u. f
166
HF uf (166) 39 5 - 4°

N° D'ORDRE :
998.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GEORGES TZITZÉICA,
Élève (étranger) à l'École Normale supérieure.

FACULTÉ des SCIENCES
BIBLIOTHEQUE
PARIS

1re THÈSE. — SUR LES CONGRUENCES CYCLIQUES ET SUR LES SYSTÈMES TRIPLEMENT CONJUGUÉS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 juin 1899 devant la Commission d'Examen.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM. DARBOUX, *Président.*
KOENIGS, } *Examinateurs.*
GOURSAT, }

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

DONS
N° 35312

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE	HERMITE.	
PROFESSEURS	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	TROOST	Chimie.
	LIPPMANN	Physique.
	HAUTEFEUILLE	Minéralogie.
	BOUTY	Physique.
	APPELL	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	DITTE	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS	Géologie.
	GIARD	Zoologie, Évolution des êtres organisés.
	WOLF	Astronomie physique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VÉLAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	N.	Chimie organique.
PROFESSEURS ADJOINTS	CHATIN	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	PELLAT	Physique.
	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
SECRÉTAIRE	FOUSSEREAU.	

27239 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

A MESSIEURS

GASTON DARBOUX ET GABRIEL KŒNIGS.

Hommage de profond respect.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES

CONGRUENCES CYCLIQUES

ET SUR LES

SYSTÈMES TRIPLEMENT CONJUGUÉS.

INTRODUCTION.

Après les travaux de Lamé sur les systèmes triples orthogonaux, on a cherché à étudier les coordonnées curvilignes quelconques de l'espace. C'est ainsi que Codazzi et l'abbé Aoust ont étudié laborieusement des formules qui se rattachent à cette question (*Annali di Matematica*, 1864, 1867, 1868, 1869), mais leurs résultats sont restés isolés.

Dans un Mémoire remarquable sur les coordonnées curvilignes (*Annales de l'École Normale*, 1878), M. Darboux a étudié de nombreuses questions relatives aux systèmes orthogonaux, et il a indiqué un système de coordonnées curvilignes obliques qui se présentent comme une généralisation immédiate des systèmes orthogonaux : ce sont les systèmes composés de surfaces se coupant suivant des courbes qui forment des réseaux conjugués sur chacune des surfaces. Il est revenu plus tard sur cette généralisation des systèmes orthogonaux dans un Chapitre de son œuvre sur la *Théorie des surfaces*, 4ᵉ Vol., p. 267).

Ce sont ces systèmes de coordonnées curvilignes, que nous avons appelés *systèmes triplement conjugués*, que nous nous sommes proposé

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

d'étudier dans ce travail. Nous avons eu spécialement en vue une classe de systèmes triplement conjugués qui se rapprochent plus que les autres des systèmes orthogonaux et que nous avons désignés par Ω_1.

Quand on a un système de coordonnées curvilignes orthogonales (ρ_1, ρ_2, ρ_3), les coordonnées cartésiennes x, y et z d'un point de l'espace satisfont en même temps que $x^2+y^2+z^2$ à un certain système d'équations de Laplace. Pour un système triplement conjugué quelconque, x, y et z sont des solutions d'un système de Laplace sans autre condition spéciale. Enfin, pour un système Ω_1, à côté des solutions x, y, z du système de Laplace correspondant, il y a une autre solution R telle que $x^2+y^2+z^2-R^2$ soit aussi une solution du même système de Laplace.

On rencontre dans la théorie de ces systèmes triplement conjugués particuliers certains triangles attachés à chaque point de l'espace. Les côtés de ces triangles forment dans certaines conditions des congruences cycliques, et les sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par les sommets des triangles constituent des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales.

On voit donc pourquoi nous avons été obligé de commencer notre travail par une étude des congruences cycliques. Nous avons fait cette étude d'après les travaux de Ribaucour et de MM. Guichard, Bianchi et Cosserat, en ajoutant quelques résultats relatifs aux congruences cycliques et de Ribaucour et à certaines congruences liées aux surfaces à courbure totale constante (négative).

La deuxième Partie contient un exposé de la théorie générale des systèmes triplement conjugués, de certains systèmes de triangles et de certains systèmes de droites. C'est le Chapitre déjà cité de l'Ouvrage de M. Darboux qui nous a servi de point de départ.

Enfin la dernière Partie a pour objet l'étude des systèmes triplement conjugués particuliers que nous avons désignés par Ω_1, et des systèmes de triangles dont les côtés forment sous certaines conditions des congruences cycliques. Cette partie du travail est en réalité une étude géométrique des systèmes de Laplace ayant des solutions liées par une relation quadratique, étude qui est beaucoup plus difficile que celle d'une équation unique de Laplace.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Le problème qu'on se propose dans une pareille étude est presque toujours le suivant :

Étant donné un système de Laplace admettant un certain nombre de solutions liées par une relation quadratique, en déduire d'autres systèmes ayant le même nombre ou un nombre plus grand de solutions liées par une relation quadratique.

Nous avons mis à profit les nombreux résultats de M. Guichard sur les congruences de droites et sur les réseaux conjugués tracés sur une surface. La classification qu'il a faite des réseaux conjugués qui se rencontrent dans les problèmes les plus importants de la Géométrie infinitésimale nous a été très utile.

Les principaux résultats de ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans les séances du 18 juillet et 28 novembre 1898, 30 janvier et 6 mars 1899.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Étant donnée une congruence Γ, nous la supposerons rapportée à ses développables à l'aide de deux paramètres u et v.

Soient alors $F_1(x_1, y_1, z_1)$ et $F_2(x_2, y_2, z_2)$ les foyers d'une de ses droites. Par hypothèse, on doit avoir des relations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = p\alpha, & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = p\beta, & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = p\gamma, \\[2ex] \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = q\alpha, & \dfrac{\partial y_2}{\partial v} = q\beta, & \dfrac{\partial z_2}{\partial v} = q\gamma, \end{cases}$$

α, β, γ étant des cosinus directeurs de la droite considérée, p et q des fonctions convenables de u et de v.

On peut déterminer une équation de Laplace

$$(\mathrm{L})\qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v} = h\frac{\partial \Omega}{\partial u} + k\frac{\partial \Omega}{\partial v} - f\Omega$$

à laquelle satisfassent α, β et γ; h, k et f s'expriment à l'aide des

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

coefficients de l'élément linéaire

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

de la représentation sphérique de la congruence Γ et de leurs dérivées.

Si $M(x, y, z)$ est le milieu de F_1F_2, et si l'on désigne par 2ρ la distance focale F_1F_2, on aura

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \rho\alpha, & y_1 &= y + \rho\beta, & z_1 &= z + \rho\gamma, \\ x_2 &= x - \rho\alpha, & y_2 &= y - \rho\beta, & z_2 &= z - \rho\gamma. \end{aligned}$$

Les equations (1) nous montrent alors que

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2k\rho\right)\alpha - \rho\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2h\rho\right)\alpha + \rho\frac{d\alpha}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

et des équations analogues pour y et z obtenues en remplaçant α par β et γ. La compatibilité des équations (2) exige que ρ soit une solution de l'équation

$$(L') \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + h\frac{\partial \rho}{\partial u} + k\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial v} - f\right)\rho = 0$$

adjointe de (L).

Si donc on se donne la représentation sphérique, une solution de (L′) nous déterminera la surface moyenne d'une congruence ayant cette représentation sphérique pour ces développables : cette congruence sera ainsi complètement définie.

2. Tout ceci étant rappelé, considérons une surface S′ dont chaque point $M'(x', y', z')$ est lié au rayon correspondant de la congruence Γ par des relations de la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial v} &= p'(x' - x_1), & \frac{\partial y'}{\partial v} &= p'(y' - y_1), & \frac{\partial z'}{\partial v} &= p'(z' - z_1), \\ \frac{\partial x'}{\partial u} &= q'(x' - x_2), & \frac{\partial y'}{\partial u} &= q'(y' - y_2), & \frac{\partial z'}{\partial u} &= q'(z' - z_2), \end{aligned} \right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

qui expriment que les foyers de chaque droite de la congruence se trouvent sur les tangentes en M' aux courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ On voit aisément des équations précédentes que ces courbes forment sur S' un réseau conjugué.

Nous dirons que la congruence Γ est *cyclique* s'il existe une surface S' pour laquelle on a des relations semblables à (3) et telle que les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ tracent sur elle ses lignes de courbure.

Mettons-nous dans ce cas et décrivons des points F_1 et F_2 comme centres, les sphères Σ_1 et Σ_2 ayant respectivement F_1M' et F_2M' pour rayons. Ces sphères sont orthogonales et se coupent suivant un cercle C passant par M' et ayant F_1F_2 pour axe.

Il est aisé de voir que la sphère Σ_1, quand u varie seul, touche son enveloppe précisément suivant le cercle C et qu'il en est de même de la sphère Σ_1 quand v est seul variable.

On voit donc qu'on a deux familles d'enveloppes de sphères, les surfaces de la première famille se coupant avec les surfaces de la seconde famille orthogonalement et suivant leurs lignes de courbure circulaires. Il existe alors, d'après un théorème de M. Darboux, une troisième famille de surfaces formant avec les deux premières un système triple orthogonal. Les cercles C sont donc les trajectoires orthogonales des surfaces de cette dernière famille, et ils constituent par conséquent ce que Ribaucour a appelé un *système cyclique*.

Il résulte des considérations précédentes qu'*étant donnée une congruence cyclique il existe un système de cercles ayant les droites de la congruence pour axes et formant un système cyclique*.

L'étude des systèmes cycliques prouve facilement que la réciproque est vraie.

Les axes des cercles d'un système cyclique forment une congruence cyclique.

3. On obtient donc la congruence cyclique la plus générale en prenant la congruence pour laquelle les foyers de chacune de ses droites se trouvent à chaque moment sur les tangentes aux lignes de courbure d'une surface quelconque.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Soit $M'(x', y', z')$ un point de cette surface rapportée à ses lignes de courbure, et posons

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2;$$

x', y', z' et $x'^2 + y'^2 + z'^2$ satisfont alors à l'équation

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

M. Darboux a montré (*Théorie des surfaces*, II^e Vol.) qu'on obtient les foyers de l'une des congruences cherchées en prenant

$$(F_1)\qquad x_1 = x' - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}}\frac{\partial x'}{\partial v},\qquad y_1 = y' - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}}\frac{\partial y'}{\partial v},\qquad z_1 = z' - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}}\frac{\partial z'}{\partial v},$$

$$(F_2)\qquad x_2 = x' - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}\frac{\partial x'}{\partial u},\qquad y_2 = y' - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}\frac{\partial y'}{\partial u},\qquad z_2 = z' - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}}\frac{\partial z'}{\partial u},$$

où θ est une solution quelconque de (4).

Cela étant, posons

$$\theta_1 = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}(x_1 - x_2),\qquad \theta_2 = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}(y_1 - y_2),\qquad \theta_3 = \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}(z_1 - z_2),$$

ou

$$\theta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v},\qquad \theta_2 = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v},\qquad \theta_3 = \frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial u} - \frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v};$$

θ_1, θ_2, θ_3 sont des paramètres directeurs de la droite F_1F_2.

Un calcul facile montre que θ_1, θ_2, θ_3 satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v} + r\omega,$$

dans laquelle

$$mU = A\frac{\partial \theta}{\partial v},\qquad nV = B\frac{\partial \theta}{\partial u}$$

et r une certaine fonction de u et de v, U désignant une fonction de u

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

seulement, V une fonction seulement de v. Alors

$$\begin{aligned}\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2 &= \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v}\right)^2\\ &\quad+\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial z'}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v}\right)^2\\ &= A^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2+B^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2\\ &= m^2U^2+n^2V^2.\end{aligned}$$

Il est évident que, si l'on multiplie θ_1, θ_2 et θ_3 par une même fonction, m et n se trouveront être aussi multipliés par cette même fonction.

On a donc le théorème suivant dû à M. Guichard :

Les paramètres directeurs θ_1, θ_2, θ_3 *des rayons d'une congruence cyclique rapportée à ses développables satisfont à une équation de Laplace de la forme*

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial v}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v}+r\omega \tag{5}$$

et sont liés par la relation

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=m^2U^2+n^2V^2. \tag{6}$$

La réciproque est vraie. Soient en effet $F_1(x_1, y_1, z_1)$ et $F_2(x_2, y_2, z_2)$ les foyers d'une droite de la congruence, et prenons pour paramètres directeurs de cette droite

$$x_1-x_2,\quad y_1-y_2,\quad z_1-z_2,$$

qui satisfont par hypothèse à l'équation (5) et sont liés par la relation

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=m^2U^2+n^2V^2. \tag{6'}$$

Remarquons maintenant que, la congruence étant rapportée à ses développables, on doit avoir

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\lambda(x_1-x_2),\qquad \frac{\partial y_1}{\partial u}=\lambda(y_1-y_2),\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u}=\lambda(z_1-z_2),$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial v}=\mu(x_1-x_2),\qquad \frac{\partial y_2}{\partial v}=\mu(y_1-y_2),\qquad \frac{\partial z_2}{\partial v}=\mu(z_1-z_2),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

d'où il résulte que $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = -\mu \frac{\partial \omega}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial v} + \nu \omega,$$

ν étant une fonction convenable, et en comparant à l'équation (5), on déduit

$$\mu = -\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial v}, \qquad \lambda = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial u}, \qquad \nu = r.$$

On a donc

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{1}{n} \dfrac{\partial n}{\partial u} (x_1 - x_2), & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \dfrac{1}{n} \dfrac{\partial n}{\partial u} (y_1 - y_2), & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = \dfrac{1}{n} \dfrac{\partial n}{\partial u} (z_1 - z_2), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = \dfrac{1}{m} \dfrac{\partial m}{\partial v} (x_2 - x_1), & \dfrac{\partial y_2}{\partial v} = \dfrac{1}{m} \dfrac{\partial m}{\partial v} (y_2 - y_1), & \dfrac{\partial z_2}{\partial v} = \dfrac{1}{m} \dfrac{\partial m}{\partial v} (z_2 - z_1). \end{cases}$$

Cela étant, décrivons des points F_1 et F_2 comme centres et avec nV et mU pour rayons les sphères

$$(\Sigma_1) \qquad (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2 = n^2 V^2,$$

$$(\Sigma_2) \qquad (X - x_2)^2 + (Y - y_2)^2 + (Z - z_2)^2 = m^2 U^2.$$

Cherchons l'enveloppe de Σ_1 lorsque u est seul variable. Le plan du cercle de contact est, en tenant compte des équations (7),

$$(X - x_1)(x_1 - x_2) + (Y - y_1)(y_1 - y_2) + (Z - z_1)(z_1 - z_2) + n^2 V^2 = 0,$$

et (6′) prouve que c'est le plan radical des sphères Σ_1 et Σ_2. La sphère Σ_1 touche donc son enveloppe suivant le cercle C, qu'elle a en commun avec Σ_2. On trouverait qu'il en est de même de Σ_2 lorsque c'est v qui varie seul.

Comme, en vertu de (6′), les deux sphères sont orthogonales, on déduit que les cercles C forment un système cyclique et que, par conséquent, notre congruence est cyclique.

La condition trouvée est donc *en même temps nécessaire et suffisante.*

Nous voyons encore par ce qui précède que la condition ne se rapporte qu'aux paramètres directeurs des rayons de la congruence. *Deux congruences qui ont la même représentation sphérique pour leurs développables sont* donc *en même temps cycliques.*

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

4. Nous allons exprimer maintenant la condition trouvée, à l'aide des éléments qui nous ont servi au n° 1 pour définir une congruence.

Posons, pour un moment, dans l'équation de Laplace (L),

$$h = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}, \qquad k = \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}. \tag{8}$$

Pour que la congruence soit cyclique, il faut et il suffit, d'après le théorème de M. Guichard, que l'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 = P^2U^2 + Q^2V^2.$$

On pourra donc mettre

$$PU = \cos\frac{\sigma}{2}, \qquad QV = \sin\frac{\sigma}{2}. \tag{9}$$

Avec ces notations, le plan radical des sphères Σ_1 et Σ_2, décrites des foyers F_1 et F_2 d'une droite de la congruence comme centres et avec QV et PU comme rayons, c'est-à-dire le plan du cercle qui engendre le système cyclique correspondant à la congruence, a pour équation

$$(X - x_1)(x_1 - x_2) + (Y - y_1)(y_1 - y_2) + (Z - z_1)(z_1 - z_2) + 4\rho^2 \sin^2\frac{\sigma}{2} = 0$$

ou

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = \rho\cos\sigma.$$

Le centre (x_0, y_0, z_0) du cercle est donné par

$$x_0 = x + \rho\cos\sigma.\alpha, \qquad y_0 = y + \rho\cos\sigma.\beta, \qquad z_0 = z + \rho\cos\sigma.\gamma,$$

enfin son rayon est $\rho\sin\sigma$.

Cela étant, on tire des équations (9)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{P}\cos\frac{\sigma}{2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{Q}\sin\frac{\sigma}{2}\right) = 0,$$

d'où, en tenant compte des équations (8),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} &= 2h(\cos\sigma + 1), \\ \frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} &= 2k(\cos\sigma - 1). \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Ce sont les équations trouvées par MM. Bianchi (*Ann. di Matematica*, vol. XVIII et XIX) et Cosserat (*C. R.*, t. CXIII, p. 461).

Il est donc nécessaire et suffisant que ces équations soient compatibles pour que la congruence soit cyclique. On en tire

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial k}{\partial v}\right)\cos\sigma + \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial k}{\partial v} - 4hk = 0,$$

qui détermine un système cyclique unique correspondant à la congruence cyclique donnée, sauf dans le cas où

$$(11) \qquad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial k}{\partial v} = 2hk,$$

et *alors on a ∞^1 systèmes cycliques.*

5. Ribaucour a considéré une congruence comme formée par les cordes de contact d'une sphère Σ dépendant de deux paramètres avec son enveloppe. Les courbes tracées sur la surface décrite par le centre de la sphère et correspondant aux développables de la congruence forment un réseau conjugué.

Il a montré spécialement (*J. de Liouville,* 1891) *que la congruence est cyclique, si les points de contact de la sphère avec son enveloppe sont conjugués harmoniques par rapport aux foyers de la corde de contact.*

Pour démontrer ce théorème nous gardons toujours les notations du n° 1. Soit de plus μ (ξ, η, ζ) le centre de la sphère Σ. Menons par μ un plan perpendiculaire à la droite correspondante D de la congruence, et désignons par r la distance à ce plan du milieu $M(x, y, z)$ des foyers de D; on a

$$(12) \qquad \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z) = r.$$

Si donc

$$(X - \xi^2)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2 = R^2$$

est la sphère Σ qui nous donne les droites de la congruence par ses

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

cordes de contact, il faudra que la droite

$$(X-\xi)\frac{\partial\xi}{\partial u}+(Y-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial u}+(Z-\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial u}+R\frac{\partial R}{\partial u}=0,$$

$$(X-\xi)\frac{\partial\xi}{\partial v}+(Y-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial v}+(Z-\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial v}+R\frac{\partial R}{\partial v}=0$$

coïncide avec la droite D.

Elles ont d'abord la même direction, si

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\beta\dfrac{\partial\eta}{\partial u}+\gamma\dfrac{\partial\zeta}{\partial u}=0, \\ \alpha\dfrac{\partial\xi}{\partial v}+\beta\dfrac{\partial\eta}{\partial v}+\gamma\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}=0, \end{cases}$$

et se confondent, si l'on a encore

$$(14)\qquad \begin{cases} (x-\xi)\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+(y-\eta)\dfrac{\partial\eta}{\partial u}+(z-\zeta)\dfrac{\partial\zeta}{\partial u}+R\dfrac{\partial R}{\partial u}=0, \\ (x-\xi)\dfrac{\partial\xi}{\partial v}+(y-\eta)\dfrac{\partial\eta}{\partial v}+(z-\zeta)\dfrac{\partial\zeta}{\partial v}+R\dfrac{\partial R}{\partial v}=0. \end{cases}$$

Enfin, pour que les points de contact de Σ avec son enveloppe soient conjugués harmoniques par rapport aux foyers de la droite D, il faut écrire que la sphère Σ et la sphère décrite sur F_1F_2 comme diamètre sont orthogonales :

$$(15)\qquad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=R^2+\rho^2.$$

De là, en différentiant et en tenant compte des équations (14), on tire

$$(16)\qquad \begin{cases} (x-\xi)\dfrac{\partial x}{\partial u}+(y-\eta)\dfrac{\partial y}{\partial u}+(z-\zeta)\dfrac{\partial z}{\partial u}=\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial u}, \\ (x-\xi)\dfrac{\partial x}{\partial v}+(y-\eta)\dfrac{\partial y}{\partial v}+(z-\zeta)\dfrac{\partial z}{\partial v}=\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial v}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, à l'aide des équations (2) et (12),

$$(17)\qquad \begin{cases} \rho S(\xi-x)\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}+2k\rho\right)r+\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial u}, \\ \rho S(\xi-x)\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v}+2h\rho\right)r-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial v}, \end{cases}$$

S désignant le signe de sommation de Lamé.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Calculons les premiers membres de ces dernières équations d'une autre manière, en différentiant l'équation (12) et en simplifiant le résultat à l'aide de (2) et (13). On trouve

$$(18)\quad \begin{cases} S(\xi - x)\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = \dfrac{\partial r}{\partial u} + \dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2k\rho, \\ S(\xi - x)\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial\rho}{\partial v} - 2h\rho. \end{cases}$$

En comparant (17) et (18), on déduit

$$(19)\quad \begin{cases} \rho\dfrac{\partial r}{\partial u} - r\dfrac{\partial\rho}{\partial u} = 2k\rho(r-\rho), \\ \rho\dfrac{\partial r}{\partial v} - r\dfrac{\partial\rho}{\partial v} = 2h\rho(r+\rho). \end{cases}$$

Il *faut* donc que ces équations puissent nous déterminer r. Il est aisé de voir que *cette condition nécessaire est en même temps suffisante.* Remarquons, en effet, que toutes les équations de ce numéro, sauf les équations (15), (16), (17) et (19), sont vraies pour toute congruence de droites. Si donc les équations (19) sont vérifiées, on pourra remonter de (18) par (17) et (16) jusqu'à l'équation (15), ce qui prouve bien que la condition est suffisante.

Posons dans les équations (19) $r = \rho\cos\sigma$; on trouve

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = 2k(\cos\sigma - 1),$$
$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = 2h(\cos\sigma + 1).$$

Ce sont les conditions (10) d'existence d'un système cyclique.

La congruence est donc cyclique et le centre μ de la sphère Σ est le point de contact avec son enveloppe du plan du cercle qui engendre le système cyclique correspondant.

Nous pouvons montrer que sur cette enveloppe aux développables de la congruence correspond un réseau conjugué.

Pour cela, on tire facilement de (14)

$$S\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} + S\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} = 0,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

et alors les équations (13) nous donnent

$$\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} + \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = 0.$$

De cette équation et des équations (13) on déduit que ξ, η, ζ satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \mathrm{L} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{M} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

ce qui prouve que les courbes $u =$ const. et $v =$ const. tracent sur la surface en question un réseau conjugué.

6. On est conduit, dans la théorie de la déformation infiniment petite d'une surface, à considérer une classe de congruences dont les développables découpent des réseaux conjugués sur leurs surfaces moyennes : ce sont les *congruences de Ribaucour*. Elles sont caractérisées par le fait que l'équation de Laplace (L) à laquelle satisfont les cosinus directeurs α, β, γ des rayons d'une de ces congruences a ses invariants égaux.

Les équations (11) nous montrent donc que les congruences cycliques auxquelles correspond une infinité de systèmes cycliques sont en même temps congruences de Ribaucour.

Prenons une de ces congruences; à chaque droite qui lui appartient correspond une infinité de plans contenant les cercles ayant cette droite pour axe et décrivant les systèmes cycliques déduits de la congruence. Les points de contact de ces plans avec leurs enveloppes se trouvent, d'après les équations (16), sur la droite

$$(\mathrm{X} - x) \frac{\partial x}{\partial u} + (\mathrm{Y} - y) \frac{\partial y}{\partial u} + (\mathrm{Z} - z) \frac{\partial z}{\partial u} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0,$$

$$(\mathrm{X} - x) \frac{\partial x}{\partial v} + (\mathrm{Y} - y) \frac{\partial y}{\partial v} + (\mathrm{Z} - z) \frac{\partial z}{\partial v} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0,$$

qui décrit une congruence.

Nous allons montrer que les deux plans représentés par les deux équations précédentes sont les plans focaux de la droite d'intersection

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

et cela seulement dans le cas où la congruence primitive Γ est cyclique et de Ribaucour.

En effet, comme les équations des plans peuvent s'écrire

$$X\frac{\partial x}{\partial u}+Y\frac{\partial y}{\partial u}+Z\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(x^2+y^2+z^2-\rho^2),$$

$$X\frac{\partial x}{\partial v}+Y\frac{\partial y}{\partial v}+Z\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(x^2+y^2+z^2=\rho^2),$$

pour qu'ils soient les plans de leur intersection, il faut et il suffit que x, y, z et $x^2+y^2+z^2-\rho^2$ soient des solutions d'une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=P\frac{\partial\theta}{\partial u}+Q\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Les courbes $u=$ const. et $v=$ const. tracent donc sur la surface moyenne S de la congruence donnée T un réseau conjugué, ce qui prouve que la congruence est de Ribaucour. On a, par conséquent,

$$\frac{\partial h}{\partial v}=\frac{\partial k}{\partial u},$$

et alors on voit aisément à l'aide des équations (2) que l'équation de Laplace relative au réseau tracé sur S est

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}+h\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}+k\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Si l'on exprime maintenant que $x^2+y^2+z^2-\rho^2$ satisfait aussi à cette équation, on trouve, en tenant compte des équations (2) et (L'),

$$\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial k}{\partial u}-4hk=0,$$

et en comparant au résultat précédent

$$\frac{\partial h}{\partial v}=\frac{\partial k}{\partial u}=2hk,$$

ce qui démontre que la congruence est en même temps cyclique et de Ribaucour.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

7. Il résulte donc, de ce qui précède, le théorème suivant, dû à M. Cosserat :

Les plans des cercles des systèmes cycliques déduits d'une congruence cyclique et de Ribaucour ont leurs points de contact avec leurs enveloppes en ligne droite; la droite ainsi déterminée forme une congruence dont les développables correspondent à celles de la congruence primitive et découpent les enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués.

Nous allons rattacher ce théorème à une proposition sur les congruences cycliques les plus générales.

Si l'on considère une congruence C *et si l'on fait correspondre à chaque droite* D *de cette congruence la corde de contact* Δ *de la sphère* S *décrite sur le segment focal de* D *comme diamètre avec son enveloppe, et s'il existe sur la droite* Δ *un point* $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ *qui décrive une surface dont le plan tangent en* μ *soit perpendiculaire à* Δ, *la congruence* C *est cyclique.*

En effet, soient $M(x, y, z)$ le point moyen et 2ρ la distance focale de D.

On a, par hypothèse,

$$(20)\qquad \begin{cases} (\xi - x)\dfrac{\partial x}{\partial u} + (\eta - y)\dfrac{\partial y}{\partial u} + (\zeta - z)\dfrac{\partial z}{\partial u} + \rho\dfrac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \\[2ex] (\xi - x)\dfrac{\partial x}{\partial v} + (\eta - y)\dfrac{\partial y}{\partial u} + (\zeta - z)\dfrac{\partial z}{\partial v} + \rho\dfrac{\partial \rho}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

et

$$(21)\qquad \begin{cases} \alpha\dfrac{\partial \xi}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial \eta}{\partial u} + \gamma\dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = 0, \\[2ex] \alpha\dfrac{\partial \xi}{\partial v} + \beta\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \gamma\dfrac{\partial \zeta}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de D.

Décrivons du point μ comme centre une sphère Σ orthogonale à la sphère S décrite sur le segment focal de D comme diamètre. Le rayon R de Σ sera déterminé par

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = R^2 + \rho^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

d'où l'on déduit, en différentiant et en faisant les réductions,

$$(x-\xi)\frac{\partial\xi}{\partial u}+(y-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial u}+(z-\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\mathrm{R}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial u}=0,$$

$$(x-\xi)\frac{\partial\xi}{\partial v}+(y-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial v}+(z-\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\mathrm{R}\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial v}=0,$$

qui expriment que le point moyen M se trouve sur la corde de contact de Σ avec son enveloppe. Comme, en vertu de (21), D a même direction que cette corde de contact, elles coïncident.

La congruence des droites D est donc définie comme étant formée par les cordes de contact d'une famille de sphères avec leur enveloppe, les foyers étant conjugués par rapport aux points de contact. Le théorème de Ribaucour, que nous avons démontré au n° 5, prouve que la congruence considérée est cyclique.

De la démonstration que nous avons donnée au théorème de Ribaucour il résulte encore que le point μ est le point de contact avec son enveloppe du plan qui contient le cercle décrivant le système cyclique correspondant à la congruence. Le plan du cercle, et par conséquent le point μ correspondant à un rayon de la congruence C sont en général uniques.

Dans le cas où la congruence est en même temps cyclique et de Ribaucour, on a une infinité de cercles, les points de contact de leurs plans avec les enveloppes respectives sont visiblement distribués sur la droite Δ. Nous avons démontré, d'ailleurs, que les développables de la congruence constituée par les droites Δ correspondent, dans ce cas, et seulement dans ce cas, aux développables de la congruence C.

Supposons maintenant que la distance focale des rayons de la congruence C soit constante : la droite Δ se confond alors avec la normale à la surface moyenne de C. Supposons encore que la congruence soit cyclique et de Ribaucour, les développables de la congruence formée par les normales de la surface moyenne correspondent à celles de C, autrement dit le réseau à invariants égaux découpé par C sur sa surface moyenne est formé par les lignes de courbure de cette surface, qui est, par conséquent, isothermique.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

8. Nous voulons faire de ce qui précède une application à certaines surfaces liées aux surfaces à courbure totale constante (négative); mais, auparavant, il convient de faire la remarque suivante sur les congruences.

Supposons que les développables d'une congruence donnée tracent sur une certaine surface un réseau de courbes conjuguées.

Soient M un point de cette surface, F un foyer du rayon de la congruence qui passe en M, MT et MT′, les tangentes aux courbes du réseau qui se croisent en M.

Aux développables de la congruence il correspond sur la surface focale décrite par F un certain réseau conjugué, et les tangentes en F aux courbes de ce réseau seront FM et une droite qui rencontre évidemment MT ou MT′, MT par exemple, en P.

Le point P *est le second foyer de* MT *dans la congruence que forme cette tangente.*

Cela étant, considérons une congruence dont les développables découpent sur ses deux surfaces focales leurs lignes de courbure; la surface moyenne de cette congruence correspond, avec orthogonalité des éléments, à une surface à courbure totale constante. Nous désignons par G une telle congruence.

On voit facilement que les quantités h et k du n° 1 sont ici identiquement nulles, et que, par conséquent, la surface moyenne est définie par

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\alpha - \rho\dfrac{\partial \alpha}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\beta - \rho\dfrac{\partial \beta}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\gamma - \rho\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial v}\alpha + \rho\dfrac{\partial \alpha}{\partial v}, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial v}\beta + \rho\dfrac{\partial \beta}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial v}\gamma + \rho\dfrac{\partial \gamma}{\partial v}. \end{cases}$$

α, β, γ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \theta\cos\omega,$$

ω étant une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} = \sin\omega.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

De plus, on peut écrire

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = du^2 - 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2.$$

Alors les équations (22) nous donnent

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2, \tag{23}$$

et comme, d'autre part, il résulte des mêmes équations que $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial v}\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \mathrm{P}\Omega,$$

P étant une certaine fonction de u et de v, il suffira d'appliquer le théorème de M. Guichard, pour conclure de (23) que *les tangentes aux courbes* $v =$ const. *de la surface moyenne d'une congruence forment une congruence cyclique.* Il en est évidemment de même de la congruence des tangentes aux courbes $u =$ const.

On obtient le même résultat en faisant usage de la remarque faite au commencement de ce numéro, car il en résulte que les tangentes en $\mathrm{M}(x, y, z)$ aux courbes du réseau tracé sur la surface moyenne par les développables de G ont leurs foyers sur les tangentes aux lignes de courbure des surfaces focales et, par conséquent, qu'elles forment des congruences cycliques.

Décrivons maintenant la sphère S sur $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ comme diamètre; elle touche ses enveloppes, obtenues en faisant varier successivement u et v seulement, suivant des cercles contenus dans les plans

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{X}-x)\frac{\partial x}{\partial u} + (\mathrm{Y}-y)\frac{\partial y}{\partial u} + (\mathrm{Z}-z)\frac{\partial z}{\partial u} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \\ &(\mathrm{X}-x)\frac{\partial x}{\partial v} + (\mathrm{Y}-y)\frac{\partial y}{\partial v} + (\mathrm{Z}-z)\frac{\partial z}{\partial v} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Ces cercles, passant par F_1 et F_2 respectivement et ayant pour axes les tangentes en M aux courbes $u =$ const. et $v =$ const., sont, par con-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

séquent, les cercles des systèmes cycliques correspondant aux congruences formées par ces tangentes.

Désignons par Δ la droite représentée par les équations (24) et qui est la corde de contact de S avec son enveloppe quand les deux variables u et v varient.

La congruence primitive G qui découpe sur les surfaces focales leurs lignes de courbure est en même temps cyclique et de Ribaucour, car les relations (11) sont évidemment satisfaites quand on a

$$h = k = 0.$$

On peut donc employer un théorème que nous avons démontré au sujet de ces congruences.

La corde de contact Δ de la sphère S décrite sur F_1F_2 comme diamètre avec son enveloppe, passe par les points de contact des différents plans qui contiennent les cercles ayant F_1F_2 pour axe et décrivant des systèmes cycliques.

Les droites Δ forment d'ailleurs une congruence dont les développables correspondent à celles de la congruence primitive.

Il résulte aussi que les plans (24) sont les plans focaux de la droite Δ, et que, par conséquent, *les réseaux conjugués que la congruence des droites Δ découpe sur ses surfaces focales sont de ceux qui interviennent dans la déformation des surfaces et que M. Guichard a appelés cycliques.*

DEUXIÈME PARTIE.

9. Considérons dans l'espace un système quelconque de coordonnées curvilignes

$$x = f(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad y = \varphi(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \qquad z = \psi(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$$

et formons l'élément linéaire

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \Sigma \alpha_{ik}\, d\rho_i\, d\rho_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Il est évident qu'on peut déterminer les coefficients l, m, n du système

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k} = l_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + m_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} + n_{ik} \frac{\partial \rho}{\partial \rho_k} \tag{2}$$

$$(i, k = 1, 2, 3),$$

de manière qu'il admette x, y et z comme solutions particulières.

Il est clair aussi que dans ce cas les l, m, n s'exprimeront à l'aide des coefficients a_{ik} de l'élément linéaire (1) et de leurs dérivées.

Les conditions d'intégrabilité du système (2) sont donc en même temps les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que le second membre de (1) puisse représenter l'élément linéaire de l'espace.

Nous dirons que les coordonnées curvilignes (ρ_1, ρ_2, ρ_3) forment un *système triplement conjugué,* si, dans le système correspondant (2), on a

$$l_{23} = m_{31} = n_{12} = 0.$$

Dans ce cas chaque surface de l'une des familles de surfaces qui composent le système est coupée par les surfaces des deux autres familles suivant un réseau de courbes conjuguées.

On voit que *cette propriété se traduit par des relations entre les coefficients de l'élément linéaire seulement.*

Ces relations appartiennent à une classe d'invariants des formes différentielles que nous voulons définir sans insister.

Étant données les fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, on a

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_m^2 = \Sigma \alpha_{ik} d\rho_i \, d\rho_k \tag{3}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons que l'on fasse la transformation

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

on aura alors

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_m^2 = \Sigma \beta_{ik} d\rho_i d\rho_k \tag{5}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Désignons par $F(\alpha_{ik})$ une fonction des coefficients α_{ik} et de leurs

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

dérivées. Cette fonction sera un invariant de la forme différentielle qui figure dans le second membre de (3) et pour la transformation (4) si

$$F(\beta_{ik}) = F(\alpha_{ik}).$$

C'est ainsi que pour le cas $m = n = 3$ et pour la transformation linéaire, on a comme invariants tous les symboles de M. Christoffel $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ relatifs à la forme (3). Dans ce cas les invariants caractérisent la transformation, c'est-à-dire que si les formes (3) et (5) ont mêmes symboles de M. Christoffel la transformation (4) est linéaire.

Pour la transformation projective ($m = n = 3$), on a les invariants $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ pour lesquels $i \neq k \neq l$. *C'est l'évanouissement de ces invariants qui exprime que les coordonnées curvilignes* (ρ_1, ρ_2, ρ_3) *forment un système triplement conjugué.*

10. Nous nous attacherons surtout à l'étude des propriétés géométriques des systèmes triplement conjugués et d'autres systèmes que nous définirons dans la suite.

Nous supposons donc que x, y et z satisfont à un système d'équations de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = A_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} + A_{ki} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k}$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3).$$

Les conditions d'intégrabilité exigent que l'on ait

$$A_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}$$

et que les H satisfassent aux relations

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3}, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial \rho_3 \partial \rho_1} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \rho_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_3}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial H_3}{\partial \rho_2}; \end{aligned} \right.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

x, y et z sont donc des solutions du système

$$(7) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_k}$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3).$$

Le système triplement conjugué est composé de trois familles de surfaces : par chaque point de l'espace passe une surface de chaque famille.

Soit MT_i la tangente à la courbe d'intersection des surfaces $\rho_k =$ const. et $\rho_l =$ const. qui passent par le point M. La droite MT_i engendre, suivant que ρ_1, ρ_2 ou ρ_3 est constant, trois congruences différentes.

Il y a pourtant sur cette droite trois foyers seulement, dont un est le point M. Par conséquent, il y a aussi seulement trois plans focaux.

Nous considérerons spécialement la congruence qui correspond à $\rho_i =$ const., dont les foyers pour la droite MT_i sont différents du point M et que nous désignons par Γ_i.

Déterminons par exemple les systèmes triplement conjugués pour lesquels les surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. et $\rho_3 =$ const. sont les surfaces moyennes des congruences Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

Comme les coordonnées des deux foyers de MT_i et différents de $M(x, y, z)$ sont

$$x - \frac{H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}}\frac{\partial x}{\partial\rho_i}, \quad y - \frac{H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}}\frac{\partial y}{\partial\rho_i}, \quad z - \frac{H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}}\frac{\partial z}{\partial\rho_i},$$
$$x - \frac{H_l}{\frac{\partial H_l}{\partial\rho_i}}\frac{\partial x}{\partial\rho_i}, \quad y - \frac{H_l}{\frac{\partial H_l}{\partial\rho_i}}\frac{\partial y}{\partial\rho_i}, \quad z - \frac{H_l}{\frac{\partial H_l}{\partial\rho_i}}\frac{\partial z}{\partial\rho_i},$$
$$(i \neq k \neq l = 1, 2, 3),$$

où l'on a supposé que x, y, z satisfaisaient au système (7), on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}(H_2H_3) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_2}(H_3H_1) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_3}(H_1H_2) = 0.$$

On peut donc poser

$$H_2H_3 = e^{2R_1}, \qquad H_3H_1 = e^{2R_2}, \qquad H_1H_2 = e^{2R_3},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

R_i désignant une fonction qui ne dépend pas de ρ_i, et alors

$$H_1 = e^{R_2+R_3-R_1}, \qquad H_2 = e^{R_3+R_1-R_2}, \qquad H_3 = e^{R_1+R_2-R_3}.$$

En remplaçant dans (6) les H par ces valeurs, on obtient

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial\rho_2\,\partial\rho_3} = 3\,\frac{\partial(R_3-R_1)}{\partial\rho_2}\,\frac{\partial(R_2-R_1)}{\partial\rho_3},$$
$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial\rho_3\,\partial\rho_1} = 3\,\frac{\partial(R_1-R_2)}{\partial\rho_3}\,\frac{\partial(R_3-R_2)}{\partial\rho_1},$$
$$\frac{\partial^2 R_3}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = 3\,\frac{\partial(R_2-R_3)}{\partial\rho_1}\,\frac{\partial(R_1-R_3)}{\partial\rho_2}.$$

M. Darboux a rencontré dans ses recherches sur les systèmes triples orthogonaux composés de surfaces isothermiques (*Sytèmes orthogonaux*, p. 230) un système d'équations plus général que le précédent. En appliquant sa méthode pour l'intégrer à notre cas, on trouve

$$R_1 = \alpha_2 + \alpha_3 - \tfrac{1}{3}\log(a_2 - a_3),$$
$$R_2 = \alpha_3 + \alpha_1 - \tfrac{1}{3}\log(a_3 - a_1),$$
$$R_3 = \alpha_1 + \alpha_2 - \tfrac{1}{3}\log(a_1 - a_2),$$

α_i et a_i désignant des fonctions contenant la seule variable ρ_i.

On tire de là les valeurs de H_1, H_2 et H_3

$$H_1 = e^{2\alpha_1}\sqrt[3]{\frac{a_2-a_3}{(a_3-a_1)(a_1-a_2)}},$$
$$H_2 = e^{2\alpha_2}\sqrt[3]{\frac{a_3-a_1}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)}},$$
$$H_3 = e^{2\alpha_3}\sqrt[3]{\frac{a_1-a_2}{(a_2-a_3)(a_3-a_1)}},$$

et par conséquent le système correspondant (7), que nous supposerons simplifié par un changement de variables, sera

$$3\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_2\,\partial\rho_3} = \left(\frac{1}{\rho_3-\rho_1} + \frac{1}{\rho_2-\rho_3}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2} - \left(\frac{1}{\rho_1-\rho_2} + \frac{1}{\rho_2-\rho_3}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\rho_3},$$
$$3\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_3\,\partial\rho_1} = \left(\frac{1}{\rho_1-\rho_2} + \frac{1}{\rho_3-\rho_1}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\rho_3} - \left(\frac{1}{\rho_2-\rho_3} + \frac{1}{\rho_3-\rho_1}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1},$$
$$3\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} = \left(\frac{1}{\rho_2-\rho_3} + \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} - \left(\frac{1}{\rho_3-\rho_1} + \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Trois solutions particulières x, y, z de ce système nous donneront dans l'espace un système de coordonnées curvilignes jouissant des propriétés imposées.

Remarquons que ce système d'équations admet la solution

$$\Theta_1 = (\rho_2 - \rho_3)^{\frac{1}{3}} (\rho_3 - \rho_1)^{\frac{1}{3}} (\rho_1 - \rho_2)^{\frac{1}{3}},$$

et qu'en posant

$$\theta = \Theta_1 \Omega$$

on obtiendra le système beaucoup plus simple

$$3(\rho_i - \rho_k) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k} = 2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_k} \right) \qquad (i \neq k = 1, 2, 3),$$

pour lequel on a immédiatement les solutions suivantes :

$$(\rho_2 - \rho_3)^{-\frac{1}{3}} (\rho_3 - \rho_1)^{-\frac{1}{3}} (\rho_1 - \rho_2)^{-\frac{1}{3}},$$
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3,$$
$$(a + \rho_1)^{-\frac{2}{3}} (a + \rho_2)^{-\frac{2}{3}} (a + \rho_3)^{-\frac{2}{3}},$$

a étant une constante quelconque.

11. Revenons au système triplement conjugué général. Nous avons en chaque point M de l'espace un trièdre formé par les tangentes MT_1, MT_2, MT_3 aux courbes suivant lesquelles ρ_1, ρ_2, ρ_3 varie seul.

En considérant la configuration géométrique déduite par dualité d'un système triplement conjugué, nous sommes amené à désigner ce dernier sous le nom de *réseau-trièdre,* en réservant la dénomination de *réseau-triangle* à la figure corrélative.

Cela étant, prenons une des arêtes MT_1 du trièdre des tangentes au point M. Nous avons vu que cette droite forme trois congruences différentes suivant que ρ_1, ρ_2 ou ρ_3 reste constant, et que nous avons en dehors du point M deux autres foyers F'_2 et F'_3. Il est facile de voir que les points F'_2 et F'_3 décrivent comme M des réseaux-trièdres.

Le passage du réseau (M) au réseau (F'_2) ou (F'_3) est la généralisation de la transformation de Laplace relative aux réseaux conjugués tracés sur une surface.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Nous étudierons, d'après M. Darboux, deux autres transformations des réseaux-trièdres; ces transformations coïncident, dans le cas des systèmes triples orthogonaux, avec la transformation de Combescure.

Menons par l'origine les droites Ot_1, Ot_2, Ot_3 parallèles aux arêtes du trièdre $MT_1T_3T_3$ d'un réseau en un point M. Nous dirons que le trièdre $Ot_1t_2t_3$ est la *représentation sphérique* du trièdre $MT_1T_2T_3$, et que l'ensemble des trièdres $Ot_1t_3t_3$ constitue la *représentation sphérique du réseau donné.*

La première généralisation de la transformation de Combescure consiste dans la recherche des réseaux-trièdres ayant la même représentation sphérique qu'un réseau-trièdre donné.

Les trièdres $MT_1T_2T_3$ et $M'T'_1T'_2T'_3$ aux points correspondants $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$ de deux de ces réseaux ont leurs arêtes parallèles, c'est-à-dire que l'on a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial\rho_1} = l\,\frac{\partial x'}{\partial\rho_1}, &\quad &\frac{\partial y}{\partial\rho_1} = l\,\frac{\partial y'}{\partial\rho_1}, &\quad &\frac{\partial z}{\partial\rho_1} = l\,\frac{\partial z'}{\partial\rho_1};\\ &\frac{\partial x}{\partial\rho_2} = m\,\frac{\partial x'}{\partial\rho_2}, &&\frac{\partial y}{\partial\rho_2} = m\,\frac{\partial y'}{\partial\rho_2}, &&\frac{\partial z}{\partial\rho_2} = m\,\frac{\partial z'}{\partial\rho_2};\\ &\frac{\partial x}{\partial\rho_3} = n\,\frac{\partial x'}{\partial\rho_3}, &&\frac{\partial y}{\partial\rho_3} = n\,\frac{\partial y'}{\partial\rho_3}, &&\frac{\partial z}{\partial\rho_3} = n\,\frac{\partial z'}{\partial\rho_3}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations montrent que, réciproquement, *deux systèmes de coordonnées curvilignes, pour lesquels il y a une telle correspondance, sont des systèmes triplement conjugués.*

Supposons que x, y, z satisfassent au système (7) et que x', y', z soient des solutions d'un système semblable, avec des H accentués.

La première équation du système (8), différentiée par rapport à ρ_2, nous donne alors

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial x}{\partial\rho_2} = l\left(\frac{1}{H'_1}\frac{\partial H'_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial x'}{\partial\rho_1} + \frac{1}{H'_2}\frac{\partial H'_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial x'}{\partial\rho_2}\right) + \frac{\partial l}{\partial\rho_2}\frac{\partial x'}{\partial\rho_1};$$

d'où

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2} = \frac{1}{H'_1}\frac{\partial H'_1}{\partial\rho_2} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial\rho_2},$$

$$m\,\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1} = l\,\frac{1}{H'_2}\frac{\partial H'_2}{\partial\rho_1}.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

En considérant les équations analogues à la première de ces deux équations et déduites de (8), et en remarquant que H_i et H'_i ne sont déterminées qu'à un facteur près, qui est fonction de ρ_i seulement, on voit qu'on peut prendre

$$m = \frac{H_2}{H'_2}, \qquad l = \frac{H_1}{H'_1},$$

et alors la seconde équation devient

$$\frac{1}{H'_1}\frac{\partial H'_2}{\partial \rho_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \rho_1},$$

et, en général,

$$\frac{1}{H'_i}\frac{\partial H'_k}{\partial \rho_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} \qquad (i \neq k = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Si donc le réseau-trièdre décrit par (x, y, z) est donné, H_1, H_2, H_3 seront connus et les équations précédentes intégrées nous donneront H'_1, H'_2, H'_3; ensuite de

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_1} = \frac{H'_1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial \rho_2} = \frac{H'_2}{H_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial \rho_3} = \frac{H'_3}{H_3}\frac{\partial x}{\partial \rho_3},$$

on aura x' par des quadratures, les conditions d'intégrabilité étant satisfaites. On aura de la même manière y' et z'.

La solution générale du système (9) dépend de trois fonctions arbitraires d'une variable.

12. Ribaucour a montré (Darboux, *Théorie des Surfaces*, Vol. II, p. 323) que, si un point μ (ξ, η, ζ) décrit une surface sur laquelle les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ tracent un réseau conjugué, c'est-à-dire que ξ, η, ζ satisfont à une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v};$$

et si, en outre, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \rho^2$ est aussi une solution de cette équation, la corde de contact de la sphère décrite du point μ comme centre avec ρ pour rayon, avec son enveloppe, forme une congruence dont les développables correspondent aux courbes du réseau considéré.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Cela étant, supposons que le point $M(x, y, z)$ décrive un réseau-trièdre, que, par conséquent, x, y, z satisfassent au système de Laplace (7), et supposons de plus que $x^2+y^2+z^2-R^2$ soit aussi une solution du même système. En prenant alors l'enveloppe de la sphère de centre M et de rayon R quand ρ_1, ρ_2 ou ρ_3 reste constant, on aura pour chaque point M trois cordes de contact qui se rencontrent en un point M'. Le théorème de Ribaucour suffit pour démontrer que M' *décrit aussi un système triplement conjugué.*

Posons

$$2\omega = x^2+y^2+z^2-R^2;$$

le point $M'(x', y', z')$ sera défini par les équations

$$(10)\quad \begin{cases} x'\dfrac{\partial x}{\partial \rho_1}+y'\dfrac{\partial y}{\partial \rho_1}+z'\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}=\dfrac{\partial \omega}{\partial \rho_1}, \\ x'\dfrac{\partial x}{\partial \rho_2}+y'\dfrac{\partial y}{\partial \rho_2}+z'\dfrac{\partial z}{\partial \rho_2}=\dfrac{\partial \omega}{\partial \rho_2}, \\ x'\dfrac{\partial x}{\partial \rho_3}+y'\dfrac{\partial y}{\partial \rho_3}+z'\dfrac{\partial z}{\partial \rho_3}=\dfrac{\partial \omega}{\partial \rho_3}. \end{cases}$$

Remarquons que, de ce système et du fait que x, y, z et ω satisfont au système (7), il résulte

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_i}\frac{dx}{\partial \rho_k}+\frac{\partial y'}{d\rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_k}+\frac{\partial z'}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_k}=0$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3),$$

ce qui signifie que le trièdre $M'T'_1T'_2T'_3$ des tangentes relatif à M' est supplémentaire de celui qui correspond à M. Par conséquent, si l'on prenait dans le système (10) une autre solution ω' de (7) au lieu de ω, on obtiendrait un point M' et le trièdre correspondant $M''T''_1T''_2T''_3$ aurait ses arêtes parallèles à celles du trièdre $M'T'_1T'_2T'_3$. Nous avons ainsi, d'après une remarque faite au numéro précédent, une nouvelle démonstration du fait que M' décrit un système triplement conjugué.

Nous appellerons la transformation que nous venons de définir *transformation supplémentaire,* et nous voyons que toute solution du système de Laplace (7) nous donne un réseau-trièdre supplémentaire du réseau donné.

Nous compléterons, dans la suite, l'étude de cette transformation.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

13. Considérons le plan

$$uX + vY + wZ + p = 0, \tag{11}$$

dont les coefficients u, v, w et p sont des fonctions satisfaisant au système de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k} = a_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} + a_{ki} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k} + b_{ik} \theta \tag{12}$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3).$$

Ce plan touchera ses enveloppes obtenues en faisant $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho_2 = \text{const.}$, $\rho_3 = \text{const.}$, respectivement aux points M_1, M_2 et M_3.

L'ensemble des triangles $M_1 M_2 M_3$ *forme un réseau-triangle :* c'est la figure corrélative d'un réseau-trièdre.

On voit également que, pour $\rho_i = \text{const.}$, le point M_i décrit une surface sur laquelle les courbes $\rho_k = \text{const.}$ et $\rho_l = \text{const.}$ tracent un réseau conjugué, les tangentes en M_i à ces courbes sont $M_i M_l$ et $M_i M_k$.

Il est manifeste qu'on peut définir directement les sommets $M_i(x_i, y_i, z_i)$ par des relations de la forme

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} = \alpha_{ik}(x_i - x_k), \quad \frac{\partial y_i}{\partial \rho_k} = \alpha_{ik}(y_i - y_k), \quad \frac{\partial z_i}{\partial \rho_k} = \alpha_{ik}(z_i - z_k) \tag{13}$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3),$$

d'où l'on peut déduire aisément que *les sommets* M_1, M_2, M_3 *du triangle décrivent des réseaux-trièdres.*

Les conditions d'intégrabilité exigent que les α_{ik} soient de la forme

$$\alpha_{ik} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \rho_k},$$

et que les h satisfassent aux relations

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial \rho_2 \, \partial \rho_3} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \rho_3} \frac{\partial h_1}{\partial \rho_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \rho_2} \frac{\partial h_1}{\partial \rho_3},$$
$$\frac{\partial^2 h_2}{\partial \rho_3 \, \partial \rho_1} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \rho_1} \frac{\partial h_2}{\partial \rho_3} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \rho_3} \frac{\partial h_2}{\partial \rho_1},$$
$$\frac{\partial^2 h_3}{\partial \rho_1 \, \partial \rho_2} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial h_3}{\partial \rho_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial h_3}{\partial \rho_2}.$$

On peut remarquer que, pour $\rho_l = \text{const.}$, le côté $M_i M_k$ du triangle

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

$M_1M_2M_3$ décrit une congruence dont les foyers sont M_i et M_k; le même côté engendre d'ailleurs, lorsque $\rho_i =$ const., une congruence dont les foyers sont M_k et un autre point N_l; enfin M_i et N_l sont les foyers de la congruence obtenue en faisant $\rho_k =$ const.

On peut se proposer ici un problème analogue à un problème que nous avons résolu pour les systèmes triplement conjugués : déterminer les réseaux-triangles tels que les points N_l se trouvent aux milieux des côtés M_iM_k. Un calcul simple nous conduit aux équations

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}(h_2 h_3) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_2}(h_3 h_1) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_3}(h_1 h_2) = 0.$$

Ce sont donc les mêmes équations qui nous ont servi au n° 10 à résoudre le problème auquel nous venons de faire allusion.

On aura, par conséquent, les h; les équations (13) nous donneront ensuite les sommets du triangle.

14. Si dans l'équation (11) on prenait au lieu de p une autre solution p' du système (12), on obtiendrait un réseau-triangle dont chaque triangle $M'_1M'_2M'_3$ aurait ses côtés parallèles à ceux du triangle correspondant $M_1M_2M_3$ du premier réseau.

Nous désignerons les réseaux ainsi obtenus sous le nom de *réseaux-triangles parallèles*.

Les sommets correspondants $M_i(x_i, y_i, z_i)$ et $M'_i(x'_i, y'_i, z_i)$ des triangles $M_1M_2M_3$ et $M'_1M'_2M'_3$ appartenant à deux réseaux-triangles parallèles décrivent des systèmes triplement conjugués ayant la même représentation sphérique. En effet, on a

$$x_i - x_k = \lambda(x'_i - x'_k),$$
$$x_i - x_l = \lambda(x'_i - x'_l),$$

par conséquent

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} - \lambda \frac{\partial x'_i}{\partial \rho_i} = \mu_{ik}(x_i - x_k) = \mu_{il}(x_i - x_l),$$

qui ne peuvent avoir lieu que si

$$\mu_{ik} = \mu_{il} = 0;$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

donc

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} = \lambda \frac{\partial x'_i}{\partial \rho_i}$$

et de la même manière

$$\frac{\partial y_i}{\partial \rho_i} = \lambda \frac{\partial y'_i}{\partial \rho_i}, \qquad \frac{\partial z_i}{\partial \rho_i} = \lambda \frac{\partial z'_i}{\partial \rho_i},$$

ce qui démontre la proposition.

15. Il est utile d'introduire maintenant un troisième élément géométrique : *la congruence triple*.

Nous disons qu'une droite dépendant de trois paramètres (ρ_1, ρ_2, ρ_3) décrit une congruence triple, si pour $\rho_i =$ const. la droite forme une congruence dont les développables s'obtiennent en faisant $\rho_k =$ const. et $\rho_l =$ const., ce qui revient à dire que la surface réglée décrite par la droite quand ρ_i varie seul est développable.

Il résulte de là que la droite a trois foyers qui décrivent des réseaux-trièdres, et trois plans focaux qui nous donnent des réseaux-triangles : ce sont *les réseaux focaux*.

Il est aisé de voir que la recherche des congruences triples dont les droites sont parallèles à celles d'une congruence triple donnée, revient à la recherche des réseaux-trièdres ayant même représentation sphérique qu'un réseau-trièdre focal, ou à celle des réseaux-triangles parallèles à un réseau-triangle focal de la congruence.

16. Nous nous proposons d'étudier les relations de situation qui existent entre les éléments que nous avons introduits.

Étant donné un réseau-trièdre quelconque décrit par le point $M(x, y, z)$, on peut toujours trouver sur les arêtes MT_1, MT_2, MT_3 (en gardant les notations que nous avons employées jusqu'ici) trois points M_1, M_2, M_3 dont l'ensemble forme un réseau-triangle.

On les obtient en posant pour $M_i(x_i, y_i, z_i)$

$$x_i = x - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}} \frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \qquad y_i = y - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}} \frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \qquad z_i = z - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}} \frac{\partial z}{\partial \rho_i},$$

θ étant une solution quelconque du système de Laplace auquel satisfont x, y et z.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Nous dirons que le réseau-trièdre (M) et le réseau-triangle $(M_1 M_2 M_3)$ sont *appuyés* l'un sur l'autre.

La méthode précédente qui résulte des recherches de M. Darboux sur les réseaux conjugués d'une surface donne *tous* les réseaux-triangles appuyés sur un réseau-trièdre donné.

Il s'agit maintenant de trouver tous les réseaux-trièdres s'appuyant sur un réseau-triangle donné.

Faisons d'abord la remarque suivante. La solution θ que nous avons considérée plus haut nous a donné un réseau-triangle. Il est clair qu'on en obtiendra ∞^1 autres en prenant $\theta +$ const. au lieu de θ, et que tous les réseaux-triangles ainsi obtenus sont parallèles entre eux. Prenons-en deux $(M_1 M_2 M_3)$ et $(M'_1 M'_2 M'_3)$; les points correspondants M_1 et M'_1 décrivent, d'après une remarque que nous avons faite, des systèmes triplement conjugués ayant même représentation sphérique.

Cela posé, considérons un réseau-triangle quelconque $(M_1 M_2 M_3)$ et cherchons les réseaux-trièdres s'appuyant sur lui. A cet effet, on prendra un réseau-trièdre (M'_1) ayant la même représentation sphérique que le réseau décrit par le point M_1. Le plan tangent en M'_1 à la surface $\rho_1 =$ const. enveloppera un réseau-triangle $(M'_1 M'_2 M'_3)$ parallèle à $(M_1 M_2 M_3)$. Les triangles $M_1 M_2 M_3$ et $M'_1 M'_2 M'_3$ ayant leurs côtés parallèles, les droites $M_1 M'_1$, $M_2 M'_2$, $M_3 M'_3$ concourent au même point N_1.

Le point N_1 *décrit un réseau-trièdre appuyé sur* $(M_1 M_2 M_3)$. En effet, lorsque $\rho_1 =$ const. les droites parallèles $M_2 M_3$ et $M'_2 M'_3$ décrivent des congruences dont les développables se correspondent; donc, d'après un théorème connu (Darboux, *Théorie des surfaces*, Vol. IV, p. 108), le point N_1 se trouve sur une surface sur laquelle à ces développables correspondent les courbes d'un système conjugué, et les tangentes en N_1 à ces dernières courbes sont $N_1 M_2 M'_2$ et $N_1 M_3 M'_3$. On démontrera de la même manière que les couples de droites $(N_1 M_3, N_1 M_1)$ et $(N_1 M_1, N_1 M_2)$ sont conjugués sur les surfaces $\rho_2 =$ const. et $\rho_3 =$ const. N_1 décrit donc bien un réseau-trièdre appuyé sur $M_1 M_2 M_3$.

La remarque faite plus haut montre de plus qu'on les obtient tous ainsi.

On peut présenter le résultat précédent sous une autre forme. Supposons que le point M décrive un réseau-trièdre dont $MT_1 T_2 T_3$ soit le trièdre attaché au point M. Soit M' un point qui décrit un réseau ayant

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

même représentation sphérique que (M). Il est manifeste que la droite MM′ engendre une congruence triple, dont les développables correspondent à celles des congruences formées par les tangentes MT_i, et dont les plans focaux passent par MT_1, MT_2 et MT_3.

Il résulte alors de ce qui précède que *les réseaux-trièdres focaux de* (MM′) *s'appuient sur les réseaux-triangles déduits des plans tangents en* M *aux trois surfaces qui y passent.*

Considérons maintenant une congruence triple quelconque engendrée par une droite MP issue de M. Nous nous proposons de démontrer qu'*il existe alors sur* MP *un point* M′ *décrivant un réseau-trièdre ayant même représentation sphérique que* (M).

Pour cela il suffira évidemment de démontrer que l'un des réseaux-trièdres focaux de (MP) est appuyé sur un des réseaux-triangles déduits des plans tangents en M aux surfaces $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const., $\rho_3 =$ const., car alors nous savons que le réseau-trièdre s'appuiera sur ∞^1 réseaux-triangles parallèles : les sommets des triangles correspondants situés sur MP nous donneront des réseaux-trièdres ayant la même représentation sphérique que le réseau (M).

Prenons le foyer P_1 de MP qui, pour ρ_1 variant seul, décrit une courbe tangente à MP, et considérons en même temps le plan tangent en M à la surface $\rho_1 =$ const. Ce plan tangent enveloppe un réseau-triangle décrit par le triangle Mm_2m_3, les sommets m_2 et m_3 étant situés respectivement sur MT_2 et MT_3. Nous voulons démontrer que P_1 décrit un réseau-trièdre appuyé sur (Mm_2m_3).

En effet, remarquons d'abord que la tangente en P_1 à la courbe suivant laquelle ρ_2 varie seul est contenue dans le plan des droites MP et MT_2 ; elle coupe alors MT_2 en un point m'_2. Il s'agit de prouver que m'_2 et m_2 coïncident.

Supposons que ρ_1 varie seul. On sait qu'alors tout point de $P_1m'_2$ décrit une courbe dont la tangente est contenue dans le plan $MP_1m'_2$; de même tout point de MT_2 décrit une courbe dont la tangente est située dans le plan des droites MT_1 et MT_2. Le point m'_2 décrira, par conséquent, une courbe tangente à MT_2 ; il coïncide donc avec m_2.

On montrera de la même façon que P_1m_3 est la tangente en P_1 à la courbe pour laquelle ρ_3 est seul variable. Ce qui démontre complètement la proposition.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

17. Considérons toujours la droite MP qui forme une congruence triple. Nous venons de voir qu'il y a sur cette droite des points décrivant des systèmes triplement conjugués ayant la même représentation sphérique que le réseau (M).

En dehors de ces points-là, il y en a évidemment d'autres qui décrivent des réseaux-trièdres, les développables des congruences formées par leurs tangentes correspondant toujours à celles de la congruence triple. On les obtient à l'aide de solutions du système de Laplace relatif à un des réseaux-trièdres focaux de (MP).

Soit (N) un de ces réseaux. Il est manifeste que la tangente en N à la courbe obtenue en faisant varier ρ_i seulement rencontre MT_i en un certain point μ_i, et que l'ensemble des triangles $\mu_1\mu_2\mu_3$ forme un réseau-triangle appuyé sur les deux réseaux (M) et (N).

On peut trouver de cette manière des relations entre deux sortes d'opérations analytiques différentes.

En effet, pour obtenir le réseau (N) on peut d'abord chercher la congruence triple, opération qui demande la connaissance d'une solution particulière du système de Laplace relatif à (M); ensuite pour avoir N il nous faudra une solution du système de Laplace relatif à un des foyers de MP, ou chercher d'abord le réseau-triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$, ce qui exige aussi une solution du système relatif à (M); ensuite N sera un foyer d'une congruence triple engendrée par une droite qui passe par μ_1, μ_2 ou μ_3. Cette dernière congruence s'obtiendra par une solution du système de Laplace relatif à un des points μ.

18. Soient (M) et (M′) deux systèmes triplement conjugués ayant la même représentation sphérique. On aura alors, pour les points correspondants $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, des relations de la forme

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_i} = l_i \frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial \rho_i} = l_i \frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial \rho_i} = l_i \frac{\partial z}{\partial \rho_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Considérons maintenant un réseau-triangle $(M_1 M_2 M_3)$ appuyé sur (M) et déduit à l'aide de la solution θ du système de Laplace, auquel satisfont x, y et z. Il est clair d'abord que la fonction θ', déterminée par

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \rho_1} = l_1 \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{\partial \theta'}{\partial \rho_2} = l_2 \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2}, \qquad \frac{\partial \theta'}{\partial \rho_3} = l_3 \frac{\partial \theta}{\partial \rho_3},$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

sera une solution du système de Laplace relatif à (M'), ensuite que le réseau-triangle obtenu de (M'), à l'aide de cette solution θ', sera parallèle au réseau $(M_1M_2M_3)$; donc :

A tout réseau-triangle appuyé sur un réseau-trièdre donné correspond un réseau-triangle parallèle appuyé sur un réseau-trièdre ayant même représentation sphérique que le premier.

Soient (M) un système triplement conjugué et MP une droite qui passe en M et qui forme une congruence triple dont les développables correspondent à celles des congruences formées par les arêtes MT_1, MT_2, MT_3 du trièdre des tangentes en M.

Soient maintenant (M') un réseau-trièdre ayant la même représentation sphérique que (M) et $M'P'$ une parallèle à la droite MP.

Faisons varier ρ_i seulement, les points M et M′ décriront des courbes ayant les tangentes aux points correspondants parallèles, et comme MP décrit une surface développable, il en sera de même de la surface décrite par $M'P'$. *La droite* $M'P'$ *forme donc aussi une congruence triple dont les développables correspondent à celles de* MP.

Nous pouvons tirer de ce résultat une autre conclusion. Prenons deux réseaux-triangles parallèles $(M_1M_2M_3)$ et $(M'_1M'_2M'_3)$ et soit (M) un réseau-trièdre appuyé sur $(M_1M_2M_3)$, il existe un réseau (M') s'appuyant sur $(M'_1M'_2M'_3)$ et ayant la même représentation sphérique que (M). En effet, la droite MM_1 par exemple décrit une congruence triple dont (M) est un des réseaux focaux, la droite parallèle M'_1M' à M_1M formera une congruence triple, et un de ses réseaux-trièdres focaux (M') aura, d'une part, la même représentation sphérique que (M) et sera, d'autre part, appuyé sur $(M'_1M'_2M'_3)$.

19. Étant donné un réseau-triangle $(M_1M_2M_3)$, cherchons parmi les droites perpendiculaires au plan du triangle $M_1M_2M_3$ celles qui forment des congruences triples dont les développables correspondent à celles des congruences des côtés M_iM_k.

Il est clair que, si l'on prend un réseau supplémentaire (M'_1) de celui que décrit le sommet M_1 par exemple, la tangente au point correspondant M'_1 à la courbe suivant laquelle ρ_1 varie seul nous donne une congruence triple qui répond à la question. On les obtient toutes ainsi.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Prenons en effet une droite qui forme une telle congruence triple, et soit F_1 le foyer qui, pour $\rho_2 = \text{const.}$ et $\rho_3 = \text{const.}$, décrit une courbe tangente à la droite. Si l'on désigne par x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées des points M_1 et F_1, on aura

$$\frac{\partial x'_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y'_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial y_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z'_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial z_1}{\partial \rho_2} = 0,$$
$$\frac{\partial x'_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y'_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial y_1}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z'_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial z_1}{\partial \rho_3} = 0,$$

d'où résulte, en différentiant et en tenant compte que x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1 satisfont à des systèmes de Laplace de la forme (7)

$$\frac{\partial x'_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_k} + \frac{\partial y'_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial y_1}{\partial \rho_k} + \frac{\partial z'_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial z_1}{\partial \rho_k} = 0 \qquad (i \neq k = 1, 2, 3);$$

ce qui démontre que le réseau focal (F_1) et le réseau M_1 sont supplémentaires.

20. Considérons deux congruences triples dont les développables se correspondent et dont les droites correspondantes sont parallèles, et soient F_1, F_2, F_3 et F'_1, F'_2, F'_3 les foyers de deux droites correspondantes, F_i et F'_i désignant les foyers qui, pour ρ_i variant seul, décrivent des courbes tangentes aux rayons des congruences.

Le triangle formé par les droites $F_1F'_1, F_2F'_2, F_3F'_3$ *engendre un réseau-triangle.* Pour le démontrer, il suffit d'appliquer un théorème de M. Darboux aux trois couples de congruences ayant la même représentation sphérique pour leurs développables et contenues dans les deux congruences triples considérées.

21. Revenons maintenant à la transformation supplémentaire de M. Darboux.

Considérons un système triplement conjugué décrit par le point $M(x, y, z)$; x, y et z satisfaisant à un système d'équations de Laplace (L) de la forme (7).

A chaque solution θ de (L) on peut faire correspondre un réseau-triangle appuyé sur le réseau (M), dont les sommets sont définis par

$$(14) \quad x_i = x - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \quad y_i = y - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}}\frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \quad z_i = z - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z}{\partial \rho_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

et un réseau-trièdre supplémentaire décrit par le point $M'(x', y', z')$ et défini par les équations

$$x'\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + y'\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + z'\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1},$$
$$x'\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + y'\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + z'\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2},$$
$$x'\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + y'\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + z'\frac{\partial z}{\partial \rho_3} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho_3}.$$

Nous voulons chercher les relations qui existent entre les deux réseaux.

Soit (L′) le système de Laplace relatif au réseau-trièdre (M′). Comme le réseau (M) se déduit de (M′) par une transformation supplémentaire, on a

$$x\frac{\partial x'}{\partial \rho_1} + y\frac{\partial y'}{\partial \rho_1} + z\frac{\partial z'}{\partial \rho_1} = \frac{\partial \theta'}{\partial \rho_1},$$
$$x\frac{\partial x'}{\partial \rho_2} + y\frac{\partial y'}{\partial \rho_2} + z\frac{\partial z'}{\partial \rho_2} = \frac{\partial \theta'}{\partial \rho_2},$$
$$x\frac{\partial x'}{\partial \rho_3} + y\frac{\partial y'}{\partial \rho_3} + z\frac{\partial z'}{\partial \rho_3} = \frac{\partial \theta'}{\partial \rho_3},$$

θ' étant une solution convenable de (L′).

Des deux derniers systèmes d'équations, il résulte la relation suivante

$$xx' + yy' + zz' = \theta + \theta'. \tag{15}$$

Cela étant établi, considérons le plan

$$Xx + Yy + Zz = \theta,$$

il est aisé de voir qu'il enveloppe un réseau-triangle appuyé sur (M′).

De même, si l'on considère le plan

$$Xx' + Yy' + Zz' = \theta',$$

on obtient un réseau-triangle appuyé sur (M). Ce dernier réseau-triangle coïncide avec celui qui résulte des formules (14). En effet, on a identiquement

$$x'\left(x - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x}{\partial \rho_i}\right) + y'\left(y - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}}\frac{\partial y}{\partial \rho_i}\right) + z'\left(z - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z}{\partial \rho_i}\right) = \theta' \quad (i = 1, 2, 3).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

TROISIÈME PARTIE.

22. Nous désignerons par Ω_p un système triplement conjugué lorsque, x, y, z étant des solutions du système

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \rho_k}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i}\frac{\partial \theta}{\partial \rho_k} \qquad (i \neq k = 1, 2, 3),$$

on a p autres solutions $R_1, R_2, \ldots, R_p$ telles que

$$x^2 + y^2 + z^2 - R_1^2 - R_2^2 - \ldots - R_p^2;$$

soit aussi une solution de (1), ou, ce qui revient au même, telles que l'on ait

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_k} + \frac{\partial y}{\partial \rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_k} + \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_k} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_k} + \ldots + \frac{\partial R_p}{\partial \rho_i}\frac{\partial R_p}{\partial \rho_k} \quad (i \neq k = 1, 2, 3).$$

Il convient de remarquer que x, y, z, $R_1, \ldots, R_p$ étant des solutions de (1), il suffit en général que $x^2 + y^2 + z^2 - R_1^2 - \ldots - R_p^2$ satisfasse à deux des équations du même système pour qu'elle satisfasse d'elle-même la troisième. Supposons en effet

$$(3) \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + \ldots + \frac{\partial R_p}{\partial \rho_1}\frac{\partial R_p}{\partial \rho_2},$$

$$(4) \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_3} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_3} + \ldots + \frac{\partial R_p}{\partial \rho_1}\frac{\partial R_p}{\partial \rho_3},$$

et démontrons que l'on a aussi

$$(5) \quad \frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\frac{\partial z}{\partial \rho_3} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_3} + \ldots + \frac{\partial R_p}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_p}{\partial \rho_3}.$$

Pour cela, différentions (3) par rapport à ρ_3, et (4) par rapport à ρ_2; on trouvera

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \rho_1}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\frac{\partial z}{\partial \rho_3} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_3} - \ldots - \frac{\partial R_p}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_p}{\partial \rho_3}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\frac{\partial z}{\partial \rho_3} - \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_1}{\partial \rho_3} - \ldots - \frac{\partial R_p}{\partial \rho_2}\frac{\partial R_p}{\partial \rho_3}\right) = 0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Par conséquent, dans le cas général, l'équation (5) sera satisfaite d'elle-même, sauf dans le cas où

$$\frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} = \frac{\partial H_3}{\partial \rho_1} = 0;$$

mais alors deux des équations (1) se réduisent à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1},$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_1 \partial \rho_3} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_3} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1};$$

donc

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} = a H_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho_1} = b H_1, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho_1} = c H_1,$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial \rho_1} = \alpha_i H_1 \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

a, b, c, α_1, ..., α_p étant des fonctions de la seule variable ρ_1, et les équations (3) et (4) nous donnent

$$ax + by + cz = \alpha_1 R_1 + \ldots + \alpha_p R_p + \beta,$$

β étant aussi une fonction de ρ_1.

En appliquant cette remarque au cas où

$$R_1 = R_2 = \ldots = R_p = 0,$$

on déduit que :

Les surfaces de deux familles d'un système triplement conjugué ne peuvent pas se couper suivant les trajectoires orthogonales des surfaces de la troisième famille sans former un système triple orthogonal, sauf dans le cas où la troisième famille est composée de surfaces moulures générales.

23. Nous nous occuperons spécialement des systèmes triplement conjugués Ω_1. Nous supposerons donc pour le réseau-trièdre (M) décrit par le point $M(x, y, z)$ que x, y, z, R et $x^2 + y^2 + z^2 - R^2$ satisfont au système (1).

Il est facile de voir que tout réseau-trièdre, ayant la même représentation sphérique qu'un réseau Ω_1, est lui aussi un réseau Ω_1. En effet,

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

nous savons que, si l'on a un système de solutions pour

$$\frac{1}{H'_i}\frac{\partial H'_k}{\partial \rho_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i},$$

les formules

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_i} = \frac{H'_i}{H_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial \rho_i} = \frac{H'_i}{H_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial \rho_i} = \frac{H'_i}{H_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_i}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

détermineront un réseau ayant la même représentation sphérique que (M). Définissons R′ par

$$\frac{\partial R'}{\partial \rho_i} = \frac{H'_i}{H_i}\frac{\partial R}{\partial \rho_i} \qquad (i = 1, 2, 3);$$

il est manifeste que R′ et $x'^2 + y'^2 + z'^2 - R'^2$ satisferont au même système de Laplace que x', y', z', car

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_i}\frac{\partial x'}{\partial \rho_k} + \frac{\partial y'}{\partial \rho_i}\frac{\partial y'}{\partial \rho_k} + \frac{\partial z_i}{\partial \rho_i}\frac{\partial z'}{\partial \rho_k} - \frac{\partial R'}{\partial \rho_i}\frac{\partial R'}{\partial \rho_k}$$
$$= \frac{H'_i H'_k}{H_i H_k}\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_k} + \frac{\partial y}{\partial \rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_k} + \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_k} - \frac{\partial R}{\partial \rho_i}\frac{\partial R}{\partial \rho_k}\right)$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3).$$

24. *Les réseaux-trièdres supplémentaires de* (M) *sont eux aussi des réseaux* Ω_1. — Comme tous les réseaux supplémentaires d'un réseau-trièdre donné ont la même représentation sphérique, il suffit de démontrer que cela a lieu pour un réseau particulier.

Nous considérons le réseau supplémentaire correspondant à la solution $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$, c'est-à-dire que nous posons

$$\xi\frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \eta\frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \zeta\frac{\partial z}{\partial \rho_i} = x\frac{\partial x}{\partial \rho_i} + y\frac{\partial y}{\partial \rho_i} + z\frac{\partial z}{\partial \rho_i} - R\frac{\partial R}{\partial \rho_i}$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Réciproquement, le réseau (M) se déduira du réseau (μ) décrit par le point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ par les formules

$$x\frac{\partial \xi}{\partial \rho_i} + y\frac{\partial \eta}{\partial \rho_i} + z\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_i} = \xi\frac{\partial \xi}{\partial \rho_i} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial \rho_i} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_i} - R_1\frac{\partial R_1}{\partial \rho_i}$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-R_1^2$ étant une solution du système (L_1) auquel satisfont ξ, η et ζ.

On déduit des équations précédentes

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2+R_1^2,$$

et il reste à démontrer que R_1 satisfait aussi au système (L_1).

Pour cela, remarquons d'abord que l'on a

$$\left(x-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x}{\partial \rho_i}-\xi\right)\frac{\partial x}{\partial \rho_k}+\left(y-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial y}{\partial \rho_k}-\eta\right)\frac{\partial y}{\partial \rho_k}$$
$$+\left(z-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z}{\partial \rho_k}-\zeta\right)\frac{\partial z}{\partial \rho_k}=0,$$

et comme

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho_i}\frac{\partial x}{\partial \rho_k}+\frac{\partial \eta}{\partial \rho_i}\frac{\partial y}{\partial \rho_k}+\frac{\partial \zeta}{\partial \rho_i}\frac{\partial z}{\partial \rho_k}=0,$$
$$(i\neq k=1,2,3),$$

on conclut que

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{l} x-\dfrac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\dfrac{\partial x}{\partial \rho_i}=\xi+\lambda_i\dfrac{\partial \xi}{\partial \rho_i},\qquad y-\dfrac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\dfrac{\partial y}{\partial \rho_i}=\eta+\lambda_i\dfrac{\partial \eta}{\partial \rho_i},\\ \qquad z-\dfrac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}=\zeta+\lambda_i\dfrac{\partial \zeta}{\partial \rho_i},\end{array}\right.$$

ce qui signifie que le réseau-triangle appuyé sur (M) et déduit à l'aide de la solution R est aussi appuyé sur le réseau (μ). Il résulte de là que

$$\lambda_i=-\frac{\theta_1}{\frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_i}}\qquad (i=1,2,3),$$

θ_1 étant une solution du système (L_1). Or, en multipliant les deux membres de chacune des équations (6) respectivement par $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, on tire

$$\lambda_i=-\frac{R_1}{\frac{\partial R_1}{\partial \rho_i}};$$

R_1 est donc bien une solution de (L_1).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

25. On peut étendre les considérations précédentes à un système de $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k} = a_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} + a_{ki} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k} + b_{ik} \theta \qquad (i \neq k = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons, en effet, qu'un tel système admette $n+3$ solutions liées par une relation quadratique. Il s'agit d'en déduire d'autres systèmes ayant la même propriété.

Remarquons d'abord qu'en utilisant une solution convenable on peut rendre $b_{ik} = 0$ et dire que le système ainsi réduit

$$(\mathrm{L}) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \, \partial \rho_k} = a_{ik} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} + a_{ki} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k}$$

admet les solutions $x_1, x_2, \ldots, x_n$, R et $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - R^2$.

Une transformation évidente est celle qui consiste à poser

$$\frac{\partial y_i}{\partial \rho_k} = \lambda_k \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k}, \qquad \frac{\partial R_1}{\partial \rho_k} = \lambda_k \frac{\partial R}{\partial \rho_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les λ_k sont des fonctions qui rendent les équations précédentes compatibles. On voit aisément qu'alors $y_1, y_2, \ldots, y_n$, R_1 et $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 - R_1^2$ sont des solutions d'un même système réduit de Laplace.

Il y a une autre transformation plus intéressante et qui correspond à la transformation supplémentaire des systèmes triplement conjugués.

Définissons $z_1, z_2, \ldots, z_n$ par les équations

$$(7) \qquad z_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + \ldots + z_n \frac{\partial x_n}{\partial \rho_i} = x_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + \ldots + x_n \frac{\partial x_n}{\partial \rho_i} - R \frac{\partial R}{\partial \rho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et R′ par

$$(8) \qquad (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + \ldots + (z_n - x_n)^2 = R^2 + R'^2.$$

Nous voulons montrer que $z_1, z_2, \ldots, z_n$, R′ et $z_1^2 + \ldots + z_n^2 - R'^2$ satisfont à un même système de Laplace de la forme (L).

T. 6

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Tout d'abord les équations (7) nous donnent

$$(9)\qquad \frac{\partial z_1}{\partial \rho_i}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_k}+\frac{\partial z_2}{\partial \rho_i}\frac{\partial x_2}{\partial \rho_k}+\ldots+\frac{\partial z_n}{\partial \rho_i}\frac{\partial x_n}{\partial \rho_k}=0 \qquad (i\neq k=1,2,\ldots,n),$$

d'où il résulte que $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfont à un système (L′) de même forme que L. D'autre part, on a de (8)

$$x_1\frac{\partial z_1}{\partial \rho_i}+x_2\frac{\partial z_2}{\partial \rho_i}+\ldots+x_n\frac{\partial z_n}{\partial \rho_i}=z_1\frac{\partial z_1}{\partial \rho_i}+\ldots+z_n\frac{\partial z_n}{\partial \rho_i}-R'\frac{\partial R'}{\partial \rho_i},$$

d'où l'on déduit immédiatement que $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2-R'^2$ satisfait au système (L′). Il nous reste à faire voir que R′ est aussi une solution du même système.

Pour cela nous remarquons que l'on a

$$\left(x_1-z_1-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \rho_k}+\ldots+\left(x_n-z_n-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x_n}{\partial \rho_i}\right)\frac{\partial x_n}{\partial \rho_k}=0$$
$$(i\neq k=1,2,\ldots,n),$$

et en comparant avec les équations (9) on tire

$$(10)\qquad x_1-z_1-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}=m_i\frac{\partial z_1}{\partial \rho_i},\qquad \ldots,\qquad x_n-z_n-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x_n}{\partial \rho_i}=m_i\frac{\partial z_n}{\partial \rho_i}$$
$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Multiplions les deux membres de chaque équation (10) respectivement par $x_1-z_1, \ldots, x_n-z_n$ et ajoutons; on trouve, en tenant compte des autres équations,

$$m_i=-\frac{R'}{\frac{\partial R'}{\partial \rho_i}},$$

et alors les équations

$$x_1-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_i}=z_1-\frac{R'}{\frac{\partial R'}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z_1}{\partial \rho_i},\qquad \ldots,\qquad x_n-\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x_n}{\partial \rho_i}=z_n-\frac{R'}{\frac{\partial R'}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z_n}{\partial \rho_i}$$

nous montrent que R′ est une solution de (L′).

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

D'une manière plus générale, si l'on détermine $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ par les équations

$$\xi_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho_i} + \xi_2 \frac{\partial x_2}{\partial \rho_i} + \ldots + \xi_n \frac{\partial x_n}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

θ étant une solution quelconque de (L), on aura évidemment des relations de la forme

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \rho_k} = \mu_k \frac{\partial z_i}{\partial \rho_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et en déterminant R_2 par

$$\frac{\partial R_2}{\partial \rho_k} = \mu_k \frac{\partial R'}{\partial \rho_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, R_2 et $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 - R_2^2$ seront des solutions d'un même système de Laplace de la forme (L).

26. Étant donc donné un réseau-trièdre Ω_1 décrit par le point $M(x, y, z)$, nous avons vu que les formules

$$\xi \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \eta \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \zeta \frac{\partial z}{\partial \rho_i} = x \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + y \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + z \frac{\partial z}{\partial \rho_i} - R \frac{\partial R}{\partial \rho_i},$$
$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = R^2 + R_1^2$$

nous donnent un autre réseau Ω_1 décrit par $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, et que les triangles dont les sommets $M_i(x_i, y_i, z_i)$ sont définis par

$$x_i = x - \frac{R}{\dfrac{\partial R}{\partial \rho_i}} \frac{\partial x}{\partial \rho_i} = \xi - \frac{R_1}{\dfrac{\partial R_1}{\partial \rho_i}} \frac{\partial \xi}{\partial \rho_i},$$

et des formules analogues pour y_i et z_i, forment un réseau-triangle qui s'appuie sur les deux réseaux (M) et (μ).

Remarquons maintenant que l'on a

$$(x - \xi)(x_i - x_k) + (y - \eta)(y_i - y_k) + (z - \zeta)(z_i - z_k) = 0;$$

la droite $M\mu$ est donc perpendiculaire au plan du triangle $M_1M_2M_3$, et comme, en vertu de la transformation supplémentaire $M_i\mu$ est perpen-

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

diculaire au plan des droites MM_k et MM_l, la droite $M\mu$ est l'intersection des plans menés par chaque arête du trièdre formé par les droites MM_1, MM_2 et MM_3, perpendiculairement à la face opposée, nous l'appellerons la *hauteur du trièdre*.

Il résulte donc que pour le réseau (M) les réseaux-triangles appuyés déduits par la méthode de M. Darboux à l'aide des solutions R + const. sont parallèles et leurs plans sont perpendiculaires sur la hauteur du trièdre des tangentes relatif à M.

Considérons de plus près le réseau-triangle $(M_1M_2M_3)$. On pourrait démontrer directement que le côté M_iM_k forme pour $\rho_l =$ const. une congruence cyclique; il suffirait de faire voir que la condition nécessaire et suffisante donnée par M. Guichard est vérifiée. Nous démontrerons ce fait en établissant qu'il existe deux systèmes triples orthogonaux qui s'appuient sur le réseau $(M_1M_2M_3)$.

En effet, construisons un trièdre trirectangle de sommet $M'(x', y', z')$ dont les arêtes passent par M_1, M_2 et M_3. On a

$$(11)\qquad (x'-x_i)(x'-x_k)+(y'-y_i)(y'-y_k)+(z'-z_i)(z'-z_k)=0$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3);$$

d'ailleurs il est manifeste qu'on a aussi

$$(12)\qquad (x'-x)(x_i-x_k)+(y'-y)(y_i-y_k)+(z'-z)(z_i-z_k)=0.$$

Différentions (11) par rapport à ρ_l, on aura

$$S(x'-x_i)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l}+S(x'-x_k)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l}=S(x'-x_i)\frac{\partial x_k}{\partial \rho_l}+S(x'-x_k)\frac{\partial x_i}{\partial \rho_l},$$

où nous avons employé le signe de sommation de Lamé.

Or

$$S(x'-x_i)\frac{\partial x_k}{\partial \rho_l}=a_{kl}\,S(x'-x_i)(x_k-x_l)=0,$$

$$S(x'-x_k)\frac{\partial x_i}{\partial \rho_l}=a_{il}\,S(x'-x_k)(x_i-x_l)=0,$$

donc

$$(13)\qquad S(x'-x_i)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l}+S(x'-x_k)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l}=0.$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Différentions maintenant (12) par rapport à ρ_l, on aura

$$S(x_i - x_k)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l} = S(x_i - x_k)\frac{\partial x}{\partial \rho_l} + S\,x\frac{\partial x_i}{\partial \rho_l} + S\,x\frac{\partial x_k}{\partial \rho_l},$$

et l'on verra aisément que cette équation se réduit à

$$S(x_i - x_k)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l} = 0. \tag{14}$$

Des équations (13) et (14), on tire

$$(x' - x_i)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l} + (y' - y_i)\frac{\partial y'}{\partial \rho_l} + (z' - z_i)\frac{\partial z'}{\partial \rho_l} = 0,$$
$$(x' - x_k)\frac{\partial x'}{\partial \rho_l} + (y' - y_k)\frac{\partial y'}{\partial \rho_l} + (z' - z_k)\frac{\partial z'}{\partial \rho_l} = 0$$
$$(i \neq k \neq l = 1, 2, 3),$$

et de là

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_l} = \alpha_l(x' - x_l), \qquad \frac{\partial y'}{\partial \rho_l} = \alpha_l(y' - y_l), \qquad \frac{\partial z'}{\partial \rho_l} = \alpha_l(z' - z_l) \qquad (l = 1, 2, 3),$$

ce qui prouve que le point $M'(x', y', z')$ décrit un système triple orthogonal.

Il est évident que le symétrique du point M' par rapport au plan $M_1M_2M_3$ décrit aussi un système triple orthogonal, mais nous reviendrons plus loin sur ce point.

27. Nous sommes conduit à nous occuper des réseaux-triangles décrits par des triangles $M_1M_2M_3$ dont les côtés M_iM_k forment pour $\rho_l =$ const. des congruences cycliques.

Nous définissons les sommets M_i du triangle par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial \rho_k}(x_i - x_k),\\ \frac{\partial y_i}{\partial \rho_k} &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial \rho_k}(y_i - y_k),\\ \frac{\partial z_i}{\partial \rho_k} &= \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial \rho_k}(z_i - z_k)\end{aligned}\right. \tag{15}$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3).$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Un calcul facile montre que $x_i - x_k$, $y_i - y_k$, $z_i - z_k$ satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho_i \partial \rho_k} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_i} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_k}{\partial \rho_i} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_k} + \mathrm{L}_{ik} \theta.$$

Pour que les côtés $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$, $\mathrm{M}_3\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ décrivent des congruences cycliques, quand respectivement $\rho_1 =$ const., $\rho_2 =$ const. et $\rho_3 =$ const., il faut et il suffit, d'après le théorème de M. Guichard (n° 3), que l'on ait

$$(16) \qquad \begin{cases} (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \mathrm{R}_3 h_2^2 + \mathrm{R}_2 h_3^2, \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \mathrm{S}_1 h_3^2 + \mathrm{S}_3 h_1^2, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \mathrm{T}_2 h_1^2 + \mathrm{T}_1 h_2^2, \end{cases}$$

les R_i, S_i, T_i étant des fonctions qui ne dépendent pas de la variable ρ_i.

Nous nous proposons de faire voir que

$$\mathrm{S}_3 = \mathrm{T}_2 = a_1, \qquad \mathrm{R}_3 = \mathrm{T}_1 = a_2, \qquad \mathrm{R}_2 = \mathrm{S}_1 = a_3,$$

a_i désignant une fonction de ρ_i seulement.

Prenons un point quelconque (ξ, η, ζ) sur le cercle d'intersection des sphères

$$(\mathrm{X} - x_2)^2 + (\mathrm{Y} - y_2)^2 + (\mathrm{Z} - z_2)^2 = \mathrm{R}_3 h_2^2,$$
$$(\mathrm{X} - x_3)^2 + (\mathrm{Y} - y_3)^2 + (\mathrm{Z} - z_3)^2 = \mathrm{R}_2 h_3^2,$$

il est manifeste que l'on a

$$(17) \qquad (\xi - x_2)(\xi - x_3) + (\eta - y_2)(\eta - y_3) + (\zeta - z_2)(\zeta - z_3) = 0.$$

De l'équation

$$(\xi - x_2)^2 + (\eta - y_2)^2 + (\zeta - z_2)^2 = \mathrm{R}_3 h_2^2$$

on déduit

$$2 \mathbf{S} (\xi - x_2) \frac{\partial \xi}{\partial \rho_1} = - \frac{2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \rho_1} \mathrm{S}(\xi - x_2)(x_1 - \xi) + \frac{\partial \mathrm{R}_3}{\partial \rho_1} h_2^2,$$

et de

$$(\xi - x_3)^2 + (\eta - y_3)^2 + (\zeta - z_3)^2 = \mathrm{R}_2 h_3^2$$

on tire

$$2 \mathbf{S} (\xi - x_3) \frac{\partial \xi}{\partial \rho_1} = - \frac{2}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \rho} \mathrm{S}(\xi - x_3)(x_1 - \xi) + \frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial \rho_1} h_3^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

et comme, en différentiant (17), on a

$$2\,S(\xi - x_2)\frac{\partial \xi}{\partial \rho_1} + 2\,S(\xi - x_3)\frac{\partial \xi}{\partial \rho_1}$$
$$= -\frac{2}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \rho_1} S(\xi - x_2)(x_1 - \xi) - \frac{2}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \rho_1} S(\xi - x_3)(x_1 - \xi),$$

il résulte

$$\frac{\partial R_3}{\partial \rho_1} h_2^2 + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} h_3^2 = 0.$$

Cela établi, différentions l'équation

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = R_3 h_2^2 + R^2 h_3^2,$$

par rapport à ρ_1 en tenant compte des équations (15) et (16), on trouvera

$$(S_3 - T_2) h_1^2 + (R_3 - T_1) h_2^2 + (S_1 - R_2) h_3^2 = 0,$$

en supposant

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{h_2}{h_3}\right) \neq 0.$$

On démontrerait de la même manière que l'on a aussi

$$(S_3 - T_2) h_1^2 + (R_3 - T_1) h_2^2 + (R_2 - S_1) h_3^2 = 0,$$
$$(S_3 - T_2) h_1^2 + (T_1 - R_3) h_2^2 + (S_1 - R_2) h_3^2 = 0,$$

en supposant

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{h_3}{h_1}\right) \neq 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) \neq 0.$$

En laissant donc de côté les cas tout à fait particuliers où l'une des égalités

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(\frac{h_k}{h_l}\right) = 0 \qquad (i \neq k \neq l = 1, 2, 3),$$

serait vérifiée, on voit des égalités précédentes que

$$S_3 = T_2 = a_1, \qquad R_3 = T_1 = a_2, \qquad R_2 = S_1 = a_3,$$

et comme h_i n'est définie qu'à une fonction de ρ_i près, on pourra écrire

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = h_2^2 + h_3^2,$$
$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = h_3^2 + h_1^2,$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les côtés $M_i M_k$ forment pour $\rho_l =$ const. des congruences cycliques.

Les équations précédentes nous donnent immédiatement

$$
\begin{aligned}
(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) + (z_1 - z_2)(z_1 - z_3) &= h_1^2,\\
(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_3)(y_2 - y_1) + (z_2 - z_3)(z_2 - z_1) &= h_2^2,\\
(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_3 - y_1)(y_3 - y_2) + (z_3 - z_1)(z_3 - z_2) &= h_3^2,
\end{aligned}
$$

et comme en vertu des équations (15),

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_3} &= \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial h_1}{\partial \rho_3}\mathrm{S}(x_2 - x_1)(x_3 - x_1),\\
\mathrm{S}\frac{\partial x_2}{\partial \rho_3}\frac{\partial x_2}{\partial \rho_1} &= \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial \rho_3}\frac{\partial h_2}{\partial \rho_1}\mathrm{S}(x_3 - x_2)(x_1 - x_2),\\
\mathrm{S}\frac{\partial x_3}{\partial \rho_1}\frac{\partial x_3}{\partial \rho_2} &= \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial \rho_1}\frac{\partial h_3}{\partial \rho_2}\mathrm{S}(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),
\end{aligned}
$$

il en résulte

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial x_1}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial y_1}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial z_1}{\partial \rho_3} &= \frac{\partial h_1}{\partial \rho_2}\frac{\partial h_1}{\partial \rho_3},\\
\frac{\partial x_2}{\partial \rho_3}\frac{\partial x_2}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y_2}{\partial \rho_3}\frac{\partial y_2}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z_2}{\partial \rho_3}\frac{\partial z_2}{\partial \rho_1} &= \frac{\partial h_2}{\partial \rho_3}\frac{\partial h_2}{\partial \rho_1},\\
\frac{\partial x_3}{\partial \rho_1}\frac{\partial x_3}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y_3}{\partial \rho_1}\frac{\partial y_3}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z_3}{\partial \rho_1}\frac{\partial z_3}{\partial \rho_2} &= \frac{\partial h_3}{\partial \rho_1}\frac{\partial h_3}{\partial \rho_2}.
\end{aligned}
$$

Remarquons maintenant que les relations auxquelles satisfont les quantités h pour la compatibilité des équations (15), expriment que, pour $\rho_i =$ const., x_i, y_i, z_i et h_i sont des solutions d'une même équation de Laplace, et le dernier système d'équations montre, de plus, que $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - h_i^2$ satisfait aussi à la même équation.

La sphère de centre M_i et de rayon h_i enveloppe, par conséquent, pour $\rho_i =$ const., deux surfaces sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent. Les deux points de contact de la sphère avec ses enveloppes sont déterminées par les équations

$$
\begin{aligned}
(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2 + (Z - z_i)^2 &= h_i^2,\\
(X - x_i)\frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} + (Y - y_i)\frac{\partial y_i}{\partial \rho_k} + (Z - z_i)\frac{\partial z_i}{\partial \rho_k} + h_i\frac{\partial h_i}{\partial \rho_k} &= 0,\\
(X - x_i)\frac{\partial x_i}{\partial \rho_l} + (Y - y_i)\frac{\partial y_i}{\partial \rho_l} + (Z - z_i)\frac{\partial z_i}{\partial \rho_l} + h_i\frac{\partial h_i}{\partial \rho_l} &= 0,
\end{aligned}
$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

les dernières peuvent être remplacées aisément par

$$(X - x_k)^2 + (Y - y_k)^2 + (Z - z_k)^2 = h_k^2,$$
$$(X - x_l)^2 + (Y - y_l)^2 + (Z - z_l)^2 = h_l^2;$$

les points de contact se confondent donc avec les sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par M_1, M_2, M_3.

Il résulte alors que les sphères de centres M_1, M_2, M_3 et ayant pour rayons h_1, h_2, h_3 nous donnent pour $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const.}$ et $\rho_3 = \text{const.}$ les mêmes points de contact avec leurs enveloppes respectives. Soit M un de ces points de contact, les droites MM_i et MM_k sont (Darboux, *Théorie des surfaces*, Vol. II, p. 327) les tangentes aux lignes de courbure de la surface $\rho_l = \text{const.}$ décrite par le point M. Par conséquent M *décrit un système triple orthogonal.*

28. Désignons par Δ la perpendiculaire élevée au point de rencontre des hauteurs du triangle $M_1M_2M_3$ sur le plan de ce triangle. Nous voulons démontrer que, s'il existe sur Δ un point $M'(x', y, z')$ qui décrit un réseau-trièdre appuyé sur $(M_1M_2M_3)$, ce réseau-trièdre est Ω_1; plus généralement, si le triangle $M_1M_2M_3$ forme un réseau-triangle quelconque et si, sur la droite Δ, il y a un point M' qui décrit un réseau-trièdre appuyé sur $(M_1M_2M_3)$, le réseau-triangle $(M_1M_2M_3)$ est cyclique et le réseau-trièdre (M') est Ω_1.

En effet, le point M' étant sur Δ on a

$$(18)\quad \begin{cases} (x'-x_1)(x_2-x_3)+(y'-y_1)(y_2-y_3)+(z'-z_1)(z_2-z_3)=0, \\ (x'-x_2)(x_3-x_1)+(y'-y_2)(y_3-y_1)+(z'-z_2)(z_3-z_1)=0, \\ (x'-x_3)(x_1-x_2)+(y'-y_3)(y_1-y_2)+(z'-z_3)(z_1-z_2)=0, \end{cases}$$

et décrivant un réseau appuyé sur $(M_1M_2M_3)$

$$(19)\quad x_i = x' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x'}{\partial \rho_i}, \qquad y_i = y' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial y'}{\partial \rho_i}, \qquad z_i = z' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z'}{\partial \rho_i}$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

R étant une solution du système de Laplace relatif au réseau (M'). Or, de (18), on tire

$$S(x'-x_2)(x'-x_3) = S(x'-x_3)(x'-x_1) = S(x'-x_1)(x'-x_2) = M^2,$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

M^2 étant la valeur commune des trois expressions, et, à l'aide de (19), on aura

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_i}\frac{\partial x'}{\partial \rho_k}+\frac{\partial y'}{\partial \rho_i}\frac{\partial y'}{\partial \rho_k}+\frac{\partial z'}{\partial \rho_i}\frac{\partial z'}{\partial \rho_k}=\frac{M^2}{R^2}\frac{\partial R}{\partial \rho_i}\frac{\partial R}{\partial \rho_k}.$$

Différentions par rapport à ρ_1 l'égalité

$$(x'-x_2)(x'-x_3)+(y'-y_2)(y'-y_3)+(z'-z_2)(z'-z_3)=M^2,$$

et remplaçons $\frac{\partial x'}{\partial \rho_1}, \frac{\partial y'}{\partial \rho_1}, \frac{\partial z'}{\partial \rho_1}$ par leurs valeurs tirées de (19), on trouve

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho_1}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho_1},$$

et l'on aura de même

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho_2}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho_2},\qquad \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial \rho_3}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho_3};$$

donc

$$M=kR,$$

k étant une constante qu'on peut prendre, sans diminuer la généralité, égale à l'unité.

On a, par conséquent,

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_i}\frac{\partial x'}{\partial \rho_k}+\frac{\partial y'}{\partial \rho_i}\frac{\partial y'}{\partial \rho_k}+\frac{\partial z'}{\partial \rho_i}\frac{\partial z'}{\partial \rho_k}=\frac{\partial R}{\partial \rho_i}\frac{\partial R}{\partial \rho_k},$$

ce qui prouve que le point $M'(x', y', z')$ décrit un réseau Ω_1. Les résultats du n° 26 nous montrent alors que le réseau-triangle $(M_1 M_2 M_3)$ est cyclique.

Nous avons supposé dans le calcul précédent $M \neq 0$, car nous savions d'avance qu'il y avait deux systèmes triples orthogonaux s'appuyant sur $(M_1 M_2 M_3)$.

On reconnaît aisément qu'en dehors de la droite Δ il n'existe pas de point décrivant un réseau-trièdre Ω_1 s'appuyant sur le réseau $(M_1 M_2 M_3)$.

29. Nous voulons démontrer maintenant que les réseaux-trièdres appuyés sur $(M_1 M_2 M_3)$, et décrits par des points qui ne sont pas situés sur Δ, sont tous des réseaux Ω_2.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Soit M le sommet d'un des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par M_1, M_2 et M_3. Nous avons montré que le point M (x, y, z) décrit un système triple orthogonal. Soit $M'(x', y', z')$ un point qui décrit un système triplement conjugué quelconque s'appuyant sur $(M_1 M_2 M_3)$. La droite MM' décrit une congruence triple dont les développables correspondent aux courbes suivant lesquelles ρ_1, ρ_2, ρ_3 varient respectivement, et nous savons qu'il existe sur MM' un point $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ qui décrit un système triple orthogonal ayant même représentation sphérique que (M). Si l'on pose alors

$$\theta_1 = x - \xi, \qquad \theta_2 = y - \eta, \qquad \theta_3 = z - \zeta,$$

on aura que 1, θ_1, θ_2, θ_3 et $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ sont des solutions d'un même système de Laplace. D'une manière plus générale, si ω_1, ω_2, ω_3 sont des paramètres directeurs quelconques de la droite MM', on aura

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2 + \omega'^2,$$

ω et ω' satisfaisant au même système de Laplace que ω_1, ω_2 et ω_3.

Cela étant posé, prenons un des foyers $M''(x'', y'', z'')$ de MM', celui qui décrit pour ρ_1 variant seul une courbe tangente à la droite MM'; x'', y'', z'' seront des solutions d'un certain système de Laplace (L'') de la forme (1). En vertu de la remarque précédente, on aura

$$\left(\frac{\partial x''}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y''}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z''}{\partial \rho_1}\right)^2 = \left(\frac{\partial R'}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R''}{\partial \rho_1}\right)^2, \tag{20}$$

$\frac{\partial x''}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial y''}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial z''}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial R'}{\partial \rho_1}$ et $\frac{\partial R''}{\partial \rho_1}$ étant des solutions d'un même système de Laplace, et l'on pourra faire en sorte que R' et R'' satisfassent au système (L''). Mais alors (20) nous donne par différentiation

$$\frac{\partial x''}{\partial \rho_i}\frac{\partial x''}{\partial \rho_k} + \frac{\partial y''}{\partial \rho_i}\frac{\partial y''}{\partial \rho_k} + \frac{\partial z''}{\partial \rho_i}\frac{\partial z''}{\partial \rho_k} = \frac{\partial R'}{\partial \rho_i}\frac{\partial R'}{\partial \rho_k} + \frac{\partial R''}{\partial \rho_i}\frac{\partial R''}{\partial \rho_k}$$
$$(i \neq k = 1, 2, 3).$$

$x''^2 + y''^2 + z''^2 - R'^2 - R''^2$ est donc aussi une solution de (L''). *Le point* M'' *et, en général, les foyers de* MM' *décrivent des réseaux* Ω_2.

Revenons maintenant au point M'. Il est clair qu'on peut le déduire

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

de M″ par les formules

$$x' = x'' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial x''}{\partial \rho_1}, \qquad y' = y'' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial y''}{\partial \rho_1}, \qquad z' = z'' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial z''}{\partial \rho_2},$$

R étant une certaine solution de (L″).

Posons

$$R_1 = R' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial R'}{\partial \rho_1}, \qquad R_2 = R'' - \frac{R}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial R'}{\partial \rho_2},$$

R_1 et R_2 satisferont évidemment au même système (L′) que x', y' et z'. Nous voulons démontrer que $x'^2 + y'^2 + z'^2 - R_1^2 - R_2^2$ est aussi une solution de (L′).

On a d'abord

$$S \frac{\partial x'}{\partial \rho_2} \frac{\partial x'}{\partial \rho_3} = \left(1 - \frac{R}{H''_2} \frac{\frac{\partial H''_2}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \right) \left(1 - \frac{R}{H''_3} \frac{\frac{\partial H''_3}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \right) S \left(\frac{\partial x''}{\partial \rho_2} - \frac{\frac{\partial R}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial x''}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\partial x''}{\partial \rho_3} - \frac{\frac{\partial R}{\partial \rho_3}}{\frac{\partial R}{\partial \rho_1}} \frac{\partial x''}{\partial \rho_1} \right),$$

et en vertu de (20) et (21) on obtiendra

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_2} \frac{\partial x'}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y'}{\partial \rho_2} \frac{\partial y'}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z'}{\partial \rho_2} \frac{\partial z'}{\partial \rho_3} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_1}{\partial \rho_3} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_3},$$

H''_1, H''_2 et H''_3 désignant les quantités habituelles H qui interviennent dans le système (L″).

On trouvera par un calcul un peu plus long

$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_3} \frac{\partial x'}{\partial \rho_1} + \frac{\partial y'}{\partial \rho_3} \frac{\partial y'}{\partial \rho_1} + \frac{\partial z'}{\partial \rho_3} \frac{\partial z'}{\partial \rho_1} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_3} \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_3} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1},$$
$$\frac{\partial x'}{\partial \rho_1} \frac{\partial x'}{\partial \rho_2} + \frac{\partial y'}{\partial \rho_1} \frac{\partial y'}{\partial \rho_2} + \frac{\partial z'}{\partial \rho_1} \frac{\partial z'}{\partial \rho_2} = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2},$$

ce qui prouve qu'en général le point M′ décrit un réseau Ω_2. Il se peut très bien que le réseau-trièdre (M′) soit Ω_1 ou même un système triple orthogonal. Pour cela il faudrait que R ne fût pas une solution quelconque de (L″).

On reconnaît facilement que pour que M′ décrive un réseau Ω_1 il

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

faudra prendre $R = R' +$ const. ou $R = R'' +$ const. *Il y a par conséquent deux séries de réseaux Ω_1, les réseaux d'une même série ayant la même représentation sphérique.*

De même, pour que M' décrive un système triple orthogonal il faudra prendre $R = R' + iR'' +$ const. ou $R = R' - iR'' +$ const. *On a donc deux séries de systèmes orthogonaux, les systèmes d'une même série se déduisant de l'un d'entre eux par une transformation de Combescure.*

Il résulte alors que si l'on prend un point M' qui décrit un réseau-trièdre s'appuyant sur le réseau-triangle $(M_1 M_2 M_3)$ et qui ne se trouve pas sur la droite Δ, comme il ne peut décrire ni un système triple orthogonal, ni un réseau Ω_1, il décrit forcément, d'après ce qui précède, un réseau Ω_2.

30. Il nous reste à démontrer qu'il y a *effectivement* sur Δ des points qui décrivent des réseaux Ω_1 s'appuyant sur $(M_1 M_2 M_3)$.

Comme la droite Δ contient les sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par M_1, M_2 et M_3, elle forme une congruence triple qui appartient à la classe des congruences formées par les droites MM' que nous venons d'étudier. On en conclut que les réseaux-trièdres focaux de cette congruence triple sont des réseaux Ω_2, et que les réseaux décrits par les points de Δ peuvent se grouper en trois classes :

1° Deux séries de systèmes triples orthogonaux, les systèmes d'une même série se déduisant de l'un d'entre eux par une transformation de Combescure.

Si l'on considère les sommets M et N des deux trièdres trirectangles dont les arêtes passent par M_1, M_2 et M_3, ils décrivent des systèmes triples orthogonaux appartenant l'un à la première série, l'autre à la seconde.

2° Deux séries de réseaux Ω_1, les réseaux d'une même série ayant la même représentation sphérique.

Soit m un point de Δ qui décrit un réseau Ω_1. Il est aisé de voir que Δ est la hauteur du trièdre formé par les tangentes aux courbes suivant lesquelles une seule des variables ρ varie. Il résulte alors que le réseau-triangle cyclique déduit du réseau (m) est parallèle au réseau considéré $(M_1 M_2 M_3)$, et que, par conséquent, il y a un réseau-trièdre appuyé sur $(M_1 M_2 M_3)$ et ayant même représentation sphérique que (m);

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

le point qui décrit ce réseau se trouve évidemment sur Δ. *Il y a donc deux points seulement qui décrivent des réseaux Ω_1 appuyés sur* $(M_1M_2M_3)$.

3° Tous les autres sont des réseaux Ω_2, mais il n'y a pas de point sur Δ décrivant un réseau Ω_2 s'appuyant sur $(M_1M_2M_3)$.

31. Nous considérons maintenant une classe spéciale de réseaux-triangles cycliques.

Supposons que le trièdre formé par les droites qui joignent l'origine aux sommets du triangle $M_1M_2M_3$ du réseau soit trirectangle. Le côté M_iM_k forme lorsque $\rho_l =$ const. une congruence cyclique, car la sphère décrite sur le segment focal M_iM_k comme diamètre passe par un point fixe (*Bulletin* de M. Darboux, 1898). Le réseau $(M_1M_2M_3)$ est donc cyclique.

On a pour les sommets $M_i(x_i, y_i, z_i)$ les relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} &= \frac{1}{K_i}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k}(x_i - x_k),\\ \frac{\partial y_i}{\partial \rho_k} &= \frac{1}{K_i}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k}(y_i - y_k),\\ \frac{\partial z_i}{\partial \rho_k} &= \frac{1}{K_i}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k}(z_i - z_k), \end{aligned}\right.$$

$$(i \neq k = 1, 2, 3);$$

les K satisfont aux relations

$$\frac{\partial^2 K_i}{\partial \rho_k\,\partial \rho_l} = \frac{1}{K_k}\frac{\partial K_k}{\partial \rho_l}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k} + \frac{1}{K_l}\frac{\partial K_l}{\partial \rho_k}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_l} \qquad (i \neq k \neq l = 1, 2, 3).$$

Par hypothèse, on a

$$x_ix_k + y_iy_k + z_iz_k = 0 \qquad (i \pm k = 1, 2, 3),$$

et alors les équations (21) conduisent à

$$x_i\frac{\partial x_i}{\partial \rho_k} + y_i\frac{\partial y_i}{\partial \rho_k} + z_i\frac{\partial z_i}{\partial \rho_k} = \frac{1}{K_i}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

$$x_i\frac{\partial x_i}{\partial \rho_l} + y_i\frac{\partial y_i}{\partial \rho_l} + z_i\frac{\partial z_i}{\partial \rho_l} = \frac{1}{K_i}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_l}(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

et comme K_i n'est défini qu'à un facteur qui est fonction de ρ_i seulement, on peut écrire

$$K_i = r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}.$$

Cela étant, posons

$$x_i = r_i X_i, \qquad y_i = r_i Y_i, \qquad z_i = r_i Z_i,$$

X_i, Y_i, Z_i seront les cosinus directeurs de OM_i.

On aura alors des équations précédentes

$$\frac{\partial X_i}{\partial \rho_k} = -\frac{1}{K_k}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k} X_k,$$

et des formules analogues pour les Y et les Z. Il est évident qu'on peut poser

$$\frac{\partial X_i}{\partial \rho_i} = \lambda_i X_i + \mu_i X_k + \nu_i X_l,$$

et un calcul simple montre qu'on a

$$\lambda_i = 0, \qquad \mu_i = -\beta_{ki}, \qquad \nu_i = -\beta_{li},$$

où

$$\beta_{ik} = -\frac{1}{K_k}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k};$$

de plus, les quantités β satisfont aux relations

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_l} = \beta_{il}\beta_{lk}, \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \rho_k} + \beta_{li}\beta_{lk} = 0.$$

L'ensemble des trièdres $OM_1M_2M_3$ *forme donc la représentation sphérique du système triple orthogonal le plus général.*

Il résulte de là une transformation des systèmes triples orthogonaux. En effet, si l'on se donne un système orthogonal, on a les quantités β_{ik}; les équations

$$\frac{1}{K_k}\frac{\partial K_i}{\partial \rho_k} = -\beta_{ik} \qquad (i \neq k = 1, 2, 3)$$

nous détermineront les K. Posons alors

$$x_i = K_i X_i, \qquad y_i = K_i Y_i, \qquad z_i = K_i Z_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

on aura les triangles $M_1M_2M_3$.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

Le symétrique de l'origine par rapport au plan du triangle $M_1M_2M_3$ *décrit un système triple orthogonal transformé du premier.*

Cette transformation est un cas singulier d'une transformation due à Ribaucour (*Bulletin de la Société philomathique*, 1869) et qui résulte d'ailleurs d'une manière naturelle de cette dernière Partie de notre travail.

Supposons, en effet, que x, y, z et $x^2+y^2+z^2$ satisfassent à un même système de Laplace de la forme (1), et soit encore θ une solution du même système.

Définissons maintenant les points $M_i(x_i, y_i, z_i)$ à l'aide des équations

$$x_i = x - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}}\frac{\partial x}{\partial\rho_i}, \qquad y_i = y - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}}\frac{\partial y}{\partial\rho_i}, \qquad z_i = z - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}}\frac{\partial z}{\partial\rho_i}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Il est manifeste que l'ensemble des triangles $M_1M_2M_3$ forme un réseau-triangle cyclique et que, par conséquent, le symétrique du point $M(x, y, z)$ par rapport au plan du triangle $M_1M_2M_3$ décrit un nouveau système triple orthogonal. C'est en cela que consiste la transformation de Ribaucour.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 mai 1899.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 mai 1899.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Recherches récentes sur le prolongement analytique d'une fonction définie par un développement taylorien.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 mai 1899.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 20 mai 1899.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

27239 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Document numérisé par la Bibliothèque universitaire Pierre et Marie Curie – UPMC – Cote : HF uf 166 39/5 -4