

ACADÉMIE DE PARIS.  
FACULTÉ DES SCIENCES.

---

H. F. 165.166.  
(1, 27, 28)

**THÈSE**

**DE MÉCANIQUE,**

ET PROGRAMME

**DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE,**

Soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris,

POUR ÊTRE ADMIS AU GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES,

**PAR ÉTIENNE BIGOURDAN.**

---

*Professeurs.*

MM.  
THÉNARD, doyen.  
LACROIX.  
BIOT.  
DESFONTAINES.  
POISSON.  
GAY-LUSSAC.  
FRANCOEUR.  
GEOFFROY-SAINT-HILAIRE.  
BEUDANT.

*Professeurs adjoints.*

MM.  
MIRBEL.  
HACHETTE.  
DE BLAINVILLE.  
DULONG.  
POUILLET.  
CONSTANT-PREVOST.

*Professeurs suppléans.*

MM.  
LEROY.  
LEFEBURE DE FOURCY.

---

PARIS,

IMPRIMERIE DE BACHELIER,

RUE DU JARDINET, N° 12, DERRIÈRE L'ÉCOLE DE MÉDECINE.

1852

# A MONSIEUR LÉVY,

MAÎTRE DE CONFÉRENCE A L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES  
AU COLLÈGE CHARLEMAGNE, PROFESSEUR SUPPLÉANT DE PHYSIQUE  
MATHÉMATIQUE AU COLLÈGE DE FRANCE, etc., etc.

## Hommage

*De respect et de reconnaissance pour les conseils et  
les bontés dont il m'a honoré.*

# ÉQUATION

## DE LA SURFACE CAPILLAIRE.

---

1. Nous considérerons les liquides comme formés d'une réunion de particules séparées les unes des autres par des espaces vides, et maintenues dans leur position par des forces émanant des molécules voisines, ou de centres extérieurs, tels que la terre ou les parois des vases. Nous savons très peu de chose sur la nature des forces qu'une molécule fluide exerce sur une autre; nous savons cependant que leur action n'est sensible que dans une étendue extrêmement petite, et que nous regarderons comme insensible par rapport à toute longueur donnée. On peut voir ensuite que dans une masse liquide en équilibre il est impossible qu'une molécule quelconque soit attirée à la fois par toutes les autres. En effet, soit  $M$  une masse liquide quelconque; par un point extrême de sa surface faisons passer un plan qui rencontre un certain nombre de molécules, en laissant toutes les autres au-dessous. Soit  $m$  une des molécules touchées par le plan. Si toutes les autres molécules attiraient  $m$ , en décomposant ces forces en deux, l'une selon le plan, l'autre perpendiculaire, les composantes selon le plan pourraient bien se détruire mutuellement; mais les composantes normales s'ajouteraient toutes: la résultante pousserait  $m$  au-dessous du plan, et de même pour les autres, de sorte que le liquide ne pourrait rester en équilibre qu'autant que les molécules s'appuieraient les unes sur les autres; mais alors les fluides seraient incompressibles, ce qui n'est pas le cas de la nature. Ainsi nous admettrons comme prouvé que dans un liquide une molécule quelconque n'est pas attirée par toutes les autres. D'un autre côté, on concevrait difficilement, dans beaucoup de cas, qu'une molécule quelconque soit repoussée par toutes les autres; et, d'ailleurs, on sait que lorsqu'on fait toucher par quelques

points deux gouttes d'un même liquide, elles se réunissent promptement en une seule. Il serait impossible d'expliquer ce fait en supposant qu'une molécule quelconque soit repoussée par toutes les autres : ainsi nous sommes conduits à cette conséquence, que dans une masse liquide une molécule quelconque est attirée, en général, par certaines molécules et repoussée par d'autres, et qu'elle est en équilibre lorsque la résultante de l'attraction des unes est égale et contraire à la résultante de la répulsion des autres. Cela revient à dire que la fonction de la distance  $\phi(r)$ , qui représente l'action moléculaire, change de signe dans l'étendue du rayon d'activité. Ces résultats étant une conséquence de la nature des liquides, on peut être certain que tous les calculs qu'on a faits, en supposant que  $\phi(r)$  ne change pas de signe, on peut être certain, dis-je, que tous ces calculs sont illusoire. M. Poisson, en laissant à  $\phi(r)$  toute la généralité possible, est conduit, par sa savante analyse, à admettre que  $\phi(r)$  change en effet de signe dans l'étendue du rayon d'activité moléculaire.

2. Une circonstance physique qui influe beaucoup sur les phénomènes capillaires, est la variation rapide de densité que les liquides éprouvent près de leur surface libre et des parois qui les contiennent. Cette circonstance est tellement importante, que M. Poisson a démontré que si on la négligeait, il n'y aurait ni élévation ni abaissement du liquide. Pour voir comment a lieu cette variation de densité, considérons une masse liquide en équilibre ; chaque couche infiniment mince est également comprimée sur ses deux faces par l'action répulsive des molécules voisines, diminuée de leur force attractive ; de sorte qu'on peut la considérer comme appuyée sur la partie du liquide située d'un côté, et comprimée par la partie située de l'autre. Son degré de condensation est déterminé par la grandeur de la force comprimante ; mais la couche comprimante n'ayant que l'épaisseur du rayon d'activité moléculaire, il s'ensuit que dans l'intérieur cette couche sera complète et partout la même, de sorte que la densité sera aussi constante, en faisant abstraction de la petite condensation due à la pesanteur, qui varie avec la distance à la surface supérieure. Mais quand la couche comprimée est située à une distance de la surface moindre que le rayon d'activité moléculaire, la couche comprimante est moindre que ce rayon ; la force qui en provient dé-

croît alors très rapidement avec la distance à la surface, et s'évanouit entièrement à la surface, où la couche infiniment mince n'est plus comprimée que par la pression de l'atmosphère : d'où l'on voit que la densité du liquide décroît, suivant une loi inconnue, à mesure que l'on s'approche de sa surface libre. Sa densité est très différente à cette surface et à une profondeur qui excède un tant soit peu le rayon d'activité de ses molécules, ce qui suffit pour qu'elle soit égale à la densité intérieure du liquide.

3. Dans l'étude des forces moléculaires, il faudra encore tenir compte des pressions intérieures du liquide, et des très petites condensations qu'il éprouve en vertu de son poids et de la pression extérieure, et aussi des variations de chaleur dont ces condensations sont accompagnées. En effet, soit M un point situé dans l'intérieur d'un liquide pesant. Par ce point menons un plan qui divise ce liquide en deux portions A et B; par M élevons dans B un cylindre C perpendiculaire à ce plan, dont la base  $\omega$  soit extrêmement petite, même par rapport au rayon d'activité moléculaire. Appelons  $p\omega$  l'action exercée par A sur C suivant la direction de ce cylindre; le coefficient  $p$  sera la pression intérieure de A sur B, qui doit être la même, en tous sens, autour de chaque point du fluide dans l'état d'équilibre. Si la surface du liquide est plane et horizontale, que le plan mené par M lui soit parallèle, que le cylindre C s'élève jusqu'à la surface, que  $z$  soit sa hauteur,  $\rho$  la densité du liquide, et  $\pi$  la pression qui a lieu à sa surface,  $\pi\omega$  sera la pression à l'extrémité de C,  $g\rho z\omega$  le poids du cylindre; et, pour son équilibre, il faudra qu'on ait

$$p\omega = \pi\omega + g\rho z\omega; \quad \text{d'où} \quad p = \pi + g\rho z.$$

Cette équation nous montre que  $p$  varie avec la profondeur de M et la grandeur de  $\pi$ . Or, si la distance *moyenne* des molécules était partout la même dans l'intérieur du liquide,  $p$  aurait la même valeur dans tout l'intérieur de la masse; et, puisqu'il n'en est pas ainsi, il en faut conclure que le liquide éprouve intérieurement une compression variable avec la hauteur. D'un autre côté, il est possible, et même probable, que la condensation fait éprouver aux liquides une augmentation de température, augmentation qui n'est pas permanente, de manière qu'après un certain temps la masse revient à la

température ambiante, en perdant le calorique développé par la compression : à cette époque, la partie du liquide comprimé se trouverait avoir moins de calorique qu'avant la compression. S'il en était ainsi, il faudrait concevoir que les molécules liquides sont non-seulement à une distance variable dans les divers points de la masse, mais encore que toutes n'ont pas la même quantité de calorique, quoiqu'elles affectent également le thermomètre.

4. La quantité  $p$  est la pression sur un plan; celle qui a lieu sur une surface courbe, suivant une direction perpendiculaire à son plan tangent, se composera de deux parties, l'une qui sera la même que  $p$ , et l'autre qui dépendra de la courbure de la surface. L'une et l'autre seront des sommes relatives aux distances des molécules; la somme relative à  $p$  ne pourra pas se réduire à une intégrale, l'autre au contraire pourra, sans erreur sensible, se réduire à une intégrale : de sorte que nous pourrons déterminer par des intégrales définies les parties des pressions qui répondent aux courbures des surfaces. Quant à l'expression de  $p$  que nous ne pouvons pas réduire à une intégrale, nous n'aurons pas besoin d'en calculer la valeur *à priori*; elle dépendra de la pression extérieure, de la pesanteur et des autres forces données qui agissent sur le liquide : son expression en fonction des coordonnées d'un point quelconque se déduira des équations connues de l'Hydrostatique.

5. Enfin, si les liquides sont formés de particules séparées les unes des autres par des espaces vides, on peut se demander si ces particules sont jamais en équilibre, c'est-à-dire si elles n'ont pas un mouvement analogue à celui des corps célestes, ou bien un mouvement oscillatoire qui tantôt approche, tantôt éloigne une molécule de sa voisine. Mais si de pareils mouvemens existaient, ils seraient nécessairement modifiés par les diverses agitations auxquelles on soumettrait les liquides; et comme nous voyons les phénomènes capillaires se produire constamment de la même manière, quelles que soient les circonstances antérieures où se soit trouvé le liquide, nous en concluons que les mouvemens particuliers des molécules, s'ils existent, n'ont aucune influence sur les phénomènes capillaires, et nous n'y aurons pas égard.

6. Cela posé, pour calculer l'action d'une portion  $M$  d'un liquide

sur une autre portion  $N$ , nous décomposerons  $M$  et  $N$  en volumes  $\nu$  et  $\nu'$  extrêmement petits, même par rapport au rayon d'activité moléculaire, et contenant, malgré cela, un nombre immense de molécules; nous supposerons ensuite que le diamètre de  $\nu$  et  $\nu'$  est assez petit pour que toutes les molécules de  $\nu$  exercent une action égale sur toutes celles de  $\nu'$ ; puis nous concevrons deux unités de volume telles que la distance moyenne des molécules soit égale à celle de  $\nu$  pour la première unité, et à celle de  $\nu'$  pour la seconde. Supposant que toutes les molécules de la première unité exercent une action égale sur toutes celles de la seconde, et égale à l'action d'une molécule de  $\nu$  sur une molécule de  $\nu'$ , représentant l'action totale par  $V$ , il est clair qu'on aura  $V\nu\nu'$  pour l'action totale de  $\nu$  sur  $\nu'$ . Si le liquide n'est pas parfaitement homogène,  $V$  variera avec les divers points de la masse où l'on prendra  $\nu$  et  $\nu'$ , et avec la distance de  $\nu$  à  $\nu'$ ; mais pour qu'on puisse regarder  $V$  comme une fonction continue de la distance et des coordonnées de  $\nu$  et  $\nu'$ , il est indispensable de prendre  $\nu$  et  $\nu'$  tels qu'ils comprennent un nombre immense de molécules. Alors la distance moyenne des molécules d'un petit volume près de  $\nu$  ne différera que très peu de la distance moyenne des molécules de  $\nu$ , et  $V$  pourra être une fonction continue; tandis qu'au contraire si  $\nu$  ne contenait que quelques molécules, quatre ou cinq par exemple, il pourrait fort bien arriver que le petit volume voisin en contint huit ou dix, et le suivant une seule, etc.; de sorte que, pour une très petite différence dans les coordonnées,  $V$  pourrait changer du simple au double, et plus encore, ce qui n'arrivera pas dans le premier cas.

Du reste, pour voir la légitimité de nos suppositions, il faut considérer que tous les phénomènes physiques nous font penser que le rayon d'activité moléculaire est extraordinairement petit, de même que l'épaisseur des molécules: rien n'empêche de supposer, par exemple, que le rayon d'activité moléculaire n'a pas un cent-millionième de millimètre, et que malgré cela il comprenne sur sa longueur plusieurs millions de myriades de molécules, de sorte que l'on pourra partager ce rayon, tout petit qu'il est, en un nombre immense de parties comprenant chacune sur sa longueur une immensité de molécules; car comme en grandeur on ne connaît pas de bornes à la nature, on ne peut pas lui en assigner en petitesse.

7. Calculons maintenant les pressions qui ont lieu dans l'intérieur de chaque liquide. Soit  $M$  un point situé à une distance sensible de la surface libre d'un liquide et des parois qui le contiennent; par ce point faisons passer une surface qui partage le liquide en deux portions  $A$  et  $B$ ; divisons cette surface en éléments infiniment petits terminés par ses deux séries de lignes de courbure; par tous les points de ces lignes élevons des normales qui formeront des surfaces développables par lesquelles  $A$  et  $B$  se trouveront décomposés en filets d'une épaisseur infiniment petite, mais variable. Appelons  $C$  le filet qui répond au point  $M$ , et dont la base sur la surface menée par ce point sera représentée par  $\omega$ . La résultante des actions de tous les points de  $A$  sur tous ceux de  $C$ , divisée par  $\omega$ , sera la pression qui a lieu sur  $B$  rapportée à l'unité de surface, c'est-à-dire la pression qui aurait lieu sur l'unité de surface, en supposant tous ses points pressés comme l'est  $\omega$ . D'après ce qu'on a vu (3), le liquide n'étant pas également comprimé dans l'étendue de la sphère d'activité de  $M$ , la surface même n'étant pas en général symétrique autour du point  $M$ , la résultante dont il s'agit ne sera pas perpendiculaire à la surface de  $B$ . Nous désignerons en général par  $N\omega$  sa composante normale et dirigée de dehors en dedans de  $B$ , par  $T\omega$  et  $T'\omega$  ses composantes suivant deux droites rectangulaires, menées par le point  $M$  et comprises dans le plan tangent en ce point à la surface de  $B$ . Nous décomposerons  $N\omega$  en deux parties, l'une  $N'\omega$  due à l'action des particules comprises entre la surface passant par  $M$  et le plan tangent en ce point, et l'autre due au reste de  $A$ ; nous représenterons cette dernière partie par  $p\omega$ , de sorte que l'on aura

$$N = N' + p.$$

On peut voir que, dans l'intérieur du liquide, l'action d'une partie  $A$  sur un filet cylindrique et normal compris dans la partie adjacente  $B$ , différerait en grandeur et en direction de la force que nous venons de définir; car un pareil cylindre différerait du filet, dans l'étendue du rayon d'activité, d'une quantité qui serait du même ordre de grandeur que le filet.

Soit  $m$  un point de  $C$  et  $m'$  un point de  $A$ , l'un et l'autre compris dans le rayon d'activité de  $M$ ; désignons par  $s$  et  $s'$  les perpendiculaires abaissées de  $m$  et  $m'$  sur la surface de  $A$ , et par  $\omega'$  l'élément de

cette surface qui répond au filet fluide dont  $m'$  fait partie ; nous représentons par  $(1 + ks')\omega'$ ,  $(1 + ks)\omega$ , les aires des sections de ce filet et de C faites par les points  $m'$  et  $m$ , et parallèles à leurs bases  $\omega'$  et  $\omega$ . En effet, en représentant la première section, par exemple, par Z, il est clair qu'on aura  $Z = f(\bar{x} \bar{y} \bar{z} \omega' s')$ ;  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ , étant les coordonnées de  $\omega'$ , on a, en développant suivant les puissances de  $\omega'$  et  $s'$ ,

$$Z = f_0 + \frac{df_0}{ds'} s' + \frac{df_0}{d\omega'} \omega' + \frac{d^2 f_0}{ds'^2} \frac{s'^2}{1.2} + \frac{d^2 f_0}{ds' d\omega'} s' \omega' + \frac{d^2 f_0}{d\omega'^2} \frac{\omega'^2}{1.2} + \dots$$

en représentant par  $f_0 \dots$  ce que deviennent ces expressions en y faisant  $s' = \omega' = 0$ ; mais en faisant  $\omega' = 0$ , on doit avoir  $Z = 0$ , quel que soit  $s'$ , d'où  $f_0 = \frac{df_0}{ds'} = \frac{d^2 f_0}{ds'^2} \dots = 0$ . En faisant au contraire  $s' = 0$ , on doit avoir  $Z = \omega'$ , d'où  $\frac{df_0}{d\omega'} = 1$ , et  $\frac{d^2 f_0}{d\omega'^2} = 0$ , de sorte qu'il viendra

$$Z = \omega' \left( 1 + \frac{d^2 f_0}{ds' d\omega'} s' \dots \right).$$

En faisant  $k = \frac{d^2 f_0}{ds' d\omega'}$  et négligeant les termes suivans, on aura  $Z = (1 + ks')\omega'$ ;  $k$  est une fonction de  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  coordonnées de  $\omega'$ , dépendante de la courbure de la surface. Pour avoir la section du filet  $\omega$ , il suffira de changer  $\omega'$  et  $s'$  en  $\omega$  et  $-s$ , et de négliger les termes du second ordre par rapport à  $s$ , et à la distance de  $\omega'$  et  $\omega$ .

D'après cela, les élémens de volume qui répondent aux points  $m$  et  $m'$ , seront

$$(1 - ks)\omega ds, \quad (1 + ks')\omega' ds',$$

et leur action mutuelle pourra être représentée par le produit

$$V (1 - ks) (1 + ks') \omega \omega' ds ds'.$$

D'après ce que nous avons vu,  $V$  dépendra de la distance  $r'$  des deux élémens et de leurs coordonnées; elle sera insensible pour toute valeur sensible de  $r'$ .

D'après cela, représentons par  $x, y, z$ , les trois coordonnées rectangulaires de M, et supposons les axes des  $x$  et des  $y$  parallèles au plan tangent à B, mené par le point M, et l'axe des  $z$  parallèle à la normale

au même point. Les coordonnées de  $m$  seront  $x, y, z + s$ , celles de  $m'$  pourront être représentées par  $x + x', y + y', z + z'$ ; on aura

$$r'^2 = (s - z')^2 + x'^2 + y'^2,$$

et  $V = f(r', x, y, z + s, x + x', y + y', z + z')$ .

Il est clair que  $V$  doit dépendre de la même manière de la nature du liquide autour de chacun des deux points  $m$  et  $m'$ , et par conséquent cette fonction doit être symétriquement composée avec les coordonnées de ces points. De plus, la nature du liquide, sa quantité de chaleur et sa condensation intérieure ne variant que par degrés insensibles, on pourra développer cette fonction en série très convergente, suivant les puissances et les produits des variables  $s, x', y', z'$ , qu'elle contient en dehors de  $r'$ , et qui ne peuvent être que de très petites quantités. A cause de la symétrie de la fonction  $f$ , on aura

$$\frac{dV}{dx'} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy'} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz'} = \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dV}{dz}$$

pour  $x' = y' = z' = s = 0$ , et en ne faisant pas varier  $r'$ . En appelant  $R'$  la fonction de  $r', x, y, z$ , que l'on obtient en faisant  $x' = y' = z' = s = 0$  dans  $V$ , et négligeant les termes du second degré par rapport à  $x', y', z', s$ , on aura

$$V = R' + \frac{x'}{2} \cdot \frac{dR'}{dx} + \frac{y'}{2} \cdot \frac{dR'}{dy} + \frac{s + z'}{2} \cdot \frac{dR'}{dz}.$$

En représentant par  $u$  la perpendiculaire abaissée de  $\omega'$  sur la normale en  $M$  à la surface de  $A$ , et par  $\theta$  l'angle que fait le plan de ces deux droites avec un plan fixe passant par la seconde, on aura sensiblement

$$\omega' = u \, du \, d\theta.$$

Représentons par  $\alpha, \beta, \gamma$ , les cosinus des angles que fait la droite  $m'm$  prolongée au-delà de  $m$ , avec des parallèles aux axes des  $x, y, z$ , menées par ce point; regardons la force  $V$  comme positive ou comme négative, selon qu'elle sera répulsive ou attractive; il est clair que l'on aura pour les composantes de l'action sur  $C$ , en divisant par  $\omega$  et négligeant le produit  $ss'$ ,

$$\begin{aligned} T &= \iiint \iiint V [1 + k (s' - s)] \alpha u du ds ds' d\theta, \\ T' &= \iiint \iiint V [1 + k (s' - s)] \beta u du ds ds' d\theta, \\ N &= \iiint \iiint V [1 + k (s' - s)] \gamma u du ds ds' d\theta. \end{aligned}$$

Les limites de l'intégrale relative à l'angle  $\theta$  seront zéro et  $2\pi$  ; on pourra étendre les autres intégrales depuis zéro jusqu'à l'infini, puisque quand même le liquide ne s'étendrait pas jusqu'à l'infini, passé le rayon d'activité, on ne fera qu'ajouter des actions nulles d'après la nature des forces moléculaires. Les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , de ces formules seront, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\alpha = -\frac{x'}{r'}, \quad \beta = -\frac{y'}{r'}, \quad \gamma = \frac{s - z'}{r'}.$$

8. Appelons  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ , les coordonnées de la surface passant par M rapportées à trois axes rectangulaires parallèles aux  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , et dont l'origine soit en M ; l'équation de cette surface sera

$$\zeta = f(\eta \eta') = \zeta_0 + \frac{d\zeta}{d\eta^0} \eta + \frac{d\zeta}{d\eta'^0} \eta' + \frac{d^2\zeta}{d\eta^2 \cdot 1.2} \eta^2 + \frac{d^2\zeta}{d\eta'^2 \cdot 1.2} \eta'^2 + \frac{d^2\zeta}{d\eta d\eta'} \eta \eta' + \text{etc.}$$

Mais, par la nature des coordonnées, les trois premiers termes sont nuls ; et en négligeant les termes du troisième ordre par rapport à  $\eta$ ,  $\eta'$ , nous aurons

$$\zeta = Q\eta^2 + Q'\eta'^2 + Q''\eta\eta' ;$$

$Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ , étant des coefficients indépendans de ces deux variables. En négligeant le produit de  $s'$  par le carré de l'angle que font les deux normales en  $\omega'$  et  $\omega$ , on aura

$$z' = -s' + \zeta.$$

Par le moyen de cette valeur et des équations de la normale en  $\omega'$ , on aura

$$x' = \eta + \frac{d\zeta}{d\eta} s', \quad y' = \eta' + \frac{d\zeta}{d\eta'} s' ;$$

on a d'ailleurs

$$\eta = u \cos \theta, \quad \eta' = u \sin \theta,$$

en comptant l'angle  $\theta$  à partir de l'axe des  $\eta$ . Si l'on fait, pour abrégér,

$$r^2 = (s + s')^2 + u^2 ;$$

qu'on substitue les valeurs précédentes de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , dans  $r'^2$ ; qu'on néglige les termes du troisième ordre, on obtiendra

$$r' = r + (s' - s) \frac{\zeta}{r}, \quad R' = R + (s' - s) \frac{\zeta}{r} \cdot \frac{dR}{dr}.$$

En appelant  $R$  ce que  $R'$  devient, quand on y met  $r$  au lieu de  $r'$ , on a enfin

$$Q + Q' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right),$$

$\lambda$  et  $\lambda'$  étant les rayons de courbure principaux de la surface au point  $M$ , dont chacun devra être regardé comme positif ou comme négatif, selon que la ligne de courbure à laquelle il appartient tournera sa concavité ou sa convexité en dehors de  $A$ .

En substituant ces différentes valeurs et celle de  $V$  dans les équations, mettant pour  $\eta$ ,  $\eta'$ , leurs valeurs  $u \cos \theta$  . . ., intégrant par rapport à  $\theta$  depuis  $\theta = 0$  jusqu'à  $\theta = 2\pi$ , et supprimant de  $N$  la partie indépendante de la courbure de  $B$  afin de réduire  $N$  à  $N'$ , on aura, en négligeant toujours les quantités du troisième ordre,

$$T = - \frac{\pi}{2} \iiint \frac{dR}{dx} \frac{u^3}{r} du ds ds',$$

$$T' = - \frac{\pi}{2} \iiint \frac{dR}{dy} \frac{u^3}{r} du ds ds',$$

$$N' = - \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \iiint R \frac{u^3}{r} du ds ds'.$$

En faisant, pour abrégér,

$$- \frac{1}{2} \pi \iiint R \frac{u^3}{r} du ds ds' = q,$$

on aura

$$T = \frac{dq}{dx}, \quad T' = \frac{dq}{dy}, \quad N = p + q \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right).$$

En mettant  $us$ ,  $us'$ ,  $uds$ ,  $uds'$ , à la place de  $s$ ,  $s'$ ,  $ds$ ,  $ds'$ , dans  $q$ , on aura

$$r^3 = u^3 [1 + (s + s')^2],$$

$$\text{et} \quad q = - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty R r^4 dr \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{ds ds'}{[1 + (s + s')^2]^3};$$

on aura d'abord

$$\int_0^{\infty} \frac{ds'}{[1 + (s + s')^2]^3} = -\frac{1}{4} \frac{s}{(1 + s^2)^2} - \frac{3}{8} \frac{s}{1 + s^2} + \frac{3}{8} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{arc}(\text{tang} = s) \right],$$

et enfin

$$q = -\frac{\pi}{8} \int_0^{\infty} Rr^4 dr.$$

R contient  $x, y, z$ , si le liquide est hétérogène, et par conséquent  $q$  variera d'un point à un autre, et devra être donné en fonction des coordonnées du point auquel elle répond. Dans un liquide homogène, et à très peu près incompressible, on pourra la considérer comme constante, ainsi que la densité; il n'y aura de variation que celle qui sera due à la pesanteur (3).

9. Si les forces extérieures qui agissent sur le filet C se réduisent à la pesanteur, on aura, par les équations connues de l'Hydrostatique,

$$p = c - \rho g z,$$

en prenant les  $z$  positives, verticales et en sens contraire de la pesanteur, désignant par  $\rho$  la densité du liquide, par  $g$  la pesanteur, et par  $c$  une constante arbitraire.

Si l'on plonge dans le liquide un tube quelconque, qu'ensuite on verse au-dessus de ce liquide, dans l'intérieur du tube, un autre liquide homogène, dont nous représenterons la densité par  $\rho'$ , la valeur de  $p$  aura lieu pour un point quelconque M du premier liquide, situé en dehors ou en dedans du tube, mais un tant soit peu éloigné de ses parois et de la surface de séparation des deux liquides; car pour ces points la densité cesse d'être la même que dans l'intérieur du liquide, et, de plus, ils sont soumis à des forces différentes de la pesanteur. En désignant par  $p'$  et  $z'$  ce que deviennent  $p$  et  $z$  relativement à un point M' du second liquide, situé également à une distance sensible de ses deux parois inférieure et supérieure, et des parois du tube, on aura

$$p' = c' - \rho' g z',$$

$c'$  étant une constante arbitraire différente de  $c$ .

Pour déterminer  $c$ , remarquons que l'expression de  $p$  s'applique

à tous les points distans des parois du tube et de la surface d'une quantité plus grande que le rayon d'activité moléculaire. D'après cela, soit  $M$  un point situé très près de la surface extérieure, mais assez éloigné pour que  $p$  soit applicable. Par ce point, faisons passer un plan parallèle à la surface, que nous supposerons (le point  $M$ ) assez éloigné du tube pour qu'en cette partie la surface soit sensiblement plane et horizontale; par  $M$ , élevons sur ce plan un cylindre vertical terminé à la surface, et dont la base soit  $\omega$ . Ce cylindre se trouve soumis à la force  $p\omega$  qui le pousse de bas en haut, à la pression extérieure  $\pi\omega$ , à la pesanteur et à l'action de la couche liquide très mince comprise entre le plan et la surface. Comme aux environs du petit cylindre, le liquide est composé de couches dont la densité varie de l'une à l'autre, mais est la même, dans chaque couche horizontale, jusque dans l'intérieur du filet; il n'en résulte sur ce filet que des actions égales et contraires deux à deux, et, par conséquent, on n'a pas besoin d'y avoir égard: d'ailleurs, on peut négliger le poids du cylindre comme insensible, de sorte qu'il faudra que les deux forces  $p\omega$  et  $\pi\omega$  se fassent équilibre, ce qui donne  $p = \pi$  pour ce point. Comme pour ce point on a sensiblement  $z = 0$ , on en déduira  $c = \pi$ , et

$$p = \pi - \rho gz,$$

pour tous les points intérieurs du premier liquide compris en dehors ou en dedans du tube.

La variable  $z$  sera positive pour tous les points situés au-dessus du niveau de ce liquide, et négative pour tous les points situés au-dessous. Nous supposerons que la pression atmosphérique a aussi lieu dans l'intérieur du tube sur la surface du second liquide, et nous compterons les ordonnées  $z'$  à partir du même plan horizontal, et dans le même sens que les ordonnées  $z$ ; mais nous ne pourrons pas encore déterminer la constante  $c'$  que renferme l'expression de  $p'$ .

10. Près de la surface de séparation de deux liquides superposés, la condensation varie très rapidement, en sorte que la densité de chaque liquide peut être très différente à la surface même, et à une profondeur insensible. La loi de cette variation est inconnue, comme celle de l'action moléculaire, de laquelle elle dépend; mais cela n'empêche pas qu'on ne puisse former les équations d'équilibre relatives à la

couche d'une épaisseur insensible, appartenant en partie à chacun des deux liquides, et qu'on n'en déduise l'équation de leur surface de séparation.

Pour cela, transportons le point M très près de la surface de contact AOB des deux liquides contenus dans le tube. Du point M, abaissons sur cette surface une perpendiculaire qui la rencontre en un point O, et se prolonge jusqu'au point M' du second fluide, aussi très rapproché de AOB; divisons la surface de séparation en éléments infiniment petits, terminés par ses deux séries de lignes de courbure; par tous leurs points élevons des normales qui formeront des surfaces développables, par lesquelles les deux liquides superposés se trouveront décomposés en filets d'une épaisseur infiniment petite et variable. Par les points M et M', traçons deux surfaces CMD, C'M'D', qui coupent aussi à angles droits toutes les normales à la surface AOB. Appelons A le liquide terminé par CMD, A' celui qui a pour limite C'M'D', B la couche liquide comprise entre ces deux surfaces, C le filet MOM' de B,  $\omega$  et  $\omega'$  les bases ou les sections normales de ce filet qui répondent aux points M et M'. Quoique les distances MO et M'O de ces deux points à la surface AOB soient insensibles, on pourra cependant les supposer assez grandes pour que les actions de A et A' sur C ne s'étendent pas *jusqu'aux points où les condensations des deux liquides varient très rapidement*; ce qui revient à supposer que MO et M'O sont au moins deux ou trois fois le rayon d'activité moléculaire. D'après cela, pour déterminer l'action de A sur C, nous pourrions nous servir des formules précédentes, et les composantes de l'action de A seront

$$\left[ p + q \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \right] \omega, \quad \frac{dq}{dx} \omega, \quad \frac{dq}{dy} \omega,$$

la première étant normale, et dirigée de M vers M', et les deux autres tangentes à la surface CMD. En désignant par  $q'$  ce que devient la quantité  $q$  relativement au liquide supérieur, et observant que le liquide A' se trouve, par rapport à C, dans le même rapport que A, si ce n'est que les courbures de A' sont sensiblement égales à celles de A, mais tournées en sens contraire, on aura

$$\left[ p' - q' \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \right] \omega', \quad \frac{dq'}{dx} \omega', \quad \frac{dq'}{dy} \omega',$$

pour les composantes de l'action de A' sur C, la première dirigée de M' vers M, ou en sens contraire de la force normale précédente, et les dernières parallèles aux deux autres forces. Il nous reste à trouver les composantes de la couche B sur le filet C qui en fait partie; nous les représenterons provisoirement par  $P\omega$ ,  $Q\omega$ ,  $Q'\omega$ ; la première étant normale et dirigée de M vers M' (ce qui ne veut pas dire que cette force poussera réellement de M vers M'), et les deux dernières parallèles aux axes des  $x$  et des  $y$ , comme les autres forces tangentielles.

La distance MM' étant, en réalité, extrêmement petite, on pourra négliger le poids de C, par rapport aux différentes forces qui le sollicitent, et regarder, par la même raison, le rapport de  $\omega'$  à  $\omega$  comme égal à l'unité. D'après cela, pour l'équilibre de C il faudra que la somme des forces précédentes soit nulle suivant chaque axe, ce qui donnera les trois équations

$$\left. \begin{aligned} Q + \frac{d(q + q')}{dx} &= 0, & Q' + \frac{d(q + q')}{dy} &= 0, \\ P + p - p' + (q + q') \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

où il ne restera qu'à déterminer les valeurs de P, Q, Q', par un calcul analogue au précédent, qui donnera

$$Q = \frac{dq_1}{dx}, \quad Q' = \frac{dq_1}{dy}, \quad P = q_1 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right),$$

en faisant, pour abréger,

$$q_1 = - \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l R_1 \frac{u^2}{r} du ds ds_1, \quad r^2 = u^2 + (s - s_1)^2,$$

où  $R_1$  représente une fonction de  $r$ ,  $s$  et  $s_1$ , qui varie très rapidement avec  $s$  et  $s_1$ . Cette fonction changera de forme, selon qu'elle proviendra de l'action de l'un des deux liquides sur lui-même ou sur l'autre; car  $R_1$  dérive de  $V$ , qui représente l'action moléculaire, et cette fonction doit changer brusquement de forme ou de valeur, selon qu'elle représente l'action d'un liquide sur lui-même ou sur un autre différent. Mais les trois expressions de  $R_1$  nous étant inconnues, il faudra considérer  $q_1$  comme une quantité dépendante de

la nature des deux liquides, dont la valeur ne pourrait être donnée que par l'expérience.

11. L'épaisseur de B, quoique insensible, pouvant être néanmoins plus ou moins grande, on pourrait croire que l'intégrale représentée par  $q_1$  change de valeur avec  $l$ , et, par suite, que les équations (A) dépendent de cette quantité arbitraire, ce qui serait absurde; mais il est facile de prouver que les variations dont la grandeur de  $l$  est susceptible n'influent pas sensiblement sur la valeur de  $q_1$ .

Supposons d'abord que l'on prenne un point  $n$  dans l'intérieur d'un liquide homogène et à très peu près incompressible, que par ce point  $n$  on fasse passer une surface  $C, nD_1$ , qu'en  $n$  on élève la normale  $nM'$ , que par un point  $M'$  de cette normale on fasse passer une surface  $C'M'D'$  identique à  $C, nD_1$ , de manière qu'elle ne soit que cette dernière surface élevée en faisant glisser  $n$  sur la normale  $nM'$ . Cela posé, l'action du liquide  $C, D'$  sur un filet cylindrique extrêmement mince  $M'n$ , sera toujours la même, quelle que soit la longueur de  $M'n$ , *pourvu que* cette longueur ne soit pas trop petite comparative-ment au rayon d'activité moléculaire. En effet, menons les deux plans tangens en  $M'$  et  $n$ , plans qui seront parallèles; ne considérons que les actions parallèles à la longueur du filet. Appelons  $\bar{P}\omega$  la composante de  $C, D'$ ,  $R\omega$  celle de  $AB'$ ,  $R'\omega$  celle de  $A'D'$ ,  $R''\omega$  celle de  $AD''$ ; il est clair qu'on aura  $\bar{P}\omega = R\omega + R'\omega - R''\omega$ . Mais si le liquide est homogène, et que le filet soit pris dans l'intérieur, on a sensiblement  $R = 0$ , d'où

$$\bar{P} = R' - R''.$$

Or,  $R'$  et  $R''$  sont tout-à-fait indépendans de la longueur  $M'n$ , ce qu'il fallait démontrer.

Démontrons maintenant que  $q_1$  ne change pas avec la longueur  $l$ ; cela revient visiblement à montrer que, dans le cas des deux liquides superposés, la composante normale  $P\omega$  ne change pas sensiblement pour une augmentation dans la longueur du filet. En effet, soit  $M''$  un point de la partie  $A'$  du liquide supérieur, situé sur le prolongement de  $MM'$ , et tel que  $M'M''$  soit insensible, mais supérieur au rayon d'activité moléculaire. Par  $M''$  faisons passer une surface  $C''M''D''$  analogue à  $C'M'D'$ . A cause de la grandeur qu'on a supposée

à M'O, le liquide CB exerce une action égale sur le filet M'O et sur le filet M''O; par la même raison, l'action de AD' sur MO = l'action de AD'' sur MO: de sorte que pour trouver si la force  $P\omega$  a changé par l'addition du liquide C'D'', il suffit de voir la différence qu'il y a entre l'action de AD'' sur OM'' et l'action de AD' sur OM'. Or, on va voir que ces deux actions sont sensiblement égales; car, précédemment, pour calculer l'action de A' sur C on a supposé que M'O était assez grand pour que l'action de A sur C ne s'étendit pas jusqu'aux points où la densité du liquide varie très rapidement: de sorte qu'en prenant M'n égal à peu près au rayon d'activité des molécules, et par n faisant passer une surface C<sub>1</sub>nD<sub>1</sub>, analogue à C'M'D', les deux parties du liquide C<sub>1</sub>D', C<sub>1</sub>D'' pourront être considérées comme du liquide intérieur, et ces deux parties exerceront une action égale sur le filet nO, à cause de la grandeur de M'n. Ainsi l'action de AD'' sur le filet M''O ne pourra différer de l'action de AD' sur le filet M'O qu'autant que l'action de C<sub>1</sub>D' sur M'n différait de l'action de C<sub>1</sub>D'' sur M'n. Or, d'après ce qu'on a vu ci-dessous, ces deux actions sont égales au degré d'approximation employé; car pour pouvoir comparer ce cas-ci au premier il faudrait que les trois surfaces C<sub>1</sub>nD<sub>1</sub>, C'M'D', C''M''D'' fussent égales autour des points n, M', M'', et que le filet M'n fût d'égale grosseur dans toute sa longueur. Or, nous nous sommes déjà permis ces approximations, presque nous avons supposé  $\omega' = \omega$ , et les rayons de courbure en M' égaux à ceux de M; de sorte qu'il est prouvé par là que  $q_1$  ne varie pas sensiblement lorsque  $l'$  devient  $l + \varepsilon = l'$ ,  $\varepsilon$  étant insensible, mais plus grand que le rayon d'activité moléculaire.

C'est ce qu'on voit aussi par l'analyse; on obtient

$$\int_0^\infty \int_0^{l'} \int_0^{l'} R_1 \frac{u^3}{r} du ds ds_1 = \int_0^\infty \int_0^l \int_0^l R_1 \frac{u^3}{r} du ds ds_1 + \frac{2}{3} \varepsilon \int_0^\infty R_1 r^3 dr.$$

Or, on voit par là que le changement de  $l$  en  $l'$  ne fait varier l'intégrale représentée par  $q$ , que d'une quantité insensible, ayant pour facteur  $\varepsilon$ , et de l'ordre de celles que nous avons négligées dans les équations (A).

12. En substituant dans les deux premières équations (A) les valeurs trouvées pour Q et Q', il vient

$$\frac{d(q + q' + q_1)}{dx} = 0, \quad \frac{d(q + q' + q_1)}{dy} = 0,$$

ce qui montre que dans l'état d'équilibre des deux liquides superposés, la quantité  $q + q' + q_1$  est constante dans toute l'étendue de leur surface de contact, à l'exception des points de cette surface qui touchent immédiatement le tube. Nous ferons

$$q + q' + q_1 = \frac{1}{2} G,$$

et nous regarderons  $G$  comme une quantité dépendante de la matière et de la température de l'un et l'autre liquide, dont le signe et la valeur numérique seront donnés dans chaque cas particulier.

Comme les deux points  $M, M'$ , ne sont qu'à une distance insensible l'un de l'autre, on pourra supposer  $z = z'$ , et considérer  $z$  comme l'ordonnée verticale d'un point quelconque de la surface de séparation des deux liquides; substituant ensuite les valeurs de  $P, p, p'$ , dans la troisième équation, on aura

$$\pi - c' - (\rho - \rho')gz + \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) = 0, \quad (B)$$

pour l'équation commune à tous les points de cette surface qui ne sont pas compris dans la sphère d'activité du tube.

D'après la théorie connue de la courbure des surfaces, on a

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{\left(1 + \frac{dz^2}{dy^2}\right) \frac{d^2z}{dx^2} - 2 \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2z}{dx dy} + \left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right) \frac{d^2z}{dy^2}}{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Substituant cette valeur de  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$  dans l'équation précédente, on aura l'équation de la surface de séparation des deux liquides, dans laquelle il restera encore à déterminer la constante  $c'$ .

Pour avoir l'équation de la surface libre du liquide supérieur qui le sépare du fluide atmosphérique, il faudra remplacer  $G, \lambda, \lambda', \pi, c', \rho, \rho', z$ , dans l'équation (B), par  $H, \mu, \mu', c', \pi, \rho', \delta, z'$ . Cette équation sera donc

$$c' - \pi - (\rho' - \delta)gz' + \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right) = 0, \quad (C)$$

et la valeur de  $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'}$  se déduira de celle de  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$ , en y changeant  $z$  en  $z'$ ,  $\delta$  est la densité de l'air.

En faisant  $\rho' = \delta$ ,  $c' = \pi$ ,  $G = H$ , dans l'équation (B), on aura

$$(\rho - \delta)gz = \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right); \quad (D)$$

ce sera l'équation de la surface libre du liquide unique contenu dans le tube, car ces suppositions reviennent à supprimer le liquide supérieur et à supposer que l'atmosphère presse directement sur le fluide inférieur. Si l'on supprime, au contraire, le liquide inférieur, et qu'on le remplace par le fluide atmosphérique, il faudra faire  $\rho = \delta$  et  $G = H$  dans l'équation; on aura alors

$$\pi - c' + (\rho' - \delta)gz - \frac{1}{2} H \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) = 0, \quad (E)$$

où l'on a changé le signe du dernier terme, afin que chacun des rayons  $\lambda$  et  $\lambda'$  soit positif ou négatif, selon que la ligne de courbure à laquelle il appartient tournera sa concavité ou sa convexité en dehors du liquide qui subsiste, et que la valeur de  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$  soit donnée par la formule, en suivant, pour le signe de son dénominateur, la règle suivante : on concevra par le point dont les coordonnées sont  $x, y, z$ , une normale en dehors du liquide inférieur et une verticale en sens contraire de la pesanteur : le dénominateur devra être positif ou négatif, selon que ces deux droites feront un angle aigu ou obtus.

Les équations (C) et (E) seront celles des surfaces supérieure et inférieure d'un liquide pesant, pressé de part et d'autre par l'atmosphère, et suspendu en équilibre dans un tube de forme quelconque.

# PROGRAMME

## DE LA THÈSE DE MÉCANIQUE

Composition intérieure des fluides (1).

Une molécule n'est ni attirée ni repoussée à la fois par toutes les autres (1).

Il en résulte que la fonction  $\phi(r)$ , qui représente l'action moléculaire, change de signe dans l'étendue du rayon d'activité (1).

La densité des liquides décroît très rapidement vers leur surface libre (2).

Un liquide n'est jamais parfaitement homogène dans son intérieur (3).

Les mouvemens particuliers des molécules, s'ils existent, n'ont aucune influence sur les phénomènes capillaires (5).

Manière de soumettre au calcul les forces moléculaires (6).

Calcul des pressions qui ont lieu dans l'intérieur d'un liquide; la partie de ces pressions dépendante de la courbure des surfaces est exprimée par des intégrales quadruples (7).

Chacune de ces composantes est réduite à ne dépendre que d'une intégrale simple (8).

On trouve  $p = c - \rho gz$ ,  $p' = c' - \rho' gz'$ , détermination de  $c$  (9).

Équation d'équilibre de la couche liquide environnant la surface de séparation de deux liquides superposés (10).

On démontre, sans analyse, que  $q_1$  ne varie pas sensiblement avec  $l$ ; on le démontre aussi par l'analyse (11).

Équation de la surface de séparation de deux liquides superposés (12).

Équation de la surface libre du liquide unique contenu dans le tube (12).

# PROGRAMME

## DE LA THÈSE D'ASTRONOMIE.

En représentant par  $V$  la somme des élémens d'un sphéroïde divisés respectivement par leur distance à un point dont les coordonnées sont  $a, b, c$ , on aura  $-\frac{dV}{da}, -\frac{dV}{db}, -\frac{dV}{dc}$ , pour les composantes de l'attraction du sphéroïde sur ce point.

Si le point attiré est hors du sphéroïde ou dans l'intérieur d'une partie creuse, on a  $\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = A = 0$ .

Si le point attiré est sur la surface extérieure ou sur la surface intérieure, lorsque le sphéroïde est creux, on a  $A = -2\pi\rho$ ,  $\rho$  étant la densité du sphéroïde; si le point est dans la partie solide, on a  $A = -4\pi\rho$ .

Expressions en intégrales triples des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point quelconque.

Si la densité est constante, en changeant de coordonnées et intégrant une première fois par rapport à  $r$ , on voit que si le point est dans l'intérieur de l'ellipsoïde, les composantes de l'attraction selon chaque axe, sont proportionnelles à l'abscisse du point attiré relative à cet axe; de sorte que pour deux points placés sur la même droite passant par le centre, les attractions totales sont parallèles entre elles et proportionnelles à la distance des points au centre.

Une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes semblables est sans action sur un point placé dans la partie creuse.

Si le point attiré est intérieur, on intègre une seconde fois, et la question dans le cas général est ainsi ramenée aux quadratures.

Si l'ellipsoïde est de révolution, on peut effectuer la troisième intégration.

La recherche de l'action d'un ellipsoïde sur un point extérieur est ramenée à la recherche de l'attraction sur un point intérieur, quelle que soit la loi de l'attraction.

Ce n'est que lorsque l'attraction est en raison inverse du carré de la distance, qu'une couche sphérique est sans action sur un point placé dans l'intérieur de sa partie creuse.

**FIN.**

Vu et approuvé par le Doyen de la Faculté des Sciences de  
l'Académie de Paris,

2 août 1832,

**Baron THÉNARD.**

Permis d'imprimer. L'Inspecteur général des Études, chargé de  
l'administration de l'Académie de Paris,

**ROUSSELLE.**

