

HF uf 166. (38)<sup>2</sup> 4<sup>0</sup>  
28

1732

N° D'ORDRE :  
**955.**

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

**PAR M. F. NAU,**  
Du Clergé de Paris.



- 1<sup>re</sup> THÈSE. — FORMATION ET EXTINCTION DU CLAPOTIS.
- 2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le

**1897, devant la Commission d'examen.**



MM. APPELL, *Président.*  
 BOUSSINESQ, } *Examineurs.*  
 KOENIGS, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897



# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

### MM.

|                                   |                         |   |
|-----------------------------------|-------------------------|---|
| <b>DOYEN</b> .....                | DARBOUX, professeur.... | Géométrie supérieure.                             |
| <b>PROFESSEUR HONORAIRE</b> ..... | HERMITE.                |   |
|                                   | DE LACAZE-DUTHIERS..    | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.         |
|                                   | TROOST .....            | Chimie.   |
|                                   | FRIEDEL.....            | Chimie organique.                                 |
|                                   | LIPPMANN.....           | Physique.   |
|                                   | HAUTEFEUILLE.....       | Minéralogie.                                      |
|                                   | BOUTY.....              | Physique.   |
|                                   | APPELL.....             | Mécanique rationnelle.                            |
|                                   | DUCLAUX.....            | Chimie biologique.                                |
|                                   | BOUSSINESQ.....         | Calcul des probabilités et Physique mathématique. |
|                                   | PICARD.....             | Algèbre supérieure.                               |
|                                   | H. POINCARÉ.....        | Astronomie mathématique et Mécanique céleste.     |
| <b>PROFESSEURS</b> .....          | YVES DELAGE.....        | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.         |
|                                   | BONNIER.....            | Botanique.  |
|                                   | DASTRE.....             | Physiologie.                                      |
|                                   | DITTE.....              | Chimie.   |
|                                   | MUNIER-CHALMAS.....     | Géologie.   |
|                                   | GIARD.....              | Zoologie. Évolution des êtres organisés.          |
|                                   | WOLF.....               | Astronomie physique.                              |
|                                   | KOENIGS.....            | Mécanique physique et expérimentale.              |
|                                   | VÉLAIN.....             | Géographie physique.                              |
|                                   | N.....                  | Calcul différentiel et Calcul intégral.           |
|                                   | CHATIN.....             | Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.         |
|                                   | JOLY.....               | Chimie.   |
| <b>PROFESSEURS ADJOINTS</b> ..... | PELLAT.....             | Physique.   |
|                                   | PAINLEVÉ.....           | Calcul différentiel et Calcul intégral.           |
|                                   | PUISEUX.....            | Mécanique et Astronomie.                          |
| <b>SECRETARE</b> .....            | FOUSSEREAU.             |   |

A

**MONSIEUR BOUSSINESQ,**

Hommage respectueux de son élève.

---

## PRÉFACE.

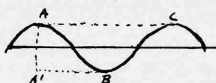
---

Les ondes clapoteuses ou oscillant sur place ont été étudiées pour la première fois par *Newton* <sup>(1)</sup> qui comparait le mouvement d'une colonne d'eau de longueur totale  $2l$  dans un tube en U au mouvement d'un pendule de longueur  $l$ . Le rapport de la force accélératrice à la force totale est le même dans les deux cas : il en concluait donc que le mouvement était régi par les mêmes lois et appliquait à l'oscillation de l'eau la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Il étendait ce résultat au mouvement de l'eau libre.

Fig. 1.



Ainsi le point A, dit-il, descend en A' pendant qu'un pendule de longueur égale à  $\frac{A'B}{2}$  (demi-distance primitive d'un ventre à un nœud) exécute une demi-oscillation. Il avertit que ce résultat n'est exact qu'en négligeant les frottements extérieurs (*resistentiam aquæ quæ oritur ab attritu canalis hinc non considero*) et en supposant que les molécules se déplacent suivant des verticales, tandis qu'elles se meuvent, dit-il, *verius per circumulum*.

*Daniel Bernoulli*, s'occupant accessoirement de la figure ondoyante

---

<sup>(1)</sup> *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, t. II, sect. VIII, prop. 44, 45 et 46.

de la mer (1), la représente par la formule

$$z = H \sin \frac{\alpha t}{T} \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Cette formule ne fait que traduire l'hypothèse de Newton (ici  $L = A'B$ ); les nœuds sont fixes aux points  $x = 0, \pm L, \pm 2L, \dots$ ; de plus, le mouvement des molécules a lieu suivant des verticales et reste le même à toutes les profondeurs, comme dans le tube en U.

Laplace se rapproche de la réalité en exprimant que le mouvement est évanouissant aux grandes profondeurs (2), mais il se trompe, dit M. de Saint-Venant, en voulant appliquer ses formules au cas où la surface du liquide est horizontale, excepté en un petit endroit où l'on enlève une petite portion de surface cylindrique immergée. Poisson rectifia d'ailleurs le résultat de Laplace (3).

M. de Corancez donna les formules qui régissent le mouvement de l'eau dans un vase quand on néglige les frottements (4).

MM. de Saint-Venant et Flamant donnèrent des recherches historiques relatives au mouvement de l'eau et les formules générales d'une houle et d'un clapotis (sans frottements) (5), formules que M. Bousinesq avait, du reste, déjà données auparavant (6).

(1) *Manière de lester et d'arrimer un vaisseau* (t. VIII des *Prix de l'Académie*, imprimé en 1771, Chap. V).

(2) *Mémoire sur plusieurs points du système du monde* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1775 et 1776. Voir année 1776, p. 542-552).

(3) *Sur la théorie des ondes* (*Mémoires de l'Institut*, t. I; 1816).

(4) *Théorie du mouvement de l'eau dans les vases*. Paris, 1830. — Voir aussi, pour un vase cylindrique : OSTROGRADSKI, *Mémoire sur la propagation des ondes* (*Savants étrangers*, t. III).

(5) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1888, 1<sup>er</sup> semestre, p. 705.

(6) Voir *passim* : *Théorie des ondes liquides périodiques* [*Savants étrangers*, t. XX; 1872 (pour 1869)]; — *Essai sur la théorie des eaux courantes* (dans le même *Recueil*, t. XXIII et XXIV); — *Sur l'extinction graduelle de la houle de mer aux grandes distances de son lieu de production* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juin et juillet 1895); — *Application des potentiels...* Paris, 1885; — et surtout : *Influence du frottement extérieur sur le coefficient d'extinction des ondes périodiques ou non périodiques quand les mouvements sont bien continus* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 346, etc.; 1878). — J'userai largement de ces Ouvrages. Il me serait, du reste, aussi difficile de ne pas le faire ici

Je me propose d'étendre au clapotis quelques-uns des résultats établis récemment par M. Boussinesq pour une houle cylindrique. Je trouverai incidemment les équations des courbes photographiées par M. Marey, que j'appellerai *courbes de clapotis*<sup>(1)</sup>. J'indiquerai quelques extensions possibles.

Je calculerai ensuite le coefficient d'extinction d'un clapotis dans un vase rectangulaire (aquarium) et dans un tube en U, ainsi que la durée des oscillations dans un vase cylindrique. Je comparerai les diminutions de hauteur des oscillations données par les formules à celles qui ont lieu effectivement. Des photographies faites dans le laboratoire de M. Marey, avec l'aide de son préparateur, M. Comte, et reproduisant la diminution des oscillations en fonction du temps me permettront de déterminer, en toute rigueur, jusqu'à quel point il y a accord entre la théorie et l'observation.

Mai 1897.

F. NAU.

---

que de traiter une question de Mécanique céleste sans utiliser l'immortel Ouvrage de Laplace.

(1) Voir p. 11-17.

---

# TABLE DES MATIÈRES.

---

|               |                  |
|---------------|------------------|
| PRÉFACE ..... | Pages,<br>V-VIII |
|---------------|------------------|

## PREMIERE PARTIE.

### DU CLAPOTIS EN MER.

|  |    |
|--|----|
| CHAP. I. — Lois d'un clapotis cylindrique quand on néglige les frottements ..... | 2  |
| CHAP. II. — Coefficient d'extinction d'un clapotis cylindrique .....             | 6  |
| CHAP. III. — Recherche et définition de quelques courbes et surfaces .....       | 11 |

## SECONDE PARTIE.

### FORMATION ET EXTINCTION DU CLAPOTIS DANS LES BASSINS ET LES VASES.

#### Premier cas. — *Bassin rectangulaire.*

|   |    |
|---|----|
| CHAP. I. — Équations du problème .....  | 17 |
| CHAP. II. — Intégration des équations .....   | 19 |
| CHAP. III. — Calcul de l'énergie dépensée dans le clapotis précédent, sous l'action<br>des frottements intérieurs et extérieurs ..... | 21 |
| CHAP. IV. — Calcul du coefficient d'extinction dans une cuve rectangulaire<br>(aquarium) et observations .....                        | 33 |

#### Deuxième cas. — *Tube en U.*

|   |    |
|---|----|
| CHAP. I. — Équation du mouvement .....  | 36 |
| CHAP. II. — Recherche du coefficient d'extinction et observations .....   | 38 |
| CHAP. III. — Observations relatives à l'isochronisme des oscillations dans une<br>cuve rectangulaire et dans un tube en U ..... | 41 |

#### Troisième cas. — *Vase cylindrique.*

|   |    |
|---|----|
| CHAP. I. — Équations du mouvement et calcul des racines d'une équation trans-<br>cendante ..... | 44 |
| CHAP. II. — Calcul de la durée des oscillations et observations .....                           | 53 |



---

## PREMIÈRE THÈSE.



# FORMATION ET EXTINCTION DU CLAPOTIS.



## PREMIÈRE PARTIE.

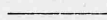
### DU CLAPOTIS EN MER.



Dans cette première Partie, il n'y a pas de paroi latérale et l'on peut regarder la profondeur comme infinie. Les frottements *extérieurs* sont ainsi nuls (1).

---

(1) Le clapotis se produit en réalité près des côtes et dans les ports par la superposition de deux houles égales, l'une venant du large et l'autre de la côte. Cette dernière est produite par la réflexion de la première.





## CHAPITRE I.

LOIS D'UN CLAPOTIS CYLINDRIQUE QUAND ON NÉGLIGE LES FROTTEMENTS.

---

Ces lois, déduites des équations de l'Hydrodynamique rationnelle, sont déjà connues, mais, comme on les obtenait à l'aide d'une solution très particulière de l'équation de Laplace  $\Delta_2 \varphi = 0$ , on ne pouvait affirmer qu'il n'y avait pas de clapotis régi par d'autres lois. Grâce à un résultat établi par M. Boussinesq pour une houle simple, je puis formuler la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Dans tout clapotis cylindrique à mouvement évanouissant aux grandes profondeurs, le mouvement des molécules est nécessairement pendulaire.*

*Car un clapotis peut être défini comme le mouvement résultant de la superposition de deux houles égales qui se propagent en sens opposé (1).*

M. Boussinesq a démontré (2) que le potentiel *de déplacement* des deux houles composantes *est nécessairement*

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= c \frac{\omega}{g} e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \left( \pi \frac{x}{L} - \pi \frac{t}{T} \right), \\ \Phi_2 &= c \frac{\omega}{g} e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \left( \pi \frac{x}{L} + \pi \frac{t}{T} \right); \end{aligned}$$

$x, z$  sont les coordonnées moyennes d'une molécule quelconque;  
 $L$  est la demi-longueur d'onde ou la distance horizontale d'un sommet à un creux;  
 $T$  est la demi-période du mouvement;

---

(1) Cf. *Théorie des eaux courantes*, p. 334-335.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 10 juin 1893.

$\omega$  est la célérité de la houle; et l'on a les relations

$$(1) \quad \frac{\pi}{L} = \frac{g}{\omega^2}, \quad \frac{\pi}{T} = \frac{g}{\omega}, \quad \text{d'où} \quad T = \sqrt{\pi \frac{L}{g}}.$$

Je puis en conclure que le potentiel de déplacement du clapotis résultant *aura nécessairement la forme pendulaire suivante* (1) :

$$(2) \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2c \frac{T}{\pi} e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \pi \frac{t}{T}.$$

*Remarque.* — D'après une formule (1), le pendule synchrone aura pour longueur  $\frac{L}{\pi}$ , tandis que Newton lui donnait pour longueur  $\frac{L}{2}$ .

D'après la définition de  $\Phi$ , les déplacements d'une molécule quelconque de position moyenne  $xz$  sont

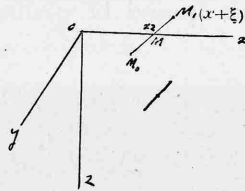
$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \xi = -2c \frac{T}{L} e^{-\pi \frac{z}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \pi \frac{t}{T}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \zeta = -2c \frac{T}{L} e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \pi \frac{t}{T}, \end{cases}$$

d'où

$$(4) \quad \xi = \zeta \operatorname{tang} \frac{\pi x}{L}.$$

**THÉORÈME II.** — *Les trajectoires de toutes les molécules situées à l'origine sur un même plan parallèle à  $yo$ z sont des droites égale-*

Fig. 2.



*ment inclinées sur l'horizon. Ces droites sont verticales aux ventres ( $x = KL$ ) et horizontales aux nœuds  $x = (K + 1) \frac{L}{2}$ .*

(1) Les déplacements sont supposés assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits.

En prenant les maxima des déplacements, on trouve

$$\overline{MM_1^2} = 4c^2 \frac{T^2}{L^2} e^{-2\pi \frac{z}{L}},$$

Fig. 3.

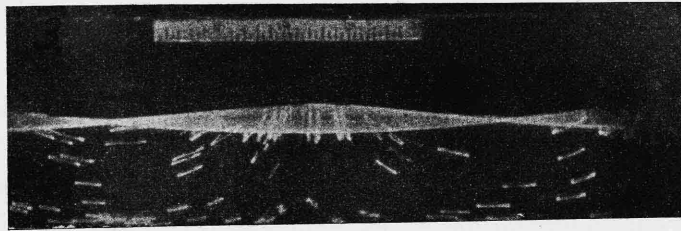
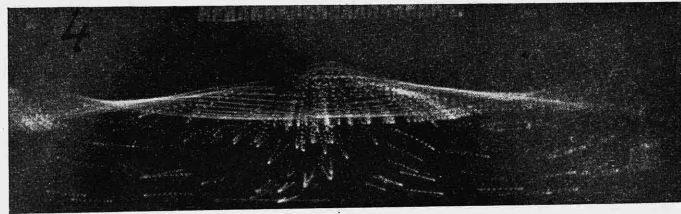


Fig. 4.



d'où, pour l'amplitude du mouvement d'une molécule,

$$(5) \quad \overline{M_0 M_1} = \overline{2MM_1} = 4c \frac{T}{L} e^{-\pi \frac{z}{L}}.$$

Cette amplitude décroît quand la profondeur augmente, comme cela devait être.

THÉORÈME III. — *La surface libre a la forme d'une cycloïde allongée, le cercle générateur ayant  $\frac{L}{\pi}$  pour rayon, et la distance du point décrivant au centre de ce cercle étant  $2c \frac{T}{L} \cos \pi \frac{t}{T}$  (<sup>1</sup>).*

Car soient X, Z les coordonnées absolues d'une molécule primitive-

---

(<sup>1</sup>) Voici deux photographies de la surface d'un clapotis, faites par M. Marey. Ce

ment à la surface ou de coordonnées moyennes  $x$  et  $o$ , on a

$$X = x + \xi = x - 2c \frac{T}{L} \cos \pi \frac{t}{T} \sin \pi \frac{x}{L},$$

$$Z = \zeta = -2c \frac{T}{L} \cos \pi \frac{t}{T} \cos \pi \frac{x}{L}.$$

Si j'appelle  $\varphi$  l'angle au centre du cercle générateur, j'ai  $x = \frac{L}{\pi} \varphi$ ; puis portant l'origine au point  $x = o$ ,  $z = -\frac{L}{\pi}$ , j'obtiens les équations ordinaires d'une cycloïde

$$X = \frac{L}{\pi} \varphi - 2c \frac{T}{L} \cos \pi \frac{t}{T} \sin \varphi,$$

$$Z = \frac{L}{\pi} - 2c \frac{T}{L} \cos \pi \frac{t}{T} \cos \varphi.$$

Si j'appelle  $H$  la hauteur maxima du clapotis, il vient  $H = 2c \frac{T}{L}$  et

sont des instantanés successifs, et chaque ligne indique la position de la surface libre au moment de l'ouverture de l'objectif.

Fig. 5.



Fig. 6.



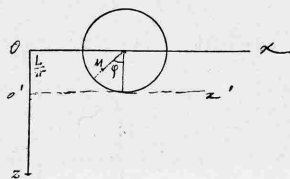
Pour connaître la manière dont furent prises ces photographies et les suivantes, lire : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCV, p. 267; 1882 (*Emploi de la Photographie pour déterminer la trajectoire des corps en mouvement*), et t. CXVI, p. 915; 1893 (*Le mouvement des liquides étudié par la chronophotographie*).

l'on aura une cycloïde allongée pour

$$H \cos \pi \frac{t}{T} < \frac{L}{\pi} \quad \text{ou} \quad L > \pi H \cos \pi \frac{t}{T},$$

ce qui aura toujours lieu puisque, par hypothèse, les mouvements étant très petits, H est petit par rapport à L.

Fig. 7.



Je vais chercher dans quelle mesure la hauteur d'un clapotis cylindrique est diminuée par les frottements intérieurs.

---

## CHAPITRE II.

### COEFFICIENT D'EXTINCTION D'UN CLAPOTIS CYLINDRIQUE.

---

Je me propose de chercher la loi suivant laquelle décroît la hauteur d'un clapotis *cylindrique*, sous l'action des frottements *intérieurs*. Je montrerai que les clapotis à courte longueur d'onde s'éteignent les premiers pour ne laisser subsister bientôt que le clapotis de plus grande longueur d'onde, que l'on peut appeler *fondamental* <sup>(1)</sup>.

A cause de l'extrême petitesse de leur coefficient  $\epsilon$ , les frottements intérieurs du fluide n'altèrent que peu les lois du phénomène, et, par

---

(1) J'applique au clapotis les résultats démontrés par M. Boussinesq pour une houle cylindrique (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 24 juin 1895). Du reste, ce Chapitre est comme une introduction à la théorie, plus difficile, de l'extinction du clapotis dans un vase.

suite, sa physionomie, durant un temps modéré (les lois du clapotis sont donc toujours celles que nous avons données au Chapitre I). Mais, comme ils l'usent peu à peu, la hauteur du clapotis décroîtra en fonction du temps et ne sera plus constante comme nous le supposons. Cette unique inconnue sera donnée par l'équation des forces vives écrite en tenant compte des frottements et calculée à l'aide des formules de première approximation du Chapitre précédent.

L'équation des forces vives, pour un mouvement ondulatoire et en tenant compte des frottements, est (1)

$$d \left( \sum M \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma \right) \\ = d\bar{e}_e - \frac{dt}{\varepsilon} \int_{\omega} \left( \frac{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}{2} + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \right) d\omega$$

avec

$$(N_x, N_y, N_z) = 2\varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ (T_x, T_y, T_z) = \varepsilon \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

$u, v, w$  sont les composantes au temps  $t$  de la vitesse d'une molécule quelconque de masse  $M$ , de volume  $d\omega$  et de coordonnées  $x, y, z$ ; ce sont les dérivées partielles d'une fonction  $\varphi$  appelée *potentiel des vitesses*, qui est la dérivée du potentiel  $\Phi$  du Chapitre I (2). De plus,  $h = -z$  est la coordonnée de la surface libre et l'on a la relation  $h = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Enfin  $d\bar{e}_e$  est le travail élémentaire des pressions extérieures s'exerçant sur les surfaces limites, à l'exception de la surface libre  $\sigma$  (qui a fourni le terme  $\frac{\rho g h^2}{2} d\sigma$ ).

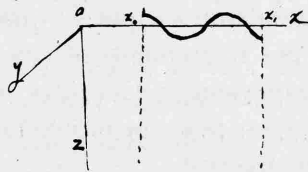
J'applique l'équation des forces vives au volume compris entre deux plans parallèles à  $xoz$  et distants de l'unité (par exemple  $y_0 = -\frac{1}{2}$  et  $y_1 = +\frac{1}{2}$ ) et deux autres plans parallèles à  $yoz$  et d'abscisses  $x_0, x_1$ .

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXX, p. 1386; 1895.

(2) Cf. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 10 juin 1895. Mémoire de M. Boussinesq déjà cité.

Ces deux abscisses correspondent par hypothèse à deux ventres (où le mouvement des molécules est vertical) et renferment un nombre entier de demi-longueurs d'onde.

Fig. 8.



Je montre que  $d\bar{\epsilon}_e$  est nul sur ces diverses surfaces.

En effet,  $d\bar{\epsilon}_e$  est nul au fond, où il n'y a aucun mouvement. Il est aussi nul sur les plans  $y_0$  et  $y_1$ , car les pressions  $y$  sont toutes normales, par symétrie, et les déplacements ont lieu dans ces plans.

Sur les plans  $x_0$  et  $x_1$ , les mouvements sont verticaux et ont donc lieu dans ces plans (voir *supra*, p. 3, th. II); les forces qui agissent sur un élément quelconque sont  $N_x, T_z, T_y$  (élément normal à  $ox$ ):

$N_x$  est perpendiculaire à la trajectoire des molécules, son travail est nul;

$T_z$ , composante tangentielle de la pression dirigée suivant  $oy$ , est nulle par raison de symétrie [on le voit aussi sur la formule

$$T_z = \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)];$$

Enfin

$$T_y = \varepsilon \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Or aux nœuds  $u$  est nul, quel que soit  $z$ ; donc

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Ainsi,  $d\bar{\epsilon}_e$  est nul. En divisant par  $dt$  et en tenant compte de ce que, dans notre clapotis *cyindrique*,

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

il reste

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \sum M \frac{u^2 + w^2}{2} + \int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma \right) \\ & = -\varepsilon \int_{\sigma} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Cette équation exprime que la variation de l'énergie totale formée de l'énergie actuelle (demi-force vive) et de l'énergie potentielle de pesanteur est égale à l'énergie absorbée par les frottements intérieurs (car le second membre serait nul si les frottements l'étaient, puisqu'il a  $\varepsilon$  en facteur).

Si j'appelle  $\mathcal{E}$  l'énergie totale, la relation précédente équivaudra à celles-ci :

$$(14) \quad \mathcal{E} = \sum M \frac{u^2 + w^2}{2} + \int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma.$$

$$(15) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon \int_{\sigma} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma.$$

J'ai, pour calculer ces formules,

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -2ce^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \frac{\pi x}{L} \sin \pi \frac{t}{T},$$

ou bien, en introduisant le maximum  $H$  de  $h = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , ordonnée de la surface libre :

$$(16) \quad \varphi = -H \frac{gT}{\pi} e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{t}{T} \quad \text{et} \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

Je trouve, par unité d'aire de la surface libre et en moyenne,

$$\begin{aligned} \sum M \frac{u^2 + w^2}{2} &= \rho H^2 \frac{g^2 T^2}{2L^2} \sin^2 \pi \frac{t}{T} \int_0^{\infty} e^{-2\pi \frac{z}{L}} dz \\ &= \rho H^2 \frac{g^2 T^2}{4\pi L} \sin^2 \pi \frac{t}{T} = \frac{\rho g H^2}{4} \sin^2 \pi \frac{t}{T} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma &= \frac{\rho g}{2} H^2 \cos^2 \pi \frac{t}{T} \int_{x_0}^{x_1} \cos^2 \pi \frac{x}{L} dx \\ &= \rho g \frac{H^2}{4} \cos^2 \pi \frac{t}{T}; \end{aligned}$$

N.

2



donc

$$(17) \quad \mathcal{E} = \rho g \frac{H^2}{4}.$$

Or (15) devient, en tenant compte de l'équation de continuité  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  et de (16),

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -4\varepsilon \int_{\sigma} \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial w^2}{\partial z^2} \right) d\sigma \\ &= -4\varepsilon H^2 g \frac{\pi^3}{L^3} \sin^2 \pi \frac{t}{T} \int_{\sigma} e^{-2\pi \frac{z}{L}} d\sigma; \end{aligned}$$

d'où, par unité de surface, en remplaçant  $\sin^2 \pi \frac{t}{T}$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$ ,

$$(18) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\varepsilon H^2 g \frac{\pi^2}{L^2},$$

ou bien, en tenant compte de (17),

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{4\pi^2 \varepsilon}{\rho L^2} \mathcal{E};$$

d'où, en appelant  $\mathcal{E}_0$  l'énergie au temps  $t = 0$ , il vient, en intégrant,

$$(19) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{4\varepsilon \pi^2}{\rho L^2} t};$$

or, d'après la formule (17),

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{H^2}{H_0^2};$$

d'où

$$(20) \quad H = H_0 e^{-\frac{2\varepsilon \pi^2}{\rho L^2} t}.$$

**DÉFINITION.** — Le coefficient  $\alpha = \frac{2\varepsilon \pi^2}{\rho L^2}$  est appelé *coefficient d'extinction*, car il règle la diminution continue et graduelle de la hauteur  $H$ .

Ce coefficient  $\alpha$  est en raison inverse de  $L^2$ ; on voit ainsi que les ondes les plus courtes s'éteignent le plus vite, comme je l'ai annoncé.

### CHAPITRE III.

RECHERCHE ET DÉFINITION DE QUELQUES COURBES ET SURFACES.

Dans toutes les questions d'Hydrodynamique où il existe un potentiel des vitesses que j'appellerai  $\varphi$ , on a

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3(x, y, z, t). \end{cases}$$

Ces trois équations différentielles définissent une courbe gauche en fonction d'un paramètre  $t$ . On peut écrire

$$(1)' \quad \frac{dx}{f_1(x, y, z, t)} = \frac{dy}{f_2(x, y, z, t)} = \frac{dz}{f_3(x, y, z, t)} = \frac{dt}{1}.$$

Les courbes représentées par ces équations sont orthogonales aux surfaces  $\varphi = \text{const.}$  quand celles-ci sont fixes. Alors, si l'on trouve deux intégrales de (1)' indépendantes de  $t$ ,

$$(1)'' \quad \varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2,$$

en associant  $C_1, C_2$  à l'aide d'une fonction arbitraire  $\psi(C_1, C_2) = 0$  (2), on formera des surfaces orthogonales à  $\varphi$ .

Je vais appliquer ces généralités au clapotis :

1° *Clapotis cylindrique.* — Le potentiel des vitesses est (cf., page 9) :

$$\varphi = -2ce^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{t}{T}$$

et les surfaces  $\varphi = \text{const.}$  ont leur équation de la forme

$$(3) \quad e^{az} = \alpha \cos ax,$$

$\alpha$  étant une constante arbitraire.

Les équations (1) sont ici :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2c \frac{\pi}{L} e^{-\pi \frac{z}{L}} \sin \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{t}{T}, \\ \frac{dz}{dt} = 2c \frac{\pi}{L} e^{-\pi \frac{z}{L}} \cos \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{t}{T}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(4)' \quad \frac{dx}{\sin ax} = \frac{dz}{\cos ax},$$

dont l'intégrale est

$$(5) \quad e^{az} = \beta \sin ax,$$

$\beta$  étant une constante arbitraire.

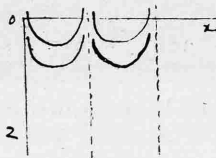
**DÉFINITION.** — J'appelle les courbes (5) *courbes de clapotis*, parce qu'elles portent les petites trajectoires des particules du liquide clapoteux.

*Remarque I.* — On peut vérifier que les courbes (5) (ou surfaces cylindriques) sont orthogonales aux courbes (3).

*Remarque II.* — Ces courbes (5) ne sont autres que les courbes (3) transportées parallèlement à elles-mêmes, car il suffit de remplacer  $x$  par  $x + \frac{\pi}{2a}$ , pour passer de l'équation (5) à l'équation (3).

III. Les courbes (5) de clapotis admettent pour asymptotes les droites  $ax = k\pi$  ou  $x = kL$  (car  $a = \frac{\pi}{L}$ ), c'est-à-dire les parallèles à  $oz$  menées par les ventres. Elles ont donc la forme suivante :

Fig. 9.



IV. Si le clapotis cylindrique était produit dans un récipient de

profondeur finie, le potentiel serait (1)

$$(e^{kz} + e^{-kz}) \cos kx = \alpha,$$

et les courbes de clapotis auraient pour équation

$$(6) \quad (e^{kz} - e^{-kz}) \sin kx = \beta.$$

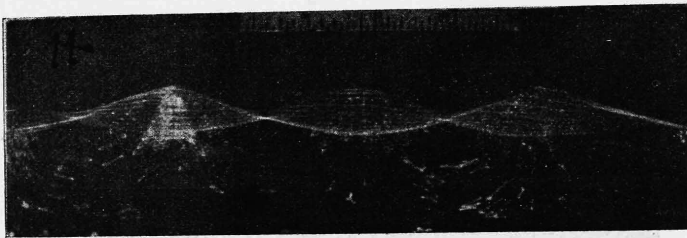
Leur forme serait encore la même que ci-dessus. Or ce sont préci-

Fig. 10.



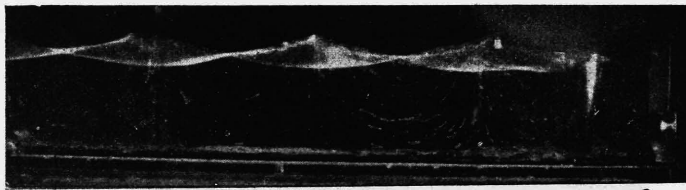
sément les courbes photographiées par M. Marey dans un clapotis

Fig. 11.



cylindrique et reproduites dans les *Comptes rendus de l'Académie*

Fig. 12.



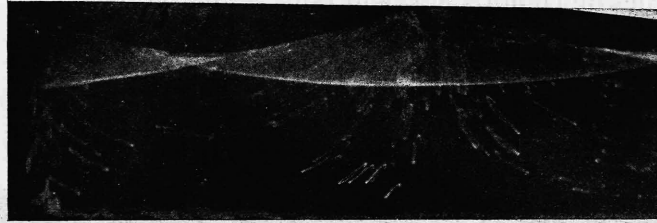
*des Sciences* en juin 1893. On n'avait pas encore signalé leur nature.

---

(1) On trouvera, p. 18, la disposition des axes dans ce cas, et p. 21, l'équation (réduite à un terme) dont je fais usage ici.

Je reproduis ici les photographies que M. Marey a bien voulu me prêter.

Fig. 13.

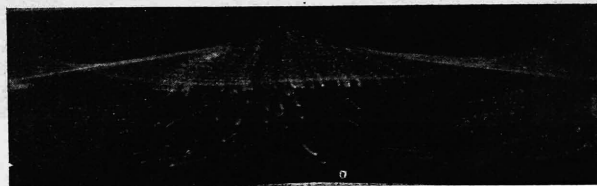
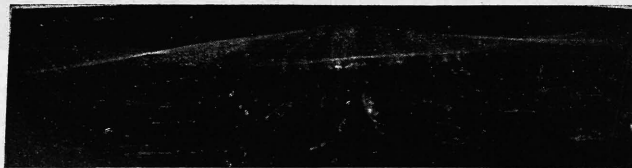


Les courbes sont tracées par des balles argentées que M. Marey avait mis en suspension dans l'eau. Les deux premières photographies sont une suite d'instantanés : on peut donc y suivre le déplacement de chaque balle et de la surface libre (1). Les deux dernières ont été faites, l'objectif étant découvert d'une manière continue. On remarquera que des influences perturbatrices modifient souvent la trajectoire rectiligne des balles (2). Ces trajectoires rectilignes, bout à bout, forment les courbes de clapotis.

---

(1) Voici d'autres photographies qui sont aussi une suite d'instantanés :

Fig. 14.



(2) On remarquera que les ventres situés, en théorie, sur des verticales fixes, ne le sont pas tout à fait en pratique. Cela tient sans doute à un petit mouvement de pro-

2° Si le clapotis est à trois dimensions, son potentiel est

$$\varphi = A e^{-kz} \cos ax \cos by \sin kt;$$

les surfaces d'égal potentiel sont donc

$$(7) \quad e^{kz} = \alpha \cos ax \cos by,$$

$\alpha$  étant un paramètre arbitraire ( $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ ). La surface analogue  $e^z = \cos x \cos y$  est connue. Elle est formée d'une infinité de nappes (cf. TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 329). Ses lignes de courbures s'obtiennent facilement, j'ajoute qu'elles forment un système isotherme sur la surface. De plus les surfaces  $e^z = \alpha \cos x \cos y$ ,  $e^z = \beta (\sin x \pm \sin y)$  forment un système triple orthogonal.

Les courbes de clapotis sont définies ici par les équations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{k}{a} \cot ax, \\ \frac{dz}{dy} = \frac{k}{b} \cot by, \end{cases}$$

ou bien

$$(8') \quad \begin{cases} e^{\frac{a^2 z}{k}} = C_1 \sin ax, \\ e^{\frac{b^2 z}{k}} = C_2 \sin by. \end{cases}$$

En associant ces courbes (1) d'une manière quelconque, nous obtenons

un mouvement qui n'est pas possible d'éviter. Ce petit mouvement suffit pour empêcher la balle argentée de reprendre le chemin qu'elle a suivi, d'où les perturbations photographiées.

(1) On pourrait encore écrire

$$e^{\frac{a^2 z}{k}} = C_1 \sin ax \quad \text{avec} \quad \sin^{b^2} ax = C_2 \sin^{a^2} by,$$

et les surfaces auraient pour équation générale

$$e^{\frac{a^2 z}{k}} = \sin ax \cdot \psi \left( \frac{\sin^{b^2} ax}{\sin^{a^2} by} \right).$$

Ces surfaces sont l'intégrale générale de l'équation  $u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} = w$  qui a cela de remarquable dans le cas des clapotis, qu'elle ne renferme pas le temps, car  $\sin kt$  est en facteur commun.

nous les surfaces de clapotis

$$(9) \quad \psi \left( \frac{e^{\frac{a^2 z}{k}}}{\sin ax}, \frac{e^{\frac{b^2 z}{k}}}{\sin by} \right) = \beta,$$

qui sont orthogonales aux surfaces (7) (1).

*Remarque.* — J'ai appliqué la même méthode à la recherche de la trajectoire d'un point matériel dont le mouvement est censé dépendre du potentiel des vitesses

$$\varphi = A e^{-az} \cos(ax - bt),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{dx}{dt} = -A a e^{-az} \sin(ax - bt), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{dz}{dt} = -A a e^{-az} \cos(ax - bt).$$

En déterminant convenablement la constante, on trouve la première intégrale

$$\sin(ax - bt) = \frac{b}{aA} (z - z_0) e^{az},$$

$z_0$  est l'ordonnée initiale, positive vers le bas, du point mobile.

Si l'on porte l'axe des  $x$  en ce point  $z_0$ , on est ramené à discuter

$$\frac{dx}{dt} = -bz, \quad \frac{dz}{dt} = \pm \frac{Aa}{e^{a(z+z_0)}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 A^2} z^2 e^{2a(z+z_0)}}.$$

Ainsi la trajectoire est donnée par l'équation

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{\frac{b}{aA} z e^{a(z+z_0)}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 A^2} z^2 e^{2a(z+z_0)}}}.$$

On intègre en négligeant le cube et les puissances supérieures de  $z$  et l'on discute facilement l'équation dans le cas général.

---

(1) Ces surfaces correspondent aux surfaces d'égale résistance (telles qu'en chacun de leurs points la vitesse du fluide soit située dans le plan tangent), définies par M. de Salvert, ancien élève de l'École Polytechnique, pour le cas du mouvement permanent des fluides. Car : 1° ces surfaces portent les trajectoires des molécules fluides et 2° aucune molécule ne les traverse. D'où s'ensuivent les corollaires et théorèmes que M. de Salvert déduit de ces deux remarques pour le cas du mouvement permanent. (Cf. *Thèse pour le doctorat ès Sciences*. Paris, 1874.)

## SECONDE PARTIE.

FORMATION ET EXTINCTION DU CLAPOTIS DANS LES BASSINS  
ET LES VASES.

---

### PREMIER CAS.

BASSIN RECTANGULAIRE.

---

#### CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

---

Les *équations indéfinies* du mouvement d'un liquide parfait qui part du repos et exécute de petites oscillations sont (1) :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{p - p_0}{\rho} = g(H - z) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2} \right); \end{cases}$$

H désigne la profondeur du liquide en repos, et l'on a

$$(2) \quad (u, v, w) = \frac{\partial \varphi}{\partial (x, y, z)}.$$

Les *conditions aux limites* sont les suivantes : pour  $z = 0$ ,

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0;$$

---

(1) Cf. *Théorie des eaux courantes*, p. 321 et 326.



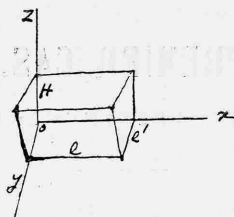
à la surface en négligeant les carrés de  $u, v, w$ , la seconde équation (1) donne

$$(3 \text{ bis}) \quad 0 = g(H - z) - \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

d'où

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

Fig. 16.



j'ai négligé les termes non linéaires du second ordre de petitesse.

On a donc, pour  $z = H$ ,

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

De plus, pour  $x = 0$  et  $x = l$ ,

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

pour  $y = 0$  et  $y = l'$

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

car je suppose maintenant qu'il s'agit d'une auge rectangulaire s'étendant de 0 à  $l$  dans le sens de  $ox$  et de 0 à  $l'$  dans le sens de  $oy$ .

En résumé, il faut intégrer l'équation (1) en tenant compte des conditions (3), (4), (5), (6); puis,  $\varphi$  étant connu, la seconde équation (1) donnera la pression en un point quelconque du liquide.

## CHAPITRE II.

### INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

On satisfait à la première équation (1) et aux équations (3), (4), (5), (6) en posant (1)

$$\varphi = \sum \frac{e^{Kz} + e^{-Kz}}{e^{K_H} + e^{-K_H}} \cos i\pi \frac{x}{l} \cos j\pi \frac{y}{l'} \left( M \cos K't + N \frac{\sin K't}{K'} \right),$$

où

$$\begin{cases} K = \pi \sqrt{\frac{i^2}{l^2} + \frac{j^2}{l'^2}}, \\ K' = \sqrt{gK \frac{e^{K_H} - e^{-K_H}}{e^{K_H} + e^{-K_H}}}; \end{cases}$$

$i$  et  $j$  sont deux nombres entiers quelconques et il reste à déterminer dans chaque cas particulier les valeurs des constantes  $M$  et  $N$  de l'équation (7), à l'aide des valeurs initiales à la surface de  $\varphi$  et de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g(H - h).$$

*Remarque.* — On démontre que le problème ne comporte que ces deux fonctions arbitraires  $\varphi_0$  et  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0$  (2).

Je suppose, pour simplifier, que  $\varphi_0 = 0$ . Il faut donc  $M = 0$  et il reste

$$\varphi = \sum \frac{e^{Kz} + e^{-Kz}}{e^{K_H} + e^{-K_H}} \cos i\pi \frac{x}{l} \cos j\pi \frac{y}{l'} N \frac{\sin K't}{K'};$$

$N$  sera déterminé par la valeur initiale de  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ou de  $H - z$ , c'est-à-dire par la forme de la surface libre.

Je suppose qu'à l'époque  $t = 0$  la surface libre est plane et a donc

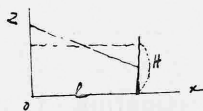
(1) Cf. *Théorie des eaux courantes*, p. 325-326.

(2) *Ibid.*, p. 327. La détermination des constantes  $M$  et  $N$  dans le cas général est indiquée à la page 331.

une équation de la forme

$$H - z = m \left( x - \frac{l}{2} \right).$$

Fig. 17.



Je cherche le développement de  $m x$ . On a de  $u = 0$  jusqu'à  $u = \pi$  (1)

$$\frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - u \right) = \frac{\cos u}{1^2} + \frac{\cos 3u}{3^2} + \frac{\cos 5u}{5^2} + \dots;$$

je change de variable et je pose

$$u = \frac{\pi x}{l}.$$

Ainsi, quand  $u$  varie de 0 à  $\pi$ ,  $x$  varie de 0 à  $l$  comme il le fallait et j'ai

$$\frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{l} \right) = \frac{1}{1^2} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots,$$

d'où

$$x - \frac{l}{2} = -\frac{4l}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right),$$

et

$$(9) \quad H - z = m \left( x - \frac{l}{2} \right) = -\frac{4ml}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

Mais d'après l'équation (3 bis) j'ai à la surface, c'est-à-dire en faisant  $z = H$  dans  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,

$$(10) \quad H - z = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{g} \sum N \cos i\pi \frac{x}{l} \cos j\pi \frac{y}{l}.$$

J'identifie (9) et (10), il faut

$$j = 0, \quad N = -\frac{4ml}{\pi^2} \frac{g}{(2i+1)^2}, \quad \text{et } i \text{ devient } 2i+1.$$

(1) Voir *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, par M. Boussinesq (*Calcul intégral*, p. 172\*).

Il vient enfin

$$(11) \quad \varphi = - \frac{4 m l g}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{e^{kH} + e^{-kH}} \frac{\cos(2i+1) \frac{\pi x}{l}}{(2i+1)^2} \frac{\sin K' t}{K'},$$

avec

$$K = (2i+1) \frac{\pi}{l},$$

$$K' = \sqrt{gK \frac{e^{kH} - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}}}.$$

$\varphi$  est complètement déterminé. Ses dérivées en  $xyz$  donnent les composantes de la vitesse et  $\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  pour  $z = H$  donne à chaque instant l'ordonnée de la surface libre.

### CHAPITRE III.

#### CALCUL DE L'ÉNERGIE DÉPENSÉE DANS LE CLAPOTIS PRÉCÉDENT SOUS L'ACTION DES FROTTEMENTS INTÉRIEURS ET EXTÉRIEURS.

Il me faut encore calculer l'équation des forces vives, mais les parois introduisent dans leur voisinage immédiat des perturbations considérables. Car les lois du mouvement donnent une amplitude notable près de la paroi, tandis que le frottement immobilise la couche mince de liquide en contact avec la paroi. Cette contradiction est levée par l'effet des glissements énormes des couches les unes sur les autres, qui produisent des frottements en rapport avec eux-mêmes.

On ne peut donc utiliser *près des parois* les valeurs  $u, v, w$  données par l'équation (11); il faut calculer directement leurs valeurs particulières. C'est ce que je commence par faire (1).

---

(1) Cf. *Journal de Mathématiques*, p. 346; 1878. Mémoire déjà cité de M. Bousinesq.

Les équations générales du mouvement, en tenant compte de ce que  $\varphi$  ne renferme pas  $y$ , sont

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\rho} \Delta_2 u, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\rho} \Delta_2 w. \end{cases}$$

1° *Calcul de  $u$  au fond de l'auge.* — Je néglige les termes du second ordre  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $w \frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $u \frac{\partial w}{\partial x}$  et  $w \frac{\partial w}{\partial z}$ , car je suppose que les oscillations sont assez faibles. Je remarque aussi que  $u$  varie extrêmement vite avec  $z$ , car sur la paroi il est nul, et très près de la paroi il a pris

la valeur finie  $\frac{2A}{e^{kH} + e^{-kH}} \frac{\sin(2i+1) \frac{\pi x}{l}}{2i+1} \frac{\sin K't}{K'}$  donnée par l'équation (11); donc la dérivée  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  l'emporte sur toutes les autres comme  $\frac{\partial w}{\partial t}$ ,  $\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  et  $\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ . Il reste donc

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z. \end{cases}$$

La seconde équation nous montre que  $p$  varie d'une manière graduelle avec  $z$ , c'est-à-dire très peu quand on passe de  $z = 0$  à la couche très voisine où les perturbations de la paroi ne se font plus sentir. Je puis donc conserver  $\frac{\partial p}{\partial x}$  quand j'applique la première équation à cette couche. J'appelle alors  $u_0$  la valeur de  $u$  tirée de la formule (11). J'ai

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}.$$

J'obtiens ainsi par soustraction

$$0 = \frac{\partial(u - u_0)}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial^2(u - u_0)}{\partial z^2},$$

ou bien

$$(13) \quad \frac{\partial^2(u - u_0)}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial(u - u_0)}{\partial t}.$$

Il faut

$$(14) \quad \begin{cases} u = 0 \text{ à la paroi (pour } z = 0), \\ u = u_0 \text{ à l'intérieur, au-dessus de la couche mince (ou pour } z = \infty) \text{ (1)}. \end{cases}$$

L'intégrale est pour le fond

$$(15) \quad u - u_0 = -ce^{-z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}}\cos\left(\pi\frac{t}{T} - c' - z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right),$$

T est une constante arbitraire,  $c$  et  $c'$  sont des fonctions de  $x$  et  $y$ .

2° *Calcul de  $\omega$  pour les plans  $x = 0$  et  $x = l$ .* — On se sert des mêmes équations (12), mais  $c'$  est ici  $\omega$  qui varie infiniment vite avec  $x$  près de la paroi. Des considérations analogues aux précédentes donnent, pour le plan  $yoz$ ,

$$(16) \quad \omega - \omega_0 = -ce^{-x\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}}\cos\left(\pi\frac{t}{T} - c' - x\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right);$$

pour le plan  $x = l$ ,

$$(17) \quad \omega - \omega_0 = -ce^{-(l-x)\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}}\cos\left[\pi\frac{t}{T} - c' - (l-x)\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right].$$

$\omega_0$  est la valeur de  $\omega$  donnée par la formule (11) pour  $x$  infiniment petit; T est encore une constante arbitraire;  $c$  et  $c'$  sont des fonctions de  $z$ .

3° *Calcul de  $u$  et  $\omega$  pour les plans  $y = 0$  et  $y = l$ .* — Sur ces plans les deux vitesses  $u$  et  $\omega$  varient infiniment vite avec  $y$ .

Les deux formules (12) se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

---

(1) En réalité la couche mince est très peu épaisse; on doit intégrer de  $z = 0$  à une valeur finie assez petite, mais la formule (15) montre que si  $z$  est fini, bien que petit, le terme  $z\sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}$  est extrêmement grand, à cause de la petitesse de  $\varepsilon$ . On a donc le droit de prendre l'infini pour limite supérieure de  $z$ , puisqu'on ne change pas le résultat.

et traitées comme précédemment donnent, pour  $y = 0$ ,

$$(18) \quad u - u_0 = -c e^{-y} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c' - y \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right),$$

$$(19) \quad w - w_0 = -c_1 e^{-y} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c'_1 - y \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right);$$

pour  $y = l'$ ,

$$(20) \quad u - u_0 = -c e^{-(l'-y)} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \cos\left(\frac{\pi t}{T} - c' - (l'-y) \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}\right),$$

$$(21) \quad w - w_0 = -c_1 \dots\dots\dots$$

*Calcul de l'équation des forces vives.* — Je pose comme précédemment (p. 9)

$$(22) \quad \mathcal{E} = \sum M \frac{u^2 + w^2}{2} + \int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma;$$

$\mathcal{E}$  est l'énergie totale.

L'équation des forces vives est ici (1)

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \int_{\sigma} [u(N_x \cos \alpha + T_z \cos \beta + T_y \cos \gamma) \\ &\quad + w(T_y \cos \alpha + T_x \cos \beta + N_z \cos \gamma)] d\sigma \\ &- \varepsilon \int_{\sigma} \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Je me sers encore de la valeur approchée de  $\varphi$  donnée par l'équation (11) que j'écris

$$(24) \quad \varphi = -A(e^{Kz} + e^{-Kz}) \cos Kx \sin K'l,$$

avec

$$(25) \quad A = \frac{4 m l g}{\pi^2} \frac{1}{e^{Kl} + e^{-Kl}} \frac{1}{(2i+1)^2} \frac{1}{K'}.$$

(1) Voir *Théorie des eaux courantes*, additions p. 27 et 28. Ici

$(l, m, n) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ,  $(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3) = (N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z)$ ,  
et  $v$  est identiquement nul.

Je forme l'équation (22). On a

$$M = \rho dx dy dz,$$

donc

$$\frac{1}{2} \int_0^H \int_0^l \int_0^{l'} M(u^2 + w^2) = \frac{\rho}{2} K^2 A^2 \left[ \frac{e^{2KH} - e^{-2KH}}{2K} + 2H + \frac{e^{2KH} - e^{-2KH}}{2K} - 2H \right] \frac{ll'}{4};$$

j'ai remplacé  $\sin^2 K't$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$ , car je ne cherche pas les variations *périodiques* de l'énergie, mais sa diminution graduelle ou son *coefficient d'extinction*. J'ai donc

$$(26) \quad \frac{1}{2} \sum M(u^2 + w^2) = \frac{\rho KA^2 ll'}{8} [e^{2KH} - e^{-2KH}].$$

De même

$$\int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma = \frac{\rho g}{2} \frac{K^{1/2} A^2}{g^2} (e^{KH} + e^{-KH})^2 \frac{ll'}{4};$$

j'ai intégré en  $x$  et  $y$  et remplacé  $\cos^2 K't$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$ .

Je remplace encore  $K'^2$  par sa valeur; il vient

$$\int_{\sigma} \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma = \frac{\rho KA^2 ll'}{8} (e^{2KH} - e^{-2KH}).$$

Je porte cette expression ainsi que (26) dans l'équation (22) et il vient, pour l'expression de l'énergie totale,

$$(27) \quad \mathcal{E} = \frac{\rho KA^2 ll'}{4} (e^{2KH} - e^{-2KH}).$$

Il me reste à calculer le second membre de l'équation (23) qui comprend une intégrale de surface et une intégrale de volume. L'intégrale de surface est identiquement nulle, car  $u$  et  $w$  sont nuls en tout point des parois. Mais il me faut alors décomposer l'intégrale de volume en deux parties, l'une relative à *une couche très mince contiguë aux parois* dans laquelle seule se font sentir les influences perturbatrices des frottements extérieurs, et l'autre s'étendant au reste du volume, c'est-à-dire à peu près à tout le volume.



Mais M. Boussinesq a démontré (1) que l'intégrale de volume relative à la couche mince contiguë aux parois est équivalente à l'intégrale de surface de l'équation (23) dans laquelle on remplacerait  $u$ ,  $w$  nuls

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 351; 1878 : « Ainsi le frottement à la paroi ne travaille pas, puisque la vitesse à la paroi est nulle, mais il développe des frottements intérieurs qui détruisent un certain travail total précisément égal à celui qu'il aurait détruit lui-même si la vitesse à la paroi avait été celle  $u_0$  qui s'observe aux points intérieurs peu distants où cette vitesse cesse de varier rapidement. »

Je donne la démonstration de ce principe pour le fond ( $z = 0$ ).

L'intégrale de volume qui entre en (23) se réduit, avec l'approximation adoptée page 22, à

$$-\varepsilon \int_{\sigma} \frac{\partial u^2}{\partial z^2} d\sigma = -\varepsilon \int_{\sigma} \frac{\partial u^2}{\partial z^2} dx dy dz.$$

Il faut intégrer en  $z$  de 0 à l'infini (voir p. 23, note 1). J'obtiens donc par unité de surface pour l'intégrale de volume relative à la couche mince,

$$(a) \quad -\varepsilon \int_0^{\infty} \frac{\partial u^2}{\partial z^2} dz.$$

Je multiplie (13) par  $(u - u_0) dz$  et intègre de  $z = 0$  à  $z = \infty$  en appliquant l'intégration par parties au premier membre. Je désigne par  $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$  la valeur de  $\frac{\partial u}{\partial z}$  pour  $z = 0$ , et tiens compte des conditions (14). Il vient

$$u_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \frac{\rho(u - u_0)^2}{2\varepsilon} dz.$$

Je porte en (a) et trouve pour l'intégrale de volume relative à la couche mince

$$-\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \frac{\rho}{2} (u - u_0)^2 dz.$$

Le second terme est périodique d'après la formule (20); si donc je multiplie par  $\frac{dt}{2T}$  et intègre entre deux époques séparées par l'intervalle  $2T$  égal à une période, l'intégrale de volume relative à la couche mince, c'est-à-dire le travail absorbé par les frottements qui ont lieu dans cette couche, sera, par unité de surface,

$$(b) \quad -\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 u_0.$$

On est donc ramené à former une intégrale de surface en prenant  $u_0$  pour la valeur de  $u$  sur cette surface.

On remarquera du reste que j'ai retrouvé cette expression (b) dans la formule (28), car (b) comme (28) doit être étendu à tout le fond.

aux parois par les valeurs  $u_0$ ,  $w_0$  déjà définies. Quant aux dérivées de  $u$ ,  $v$ ,  $w$  leurs valeurs sont données par les formules (15) à (22) spéciales au feuillet superficiel de la couche mince.

Il me faut donc calculer d'abord l'intégrale

$$\int_{\sigma} [u_0(N_x \cos \alpha + T_z \cos \beta + T_y \cos \gamma) + w_0(T_y \cos \alpha + T_x \cos \beta + N_z \cos \gamma)] d\sigma,$$

étendue à toutes les faces de l'auge, excepté à la surface libre qui a déjà fourni le terme  $-\int \frac{\rho g h^2}{2} d\sigma$ . Il vient :

1° Au fond

$$\cos \alpha = \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = 1.$$

Il reste

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_{xoy} (u_0 T_y + w_0 N_z) d\sigma, \\ & = - \varepsilon \int_{xoy} \left[ u_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + 2 w_0 \frac{\partial w}{\partial z} \right] d\sigma = - \varepsilon \int_{xoy} u_0 \frac{\partial u}{\partial z} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Or au fond, on a, d'après (24),

$$u_0 = 2KA \sin Kx \sin K't = c \sin K't,$$

et (15) donne  $\left(\frac{\pi}{T} = K'\right)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = c \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \left[ \sin \pi \frac{t}{T} + \cos \pi \frac{t}{T} \right],$$

d'où, en prenant la valeur moyenne de  $\sin^2 K't$ ,

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = c^2 \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \frac{1}{2}.$$

Ainsi (28) donne, pour *le travail des frottements au fond*,

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int \int_{xoy} c^2 dx dy = - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int \int 4K^2 A^2 \sin^2 Kx dx dy \\ & = - \varepsilon l l' \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} K^2 A^2 \end{aligned} \right.$$

2° Sur le plan  $yo\bar{z}$

$$\cos \beta = \cos \gamma = 0, \quad \cos \alpha = -1,$$

le travail des frottements est représenté par

$$- \int_{yo\bar{z}} (u_0 N_x + w_0 T_y) d\sigma = - \varepsilon \int_{yo\bar{z}} w_0 \frac{\partial w}{\partial x} d\sigma \quad \text{pour } x = 0;$$

on trouve comme précédemment

$$\left( w \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 = \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}},$$

et ce travail devient

$$(30) \left\{ \begin{aligned} - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int \int_{yo\bar{z}} c^2 dy dz &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int \int K^2 A^2 (e^{Kz} - e^{-Kz})^2 dy dz \\ &= - \frac{\varepsilon}{2} l' \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} K^2 A^2 \left[ \frac{e^{2KH} - e^{-2KH}}{2K} - 2H \right]. \end{aligned} \right.$$

3° Sur le plan  $x = l$ , parallèle à  $yo\bar{z}$ , on aura

$$\cos \beta = \cos \gamma = 0, \quad \cos \alpha = +1,$$

le travail des frottements sera représenté par

$$\varepsilon \int_{x=l} w_0 \frac{\partial w}{\partial x} d\sigma.$$

Or

$$w_l = KA (e^{Kz} - e^{-Kz}) \sin K'l = c \sin K'l;$$

on emploie ensuite la formule (17) et l'on trouve encore

$$\left( w \frac{\partial w}{\partial x} \right)_l = - \frac{c^2}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}}.$$

On retrouvera donc la valeur (30). Je double cette valeur et j'aurai le travail des frottements sur les plans  $x = 0$  et  $x = l$

$$(31) \quad = - \varepsilon \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \frac{KA^2 l'}{2} (e^{2KH} - e^{-2KH} - 4KH).$$

4° Sur le plan  $y = 0$ ,

$$\cos \alpha = \cos \gamma = 0, \quad \cos \beta = -1.$$

L'intégrale

$$\begin{aligned} &= - \int_{xoz} (u_0 T_z + w_0 T_x) d\sigma, \\ &= - \varepsilon \int_{xoz} \left( u_0 \frac{\partial u}{\partial y} + w_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

$u$  et  $w$  sont donnés par les équations (18) et (19);  $u_0$  et  $w_0$  se tirent de (24); on trouve comme précédemment

$$\begin{aligned} - \varepsilon \int_{xoz} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int_{xoz} c^2 d\sigma \\ &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int_{xoz} K^2 A^2 (e^{Kz} + e^{-Kz})^2 \sin^2 Kx dx dz \\ &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} K^2 A^2 \left( \frac{e^{2KH} - e^{-2KH}}{2K} + 2H \right) \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} - \int_{xoz} \left( w \frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 d\sigma &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \int_{xoz} K^2 A^2 (e^{Kz} - e^{-Kz})^2 \cos^2 Kx dx dz \\ &= - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} K^2 A^2 \left( \frac{e^{2KH} - e^{-2KH}}{2K} - 2H \right) \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

On a donc en tout, pour le travail des frottements sur le plan  $y = 0$ ,

$$(32) \quad - \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} K A^2 (e^{2KH} - e^{-2KH}) \frac{l}{2}.$$

5° Sur le plan  $y = l$  :

On emploie les valeurs de  $u$  et de  $w$  données par les formules (20) et (21), et l'on trouve encore, comme on pouvait le prévoir, que le frottement a son travail égal en valeur et en signe à celui qui a lieu près du plan  $y = 0$ ; j'ai donc, en doublant la formule (32), l'effet du frottement sur  $y = 0$  et  $y = l$ . C'est

$$(33) \quad - \varepsilon \sqrt{\frac{\rho\pi}{2\varepsilon T}} \frac{K A^2 l}{2} (e^{2KH} - e^{-2KH}).$$

L'intégrale totale de surface est donc donnée par (29) + (31) + (33)  
ou

$$\begin{aligned} & -\rho \sqrt{\frac{\varepsilon \mathbf{K}'}{2\rho}} \left[ l' \mathbf{K}^2 \mathbf{A}^2 - 2 l' \mathbf{H} \mathbf{K}^2 \mathbf{A}^2 + \mathbf{K} \mathbf{A}^2 (e^{2\mathbf{K}\mathbf{H}} - e^{-2\mathbf{K}\mathbf{H}}) \frac{l+l'}{2} \right] \\ & = -\rho \sqrt{\frac{\varepsilon \mathbf{K}'}{2\rho}} \left[ l' \mathbf{K}^2 \mathbf{A}^2 (l - 2\mathbf{H}) + \mathbf{K} \mathbf{A}^2 (e^{2\mathbf{K}\mathbf{H}} - e^{-2\mathbf{K}\mathbf{H}}) \frac{l+l'}{2} \right], \end{aligned}$$

ou bien, en introduisant l'énergie  $\mathcal{E}$  donnée par la formule (27), on a

$$(34) \quad -\mathcal{E} \sqrt{\frac{\varepsilon \mathbf{K}'}{2\rho}} \left[ \frac{4\mathbf{K}(l-2\mathbf{H})}{l(e^{2\mathbf{K}\mathbf{H}} - e^{-2\mathbf{K}\mathbf{H}})} + 2 \left( \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right) \right].$$

Telle est la somme des intégrales de surface dans l'équation (23) des forces vives.

Je calcule l'intégrale de volume de l'équation (23) des forces vives. Elle se réduit à

$$-4\varepsilon \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma,$$

d'où, à l'aide de l'équation (24),

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \mathbf{K}^4 \mathbf{A}^2 \sin^2 \mathbf{K}' t (e^{2\mathbf{K}z} + e^{-2\mathbf{K}z} + 2 \cos 2\mathbf{K}x);$$

je remplace  $\sin^2 \mathbf{K}' t$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$  et j'intègre pour toute la cuve

$$\begin{aligned} -4\varepsilon \int_{\sigma} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] d\sigma &= -\frac{4\varepsilon \mathbf{K}^4 \mathbf{A}^2}{2} l' \frac{e^{2\mathbf{K}\mathbf{H}} - e^{-2\mathbf{K}\mathbf{H}}}{2\mathbf{K}} \\ &= -\varepsilon \mathbf{K}^3 \mathbf{A}^2 l' (e^{2\mathbf{K}\mathbf{H}} - e^{-2\mathbf{K}\mathbf{H}}). \end{aligned}$$

En introduisant la valeur (27) de  $\mathcal{E}$ , j'ai

$$(35) \quad = -4\varepsilon \frac{\mathbf{K}^2}{\rho} \mathcal{E};$$

je porte (34) et (35) en (23) et il vient, pour l'équation des forces vives,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{E} \left\{ \frac{4\mathbf{K}^2\varepsilon}{\rho} + \sqrt{\frac{\varepsilon \mathbf{K}'}{2\rho}} \left[ \frac{4\mathbf{K}(l-2\mathbf{H})}{l(e^{2\mathbf{K}\mathbf{H}} - e^{-2\mathbf{K}\mathbf{H}})} + 2 \left( \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right) \right] \right\},$$

d'où en intégrant

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_0} = e^{-2 \left[ \frac{2K^2 \varepsilon}{\rho} + \sqrt{\frac{\varepsilon K'}{2\rho}} \left( \frac{2K(l-2H)}{l(e^{2KH} - e^{-2KH})} + \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right) \right] t},$$

et comme on a, en appelant  $h$  la dénivellation maximum due au clapotis au temps  $t$ ,

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_0} = \frac{h^2}{h_0^2},$$

il vient

$$(36) \quad h = h_0 e^{-\left[ \frac{2K^2 \varepsilon}{\rho} + \sqrt{\frac{\varepsilon K'}{2\rho}} \left( \frac{2K(l-2H)}{l(e^{2KH} - e^{-2KH})} + \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right) \right] t}.$$

*Le coefficient d'extinction cherché est*

$$(37) \quad \alpha = \frac{2K^2 \varepsilon}{\rho} + \sqrt{\frac{\varepsilon K'}{2\rho}} \left[ \frac{2K(l-2H)}{l(e^{2KH} - e^{-2KH})} + \frac{1}{l'} + \frac{1}{l} \right].$$

*Remarque.* — Comme vérification, on peut trouver rapidement la partie du coefficient d'extinction qui provient de la présence des parois, en supposant que le coefficient de frottement à la paroi est  $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi \rho \varepsilon}{2T}}$  ( $\varepsilon$  étant le coefficient de frottement intérieur déterminé par Poiseuille) et que le travail détruit par le frottement, par unité de surface, est  $\sqrt{\frac{\pi \rho \varepsilon}{2T}} V_0^2$ ;  $V_0$  étant la vitesse parallèle à la paroi considérée, fournie par l'équation (11).

On aura pour le fond ( $z = 0$ )

$$\sqrt{\frac{\pi \rho \varepsilon}{2T}} \iint u_0^2 dx dy,$$

---

(1) Ceci résulte des valeurs trouvées précédemment pour les travaux dus aux parois et a, du reste, été établi par M. Boussinesq (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 353; 1878) : « Le frottement extérieur détruit donc, par son influence, en moyenne, un travail égal à celui qu'il détruirait directement si la vitesse contre la paroi était celle  $u_0$ , qui s'observe à une petite distance à l'intérieur et que le frottement dont il s'agit fût le produit de cette vitesse  $u_0$  par le coefficient

$$\sqrt{\frac{\pi \rho \varepsilon}{2T}} \text{ ».$$

pour les faces  $x = 0$  et  $x = l$

$$2\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}} \iint \omega_0^2 dx dz;$$

enfin pour les faces  $y = 0$  et  $y = l'$

$$2\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}} \iint V_0^2 dx dz = 2\sqrt{\frac{\pi\rho\varepsilon}{2T}} \iint (u_0^2 + w_0^2) dx dz.$$

*Remarques sur le coefficient  $\alpha$ .* — I.  $\frac{2K^2\varepsilon}{\rho}$  a peu d'importance, car ce terme renferme  $\frac{\varepsilon}{\rho} = 0,00001336 \times 981$  à la première puissance, tandis que le terme suivant n'en renferme que la racine carrée.

II. On peut toujours faire disparaître le terme le plus compliqué de  $\alpha$  en prenant, pour les observations, une profondeur d'eau  $H = \frac{l}{2}$ . Pour une plus grande valeur de  $H$ , ce terme devient négatif.

III. S'il y a une superposition de clapotis (si  $i$  a diverses valeurs), chacun d'eux s'affaiblit comme s'il était seul; on peut donc faire le calcul de la réduction de hauteur pour l'un quelconque. Du reste, les clapotis dont la longueur d'ondulation est plus faible s'éliminent successivement et le mouvement se simplifie rapidement (1).

IV.  $\alpha$  ne dépend pas de la nature du récipient, mais de la nature du liquide et de son coefficient de frottement *intérieure*. Cela tient à ce que je ne considère que des liquides mouillant les récipients. Il y a donc une couche liquide adhérente à la paroi, de sorte que, même à la paroi, on a un frottement de liquide sur liquide. Il n'en serait pas de même si la paroi n'était pas mouillée.

---

(1) Cf. *Théorie des eaux courantes*, additions, p. 32 et 36.

## CHAPITRE IV.

CALCUL DU COEFFICIENT D'EXTINCTION DANS UNE CUVE RECTANGULAIRE (AQUARIUM)  
ET OBSERVATIONS.

Je me suis servi d'un aquarium pour lequel  $l = 29^{\text{cm}}$  et  $l' = 18^{\text{cm}},5$ , j'y ai mis de l'eau jusqu'à la hauteur  $H = 12^{\text{cm}},5$ .

D'ailleurs  $\frac{\varepsilon}{\rho} = 0,00001336 \times 981$  (1)

$$K = \frac{\pi}{l} \quad (\text{un seul nœud}).$$

Cela posé, je calcule la formule (37) et trouve :

$$\log K = \bar{1},03475,$$

$$e^{2KH} = 15,003,$$

$$\log K' = 0,98422,$$

$$\frac{2K^2\varepsilon}{\rho} = 0,00030761,$$

$$\log \sqrt{\frac{\varepsilon K'}{2\rho}} = \bar{1},40033,$$

$$\frac{l+l'}{l'} = 0,08854,$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon K'}{2\rho}} \left[ \frac{2K(l-2H)}{l(e^{2KH} - e^{-2KH})} + \frac{l+l'}{l'} \right] = 0,02276,$$

$$(37)' \quad \alpha = 0,0231.$$

Dès lors, la formule (36), qui donne la dénivellation maximum  $h$  au temps  $t$  en fonction de la dénivellation maximum  $h_0$  à l'origine du temps, devient

$$(36)' \quad h = h_0 e^{-0,0231 \times t}.$$

(1) Je prends le centimètre pour unité et néglige les petites variations dues à la température.

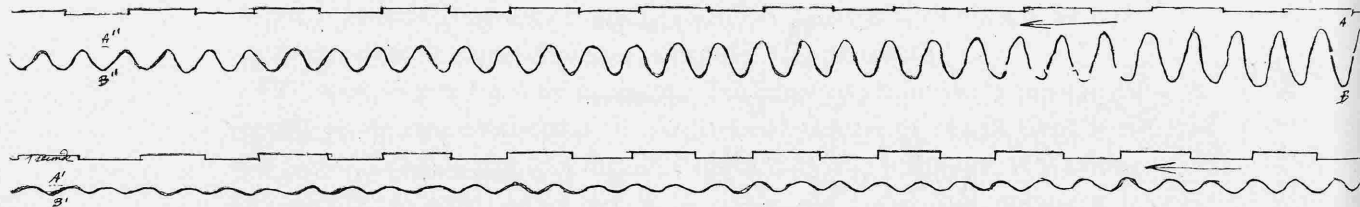


Cette formule permet de calculer la diminution de hauteur des dénivellations au bout de temps quelconques  $t$ . Il fut facile, en plaçant une échelle divisée sur l'aquarium, de constater que les réductions effectuées au bout de dix, vingt, trente secondes correspondaient à *peu près* aux réductions données par la formule.

Pour obtenir plus de précision et permettre à chacun de contrôler mes résultats, je songeai à recourir à la Photographie pour fixer les oscillations de l'eau. M. Marey eut la grande obligeance de mettre son laboratoire à ma disposition, et son préparateur, M. Comte, après divers essais, m'aida à faire les belles photographies ci-jointes.

Une fente étroite était disposée sur l'aquarium, dont le liquide était coloré en rouge; ainsi le niveau se voyait très distinctement sur une plaque photographique. Pour avoir ses positions successives, il suffisait d'imprimer à la plaque un mouvement uniforme de translation, mouvement que M. Comte produisait à l'aide d'un moteur électrique. Au lieu de plaque photographique, il employait aussi du papier sensible qui se déroulait sur un cylindre pour s'enrouler sur un autre (dans un chronophotographe Marey). Un métronome inscrivait le temps. Il donnait la seconde en moyenne. Je l'ai contrôlé tout d'abord à l'aide d'un chronomètre.

Fig. 18.



Je puis contrôler la formule (36)' sur cette photographie (1), puisqu'elle ne renferme que le rapport  $\frac{h}{h_0}$ : peu importe donc que les oscillations de la cuve aient été réduites, puisqu'elles l'ont été dans le même rapport. Je puis, pour le même motif, prendre pour  $h$ , non pas

(1) Le calcul a été fait sur la photographie; la gravure ci-dessus réduit la photographie à moitié et ne reproduit pas la ligne du niveau.

la dénivellation au-dessus du niveau d'équilibre [car j'ai voulu indiquer ce niveau sur la photographie en tendant un fil devant la fente, mais il est difficile d'avoir exactement le niveau (1)], mais bien la dénivellation totale ou distance d'un minimum au maximum suivant.

*Observations.* — I. Je mesure la hauteur AB et la trouve égale à  $1^{\text{m}},55$ ; ainsi  $h_0 = 1^{\text{m}},55$ .

Au bout de quarante-trois secondes, marquées au haut de la photographie par le métronome, je trouve que la hauteur est réduite à A'B', soit à  $0^{\text{m}},15$ . Ainsi  $h = 0,15$ .

II. De même, en A''B'',  $h_0 = 0^{\text{m}},5$  et, au bout de vingt-trois secondes, en A'B',  $h = 0^{\text{m}},15$ .

*Comparaison avec la théorie.* — Je rappelle d'abord que j'ai évalué le coefficient d'extinction  $\alpha$  à l'aide du coefficient  $\epsilon$  des frottements intérieurs qui résulte des expériences de Poiseuille (voir p. 31) sur l'écoulement de l'eau dans des tubes capillaires; *il ne s'applique donc rigoureusement qu'aux mouvements bien continus*; et M. Bousinesq a montré que si l'on calcule  $\epsilon$  pour un canal rectangulaire, dans lequel coulerait avec une vitesse de  $1^{\text{m}}$  sur le fond une nappe liquide ayant  $1^{\text{m}}$  de profondeur, on trouve pour cet  $\epsilon$  une valeur *cing mille fois* plus forte que celle qui résultait des expériences de Poiseuille, parce que dans ce dernier cas le mouvement n'est pas continu, mais tourbillonnant (voir *Théorie des eaux courantes*, p. 51, note 1).

Cela rappelé, je cherche, à l'aide des deux observations ci-dessus et de la formule (36)',  $h = h_0 e^{-\alpha t}$ ; quel sera *le coefficient expérimental*  $\alpha$  d'extinction. Je trouve  $\alpha = 0,05431$  et  $\alpha = 0,05235$ , tandis que *le coefficient théorique* était  $\alpha = 0,0231$  [form. (37)'].

Cette différence entre l' $\alpha$  observé et l' $\alpha$  théorique nous montre que

---

(1) On remarquera cependant que le colonel Émy écrivait en 1831: « La trace de la surface de l'eau, lorsqu'elle est en repos, n'est pas à égale distance entre le maximum de l'élévation des flots et le maximum de l'abaissement des creux, les flots s'élèvent davantage au-dessus de la surface de la mer que les creux ne s'abaissent au-dessous de cette surface. » (*Du Mouvement des ondes*, p. 17.) C'est ce qu'on peut constater sur toutes les photographies.

dans l'aquarium les mouvements ne sont pas absolument continus. Mais il est très remarquable que ces deux valeurs sont, somme toute, très comparables, à l'encontre de ce qui a lieu dans le mouvement cité ci-dessus où le coefficient observé  $\varepsilon$  vaut cinq mille fois le coefficient théorique qui m'a servi ici.

On prévoit déjà que, dans le cas suivant de l'extinction des oscillations dans un tube en U de faible rayon, je devrai trouver un résultat encore plus conforme à la théorie parce que je me rapprocherai davantage des conditions des expériences de Poiseuille, c'est-à-dire du cas des mouvements bien continus exempts de tout tourbillonnement.

*Remarque.* — On pourrait encore sur la photographie constater l'isochronisme des oscillations, mais je traiterai cette question au Chapitre III, avec la plus grande précision, à l'aide d'un chronomètre spécial enregistreur.

---

## DEUXIÈME CAS.

MOUVEMENT DE L'EAU DANS UN TUBE EN U.

---

### CHAPITRE I.

ÉQUATION DU MOUVEMENT QUAND ON NÉGLIGE LES FROTTEMENTS.

---

Je prends la surface d'équilibre pour plan  $xoy$  et l'axe du tube pour axe des  $z$ .

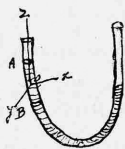
Soit  $l$  la longueur de la colonne d'eau oscillante, et  $r$  le rayon du tube.

J'applique l'équation des forces vives

$$(1) \quad \frac{1}{2} d \sum m(v^2 - v_0^2) = \sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

Je suppose qu'en  $t = 0$  l'eau est au point le plus élevé ( $z_0$ ) de son déplacement, on a donc  $v = 0$ . Ici  $v = \frac{dz}{dt}$  et est la même en valeur

Fig. 19.



absolue pour tous les points; donc, en prenant le  $z$  du point A

$$\frac{1}{2} d \sum m v^2 = \frac{1}{2} \frac{dz^2}{dt^2} \sum m,$$

$\sum Z$  est le poids de la colonne d'eau AB  $= -\pi r^2 \rho g 2z$  ( $z = 0$  A).

Ainsi (1) devient

$$(2) \quad \frac{1}{2} d \frac{dz^2}{dt^2} \rho \pi r^2 l = -\pi r^2 \rho g 2z dz,$$

d'où, en intégrant de 0 à  $t$ , c'est-à-dire de  $z_0$  à  $z$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \rho \pi r^2 l \frac{dz^2}{dt^2} = -\rho g \pi r^2 (z^2 - z_0^2),$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{2g}{l}} dt = \frac{dz}{\pm \sqrt{z_0^2 - z^2}},$$

d'où

$$(4) \quad z = z_0 \cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t.$$

Cette formule renferme les lois énoncées par Newton. La durée constante d'une demi-oscillation est

$$(5) \quad T = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}},$$

elle est indépendante de la nature du liquide, etc.; elle est la même que celle de la demi-oscillation d'un pendule simple de la longueur  $\frac{l}{2}$ .

## CHAPITRE II.

RECHERCHE DU COEFFICIENT D'EXTINCTION ET OBSERVATIONS.

Je reprends l'équation (3) des forces vives.

Elle montre que l'énergie totale est constante quand on néglige les frottements :

$$\frac{\pi r^2}{2} \rho l \frac{dz^2}{dt^2} + \rho g \pi r^2 z^2 = \rho g \pi r^2 z_0^2,$$

on a constamment

$$(6) \quad \mathcal{E} = \rho g \pi r^2 z_0^2.$$

Je vais écrire que la variation de  $\mathcal{E}$  est égale à la somme des travaux des frottements extérieurs durant le temps  $dt$  :

$$d\mathcal{E} = - dt \sum T_f.$$

Or, M. Boussinesq a montré, et j'ai constaté aussi, p. 29, que si l'on appelle  $w_0$  la vitesse parallèle à la paroi, calculée comme s'il n'y avait pas de frottement, le travail des frottements est, par unité de surface de la paroi,

$$(7) \quad \sqrt{\frac{\pi \rho \varepsilon}{2 T}} w_0^2.$$

On a donc ici de par les formules (4) et (5)

$$\sqrt{\frac{\rho \varepsilon}{2}} \sqrt{\frac{2g}{l} \frac{2g}{l}} z_0^2 \sin^2 \sqrt{\frac{2g}{l}} t.$$

Je remplace  $\sin^2$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{2}$ ; car je cherche le coefficient d'extinction et non pas les variations périodiques de  $\mathcal{E}$ . Je multiplie par  $2\pi r l$ , surface totale du tube, et j'obtiens l'équation

$$(8) \quad d\mathcal{E} = - dt \sqrt{\frac{\rho \varepsilon}{2}} \sqrt{\frac{2g}{l}} g z_0^2 2\pi r;$$

or (6) me donne

$$g z_0^2 \pi r = \frac{\mathcal{C}}{r \rho},$$

d'où (8) devient

$$\frac{d\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = -\frac{2}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\rho}} \sqrt{\frac{2g}{l}} dt = -2\alpha dt,$$

d'où

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 e^{-2\alpha t},$$

et, d'après la formule (6)

$$(9) \quad z = z_0 e^{-\alpha t}.$$

Le coefficient d'extinction  $\alpha$  est

$$(10) \quad \alpha = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\rho}} \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Je le calcule pour un tube en U de rayon  $r = 0^{\text{cm}}, 95$ , la longueur de la colonne oscillante étant  $l = 70^{\text{cm}}$  :

$$\begin{aligned} \log \alpha &= \frac{1}{2} \log \frac{\varepsilon}{2\rho} + \frac{1}{4} \log \frac{981}{35} - \log 0,95 \\ &= \frac{1}{2} \bar{3},81644 + \frac{1}{4} 1,44760 - \bar{1},97772 = \bar{1},29240, \end{aligned}$$

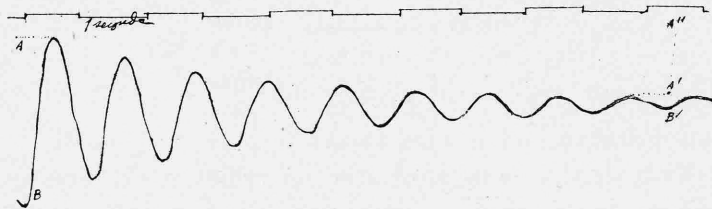
$$(10)' \quad \alpha = 0,19607,$$

puis

$$(9)' \quad z = z_0 e^{-0,19607 t}.$$

*Observations* — I. En AB,  $z_0 = AB = 4^{\text{cm}}, 4$ . Après  $AA'' = 11$  secondes, la hauteur est réduite à  $z = A'B' = 0^{\text{cm}}, 3$ .

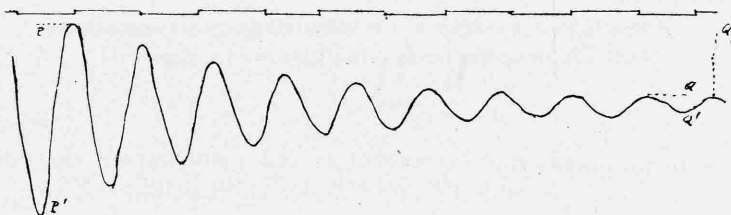
Fig. 20.



II. En PP';  $z_0 = PP' = 5^{\text{cm}}$ . Après  $PQ_1 = 11$  secondes, la hau-

teur est réduite à  $z = QQ' = 0,35$ . (La gravure réduit encore les photographies de moitié.)

Fig. 21.



*Comparaison avec la théorie.* — La formule (9) me donne  $\alpha$  en fonction de  $z$ ,  $z_0$  et  $t$  déterminés par les deux observations ci-dessus. Je trouve ainsi pour la *valeur observée* de  $\alpha$  0,24414 et 0,24175, soit en moyenne 0,2429. Cette valeur diffère peu de la *valeur théorique* (10)' qui est  $\alpha = 0,196$ , comme j'ai annoncé (p. 36) qu'on pouvait le prévoir. Ainsi, dans le cas actuel, il y a une concordance suffisante entre la théorie et l'observation, grâce à la petitesse de la section du tube, tandis que, dans le cas de l'aquarium de section soixante-dix fois plus grande, l'accord était moins satisfaisant; car, ainsi que l'écrivait M. de Saint-Venant : « Les filets ne marchent pas parallèlement entre eux avec des vitesses régulièrement graduées de l'un à l'autre et les ruptures, les tourbillonnements et les autres mouvements compliqués ou obliques, qui doivent beaucoup influer sur la grandeur des frottements, se forment et se développent davantage dans les grandes sections » (*Annales des Mines*, 4<sup>e</sup> série, t. XX, p. 49; 1851).

### CHAPITRE III.

OBSERVATIONS RELATIVES A L'ISOCRONISME DES OSCILLATIONS  
DANS UNE CUVE RECTANGULAIRE ET DANS UN TUBE EN U.

1° Je me sers d'un vase de pile de 19<sup>cm</sup> de long et 8<sup>cm</sup> de large et renfermant 20<sup>cm</sup> de hauteur d'eau. Je colore cette eau en rouge à l'aide de teinture d'orseille, afin de mieux saisir le niveau de l'eau (car la teinte bleuâtre de ce niveau tranchait trop peu sur le verre); je note ensuite les maxima successifs, à l'aide d'un chronomètre Bréguet enregistreur (1). Il me suffit de suivre des yeux le mouvement de l'eau et, au moment du maximum, d'appuyer sur un bouton; une petite tache d'encre se dépose près de l'heure correspondante; je fais cela pour une série de maxima successifs, puis je fais les lectures. Les différences des lectures successives sont les durées d'oscillation. Le chronomètre est divisé en quarts de seconde et donne ainsi des huitièmes de seconde, lorsque la tache d'encre est déposée entre deux divisions consécutives. Je fis des expériences sur des dénivellations de près de 2<sup>cm</sup> et de près de 0<sup>cm</sup>,5; je trouvai que la durée d'une oscillation est constante et sensiblement égale à une demi-seconde.

Je trouvai, en effet, dans quatre expériences successives :

|    |                     |               |                 |
|----|---------------------|---------------|-----------------|
| 1° | Six oscillations de | $\frac{5}{8}$ | de seconde      |
|    | sept                | »             | $\frac{4}{8}$ » |
|    | six                 | »             | $\frac{3}{8}$ » |
| 2° | deux                | »             | $\frac{5}{8}$ » |
|    | quatre              | »             | $\frac{4}{8}$ » |
|    | deux                | »             | $\frac{3}{8}$ » |
| 3° | six                 | »             | $\frac{5}{8}$ » |
|    | sept                | »             | $\frac{3}{8}$ » |
| 4° | cinq                | »             | $\frac{5}{8}$ » |
|    | cinq                | »             | $\frac{4}{8}$ » |
|    | cinq                | »             | $\frac{3}{8}$ » |

(1) Ce chronomètre me fut prêté par M. Branly, professeur de Physique à l'Institut catholique de Paris.



Et ces diverses durées se succèdent dans un ordre quelconque, que les oscillations soient fortes ou faibles, ce qui me conduit à attribuer leur différence à la difficulté que j'éprouvais de pointer *exactement* le maximum. Je devais très souvent ou *le prévenir* ou *le suivre*.

Voici, en effet, dans leur ordre les durées que j'ai notées pour les *oscillations successives* de la quatrième expérience :

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}.$$

On a donc le droit de conclure que la durée des oscillations est constanté et égale à une demi-seconde ( $0^s, 5$ ).

*Calcul de cette durée.* — La formule (3 bis) du Chapitre I me donne

$$z - H = -\frac{1}{g} \frac{d\varphi}{dt}$$

et à l'aide de la formule (11)

$$z - H = C \cos K' t,$$

avec

$$K = \frac{\pi}{l} \quad \text{et} \quad K' = \sqrt{gK \frac{e^{Kl} - e^{-Kl}}{e^{Kl} + e^{-Kl}}}.$$

Car je n'ai dans mon vase qu'un seul nœud et deux ventres aux extrémités. Je n'ai donc qu'un seul terme ( $i = 0$ ) en  $\varphi$ .

La valeur de  $z - H$  montre que deux maxima successifs sont distants de l'intervalle constant

$$T = \frac{2\pi}{K'}.$$

Or

$$\log K = \log \pi - \log l = \bar{1}, 21832,$$

$$\log K' = 1, 10441,$$

$$\log T = \bar{1}, 69375,$$

donc

$$T = 0^s, 494.$$

La différence entre la théorie et l'expérience n'est que de 6 millièmes de seconde ( $0^s, 006$ ).

2° Je me sers d'un tube coudé de 1<sup>cm</sup> de rayon, la longueur de la colonne d'eau oscillante étant de 70<sup>cm</sup>.

Sur trente-deux oscillations mesurées pour des dénivellations qui varient depuis 8<sup>cm</sup> jusqu'à 0<sup>cm</sup>, 25 au-dessus du niveau d'équilibre, j'ai trouvé

|    |                            |               |
|----|----------------------------|---------------|
|    | 1 oscillation de 1 seconde | $\frac{1}{2}$ |
| 1  | » 1 seconde                | $\frac{3}{8}$ |
| 19 | » 1 seconde                | $\frac{1}{4}$ |
| 8  | » 1 seconde                | $\frac{1}{8}$ |
| 3  | » 1 seconde                |               |

Ces diverses durées sont enchevêtrées les unes dans les autres; il n'y a donc aucune loi de décroissance, mais seulement des erreurs d'observation, et je puis dire que la durée d'une oscillation est constante. Si je fais une moyenne entre les durées des trente-deux oscillations ci-dessus, je trouve 1<sup>s</sup>, 207.

*Calcul de cette durée.* — D'après la formule (5) de la page 37

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

Ici

$$l = 70,$$

d'où

$$\log T = 0,07437$$

et

$$T = 1^s, 1868 = 1^s, 187.$$

L'observation a donné 1<sup>s</sup>, 207; la différence entre le calcul et l'observation n'est donc que de 1<sup>s</sup>, 207 — 1<sup>s</sup>, 187 = 0<sup>s</sup>, 02 sur la durée de chaque oscillation.

## TROISIÈME CAS.

MOUVEMENT DE L'EAU DANS UN VASE CYLINDRIQUE.

### CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT.

Je prends des coordonnées semi-polaires et cherche ce que deviennent l'équation de continuité et les conditions aux parois.

L'équation de continuité devient (1)

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0.$$

La vitesse suivant  $oz$  est encore

$$(2) \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

La vitesse suivant un rayon quelconque est

$$\frac{dr}{dt} = u \cos \omega + v \sin \omega = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \omega + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \omega,$$

ou

$$(3) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

J'intègre l'équation (1). Comme le mouvement doit être périodique en  $\omega$ , je pose pour avoir une solution simple :

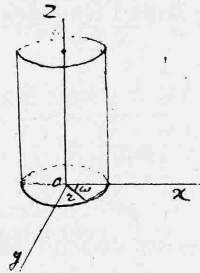
$$(4) \quad \varphi = \cos m \omega f(z) j(r);$$

---

(1) Voir BOUSSINESQ, *Calcul intégral*, p. 309\*.

$m$  est un entier quelconque, car  $\cos m\omega$  doit admettre la période  $2\pi$ . La valeur la plus simple de  $m$ , à savoir  $m = 1$ , donnera évidemment le clapotis fondamental.

Fig. 22.



Nous conserverons donc le terme le plus important quand nous ferons  $m = 1$ .

La substitution donne

$$\cos m\omega \left( j j'' + f j'' + f j' \frac{1}{r} - m^2 f j \frac{1}{r^2} \right) = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{j} \left( j'' + \frac{j'}{r} - m^2 \frac{j}{r^2} \right) = - \frac{f''}{f} = -v^2.$$

Le premier membre ne dépend que de  $r$  et le second ne dépend que de  $z$ . Leur égalité n'est donc possible que si chacun est égal à une constante  $-v^2$ , que j'ai prise négative parce que le mouvement n'étant pas périodique en  $z$ , la fonction  $f(z)$  ne doit pas être périodique non plus.

D'où

$$(5) \quad f(z) = A e^{vz} + B e^{-vz},$$

et

$$\frac{d^2 j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dj}{dr} + \left( v^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) j = 0;$$

je pose

$$(6) \quad r = \frac{x}{v}$$

et substitue, j'obtiens

$$(7) \quad \frac{d^2 j}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dj}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) j = 0,$$

équation connue.

L'intégrale peut être prise sous l'une des trois formes (1)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_m(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} \left[ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot (m+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \dots \right], \\ \text{ou} \\ j_m(x) = \frac{x^m}{1 \cdot 3 \dots (2m-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) \sin^{2m} \theta \, d\theta, \\ \text{ou} \\ j_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(m\theta - x \sin \theta) \, d\theta, \end{array} \right.$$

$j_m$  étant une fonction de Fourier.

La fonction  $\varphi$  est donc

$$(9) \quad \varphi = \cos m\omega (A e^{\nu z} + B e^{-\nu z}) j_m(\nu r).$$

Je vais déterminer A, B et  $\nu$  de manière à satisfaire aux conditions aux surfaces limites qui sont

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0 \text{ (fond)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{pour} \quad z = H \text{ (surface)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad r = l \text{ (parois latérales)}. \end{array} \right.$$

(1) Voir TISSERAND, *Méc. céle.*, t. I, p. 207 et 214. Voir aussi JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 235.

L'intégrale générale de l'équation (7), donnée par M. Jordan pour le cas de  $m$  entier, qui est le nôtre, est

$$C_1 j_m(x) + C_2 Y_n(x).$$

Mais l'intégrale  $Y_n$  devient infinie pour  $x = 0$ , c'est-à-dire pour  $r = 0$ , et doit, par suite, être rejetée ici, car le potentiel  $\varphi$  et ses dérivées ne doivent pas devenir infinis sur l'axe. Il n'en serait pas de même si le mouvement avait lieu entre deux cylindres.

La première condition sera remplie si l'on prend  $A = B =$  fonction de  $t$ . La seconde donne alors

$$A v (e^{\nu H} - e^{-\nu H}) = -\frac{1}{g} \frac{d^2 A}{dt^2} (e^{\nu H} + e^{-\nu H}),$$

d'où

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + g v \frac{e^{\nu H} - e^{-\nu H}}{e^{\nu H} + e^{-\nu H}} A = 0$$

et

$$A = M \cos k' t + N \sin k' t,$$

avec

$$k' = \sqrt{g v \frac{e^{\nu H} - e^{-\nu H}}{e^{\nu H} + e^{-\nu H}}}.$$

Si le liquide était primitivement en repos, il faut  $M = 0$  et il reste

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = N \sin k' t \cos m \omega (e^{\nu z} + e^{-\nu z}) j_m(\nu r), \\ \text{avec} \\ k' = \sqrt{g v \frac{e^{\nu H} - e^{-\nu H}}{e^{\nu H} + e^{-\nu H}}}. \end{array} \right.$$

Il me reste à écrire  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ ; je le fais de deux manières : 1° à l'aide de la première valeur (8) de  $j_m(x)$ . On a

$$j_m(x) = \sum_{\beta}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\beta}}{\beta! (m+\beta)!},$$

d'où

$$\frac{dj_m}{dx} = \frac{1}{2} \sum_{\beta}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\beta-1} (m+2\beta)}{\beta! (m+\beta)!} = 0.$$

Je supprime le facteur commun  $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^m$  et il reste pour  $x = \nu l$

$$(12) \quad \frac{m}{1} - \frac{m+2}{1 \cdot m+1} \left(\frac{\nu l}{2}\right)^2 + \frac{m+4}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \left(\frac{\nu l}{2}\right)^4 - \dots = 0.$$

Cette formule donnera facilement les valeurs de  $\frac{\nu l}{2} < 1$ , on calculera les premiers termes.

Pour les grandes valeurs de  $x$  on emploiera la formule approchée donnée par M. Boussinesq (1)

$$(13) \quad \frac{dj_m}{dx} = 0 = \frac{1.3.5\dots(2m-1)}{(-1)^m} \frac{d}{dx} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{d^m}{dx^m} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

*Remarque.* — Pour  $m < 10$  on peut utiliser, au moins pour vérifier les racines trouvées, les Tables calculées par Hansen qui donnent les valeurs de  $j_1, j_2, \dots, j_{10}$  pour diverses valeurs de  $\frac{x}{2}$ . On a, en effet, d'après la troisième valeur (8) de  $j_m(x)$ ,

$$(13)' \quad \frac{dj_m}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin(m\theta - x \sin \theta) d\theta = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \{ \cos[(m-1)\theta - x \sin \theta] - \cos[(m+1)\theta - x \sin \theta] \} d\theta = 0,$$

c'est-à-dire en comparant à (8)

$$(14) \quad j_{m-1}(x) - j_{m+1}(x) = 0 \quad (2).$$

Dès qu'on aura une valeur de  $x$ , même peu approchée, donnée par la formule (13), on se servira des Tables et l'on cherchera pour quelle valeur de  $x$  on a  $j_{m-1}(x) = j_{m+1}(x)$ .

En résumé, pour  $x = \nu$  les équations (12) ou (13) ou (14) ne renferment qu'une seule inconnue  $\nu$  laquelle, d'après l'équation (12), aura

(1) *Calcul intégral*, p. 315\*.

(2) On pourrait encore transformer cette relation (14); on a, en effet, entre trois fonctions consécutives, la relation suivante (voir TISSERAND, *Méc. céleste*, t. I, p. 209, équation V)

$$mj_m(x) = \frac{x}{2} [j_{m+1}(x) + j_{m-1}(x)].$$

En tenant compte de (14) on aura

$$mj_m(x) = xj_{m-1}(x),$$

équation équivalente à  $\frac{dj_m}{dx} = 0$ .

Pour  $m = 1$  nous aurons

$$j_1(x) = xj_0(x).$$

une infinité de valeurs toutes positives. Soit  $v_i$  l'une quelconque de ces valeurs, la solution la plus générale sera

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \sum_m \sum_i N_i \sin k' t \cos m \omega (e^{v_i z} + e^{-v_i z}) j_m(v_i r), \\ \text{avec} \\ k' = \sqrt{g v_i \frac{e^{v_i h} - e^{-v_i h}}{e^{v_i h} + e^{-v_i h}}}. \end{array} \right.$$

Les constantes  $N_i$  se détermineront en identifiant la valeur initiale de  $z = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  avec l'ordonnée de la surface libre initiale connue.

*Application.* — Soit  $m = 1$ .

$v$  est donné par  $\frac{dj_1}{dr} = 0$ , c'est-à-dire par (1)

$$(12)' \quad 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{vl}{2}\right)^2 + \frac{5}{2^2 \cdot 3} \left(\frac{vl}{2}\right)^4 - \frac{7}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} \left(\frac{vl}{2}\right)^6 + \dots$$

Il est très facile de calculer les racines de  $\frac{dj_1}{dr} = 0$  pour  $r = vl$  à l'aide de la valeur approchée de  $j_1$  donnée par Hansen (2).

(1) L'équation (13)', où l'on fera  $x = vl$ , donne aussi pour  $m = 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{dj_1}{dx} = 0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta [\sin \theta \cos(x \sin \theta) - \cos \theta \sin(x \sin \theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(x \sin \theta) d\theta + \frac{1}{\pi x} [\sin \theta \cos(x \sin \theta)]_0^\pi \\ &\quad - \frac{1}{\pi x} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

L'avant-dernier terme, pris aux deux limites, est nul; le dernier est intégrable et, pris aux deux limites, donne 0; il reste donc

$$\frac{dj_1}{dx} = 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(vl \sin \theta) d\theta.$$

On peut du reste s'assurer que cette équation développée reproduit (12)'.

(2) Perturbations absolues des planètes dans les ellipses d'excentricité et d'inclinaison quelconques (traduit par Mauvais. Paris, 1845; in-8°, p. 111). On n'a pas encore calculé les racines de cette équation. M. de Corancez, comme je le dirai plus loin (p. 51, note 1), ne trouva qu'une valeur approchée de la plus petite racine.

N.

7



Je pose

$$(16) \quad \frac{v l}{2} = \lambda,$$

On a alors, comme l'établit Hansen,

$$(17) \quad \begin{cases} j_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} - \frac{4725}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \dots \right) \sin \left( 2\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{105}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{363825}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \dots \right) \cos \left( 2\lambda - \frac{\pi}{4} \right), \end{cases}$$

d'où je tire

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} \frac{dj_1}{d\lambda} = 0 = & \left( -\frac{7}{8} \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{195}{4096} \frac{1}{\lambda^{\frac{7}{2}}} \dots \right) \sin \left( 2\lambda - \frac{\pi}{4} \right) \\ & + \left( \frac{2}{\lambda^{\frac{5}{2}}} - \frac{57}{256} \frac{1}{\lambda^{\frac{9}{2}}} + \frac{7035}{262144} \frac{1}{\lambda^{\frac{13}{2}}} \dots \right) \cos \left( 2\lambda - \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

d'où avec  $\frac{1}{\lambda} = x$  et en effectuant la division

$$\frac{3\pi}{4} - 2\lambda = \text{arc tang} \left( \frac{7}{16} x + \frac{399}{4096} x^3 + \dots \right) - K\pi.$$

Or

$$\text{arc tang } z = \frac{z}{1+z^2} + \frac{2}{3} \frac{z^3}{(1+z^2)^2} + \dots \quad (1),$$

donc

$$(18) \quad 2\lambda = \pi \left( K + \frac{3}{4} \right) - \frac{7}{16} \frac{1}{\lambda} - \frac{854}{12288} \frac{1}{\lambda^3} \dots$$

Pour  $K = 0, 1, 2, \dots$ , cette équation donnera les diverses valeurs de  $\lambda$ , c'est-à-dire de  $v$ .

Je calcule quelques racines en  $v$  : je néglige le terme  $\frac{1}{\lambda^3}$ , il vient, pour  $K = 0$ ,

$$32\lambda^2 - 12\pi\lambda + 7 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{18,849 \pm 11,453}{32} = \frac{30,302}{32}.$$

---

(1) Voir FRENET, *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, p. 20, Exercice 133.

La plus petite racine ne convient pas, comme je le ferai voir plus loin (p. 52). Il vient donc

$$\lambda_1 = 0,9475.$$

Nous ne pouvons nous borner à cette valeur, car  $\lambda_1$  étant  $< 1$ , nous ne pouvons même pas dire *a priori* que sa valeur est approchée. Je vais donc substituer

$$\lambda = \frac{r_l}{2} = 0,9475 + \varepsilon,$$

dans les premiers termes de la série (12) et déterminerai  $\varepsilon$ .

Il vient

$$1 - 1,3466343 + 0,33581923 - 0,0351731 + 0,00202993 \\ - \varepsilon[2,8425 - 1,4177065 + 0,2227321 - 0,0171393] = 0,$$

ou

$$0,04395824 + \varepsilon \cdot 1,6304863 = 0,$$

d'où

$$\varepsilon = -0,02696,$$

d'où

$$\lambda = 0,9475 + \varepsilon = 0,92054$$

et

$$(19) \quad r_0 l = 2\lambda = 1,84108 \quad (1).$$

Pour  $K = 1$ , il vient en (18)

$$32\lambda^2 - 28\lambda\pi + 7 = 0, \\ \lambda = \frac{43,9824 \pm 41,35}{32} = 2,6665$$

et

$$(20) \quad r_1 l = 2\lambda = 5,333.$$

(1) M. de Corancez ne calcula que cette plus petite racine. Il trouva pour sa valeur 1,82986, en posant  $\frac{ml^2}{4} = \frac{2}{3} + \rho$  et négligeant  $\rho^2$ . Or il trouva  $\rho = 0,17044$ .  $\rho^2$  n'était donc pas absolument négligeable. Il aurait dû faire la nouvelle substitution

$$\frac{ml^2}{4} = \frac{2}{3} + 0,17044 + \rho'$$

et aurait pu alors négliger le carré de  $\rho'$  (*Théorie du mouvement de l'eau*, p. 62).

Pour  $K = 2$ , il vient

$$32\lambda^2 - 44\lambda\pi + 7 = 0,$$

$$\lambda = \frac{69,1152 \pm 67,426}{32} = 4,2669$$

et

$$(21) \quad \nu_2 l = 2\lambda = 8,5338.$$

Pour  $K = 3$ , il vient

$$\lambda = \frac{94,248 \pm 93,052}{32} = 5,853,$$

$$(22) \quad \nu_3 l = 2\lambda = 11,706, \quad \dots$$

Le calcul, on le voit, est très rapide.

Les valeurs de  $\lambda$  sont de plus en plus approchées, car les termes en  $\frac{1}{\lambda^3}$  que l'on a négligés deviennent de plus en plus petits.

*Vérification des racines trouvées.* — Je me sers des Tables calculées par Bessel et par Hansen qui donnent les valeurs des fonctions  $j_0$  et  $j_1$ , et je cherche en quel endroit l'expression

$$j_1 - 2\lambda j_0$$

change de signe. Cette expression est équivalente à  $\frac{dj_1}{dr}$ , comme je l'ai montré page 48 (note 2).

On remarque d'abord que les petites racines trouvées précédemment ne conviennent pas, comme j'en avais averti. On trouve ensuite chez Bessel (1) : pour  $2\lambda = 1,84$

$$0,5818649 - (1,84)(0,3167165),$$

différence négative, et pour  $2\lambda = 1,85$

$$0,5818492 - (1,85)(0,3108979),$$

différence positive.

---

(1) *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin, 1824).*

Il y a donc une racine entre 1,84 et 1,85, comme je l'ai trouvé.

Les Tables de Hansen ont pour argument  $\lambda$  qui varie de 0 à 10. Elles donnent : pour  $\lambda = 2,65$

$$-0,345961 + (5,3)(0,075803),$$

différence positive; pour  $\lambda = 2,7$

$$-0,345345 + (5,4)(0,041210),$$

différence négative. J'ai en effet trouvé pour cette racine

$$2\lambda = r_1 l = 5,333.$$

De même : pour  $\lambda = 4,25$ , on a

$$0,273121 - (8,5)(0,041939),$$

différence négative, et pour  $\lambda = 4,3$

$$0,272754 - (8,6)(0,014623),$$

différence positive. J'ai en effet trouvé pour cette racine

$$2\lambda = r_2 l = 8,5338, \quad \dots$$

---

## CHAPITRE II.

### CALCUL DE LA DURÉE D'UNE OSCILLATION ET OBSERVATIONS.

---

La durée  $T$  d'une oscillation complète est donnée par la formule

$$T = \frac{2\pi}{K'} = \frac{2\pi}{\sqrt{g^v \frac{e^{2vH} - 1}{e^{2vH} + 1}}}.$$

*Premières observations.* — Je puis donc calculer  $T$  pour un vase cylindrique de rayon  $l = 14^{\text{cm}}, 75$  et pour une hauteur d'eau  $H = 20^{\text{cm}}$ .

Je prends la plus petite valeur trouvée pour  $\nu$

$$\nu_0 = \frac{1,84108}{14,75}$$

Il vient

$$e^{\nu_0 H} = 147,33 \quad \text{puis} \quad \begin{aligned} \log 2\pi &= 0,7981809 \\ \log K' &= 1,0410270 \\ \log T &= 1,7571539 \end{aligned}$$

$$(23) \quad T = 0^s,57168.$$

Je fais les observations en me servant du chronomètre décrit au Chapitre III du cas précédent, qui me donne le huitième de seconde. Je trouve comme intervalle, pour de petites oscillations *successives*,

0<sup>s</sup>,50; 0<sup>s</sup>,625; 0<sup>s</sup>,50; 0<sup>s</sup>,625; 0<sup>s</sup>,625; 0<sup>s</sup>,50; 0<sup>s</sup>,75; 0<sup>s</sup>,625; 0<sup>s</sup>,50.

La moyenne est 0<sup>s</sup>,583.

Je comptai aussi :

|                                     |                      |
|-------------------------------------|----------------------|
| 49 oscillations complètes en        | 28 <sup>s</sup> ,5;  |
| 88       »               »       en | 51 <sup>s</sup> ;    |
| 35       »               »       en | 20 <sup>s</sup> ,25; |
| 24       »               »       en | 14 <sup>s</sup> ;    |

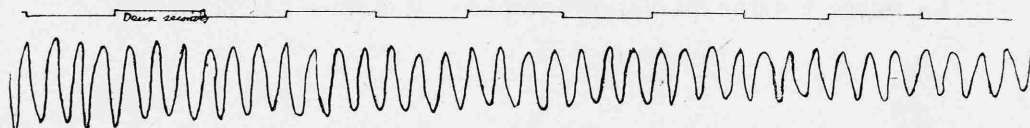
ce qui leur donne une durée respective de

0<sup>s</sup>,581; 0<sup>s</sup>,579; 0<sup>s</sup>,578; 0<sup>s</sup>,583.

*Secondes observations.* — Pour un vase cylindrique de rayon  $l = 15,5$  et pour une hauteur d'eau  $H = 19$ , la formule donne

$$(A) \quad T = \frac{2\pi}{K'} = 0^s,586.$$

Fig. 23.



On peut vérifier ce résultat sur la photographie ci-dessus, prise dans ces conditions (fig. 23).

On remarquera que le mouvement est irrégulier dans une cuve cylindrique, la décroissance n'est pas continue; il est très difficile aussi de ne pas avoir un mouvement *tournant*. La distance entre deux encoches correspond à *deux* secondes. On peut constater qu'il lui correspond plus de trois maxima, comme l'indiquait la formule (A).

*Vu et approuvé :*

Paris, le 11 juin 1897,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 11 juin 1897.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.



---

# SECONDE THÈSE.

---

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

---

Les équations de Laplace et leurs applications géométriques.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 11 juin 1897.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
G. DARBOUX.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 11 juin 1897.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
GRÉARD.

