais l'accent aux lettres z et u. Les formules (3), qui deviennent en résolvant

$$r\alpha_1\equiv u\alpha-z\beta,\qquad r\beta_1\equiv \omega(\beta u-\mathrm{N}\alpha z),$$

montrent que tout système $(\alpha\beta)$ est réductible à l'un des deux systèmes irréductibles (00), (01).

Si $(\alpha_1\beta_1)=(\alpha\beta)=(00)$ les formules (4) résolues et combinées linéairement donnent, en posant $\gamma+\delta'=\varphi$, $\mathrm{N}\gamma'+\delta=\psi$, $\gamma-\delta'=\varphi'$, $\mathrm{N}\gamma'-\delta=\psi'$, $\gamma_1+\delta'_1=\varphi_1,\ldots$, d'où $\gamma=\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')$, $\delta'=\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')$, $\gamma'=\frac{1}{2\mathrm{N}}(\psi+\psi')$, $\delta=\frac{1}{2}(\psi-\psi')$, et supposant d'abord $p\geqq 5$:

$$\omega(u^2-\mathrm{N}z^2)\varphi_1\equiv\varphi,\qquad (u^2-\mathrm{N}z^2)\psi_1\equiv\psi,$$
$$(u^2-\mathrm{N}z^2)^2\psi'_1\equiv\psi'u^2+2\mathrm{N}\varphi'uz+\mathrm{N}\psi'z^2,$$
$$\omega(u^2-\mathrm{N}z^2)^2\varphi'_1\equiv\varphi'u^2+2\psi'uz+\mathrm{N}\varphi'z^2.$$

Si l'on pose $\gamma\delta'-\delta\gamma'=\Delta$, on voit aisément la relation

$$\psi'^2-\mathrm{N}\varphi'^2\equiv\psi^2-\mathrm{N}\varphi^2+4\mathrm{N}\Delta,$$

qui avec $(u^2-\mathrm{N}z^2)^2\Delta_1\equiv\Delta$ donne

$$(u^2-\mathrm{N}z^2)^2(\psi_1'^2-\mathrm{N}\varphi^2)\equiv\psi'^2-\mathrm{N}\varphi'^2;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

donc on a $\psi'_1 \equiv {}'_1\varphi \equiv 0$ toujours et seulement si l'on a $\psi' \equiv \varphi' \equiv 0$ et le caractère quadratique de $\psi'^2 - N\varphi'^2$ est invariant.

Soit $\psi'^2 - N\varphi'^2$ non carré, on peut en prenant $\omega = 1$, $z = 0$, $u^2 = \varphi'$ si φ' est carré, $\omega = 1$, $u = 0$, $Nz^2 = \varphi'$ si φ' n'est pas carré, obtenir $\varphi'_1 \equiv 1$. Soit donc $\varphi'_1 = \varphi' = 1$, donc

$$(u^2 - Nz^2)^2\psi'_1 \equiv \psi'(u^2 + Nz^2) + 2Nuz, \qquad \omega(u^2 - Nz^2)^2 \equiv 2\psi' uz + u^2 + Nz^2,$$

ou si l'on pose $u^2 + Nz^2 \equiv t$, $2uz \equiv v$, $t^2 - Nv^2$ étant $\not\equiv 0$ et carré (condition nécessaire et suffisante pour que u et z existent)

$$(t^2 - Nv^2)\psi'_1 \equiv t\psi' + Nv, \qquad \omega(t^2 - Nv^2) \equiv t + v\psi'.$$

On en tire en éliminant $t^2 - Nv^2$ puis ψ'

$$(\psi' - \omega\psi'_1)t + (N - \omega\psi'\psi'_1)v \equiv 0,$$
$$\omega t - \psi'_1 v \equiv 1.$$

On vérifie, en tirant t et v, que ces équations équivalent aux deux précédentes et entraînent $t^2 - Nv^2 \not\equiv 0$ et carré, pourvu que $\psi'^2_1 - N$ soit non carré comme l'est $\psi'^2 - N$. On pourra donc toujours prendre t et v et par suite z et u de manière que ψ'_1 ait une valeur arbitraire telle que $\psi'^2_1 - N$ soit non carré. Ainsi tous les systèmes $(\varphi'\psi')$ où $\psi'^2 - N\varphi'^2$ est non carré sont réductibles à l'un quelconque d'entre eux. Soit donc $\varphi'_1 = \varphi' = 1$, $\psi'_1 = \psi'$ donc

$$t^2 - Nv^2 \equiv 1, \qquad \psi'(1 - \omega)t + (N - \omega\psi'^2)v \equiv 0, \qquad \omega t - \psi' v \equiv 1,$$

d'où l'on tire si $\omega = 1$, $v = 0$, $t = 1$, d'où $z \equiv 0$, $u^2 \equiv 1$; et si $\omega = -1$, $t \equiv \frac{\psi'^2 + N}{\psi'^2 - N}$, $v \equiv \frac{-2\psi'}{\psi'^2 - N}$, d'où $u^2 \equiv \frac{N}{\psi'^2 - N}$, $Nz^2 \equiv \frac{\psi'^2}{\psi'^2 - N}$. On a donc toujours $u^2 - Nz^2 \equiv \omega$ et par suite $\varphi_1 \equiv \varphi$, $\omega\psi_1 \equiv \psi$. Les systèmes irréductibles $(\varphi\psi\varphi'\psi')$ sont donc

$$\varphi = 0, 1, \ldots, p-1, \qquad \psi = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}, \qquad \varphi' = 1, \qquad \psi' \text{ arbitraire } (\psi'^2 - N \text{ non carré}).$$

Soit $\psi'^2 - N\varphi'^2$ carré, on peut faire $\varphi'_1 = 0$; en supposant $\varphi'_1 = \varphi' = 0$ donc $\psi' \not\equiv 0$ on a $zu \equiv 0$, $(u^2 + Nz^2)\psi'_1 \equiv \psi'$, et l'on peut toujours faire $\psi'_1 = 1$. Soit donc $\psi'_1 = \psi' = 1$, on a $u^2 + Nz^2 \equiv 1$, ce qui exige avec $zu \equiv 0$, $z \equiv 0$, $u^2 \equiv 1$, et par suite $\omega\varphi_1 \equiv \varphi$, $\psi_1 \equiv \psi$. Les systèmes irréductibles $(\varphi\psi\varphi'\psi')$ sont donc

$$\varphi = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}, \qquad \psi = 0, 1, \ldots, p-1, \qquad \varphi' = 0, \qquad \psi' = 1.$$

Soit $\psi' \equiv \varphi' \equiv 0$, donc $\psi'_1 \equiv \varphi'_1 \equiv 0$, on voit immédiatement que les systèmes irréduc-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

tibles $(\varphi\psi)$ sont

$$\varphi=\psi=0, \qquad \varphi=0, \qquad \psi=1; \qquad \varphi=1, \qquad \psi=0; \qquad \varphi=1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}, \qquad \psi=1.$$

Pour $p=3$, on a $N=-1$; en opérant comme précédemment sur les formules (4), et posant $\gamma'+\delta\equiv\varphi$, $\gamma-\delta'\equiv\psi$, $\gamma+\delta'\equiv\psi'$, $\gamma'-\delta\equiv\varphi'$, $\gamma'_1+\delta_1\equiv\varphi_1$, ..., on trouve

$$\varphi_1\equiv\varphi(u^2-z^2)-\psi uz, \qquad \omega\psi_1\equiv\varphi uz+\psi(u^2-z^2),$$
$$\psi'_1\equiv\omega(u^2+z^2)\psi', \qquad \varphi'_1\equiv(u^2+z^2)\varphi'-z^2u^2,$$

on en tire $\varphi_1^2+\psi_1^2\equiv\varphi^2\psi^2$.

Soit $\varphi^2+\psi^2\equiv-1$, on peut toujours faire $\varphi_1=1$, car, si $\varphi\equiv-1$, en prenant $u\equiv0$ $z\equiv1$, on obtient $\varphi_1\equiv1$, et si $\varphi_1=\varphi=1$, on a $1\equiv u^2-z^2-\psi uz$, $\omega\psi_1\equiv uz+\psi(u^2-z^2)$; en prenant alors $z\equiv0$, $u\equiv1$, $\omega\equiv\psi$, on obtient $\psi_1\equiv1$. Si $\psi_1=\psi=1$, on a $1\equiv u^2-z^2-uz$, $\omega\equiv u^2+uz-z^2$, donc $u\not\equiv0$, $u^2\equiv1$, et par suite $z(z+u)\equiv0$, $z^2\equiv\omega-1$, $\psi'_1\equiv\psi'$, $\varphi'_1\equiv(1+z^2)\varphi'-z^2$. On voit que si φ' est $\equiv1$, on a nécessairement $\varphi'_1\equiv1$, et que si $\varphi'\equiv-1$, en prenant $z+u\equiv0$, $\omega=-1$, on obtient $\varphi'_1\equiv0$. Les systèmes irréductibles $(\varphi\psi\varphi'\psi')$ sont donc

$$\varphi=\psi=1, \qquad \varphi'=0, 1, \qquad \psi'=0, 1, -1.$$

Soit $\varphi^2+\psi^2\equiv1$, on peut résoudre la congruence quadratique $\varphi_1\equiv0$; si $\varphi_1=\varphi=0$, on a $0\equiv zu$, $\omega\psi_1\equiv\psi(u^2-z^2)$ et l'on peut toujours faire $\psi_1\equiv1$ en prenant $z\equiv0$, $\omega\equiv\psi$. Si $\psi_1=\psi=1$ on a $\omega\equiv u^2-z^2$ puis, comme $u^2+z^2\equiv1$, $\psi'_1\equiv(u^2-z^2)\psi'$, $\varphi'_1\equiv\varphi'$. On voit que les systèmes irréductibles $(\varphi\psi\varphi'\psi')$ sont

$$\varphi=0, \qquad \psi=1, \qquad \varphi'=0, 1, -1, \qquad \psi'=0, 1.$$

Soit $\varphi\equiv\psi\equiv0$, donc $\varphi_1\equiv\psi_1\equiv0$, on voit directement que si φ' est $\equiv1$ on a nécessairement $\varphi'_1\equiv1$ et que si $\varphi'\equiv-1$ on peut faire $\varphi'_1=0$. Si $\varphi'_1=\varphi'=1$ on a $\psi'_1\equiv\omega(u^2+z^2)\psi'$; si $\varphi'_1=\varphi'=0$, on a $zu\equiv0$, $\varphi'_1\equiv\omega\psi'$. On voit donc que les systèmes irréductibles sont

$$\varphi=\psi=0, \qquad \varphi'=0, 1, \qquad \psi'=0, 1.$$

Si $(\alpha_1\beta_1)=(\alpha\beta)=(01)$, donc $z\equiv0$, $u'\equiv\omega$, on voit sur les formules (4) que les $\frac{(p+1)^2}{2}$ systèmes irréductibles sont :

$$\gamma=0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}, \qquad \gamma'=0, 1, \ldots, p-1, \qquad \delta=\delta'=0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type IV de G | A.

34. Les conditions d'ordre et de figure étant

$$\varkappa \equiv \nu \equiv 0, \qquad \alpha' \equiv \varkappa' \equiv -\rho, \qquad \beta' \equiv \nu' \equiv -\sigma, \qquad \rho' \equiv \sigma' \equiv 0, \qquad \rho \text{ ou } \sigma \not\equiv 0,$$

$b^\sigma a^\rho$ pouvant toujours être pris pour b et $cb^{\delta'} a^{\gamma'}$ pour c, on peut écrire les équations de G

$$c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{-1}, \qquad e^p = db^\delta a^\gamma, \qquad f^p = c,$$
$$d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = cb, \qquad f^{-1}cf = c, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db^{-1} \qquad f^{-1}ef = ed.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme d'équations est de la forme indiquée précédemment (n° 30) avec les conditions

$$\xi' \equiv 0, \qquad \eta' \equiv z, \qquad r \equiv 1, \qquad s \equiv z', \qquad r' \equiv 0, \qquad s' \equiv z, \qquad u \equiv 0, \qquad u' \equiv 1,$$
$$h \equiv \alpha x' + \gamma z', \qquad k \equiv \beta x' - y' + \delta z' + \tfrac{1}{2} z' - \varepsilon' z', \qquad h' \equiv 0, \qquad k' \equiv -x,$$

et il opère sur les exposants α, β, γ, δ la transformation

$$\alpha_1 \xi \equiv \alpha, \qquad \alpha_1 \eta + \beta_1 z \equiv \beta - z', \qquad \gamma_1 \xi \equiv \alpha x + \gamma z, \qquad -x + \gamma_1 \eta + \delta_1 z \equiv \beta x - y + \delta z.$$

On peut toujours faire $\beta_1 = \delta_1 = 0$. En supposant $\beta = \beta_1 = \delta = \delta_1 = 0$, on a

$$\alpha_1 \xi \equiv \alpha, \qquad \alpha_1 \eta \equiv -z', \qquad \gamma_1 \xi \equiv \alpha x + \gamma z, \qquad -x + \gamma_1 \eta \equiv -y, \qquad \xi z \not\equiv 0;$$

on voit alors les trois types

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0, 1; \qquad \alpha = 1, \qquad \gamma = 0.$$

2° $p = 2$.

Type I′ de G | $\{a\}$.

35. Les conditions d'ordre et de figure sont $\alpha' \equiv \varkappa$, $\beta' \equiv \nu$, $\varkappa' \equiv \nu' \equiv 0$, un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} \rho & \rho' & \sigma & \sigma' \\ \varkappa & 0 & \nu & 0 \end{vmatrix}$ étant $\not\equiv 0$.

Le changement de générateurs conservant la forme des équations doit vérifier

$$z \equiv 1, \qquad u \equiv 0, \qquad z' \equiv 0, \qquad u' \equiv 1, \qquad s' \equiv 1 \qquad r' \equiv 0, \qquad \equiv 1,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et les relations entre les nouvelles et les anciennes valeurs des exposants sont

$$(1)\quad \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 \equiv \alpha + s\varkappa, \qquad \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 \equiv \beta + s\nu,$$

$$(2)\quad \xi\varkappa_1 + \xi'\nu_1 \equiv \varkappa, \qquad \eta\varkappa_1 + \eta'\nu_1 \equiv \nu,$$

$$(3)\quad \begin{cases} \xi\gamma_1 + \xi'\delta_1 + j\varkappa \equiv \gamma + (\alpha+\rho)x, & \eta\gamma_1 + \eta'\delta_1 + j\nu \equiv \delta + (\beta+\sigma)x \\ \xi\gamma'_1 + \xi'\delta'_1 \equiv \gamma' + (\alpha+\rho')x' + xy', & \eta\gamma'_1 + \eta'\delta'_1 \equiv \delta' + (\beta+\sigma')x' + \nu y', \end{cases} \qquad \left(j = \frac{uz}{2}\right),$$

$$(4)\quad \begin{cases} \xi\rho_1 + \xi'\sigma_1 \equiv \rho + s\varkappa, & \eta\rho_1 + \eta'\sigma_1 \equiv \sigma + s\nu, \\ \xi\rho'_1 + \xi'\sigma'_1 \equiv \rho', & \eta\rho'_1 + \eta'\sigma'_1 \equiv \sigma'. \end{cases}$$

D'après les formules (2) et les conditions de figure, on peut toujours supposer $\varkappa_1 = \varkappa = 0$, $\nu_1 = \nu = 1$, donc $\xi' \equiv 0$, $\eta' \equiv \xi \equiv 1$ et la condition de figure est que l'on n'ait pas $\rho \equiv \rho' \equiv \sigma' \equiv 0$. Une discussion obvie montre alors que les systèmes irréductibles de valeurs des autres exposants sont

α	β	ρ	σ	ρ'	σ'	γ	δ	γ'	δ'
0	0	0	0, 1	0	1	0, 1	0	0, 1	0
0	0	0	0, 1	1	0	0, 1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0, 1	0
0	0	1	0	1	0, 1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0, 1	0	0	0, 1	0
1	0	1	0	0	1	0, 1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0, 1	0	0, 1	0
1	0	1	1	0	0, 1	0, 1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0, 1	0	0, 1	0.

Type III′ de G | $\{a\}$.

Les conditions d'ordre et de figure sont $\alpha' \equiv \varkappa$, $\beta' \equiv \nu$, $\rho \equiv \varkappa + \varkappa'$, $\sigma \equiv \nu + \nu'$, $\rho \equiv \sigma' \equiv 0$, un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} \rho & 0 & \sigma & 0 \\ \varkappa & \rho+\varkappa & \nu & \sigma+\nu \end{vmatrix}$ étant $\not\equiv 0$. On peut donc prendre $cb^{\delta'}a^{\gamma'}$ pour c, $b^{\sigma}a^{\rho}$ pour b et, par suite, écrire les équations de G

$$c^2 = b^{\beta}a^{\alpha}, \qquad d^2 = b^{\nu}a^{\varkappa}, \qquad e^2 = b^{\delta}a^{\gamma}, \qquad f^2 = c,$$

$$d^{-1}cd = c, \qquad e^{-1}ce = cb, \qquad f^{-1}cf = c, \qquad e^{-1}de = db^{\nu}a^{\varkappa}, \qquad f^{-1}df = db^{\nu+1}a^{\varkappa}, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

Le changement le plus général de générateurs conservant cette forme des équations de G doit vérifier

$$\xi \equiv 1, \quad \xi' \equiv 0, \quad \eta' \equiv 1, \quad h \equiv \alpha x', \quad k \equiv \beta x' + y', \quad r \equiv 1, \quad s \equiv 0, \quad h' \equiv xy,$$
$$k' \equiv x' + (\nu+1)y, \quad r' \equiv 0, \quad s' \equiv 1, \quad z \equiv 1, \quad u \equiv 0, \quad z' \equiv 0, \quad u' \equiv 1,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et la transformation opérée sur les éléments restants est définie par

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \varkappa_1 \equiv \varkappa, & \varkappa_1 \eta + \nu_1 \equiv \nu, \\
(2) & \alpha_1 \equiv \alpha, & \alpha_1 \eta + \beta_1 \equiv \beta, \\
(3) & \gamma_1 \equiv \alpha x + \gamma, & \gamma_1 \eta + \delta_1 \equiv (\beta + 1) x + \delta.
\end{array}
$$

Comme, d'après la condition de figure, on ne peut avoir $\varkappa \equiv 0$, $\nu \equiv 1$, les formules (1) donnent les deux systèmes irréductibles

$$\varkappa = 0, \quad \nu = 0; \qquad \varkappa = 1, \quad \nu = 0.$$

Et l'on voit aisément, en supposant successivement $\varkappa = \nu = 0$ et $\varkappa_1 = \varkappa = 1$, $\nu_1 = \nu = 0$, donc $\eta \equiv 0$, que les types distincts de G correspondent aux 17 systèmes irréductibles :

$$
\begin{array}{llllll}
\varkappa = \nu = 0, & \alpha = \beta = 0, & \gamma = 0, 1, & \delta = 0; \\
 & \alpha = 0, & \beta = 1, & \gamma = 0, & \delta = 0, 1; \\
 & \alpha = 0, & \beta = 1, & \gamma = 1, & \delta = 0; \\
 & \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = 0, & \delta = 0, 1; \\
\varkappa = 1, \quad \nu = 0, & \alpha = \beta = 0, & \gamma = 0, 1, & \delta = 0; \\
 & \alpha = 0, & \beta = 1, & \gamma, & \delta = 0, 1; \\
 & \alpha = 1, & \beta = 0, 1, & \gamma = 0, & \delta = 0, 1.
\end{array}
$$

Figure (11)(1)(1)(11).

36. D'après les types connus [1] de figure (1)(1)(11), on voit que les équations de G auront la forme

$$a^p = b^p = 1, \quad c^p = b^\beta a^\alpha, \quad d^p = c^\varepsilon b^\psi a^\varphi, \quad e^p = d^\varepsilon c^\gamma b^\sigma a^\rho, \quad f^p = c^{\gamma'} b^{\sigma'} a^{\rho'},$$
$$d^{-1} c d = c b^\mu a^\lambda, \quad e^{-1} c e = c b^{\mu'} a^{\lambda'}, \quad f^{-1} c f = c b^{\mu''} a^{\lambda''}, \quad e^{-1} d e = d b^\nu a^\varkappa, \quad f^{-1} d f = d c, \quad f^{-1} e f = e d.$$

Les conditions d'ordre et de figure sont

$$\alpha \equiv \varepsilon \lambda'', \quad \beta \equiv \varepsilon \mu'', \quad \varphi \equiv \alpha - \varepsilon' \lambda'', \quad \psi \equiv \beta - \varepsilon' \mu'', \quad \gamma \equiv -\varepsilon',$$
$$\varepsilon \varkappa \equiv \varepsilon \nu \equiv \lambda \equiv \mu \equiv \lambda' \equiv \mu' \equiv 0, \quad \gamma' \equiv 0, \quad \lambda'' \text{ ou } \mu'' \not\equiv 0,$$

---

[1] Hölder, *loc. cit.*; de Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

les équations de G auront donc la forme

$$a^p = b^p = 1, \qquad c^p = b^{\varepsilon\beta} a^{\varepsilon\alpha}, \qquad d^p = c^{\varepsilon}(b^{\beta}\alpha^{\alpha})^{\varepsilon-\varepsilon'}, \qquad e^p = d^{\varepsilon} c^{\varepsilon'} b^{\sigma} a^{\rho}, \qquad f^p = b^{\sigma'} a^{\rho'},$$
$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = cb^{\beta}a^{\alpha}, \qquad e^{-1}de = db^{\nu}a^{\varkappa}, \qquad f^{-1}df = dc, \qquad f^{-1}ef = ed,$$

avec les conditions $\varepsilon\varkappa \equiv \varepsilon\nu \equiv 0$, α ou $\beta \not\equiv 0$. Un calcul direct donne

$$f^{u'}e^{z'}d^{y'}c^{x'}f^{u}e^{z}d^{y}c^{x} = f^{U'}e^{Z'}d^{Y'}c^{X'}b^{K'}a^{H'}, \qquad \text{avec} \qquad U' = u' + u, \quad Z' = z' + z, \quad Y' = z'u + y' + y,$$
$$X' = z'\binom{u}{2} + y'u + x' + x, \qquad K' = \nu\left[z'zu + y'z + u\binom{z'}{2}\right] + \beta\left[z'\binom{u}{3} + y'\binom{u}{2} + ux'\right],$$
$$H' = \varkappa\left[z'zu + y'z + u\binom{z'}{2}\right] + \alpha\left[z'\binom{u}{3} + y'\binom{u}{2} + x'u\right];$$

on en tire par récurrence $(f^{u}e^{z}d^{y}c^{x})^{\nu} = f^{U_\nu}e^{Z_\nu}d^{Y_\nu}c^{X_\nu}b^{K_\nu}a^{H_\nu}$ avec

$$U_\nu = \nu u, \qquad Z_\nu = \nu z, \qquad Y_\nu = \nu y + zu\Sigma_1^{\nu-1}t, \qquad X_\nu = \nu x + \left[yu + z\binom{u}{2}\right]\Sigma_1^{\nu-1}t + zu^2\Sigma_1^{\nu-2}\Sigma_1^{t}t,$$
$$K_\nu = \nu\left[z^2u\Sigma_1^{\nu-1}\Sigma_1^{t}t + yz\Sigma_1^{\nu-1}t + u\Sigma_1^{\nu-1}\binom{tz}{2}\right]$$
$$+ \beta\left[\left[z\binom{u}{3} + y\binom{u}{2} + xu\right]\Sigma_1^{\nu-1}t + \left[2zu\binom{u}{2} + yu^2\right]\Sigma_1^{\nu-2}\Sigma_1^{t}t - zu^3\Sigma_1^{\nu-3}\Sigma_1^{t}\Sigma_1^{t}t\right],$$
$$H_\nu = \varkappa\left[z^2u\Sigma_1^{\nu-1}\Sigma_1^{t}t + yz\Sigma_1^{\nu-1}t + u\Sigma_1^{\nu-1}\binom{tz}{2}\right]$$
$$+ \alpha\left[\left[z\binom{u}{3} + y\binom{u}{2} + xu\right]\Sigma_1^{\nu-1}t + \left[2zu\binom{u}{2} + yu^2\right]\Sigma_1^{\nu-2}\Sigma_1^{t}t - zu^3\Sigma_1^{\nu-3}\Sigma_1^{t}\Sigma_1^{t}t\right],$$

d'où $(f^{u}e^{z}d^{y}c^{x})^{p} = d^{D_p}c^{C_p}b^{B_p}a^{A_p}$, avec

$$D_p = \varepsilon z(1+u), \qquad C_p = \varepsilon' z(u^2 - 1) + \varepsilon y(1+u),$$
$$B_p = \sigma z + \sigma' u + \varepsilon'(\beta[y(u^2-1) - zu^2] - \nu z^2 u) + \varepsilon\beta[x(u+1) + y],$$
$$A_p = \rho z + \rho' u + \varepsilon'(\alpha[y(u^2-1) - zu^2] - \varkappa z^2 u) + \varepsilon\alpha[x(u+1) + y),$$

en supposant $x, y, z, u < p$; enfin le commutant $\{a, b, c, d\}$ étant abélien, on aura $(f^{u}e^{z}d^{y}c^{x})^{-1}(f^{u'}e^{z'}d^{y'}c^{x'})f^{u}e^{z}d^{y}c^{x}f^{u'}e^{z'}d^{y'}c^{x'} = d^{Y''}c^{X''}b^{K''}a^{H''}$, Y'', ... s'obtenant en retranchant Y', ... des expressions obtenues en y permutant les lettres accentuées et non accentuées de même nom.

On voit que le changement Θ de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G sera

$$a_1 = b^{\eta}a^{\xi}, \qquad b_1 = b^{\eta'}a^{\xi'}, \qquad \xi\eta' - \eta\xi' \not\equiv 0, \qquad c_1 = c^{\zeta}b^{r}a^{q}, \qquad \zeta \not\equiv 0, \qquad d_1 = d^{\theta}c^{\omega}b^{t}a^{s}, \qquad \theta \not\equiv 0,$$
$$e_1 = f^{u}e^{z}d^{y}c^{x}b^{k}a^{h}, \qquad f_1 = f^{u'}e^{z'}d^{y'}c^{x'}b^{k'}a^{h'}, \qquad zu' - uz' \not\equiv 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et devra vérifier

$$u \equiv 0, \qquad \zeta \equiv zu'^2, \qquad \theta \equiv zu', \qquad \omega \equiv z\binom{u'}{2} + yu', \qquad r \equiv \nu zz'u' + \beta u'^2[z(u'-1)+y],$$
$$q \equiv \varkappa zz'u' + \alpha u'^2[z(u'-1)+y], \qquad t \equiv \mathrm{K}'', \qquad s \equiv \mathrm{H}''.$$

En supposant $c_1 = c^{zu'^2} b^r a^q$, $d_1 = d^{zu'} c^{z\binom{u'}{2}+yu'} b^t a^s$, $e_1 = e^z d^y c^x b^h a^k$, q, r, s, t satisfaisant aux conditions indiquées et x, y, z, x', y', z' u' étant $< p$, Θ fournit sur les exposants de G la transformation (T), définie par

$$(1) \qquad \xi\varkappa_1 + \xi'\nu_1 \equiv \varkappa z^2 u', \qquad \eta\varkappa_1 + \eta'\nu_1 \equiv \nu z^2 u',$$
$$(2) \qquad \xi\alpha_1 + \xi'\beta_1 \equiv \alpha z u'^3, \qquad \eta\alpha_1 + \eta'\beta_1 \equiv \beta z u'^3,$$
$$(3) \qquad \varepsilon s - \varepsilon' q + \xi\rho_1 + \xi'\sigma_1 \equiv \mathrm{A}_p, \qquad \varepsilon t - \varepsilon' r + \eta\rho_1 + \eta'\sigma_1 \equiv \mathrm{B}_p,$$
$$(4) \qquad \xi\rho'_1 + \xi'\sigma'_1 \equiv \mathrm{A}'_p, \qquad \eta\rho'_1 + \eta'\sigma'_1 \equiv \mathrm{B}'_p,$$

A'_p et B'_p désignant ce que deviennent A_p et B_p quand on y accentue x, y, z, u.

Discutons ces formules pour les différents valeurs de p.

1° $p \geqq 5$.

On voit sur les formules (2), et en tenant compte de la condition de figure, qu'on peut toujours faire $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$; soit donc $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, donc $\xi' \equiv 0$, $\eta' \equiv zu'^3$, les formules (1) qui deviennent

$$\xi\varkappa_1 \equiv \varkappa z u', \qquad \eta\varkappa_1 + zu'^3\nu_1 \equiv \nu z u'$$

montrent que tout système $(\varkappa, \nu)$ peut être ramené à l'un des quatre

$$\varkappa = 0, \qquad \nu = 0, 1, \mathrm{N}; \qquad \varkappa = 1, \qquad \nu = 0,$$

qui sont irréductibles l'un à l'autre.

Soit $\varkappa_1 = \varkappa = \nu_1 = \nu = 0$, les formules (3) qui s'écrivent

$$\xi\rho_1 \equiv \rho z, \qquad \eta\rho_1 + zu'^3 \equiv \sigma z$$

donnent pour (ρ, σ) les systèmes irréductibles

$$\rho = 0, \qquad \sigma = 0\,(1, i, i^2); \qquad \rho = 1, \qquad \sigma = 0;$$

les valeurs de σ comprises dans la parenthèse ne fournissent qu'un système pour $p \equiv -1 \bmod 3$. En prenant successivement ces différents systèmes (ρ, σ), les for-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

mules (4) montrent que les types distincts de G correspondent à

$$\rho=\sigma=0,\quad \rho'=0,\quad \sigma'=0,1;\qquad \rho=\sigma=0,\quad \rho'=1,\quad \sigma'=0;$$
$$\rho=0,\quad \sigma=(1,i,i^2),\quad \rho'=0,1,\quad \sigma'=0;$$
$$\rho=1,\quad \sigma=0,\quad \rho'=0,\quad \sigma'=0,1.$$

Soit $\varkappa_1=\varkappa=0$, $\nu_1=\nu=1$, N, donc $u'^2\equiv 1$, les formules (3)

$$\xi\rho_1\equiv\rho z,\qquad \eta\rho_1+zu'\sigma_1\equiv\sigma z$$

donnent maintenant pour (ρ,σ) les systèmes irréductibles

$$\rho=0,\quad \sigma=0,1,\ldots,\frac{p-1}{2};\qquad \rho=1,\quad \sigma=0,$$

et les formules (4) donnant respectivement pour (ρ',σ') les mêmes systèmes irréductibles que précédemment montrent que les types de G correspondent à

$$\rho=\sigma=0,\quad \rho'=0,\quad \sigma'=0,1;\qquad \rho=\sigma=0,\quad \rho'=1,\quad \sigma'=0;$$
$$\rho=0,\quad \sigma=1,2,\ldots,p-1,\quad \rho'=0,1,\quad \sigma'=0;\qquad \rho=1,\quad \sigma=0,\quad \rho'=0,\quad \sigma'=0,1.$$

Soit $\varkappa_1=\varkappa=1$, $\nu_1=\nu=0$, donc $\xi\equiv zu'$, $\eta\equiv 0$, (3) s'écrit

$$u'\rho_1\equiv\rho,\qquad u'^3\sigma_1\equiv\sigma,$$

d'où, pour (ρ,σ), les systèmes irréductibles

$$\rho=0,\quad \sigma=0(1,i,i^2);\qquad \rho=1,\quad \sigma=0,1,\ldots,p-1,$$

les trois valeurs de σ entre parenthèses fournissent le même système si p est $\equiv -1 \bmod 3$. En traitant (4), on trouve les types

$$\rho=\sigma=0,\quad \rho'=0,\quad \sigma'=0,1;\qquad \rho=\sigma=0,\quad \rho'=1,\quad \sigma'=0,1,\mathrm{N};$$
$$\rho=0,\quad \sigma=(1,i,i^2),\quad \rho'=0,1,\quad \sigma'=0;\qquad \rho=1,\quad \sigma=0,1\ldots,p-1,\quad \rho'=0,\quad \sigma'=0,1.$$

2° $p=3$.

Les formules (2) et (1) conduisent aux mêmes résultats que précédemment; d'ailleurs on a, en supposant $\alpha_1=\alpha=0$, $\beta_1=\beta=1$,

$$(3)\qquad \xi\rho_1\equiv\rho z+\varkappa zz'u',\qquad \eta\rho_1+zu'\sigma_1\equiv\sigma z+z(u'-1)+\nu zz'u',$$
$$(4)\qquad \xi\rho'_1\equiv\rho z'+\rho'u'-\varkappa z'^2u',\qquad \eta\rho'_1+zu'\sigma'_1\equiv\sigma z'+\sigma'u'-z'-\nu z'^2u'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Soit $\varkappa_1 = \varkappa = \nu_1 = \nu = 0$, donc

$$\xi\rho_1 \equiv \rho z \qquad \eta\rho_1 + zu'\sigma_1 \equiv \sigma z + z(u'-1),$$
$$\xi\rho'_1 \equiv \rho z' + \rho' u', \qquad \eta\rho'_1 + zu'\sigma'_1 \equiv \sigma z' + \sigma' u' - z',$$

on peut toujours faire $\sigma_1 = 0$, et en supposant $\sigma_1 = \sigma = 0$, on a

$$\xi\rho_1 \equiv \rho z, \qquad \eta\rho_1 \equiv z(u'-1),$$
$$\xi\rho'_1 \equiv \rho z' + \rho' u', \qquad \eta\rho'_1 + zu'\sigma'_1 \equiv \sigma' u' - z',$$

en prenant $\eta = 0$, $u' = 1$, $z' = \sigma'$, on peut faire $\sigma_1 = 0$; soit $\sigma'_1 = \sigma' = 0$, donc

$$\xi\rho_1 \equiv \rho z, \qquad \eta\rho_1 \equiv z(u'-1),$$
$$\xi\rho'_1 \equiv \rho z' + \rho' u', \qquad \eta\rho'_1 \equiv -z',$$

si ρ est $\equiv 0$ on a $u' \equiv 1$, $\xi\rho'_1 \equiv \rho'$, $\eta\rho'_1 \equiv -z'$ d'où les types : $\rho' \equiv 0, 1$ si ρ est $\not\equiv 0$, on peut faire $\rho_1 = 1$ et en supposant $\rho_1 = \rho = 1$ on a

$$\xi \equiv z, \qquad \eta \equiv z(u'-1), \qquad z\rho'_1 \equiv z' + \rho' u', \qquad z(u'-1)\rho'_1 \equiv -z',$$

en éliminant z', on trouve $z\rho'_1 \equiv \rho'$, donc deux types : $\rho = 1$, $\rho' = 0, 1$.

Soit $\varkappa_1 = \varkappa = 0$, $\nu_1 = \nu = 1, -1$, donc

$$\xi\rho_1 \equiv \rho z, \qquad \eta\rho_1 + zu'\sigma_1 \equiv \sigma z + z(u'-1) + \nu z z' u',$$
$$\xi\rho'_1 \equiv \rho z' + \rho' u', \qquad \eta\rho'_1 + zu'\sigma'_1 \equiv \sigma z' + \sigma' u' - z' - \nu z'^2 u',$$

en prenant $\eta = 0$, $z = u' = 1$, $\nu z' = -\sigma$ on obtient $\sigma_1 = 0$; et en supposant $\sigma_1 = \sigma = 0$ on a

$$\xi\rho_1 \equiv \rho z, \qquad \eta\rho_1 \equiv z(u'-1) + \nu z z' u',$$
$$\xi\rho'_1 \equiv \rho z' + \rho' u', \qquad \eta\rho'_1 + zu'\sigma'_1 \equiv \sigma' u' - z' - \nu z'^2 u'.$$

Si l'on a $\rho_1 = \rho = \rho'_1 = \rho' = 0$, donc

$$u' - 1 + \nu z' u' \equiv 0, \qquad zu'\sigma'_1 \equiv \sigma' u' - z' - \nu z'^2 u',$$

en éliminant z', on trouve $z\sigma'_1 \equiv \sigma'$, donc quatre types donnés par $\sigma' = 0, 1$.

Si l'on a $\rho_1 = \rho = 0$, $\rho' \not\equiv 0$, on peut faire $\rho'_1 = 1$, et en supposant $\rho'_1 = \rho' = 1$ donc $\xi \equiv u'$, on a

$$u' - 1 + \nu z' u' \equiv 0, \qquad \eta + zu'\sigma'_1 \equiv \sigma' u' - z' - \nu z'^2 u',$$

et en prenant $u' = 1$, $z' = 0$, $\eta = \sigma'$ on a $\sigma'_1 = 0$, donc deux types.

Si l'on a $\rho \not\equiv 0$ on peut faire $\rho_1 = 1$, $\rho' = 0$, et en supposant $\rho_1 = \rho = 1$, $\rho'_1 = \rho' = 0$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

donc $\xi \equiv z$, $z' \equiv 0$, on a

$$\eta \equiv z(u'-1), \qquad zu'\sigma'_1 \equiv \sigma' u',$$

d'où quatre types, donnés par $\sigma' = 0, 1$.

$$3^\circ \; p = 2 \quad (\varkappa = \nu = 0).$$

En prenant comme précédemment $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\beta_1 = \beta = 1$, donc $\xi' \equiv 0$, $\eta' \equiv 1$, les formules (3) et (4) deviennent

$$\begin{aligned} &\rho_1 \equiv \rho, && \eta\rho_1 + \sigma_1 \equiv \sigma + y, \\ &\rho'_1 \equiv \rho z' + \rho', && \eta\rho'_1 + \sigma'_1 \equiv \sigma z' + \sigma' + y', \end{aligned}$$

on peut toujours faire $\sigma_1 = \sigma'_1 = 0$, d'où les trois types :

$$\rho = 0, \quad \rho' = 0, 1; \qquad \rho = 1, \quad \rho' = 0.$$

Figure (1)(111)(11).

37. D'après les types connus [1] de figure (111)(11), G aura des équations de la forme

$$a^p = 1, \quad b^p = a^\alpha, \quad c^p = a^{\alpha'}, \quad d^p = a^{\alpha''},$$

$$\begin{aligned} &c^{-1}bc = ba^\lambda, && d^{-1}bd = ba^{\lambda'}, && e^{-1}be = ba^\mu, && f^{-1}bf = ba^{\mu'}, && d^{-1}cd = ca^\nu, && e^{-1}ce = ca^\rho, \\ &f^{-1}cf = ca^{\rho'}, && e^{-1}de = da^\sigma, && f^{-1}df = da^{\sigma'}, && f^{-1}ef = eb, && e^p = c^\lambda b^\beta a^\zeta, && f^p = d^\delta c^{\beta'} a^{\zeta'}. \end{aligned}$$

β, γ, β', δ ayant les déterminations suivantes, correspondant aux types distincts de G | A :

	I.	II.	III.	IV.	V.		I'.	II'.	III'.	IV'.	V'.	
β	0	0	0	0	0	(si p est $\geqq 3$)	0	1	0	0	0	(si $p = 2$),
γ	0	0	1	1	1		0	0	1	1	1	
β'	0	1	0	1	0		0	1	0	1	0	
δ	0	0	0	0	1		0	0	0	0	1	

---

[1] De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les conditions d'automorphisme, fermeture et permutabilité, donnent :

$$\lambda \equiv \lambda' \equiv \gamma\nu \equiv \delta\nu \equiv \beta\mu + \gamma\rho \equiv \beta'\mu' + \delta\sigma' \equiv \gamma\rho' + \beta\mu' + \varepsilon\mu - \alpha \equiv \delta\sigma + \beta'\mu + \varepsilon\mu' + \alpha \equiv 0.$$

Les éléments normaux sont de la forme $d^z c^y b^x$, avec les conditions

$$\nu z \equiv \nu y \equiv \mu x + \rho y + \sigma z \equiv \mu' x + \rho' y + \sigma' z \equiv 0;$$

on voit alors que la condition de figure est que l'on ait ν et μ ou $\mu' \not\equiv 0$. On peut donc prendre a^ν pour a, c'est-à-dire supposer $\nu = 1$ et les conditions d'ordre deviennent

$$\lambda \equiv \lambda' \equiv \gamma \equiv \delta \equiv \beta\mu \equiv \beta'\mu' \equiv \beta\mu' + \varepsilon\mu - \alpha \equiv \beta'\mu + \varepsilon\mu' + \alpha \equiv 0.$$

Ainsi le type de G|A qui convient seul est le type I avec $\alpha \equiv \varepsilon\mu \equiv \varepsilon\mu'$ pour $p \geqq 2$, (pour $p = 2$, il faut $\alpha \equiv \mu' \equiv \mu \equiv 1$).

On peut prendre $e d^{-\rho} c^\sigma$ pour e, $f d^{-\rho'} c^{\sigma'}$ pour f, puis ce que devient $e^{-1} f^{-1} e f$ pour b, c'est-à-dire supposer $\rho = \sigma = \rho' = \sigma' = 0$; les équations de G prennent alors, en changeant un peu les notations, la forme simplifiée :

$$a^p = 1, \quad b^p = a^\varepsilon, \quad c^p = a^\alpha, \quad d^p = a^\beta, \quad e^p = a^\gamma, \quad f^p = a^\delta,$$
$$c^{-1} bc = d^{-1} bd = b, \quad e^{-1} be = ba^\mu, \quad f^{-1} bf = ba^{\mu'},$$
$$d^{-1} cd = ca, \quad e^{-1} ce = f^{-1} cf = c, \quad e^{-1} de = f^{-1} df = d, \quad f^{-1} ef = eb.$$

Si l'on pose

$$(f^{\nu'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} f^\nu e^u d^z c^y b^x = f^{V'} e^{U'} d^{Z'} c^{Y'} b^{X'} a^{H'},$$
$$(f^\nu e^u d^z c^y b^x)^{-1} (f^{\nu'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'})^{-1} - f^\nu e^u d^z c^y b^x f^{\nu'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} = b^{X''} a^{H''};$$
$$(f^\nu e^u d^z c^y b^x)^w = f^{V_w} e^{U_w} d^{Z_w} c^{Y_w} b^{X_w} a^{H_w}, \quad (f^\nu e^u d^z c^y b^x)^p = b^{\varepsilon u \nu} a^{A_p},$$

on trouve, en supposant tous les exposants $< p$:

$$V' = \nu' + \nu, \quad U' = u' + u, \quad Z' = z' + z, \quad Y' = y' + y, \quad X' = u'\nu + x' + x,$$
$$H' = \mu x' u + \mu' x' \nu + y' z + \mu u u' \nu + \mu\nu \binom{u'}{2} + \mu' u' \binom{\nu}{2},$$
$$X'' = u\nu' - \nu u', \quad H'' = \mu x u' + \mu' x \nu' + y z' + \mu u' u \nu + \mu \nu' \binom{u}{2} + \mu' u \binom{\nu'}{2} - H',$$
$$V_w = w\nu, \quad U_w = wu, \quad Z_w = wz, \quad Y_w = wy, \quad X_w = wx + u\nu \Sigma_1^{w-1} t,$$
$$H_w = \left[\mu x u + \mu' x \nu + y z + \mu' u \binom{\nu}{2}\right] \Sigma_1^{w-1} t + \mu u^2 \nu \Sigma_1^{w-1} \Sigma_1^t t + \mu' u \nu^2 \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t t + \mu\nu \Sigma_1^{w-1} \binom{tu}{2},$$
$$A_p = \alpha y + \beta z + \gamma u + \delta\nu + \varepsilon' u\nu(\mu'\nu - \mu u) + \varepsilon[x(1 + u + \nu) + yz + u\nu].$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

est de la forme

$$a_1 = a^\theta, \quad b_1 = d^\zeta c^\eta b^\xi a^h. \quad c_1 = d^{\zeta'} c^{\eta'} b^{\xi'} a^{h'}, \quad d_1 = d^{\zeta''} c^{\eta''} b^{\xi''} a^{h''}, \quad e_1 = f^v e^u d^z c^y b^x a^k,$$
$$f_1 = f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} a^{k'},$$

avec les conditions

$$\theta\xi \not\equiv 0, \quad \eta \equiv \zeta \equiv \varepsilon uv \equiv \varepsilon u'v' \equiv 0, \quad \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' \equiv \theta, \quad \xi + pj = uv' - vu', \quad \varepsilon j + h \equiv \mathrm{H}'',$$
$$\mu\xi' u + \mu'\xi' v + \eta' z - \zeta' y \equiv \mu\xi' u' + \mu'\xi' v' + \eta' z' - \zeta' y'$$
$$\equiv \mu\xi'' u + \mu'\xi'' v + \eta'' z - \zeta'' y \equiv \mu\xi'' u' + \mu'\xi'' v' + \eta'' z' - \zeta'' y' \equiv 0,$$

et fournit sur les exposants des équations de G, la transformation :

(1) $$\theta\mu_1 \equiv \zeta(\mu u + \mu' v), \quad \theta\mu'_1 \equiv \varepsilon(\mu u' + \mu' v'),$$

(2) $$\theta\alpha_1 \equiv \alpha\eta' + \beta\zeta' + \varepsilon(\xi' + \eta'\zeta'), \quad \theta\beta_1 \equiv \alpha\eta'' + \beta\zeta'' + \varepsilon(\xi'' + \eta''\zeta'').$$

(3) $$\begin{cases} \theta\gamma_1 \equiv \alpha y + \beta z + \gamma u + \delta v + \varepsilon' uv(\mu' v - \mu u) + \varepsilon yz, \\ \theta\delta_1 \equiv \alpha y' + \beta z' + \gamma u' + \delta v' + \varepsilon u'v'(\mu' v' - \mu u') + \varepsilon y'z'. \end{cases}$$

1° *p impair.*

Les formules (1) jointes à la condition de figure donnent $\mu_1 = 0$, $\mu'_1 = 1$ en prenant par exemple $u = \mu'$, $v = -\mu$, $\mu u' + \mu' v' = \theta = \xi = 1$. Soit donc $\mu_1 = \mu = 0$, $\mu'_1 = \mu' = 1$, il faut ajouter comme conditions au changement de générateurs $v \equiv 0$, $\theta \equiv \xi v'$, et, en tenant compte des anciennes, on a

$$\eta \equiv \zeta \equiv y \equiv z \equiv v \equiv 0, \quad \xi \equiv uv', \quad \theta \equiv \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' \equiv uv'^2, \quad h \equiv \mathrm{H}'',$$
$$\xi' v' + \eta' z' - \zeta' y' \equiv \xi'' v' + \eta'' z' - \zeta'' y' \equiv 0,$$

et les formules (2) et (3) deviennent

(2)′ $$uv'^2\alpha_1 \equiv \alpha\eta' + \beta\zeta', \quad uv'^2\beta_1 \equiv \alpha\eta'' + \beta\zeta'', \quad v'^2\gamma_1 \equiv \gamma,$$

(3)′ $$uv'^2\delta_1 \equiv \alpha y' + \beta z' + \gamma u' + \delta v' + \varepsilon' u'v'^2.$$

On voit sur les formules (2)′ que l'on peut toujours faire sur α, β, γ l'une des six hypothèses, irréductibles l'une à l'autre :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, 1, \quad \gamma = 0, 1, \mathrm{N},$$

en ayant toujours $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$.

Si l'on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$, (3′) qui devient $uv'\delta_1 \equiv \delta + \varepsilon' u'v'$ montre que

pour $p > 3$, G a deux types : $\delta = 0, 1$;
pour $p = 3$, G a un type : $\delta = 0$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si l'on a : $\alpha = \beta = 0$; $\gamma = 1$, N, il vient $v'^2 \equiv 1$, $u\delta_1 \equiv \delta v' + (\gamma + \varepsilon')u'$. On a donc

pour $p > 3$, les deux types : $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, N, $\delta = 0$;
pour $p = 3$, les trois types : $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$; $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -1$, $\delta = 0, 1$.

Dans les trois autres hypothèses, β étant $\not\equiv 0$, on voit que l'on peut toujours faire $\delta_1 = 0$, d'où les trois autres types (pour $p \geqq 3$)

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, 1, \mathrm{N}, \quad \delta = 0.$$

$$2^\circ \; p = 2 \qquad (\mu = \mu' = 1).$$

Les formules (1) donnent $\mu_1 = \mu'_1 = 1$; les formules (2) permettent, en choisissant convenablement ξ' et ξ'', de faire $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ et, en supposant $\alpha_1 = \alpha = \beta_1 = \beta = 0$, ajoutent comme conditions $\xi' \equiv \eta'\zeta'$, $\xi'' \equiv \eta''\zeta''$. Les anciennes conditions deviennent alors :

$$\theta \equiv \xi \equiv \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' \equiv 1, \quad uv \equiv u'v' \equiv 0, \quad u + v \equiv u' + v' \equiv 1, \quad h \equiv \mathrm{H}'', \quad \eta' z + \zeta' y \equiv \eta' z' + \zeta' y' \equiv \eta'\zeta',$$
$$\eta'' z + \zeta'' y \equiv \eta'' z' + \zeta'' y' \equiv \eta''\zeta'',$$

les quatre dernières et la troisième exigent $yz \equiv y'z' \equiv 0$, et les formules (3') deviennent

$$\gamma_1 \equiv \gamma u + \delta v, \qquad \delta_1 \equiv \gamma u' + \delta v',$$

c'est-à-dire :

en prenant $u = v' = 1$, $u' = v = 0$: $\gamma_1 \equiv \gamma$, $\delta_1 \equiv \delta$,
en prenant $u = v' = 0$, $u' = v = 1$: $\gamma_1 \equiv \delta$, $\delta_1 \equiv \gamma$,

d'où les trois types :

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0, 1, \quad \gamma = \delta = 1.$$

Figure (1)(11)(111).

38. D'après les types connus [1] des figures (11)(111), G aura des équations de la forme

$$a^p = 1, \quad b^p = a^\delta, \quad c^p = a^{\delta'}, \quad d^p = c^\gamma b^\beta a^\alpha, \quad e^p = c^{\gamma'} b^{\beta'} a^{\alpha'}, \quad f^p = c^{\gamma''} b^{\beta''} a^{\alpha''},$$
$$c^{-1}bc = ba^\lambda, \quad d^{-1}bd = ba^\mu, \quad e^{-1}be = ba^{\mu'}, \quad f^{-1}bf = ba^{\mu''},$$
$$d^{-1}cd = ca^\nu, \quad e^{-1}ce = ca^{\nu'}, \quad f^{-1}cf = ca^{\nu''}, \quad e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = da^\rho, \quad f^{-1}ef = ec.$$

---

(1) De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Les exposants des générateurs autres que a dans les seconds membres ayant les déterminations suivantes, correspondent aux types distincts de G | A :

$(p>2)$.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
γ	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1
β	0	0	0	0	0	0	1	1	0	i^m	0
γ'	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
β'	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
γ''	0	0	0	0	1	1	-1	-1	0	-1	1
β''	0	0	1	1	0	0	0	1	N	0	$\frac{i^{2m-1}-1}{4}$

$$\left(m = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

$(p=2)$.	I'.	II'.	III'.	IV'.	V'.	VI'.	VII'.	VIII'.	IX'.
γ	0	1	0	0	1	1	1	0	0
β	0	0	1	1	0	0	0	1	1
γ'	0	0	0	0	0	0	0	0	0
β'	0	0	0	1	0	1	0	0	1
γ''	0	0	0	0	0	0	1	1	1
β''	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Les conditions d'automorphisme, fermeture et permutabilité donnent :

$$\lambda \equiv \beta\mu + \gamma\nu \equiv \beta'\mu' + \gamma'\gamma' \equiv \beta\mu'' + \gamma\nu'' \equiv \beta''\mu + \gamma''\nu \equiv \beta''\mu'' + \gamma''\nu'' \equiv \nu + \mu'' \equiv 0,$$
$$\delta + \varepsilon\mu \equiv \beta\mu' + \gamma\nu', \quad \delta + \varepsilon\mu' + \beta'\mu + \gamma'\nu \equiv 0, \quad \delta' + \varepsilon\nu' \equiv \beta'\mu'' + \gamma'\nu'', \quad \delta' + \varepsilon\nu'' + \beta''\mu' + \gamma''\nu' \equiv 0,$$

et les éléments normaux étant de la forme $c^y b^x$ avec

$$\mu x + \nu y \equiv \mu' x + \nu' y \equiv \mu'' x + \nu'' y \equiv 0,$$

la condition de figure est qu'un déterminant au moins de $\begin{vmatrix} \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}$ soit $\not\equiv 0$. On voit alors que les types de G | A convenant seuls sont le type I, avec les conditions

$$\delta \equiv \lambda \equiv \delta' \equiv \nu + \mu'' \equiv 0, \qquad \text{un déterminant de} \quad \begin{vmatrix} \mu & \mu' & -\nu \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

le type IV, avec les conditions

$$\delta \equiv \lambda \equiv \nu \equiv \nu' \equiv \mu \equiv \mu'' \equiv 0, \qquad -\mu' \equiv \nu'' \equiv \delta' \not\equiv 0,$$

le type I', avec les conditions

$$\lambda \equiv 0, \quad \mu'' \equiv \nu, \quad \mu \equiv \mu' \equiv \delta, \quad \nu' \equiv \nu'' \equiv \delta', \quad \text{un déterminant de} \quad \begin{vmatrix} \delta & \delta & \nu \\ \nu & \delta' & \delta \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et le type III′, avec les conditions

$$\lambda \equiv \mu \equiv \mu'' \equiv \nu \equiv 0, \qquad \mu' \equiv \delta \equiv \nu' \equiv \nu'' \equiv \delta' \equiv 1.$$

Prenons alors $d_1 = dc^y b^x$, $f_1 = fc^{y'} b^{x'}$, d'où

$$f_1^{-1} d_1 f_1 = d_1 a^{\rho - \mu x' - \nu y' + \mu'' x + \nu'' y}$$

en déterminant x, y, x', y' par la condition $\rho - \mu x' - \nu y' + \mu'' x + \nu'' y \equiv 0$ (on ne peut avoir $\mu \equiv \nu \equiv \mu'' \equiv \nu'' \equiv 0$), puis prenant $b_1 = ba^{\mu' x + \nu' y}$, $c_1 = ca^{-\mu' x' - \nu' y'}$, on a $f_1^{-1} d_1 f_1 = d_1$, $e^{-1} d_1 e = d_1 b_1$, $f_1^{-1} e f_1 = e c_1$; on peut donc toujours supposer $\rho = 0$. Une forme d'équations de G commune à tous les types sera donc

$$a^p = 1, \qquad b^p = a^\delta, \qquad c^p = a^{\delta'}, \qquad d^p = b^\beta a^\alpha, \qquad e^p = c^\gamma a^{\alpha'}, \qquad f^p = b^{\beta''} a^{\alpha''},$$
$$c^{-1} bc = b, \qquad d^{-1} bd = ba^\mu, \qquad e^{-1} be = ba^{\mu'}, \qquad f^{-1} bf = ba^{\mu''},$$
$$d^{-1} cd = ca^\nu, \qquad e^{-1} ce = ca^{\nu'}, \qquad f^{-1} cf = ca^{\nu''}, \qquad e^{-1} de = db, \qquad f^{-1} df = d, \qquad f^{-1} ef = c.$$

En posant

$$f^v e^u d^z c^y b^x = g, \qquad f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} = g',$$
$$g' g = f^{V'} e^{U'} d^{Z'} c^{Y'} b^{X'} a^{H'}, \qquad g^{-1} g'^{-1} g g' = c^{Y'_1 - Y'} b^{X'_1 - X'} a^{H'_1 - H'},$$
$$g^w = f^{V_w} e^{U_w} d^{Z_w} c^{Y_w} a^{H_w}, \qquad g^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p},$$

on trouve

$$V' = v' + v, \qquad U' = u' + u, \qquad Z' = z' + z, \qquad Y' = v' u + y' + y, \qquad X' = z' u + x' + x;$$
$$H' = \nu' v \binom{u'}{2} + \nu'' u' \binom{v}{2} + \nu'' v y' - \nu v x' + \nu v y' u' + \mu u \binom{z'}{2} + \mu' z' \binom{u}{2}$$
$$+ \nu' u (v u' + y') + \mu' u x' + \nu z (v u' + y') + \mu z (u z' + x'),$$

puis, par récurrence,

$$V_w = wv, \qquad U_w = wu, \qquad Z_w + wz, \qquad Y_w = wy + uv \Sigma_1^{w-1} t, \qquad X_w = wx + zu \Sigma_1^{w-1} t,$$
$$H_w = \nu' v \Sigma_1^{w-1} \binom{tu}{2} + \left[\nu'' u \binom{v}{2} + \nu'' y v - \nu x v + \mu' z \binom{u}{2} + \nu' y u + \mu' x u + \nu y z + \mu x z \right] \Sigma_1^{w-1} t$$
$$+ [\nu'' u v^2 - \nu z u v + \mu' z u^2] \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t t + [\nu' u^2 v + \mu z^2 u] \Sigma_1^{w-1} \Sigma_1^t t + \mu u \Sigma_1^{w-1} \binom{tz}{2}$$
$$+ \nu y u v \Sigma_1^{w-1} t^2 + \nu u^2 v^2 \tfrac{1}{2} \Sigma_1^{w-1} (t^3 - t^2),$$

d'où, en faisant $w = p$ et en supposant les exposants $< p$,

$$C_p = \gamma' u + \varepsilon u v, \qquad B_p = \beta z + \beta'' v + \varepsilon z u,$$
$$A_p = \delta x + \delta' y + \alpha z + \alpha' u + \alpha'' v - \tfrac{1}{2}(1 - \varepsilon)(\delta z u + \delta' u v) + \varepsilon' u [-\mu z^2 + \mu' z u - \nu y v - \nu u v^2 - \nu' u v + \nu'' v^2]$$
$$+ \varepsilon [\nu'' y v - \nu x v + \nu y u v + \nu' y u + \nu' u v + \mu' x u + \nu y z + \nu z u v + \mu z u + \mu x z],$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et, le commutant $\{a, b, c\}$ étant abélien, Y_1, X_1, H_1 se tirent respectivement de Y', X', H' en permutant les lettres accentuées et non accentuées de même nom.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est

$$a_1 = a^\theta, \qquad b_1 = c^\eta b^\xi a^h, \qquad c_1 = c^{\eta'} b^{\xi'} a^{h'}, \qquad d_1 = f^\nu e^u d^z c^y b^x a^k, \qquad e_1 = f^{\nu'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} a^{k'},$$

avec les conditions :

$$\begin{array}{llll}
\xi = zu' + pm, & \eta = \nu u' + pn, & m\delta + n\delta' + h \equiv H'_1 - H', & \\
0 \equiv u, & 0 \equiv u'', & 0 \equiv H''_1 - H'', & \text{(en prenant } u = u'' = 0), \\
\xi' = -u'z'' + pm', & \eta' = u'\nu'' + pn', & m'\delta + n'\delta' \equiv H'''_1 - H''', &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\beta\xi = B_p + pj, & \gamma'\xi' = B''_p + pj', & \beta''\xi = B''_p + pj'', \\
\beta\eta = pl, & \gamma'\eta' = C'_p + pl', & \beta''\eta = pl'',
\end{array} \qquad [\theta u'(z\nu'' - \nu z''(\not\equiv 0,$$

($j, j', j'', l, l', l'', m, m', n, n'$ désignant des entiers arbitraires) et fournit sur les exposants de G la transformation

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\theta\mu_1 \equiv \xi(\mu z + \mu''\nu) + \eta(\nu z + \nu''\nu), & \theta\nu_1 \equiv \xi'(\mu z + \mu''\nu) + \eta(\nu z + \nu''\nu), \\
\theta\mu'_1 \equiv \xi(\mu z' + \mu' u' + \mu''\nu') + \eta(\nu z' + \nu' u' + \nu''\nu'), & \theta\nu'_1 \equiv \xi'(\mu z' + \mu' u' + \mu''\nu'') + \eta'(\nu z' + \nu' u' + \nu''\nu'), \\
\theta\mu''_1 \equiv \xi(\mu z'' + \mu''\nu'') + \eta(\nu z'' + \nu''\nu''), & \theta\nu''_1 \equiv \xi'(\mu z'' + \mu''\nu'') + \eta''(\nu z'' + \nu''\nu''),
\end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \theta\delta_1 \equiv u'(\delta z - \delta'\nu), \qquad \theta\delta'_1 \equiv u'(-\delta z'' + \delta'\nu''),$$

$$(3)\quad \delta j + \delta' l + h\beta + \theta\alpha_1 \equiv A_p, \qquad \delta j' + \delta' l' + h'\gamma' + \theta\alpha'_1 \equiv A'_p, \qquad \delta j'' + \delta' l'' + h\beta'' + \theta\alpha''_1 \equiv A''_p,$$

(H'', X'', Y'' se tirent de H', X', Y', en y remplaçant x', y', ... par x'', y'', ... ; H''', X''', Y'' se tirent de H', X', Y', en ajoutant un accent à toutes les lettres; A'_p, B'_p, C'_p, A''_p, B''_p, C''_p se tirent de A_p, B_p, C_p, en accentuant d'abord une fois, puis deux fois, les lettres x, y, ...)

1° p IMPAIR.

Type I de G | A ($\lambda = \delta = \delta' = 0$).

39. Comme on n'a pas $\mu \equiv \mu' \equiv \mu''' \equiv 0$, on peut déterminer z, u, ν vérifiant $u \not\equiv 0$, $\mu z + \mu' u + \mu''\nu \equiv 1$; en prenant alors $e_1 = f^\nu e^u d^z$, $a_1 = a^u$, $b_1 = b^u a^{\binom{u}{2}}$, $c_1 = c^u a^{\nu'\binom{u}{2}}$, on a $e_1^{-1} b_1 e_1 = b_1 a_1$, toutes les autres équations conservant la même forme; on peut donc supposer $\mu' = 1$ et, en tenant compte des conditions d'ordre, écrire les équations de G (en sous-entendant les équations communes à tous les types)

$$b^p = c^p = 1, \qquad d^p = a^\alpha, \qquad e^p = a^{\alpha'}, \qquad f^p = a^{\alpha''}, \qquad d^{-1}bd = ba^\mu, \qquad e^{-1}be = ba,$$
$$f^{-1}bf = ba^{-\nu}, \qquad d^{-1}cd = ca^\nu, \qquad e^{-1}ce = ca^{\nu'}, \qquad f^{-1}cf\, ca^{\nu''}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

En faisant dans les formules (1) $\mu''_1 = -\nu_1$, $\mu'' = -\nu$, on en tire la relation

$$\theta^2(\mu_1\nu''_1 + \nu_1^2) \equiv u'^2(z\varphi'' - \varphi z'')^2(\mu\nu'' + \nu^2),$$

qui conduit à distinguer les trois cas : $\mu\nu'' + \nu^2$ non carré, carré ou $\equiv 0$.

Soit $\mu\nu'' + \nu^2$ *non carré*, donc $\mu\nu'' \not\equiv 0$; en prenant $z'' = 0$, $z = \varphi'' = 1$, φ et y déterminés par $0 \equiv \nu + \nu''\varphi \equiv -\mu x'' + \nu(y'' + \varphi x'' - x) + \nu''(y - \varphi y'')$, on obtient $\nu_1 \equiv 0$; en supposant $\nu_1 = \nu = 0$, donc $\mu\nu''$ non carré, les formules définissant complètement la transformation sur les exposants μ et ν'' sont :

$$\theta \equiv u'(zu' - \nu'\varphi u' + \mu zz' - \nu''\varphi\varphi'), \qquad 0 \equiv \mu zz'' - \nu''\varphi\varphi'' \equiv \mu(xz'' - zx'') + \nu''(y\varphi'' - \varphi y''), \qquad \theta(z\varphi'' - \varphi z'') \not\equiv 0;$$
$$\theta\mu_1 \equiv u'(\mu z^2 - \nu''\varphi^2), \qquad \theta\nu''_1 \equiv u'(-\mu z''^2 + \nu''\varphi''^2);$$

en faisant $z' = z'' = \varphi = 0$, $u' = \mu z$, $\varphi''^2 = Nz^2\mu\nu''^{-1}$, $\theta = \mu^2 z^3$, on obtient $\mu_1 \equiv 1$, $\nu''_1 \equiv N$; en supposant $\mu_1 = \mu = 1$, $\nu''_1 = \nu'' = N$, on a :

$$\theta \equiv u'(zu' - \nu'\varphi u' + zz' - N\varphi\varphi') \equiv u'(z^2 - N\varphi^2) \equiv N^{-1}u'(-z''^2 + N\varphi''^2),$$
$$0 \equiv zz'' - N\varphi\varphi'' \equiv xz'' - zx'' + N(y\varphi'' - \varphi y'').$$

Les deux équations

$$N(N\varphi^2 - z^2) \equiv z''^2 - N\varphi''^2, \qquad zz'' \equiv N\varphi\varphi''$$

donnent

$$z'' \equiv \omega N\varphi, \qquad \varphi'' \equiv \omega z, \qquad \omega^2 \equiv 1,$$

et il reste, pour déterminer la transformation sur ν' :

$$(z^2 - N\varphi^2) \equiv (zu' - \nu'\varphi u' + zz' - N\varphi\varphi'),$$
$$\omega(z^2 - N\varphi^2)\nu'_1 \equiv \nu' zu' + N(z\varphi' - \varphi z' - \varphi u'),$$

en déterminant z' et φ' par les deux équations

$$N(\varphi z' - z\varphi') \equiv \nu' zu' - N\varphi u', \qquad zz' - N\varphi\varphi' \equiv z^2 - N\varphi^2 + (\nu'\varphi - z)u',$$

dont le déterminant est $N(z^2 - N\varphi^2)$, on obtient $\nu'_1 \equiv 0$; en supposant $\nu'_1 = \nu' = 0$, on a

$$\varphi z' - z\varphi' \equiv -\varphi u', \qquad zz' - N\varphi\varphi' \equiv z^2 - N\varphi^2 - zu',$$

les formules (2) disparaissent et les formules (3) deviennent :

$$u'(z^2 - N\varphi^2)\alpha_1 \equiv \alpha z + \alpha''\varphi,$$
$$u'(z^2 - N\varphi^2)\alpha'_1 \equiv \alpha z' + \alpha' u' + \alpha''\varphi' + \varepsilon' u'(-z'^2 + N\varphi'^2 + z'u'),$$
$$\omega u'(z^2 - N\varphi^2)\alpha''_1 \equiv N\alpha\varphi + \alpha'' z.$$

La première et la troisième montrent que l'on peut toujours faire sur α, α'', les deux hypothèses, irréductibles l'une à l'autre : $\alpha = \alpha_1 = 0$, $\alpha'' = \alpha''_1 = 0, 1$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Dans la première hypothèse, si $p > 3$, on a $(z^2 - N\varphi^2)\alpha'_1 \equiv \alpha'$, donc deux types correspondant à $\alpha' = 0, 1$; si $p = 3$, on a $z' \equiv z - u'$, $\varphi' \equiv \varphi$, $(z^2 + \varphi^2)(\alpha'_1 + 1) \equiv \alpha' + 1$, d'où les deux types : $\alpha' = 0, -1$.

Dans la deuxième hypothèse, qui entraîne $\varphi \equiv 0$, $zu' \equiv \omega$, donc $\varphi' \equiv 0$, $z' \equiv z - u'$, on a $z^2\alpha'_1 = \alpha'$, d'où, pour $p \geqq 3$, les trois types : $\alpha' = 0, 1, N$.

Soit $\mu\nu'' + \nu^2$ *carré*, en posant $\varphi = tz$, $\varphi'' = t''z''$, t et t'' étant les deux racines (ici réelles et distinctes) de $\nu''t^2 + 2\nu t - \mu \equiv 0$, on obtient $\mu_1 \equiv \nu''_1 \equiv 0$. En supposant $\mu_1 = \mu = \nu''_1 = \nu'' = 0$, donc $z\varphi \equiv z''\varphi'' \equiv 0$, prenant $z = \varphi'' = 0$, $z'' = \varphi = u' = 1$, $\theta = \nu$, z' déterminé par $\nu z' \equiv 1 - \nu' - \nu$, on obtient $\nu_1 \equiv 1$. En supposant $\nu_1 = \nu = 1$, donc $\theta \equiv u'(z\varphi'' - \varphi z'')$, et déterminant z' et φ' par les deux équations :

$$\varphi z' + z\varphi' \equiv u'(z - \nu'\varphi) - (z\varphi'' + \varphi z''), \qquad \varphi'' z' + z''\varphi' \equiv u'(z'' - \nu'\varphi''),$$

dont le déterminant est $z\varphi'' - \varphi z''$, on obtient $\nu'_1 \equiv 0$. En supposant $\nu'_1 = \nu' = 0$, donc

$$\varphi z' + z\varphi' \equiv u'z - (z\varphi'' + \varphi z''), \qquad \varphi'' z' + z''\varphi' \equiv u'z'',$$

d'où

$$(z\varphi'' - \varphi z'')z' \equiv \varphi z''^2, \qquad (z\varphi'' - \varphi z'')\varphi' \equiv u'(z\varphi'' - \varphi z'') - z\varphi''^2,$$

on a, d'après (3),

$$u'(z\varphi'' + \varphi z'')\alpha_1 \equiv \alpha z + \alpha''\varphi, \qquad u'(z\varphi'' + \varphi z'')\alpha''_1 \equiv \alpha z'' + \alpha''\varphi'',$$
$$u'(z\varphi'' + \varphi z'')\alpha'_1 \equiv \alpha z' + \alpha' u' + \alpha''\varphi' + \varepsilon' u'(z'u' - y'\varphi' - u'\varphi'^2).$$

Les deux premières, en tenant compte de $z\varphi \equiv z''\varphi'' \equiv 0$, montrent qu'on peut toujours faire, sur α, α'', une des trois hypothèses, irréductibles l'une à l'autre :

$$\alpha = 0, \qquad \alpha'' = 0, 1; \qquad \alpha = \alpha'' = 1 \qquad \text{avec} \qquad \alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha''_1 = \alpha''.$$

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \alpha''_1 = \alpha'' = 0$ et $p > 3$, on a $(z\varphi'' + \varphi z'')\alpha'_1 = \alpha'$, donc deux types : $\alpha' = 0, 1$; avec $p = 3$, en prenant $z = \varphi'' = z' = 0$, $\varphi = z'' = u' = 1$, $y' = \alpha' - 1$, on obtient $\alpha'_1 = 0$, donc un type.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = 0$, $\alpha''_1 = \alpha'' = 1$, ce qui entraîne $\varphi \equiv z'' \equiv 0$, $zu' \equiv 1$, $z' \equiv 0$, $\varphi' \equiv u' - \varphi''$, on a

$$\varphi''(\alpha'_1 + 1) \equiv u'(\alpha' + 1) + \varepsilon'(1 - y')(1 - u'\varphi'');$$

on a donc, pour $p > 3$, les deux types : $\alpha' = 0, -1$; et, pour $p = 3$, comme on peut prendre $u'\varphi'' \equiv -1$, $1 - y' \equiv u'(\alpha' + 1)$, ce qui donne $\alpha'_1 + 1 = 0$, un seul type.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha = \alpha''_1 = \alpha'' = 1$, ce qui entraîne $u'(z\varphi'' - \varphi z'') \equiv z + \varphi \equiv z'' + \varphi''$, donc, en tenant compte de $z\varphi \equiv z''\varphi'' \equiv 0$, $z\varphi'' - \varphi z'' \not\equiv 0$,

$$z'' \equiv \varphi, \qquad \varphi'' \equiv z, \qquad u'(z + \varphi) \equiv 1, \qquad (z^2 - \varphi^2)z' \equiv \varphi^3, \qquad (z^2 - \varphi^2)\varphi' \equiv z - \varphi - z^3,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

on a

$$(z^2+v^2)(\alpha'_1+1)\equiv\alpha'+1+\varepsilon' v(1-y'-v).$$

Pour $p>3$, on a trois types $\alpha'+1=0$, 1, N; pour $p=3$, en prenant $z=0$, $v=1$, $y'=\alpha'+1$, on peut faire $\alpha'_1+1=0$, donc un seul type.

Soit $\mu\nu''+\nu^2\equiv 0$, en déterminant z et v par l'équation unique

$$\mu z-\nu v\equiv\nu z+\nu'' v\equiv 0,$$

on obtient $\mu_1\equiv\nu_1\equiv 0$; supposons donc $\mu_1=\mu=\nu_1=\nu=0$, ce qui entraîne, avec $\nu''\nu''_1\not\equiv 0$ (condition de figure), $v\equiv 0$, donc $y\equiv 0$, $\theta\equiv zu'^2$, $zu'\nu''_1\equiv\nu''v''^2$; on peut faire $\nu''_1=1$, et, en supposant $\nu''_1=\nu''=1$, ce qui entraîne $zu'\equiv v''^2$, on a

$$v''^2\nu'_1\equiv -u'z''+\nu' u' v''+v' v'';$$

on peut déterminer z'' de manière à faire $\nu'_1=0$; soit donc $\nu'_1=\nu'=0$, donc $0\equiv v'v''-u'z''$, les formules (3) deviennent

$$u'^2\alpha_1\equiv\alpha,\qquad u'^2 v''\alpha''_1\equiv\alpha v'+\alpha'' u',\qquad u' v''^2\alpha'_1\equiv\alpha z'+\alpha' u'+\alpha'' v'+\varepsilon' u'(z'u'+v'^2).$$

D'après les deux premières, on peut toujours faire sur α, α'' l'une des quatre hypothèses, irréductibles l'une à l'autre :

$$\alpha_1=\alpha=0,\quad \alpha''_1=\alpha''=0,1;\qquad \alpha_1=\alpha=1,\mathrm{N},\quad \alpha''_1=\alpha''=0.$$

A ces quatre hypothèses correspondent les quatre formes de la troisième des formules (3)

$$\begin{aligned} z u'\alpha'_1&\equiv\alpha'+\varepsilon'(z'u'+v'^2), & v''\alpha'_1&\equiv\alpha' v''^{-1}+v'+\varepsilon' v''^{-1}(z'u'+v'^2),\\ z\alpha'_1&\equiv(1+\varepsilon')z'+\alpha' u', & z\alpha'_1&\equiv(\mathrm{N}+\varepsilon')z'+\alpha' u'.\end{aligned}$$

Donc pour $p>3$ on a les cinq types

$$\alpha=\alpha''=0,\quad \alpha'=0,1;\qquad \alpha=0,\quad \alpha''=1,\quad \alpha'=0;\qquad \alpha=1,\mathrm{N},\quad \alpha''=0,\quad \alpha'=0;$$

et pour $p=3$ les cinq types

$$\alpha=\alpha''=\alpha'=0;\qquad \alpha=0,\quad \alpha''=1,\quad \alpha'=0;\qquad \alpha=1,\quad \alpha''=\alpha'=0;$$
$$\alpha=-1,\quad \alpha''=0,\quad \alpha=0,1.$$

Type IV de G | A ($\beta=0$, $\gamma'=\beta''=1$, $\lambda=\delta=\mu=\nu=\nu'=\mu''=0$, $\mu'=-\nu''=-\delta'\not\equiv 0$).

Comme on peut prendre $a^{\mu'}$ pour a, on peut toujours supposer $\mu'=-\nu''=-\delta'=1$ et, en sous-entendant les équations communes à tous les types, écrire les équations

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

de G

$$b^p = 1, \quad c^p = a^{-1}, \quad d^p = a^\alpha, \quad e^p = ca^{\alpha'}, \quad f^p = ba^{\alpha''},$$
$$d^{-1}bd = b, \quad e^{-1}be = ba, \quad f^{-1}bf = b, \quad d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = c, \quad f^{-1}cf = ca^{-1}.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme des équations, et où l'on suppose tous les exposants $< p$, doit vérifier les conditions

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad \xi' = 0, \quad \eta' = u', \quad \theta = u', \quad y = v = z'' = v'' = 0, \quad zu' \equiv v'' \equiv 1,$$
$$h \equiv z\binom{u'}{2} + xu', \quad h' \equiv -u'\binom{v''}{2} - y'v'' - u'x'',$$

et la transformation qui en résulte sur les exposants de G est définie par les seules formules (3) qui deviennent

$$\alpha_1 \equiv \alpha z^2, \quad h' + \alpha'_1 \equiv z(y' + \alpha z') + \alpha', \quad h + \alpha''_1 \equiv z(y'' + \alpha'')$$

et montrent que, pour $p \geqq 3$, G à les trois types

$$\alpha = 0, 1, \mathrm{N}, \quad \alpha' = \alpha'' = 0.$$

$$2^\circ \; p = 2.$$

Type I' de G | A ($\beta = \gamma' = \beta'' = \lambda = 0$, $\mu'' = \nu$, $\mu = \mu' = \delta$, $\nu' = \nu'' = \delta'$).

40. Les formules (1) et (2) ajoutent comme conditions au changement de générateurs conservant la forme des équations de G

$$0 \equiv zz' + \nu(zv' + vz') + \delta' vv' \equiv z'z'' + \nu(z'v'' + v'z'') + \delta' v'v'',$$

et se réduisent à

$$\delta_1 + \delta z \equiv \delta' v, \quad \delta'_1 \equiv \delta z'' \equiv \delta' v'', \quad \nu_1 \equiv \nu + \delta z z'' + \delta' v v''.$$

Si l'on a $\delta \equiv \delta' \equiv 0$, donc $\delta_1 \equiv \delta'_1 \equiv 0$, $\nu_1 \equiv \nu \equiv 1$ (condition de figure), il faut $z' \equiv v' \equiv (x+y)v'' + (x''+y'')v \equiv 0$, et les formules (3) deviennent

$$\alpha_1 \equiv \alpha z + xv + yz, \quad \alpha'_1 \equiv \alpha', \quad \alpha''_1 \equiv \alpha z'' + x''v'' + y''z''.$$

En prenant, par exemple, $z = v'' = 0$, $z'' = v = 1$, $x = 0$, $x'' = y'' = \alpha$, on obtient $\alpha_1 \equiv \alpha''_1 \equiv 0$, donc deux types : $\alpha = \alpha'' = 0$, $\alpha' = 0, 1$.

Si l'on a δ ou $\delta'' \not\equiv 0$, en prenant $z' = v' = 0$, $\delta = v''$, $\delta' = z''$, $\delta z + \delta' v \equiv 1$, on obtient $\delta_1 \equiv 1$, $\delta'_1 \equiv 0$; en supposant $\delta_1 = \delta = 1$, $\delta'_1 = \delta' = 0$, donc $\nu_1 \equiv \nu \equiv 1$, on a

$$z \equiv v'' \equiv 1, \quad z'' \equiv z' \equiv v' \equiv 0, \quad x + y + (x'' + y'')v + x'' \equiv 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et les formules (3) deviennent

$$\alpha_1 \equiv \alpha + \alpha'' v + x v + y, \qquad \alpha'_1 \equiv \alpha', \qquad \alpha''_1 \equiv \alpha'' + y''.$$

En prenant $v = 0$, $y = \alpha$, $y'' = \alpha''$, $x = 0$, $x'' = \alpha$, on obtient $\alpha_1 \equiv \alpha''_1 \equiv 0$, d'où les deux types : $\alpha = \alpha'' = 0$, $\alpha' = 0, 1$.

Type III' de G | A ($\beta = 1$, $\gamma' = \beta'' = \gamma = \mu = \nu = \mu'' = 0$, $\delta = \delta' = \mu' = \nu' = \nu'' = 1$).

Tout changement de générateurs conservant la forme des équations de G doit vérifier, outre les conditions générales, les conditions suivantes, tirées des formules (1) et (2) :

$$z \equiv v'' \equiv 1, \qquad v \equiv z'' \equiv v' \equiv 0,$$

et les conditions générales deviennent

$$\xi \equiv \eta' \equiv 1, \qquad \eta \equiv \xi' \equiv 0, \qquad y \equiv u \equiv u'' \equiv 0, \qquad h \equiv x, \qquad h' \equiv y' + x'' + y'',$$

et les formules (3) sont

$$x + \alpha_1 \equiv \alpha, \qquad \alpha'_1 \equiv \alpha z' + \alpha' + x' + y', \qquad \alpha''_1 \equiv \alpha'' + y'',$$

on peut donc toujours faire $\alpha = \alpha'_1 = \alpha''_1 = 0$, d'où un seul type.

Figure (1)(11)(1)(11).

41. D'après les types connus [1] de g_{p^5} de figure (11)(1)(11), les équations de G sont de la forme

$$a^p = 1, \qquad b^p = a^\beta, \qquad c^p = a^{\beta'}, \qquad d^p = b^\varepsilon a^\gamma, \qquad e^p = c^\lambda b^\alpha a^\delta, \qquad f^p = c^{\lambda'} b^{\alpha'} a^{\delta'},$$
$$c^{-1} b c = b a^\mu, \qquad d^{-1} b d = b a^\nu,$$
$$e^{-1} b e = b a^\tau, \qquad f^{-1} b f = b a^{\tau'}, \qquad d^{-1} c d = c a^\chi, \qquad e^{-1} c e = c a^\varphi, \qquad f^{-1} c f = c a^{\varphi'},$$
$$e^{-1} d e = d b, \qquad f^{-1} d f = d c^{\sigma'} b^\varepsilon a^{\psi'}, \qquad f^{-1} e f = e d,$$

et les exposants des générateurs autres que a ont les déterminations suivantes (corres-

---

(1) De Séguier, *Théorie des groupes abstraits,* Chap IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

pondant aux types distincts de G|{A}:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	$(p>3)$.
σ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
α	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	i^m	1	1	1	$\left(m=1,\ldots,\frac{p-1}{2}\right)$
λ	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	
α'	0	0	1	N	0	1	N	0	0	0	1	N	0	N	$\frac{i^{2n+1}-1}{4}$	0	0	1	N	$\left(n=0,1,\ldots,\frac{p-3}{2}\right)$
λ'	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	

	I'.	II'.	III'.	IV'.	V'.	VI'.	VII'.	VIII'.	IX'.	X'.	XI'.	XII'.	XIII'.	XIV'.	XV'.	$(p=3)$.
σ'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	
α	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
λ	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	-1	1	1	0	0	
α'	0	1	1	-1	0	1	-1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	
λ'	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	

	I''.	II''.	III''.	IV''.	V''.	VI''.	VII''.	$(p=2)$.
σ'	0	0	0	0	0	0	0	
α	0	1	0	0	0	0	1	
λ	0	0	0	1	0	1	0	
α'	0	1	1	0	0	1	0	
λ'	0	0	0	1	1	1	1	

Les conditions d'automorphisme, fermeture, permutabilité résultent de l'adjonction successive de d, e, f donnent

$$\mu\equiv\nu\equiv\varkappa\equiv 0,\qquad \beta\equiv\varepsilon\tau,\qquad \tau\alpha+\varphi\lambda\equiv 0,\qquad \varepsilon\tau'\equiv\beta'\sigma'+\varepsilon\beta,\qquad \varphi\sigma'+\varepsilon\tau\equiv\tau',$$
$$\varphi'\lambda+\tau'\alpha\equiv\gamma+\varepsilon\beta+\varepsilon'\tau,\qquad \tau'\alpha'+\varphi'\lambda'\equiv 0,\qquad \varepsilon(\beta+\psi')+\varepsilon'\varphi'\sigma'+\tau\alpha'+\varphi'\lambda'+\gamma\equiv 0,$$

et pour que G soit de la figure voulue, c'est-à-dire n'ait pas d'éléments normaux hors de $\{a\}$, il faut et il suffit que l'on ait $\tau\varphi'-\varphi\tau'\not\equiv 0$.

Les types admissibles de G|{A} et les formes particulières correspondantes des conditions d'ordre et de figure sont

I	$\gamma\equiv\tau'\equiv 0,\quad \tau\varphi'\not\equiv 0,$
VI, VII	$\varphi\equiv\tau'\equiv 0\quad \varphi'\equiv\gamma\equiv-\alpha'\quad \tau\not\equiv 0,\quad (\alpha'=1, N),$
X	$\beta'\equiv\gamma\equiv 0,\quad \varphi\equiv\tau',\quad \tau\varphi'-\tau'^2\not\equiv 0,$
XIII	$\beta'\equiv\gamma\equiv\varphi'\equiv 0,\quad \varphi\equiv\tau'\not\equiv 0,$
XIV	$\varphi\equiv\beta'\equiv\tau'\equiv 0,\quad \varphi'\equiv\gamma\equiv-N\tau\not\equiv 0,$
XVII	$\beta'\equiv\varphi'\equiv\tau\equiv 0,\quad \gamma\equiv\varphi\equiv\tau'\not\equiv 0,$
XVIII, XIX	$\tau\equiv\beta'\equiv 0,\quad \varphi'\equiv-\alpha'\tau',\quad \varphi\equiv\gamma\equiv\tau'\not\equiv 0,\quad (\alpha'=1, N),$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

et

II′	$\gamma \equiv -\tau, \quad \tau' \equiv 0, \quad \tau\varphi' \not\equiv 0,$
V′	$\gamma \equiv \varphi \equiv \tau' \equiv 0, \quad \tau \equiv \varphi' \not\equiv 0,$
VII′	$\varphi \equiv \tau' \equiv 0, \quad -\varphi' \equiv \gamma \equiv \tau \not\equiv 0,$
IX′	$\varphi' \equiv \tau \equiv 0, \quad -\varphi \equiv \gamma \equiv \tau' \not\equiv 0,$
XIII′	$\beta' \equiv \varphi \equiv \tau' \equiv \gamma \equiv 0, \quad \varphi' \equiv \tau \not\equiv 0,$
XIV′	$\beta' \equiv 0, \quad \varphi \equiv \tau', \quad -\gamma \equiv \varphi' \equiv \tau, \quad \tau^2 - \tau'^2 \not\equiv 0,$
XV′	$\beta' \equiv \varphi \equiv \tau' \equiv 0, \quad \gamma \equiv \varphi' \equiv -\tau \not\equiv 0,$
I″	$\gamma \equiv 1, \quad \psi' \equiv 0, \quad \varphi + \varphi' \equiv 1, \quad \beta \equiv \tau \equiv \tau' \equiv 1,$
V″	$\gamma \equiv 1, \quad \varphi' \equiv 0, \quad \psi' \equiv \varphi \equiv 1, \quad \beta \equiv \tau \equiv \tau' \equiv 1,$
VI″	$\gamma \equiv 0, \quad \varphi' \equiv 1, \quad \psi' \equiv 0, \quad \beta \equiv \tau \equiv \tau' \equiv 1.$

Une forme des équations de G commune à tous les types sera donc

$$a^p = 1, \quad b^p = a^\varepsilon, \quad c^p = a^{\beta'}, \quad d^p = b^\varepsilon a^\gamma, \quad e^p = c^\lambda b^\alpha a^\delta, \quad f^p = c^{\lambda'} b^{\alpha'} a^{\delta'},$$

$$c^{-1}bc = d^{-1}bd = b, \quad e^{-1}be = ba^\tau, \quad f^{-1}bf = ba^{\tau'},$$

$$d^{-1}cd = c, \quad e^{-1}ce = ca^\varphi, \quad f^{-1}cf = ca^{\varphi'}, \quad e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = dc^{\sigma'} b^\varepsilon a^{\psi'}, \quad f^{-1}ef = ed.$$

Nous sous-entendrons désormais toujours les équations communes à tous les types.

Si l'on pose $f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} f^v e^u d^z c^y b^x = f^{V'} e^{U'} d^{Z'} c^{Y'} b^{X'} a^{H'}$, le calcul donne

$$V' = v + v', \quad U' = u + u', \quad Z' = u'v + z' + z, \quad Y' = \sigma'\left[u'\binom{v}{2} + z'v\right] + y' + y,$$

$$X' = (u'v + z')u + \varepsilon u'\binom{v}{2} + v\binom{u'}{2} + \varepsilon z'v + x' + x,$$

$$H' = (\varphi\sigma' + \varepsilon)\binom{u'}{2}\binom{v}{2} + \psi' u'\binom{v}{2} + \tau v\binom{u'}{3} + (\varphi'\sigma' + \varepsilon)u'\binom{v}{3} + \psi' z'v + (\varphi'\sigma' + \varepsilon)z'\binom{v}{2}$$
$$+ \varphi' y'v + \tau' x'v + \tau\binom{u}{2}(u'v + z') + (\varphi\sigma' + \varepsilon)uu'\binom{v}{2} + (\varphi\sigma' + \varepsilon)z'v + \varphi y'u + \tau uv\binom{u'}{2} + \tau x'u.$$

Cette formule donne directement pour $p = 2$ (en supposant que les exposants soient 0 ou 1),

$$(f^v e^u d^z c^y b^x)^2 = d^{uv} c^{u\lambda + v\lambda'} b^{v\alpha' + z(1+u+v) + uv} a^{u\delta + v\delta' + \beta' y + \gamma z + x(1+u+v) + zuv + \varphi yu + \varphi' yv + \psi' zv},$$

et si l'on pose pour $p \geqq 3$ $(f^v e^u d^z c^y b^x)^w = f^{V_w} e^{U_w} d^{Z_w} c^{Y_w} b^{X_w} a^{H_w}$, on en tire par récur-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

rence

$$V_w = wv, \qquad U_w = wu, \qquad Z_w = wz + uv\,\Sigma_1^{w-1} t, \qquad Y_w = wy + \sigma'\left[zv + u\binom{v}{2}\right]\Sigma_1^{w-1} t + \sigma' uv^2\,\Sigma_1^{w-2}\,\Sigma_1^{w-1} t,$$

$$X_w = wx + zu\,\Sigma_1^{w-1} t + v\,\Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{2} + u^2 v\,\Sigma_1^{w-1}\,\Sigma_1^{t} t,$$

$$\begin{aligned} H_w = {} & \tau v\,\Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{3} + \varphi\sigma'\binom{v}{2}\Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{2} + \tau uv\,\Sigma_1^{w-1}\,\Sigma_1^{t}\binom{tu}{2} + \tau' v^2\,\Sigma_1^{w-1}\,\Sigma_1^{t}\binom{tu}{2} \\ & + \left[\varphi\sigma' u^2\binom{v}{2} + \varphi\sigma' zuv + \tau uv\binom{u}{2}\right]\Sigma_1^{w-1}\,\Sigma_1^{t} t + (\tau u^3 v + \tau' u^2 v^2)\,\Sigma_1^{w-2}\,\Sigma_1^{t}\,\Sigma_1^{t} t \\ & + \left[\psi' u\binom{v}{2} + \psi' zv + \tau z\binom{u}{2} + \varphi'\sigma' z\binom{v}{2} + \varphi yu + \varphi' yv + \tau xu + \tau' xv + \varphi'\sigma' u\binom{v}{3}\right]\Sigma_1^{w-1} t \\ & + \left[\psi' uv^2 + 2\varphi'\sigma' uv\binom{v}{2} + \varphi'\sigma' zv^2 + \tau zu^2 + \tau' zuv\right]\Sigma_1^{w-2}\,\Sigma_1^{t} t + \sigma'(\varphi u^2 v^2 + \varphi' uv^3)\,\Sigma_1^{w-3}\,\Sigma_1^{t}\,\Sigma_1^{t} t, \end{aligned}$$

puis, si l'on pose $(f^v e^u d^z c^y b^x)^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{H_p}$, on a

$$C_p = u\lambda + v\lambda' + \varepsilon'\sigma' uv^2, \qquad B_p = u\alpha + v\alpha' - \varepsilon' u^2 v,$$

$$\begin{aligned} A_p = {} & u\delta + v\delta' + \beta'[y + (1-\varepsilon')\tfrac{1}{3}\sigma' uv^2] + \gamma(z - \tfrac{1}{2}uv) \\ & + \varepsilon'(\psi' uv^2 + \varphi'\sigma' uv - \varphi'\sigma' uv^2 + \varphi'\sigma' zv^2 + \tau' uv^2 + \tau' zuv - \tau u^2 v + \tau zu^2 + \varphi\sigma' zuv). \end{aligned}$$

Le commutant étant abélien, on aura

$$(f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'})^{-1} f^v e^u d^z c^y b^x f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} = f^v e^u d^z c^y b^x d^{Z''-Z'} c^{Y''-Y'} b^{X''-X'} a^{H''-H'},$$

Z'', ... désignant ce que deviennent respectivement Z', ... quand on permute chaque lettre accentuée avec la lettre non accentuée du même nom.

On voit enfin que le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G aura dans tous les cas la forme

$$a_1 = a^\theta, \qquad b_1 = c^\eta b^\xi a^h, \qquad c_1 = c^{\eta'} b^{\xi'} a^{h'}, \qquad d_1 = d^\zeta c^s b^r a^k, \qquad \theta\zeta(\xi\eta' - \eta\xi')(uv' - vu') \not\equiv 0,$$
$$e_1 = f^v e^u d^z c^y b^x a^l, \qquad f_1 = f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} a^{l'},$$

avec les conditions

$$\eta \equiv \sigma'\zeta v, \qquad \xi \equiv \zeta u + \varepsilon\zeta v, \qquad h \equiv r(\tau u + \tau' v) + s(\varphi u + \varphi' v) + \psi'\zeta v + \varphi\sigma'\zeta uv + \tau\zeta\binom{u}{2} + \varphi'\sigma'\zeta\binom{v}{2},$$

$$\sigma'\eta' \equiv \sigma'\zeta v', \qquad \sigma'\xi' + \varepsilon \equiv \zeta(u' + \varepsilon v'), \qquad \zeta \equiv uv' - vu', \qquad s \equiv \sigma'\left[u\binom{v'}{2} - u'\binom{v}{2} + zv' - vz'\right],$$

$$r \equiv uu'(v' - v) + zu' - uz' + v'\binom{u}{2} - v\binom{u'}{2} + \varepsilon(zv' - vz'), \qquad \theta\varepsilon \equiv \beta'\eta + \varepsilon, \qquad \varepsilon\eta \equiv 0, \qquad \varepsilon\xi \equiv \varepsilon\zeta \equiv \varepsilon,$$

$$\varepsilon uv \equiv 0, \qquad \alpha\eta + \lambda\eta' \equiv u\lambda + v\lambda' + \varepsilon'\sigma' uv^2, \qquad \alpha\xi + \lambda\xi' \equiv u\alpha + v\alpha' - \varepsilon' u^2 v,$$
$$\varepsilon u'v' \equiv 0, \qquad \alpha'\eta + \lambda'\eta' \equiv u'\lambda + v'\lambda' + \varepsilon'\sigma' u'v'^2, \qquad \alpha'\xi + \lambda'\xi' \equiv u'\alpha + v'\alpha' - \varepsilon' u'^2 v'.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Et la transformation (T) des exposants des équations de G qui en résulte est

$$\theta\tau_1 \equiv \xi(\tau u + \tau' v) + \eta(\varphi u + \varphi' v), \qquad \theta\tau'_1 \equiv \xi(\tau u' + \tau' v') + \eta(\varphi u' + \varphi' v'),$$
$$\theta\varphi_1 \equiv \xi'(\tau u + \tau' v) + \eta'(\varphi u + \varphi' v), \qquad \theta\varphi'_1 \equiv \xi'(\tau u' + \tau' v') + \eta'(\varphi u' + \varphi' v'),$$
$$\sigma' h' + \varepsilon h + \theta\psi'_1 \equiv \psi'\zeta v' + r(\tau u' + \tau' v' + s(\varphi u' + \varphi' v') + \varphi\sigma'\zeta u' v' + \tau\zeta\binom{u'}{2} + \varphi'\sigma'\zeta\binom{v'}{2},$$
$$\alpha h + \lambda h' + \theta\delta_1 \equiv A_p + \varepsilon(\varphi y u + \varphi' y v + \psi' z v),$$
$$\alpha' h + \lambda' h' + \theta\delta'_1 \equiv A'_p + \varepsilon(\varphi y' u' + \varphi' y' v' + \psi' z' v')$$

(A'_p désignant ce que devient A_p quand on y accentue x, y, z, u).

Premier cas : $p \geqq 5$.

Type I de G $|\{a\}$ $\quad (\sigma' = \alpha = \lambda = \alpha' = \lambda' = \gamma = \tau' = 0,\ \tau\varphi' \not\equiv 0)$.

42. Comme on peut prendre a^τ pour a, puis $c^{\varphi'^{-1}}$ pour c, on peut toujours supposer $\tau = \varphi' = 1$; et comme on peut ensuite prendre $cb^{-\varphi}$ pour c, on peut toujours supposer $\varphi = 0$; nous écrirons donc les équations de G,

$$c^p = a^{\beta'}, \quad e^p = a^\delta, \quad f^p = a^{\delta'}, \quad e^{-1}be = ba, \quad f^{-1}bf = b,$$
$$e^{-1}ce = c, \quad f^{-1}cf = ca, \quad f^{-1}df = da^{\psi'}.$$

La transformation (T) est ici (les coefficients étant arbitraires)

$$u^2\psi'_1 \equiv \psi' v', \quad v'\beta'_1 \equiv \beta' u, \quad u^3 v'\delta_1 \equiv u\delta + v\delta' + \beta' y, \quad u^3 v'\delta'_1 \equiv v'\delta' + \beta' y', \quad uv' \not\equiv 0.$$

Si β' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta'_1 = 1$; en supposant $\beta'_1 = \beta' = 1$, donc $u \equiv v'$, on peut toujours faire $\delta_1 = \delta'_1 = 0$, et $\psi'_1 = 0$ toujours et seulement si $\psi' \equiv 0$, $\psi'_1 = 1$ si ψ' est $\not\equiv 0$; donc deux types caractérisés par

$$\beta' = 1, \quad \psi' = 0, 1, \quad \delta = \delta' = 0.$$

Si β' est $\equiv 0$, on a nécessairement $\beta'_1 \equiv 0$; les formules

$$u^2\psi'_1 \equiv \psi' v', \quad u^3 v'\delta_1 \equiv u\delta + v\delta', \quad u^3\delta'_1 \equiv \delta'$$

montrent que les types distincts de G correspondent à

$$\psi' = 0, \quad \delta = 0, 1, \quad \delta' = 0;$$
$$\psi' = 1, \quad \delta = 0, 1, i, (i^2, i^3 \text{ si } p \equiv 1 \bmod 4), \quad \delta' = 0;$$
$$\psi' = 0, 1, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0, 1, (i, i^2 \text{ si } p \equiv 1 \bmod 3).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Types VI et VII de G $|\{a\}$ $(\sigma'=0,\ \alpha=0,\ \lambda=1,\ \alpha'=1,\mathrm{N},\ \lambda'=0,\ \varphi=\tau'=0,\ \varphi'=\gamma=-\alpha',\ \tau\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre a^τ pour a, puis ca^δ pour c, on peut toujours supposer $\tau=1$, $\delta=0$; nous écrirons donc les équations de G,

$$c^p=a^{\beta'},\qquad d^p=a^{-\alpha'},\qquad e^p=c,\qquad f^p=b^{\alpha'}a^{\delta'},\qquad e^{-1}be=ba,$$
$$f^{-1}bf=b,\qquad e^{-1}ce=c,\qquad f^{-1}cf=ca^{-\alpha'},\qquad f^{-1}df=da^{\psi'}.$$

La transformation (T) est ici

$$\psi'_1\equiv\psi'\varphi',\qquad \varphi'\beta'_1\equiv\beta',\qquad h\alpha'+u\varphi'\delta'_1\equiv\varphi'\delta'-\alpha'z'+\beta'y',$$

avec les conditions

$$h\equiv ru+\psi'u\varphi\varphi'+\frac{1}{2}\varphi'(u-1),\qquad u^2\equiv 1,\qquad \varphi' \text{ arbitraire}\not\equiv 0,\qquad r\equiv -uz'+\varphi'\binom{u}{2},\qquad z' \text{ arbitraire}.$$

Si β' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\beta'_1=1$; en supposant $\beta'_1=\beta'=1$, donc $\varphi'=1$, on peut toujours faire $\delta'_1=0$ et l'on a $\psi'_1=\psi'$, donc $2p$ types

$$\alpha'=1,\mathrm{N},\qquad \beta'=1,\qquad \delta'=0,\qquad \psi'=0,1,\ldots,p-1.$$

Si β' est $\equiv 0$, on a nécessairement $\beta'_1\equiv 0$. Si alors ψ' est $\not\equiv 0$, on peut faire $\psi'_1=1$; en supposant $\psi'_1=\psi'=1$, on a $\varphi'\equiv 1$ et, en éliminant h et r, $u\delta'_1\equiv\delta'-\alpha'(u-1)+u\varphi$, on peut donc faire $\delta'_1=0$. Si ψ' est $\equiv 0$, on a nécessairement $\psi'_1\equiv 0$ et, en éliminant r et h, $u(\alpha'+\delta'_1)\equiv\alpha'+\delta'$, d'où $p+3$ types

$$\alpha'=1,\mathrm{N},\qquad \beta'=0,\qquad \psi'=0,\qquad \delta'=0;$$
$$\alpha'=1,\mathrm{N},\qquad \beta'=0,\qquad \psi'=1,\qquad \delta'+\alpha'=0,1,\ldots,\frac{p-1}{2}.$$

Type X de G $|\{a\}$ $(\sigma'=1,\ \alpha=\lambda=\alpha'=\lambda'=0,\ \beta'=\gamma=0,\ \varphi=\tau',\quad \tau\varphi'-\tau'^2\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $ca^{\psi'}$ pour c et, si τ' est $\not\equiv 0$, $a^{\tau'}$ pour a, si τ' est $\equiv 0$, $fe^{\tau^{-1}}$ pour f, $cb^{\tau^{-1}}a^{\tau\binom{\tau^{-1}}{2}}$ pour c, on peut toujours supposer $\psi'=0$, $\tau'=1$; les équations de G seront donc

$$c^p=d^p=1,\qquad e^p=a^\delta,\qquad f^p=a^{\delta'},\qquad e^{-1}be=ba^\tau,$$
$$f^{-1}bf=ba,\qquad e^{-1}ce=ca,\qquad f^{-1}cf=ca^{\varphi'},\qquad f^{-1}df=dc.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

La transformation (T) devient, en tenant compte des conditions,

$$\theta\tau_1 \equiv \zeta(2uv + \tau u^3 + \varphi' v^2), \qquad \theta\varphi'_1 \equiv \zeta(2u'v' + \tau u'^2 + \varphi' v'^2),$$
$$\theta\delta_1 \equiv u\delta + v\delta', \qquad \theta\delta'_1 \equiv u'\delta' + v'\delta',$$

avec $\theta \equiv \zeta(vu' + uv' + \tau uu' + \varphi' vv')$, et l'on en tire

$$\theta^2(1 - \tau_1\varphi'_1) \equiv \zeta^4(1 - \tau\varphi').$$

La condition de figure est $1 - \tau\varphi' \not\equiv 0$. *Soit d'abord* $1 - \tau\varphi'$ *non carré*, en prenant $u = 0$, $v = u' = 1$, $v' \equiv \varphi'^{-1}(\varphi' - 1)$, on obtient $\tau_1 \equiv 1$; en supposant $\tau_1 \equiv \tau \equiv 1$, donc $1 - \varphi'$ non carré, et posant

$$u + v = w, \qquad u' + v' = w', \qquad 1 - \varphi' = \varphi'', \qquad 1 - \varphi'_1 = \varphi''_1,$$

on a

$$\zeta \equiv wv' - vw', \qquad \theta \equiv \zeta(w^2 - \varphi'' v^2) \equiv \zeta(ww' - \varphi'' vv'), \qquad \theta^2\varphi''_1 \equiv \zeta^4\varphi''.$$

N étant un non-carré arbitraire, en prenant

$$v = 0, \qquad v' = w' = w, \qquad w^2 = (\varphi'' N^{-1})^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{si } (\varphi'' N^{-1})^{\frac{1}{2}} \text{ est carré},$$
$$w = 0, \qquad v' = v, \qquad w' = \varphi'' v, \qquad \varphi'' v^2 = (\varphi'' N^{-1})^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{si } (\varphi'' N^{-1})^{\frac{1}{2}} \text{ est non carré},$$

on obtient $\varphi''_1 = N$, donc $\varphi'_1 = 1 - N$. En supposant $\varphi'_1 = \varphi' = 1 - N$ on a, en désignant ± 1 par ω,

$$v' \equiv v + \omega w, \qquad w' \equiv w + \omega N v, \qquad \theta \equiv \omega(w^2 - N v^2)^2, \qquad \zeta \equiv \omega(w^2 - N v^2),$$
$$\omega(w^2 - N v^2)^2\delta_1 \equiv (w - v)\delta + v\delta', \qquad \omega(w^2 - N v^2)^2\delta'_1 \equiv (w - v)(1 - N\omega)\delta + (v + \omega w)\delta'.$$

On voit alors qu'il y a deux (ou quatre si $p \equiv 1 \bmod 3$) types distincts, caractérisés par $\delta = 0$, $\delta' = 0, 1, (i, i^2)$.

Soit maintenant $1 - \tau\varphi'$ *carré*. On peut faire $\tau_1 = 0$; en supposant $\tau_1 = \tau = 0$ et prenant $v = 0$, $u' \equiv -\frac{1}{2}\varphi' v'$, $\zeta \equiv uv'$, $\theta \equiv \zeta^2$, on obtient $\varphi'_1 = 0$; en supposant $\varphi'_1 = \varphi' = 0$, on a

$$0 \equiv uv \equiv u'v', \qquad \theta \equiv u^2 v'^2 - v^2 u'^2 \qquad (uv' + vu')^3\delta_1\delta'_1 \equiv \delta\delta'.$$

Si $\delta\delta'$ est $\not\equiv 0$, en prenant $v = u' = 0$, $v' = \delta$, $u = \delta^{-1}$ on obtient $\delta_1 = 1$; en supposant $\delta_1 = \delta = 1$ et essayant successivement les deux hypothèses seules possibles : $v \equiv u' \equiv 0$ et $u \equiv v' \equiv 0$, on voit que l'on a un (ou trois si $p \equiv 1 \bmod 3$) types de G, caractérisés par $\delta = 1$, $\delta' = 1, (i, i^2)$.

Si $\delta\delta'$ est $\equiv 0$ et $\delta \not\equiv 0$, en prenant $u = v' = 0$, on a $\delta_1 = 0$; en supposant $\delta_1 = \delta = 0$, on voit immédiatement qu'il y a deux types caractérisés par $\delta = 0$, $\delta' = 0, 1$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type XIII de G | { a } $(\sigma'=1,\ \alpha=\lambda=\alpha'=0,\ \lambda'=1,\ \beta'=\gamma=\varphi'=0,\ \varphi=\tau'\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $a^{\tau'}$ pour a, puis $ca^{\psi'}$ pour c, on peut toujours supposer $\tau'=1$, $\psi'=0$, et les équations de G seront

$$c^p=d^p=1,\quad e^p=a^{\delta},\quad f^p=ca^{\delta'},\quad e^{-1}be=ba^{\tau},\quad f^{-1}bf=ba,\quad e^{-1}ce=ca,\quad f^{-1}cf=c,\quad f^{-1}df=dc$$

et la transformation (T) devient ici

$$\tau_1\equiv\tau u^2,\qquad v'\delta_1\equiv\delta,\qquad -z'+\tfrac{1}{2}(1-v')+\delta'_1\equiv v'\delta',\qquad \text{avec}\qquad uv'\equiv 1.$$

On voit immédiatement qu'il y a $p+3$ types caractérisés par

$$\tau=0,\qquad \delta=0,1,\qquad \delta'=0;\qquad \tau=1,\mathrm{N},\qquad \delta=0,1,\ldots,\frac{p-1}{2},\qquad \delta'=0.$$

Type XIV de G | { a } $(\sigma'=1,\ \alpha=0,\ \lambda=1,\ \alpha'=\mathrm{N},\ \lambda'=0,\ \beta'=\varphi=\tau'=0,\ \varphi'=\gamma=-\mathrm{N}\tau\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $ca^{\psi'}$ pour c, a^{τ} pour a, on peut toujours supposer $\tau=1$, $\psi'=0$ et écrire les équations de G

$$c^p=1,\qquad d^p=a^{-\mathrm{N}},\qquad e^p=ca^{\delta},\qquad f^p=b^{\mathrm{N}}a^{\delta'},\qquad e^{-1}be=ba,$$
$$f^{-1}bf=b,\qquad e^{-1}ce=c,\qquad f^{-1}cf=ca^{-\mathrm{N}},\qquad f^{-1}df=dc.$$

En tenant compte des conditions imposées au changement de générateurs la transformation (T) sur les exposants δ, δ' est ici :

$$\zeta(\delta_1-\mathrm{N})\equiv u(\delta-\mathrm{N})+v(\delta'+\mathrm{N}),\qquad (\delta'_1+\mathrm{N})\equiv \mathrm{N}v(\delta-\mathrm{N})+u(\delta'+\mathrm{N}),$$

avec $\zeta^2\equiv u^2-\mathrm{N}v^2\equiv 1$. L'élimination de u, v donne

$$(\delta'_1+\mathrm{N})^2-\mathrm{N}(\delta_1-\mathrm{N})^2\equiv(\delta'+\mathrm{N})^2-\mathrm{N}(\delta-\mathrm{N})^2.$$

Ainsi deux systèmes (δ,δ') fournissent le même type de G toujours et seulement s'ils font prendre la même valeur à l'expression $(\delta'+\mathrm{N})^2-\mathrm{N}(\delta-\mathrm{N})^2$; il y a donc p types correspondant à

$$(\delta'+\mathrm{N})^2-\mathrm{N}(\delta-\mathrm{N})^2=0,1,\ldots,p-1.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type XVII de $G|\{a\}$ $\quad(\sigma'=1,\ \alpha=\lambda'=1,\ \lambda=\alpha'=0,\ \beta'=\varphi'=\tau=0,\ \gamma=\varphi=\tau'\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $ca^{\psi'}$ pour c, $a^{\tau'}$ pour a, on peut toujours supposer $\tau'=1$, $\psi'=0$ et écrire les équations de G

$$c^p=1,\quad d^p=a,\quad e^p=ba^{\delta},\quad f^p=ca^{\delta'},\quad e^{-1}be=b,$$
$$f^{-1}bf=ba,\quad e^{-1}ce=ca,\quad f^{-1}cf=c,\quad f^{-1}df=dc$$

et la transformation (T) sur δ, δ' devient, en tenant compte des conditions,

$$\delta_1+\tfrac{1}{2}\equiv u(\delta+\tfrac{1}{2}),\qquad \delta'_1\equiv v'\delta'+2z'-\tfrac{1}{2}(1-v')^2,\qquad uv'\equiv 1;$$

d'où les deux types $\delta=0,\ -\frac{1}{2}$; $\delta'=0$.

Types XVIII et XIX de $G|\{a\}$ $\quad(\sigma'=1,\ \alpha=\lambda'=1,\ \lambda=0,\ \alpha'=1,\mathrm{N},\quad \tau=\beta'=0,$
$\varphi'=-\alpha'\tau',\quad \varphi=\gamma=\tau'\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $ca^{\psi'}$ pour c, $a^{\tau'}$ pour a, on pourra toujours supposer $\psi'=0$, $\tau'=1$ et écrire les équations de G

$$c^p=1,\quad d^p=a,\quad e^p=ba^{\delta},\quad f^p=cb^{\alpha'}a^{\delta'},\quad e^{-1}be=b,$$
$$f^{-1}bf=ba,\quad e^{-1}ce=ca,\quad f^{-1}cf=ca^{-\alpha'},\quad f^{-1}df=dc,$$

et la transformation (T) sur δ, δ' devient, en tenant compte des conditions

$$\delta_1+\tfrac{1}{2}\equiv u(\delta+\tfrac{1}{2}),\qquad u^2\equiv 1,\qquad \delta'_1\equiv u\delta'+(2+u\alpha')z'+\alpha'z+(1-u)(\alpha'-1),$$

d'où $p+1$ types, correspondant à

$$\delta+\frac{1}{2}=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2},\qquad \delta'=0,\qquad \alpha'=1,\mathrm{N}.$$

Deuxième cas : $p=3$.

Type II' de $G|\{a\}$ $\quad(\sigma'=0,\ \alpha=\lambda=\lambda'=0,\ \alpha'=1,\ \gamma=-\tau,\ \tau'=0,\ \tau\varphi'\not\equiv 0)$.

43. Comme on peut prendre a^{τ} pour a, $c^{\varphi'^{-1}}$ pour c, puis $cb^{-\varphi}$ pour c, on peut toujours supposer $\tau=\varphi'=1$, $\varphi=0$, et écrire les équations de G

$$c^3=a^{\beta'},\quad d^3=a^{-1},\quad e^3=a^{\delta},\quad f^3=ba^{\delta'},\quad e^{-1}be=ba,$$
$$f^{-1}bf=b,\quad e^{-1}ce=c,\quad f^{-1}cf=ca,\quad f^{-1}df=da^{\psi'};$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

la transformation (T) devient, en tenant compte des conditions,

$$v'\beta'_1 \equiv \beta', \qquad \psi'_1 \equiv \psi' v', \qquad uv'\delta_1 \equiv -z + u\delta + v\delta' + \beta' y + u^2 v + \psi' u v^2,$$
$$uv'\delta'_1 \equiv v'\delta' - z' + (u-1)(v'-1) + \beta' y'.$$

On voit facilement qu'il y a cinq types correspondant à

$$\psi' = 0, \qquad \beta' = 0, 1, \qquad \delta = \delta' = 0; \qquad \psi' = 1, \qquad \beta' = 0, 1, -1, \qquad \delta = \delta' = 0.$$

Type V' de G $|\{a\}$ $\quad (\sigma' = 0,\ \alpha = \alpha' = \lambda' = 0,\ \lambda = 1,\ \gamma = \varphi = \tau' = 0,\ \tau = \varphi' \not\equiv 0).$

Comme on peut prendre ca^δ pour c, a^τ pour a, on peut supposer $\delta = 0$, $\tau = 1$ et écrire les équations de G

$$c^3 = a^{\beta'}, \qquad d^3 = 1, \qquad e^3 = c, \qquad f^3 = a^{\delta'}, \qquad e^{-1}be = ba,$$
$$f^{-1}bf = b, \qquad e^{-1}ce = e, \qquad f^{-1}cf = ca, \qquad f^{-1}df = da^{\psi'};$$

la transformation (T) devient, en tenant compte des conditions,

$$\psi'_1 \equiv \psi' v', \qquad v'\beta'_1 \equiv \beta', \qquad uv'\delta'_1 \equiv v'\delta' + \beta' y', \qquad uv' \not\equiv 0.$$

On voit facilement qu'il y a sept types correspondant à

$$\beta' = 0, \quad \psi' = 0, 1, \quad \delta' = 0, 1; \qquad \beta' = 1, \quad \psi' = 0, 1, -1, \quad \delta' = 0.$$

Type VII' de G $|\{a\}$ $\quad (\sigma' = 0,\ \alpha = \lambda' = 0,\ \lambda = 1,\ \alpha' = -1,\ \varphi = \tau' = 0,\ -\varphi' = \gamma = \tau \not\equiv 0).$

Comme on peut prendre ca^δ pour c, a^τ pour a, on peut supposer $\delta = 0$, $\tau = 1$ et écrire les équations de G

$$c^3 = a^{\beta'}, \qquad d^3 = a, \qquad e^3 = c, \qquad f^3 = b^{-1}a^{\delta'}, \qquad e^{-1}be = ba, \qquad f^{-1}bf = b,$$
$$e^{-1}ce = e, \qquad f^{-1}cf = ca^{-1}, \qquad e^{-1}df = da^{\psi'}.$$

La transformation (T) devient en tenant compte des conditions

$$\psi'_1 \equiv \psi' v', \qquad v'\beta'_1 \equiv \beta', \qquad uv'\delta'_1 \equiv v'\delta' + \beta' y' + \psi' uvv', \qquad uv' \not\equiv 0,$$

et l'on voit qu'il y a six types correspondant à

$$\psi' = \beta' = 0, \quad \delta' = 0, 1; \qquad \psi' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \delta' = 0; \qquad \psi' = 1, \quad \beta' = 0, 1, -1, \quad \delta' = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type IX' de G | $\{a\}$ $\quad (\sigma'=0,\ \alpha=\lambda'=1,\ \lambda=\alpha'=0,\ \varphi'=\tau=0,\ -\varphi=\gamma=\tau'\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $a^{\tau'}$ pour a, puis $db^{-\psi'}$ pour d, $fd^{\psi'}$ pour f, puis $ca^{\delta'}$ pour c, $ed^{-\delta}$ pour e, on peut supposer $\tau'=1$, $\psi'=\delta=\delta'=0$, et écrire les équations de G

$$c^3=a^{\beta'},\quad d^3=a,\quad e^3=b,\quad f^3=c,\quad e^{-1}be=b,\quad f^{-1}bf=ba,$$
$$e^{-1}ce=ca^{-1},\quad f^{-1}cf=c,\quad f^{-1}df=d;$$

(T) donne $\beta_1\equiv u\beta'$, $u\not\equiv 0$, d'où deux types correspondant à $\beta'=0, 1$.

Type XIII' de G | $\{a\}$ $\quad (\sigma'=1,\ a=0,\ \lambda=1,\ \alpha'=-1,\ \lambda'=0,\ \beta'=\varphi=\tau'=\gamma=0,\ \varphi'=\tau\not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre a^{τ} pour a, puis $ca^{\psi'}$ pour c, on peut supposer $\tau=1$, $\psi'=0$ et écrire les équations de G

$$c^3=d^3=1,\quad e^3=ca^{\delta},\quad f^3=b^{-1}a^{\delta'},\quad e^{-1}be=ba,\quad f^{-1}bf=b,$$
$$e^{-1}ce=c,\quad f^{-1}cf=ca,\quad f^{-1}df=dc.$$

Les conditions du changement de générateurs donnent entre autres

$$u'\equiv-\zeta v(1+u^2),\qquad v'\equiv\zeta u(1+v^2),\qquad \theta\equiv\zeta(u^2+v^2),$$

ou bien (comme on le vérifie dans les trois hypothèses seules possibles : $uu'vv'\not\equiv 0$, $u\equiv v'\equiv 0$, $u'\equiv v\equiv 0$)

$$u'\equiv-\theta v,\qquad v'\equiv\theta u,\qquad \zeta\equiv\theta(u^2+v^2).$$

La transformation (T) devient en tenant compte de toutes les conditions

$$\theta(\delta_1+1)\equiv\quad u(\delta+1)+\ v(\delta'-1)+uv\ (u+1)+\ u(uz-\theta vz'),$$
$$\theta(\delta'_1-1)\equiv-\theta v(\delta+1)+\theta u(\delta'-1)+uv(\theta v+1)-\theta v(uz-\theta vz').$$

Or, en prenant $u=0$, $v=\theta=1$, $\delta+1+z'\equiv 0$, on obtient $\delta'_1=1$; en supposant $\delta'_1=\delta'=1$ et prenant $v=0$, $u=\theta=1$, $\delta+1+z=0$, on obtient $\delta_1=-1$. Il n'y a donc qu'un seul type pour G. D'ailleurs en éliminant $uz-\theta vz'$ on obtient

$$\theta(u^2+v^2)(\delta'-1)-\theta u^2v^2+uv(u+\theta v)\equiv 0,$$

équation vérifiée par $v\equiv 0$ si $\delta'-1$ est $\equiv 0$ et par $\theta=1$, $v=\delta'-1$, $u=1$, si $\delta'-1$ est $\not\equiv 0$; on pourra donc, toujours en choisissant convenablement u et v, déterminer $uz-\theta vz'$ de manière à donner à δ, δ' des valeurs arbitraires.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type XIV' de G $|\{a\}$ $(\sigma' = 1, \alpha = \lambda = \alpha' = \lambda' = 0, \beta' = 0, -\gamma = \varphi' = \tau, \varphi = \tau', \tau^2 - \tau'^2 \not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $ca^{\psi'}$ pour c, on peut supposer $\psi' = 0$ et écrire les équations de G

$$c^3 = 1, \quad d^3 = a^{-\tau}, \quad e^3 - a^{\delta}, \quad f^3 = a^{\delta'}, \quad e^{-1}be = ba^{\tau}, \quad f^{-1}bf = ba^{\tau'},$$
$$e^{-1}ce = ca^{\tau'}, \quad f^{-1}cf = ca^{\tau}, \quad f^{-1}df = dc;$$

en tenant compte des conditions, la transformation (T) devient

$$\tau_1 \equiv \tau, \quad \tau'_1 \equiv \tau'(uv' + vu'), \quad \theta\delta_1 \equiv u\delta + v\delta', \quad \theta\delta'_1 \equiv u'\delta + v'\delta',$$
$$\theta \equiv uv' - vu' \not\equiv 0, \quad uv \equiv u'v' \equiv 0.$$

On en tire $uu' \equiv vv' \equiv 0$, $uv' + vu' \not\equiv 0$, $\theta(uv' + vu')\delta_1\delta'_1 \equiv \delta\delta'$.

Soit d'abord $\tau' \equiv \tau'_1 \equiv 0$; si $\delta\delta'$ est $\not\equiv 0$, en prenant $u' = v = 0$, $u = \delta'$, $v' = \delta$, on obtient $\delta_1 = \delta'_1 = 1$, d'où deux types

$$\tau = 1, -1, \quad \tau' = 0, \quad \delta = \delta' = 1.$$

Si $\delta\delta'$ est $\equiv 0$, on peut, si δ est $\not\equiv 0$, faire $\delta_1 = 0$ en prenant $u = v' = 0$; en supposant $\delta_1 = \delta = 0$, donc $0 \equiv v\delta'$, $\theta\delta'_1 \equiv v'\delta'$, on voit qu'il y a quatre types :

$$\tau = 1, -1, \quad \tau' = 0, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0, 1.$$

Soit $\tau' \not\equiv 0$, on peut faire $\tau'_1 = 1$; en supposant $\tau'_1 = \tau' = 1$, donc $uv' + vu' \equiv 1$, on trouve qu'il y a douze types :

$$\tau = 0, 1, -1, \quad \tau' = 1, \quad \delta = 1, \quad \delta' = 1, -1; \qquad \tau = 0, 1 - 1, \quad \tau' = 1, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0, 1.$$

Type XV' de G $|\{a\}$ $(\sigma' = 1, \alpha = \lambda = \lambda' = 0, \alpha' = -1, \beta' = \varphi = \tau' = 0, \gamma = \varphi' = -\tau \not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre $ca^{\psi'}$ pour c, a^{τ} pour a, on peut supposer $\psi' = 0$, $\tau = 1$, et écrire les équations de G

$$c^3 = 1, \quad d^3 = a^{-1}, \quad e^3 = a^{\delta}, \quad f^3 = b^{-1}a^{\delta'}, \quad e^{-1}be = ba, \quad f^{-1}bf = b,$$
$$e^{-1}ce = c, \quad f^{-1}cf = ca^{-1}, \quad f^{-1}df = dc;$$

la transformation (T) devient en tenant compte des conditions,

$$v'\delta_1 \equiv \delta, \quad u(\delta'_1 + 1) \equiv \delta' + 1, \quad uv' \not\equiv 0,$$

d'où quatre types $\delta = 0, 1$, $\delta' = 0, 1$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

TROISIÈME CAS. — $p = 2$ $(\sigma' = 0, \beta = \tau = \tau' = 1)$.

Type I″ de G | { a } $(\alpha = \lambda = \alpha' = \lambda' = 0, \gamma = 1, \psi' = 0, \varphi + \varphi' \equiv 1)$.

44. G a des équations de la forme

$$c^2 = a^{\beta'}, \quad d^2 = ba, \quad e^2 = a^{\delta}, \quad f^2 = a^{\delta'}, \quad e^{-1}be = f^{-1}bf = ba,$$
$$e^{-1}ce = ca^{\varphi}, \quad f^{-1}cf = ca^{\varphi'}, \quad f^{-1}df = db$$

et la transformation (T) est, en tenant compte des conditions,

$$\varphi_1 \equiv \xi' + \varphi u + \varphi' v, \quad \varphi'_1 \equiv \xi' + \varphi' u' + \varphi' v', \quad \beta'_1 \equiv \xi' + \beta',$$
$$\delta_1 \equiv u\delta + v\delta' + z + \beta' y + \varphi y u + \varphi' y v, \quad \delta'_1 \equiv u'\delta + v'\delta' + z' + \beta' y' + \varphi y' u' + \varphi' y' v'. \quad uv \equiv u'v' \equiv 0,$$

On peut toujours faire $\varphi_1 = 0$, donc $\varphi'_1 = 1$; soit $\varphi_1 = \varphi = 0$, $\varphi'_1 = \varphi' = 1$, donc $0 \equiv \xi' + v$, $1 \equiv \xi' + v'$; en prenant $v = \xi' = \beta'$, $v' = \beta' + 1$, on a $\beta'_1 = 0$, et comme on peut toujours faire $\delta_1 = \delta'_1 = 0$, G n'a qu'un type :

$$c^2 = e^2 = f^2 = 1, \quad e^{-1}ce = c, \quad f^{-1}cf = ca.$$

Type V″ de G | { a } $(\alpha = \lambda = \alpha' = 0, \lambda' = 1, \gamma = 1, \varphi' = 0, \psi' = \varphi = 1)$.

Les équations de G ont la forme

$$c^2 = a^{\beta'}, \quad d^2 = ba, \quad e^2 = a^{\delta}, \quad f^2 = ca^{\delta'}, \quad e^{-1}be = f^{-1}bf = ba,$$
$$e^{-1}ce = ca, \quad f^{-1}cf = c, \quad f^{-1}df = dba$$

et la transformation (T) est, en tenant compte des conditions,

$$\beta'_1 \equiv \beta', \quad \delta_1 \equiv \delta + (\beta' + 1)y + z, \quad \delta'_1 \equiv \delta' + \beta' y' + z' + z,$$

donc deux types : $\beta' = 0, 1$, $\delta = \delta' = 0$.

Type VI″ de G | { a } $(\alpha = 0, \lambda = \alpha' = \lambda' = 1, \varphi = \gamma = \psi' = 0, \varphi' = 1)$.

Les équations de G ont la forme

$$c^2 = a^{\beta'}, \quad d^2 = b, \quad e^2 = ca^{\delta}, \quad f^2 = cba^{\delta'}, \quad e^{-1}be = f^{-1}bf = ba,$$
$$e^{-1}ce = c, \quad f^{-1}cf = ca, \quad f^{-1}df = db.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si $\beta' = 1$, en prenant $c_1 = cb$, $e_1 = f$, $f_1 = e$, on a $c_1^2 = 1$, les autres équations ne changeant pas; on peut donc toujours supposer $\beta' = 0$.

Si $\delta' = 1$, en prenant $f_1 = fc$, on a $f_1^2 = cb$, les autres équations ne changeant pas; on peut donc toujours supposer $\delta' = 0$.

Enfin, en prenant $c_1 = ca^\delta$, on a $e^2 = c_1$; on peut donc toujours supposer $\delta = 0$ et il n'y a pour G qu'un type :

$$c^2 = 1, \qquad e^2 = c, \qquad f^2 = cb.$$

Figure (1)(1)(11)(11).

45. D'après les types connus [1] de figure (1)(11)(11), G aura des équations de la forme

$$a^p = 1, \quad b^p = a^\alpha, \quad c^p = b^\beta a^\alpha, \quad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha'}, \quad e^p = d^\mu b^\gamma a^\delta, \quad f^p = c^{\mu'} b^{\gamma'} a^{\delta'},$$
$$c^{-1} bc = ba^\lambda, \quad d^{-1} bd = ba^{\lambda'}, \quad e^{-1} be = ba^\rho, \quad f^{-1} bf = ba^{\rho'}, \quad d^{-1} cd = ca^\tau,$$
$$e^{-1} ce = cb^\nu a^\varphi, \quad f^{-1} cf = ca^{\varphi'}, \quad e^{-1} de = db^{\varepsilon\omega} a^\psi, \quad f^{-1} df = db, \quad f^{-1} ef = ed.$$

Les conditions d'automorphisme, fermeture, permutabilité, donnent (j désignant un entier arbitraire)

$$\lambda \equiv \lambda' \equiv 0, \quad \tau \equiv \nu\rho', \quad \rho \equiv \varepsilon\omega\rho', \quad \beta' \equiv -\varepsilon\omega, \quad \varkappa \equiv -\varepsilon\omega\rho';$$
$$\varepsilon\omega\nu\rho' \equiv \mu\nu\rho' \equiv \varepsilon\omega\mu \equiv \varepsilon\omega\rho'\gamma + \psi\mu \equiv \beta\rho' \equiv \alpha' + \varepsilon\psi - \gamma\rho' \equiv 0, \quad \varepsilon(1-\omega) + \nu\mu' = jp;$$
$$\alpha' + \varepsilon(\gamma' - j)\omega\rho' + \varepsilon'\rho' + \varphi\mu' \equiv 0, \quad \varphi'\mu' + \rho'\gamma' \equiv 0.$$

Les exposants des générateurs autres que a ont les déterminations suivantes correspondant aux divers types de G | A :

		μ	μ'	β	β'	γ	γ'	ν	ω
pour $p \geqq 5$:	I,	1	1	0	1	0	0	-1	
	II,	0	0	0	0	0	0	1	
	III,	0	0	0	0	0	1	1	
	IV,	0	0	0	0	1	0	1	
	V,	0	0	0	0	N	0	1	
	VI;	0	0	1	0	0	0	1	

---

[1] De Séguier, *Théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

		μ	μ'	β	β'	γ	γ'	ν	ω
pour $p=3$:	I',	1	1	0	1	0	0	-1	
	II',	0	0	0	0	0	0	1	
	III',	0	0	0	0	1	0	1	
	IV',	0	0	0	0	-1	0	1	
	V',	0	0	0	0	-1	1	1	
	VI';	0	0	1	0	0	0	1	
pour $p=2$:	I'',	0	0	0	1	0	0	1	1
	II'',	0	0	0	1	0	1	1	1
	III'',	0	1	0	0	0	0	1	0
	IV'',	0	1	1	0	0	0	1	0

Les conditions d'ordre excluent les types I et I'; dans les types III, IV, V, VI, II', III', V', VI', I'', II'', IV'', b est normal; il n'y a donc à convenir que :

les types II, II', avec $\alpha' \equiv 0$, $\rho' \not\equiv 0$;
le type IV' avec $\alpha' \equiv -\rho' \not\equiv 0$;
le type III''' avec $\alpha' \equiv \psi \equiv \varphi$, $\varphi' \equiv 0$, $\rho' = 1$.

Il est plus simple de séparer complètement ces trois cas.

Types II, II' de G | A, $(p \geqq 3)$.

En prenant $a^{\rho'}$ pour a, G a pour équations :

$$a^p = b^p = 1, \quad c^p = a^\alpha, \quad d^p = 1, \quad e^p = a^\delta, \quad f^p = a^{\delta'}, \quad c^{-1}bc = d^{-1}bd = e^{-1}be = b,$$
$$f^{-1}bf = ba, \quad d^{-1}cd = ca, \quad e^{-1}ce = cba^\varphi, \quad f^{-1}cf = ca^{\varphi'}, \quad e^{-1}de = da^\psi, \quad f^{-1}df = db, \quad f^{-1}ef = ed.$$

Si l'on prend

$$b_1 = ba^h, \quad d_1 = db^{\xi'}a^{k'}, \quad f_1 = fc^{y'},$$

avec

$$h = \varphi, \quad \xi' = -y' = \frac{\varphi}{2}, \quad k' = \frac{\varphi}{2}(1+\varphi),$$

on a

$$e_1^{-1}c_1e_1 = c_1b_1, \quad f_1^{-1}d_1f_1 = d_1b_1, \quad f_1^{-1}e_1f_1 = e_1d_1;$$

on peut donc supposer toujours $\varphi = 0$. Si l'on prend ensuite $c_1 = cb^{-\varphi'}$, on a $f^{-1}c_1f = c_1$; on peut donc supposer toujours $\varphi' = 0$. Enfin, si l'on prend $e_1 = ec^\psi$, on a $e_1^{-1}de_1 = d$; on peut donc supposer toujours $\psi = 0$. Alors, en posant

$$f^v e^u d^z c^y b^x = g, \quad f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} = g', \quad g'g = f^{V'} e^{U'} d^{Z'} c^{Y'} b^{X'} a^{H'},$$
$$g^{-1}g'^{-1}gg' = d^{Z'_1 - Z'} b^{X'_1 - X'} a^{H'_1 - H'}, \quad g^\omega = f^{V_\omega} e^{U_\omega} d^{Z_\omega} c^{Y_\omega} b^{X_\omega} a^{H_\omega}, \quad g^p = b^{\varepsilon' B_p} a^{A_p},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

on a

$$V' = v' + v, \qquad U' = u' + u, \qquad Z' = u'v + z' + z, \qquad Y' = y' + y,$$

$$X' = u'\binom{v}{2} + z'v + y'u + x' + x, \qquad H' = u'\binom{v}{3} + z'\binom{v}{2} + y'z + x'v,$$

$$V_w = wv, \qquad U_w = wu, \qquad Z_w = wz + uv\Sigma_1^{w-1}t, \qquad Y_w = wy,$$

$$X_w = \left[u\binom{v}{2} + zv + yu\right]\Sigma_1^{w-1}t + uv^2\Sigma_1^{w-2}\Sigma_1^t t + wx,$$

$$H_w = \left[u\binom{v}{3} + z\binom{v}{2} + yz + xv\right]\Sigma_1^{w-1}t + \left[2uv\binom{v}{2} + zv^2 + yuv\right]\Sigma_1^{w-2}\Sigma_1^t t + uv^3\Sigma_1^{w-3}\Sigma_1^t\Sigma_1^t t,$$

$$B_p = uv^2, \qquad A_p = \alpha y + \delta u + \delta' v + \varepsilon'[uv(v-1) + zv^2 + yuv].$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est

$$a_1 = a^\theta, \qquad b_1 = b^{\theta'}a^h, \qquad c_1 = d^\zeta c^\eta b^\xi a^k, \qquad d_1 = d^{\zeta'}c^{\eta'}b^{\xi'}a^{k'},$$
$$e_1 = f^v e^u d^z c^y b^x a^l, \qquad f_1 = f^{v'}e^{u'}d^{z'}c^{y'}b^{x'}a'^l,$$

avec les conditions (j désignant un entier arbitraire)

$$uv' \not\equiv 0, \qquad y \equiv v \equiv \varepsilon' u' \equiv 0, \qquad \theta \equiv uv'^3, \qquad \theta' \equiv uv'^2, \qquad \eta \equiv v'^2, \qquad \eta' = jp, \qquad j\alpha + k' \equiv H_1' - H',$$
$$\zeta \equiv -u'v', \qquad \zeta' \equiv uv', \qquad \xi' \equiv zv', \qquad \xi \equiv -z'v' \qquad y' \equiv \binom{v'}{2}, \qquad h \equiv zv'^2,$$

et il en résulte sur α, δ, δ' une transformation définie par

$$uv'\alpha_1 \equiv \alpha, \qquad v'^3\delta_1 \equiv \delta, \qquad uv'^3\delta_1' \equiv \delta u' + \delta' v' + \varepsilon' z', \qquad \varepsilon' u' \equiv 0.$$

Si p est $\geqq 5$, il y a huit (si p est $\equiv 1 \bmod 3$) ou quatre (si p est $\not\equiv 1 \bmod 3$) types

$$\alpha = 0, 1, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0, 1; \qquad \alpha = 0, 1, \quad \delta = (1, i, i^2), \quad \delta' = 0.$$

Si $p = 3$, il y a les quatre types

$$\delta' = 0, \qquad \delta = 0, 1, \qquad \alpha = 0, 1.$$

Type IV' de G | A, ($p = 3$).

Les mêmes transformations que dans le cas précédent permettent de ramener les équations de G à la forme

$$a^3 = b^3 = 1, \qquad c^3 = a^\alpha, \qquad d^3 = a^{-1}, \qquad e^3 = b^{-1}a^\delta, \qquad f^3 = a^{\delta'},$$
$$c^{-1}bc = d^{-1}bd = e^{-1}be = b,$$
$$f^{-1}bf = ba, \qquad d^{-1}cd = ca, \qquad e^{-1}ce = cb, \qquad f^{-1}cf = c, \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ed;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

on a donc les mêmes formules pour $g'g$, $g^{-1}g'^{-1}gg'$ et g^w, et l'on en tire, pour $w=3$, $g^3 = b^{B_3}a^{A_3}$ avec

$$B_3 = u(v^2-1), \qquad A_3 = \alpha y + \delta u + \delta' v - z + v(yu + zv - uv).$$

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de même forme que dans le cas précédent, doit vérifier les mêmes conditions sauf $u' \equiv 0$, et fournit sur α, α', δ, une transformation définie par

$$u\alpha_1 \equiv v'\alpha + u', \qquad v'\delta_1 \equiv \delta, \qquad uv'\delta'_1 \equiv \delta u' + \delta' v' + \alpha(1-v') + u'(v'+1).$$

On peut toujours faire $\alpha_1 = 0$; en supposant $\alpha_1 = \alpha = 0$, donc $u' \equiv 0$, il reste

$$v'\delta_1 \equiv \delta, \qquad u\delta'_1 \equiv \delta',$$

d'où les quatre types

$$\alpha = 0, \qquad \delta = 0, 1, \qquad \delta' = 0, 1.$$

Type III″ de G | A, $(p=2)$.

En tenant compte des conditions d'ordre et de figure, les équations de G ont la forme

$$a^2 = b^2 = 1, \qquad c^2 = a^\alpha, \qquad d^2 = a^{\alpha'}, \qquad e^2 = a^\delta, \qquad f^2 = ca^{\delta'},$$
$$c^{-1}bc = d^{-1}bd = e^{-1}be = b, \quad f^{-1}bf = ba, \quad d^{-1}cd = ca,$$
$$e^{-1}ce = cba^{\alpha'}, \qquad f^{-1}cf = c, \qquad e^{-1}de = da^{\alpha'}, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

On trouve, en supposant tous les exposants < 2,

$$g'g = f^{V'}e^{U'}d^{Z'}c^{Y'}b^{X'}c^{H'}, \qquad g^{-1}g'^{-1}gg' = d^{Z'_1+Z'}b^{X'_1+X'}a^{H'_1+H'+Y'(Z'_1+Z')}, \qquad g^2 = d^{D_2}c^{C_2}b^{B_2}a^{A_2},$$

avec

$$V' = v' + v, \qquad U' = u' + u, \qquad Z' = u'v + z' + z, \qquad Y' = y' + y, \qquad X' = y'u + z'v + x' + x,$$
$$H' = x'v + y'z + \alpha' u(y' + z' + u'v),$$
$$D_2 = uv, \qquad C_2 = v, \qquad B_2 = yu + zv, \qquad A_2 = \alpha y + \alpha'[z + u(y+z+v)] + yz + xv;$$

H'_1, X'_1, Z'_1 désignent ce que deviennent H', X', Z' quand on y permute les lettres accentuées et non accentuées de même nom.

Le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G qui est de la forme

$$a_1 = a, \qquad b_1 = ba^h, \qquad c_1 = d^\zeta c^\eta b^\xi a^k, \qquad d_1 = d^{\zeta'}c^{\eta'}b^{\xi'}a^{k'},$$
$$e_1 = f^v e^u d^z c^y b^x a^l, \qquad f_1 = f^{v'}e^{u'}d^{z'}c^{y'}b^{x'}a^{l'}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

doit, en supposant tous les exposants < 2, vérifier les conditions

$$\xi \equiv y'z' + u', \quad \xi' = 0, \quad \eta = 1, \quad \eta' = 0, \quad \zeta = u', \quad \zeta' = 1,$$
$$h = y' \equiv z + z' + y'u', \quad u = 1, \quad \alpha' u' = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 1,$$

et fournit sur les exposants α, α', δ, δ' une transformation définie par

$$\alpha_1 \equiv \alpha, \quad \alpha'_1 \equiv \alpha', \quad \delta_1 \equiv \delta, \quad k + \delta'_1 \equiv \alpha y' + \alpha' z' + \delta u' + \delta' + y'z' + x'.$$

On peut toujours faire $\delta'_1 = 0$, d'où huit types :

$$\alpha = 0, 1, \quad \alpha' = 0, 1, \quad \delta = 0, 1, \quad \delta' = 0.$$

Figure (1)(1)(1)(1)(11).

Premier cas : p impair.

46. D'après les types connus [1] de figure (1)(1)(1)(11), on voit que les équations de G, si l'on choisit convenablement les générateurs b, c, d, auront pour $p \geqq 3$, la forme

$$a^p = 1, \quad b^p = a^\alpha, \quad c^p = a^\beta, \quad d^p = b^{-\varepsilon'} a^\gamma, \quad e^p = c^{-\varepsilon'} b^\theta a^\delta, \quad f^p = b^{\theta'} a^{\delta'},$$
$$c^{-1} bc = ba^\lambda, \quad d^{-1} bd = ba^\mu, \quad e^{-1} be = ba^\nu,$$
$$f^{-1} bf = ba^{\nu'}, \quad d^{-1} cd = ca^\rho, \quad e^{-1} ce = ca^\sigma, \quad f^{-1} cf = cb, \quad e^{-1} de = db^\varphi a^\tau,$$
$$f^{-1} df = dc, \quad f^{-1} ef = ed,$$

les exposants des générateurs autres que a ayant les diverses déterminations suivantes, correspondant aux divers types de $G \mid \{a\}$:

$(p > 3)$.	I.	II.	III.	IV.	IV'.	IV''.	V.	V'.	V''.	VI.	VII.	VI'.	VII'.
θ	0	0	0	1	i	i^2	1	i	i^2	0	0	0	0
θ'	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	i	i^2	i^3
φ	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

(si p est $\not\equiv 1 \bmod 3$, les types IV', IV'' rentrent dans le type IV et les types V', V'' dans le type V; si p est $\not\equiv 1 \bmod 4$, le type VI' rentre dans le type VI et le type VII' dans le type VII);

$(p = 3)$.	I.	II.	III.	IV.	V.	V'.
θ	1	1	0	1	1	1
θ'	0	1	0	0	1	-1
φ	0	0	0	1	1	1

Les conditions d'automorphisme, fermeture et permutabilité (conditions d'ordre)

---

[1] De Séguier, *Théorie des groupes abstraits*, Chap. IV.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

résultant de l'adjonction successive de d, e, f sont

$$\alpha \equiv \lambda \equiv \mu \equiv 0, \qquad \varepsilon'\nu \equiv \varepsilon'\rho \equiv 0, \qquad \nu\theta \equiv \varepsilon'\sigma, \qquad \beta + \varepsilon'\nu' \equiv 0, \qquad \nu'\theta \equiv \gamma, \qquad \rho + \sigma \equiv \varphi\nu',$$
$$\nu\theta' + \gamma - \tfrac{1}{2}\beta \equiv 0, \qquad \nu'\theta' \equiv 0.$$

Pour que G soit de figure voulue, c'est-à-dire n'ait pas d'éléments normaux hors de $\{a\}$, il faut et il suffit (condition de figure) que ν ou ν' soit $\not\equiv 0$. On voit alors que les seuls types de $G|\{a\}$ qui conviennent sont les suivants (j'indique pour chacun la forme que prennent les conditions d'ordre et de figure) :

Pour $p \geqq 5$, $\beta \equiv 0$, puis

I. $$\gamma \equiv 0, \qquad \nu \equiv \sigma \equiv -\rho, \qquad \nu \text{ ou } \nu' \not\equiv 0,$$

II. $$\gamma \equiv 0, \qquad \rho \equiv -\nu, \qquad \sigma \equiv \nu + \nu', \qquad \nu \text{ ou } \nu' \not\equiv 0,$$

III. $$-\gamma \equiv -\rho \equiv \sigma \not\equiv 0, \qquad \nu' \equiv 0,$$

VI., VII., VI'., VII'. $$\gamma \equiv \nu\theta' \not\equiv 0, \qquad -\rho \equiv \sigma \equiv \nu \not\equiv 0, \qquad \nu' \equiv 0.$$

Pour $p = 3$,

I. $$\nu \equiv \rho \equiv \sigma \equiv 0, \qquad -\beta \equiv \gamma \equiv \nu' \not\equiv 0.$$

Une forme d'équations commune à tous les types de G sera donc

$$a^p = b^p = 1, \qquad c^p = a^{-\varepsilon'\nu'}, \qquad d^p = b^{-\varepsilon'}a^{\gamma}, \qquad e^p = c^{-\varepsilon'}b^{\varepsilon'}a^{\delta}, \qquad f^p = b^{\theta'}a^{\delta'},$$
$$c^{-1}bc = d^{-1}bd = b, \qquad e^{-1}be = ba^{\nu}, \qquad f^{-1}bf = ba^{\nu'},$$
$$d^{-1}cd = ca^{-\nu}, \qquad e^{-1}ce = ca^{\sigma}, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = db^{\varphi}a^{\tau}, \qquad f^{-1}df = dc, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

Si l'on pose

$$f^{v}e^{u}d^{z}c^{y}b^{x} = g, \qquad f^{v'}e^{u'}d^{z'}c^{y'}b^{x'} = g', \qquad g'g = f^{V'}e^{U'}d^{Z'}c^{Y'}b^{X'}a^{H'}, \qquad g^{w} = f^{V_w}e^{U_w}d^{Z_w}c^{Y_w}b^{X_w}a^{H_w},$$

on trouve

$$V' = v + v', \qquad U' = u + u', \qquad Z' = u'v' + z' + z, \qquad Y' = u'\binom{v}{2} + z'v + y' + y,$$
$$X' = \varphi\binom{u'}{2}v + u'\left[\varphi uv + \binom{v}{3}\right] + z'\left[\varphi u + \binom{v}{2}\right] + y'v + x' + x,$$
$$\begin{aligned} H' = {} & \binom{u'}{2}\left[\tau v + \sigma\binom{v}{2} + \nu\binom{v}{3} - \nu v\binom{v}{2} + \nu\varphi uv\right] + \varphi\nu\binom{u'}{3}v - \nu\binom{z'}{2}v \\ & + u'\left[-\nu\binom{v}{3} + \nu'\binom{v}{4} + \tau uv + \varphi\nu v\binom{u}{2} + \sigma u\binom{v}{2} + \nu u\binom{v}{3} - \nu z\binom{v}{2}\right] \\ & + z'\left[\nu'\binom{v}{3} + \tau u + \nu\varphi\binom{u}{2} + \sigma uv + \nu u\binom{v}{2} - \nu zv\right] \\ & + y'\left[\nu'\binom{v}{2} + \sigma u + \nu uv - \nu z\right] + x'(\nu u + \nu' v) + \nu z'u'\binom{v}{2}; \end{aligned}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

puis, par récurrence,

$$V_w = wv, \qquad U_w = wu, \qquad Z_w = wz + uv\Sigma_1^{w-1} t, \qquad Y_w = uv^2 \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t t + \left[u\binom{v}{2} + zv\right] \Sigma_1^{w-1} t + wy,$$

$$X_w = \varphi v \Sigma_1^{w-1} \binom{tu}{2} + \varphi u^2 v \Sigma_1^{w-1} \Sigma_1^t t + \left[2uv\binom{v}{2} + zv^2\right] \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t t + uv^3 \Sigma_1^{w-3} \Sigma_1^t \Sigma_1^t t$$
$$+ \left[u\binom{v}{3} + \varphi zu + z\binom{v}{2} + yv\right] \Sigma_1^{w-1} t + wx,$$

$$H_w = \left[-\nu u\binom{v}{3} + \nu' u\binom{v}{4} + \sigma u^2\binom{v}{2} + \nu' z\binom{v}{3} + \tau zu + \varphi\nu z\binom{u}{2} - \nu zuv + v' y\binom{v}{2}\right.$$
$$\left. + \sigma yu - \nu yz + \nu' xv + \nu xu\right] \Sigma_1^{w-1} t$$
$$+ \left[\varphi\nu uv\binom{u}{2} + \sigma zuv + \nu yuv + \tau u^2 v + \nu u^2\binom{v}{3}\right] \Sigma_1^{w-1} \Sigma_1^t t$$
$$+ \left[\tau v + \sigma\binom{v}{2} + \nu\binom{v}{3} - \nu v\binom{v}{2}\right] \Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{2} + \varphi\nu v \Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{3} - \nu v \Sigma_1^{w-1}\left(\begin{matrix} uv\binom{t}{2} + tz \\ 2 \end{matrix}\right)$$
$$+ \varphi\nu uv \Sigma_1^{w-1} \Sigma_1^t \binom{tu}{2} - \nu\binom{v}{2}\left[zu \Sigma_1^{w-1} t^2 + u^2 v \Sigma_1^{w-1} t^2 \binom{t}{2}\right]$$
$$+ \left[2\nu u^2 v\binom{v}{2} + \varphi\nu u^3 v + \nu' \varphi u^2 v^2\right] \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t \Sigma_1^t t$$
$$+ \left[\nu' uv\binom{v}{3} + \nu' zv\binom{v}{2} + \nu' yv^2 + \sigma u^2 v^2 + \nu' u\binom{v}{2}^2 + \sigma u^2\binom{v}{2} + \nu zv\binom{v}{2}\right.$$
$$\left. - \nu z^2 v + \nu' uv\binom{v}{3} + \varphi\nu' zuv + \varphi\nu zu^2\right] \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t t$$
$$+ \varphi\nu' v^2 \Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t \binom{tu}{2} + \left[\nu' uv\binom{v}{2} + \sigma u^2 v + \nu u^2 v^2 - \nu zuv\right.$$
$$\left. + \nu' zv^3 + \nu zuv^2 + 2\nu' uv^2\binom{v}{2}\right] \Sigma_1^{w-3} \Sigma_1^t \Sigma_1^t t + uv^3 \Sigma_1^{w-4} \Sigma_1^t \Sigma_1^t \Sigma_1^t t.$$

Or on trouve par récurrence

$$\Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{3} = \frac{1}{24} uw(w-1)\left[u^2 w(w-1) + 2u(2w-1) + 4\right],$$
$$\Sigma_1^{w-1}\binom{tu}{2} = \frac{1}{12} uw(w-1)\left[u(2w-1) - 3\right],$$
$$\Sigma_1^{w-2} \Sigma_1^t \binom{tu}{2} = \frac{1}{24} w(w-1)(w-2)\left[u(w-1) - 2\right],$$
$$\Sigma_1^{w-1} t^2 \binom{t}{2} = \frac{1}{120} w(w-1)\left[(w+1)(w^2+1) - 10(3w^2+7w+7)\right],$$

$$\Sigma_1^{w-1}\left(\begin{matrix} uv\binom{t}{2} + tz \\ 2 \end{matrix}\right)$$
$$= \frac{1}{480} w(w-1)\left(12u^2v^2(w^3+w^2+w+1) + 30(4z - u^2v^2 - 2)\right.$$
$$\left. + 10(2w-1)\left[(2z-1)^2 - 2uv - 5u^2v^2\right] + 15uvw(w-1)(4z - 5uv - 2)\right).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si l'on tient compte des expressions connues des autres sommes et si l'on pose $g^p = c^{C_p} b^{B_p} a^{A_p}$, on a

$$C_p = \varepsilon' u(v^2 - 1), \qquad B_p = \theta' v + \varepsilon'(z - u)(v^2 - 1),$$

$$A_p = u\delta + v\delta' + \gamma(z - \tfrac{1}{2}uv)$$
$$+ \varepsilon'\left[-\tau u^2 v + (z + u)(v - v^2) + yv^2 + uv\binom{v}{3} - \gamma[uv(1 - v) + zv + y]\right] + \varepsilon'' uv^3(1 + 2\nu u).$$

On voit que le changement de générateurs le plus général conservant la forme des équations de G est de la forme

$$a_1 = a^\chi, \qquad b_1 = b^\xi a^h, \qquad c_1 = c^\eta b^{\xi'} a^{h'}, \qquad d_1 = d^{\zeta''} c^{\eta''} b^{\xi''} a^{h''}, \qquad \chi\xi\eta'\zeta'' \not\equiv 0,$$
$$e_1 = f^v e^u d^z c^y b^x a^k, \qquad f_1 = f^{v'} e^{u'} d^{z'} c^{y'} b^{x'} a^{k'}, \qquad uv' - vu' \not\equiv 0;$$

on trouve d'abord les relations de condition

$$\xi \equiv uv'^3, \qquad \eta' \equiv uv'^2, \qquad \zeta'' \equiv uv', \qquad v \equiv 0, \qquad \varepsilon'(u - z) \equiv \varepsilon'(uv' - \xi'), \qquad B'_p \equiv \theta' uv'^3,$$
$$h \equiv \nu'\eta'\binom{v'}{2} + \nu'\xi' v' + \sigma\eta' u' + \nu u'(\eta' v + \xi') - \nu\eta' z', \qquad \varphi(u^2 v' - 1) \equiv 0,$$
$$\xi' \equiv \zeta''\left[\binom{v'}{2} + \varphi u\right] + \eta'' v', \qquad \eta'' \equiv u\binom{v'}{2} + zv' \qquad \xi'' \equiv X'_1 - X', \qquad h'' \equiv H'_1 - H'.$$

Ces conditions étant vérifiées et tous les exposants étant supposés $< p$, il en résulte pour les exposants des équations de G une transformation (T) définie par

$$\chi\nu_1 \equiv \nu u^2 v'^3, \qquad \chi\nu'_1 \equiv uv'^3(\nu u' + \nu' v'), \qquad \chi\sigma_1 \equiv uv'^2(\sigma u - \nu z) + \nu\xi' u,$$
$$\chi\tau_1 \equiv \tau u^2 v' + \varphi uv'\binom{u}{2} + \sigma\eta'' u + \nu\xi'' u - \nu\eta'' z + \nu yuv',$$
$$\varepsilon'(\gamma_1 - u\gamma) \equiv 0, \qquad \varepsilon' h + \chi\gamma_1 \equiv uv'\gamma, \qquad \chi\delta_1 + \varepsilon'(h - h') \equiv A_p, \qquad \chi\delta'_1 + \theta' h \equiv A'_p.$$

Premier cas : $p > 5$.

Type I de G$|\{a\}$ $\quad (\theta = \theta' = \varphi = \gamma = 0,\ \nu = \sigma = -\rho,\ \nu \text{ ou } \nu' \not\equiv 0)$.

47. Les équations de G seront, en sous-entendant, comme nous le ferons toujours, les équations communes à tous les types

$$c^p = d^p = 1, \qquad e^p = a^\delta, \qquad f^p = a^{\delta'}, \qquad e^{-1}be = ba^\nu, \qquad f^{-1}bf = ba^{\nu'}, \qquad d^{-1}cd = ca^{-\nu},$$
$$e^{-1}ce = ca^\nu, \qquad e^{-1}de = da^\tau,$$

et (T) prend la forme

$$\chi\nu_1 \equiv \nu u^2 v'^3, \qquad \chi\nu'_1 \equiv uv'^3(\nu u' + \nu' v'), \qquad \chi\tau_1 \equiv \tau u^2 v' + \nu[\eta''(u - z) + \xi'' u + yuv'],$$
$$\chi\delta_1 \equiv u\delta, \qquad \chi\delta'_1 \equiv u'\delta + v'\delta',$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Si ν *est* $\not\equiv 0$, on peut faire $\nu_1 = 1$, $\nu'_1 = 0$. Soit $\nu_1 = \nu = 1$, $\nu'_1 = \nu' = 0$, on a

$$\chi \equiv u^2 v'^3, \quad 0 \equiv u', \quad u^2 v'^3 \tau_1 \equiv \tau u^2 v' + \nu[\eta''(u - z) + \xi'' u + y u v'], \quad u v'^3 \delta_1 \equiv \delta, \quad u^2 v'^2 \delta'_1 \equiv \delta'$$

montrant les huit types

$$\tau = 0, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0, 1, N; \qquad \tau = 0, \quad \delta = 1, \quad \delta' = 0, (1, i^2), (i, i^3)$$

qui, pour $p \equiv 3 \bmod 4$, se réduisent à six, deux valeurs de δ' dans la même parenthèse fournissant alors le même type.

Si ν *est* $\equiv 0$, donc $\nu'' \not\equiv 0$, on a nécessairement $\nu_1 \equiv 0$, et l'on peut faire $\nu'_1 = 1$. Soit $\nu_1 = \nu = 0$, $\nu'_1 = \nu' = 1$, on a

$$\chi \equiv u v'^4, \quad v'^3 \tau_1 \equiv \tau u, \quad v'^4 \delta_1 \equiv \delta, \quad u v'^4 \delta'_1 \equiv u' \delta + v' \delta';$$

on voit donc que G a les types

$$\begin{array}{lll} \tau = 0, & \delta = 0, & \delta' = 0, 1, \\ \tau = 0, & \delta = 1, & \delta' = 0, \\ \tau = 1, & \delta = 0, & \delta' = 0, (1, i^2, i^4), (i, i^3, i^5), \\ \tau = 1, & \delta = (1, i^2), (i, i^3), & \delta' = 0, \end{array}$$

les deux valeurs de δ dans la même parenthèse fournissant le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 4$, et les trois valeurs de δ' dans la même parenthèse fournissant le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 3$.

Type II de G $|\{a\}$ $\quad (\theta = \theta' = 0, \varphi = 1, \gamma = 0, \rho = -\nu, \sigma = \nu + \nu', \nu \text{ ou } \nu' \not\equiv 0)$.

Les équations de G seront

$$c^p = d^p = 1, \quad e^p = a^\delta, \quad f^p = a^{\delta'}, \quad e^{-1} b e = b a^\nu, \quad f^{-1} b f = b a^{\nu'}, \quad d^{-1} c d = c a^{-\nu},$$
$$e^{-1} c e = c a^{\nu + \nu'}, \quad e^{-1} d e = b a^\tau,$$

et (T) devient, en tenant compte des conditions

$$\chi u^4 \nu_1 \equiv \nu, \quad \chi u^7 \nu'_1 \equiv \nu u^3 u' + \nu', \quad \chi \tau_1 \equiv \tau + \tfrac{1}{2}(u - 1) + (\nu + \nu')\eta'' u + \nu(\xi'' u - \eta'' z + u^{-1} y),$$
$$\chi \delta_1 \equiv \delta u, \quad \chi u^2 \delta'_1 \equiv \delta u^2 u' + \delta',$$

Si ν *est* $\not\equiv 0$, on peut faire $\nu_1 = 1$, $\nu'_1 = 0$; en supposant $\nu_1 = \nu = 1$, $\nu'_1 = \nu' = 0$, on a

$$\chi u^4 \equiv 1, \quad u' \equiv 0, \quad u^{-4} \tau_1 \equiv \tau + \tfrac{1}{2}(u - 1) + \eta''(u - z) + \xi'' u + u^{-1} y,$$
$$\delta_1 \equiv \delta u^3, \quad \delta'_1 \equiv \delta' u^2;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

on peut toujours faire $\tau_1 = 0$ (le coefficient de y étant $2u^{-1}$) et l'on voit que les types sont

$$\tau = 0, \quad \delta = 0, (1, i, i^2), \quad \delta' = 0; \qquad \tau = 0, \quad \delta = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}, \quad \delta' = 1, \mathrm{N};$$

les trois valeurs de δ dans la parenthèse fournissent les mêmes types si p est $\equiv 2 \bmod 3$.

Si ν *est* $\equiv 0$, donc $\nu' \not\equiv 0$, on a nécessairement $\nu_1 \equiv 0$ et l'on peut faire $\nu'_1 = 1$; soit donc $\nu'_1 = \nu' = 1$, on a

$$\chi u^7 \equiv 1, \qquad u^{-7}\tau_1 \equiv \tau + \tfrac{1}{2}(u-1) + zu^{-1} + \tfrac{1}{2}(u^{-2}-1), \qquad \delta_1 \equiv \delta u^6, \qquad \delta'_1 \equiv \delta u^7 u' + \delta' u^5,$$

on peut toujours faire $\tau_1 = 0$ et l'on voit, si δ est $\equiv 0$, les types

$$\tau = 0, \qquad \delta = 0, \qquad \delta' = 0, (1, i, i^2, i^3, i^4);$$

les cinq valeurs de δ' dans la parenthèse fournissent le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 5$; si δ est $\not\equiv 0$, on peut toujours faire $\delta'_1 = 0$ et l'on a les types

$$\tau = 0, \qquad \delta = (1, i^2, i^4), \ (i, i^3, i^5), \qquad \delta' = 0;$$

les trois valeurs de δ dans la même parenthèse fournissent le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 3$.

Type III de G $|\{a\}$ $\quad (\theta = \varphi = 0, \ \theta' = 1, \ -\gamma = -\rho = \sigma = \nu \not\equiv 0, \ \nu' = 0)$.

Comme on peut prendre a^ν pour a, on peut toujours supposer $\nu = 1$ et écrire les équations de G

$$c^p = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = a^\delta, \quad f^p = ba^{\delta'}, \quad e^{-1}be = ba, \quad f^{-1}bf = b, \quad d^{-1}cd = ca^{-1},$$
$$e^{-1}ce = ca, \quad e^{-1}de = da^\tau.$$

En tenant compte des conditions générales auxquelles il faut joindre $\chi \equiv u^2 v'^3$, $u' \equiv 0$, (T) devient

$$\tau_1 \equiv \tau v'^{-2} + \eta''(v'^{-1} - zv') + \xi'' v'^{-1} + y, \qquad \delta_1 \equiv zv' + \delta v'^{-1}, \qquad \delta'_1 \equiv \delta' v'^2;$$

le coefficient de y dans τ_1 étant 2, on voit qu'il y a les trois types

$$\tau = \delta = 0, \qquad \delta' = 0, 1, \mathrm{N}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Types VI et VII de G$|\{a\}$ $\quad (\theta' = (1, i^2), (i, i^3),\ \theta = 0,\ \varphi = 1,\ \nu' = 0,\ \gamma = \nu\theta',\ -\rho = \sigma = \nu \not\equiv 0)$.

Comme on peut prendre a^ν pour a, on peut toujours supposer $\nu = 1$ et écrire les équations de G

$$c^p = 1, \quad d^p = a^{\theta'}, \quad e^p = a^\delta, \quad f^p = b^{\theta'} a^{\delta'}, \quad e^{-1} be = ba, \quad f^{-1} bf = b, \quad d^{-1} cd = ca^{-1},$$
$$e^{-1} ce = ca, \quad e^{-1} de = dba^\tau.$$

En tenant compte des conditions générales auxquelles il faut joindre $\chi \equiv u^2 v'^3$, $u' \equiv 0$, (T) devient

$$\tau_1 \equiv \tau u + \tfrac{1}{2} u(u-1) + \eta'' u(u-z) + \xi'' u^2 + y, \qquad \delta_1 \equiv -u\theta' z + \delta u^2, \qquad \delta'_1 \equiv \delta' u^2;$$

le coefficient de y dans τ_1 étant 2, on voit qu'il y a, pour chaque valeur de θ', trois types,

$$\theta' = (1, i^2), (i, i^3), \qquad \tau = \delta = 0, \qquad \delta = 0, 1, \mathrm{N};$$

les deux valeurs de θ' dans la même parenthèse fournissent le même type si p est $\not\equiv 1 \bmod 4$.

Deuxième cas : $p = 5$.

48. Il n'y a, dans ce qui précède, à modifier pour chaque type de G$|\{a\}$ que la transformation (T).

Type I de G$|\{a\}$.

La transformation (T) sera

$$\chi\nu_1 \equiv \nu u^2 v'^3, \qquad \chi\nu'_1 \equiv u v'^3(\nu u' + \nu' v'), \qquad \chi\tau_1 \equiv \tau u^2 v' + \nu[\eta''(u-z) + \xi'' u + u v' y],$$
$$\chi\delta_1 \equiv \delta u, \qquad \chi\delta'_1 \equiv \delta u' + \delta' v' + u' v'^3(1 + 2\nu u').$$

Si ν *est* $\not\equiv 0$, on peut faire $\nu_1 = 1$, $\nu'_1 = 0$; en supposant $\nu_1 = \nu = 1$, $\nu'_1 = \nu' = 0$, donc $\chi \equiv u^2 v'^3$, $u' \equiv 0$, les formules de (T) deviennent les mêmes que pour $p > 5$ et $\equiv 1 \bmod 4$.

Si ν *est* $\equiv 0$, donc $\nu' \not\equiv 0$, on a nécessairement $\nu_1 \equiv 0$ et l'on peut faire $\nu'_1 = 1$, soit donc $\nu'_1 = \nu' = 1$, donc $\chi \equiv u$, (T) devient :

$$\tau_1 \equiv \tau u v', \qquad \delta_1 \equiv \delta, \qquad u\delta'_1 \equiv (\delta + v'^3) u' + \delta' v'.$$

En prenant $\delta + v'^3 \not\equiv 0$, on peut faire $\delta'_1 = 0$ en disposant de u', on a donc les types :

$$\tau = 0, \qquad \delta = 0, 1, 2, 3, 4, \qquad \delta' = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Type II de G $|\{a\}$.

La transformation (T) sera

$$\chi\nu \equiv \nu_1, \qquad \chi\nu'_1 \equiv \nu u' + \nu' u, \qquad \chi\tau_1 \equiv \tau + 3(u-1) + \nu'\eta'' u + \nu[\eta''(u-z) + \xi'' u + u^{-1}y],$$
$$\chi\delta_1 \equiv \delta u, \qquad \chi\delta'_1 \equiv \delta u' + \delta' u^2 + u' u^2(1 + 2\nu u').$$

Si ν *est* $\not\equiv 0$, on voit, comme précédemment, que l'on a les mêmes types que pour $p > 5$ et $\not\equiv 1 \bmod 3$.

Si ν *est* $\equiv 0$, on a $\nu_1 \equiv 0$ et l'on peut faire $\nu'_1 = 1$; en supposant $\nu'_1 = \nu' = 1$, on a

$$\chi \equiv u, \qquad u\tau_1 \equiv \tau + 3(u-1) + 3(u^2-1) + z u^3, \qquad \delta_1 \equiv \delta, \qquad u\delta'_1 \equiv (\delta + u^2)u' + \delta' u^2,$$

ce qui donne les types

$$\tau = \delta' = 0, \qquad \delta = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Type III, VI, VII de G $|\{a\}$.

Les formules (T) étant les mêmes que pour $p > 5$, G a les quinze mêmes types que pour $p > 5$ et $\equiv 1 \bmod 4$.

TROISIÈME CAS : $p = 3$.

49. Nous avons vu que le type I de G $|\{a\}$ convient seul; comme en vertu de la condition de figure on peut prendre $a^{\nu'}$ pour a, on peut supposer $\nu' = 1$ et écrire les équations de G, en tenant compte des conditions d'ordre

$$a^3 = b^3 = 1, \qquad c^3 = a^{-1}, \qquad d^3 = b^{-1}a, \qquad e^3 = c^{-1}ba^{\delta}, \qquad f^3 = a^{\delta'},$$
$$c^{-1}bc = d^{-1}bd = e^{-1}be = b, \qquad f^{-1}bf = ba,$$
$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = cb, \qquad e^{-1}de = da^{\tau}, \qquad f^{-1}df = dc, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

Le changement de générateurs le plus général conservant cette forme d'équations est de la forme

$$a_1 = a^{\theta}, \qquad b_1 = b^{\xi}a^{h}, \qquad c_1 = c^{\eta'}b^{\xi'}a^{h'}, \qquad d_1 = d^{\zeta''}c^{\eta''}b^{\xi''}a^{h''},$$
$$e_1 = f^{v}e^{u}d^{z}c^{y}b^{x}a^{k}, \qquad f_1 = f^{v'}e^{u'}d^{z'}c^{y'}b^{x'}a^{k'},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

avec les conditions (j, j', j'', l désignant des entiers arbitraires)

$$v \equiv 0 \quad \text{(je supposerai } v = 0\text{)}, \quad uv' \not\equiv 0,$$

$$\theta \equiv u, \quad \xi \equiv uv', \quad h \equiv zv', \quad \eta' = u - 3l, \quad \xi' \equiv u(v'-1) + z,$$

$$h' \equiv \tau uu'v' + (z+u)(v'-1) + y + j + j'v' - uv'\binom{v'}{3}, \quad \zeta'' = uv' + 3j', \quad \eta'' \equiv u(v'-1) + zv',$$

$$\xi'' \equiv u\binom{v'}{3} + z(v'-1) + yv' + j', \quad h'' \equiv H'_1 - H' + j'' - j', \quad u(v'^2-1) + 3(j + l + j'v') = 0.$$

Et la transformation opérée sur les exposants τ, δ, δ' est définie par

$$\tau_1 \equiv \tau uv', \quad u\delta_1 \equiv A_3 + l + h' - h, \quad u\delta'_1 \equiv A'_3.$$

Or, on trouve, en tenant compte des conditions,

$$A_3 + l + h' - h = u[\delta + \tau u'v' - \tfrac{1}{6}(v'-1)(v'-2)(v'^2+2)];$$

comme v' est $\not\equiv 0$, $\frac{1}{6}(v'-1)(v'-2)$ est entier et $v'^2 + 2 \equiv v'^2 - 1$ est $\equiv 0$, on a donc

$$\delta_1 \equiv \delta + \tau u'v', \quad u\delta'_1 \equiv u'\delta + v'\delta' - u'v' - \tau u'^2 v' + u'v'\binom{v'}{3}.$$

On voit que τ_1 est $\equiv 0$ toujours et seulement si τ est $\equiv 0$. Si τ est $\equiv 0$ on a $\delta_1 \equiv \delta$, et en prenant $v' - \delta \not\equiv 0$, $0 < v' < 3$, $(v' - \delta)u' \equiv v'\delta'$, on peut faire $\delta'_1 = 0$, d'où les trois types

$$\tau = 0, \quad \delta = 0, 1, -1, \quad \delta' = 0.$$

Si τ est $\not\equiv 0$, on peut faire $\tau_1 = 1$; et en supposant $\tau_1 = \tau = 1$, donc $uv' \equiv 1$, on a $\delta_1 \equiv \delta + u'v'$. En prenant $v' = -1$, $u' = \delta$, on peut faire $\delta_1 = 0$; en supposant $\delta_1 = \delta = 0$, donc $u' \equiv 0$, on a $\delta'_1 \equiv \delta'$, d'où les trois types

$$\tau = 1, \quad \delta = 0, \quad \delta' = 0, 1, -1.$$

Deuxième cas : $p = 2$.

50. On connaît (1) tous les types de g_{p^m} ayant un $e_{p^{m-1}}$ et l'on sait qu'ils sont tous de figure (1)(1)...(1)(11). D'autre part, il est facile de voir que *tout* g_{2^m} *de figure* (1)(1) ... (11) *a un* $e_{2^{m-1}}$. Supposons, en effet, le théorème vrai pour les groupes de même figure et d'ordre inférieur, m étant $\geqq 5$ (le théorème se vérifie directement pour $m \leqq 4$). D'après les types connus de $G|\{a\}$ qui est un $g_{2^{m-1}}$ contenant par hypothèse

(1) De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 141.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

un $e_{2^{m-}}$, G a des équations de la forme

$$a^2 = 1, \qquad b^{2^{m-2}} = a^\alpha, \qquad c^2 = b^\theta a^\beta, \qquad b^{-1}ab = c^{-1}ac = a, \qquad c^{-1}bc = b^\zeta a^\gamma,$$

θ et ζ ayant les trois systèmes de valeurs suivants (correspondant aux trois types distincts de $G|\{a\}$)

$$\begin{array}{lccc} \theta: & 0, & 2^{m-3}, & 0, \\ \zeta: & -1, & -1, & -1+2^{m-3}. \end{array}$$

Or α est $\not\equiv 0$, car si α était $\equiv 0$, on aurait $b^{2^{m-2}} = 1$, et comme on a toujours $\zeta - 1 \equiv 0$, il en résulterait $c^{-1}b^{2^{m-3}}c = b^{\zeta 2^{m-3}} = b^{2^{m-3}}$; et $b^{2^{m-3}}$ hors de $\{a\}$ serait normal. Ainsi α est $\not\equiv 0$ et b est un $e_{2^{m-1}}$ de G.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

LISTE DES G_{p^6} ET DE QUELQUES G_{p^m}.

51. Je donne ici les équations de chacun des types qui ont été déterminés au cours du précédent travail. G désignant toujours le groupe et A le central, je sous-entendrai toujours les équations exprimant que tout élément de A est permutable à tout élément de G.

Les premiers membres des équations de G ne sont écrits qu'une fois, au commencement de chaque figure; les différentes formes de chaque second membre sont écrites dans la colonne du premier membre correspondant; à chaque type de G correspond ainsi une ligne de seconds membres. Une catégorie de types de G ayant même G|A est précédée d'un chiffre romain. J'ai conservé pour les exposants les notations employées au cours de la détermination des types.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure $(s1)(1)(11)$. — $s>1$. — Central : $\{a, b\}$.

	a^{p^s}	b^p	c^p	d^p	e^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$e^{-1}de$			
						$p>2$.					
(1)	1	1	1	1	$b^{\beta''}$	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc	$\beta''=0,1$	2 types,	
(2)	1	1	1	$b^{\beta'}$	a	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc	$\beta'=0,1$	2 »	
(3)	1	1	1	$a^{\alpha'}$	$b^{\beta''}$	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc	$\alpha'=1, \mathrm{N}$; $\beta''=0,1$	4 »	
(4)	1	1	1	1	$b^{\beta''}$	c	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	$p>3$,
(5)	1	1	1	$b^{\beta'}$	1	c	cb	dc	$\beta'=1, \mathrm{N}$	2 »	$p>3$,
(6)	1	1	1	a	$b^{\beta''}$	c	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	
(7)	1	1	1	$b^{\beta'}$	1	c	cb	dc	$\beta'=0,1$	2 »	$p=3$,
(8)	1	1	1	b^{-1}	$b^{\beta''}$	c	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	$p=3$,
(9)	1	1	1	1	$b^{\beta''}$	$ca^{p^{s-1}}$	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	$p>3$,
(10)	1	1	1	$b^{\beta'}$	1	$ca^{p^{s-1}}$	cb	dc	$\beta'=1, \mathrm{N}$	2 »	$p>3$,
(11)	1	1	1	$b^{\beta'}$	$a^{\alpha''}$	$ca^{p^{s-1}}$	cb	dc	$\beta'=0,1, \mathrm{N}$; $\alpha''=1, \mathrm{N}$	6 »	
(12)	1	1	1	a	$b^{\beta''}$	$ca^{p^{s-1}}$	cb	dc	$\beta''=0,1,\ldots,p-1$	p »	
(13)	1	1	1	$b^{\beta'}$	1	$ca^{p^{s-1}}$	cb	dc	$\beta'=0,1$	2 »	$p=3$,
(14)	1	1	1	b^{-1}	$b^{\beta''}$	$ca^{p^{s-1}}$	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	$p=3$.
						$p=2$.					
(15)	1	1	$a^{2^{s-1}}$	1	$b^{\beta''}$	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc	$\beta''=0,1$	2 types,	
(16)	1	1	$a^{2^{s-1}}$	b	b	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc		1 type,	
(17)	1	1	$a^{2^{s-1}}$	$b^{\beta'}$	a	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc	$\beta'=0,1$	2 types,	
(18)	1	1	$a^{2^{s-1}}$	1	$b^{\beta''}a$	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc	$\beta''=0,1$	2 »	
(19)	1	1	b	1	$b^{\beta''}$	cb	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	
(20)	1	1	b	b	b	cb	cb	dc		1 type,	
(21)	1	1	b	$b^{\beta'}$	a	cb	cb	dc	$\beta'=0,1$	2 types,	
(22)	1	1	b	1	$b^{\beta''}a$	cb	cb	dc	$\beta''=0,1$	2 »	

Figure $(s)(s)(11)$. — $s>1$. — Central $\{a\}$.

		a^{p^s}	b^{p^s}	c^p	d^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$d^{-1}cd$			
I.	(1)	1	1	1	a^δ	b	$ba^{p^{s-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$	$\delta=0,1$	2 types,	
	(2)	1	1	a	1	b	$ba^{p^{s-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$		1 type,	
	(3)	1	1	a^{N}	1	b	$ba^{p^{s-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$		1 »	$p>2$,
II.	(1)	1	$a^{-p^{s-1}}$	a^γ	ba^δ	bap^{s-1}	b	$cb^{p^{s-1}}$	$\gamma=0,1$; $\delta=0,1,\ldots,p-1$	$2p$ types.	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure $(s)(11)(11)$. — $s>1$. — Central : $\{a\}$.

		a^{p^s}	b^p	c^p	d^p	e^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$e^{-1}de$		
							$p>2$.							
I.	(1)	1	1	1	1	$a^{\beta'}$	b	$ba^{p^{s-1}}$	b	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc	$\beta'=0,1$	2 types,
	(2)	1	1	1	a^{β}	1	b	$ba^{p^{s-1}}$	b	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc	$\beta=1,\mathrm{N}$	2 »
	(2)	1	a	1	1	1	b	$ba^{p^{s-1}}$	b	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc		1 type,
II.	(1)	1	1	$a^{p^{s-1}}$	ca^{β}	b	b	$ba^{-p^{s-1}}$	b	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc	$\beta=0,1,\ldots p-1$	p types,
	(2)	1	a	$a^{p^{s-1}}$	1	b	b	$ba^{-p^{s-1}}$	b	c	$ca^{p^{s-1}}$	dc		1 type.
							$p=2$.							
III.	(1)	1	1	$a^{2^{s-1}}$	a^{β}	1	b	b	$ba^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc	$\beta=0,1$	2 types,
	(2)	1	1	$a^{2^{s-1}}$	a	a	b	b	$ba^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc		1 type,
	(3)	1	a	$a^{2^{s-1}}$	1	1	b	b	$ba^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	$ca^{2^{s-1}}$	dc		1 »
IV.	(1)	1	1	1	a^{β}	b	b	$ba^{2^{s-1}}$	b	c	$ca^{2^{s-1}}$	dc	$\beta=0,1$	2 types,
	(2)	1	a	1	1	b	b	$ba^{2^{s-1}}$	b	c	$ca^{2^{s-1}}$	dc		1 type.

Figure $(s)(1)(1)(11)$. — $s>1$. — Central : $\{a\}$.

	a^{p^s}	b^p	c^p	d^p	e^p	$fc^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$e^{-1}de$			
						$p>2$.								
(1)	1	1	$a^{\varepsilon' p^{s-1}}$	$b^{\varepsilon'}$	$a^{\gamma'}$	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	c	cb	dc	$\gamma'=0,1$	2 types,	
(2)	1	1	$a^{\varepsilon' p^{s-1}}$	$b^{\varepsilon'}a$	1	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	$ca^{\nu p^{s-1}}$	cb	dc	$\nu=0,1$	2 »	
(3)	1	1	$a^{\varepsilon' p^{s-1}}$	a^{γ}	1	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	$ca^{\nu p^{s-1}}$	cb	dc	$\gamma=i,i^2$; $\nu=0,1$	4 »	$p\equiv 1 \bmod 3$,
(4)	1	1	$a^{\varepsilon' p^{s-1}}$	$b^{\varepsilon'}$	$a^{\gamma'}$	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	$ca^{\nu p^{s-1}}$	cb	dc	$\gamma'=1,i$	2 »	
(5)	1	1	$a^{\varepsilon' p^{s-1}}$	1	$a^{\gamma'}$	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	$ca^{\nu p^{s-1}}$	cb	dc	$\gamma'=i,i^3$	2 types,	$p\equiv 1 \bmod 4$.
						$p=2$.								
(6)	1	$a^{2^{s-1}}$	b	c	$a^{\gamma'}$	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	c	cb	dc	$\gamma'=0,1$	2 types,	
(7)	1	$a^{2^{s-1}}$	b	ca	1	b	b	$ba^{p^{s-1}}$	c	cb	dc		1 type.	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure $(rs)(11)$. — $r \geqq 1$, $s > 1$. — Central : $\{a, b\}$.

	a^{p^r}	b^{p^s}	c^p	d^p	$d^{-1}cd$			
(1)	1	1	1	b^ν	$ca^{p^{r-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	$r > s$,
(2)	1	1	1	a	$ca^{p^{r-1}}$		1 type,	$r > s$,
(3)	1	1	b	a	$ca^{p^{r-1}}$		1 » (1),	$r > s$,
(4)	1	1	1	b^ν	$cb^{p^{s-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	
(5)	1	1	1	a	$cb^{p^{s-1}}$		1 type,	
(6)	1	1	b	a	$cb^{p^{s-1}}$		1 » (2).	

Figure $(rs1)(11)$. — Central : $\{a, b, c\}$.

	a^{p^r}	b^{p^s}	c^p	d^p	e^p	$e^{-1}de$			
					$r > s > 1$.				
(1)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	$da^{p^{r-1}}$	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(2)	1	1	1	c^γ	b	$da^{p^{r-1}}$	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(3)	1	1	1	c^γ	a	$da^{p^{r-1}}$	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(4)	1	1	1	b	a	$da^{p^{r-1}}$		1 type,	
(5)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	$db^{p^{s-1}}$	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(6)	1	1	1	c^γ	b	$db^{p^{s-1}}$	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(7)	1	1	1	c^γ	a	$db^{p^{s-1}}$	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(8)	1	1	1	b	a	$db^{p^{s-1}}$		1 type,	
(9)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	dc	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	$p > 2$,
(10)	1	1	1	c^γ	c	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	$p = 2$,
(11)	1	1	1	c^γ	a	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(12)	1	1	1	b	a	dc		1 type (3).	
					$r = s > 1$.				
(1)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	$db^{p^{s-1}}$	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(2)	1	1	1	c^γ	b	$db^{p^{s-1}}$	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(3)	1	1	1	c^γ	a	$db^{p^{s-1}}$	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(4)	1	1	1	b	a	$db^{p^{s-1}}$		1 type,	
(5)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	dc	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	$p > 2$,
(6)	1	1	1	c^γ	c	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	$p = 2$,
(7)	1	1	1	c^γ	b	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(8)	1	1	1	b	a	dc		1 type (4).	

(1) Type ayant tous ses diviseurs abéliens.
(2) Type ayant tous ses diviseurs abéliens.
(3) Type ayant tous ses diviseurs abéliens.
(4) Type ayant tous ses diviseurs abéliens.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^{p^r}	b^{p^s}	c^p	d^p	e^p	$e^{-1}de$			

$r > s = 1.$

(1)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	$da^{p^{r-1}}$	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(2)	1	1	1	b	c	$da^{p^{r-1}}$		1 type,	
(3)	1	1	1	1	a	$da^{p^{r-1}}$		1 »	
(4)	1	1	1	c	a	$da^{p^{r-1}}$		1 type (1),	
(5)	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	dc	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	$p > 2$,
(6)	1	1	1	c^{γ}	c	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	$p = 2$,
(7)	1	1	1	c^{γ}	b	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(8)	1	1	1	c^{γ}	a	dc	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(9)	1	1	1	b	a	dc		1 type (2).	

FIGURE $(r\,s)$ (111). — Central : $\{a, b\}$.

	a^{p^r}	b^{p^s}	c^p	d^p	e^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$e^{-1}de$			

$r > s > 1.$

(1)	1	1	1	1	b^{ν}	c	$ca^{p^{r-1}}$	$db^{p^{s-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	
(2)	1	1	1	b	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$db^{p^{s-1}}$		1 type,	
(3)	1	1	b	1	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$db^{p^{s-1}}$		1 »	
(4)	1	1	1	b^{μ}	a	c	$ca^{p^{r-1}}$	$db^{p^{s-1}}$	$\mu = 0, 1$	2 types,	
(5)	1	1	b	1	a	c	$ca^{p^{r-1}}$	$db^{p^{s-1}}$		1 type,	
(6)	1	1	1	a	b^{ν}	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	
(7)	1	1	b	a	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$		1 type,	
(8)	1	1	b^{N}	a	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$		1 »	$p > 2$,
(9)	1	1	a	1	b^{ν}	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	
(10)	1	1	a	b^{μ}	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$	$\mu = 1, \ldots, p-1$	$p-1$ types.	

$r > s = 1.$

(1)	1	1	1	1	b^{ν}	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	$p > 2$,
(2)	1	1	1	b	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$		1 type,	$p > 2$,
(3)	1	1	1	1	1	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$		1 »	$p = 2$,
(4)	1	1	1	b	b^{ν}	c	$ca^{p^{r-1}}$	$cb^{p^{s-1}}$	$\nu = 0, 1$	2 types,	$p = 2$.

(1) Si $r = 2$, type de g_{p^6} dont tous les g_{p^4} sont abéliens.
(2) Type ayant tous ses diviseurs abéliens.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^{p^r}	b^{p^s}	c^p	d^p	e^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$e^{-1}de$			
(5)	1	1	b	1	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type,	$p=2$,
(6)	1	1	1	b^μ	a	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\mu=0, 1$	2 types,	
(7)	1	1	b	1	a	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type [1],	
(8)	1	1	1	a	b^ν	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\nu=0, 1$	2 types,	
(9)	1	1	b	1	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type,	
(10)	1	1	b^N	1	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 »	$p>1$,
(11)	1	1	a	1	b^ν	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\nu=0, 1$	2 types,	$p>2$,
(12)	1	1	a	b^μ	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\mu=1, \ldots, p-1$	$p-1$ types,	$p>2$,
(13)	1	1	a	1	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type,	$p=2$,
(14)	1	1	a	b	b^ν	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\nu=0, 1$	2 types,	$p=2$.

$$r=s>1.$$

$$p>2.$$

(1)	1	1	1	a^β	$b^{-\nu}$	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\beta=0, 1; \nu=0, 1$	4 types,
(2)	1	1	1	b^{-1}	a^γ	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\gamma=0, 1$	2 »
(3)	1	1	a^{i^m}	b	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$m=0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$\frac{p-1}{2}$ types,
(4)	1	1	a	ba	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type,
(5)	1	1	b	a^N	1	c	ca^{p^r-1}	eb^{p^s-1}		1 »
(6)	1	1	b	ba^β	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\left\{\begin{array}{l}\beta=\frac{i^{2n-1}-1}{4},\\ n=1, \ldots, \frac{p-1}{2}\end{array}\right\}$	$\frac{p-1}{2}$ types.

$$p=2.$$

(7)	1	1	b	ba	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type,
(8)	1	1	1	b	c^γ	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\gamma=0, 1$	2 types,
(9)	1	1	1	1	b^ν	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\nu=0, 1$	2 »
(10)	1	1	a	b	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type,
(11)	1	1	b	1	c^γ	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}	$\gamma=0, 1$	2 types,
(12)	1	1	ba	b	1	c	ca^{p^r-1}	cb^{p^s-1}		1 type.

---

[1] Type ayant tous ses $g_{p^{m-2}}$ abéliens.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

FIGURE (r 11) (111). — Central : $\{a, b, c\}$.

	a^{p^r}	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$		

$r > 1$. — *Types dont tous les g_{mp-2} sont abéliens.*

$p > 2$.

(1)	1	1	1	c	b^N	a	d	$da^{p^{r-1}}$	ec		1 type,
(2)	1	1	1	c	$cb^{\beta'}$	a	d	$da^{p^{r-1}}$	ec	$\beta' = \frac{1}{4}(i^{2n-1}-1)$, $n = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$\frac{p-1}{2}$ types.

$p = 2$.

(3)	1	1	1	c	cb	a	d	db	ec	

$r = 1$.

1. — *Le commutant est d'ordre p^3.*

$p > 2$.

(1)	1	1	1	1	1	$a^{\alpha''}$	da	db^{-1}	ec	$\alpha'' = 0, 1$	2 types,
(2)	1	1	1	1	1	c	da	db^{-1}	ec		1 type,
(3)	1	1	1	1	$a^{\alpha'}$	b^{-1}	da	db^{-1}	ec	$\alpha' = i^m$, $m = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$\frac{p+1}{2}$ types,
(4)	1	1	1	1	a	$b^{-1}a$	da	db^{-1}	ec		1 type,
(5)	1	1	1	1	b^{-1}	a^N	da	db^{-1}	ec		1 »
(6)	1	1	1	1	b^{-1}	$ba^{\alpha''}$	da	db^{-1}	ec	$\alpha'' = \frac{1}{4}(i^{2n-1}-1)$, $n = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$\frac{p-1}{2}$ types,
(7)	1	1	1	1	a	c	da	db^{-1}	ec		1 type,
(8)	1	1	1	b	c	a	da	db^{-1}	ec		1 »
(9)	1	1	1	b^{-1}	c	a	da	db^{-1}	ec		1 »
(10)	1	1	1	b^{-1}	cb	a	da	db^{-1}	ec		1 » $p \equiv 3 \bmod 4$,
(11)	1	1	1	b^{-1}	cb^N	a	da	db^{-1}	ec		1 » $p \equiv 1 \bmod 4$,
(12)	1	1	1	b	$b^{\beta'}a$	cb	da	db^{-1}	ec	$\beta' = 0, 1, \ldots, p-1$	p types.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^{p^r}	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
												$p > 2$.
								$p = 2$.				
(13)	1	1	1	c	cb	a	da	db^{-1}	ec		1 type,	
(14)	1	1	1	c	b	b	da	db^{-1}	ec		1 »	
(15)	1	1	1	c	cba	ca	da	db^{-1}	ec		1 »	
(16)	1	1	1	1	b	a	da	db^{-1}	ec		1 »	
(17)	1	1	1	1	cb	c	da	db^{-1}	ec		1 »	
(18)	1	1	1	1	cba	c	da	db^{-1}	ec		1 »	
(19)	1	1	1	1	cba	cb	da	db^{-1}	ec		1 »	
(20)	1	1	1	1	1	a	da	db^{-1}	ec		1 »	
(21)	1	1	1	1	1	1	da	da^{-1}	ec		1 type.	
								2. — *Le commutant est d'ordre p^2.*				
(22)	1	1	1	1	$a^{\alpha'}$	c	d	da	eb	$\alpha' = 0, 1$	2 types,	$p > 2$,
(23)	1	1	1	1	b^{-1}	c	d	da	eb		1 type,	$p > 2$,
(24)	1	1	1	a	$ba^{\alpha'}$	c	d	da	eb	$\alpha' = 0, 1$	2 types,	$p > 2$,
(25)	1	1	1	a^{α}	b	c	d	da	eb	$a = i^m, m = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$\frac{p-1}{2}$ types,	$p > 2$,
(26)	1	1	1	b	a^{N}	c	d	da	eb		1 type (1),	$p > 2$,
(27)	1	1	1	b	$b^{-1}a^{\alpha'}$	c	d	da	eb	$\alpha' = \frac{1}{4}(i^{2n-1} - 1), m = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$\frac{p-1}{2}$ types (2),	$p > 2$,
(28)	1	1	1	1	$b^{\beta'}$	c	d	da	eb	$\beta' = 0, 1$	2 types,	$p = 2$,
(29)	1	1	1	ba^{α}	b^{α}	c	d	da	eb	$\alpha = 0, 1$	2 »	
(30)	1	1	1	b	ba	c	d	da	cb		1 type (3),	$p = 2$,
(31)	1	1	1	1	c	$a^{\alpha''}$	d	da	eb	$\alpha'' = 0, 1$	2 types,	
(32)	1	1	1	a	c	$b^{\beta''}$	d	da	eb	$\beta'' = 0, 1$	2 »	$p > 2$,
(33)	1	1	1	b	c	$a^{\alpha''}$	d	da	eb	$\alpha'' = 0, 1$	2 »	$p \geqq 2$,
(34)	1	1	1	1	c	1	d	da	eb		1 type,	$p = 2$,
(35)	1	1	1	a	c	$b^{\beta''}b^{\alpha''}$	d	da	eb	$\alpha'', \beta'' = 0, 1$	4 types,	$p = 2$.

(1) Type ayant tous ses $g_{p^{m-2}}$ abéliens.
(2) Types ayant tous leurs $g_{p^{m-2}}$ abéliens.
(3) Type ayant tous ses g_{16} abéliens.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure $(rs)(22)$. — Central : $\{a, b\}$.

Types dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens.

	a^{p^r}	b^{p^s}	c^{p^2}	d^{p^2}	$d^{-1}cd$		
(1)	1	1	b	a	$ca^{p^{r-2}}$	1 type,	$r-1 \geqq s$,
(2)	1	1	b	a	$cb^{p^{s-1}}a^{p^{r-2}}$	1 »	$r-1 > s$,
(3)	1	1	b	a	$ca^{p^{s-2}}$	1 type,	$r \geqq s$.

Figure $(111)(1)(11)$. — Central $\{a, b, c\}$.

a^p b^p c^p d^p e^p f^p $e^{-1}de$ $f^{-1}df$ $f^{-1}ef$

$p > 2$.

I. 1. — *Le p. g. c. d. du commutant et du central est d'ordre p.*

(1)	1	1	1	1	1	$b^{\beta'}$	d	db	ed	$\beta' = 0, 1$	2 types,	$p > 3$,
(2)	1	1	1	1	1	c	d	db	ed		1 type,	$p > 3$,
(3)	1	1	1	1	b^{β}	1	d	db	ed	$\beta = 1, N$	2 types,	$p > 3$,
(4)	1	1	1	1	1	$c^{\gamma'}$	d	db	cd	$\gamma' = 0, 1$	2 »	$p = 3$,
(5)	1	1	1	1	b	1	d	db	ed		1 type,	$p = 3$,
(6)	1	1	1	1	b^{-1}	$b^{\beta'}$	d	db	ed	$\beta' = 0, 1$	2 types,	$p = 3$,
(7)	1	1	1	1	b^{β}	a	d	db	ed	$\beta = 1, -1$	2 »	$p = 3$,
(8)	1	1	1	1	c	1	d	db	ed		1 type,	
(9)	1	1	1	1	c	b	d	db	ed		1 »	$p > 3$,
(10)	1	1	1	1	c	a	d	db	ed		1 »	

2. — *Le p. g. c. d. du commutant et du central est d'ordre p^2.*

(11)	1	1	1	1	a^{α}	c	da	db	ed	$\alpha = 0, 1$	2 types,	
(12)	1	1	1	1	b^{β}	c	da	db	ed	$\beta = 1, N$	2 »	

$p = 2$.

II. (1)	1	1	1	c	b	b	dc	dc	ed		1 type,	
(2)	1	1	1	c	1	$c^{\gamma'}$	dc	dc	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(3)	1	1	1	c	c	c	dc	dc	ed		1 type,	
(4)	1	1	1	c	1	b	dc	dc	ed		1 »	
(5)	1	1	1	c	b	1	dc	dc	ed		1 »	
(6)	1	1	1	c	b	$c^{\gamma'}b$	dc	dc	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
III. (1)	1	1	1	c	db^{β}	$dc^{\gamma'}$	dc	dc	ed	$\beta, \gamma' = 0, 1$	4 types,	
(2)	1	1	1	c	da^{α}	db	dc	dc	ed	$\alpha = 0, 1$	2 types.	

Figure $(11)(1111)$. — Central : $\{a, b\}$.

a^p b^p c^p d^p c^p f^p $d^{-1}cd$ $e^{-1}ce$ $f^{-1}cf$ $e^{-1}de$ $f^{-1}df$ $f^{-1}ef$

1. — *Le commutant est d'ordre p.*

$p > 2$.

(1)	1	1	ba	b	1	1	ca	c	c	d	d	ea	1 type,
(2)	1	1	ba	1	1	b	ca	c	c	d	d	ea	1 »

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$		
								$p=2$.						
(3)	1	1	b	1	1	1	ca	c	c	d	d	ea		1 type,
(4)	1	1	a	a	1	b	ca	c	c	d	d	ea		1 type,
(5)	1	1	1	b	b	b	ca	c	c	d	d	ea		1 »
(6)	1	1	b	1	1	1	ca	c	c	d	d	ea		1 type,

2. — *Le commutant est le central.*

A. Un g_{p^5} de G est de figure (111)(11).

								$p>2$.						
(7)	1	1	b	a	b	a	c	c	cb	da	d	e		1 type,
(8)	1	1	b	1	$ba^{\alpha''}$	a	c	c	cb	da	d	e	$\alpha''=0, 1$	2 types,
(9)	1	1	1	1	ba	$b^{\beta'''}a$	c	c	cb	da	d	e	$\beta'''=1,\ldots,p-1$	$p-1$ types,
(10)	1	1	1	1	b	$b^{\beta'''}a$	c	c	cb	da	d	e	$\beta'''=0, 1$	2 types,
(11)	1	1	1	1	$ba^{\alpha''}$	$b^{\beta'''}$	c	c	cb	da	d	e	$\alpha''', \beta'''=0, 1$	4 »
(12)	1	1	1	a	b	$b^{\beta'''}$	c	c	cb	da	d	e	$\beta'''=0, 1$	2 »
(13)	1	1	1	1	a	b	c	c	cb	da	d	e		1 type,
(14)	1	1	1	1	1	b	c	c	cb	da	d	e		1 »
(15)	1	1	b	a	a	b	c	c	cb	da	d	e		1 type,
								$p=2$.						
(16)	1	1	b	a	ba	ba	c	c	cb	da	d	e		1 type,
(17)	1	1	b	a	ba	b	c	c	cb	da	d	e		1 »
(18)	1	1	b	a	a	b	c	c	cb	da	d	e		1 »
(19)	1	1	b	1	1	$ba^{\alpha'''}$	c	c	cb	da	d	e	$\alpha'''=0, 1$	2 types,
(20)	1	1	b	$b^{\beta'}$	b	$ba^{\alpha'''}$	c	c	cb	da	d	e	$\beta', \alpha'''=0, 1$	4 »
(21)	1	1	a	b	b	a	c	c	cb	da	d	e		1 type,
(22)	1	1	a^{α}	1	$b^{\beta''}$	a	c	c	cb	da	d	e	$\alpha, \beta''=0, 1$	4 types,
(23)	1	1	1	b	b	a	c	c	cb	da	d	e		1 type,
(24)	1	1	1	1	1	1	c	c	cb	da	d	e		1 »
(25)	1	1	1	$b^{\beta'}$	b	1	c	c	ab	da	d	e	$\beta'=0, 1$	2 types,

B. Aucun g_{p^5} de G n'est de figure (111)(11).

								$p>2$.						
(26)	1	1	1	1	1	$b^{\beta'''}$	c	ca	cb	db^N	da	e	$\beta'''=0, 1$	2 types,
(27)	1	1	a	$b^{\beta'}$	1	1	c	ca	cb	db^i	da	e	$\left\{\begin{matrix}\beta'=0, i, i^2, \ldots \\ \ldots, i^{\frac{p+1}{2}}\end{matrix}\right\}$	$\frac{p+3}{2}$ types,
(28)	1	1	a	1	1	b	c	ca	cb	db^N	da	e		1 type,
								$p=2$.						
(29)	1	1	b	a	b	a	c	ca	cb	db	dba	e		1 type,
(30)	1	1	1	b	1	b	c	ca	cb	db	dba	e		1 »
(31)	1	1	1	a	1	a	c	ca	cb	db	dba	e		1 »
(32)	1	1	1	1	1	$b^{\beta'''}$	c	ca	ca	db	dba	e	$\beta'''=0, 1$	2 types.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

FIGURE (11)(11)(11). — Central : $\{a, b\}$.

$p > 2$.

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
I. (1)	1	1	1	1	1	$b^{\delta'}$	c	c	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 types,	$p>3$,
(2)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	c	ca	d	db	ed	$\delta = 1, \mathrm{N}$	2 »	$p>3$,
(3)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	c	ca	d	db	ed	$\delta = 1$	2 »	$p=3$,
(4)	1	1	1	1	b^{-1}	$b^{\delta'}$	c	c	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(5)	1	1	1	1	b^{δ}	a	c	c	ca	d	db	ed	$\delta = 0, 1, \mathrm{N}$	3 »	
(6)	1	1	1	1	a	1	c	c	ca	d	db	ed		1 type,	
(7)	1	1	1	1	a	b	c	c	ca	d	db	ed		1 »	$p>3$,
(8)	1	1	b	1	1	$a^{\gamma'}$	c	c	ca	d	db	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(9)	1	1	b	1	a	1	c	c	ca	d	db	ed		1 type,	
(10)	1	1	b	1	a^{γ}	1	c	c	ca	d	db	ed	$\gamma = i, i^2$	2 types,	$p \equiv 1 \bmod 3$,
(11)	1	1	a	1	1	$b^{\delta'}$	c	c	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p>3$,
(12)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	c	ca	d	db	ed	$\delta = 1, \ldots, p-1$	$p-1$ types,	$p>3$,
(13)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	c	ca	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 types,	$p=2$,
(14)	1	1	a	1	b^{-1}	$b^{\delta'}$	c	c	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(15)	1	1	1	1	1	$b^{\delta'}$	c	cb	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p>3$,
(16)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 1, \mathrm{N}$	2 »	$p>3$,
(17)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(18)	1	1	1	1	b^{-1}	$b^{\delta'}$	c	cb	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(19)	1	1	1	1	b^{δ}	a	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 0, 1, \mathrm{N}$	3 »	
(20)	1	1	1	1	a	1	c	cb	c	d	db	ed		1 type	
(21)	1	1	1	1	a	b	c	cb	c	d	db	ed		1 »	$p>3$,
(22)	1	1	b	1	1	$a^{\gamma'}$	c	cb	c	d	db	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	
(23)	1	1	b	1	a	1	c	cb	c	d	db	ed		1 type,	
(24)	1	1	a	1	1	$b^{\delta'}$	c	cb	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 types,	$p>3$,
(25)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 1, \mathrm{N}$	2 »	$p>3$,
(26)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(27)	1	1	a	1	b^{-1}	$b^{\delta'}$	c	cb	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(28)	1	1	1	1	1	$b^{\delta'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p>3$,
(29)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(30)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta = 1, \mathrm{N}$	2 »	$p>3$,
(31)	1	1	1	1	b^{-1}	$b^{\delta'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(32)	1	1	1	1	b^{δ}	$a^{\gamma'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta = 0, 1, \ldots, p-1; \\ \gamma' = 1, \mathrm{N}\end{array}\right\}$	$2p$ types.	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
(33)	1	1	1	1	a	1	c	cb	ca	d	db	ed		1 type,	
(34)	1	1	1	1	a	$b^{\delta'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta' = 1, i$	2 types,	$p>3$,
(35)	1	1	1	1	a	$b^{\delta'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta' = i^2, i^3$	2 »	$p\equiv 1 \bmod 4$,
(36)	1	1	b	1	1	$a^{\gamma'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 »	
(37)	1	1	b	1	a	1	c	cb	ca	d	db	ed		1 type,	
(38)	1	1	b	1	a^{γ}	1	c	cb	ca	d	db	ed	$\gamma = i, i^2$	2 types,	$p\equiv 1 \bmod 3$,
(39)	1	1	a	1	1	$b^{\delta'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 types,	$p>3$,
(40)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta = 1, \ldots, p-1$	$p-1$ types,	$p>3$,
(41)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 types,	$p=3$,
(42)	1	1	a	1	b^{-1}	$b^{\delta'}$	c	cb	ca	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	$p=3$,
(43)	1	1	1	1	b^{δ}	$b^{\delta'}a^{\gamma'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta = 0, 1, \mathbf{N};\\ \gamma', \delta' = 0, 1\end{array}\right\}$	12 »	
(44)	1	1	1	1	$b^{\delta}a$	$b^{\delta'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\delta = 0, 1, \mathbf{N}; \delta' = 0, 1$	6 »	
(45)	1	1	1	1	a	$b^{\delta'}a$	c	ca	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1, \mathbf{N}$	3 »	
(46)	1	1	1	1	$b^{\delta}a$	$b^{\delta'}a$	c	ca	c	d	db	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta = 1, \mathbf{N};\\ \delta' = 0, 1, \ldots, p-1\end{array}\right\}$	$2p$ types,	
(47)	1	1	b	1	a^{γ}	$a^{\gamma'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\gamma, \gamma' = 0, 1$	4 types,	
(48)	1	1	b	1	a	$a^{\gamma'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\gamma' = i, i^2$	2 »	$p\equiv 1 \bmod 3$,
(49)	1	1	a	1	1	$b^{\delta'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	
(50)	1	1	a	1	b^{δ}	$b^{\delta'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta = 1, \mathbf{N};\\ \delta' = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\end{array}\right\}$	$p+1$ types,	
(51)	1	1	ba	1	1	$b^{\delta'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\delta' = 0, 1$	2 types,	
(52)	1	1	ba	1	b^{δ}	$b^{\delta'}$	c	ca	c	d	db	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta = 1, \mathbf{N};\\ \delta' = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\end{array}\right\}$	$p+1$ types,	
(53)	1	1	1	1	1	1	c	c	cb	da	db	ed		1 type,	
(54)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	c	cb	da	db	ed	$\delta = 1, \mathbf{N}$	2 types,	
(55)	1	1	1	1	1	$ba^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\gamma' = 0, 1, \mathbf{N}$	3 »	
(56)	1	1	1	1	b^{δ}	b	c	c	cb	da	db	ed	$\delta = 1, \mathbf{N}$	2 »	
(57)	1	1	1	1	b^{δ}	a	c	c	cb	da	db	ed	$\delta = 1, \mathbf{N}$	2 »	
(58)	1	1	1	1	$b^{\mathbf{N}}$	$b^{\mathbf{N}}$	c	c	cb	da	db	ed		1 type,	$p\equiv 1 \bmod 4$,
(59)	1	1	1	1	b	$a^{\mathbf{N}}$	c	c	cb	da	db	ed		1 »	$p\equiv 3 \bmod 4$,
(60)	1	1	1	1	b^{δ}	$ba^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta = 1, \mathbf{N};\\ \gamma' = 1, \ldots, p-1\end{array}\right\}$	$2(p-1)$ types,	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
(61)	1	1	1	1	a	$b^{\delta'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta' = 1, i, \ldots, i^{\frac{p-1}{2}}$	$\frac{p-1}{2}$ types,	
(62)	1	1	1	1	ba	$b^{\delta'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta' = 1, \ldots, p-1$	$p-1$ types,	
(63)	1	1	1	1	$b^{\delta}a$	$b^{\delta'}a^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta = 1, \mathrm{N}$; $\gamma' = 1, \ldots, p-1$; $\delta' = i, \ldots, i^{\frac{p-3}{2}}$	$(p-1)(p-3)$ types.	
(64)	1	1	1	1	ba	$b^{\delta'}a^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\gamma' = 1, \ldots, p-1$; $\delta' = 1, -1$	$2(p-1)$ »	
(65)	1	1	1	1	$b^{\mathrm{N}}a$	$b^{\delta'}a^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\gamma' = i, i^3, \ldots, i^{p-2}$; $\delta' = 1, -1$	$p-1$ types,	$p \equiv 1 \bmod 4$,
(66)	1	1	1	1	$b^{\mathrm{N}}a$	$b^{\delta'}a^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\gamma' = 1, i^2, \ldots, i^{p-3}$; $\delta' = 1, -1$	$p-1$ types,	$p \equiv 3 \bmod 4$,
(67)	1	1	b	1	a^{γ}	$a^{\gamma'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\gamma = 0, 1$; $\gamma' = 0, 1, \ldots, p-1$	$2p$ types,	
(68)	1	1	ba	1	1	$b^{\delta'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta' = 0, 1, \mathrm{N}$	3 types,	
(69)	1	1	ba	1	b	$b^{\delta'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta' = 1, i^2$	2 —	$p \equiv 1 \bmod 4$,
(70)	1	1	ba	1	b^{N}	$b^{\delta'}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta' = i, i^3$	2 —	$p \equiv 1 \bmod 4$,
(71)	1	1	ba	1	b	b	c	c	cb	da	db	ed		1 type,	$p \equiv 3 \bmod 4$,
(72)	1	1	ba	1	b	$b^{\prime}$	c	c	cb	da	db	ed	$\delta' = i, i^3$	2 types,	$p \equiv 1 \bmod 4$,
(73)	1	1	ba	1	b	b^{N}	c	c	cb	da	db	ed		1 type,	$p \equiv 3 \bmod 4$,
(74)	1	1	ba	1	b^{N}	b	c	c	cb	da	db	ed		1 —	$p \equiv 3 \bmod 4$,
(75)	1	1	1	1	b^{δ}	1	c	cb	c	da	db	ed	$\delta = 0, 1, \mathrm{N}$	3 types,	
(76)	1	1	1	1	a	1	c	cb	c	da	db	ed		1 type,	$p > 3$,
(77)	1	1	1	1	a^{γ}	b	c	cb	c	da	db	ed	$\gamma = 0, 2, \ldots, p-1$	$p-1$ types,	$p > 3$,
(78)	1	1	1	1	$b^{\delta}a$	b	c	cb	c	da	db	ed	$\delta = 0, 1, \mathrm{N}$	3 types,	$p > 3$,
(79)	1	1	1	1	b^{δ}	b	c	cb	c	da	db	ed	$\delta = 0, 1, -1$	3 »	$p = 3$,
(80)	1	1	1	1	$b^{\delta}a^{\gamma}$	$a^{\gamma'}$	c	cb	c	da	db	ed	$\gamma = 0, 1$; $\delta = 0, 1, \mathrm{N}$; $\gamma' = 1, \mathrm{N}$	12 types,	
(81)	1	1	b	1	a^{γ}	1	c	cb	c	da	db	ed	$\gamma = 0, 1$	2 »	$p > 3$,
(82)	1	1	b	1	1	$a^{\gamma'}$	c	cb	c	da	db	ed	$\gamma' = 1, \ldots, p-1$	$p-1$ types,	$p > 3$,
(83)	1	1	b	1	1	$a^{\gamma'}$	c	cb	c	da	db	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 types,	$p = 3$,
(84)	1	1	b	1	a^{γ}	a^{-1}	c	cb	c	da	db	ed	$\gamma = 0, 1$	2 »	$p = 3$,
(85)	1	1	a	1	b^{δ}	1	c	cb	c	da	db	ed	$\delta = 0, 1, i$	3 »	
(86)	1	1	a	1	1	b	c	cb	c	da	db	ed		1 type,	
(87)	1	1	a	1	1	$b^{\delta'}$	c	cb	c	da	db	ed	$\delta' \equiv i, i^2$	2 types,	$p \equiv 1 \bmod 3$,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
(88)	1	1	a	1	b^δ	1	c	cb	c	da	db	ed	$\delta = i^2, i^3$	2 »	$p \equiv 1 \bmod 4$,
(1) (89)	1	1	1	1	$b^\delta a^\gamma$	$b^{\delta'} a^{\gamma'}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\varphi = 0, 1, \ldots, p-1$; $\psi = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$; $\varphi' = 1$; $\psi'^2 - N$ non carré	$\frac{(p+1)^2}{2}$ types,	$p > 3$,
(90)	1	1	1	1	$b^\delta a^\gamma$	$b^{\delta'} a^{\gamma'}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\varphi' = 0, \psi' = 1$; $\varphi = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$; $\psi = 0, 1, \ldots, p-1$	$\frac{(p+1)^2}{2}$ types,	$p > 3$,
(91)	1	1	1	1	$b^{2^{-1}}$	$a^{(2N)^{-1}}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\psi = 0, 1$	2 types,	$p > 3$,
(92)	1	1	1	1	$a^{2^{-1}}$	$b^{2^{-1}}$	cb^N	ca	da	db	ed			1 type,	$p > 3$,
(93)	1	1	1	1	$b^\delta a^{1-\gamma}$	$b^\gamma a^{\delta-1}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\gamma = 0, -1$; $\delta = 0, 1, -1$	6 types,	$p = 3$,
(94)	1	1	1	1	$b^{\psi'-1} a^{\varphi'}$	$b^{\varphi'} a^{\psi'-1}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\varphi' = 0, 1, -1$; $\psi' = 0, 1$	6 »	$p = 3$,
(95)	1	1	1	1	$b^{\psi'} a^{-\varphi'}$	$b^{\varphi'} a^{\psi'}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\varphi', \psi' = 0, 1$	4 »	$p = 3$,
(96)	1	1	b	1	a^γ	$a^{\gamma'}$	c	cb^N	ca	da	db	ed	$\gamma = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$; $\gamma' = 0, 1, \ldots, p-1$	$\frac{(p+1)^2}{2}$ types,	
II. (1)	1	1	1	b^{-1}	da^γ	c	c	cb	c	d	db^{-1}	ed	$\gamma = 0, 1$	2 types,	
(2)	1	1	a	b^{-1}	d	c	c	cb	c	d	db^{-1}	ed		1 type.	
										$p = 2$.					
III. (1)	1	1	1	b	a^γ	$a^{\gamma'}$	c	cb^σ	cb	db	d	ed	$\sigma, \gamma, \gamma' = 0, 1$	8 types,	
(2)	1	1	1	b	a^γ	1	c	cb^σ	ca	db	d	ed	$\sigma, \gamma = 0, 1$	4 »	
(3)	1	1	1	b	1	$a^{\gamma'}$	c	ca	cb	db	d	ed	$\gamma' = 0, 1$	2 »	
(4)	1	1	1	b	1	1	c	ca	$cb^{\sigma'} a$	db	d	ed	$\sigma' = 0, 1$	2 »	
(5)	1	1	a	b	1	1	c	c	cb	db	d	ed		1 type,	
(6)	1	1	a	b	1	$a^{\gamma'}$	c	c	$cb^\sigma a$	db	d	ed	$\sigma', \gamma' = 0, 1$	4 types,	
(7)	1	1	a	b	a^γ	1	c	ca	cb	db	d	ed	$\gamma = 0, 1$	2 »	
(8)	1	1	a	b	a^γ	$a^{\gamma'}$	c	ca	ca	db	d	ed	$\gamma, \gamma' = 0, 1$	4 »	
(9)	1	1	a	b	a^γ	1	c	cba	$cb^{\sigma'}$	db	d	ed	$\gamma, \sigma' = 0, 1$	4 »	
(10)	1	1	a	b	a^γ	$a^{\gamma'}$	c	cba	ca	db	d	ed	$\gamma, \gamma' = 0, 1$	4 »	

(1) Pour les types (89) et (90) on a posé $2\gamma = \varphi + \varphi'$, $2\delta = \psi - \psi'$, $2N\gamma' = \psi + \psi'$, $2\delta' = \varphi - \varphi'$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$		
IV.	(1)	1	1	1	1	a^γ	c	c	cb	c	d	db	ed	$\gamma = 0, 1$	2 types,
	(2)	1	1	b	1	b^δ	c	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 »
	(3)	1	1	b	1	a	c	c	cb	c	d	db	ed		1 type,
	(4)	1	1	a	1	b^δ	c	c	cb	c	d	db	ed	$\delta = 0, 1$	2 types,
	(5)	1	1	1	a	a^γ	c	c	cb	c	da	dba	ed	$\gamma = 0, 1$	2 »
	(6)	1	1	b	a	$b^\delta a^\gamma$	c	c	cb	c	da	dba	ed	$\gamma, \delta = 0, 1$	4 »
	(7)	1	1	$b^\beta a$	a	b^δ	c	c	cb	c	da	dba	ed	$\beta, \delta = 0, 1$	4 »

Figure (11)(1)(1)(11). — Central : $\{a, b\}$.

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
									$p > 3$.						
(1)	1	1	1	1	1	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	d	dc	ed	$\sigma' = 0, 1$	2 types,	
(2)	1	1	1	1	1	a	c	c	cb	d	dc	ed		1 type,	
(3)	1	1	1	1	b	$a^{\rho'}$	c	c	cb	d	dc	ed	$\rho' = 0, 1$	2 types,	
(4)	1	1	1	1	b^σ	$a^{\rho'}$	c	c	cb	d	dc	ed	$\sigma = i, i^2$; $\rho' = 0, 1$	4 »	$p \equiv 1 \bmod 3$,
(5)	1	1	1	1	a	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	d	dc	ed	$\sigma' = 0, 1$	2 »	
(6)	1	1	1	1	1	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, \mathrm{N}$; $\sigma' = 0, 1$	4 »	
(7)	1	1	1	1	1	a	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, \mathrm{N}$	2 »	
(8)	1	1	1	1	b^σ	$a^{\rho'}$	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, \mathrm{N}; \sigma = 1, \ldots, p-1; \rho' = 0, 1$	4 $(p-1)$ types,	
(9)	1	1	1	1	a	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, \mathrm{N}$; $\sigma' = 0, 1$	4 types,	
(10)	1	1	1	1	1	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	da	dc	ed	$\sigma' = 0, 1$	2 »	
(11)	1	1	1	1	1	$b^{\sigma'} a$	c	c	cb	da	dc	ed	$\sigma' = 0, 1, \mathrm{N}$	3 »	
(12)	1	1	1	1	b	$a^{\rho'}$	c	c	cb	da	dc	ed	$\rho' = 0, 1$	2 »	
(13)	1	1	1	1	b^σ	$a^{\rho'}$	c	c	cb	da	dc	ed	$\sigma = i, i^2$; $\rho' = 0, 1$	4 »	$p \equiv 1 \bmod 3$,
(14)	1	1	1	1	$b^\sigma a$	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	da	dc	ed	$\sigma = 0, \ldots, p-1$; $\sigma' = 0, 1$	$2p$ types.	
									$p = 3$.						
(15)	1	1	1	b^{-1}	a^ρ	$a^{\rho'}$	c	c	cb	d	dc	ed	$\rho, \rho' = 0, 1$	4 types,	
(16)	1	1	1	b^{-1}	1	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, -1$; $\sigma' = 0, 1$	4 »	
(17)	1	1	1	b^{-1}	1	a	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, -1$	2 »	
(18)	1	1	1	b^{-1}	a	$b^{\sigma'}$	c	c	cb	db^ν	dc	ed	$\nu = 1, -1''$ $\sigma' = 0, 1$	4 »	
									$p = 2$.						
(19)	1	1	b	cb	d	$a^{\rho'}$	c	c	cb	d	dc	ed	$\rho' = 0, 1$	2 types,	
(20)	1	1	b	cb	da	1	c	c	cb	d	dc	ed		1 type.	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure (1) (111) (11). — Central : $\{a\}$.

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}ef$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
											$p>2$.								
(1)	1	1	1	1	1	1	b	b	b	ba	ca	c	c	d	d	eb		1 type,	
(2)	1	1	1	1	1	a	b	b	b	ba	ca	c	c	d	d	eb		1 »	$p>3$,
(3)	1	1	1	1	a^γ	1	b	b	b	ba	ca	c	c	d	d	eb	$\gamma=1$, N	2 types,	$p>3$,
(4)	1	1	1	1	a	1	b	b	b	ba	ea	c	c	d	d	eb		1 type,	$p=3$,
(5)	1	1	1	1	a^{-1}	a^δ	b	b	b	ba	ca	c	c	d	d	eb	$\delta=0, 1$	2 types,	$p=3$,
(6)	1	1	1	a	a^γ	1	b	b	b	ba	ca	c	c	d	d	eb	$\gamma=0, 1$, N	3 »	
											$p=2$.								
(7)	1	a	1	1	1	a^δ	b	b	ba	ba	ca	c	c	d	d	eb	$\delta=0, 1$	2 »	
(8)	1	a	1	1	a	a	b	b	ba	ba	ca	c	c	d	d	eb		1 type.	

Figure (1) (11) (111). — Central : $\{a\}$.

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
												$p>2$.								
I.	(1)	1	1	1	1	$a^{\alpha'}$	1	b	ba	ba	b	c	c	ca^N	db	d	ec	$\alpha'=0, 1$	2 types,	$p>3$,
	(2)	1	1	1	1	$a^{\alpha'}$	1	b	ba	ba	b	c	c	ca^N	db	d	ec	$\alpha'=1, -1$	2 »	$p=3$,
	(3)	1	1	1	1	$a^{\alpha'}$	a	b	ba	ba	b	c	c	ca^N	db	d	ec	$\alpha'=0, 1$, N	3 »	
	(4)	1	1	1	1	1	1	b	b	ba	ba^{-1}	ca	c	c	db	d	ec		1 type,	
	(5)	1	1	1	1	a	1	b	b	ba	ba^{-1}	ca	c	c	db	d	ec		1 »	$p>3$,
	(6)	1	1	1	1	1	a	b	b	ba	ba^{-1}	ca	c	c	db	d	ec		1 »	
	(7)	1	1	1	1	a^{-1}	a	b	b	ba	ba^{-1}	ca	c	c	db	d	ec		1 »	$p>3$,
	(8)	1	1	1	a	1	a	b	b	ba	ba^{-1}	ca	c	c	db	d	ec		1 »	
	(9)	1	1	1	a	$a^{\alpha'}$	a	b	b	ba	ba^{-1}	ca	c	c	db	d	ec	$\alpha'=-1$, N -1	2 types,	$p>3$,
	(10)	1	1	1	1	1	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ec		1 type,	
	(11)	1	1	1	1	a	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ec		1 »	$p>3$,
	(12)	1	1	1	1	1	a	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ec		1 »	
	(13)	1	1	1	a	1	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ec		1 »	
	(14)	1	1	1	a	a^N	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ec		1 »	
II.	(1)	1	1	1	a^α	c	b	b	b	ba	b	c	c	ca^{-1}	db	d	ec	$\alpha=0, 1$, N	3 types.	
												$p=2$.								
III.	(1)	1	1	1	1	$a^{\alpha'}$	1	b	b	ba	ba	ca	c	c	db	d	ec	$\alpha'=0, 1$	2 types,	
	(2)	1	a	1	1	$a^{\alpha'}$	1	b	ba	ba	ba	ca	c	c	db	d	ec	$\alpha'=0, 1$	2 »	
IV.	(1)	1	a	a	b	1	1	b	b	ba	b	c	ca	ca	db	d	ec		1 type.	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

Figure (1) (11) (1) (11). — Central : $\{a\}$.

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
												$p > 3$.								
I.	(1)	1	1	a	1	1	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	$da^{\psi'}$	ed	$\psi' = 0, 1$	2 types,	
	(2)	1	1	1	1	a^{δ}	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ed	$\delta = 0, 1$	2 »	
	(3)	1	1	1	1	a^{δ}	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	da	ed	$\delta = 0, 1, i$	3 »	
	(4)	1	1	1	1	a^{δ}	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	da	ed	$\delta = i^2, i^3$	2 »	$p \equiv 1 \bmod 4$,
	(5)	1	1	1	1	1	a	b	b	ba	b	c	c	ca	db	$da^{\psi'}$	ed	$\delta', \psi' = 0, 1$	4 »	
	(6)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	c	c	ca	db	$da^{\psi'}$	ed	$\delta' = i, i^2$; $\psi' = 0, 1$	4 »	$p \equiv 1 \bmod 3$,
II.	(1)	1	1	a	$a^{-\alpha'}$	c	$b^{\alpha'}$	b	b	ba	b	c	c	$ca^{-\alpha'}$	db	$da^{\psi'}$	ed	$\alpha' = 1, N$; $\psi' = 0, 1, \ldots, p-1$	$2p$ types,	
	(2)	1	1	1	$a^{-\alpha'}$	c	$b^{\alpha'}$	b	b	ba	b	c	c	$ca^{-\alpha'}$	db	d	ed	$\alpha' = 1, N$	2 types,	
	(3)	1	1	1	$a^{-\alpha'}$	c	$b^{\alpha'}a^{\delta'}$	b	b	ba	b	c	c	$ca^{-\alpha'}$	db	da	ed	$\alpha' = 1, N$; $\alpha' + \delta' = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$p+1$ types,	
III.	(1)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba	ba	c	ca	ca^{1-N}	db	dc	ed	$\delta' = 0, 1$	2 types,	
	(2)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba	ba	c	ca	ca^{1-N}	db	dc	ed	$\delta' = i, i^2$	2 »	$p \equiv 1 \bmod 3$,
	(3)	1	1	1	1	a	a	b	b	b	ba	c	ca	c	db	dc	ed		1 type,	
	(4)	1	1	1	1	a	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	ca	c	db	dc	ed	$\delta' = i, i^2$	2 types,	$p \equiv 1 \bmod 3$,
	(5)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	ca	c	db	dc	ed	$\delta' = 0, 1$,	2 »	
IV.	(1)	1	1	1	1	a^{δ}	c	b	b	b	ba	c	ca	c	db	dc	ed	$\delta = 0, 1$	2 »	
	(2)	1	1	1	1	a^{δ}	c	b	b	ba^{τ}	ba	c	ca	c	db	dc	ed	$\tau = 1, N$; $\delta = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$p+1$ types,	
V.	(1)	1	1	1	a^{-N}	ca^{δ}	$b^N a^{\delta'}$	b	b	ba	b	c	c	ca^{-N}	db	dc	ed	$(\delta' + N)^2 - N(\delta - N)^2 = 0, 1, \ldots, p-1$	p type,	
VI.	(1)	1	1	1	a	ba^{δ}	c	b	b	b	ba	c	ca	c	db	dc	ed	$\delta = 0, -\frac{1}{2}$	2 types,	
VII.	(1)	1	1	1	a	ba^{δ}	$cb^{\alpha'}$	b	b	b	ba	c	ca	$ca^{-\alpha'}$	db	dc	ed	$\alpha' = 1, N$; $\delta + \frac{1}{2} = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$	$p+1$ types,	

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-}ef$		
											$p=3.$								
VIII.	(1)	1	a^{-1}	$a^{\beta'}$	a^{-1}	1	b	b	b	ba	b	c	c	ca	db	d	ed	$\beta'=0, 1$	2 types,
	(2)	1	a^{-1}	$a^{\beta'}$	a^{-1}	1	b	b	b	ba	b	c	c	ca	db	da	ed	$\beta'=0, 1, -1$	3 »
IX.	(1)	1	1	1	1	c	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	c	c	ca	db	$da^{\psi'}$	ed	$\psi', \delta'=0, 1$	4 »
	(2)	1	1	a	1	c	1	b	b	ba	b	c	c	ca	db	$da^{\psi'}$	ed	$\psi'=0, 1, -1$	3 »
X.	(1)	1	a	1	a	c	$b^{-1}a^{\delta'}$	b	b	ba	b	c	c	ca^{-1}	db	d	ed	$\delta'=0, 1$	2 »
	(2)	1	a	a	a	c	b^{-1}	b	b	ba	b	c	c	ca^{-1}	db	d	ed		1 type,
	(3)	1	a	$a^{\beta'}$	a	c	b^{-1}	b	b	ba	b	c	c	ca^{-1}	db	da	ed	$\beta'=0, 1, -1$	3 types,
XI.	(1)	1	a	$a^{\beta'}$	a	b	c	b	b	b	ba	c	ca^{-1}	c	db	d	ed	$\beta'=0, 1$	2 »
XII.	(1)	1	1	1	1	c	b^{-1}	b	b	ba	b	c	c	ca	db	dc	ed		1 type,
XIII.	(1)	1	1	1	1	a	a	b	b	ba^{τ}	b	c	c	ca	db	dc	ed	$\tau=1, -1$	2 types,
	(2)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba^{τ}	b	c	c	ca	db	dc	ed	$\tau=1, -1; \delta'=0, 1$	4 »
	(3)	1	1	1	1	a	$a^{\delta'}$	b	b	ba^{τ}	ba	c	c	ca	db	dc	ed	$\tau=0, 1, -1; \delta'=1, -1$	6 »
	(4)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba^{τ}	ba	c	c	ca	db	dc	ed	$\tau=0, 1, -1; \delta'=0, 1$	6 »
XIV.	(1)	1	1	1	a^{-1}	a^{δ}	$b^{-1}a^{\delta'}$	b	b	ba	b	c	c	ca^{-1}	db	dc	ed	$\delta=0, 1; \delta'=0, -1$	4 »
											$p=2.$								
XV.	(1)	1	a	1	ba	1	1	b	b	ba	ba	c	c	ca	db	db	ed		1 type,
XVI.	(1)	1	a	$a^{\beta'}$	ba	1	c	b	b	ba	ba	c	ca	c	db	dba	ed	$\beta'=0, 1$	2 types,
XVII.	(1)	1	a	1	b	c	cb	b	b	ba	ba	c	c	ca	db	db	ed		1 type.

Figure (1) (1) (11) (11). — Central : $\{a\}$.

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
											$p>2.$									
I.	(1)	1	1	a^{α}	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	ca	cb	c	d	db	ed	$\alpha, \delta'=0, 1$	4 types,	$p>3$,
	(2)	1	1	a^{α}	1	a	1	b	b	b	ba	ca	cb	c	d	db	ed	$\alpha=0, 1$	2 »	$p>3$,
	(3)	1	1	a^{α}	1	a^{δ}	1	b	b	b	ba	ca	cb	c	d	db	ed	$\alpha=0,1; \delta=i, i^2$	4 »	$p\equiv 1 \bmod 3$,
	(4)	1	1	a^{α}	1	a^{δ}	1	b	b	b	ba	ca	cb	c	d	db	ed	$\alpha, \delta=0, 1$	4 »	$p=3$,
II.	(1)	1	1	1	a^{-1}	$b^{-1}a^{\delta}$	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	ca	cb	c	d	db	ed	$\delta, \delta'=0, 1$	4 »	$p=3$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

	a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$d^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$		
										$p=2.$								
III.	1	1	a^α	$a^{\alpha'}$	a^δ	c	b	b	b	ba	ca	$cba^{\alpha'}$	c	$da^{\alpha'}$	db	ed	$\alpha, \alpha', \delta = 0, 1$	8 types.

Figure (1) (1) (1) (1) (11). — Central : $\{a\}$.

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$e^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$e^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$			
											$p>5.$									
I.	(1)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta' = 0, 1, N$	3 types,	
	(2)	1	1	1	1	a	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta' = 0, 1, i$	3 »	
	(3)	1	1	1	1	a	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta' = i^2, i^3$	3 »	$p \equiv 1 \bmod 4,$
	(4)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	c	cb	d	dc	ed	$\delta' = 0, 1$	2 »	
	(5)	1	1	1	1	a	1	b	b	b	ba	c	c	cb	d	dc	ed		1 type,	
	(6)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	c	cb	da	dc	ed	$\delta' = 0, 1, i$	3 types,	
	(7)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	c	cb	da	dc	ed	$\delta' = i^2, i^3, i^4, i^5$	4 »	$p \equiv 1 \bmod 3,$
	(8)	1	1	1	1	a^δ	1	b	b	b	ba	c	c	cb	da	dc	ed	$\delta = 1, i$	2 »	
	(9)	1	1	1	1	a^δ	1	b	b	b	ba	c	c	cb	da	dc	ed	$\delta = i^2, i^3$	2 »	$p \equiv 1 \bmod 4,$
II.	(1)	1	1	1	1	a^δ	1	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\delta = 0, 1$	2 »	
	(2)	1	1	1	1	a^δ	1	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\delta = i, i^2$	2 »	$p \equiv 1 \bmod 3,$
	(3)	1	1	1	1	a^δ	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\left\{\delta = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}; \delta' \equiv 1, N\right\}$	$p+1$ types,	
	(4)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	ca	cb	db	dc	ed	$\delta' = 0, 1$	2 types,	
	(5)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	ca	cb	db	dc	ed	$\delta' = i, i^2, i^3, i^4$	4 »	$p \equiv 1 \bmod 5,$
	(6)	1	1	1	1	a^δ	1	b	b	b	ba	c	ca	cb	db	dc	ed	$\delta = 1, i$	2 »	
	(7)	1	1	1	1	a^δ	1	b	b	b	ba	c	ca	cb	db	dc	ed	$\delta = i^2, i^3, i^4, i^5$	4 »	$p \equiv 1 \bmod 3,$
III.	(1)	1	1	1	a	1	$ba^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta' = 0, 1, N$	3 »	
IV.	(1)	1	1	1	$a^{\theta'}$	1	$b^{\theta'}a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\left\{\begin{matrix}\theta' = 1, i; \\ \delta' = 0, 1, N\end{matrix}\right\}$	6 »	
	(2)	1	1	1	$a^{\theta'}$	1	$b^{\theta'}a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\left\{\begin{matrix}\theta' = i^2, i^3; \\ \delta' = 0, 1, N\end{matrix}\right\}$	6 »	$p \equiv 1 \bmod 4.$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

		a^p	b^p	c^p	d^p	e^p	f^p	$c^{-1}bc$	$d^{-1}bd$	$e^{-1}be$	$f^{-1}bf$	$e^{-1}cd$	$e^{-1}ce$	$f^{-1}cf$	$e^{-1}de$	$f^{-1}df$	$f^{-1}ef$		
											$p=5.$								
V.	(1)	1	1	1	1	1	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta'=0,1,N$	3 types,
	(2)	1	1	1	1	a	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta'=0,1,2,3,4$	5 »
	(3)	1	1	1	1	a^{δ}	1	b	b	ba	b	c	c	cb	d	dc	ed	$\delta=0,1,2,3,4$	5 »
VI.	(1)	1	1	1	1	a^{δ}	1	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta=0,1$	2 »
	(2)	1	1	1	1	a^{δ}	$a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\left\{\begin{array}{l}\delta=0,1,2;\\ \delta'=1,N\end{array}\right\}$	6 »
	(3)	1	1	1	1	a^{δ}	1	b	b	ba	b	c	ca	cb	db	dc	ed	$\delta=0,1,2,3,4$	5 »
VII.	(1)	1	1	1	a	1	$ba^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	d	dc	ed	$\delta'=0,1,N$	3 »
VIII.	(1)	1	1	1	$a^{\theta'}$	1	$b^{\theta'}a^{\delta'}$	b	b	ba	b	ca^{-1}	ca	cb	db	dc	ed	$\left\{\begin{array}{l}\theta'=1,2,3,4\\ \delta'=0,1,N\end{array}\right\}$	12 »
											$p=3.$								
IX.	(1)	1	1	a^{-1}	$b^{-1}a$	$c^{-1}ba^{\delta}$	1	b	b	b	b	c	c	cb	d	dc	ed	$\delta'=0,1,-1$	3 types,
	(2)	1	1	a^{-1}	$b^{-1}a$	$c^{-1}b$	$a^{\delta'}$	b	b	b	ba	c	c	cb	da	dc	ed	$\delta'=0,1,-1$	3 »

Vu et approuvé :
Paris, le 26 avril 1904.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 26 avril 1904.
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Mécanique. — Figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation uniforme.

Vu et approuvé :
Paris, le 26 avril 1904,
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 26 avril 1904,
LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

35189 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4

ERRATA.

Page	Ligne	Au lieu de	Lire
2	18	et l'on désigne	et on le désigne.
2	24	$A_i[A_l(\alpha)] = 1$,	$A_i[A_l(a)] = 1$.
3	1	forment,	formant.
3	9	$A_{\mu-1} = G$,	$A_\mu = G$.
4	21	(S'),	(S'_ρ).
7	4	**d'un** $\mathbf{g}_{p_6}$,	**d'un** $\mathbf{g}_{p^m}$.
10	8	d'ordre p_3,	d'ordre p^3.
11	8	(**s**)(**1**)(**11**)	(**s1**)(**1**)(**11**).
25	4	$\Sigma_j \lambda_{ih} b_j$.	$\Sigma_j \lambda_{jh} b_j$.
64	22	$yz' - zy' = 0$,	$yz' - zy' \not\equiv 0$.
65	10	$\frac{1-p}{2}$,	$\frac{p-1}{2}$.
78	21	$b^\lambda \alpha$,	$b^\lambda a$.
129	1, 26	$G \mid \} A \{$,	$G \mid \} a \{$.
129	20	résultent,	résultant.
142	12	VI, II′, III′,	VI, III′.
148	19	PREMIER CAS,	PREMIER CAS.
151	13	DEUXIÈME CAS,	DEUXIÈME CAS.
152	14	TROISIÈME CAS,	TROISIÈME CAS.
154	1	e_{2^m-},	$e_{2^{m-2}}$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 43/4 -4