

N° D'ORDRE

295.

H. F. u. f. 167 (19. A.) 4°

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR

OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PAR M. A. CORNU



1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA RÉFLEXION CRISTALLINE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DE CHIMIE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 juin 1867, devant la Commission
d'Examen.

MM. P. DESAINS, *Président.*

JAMIN,

H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE,

} *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1867

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur. Zoologie, Anatomie, Physiologie.
PROFESSEURS HONORAIRES {	PONCELET, LEFÈBURE DE FOURCY.
	DUMAS..... Chimie.
	DELAFOSSÉ... Minéralogie.
	BALARD..... Chimie.
	CHASLES..... Géométrie supérieure.
	LE VERRIER..... Astronomie.
	DUHAMEL..... Algèbre supérieure.
	LAMÉ..... Calcul des probabilités, Physique mathématique.
PROFESSEURS	DELAUNAY..... Mécanique physique.
	C. BERNARD..... Physiologie générale.
	P. DESAINS..... Physique.
	LIOUVILLE..... Mécanique rationnelle.
	HÉBERT..... Géologie.
	PUISEUX..... Astronomie.
	DUCHARTRE..... Botanique.
	JAMIN..... Physique.
	SERRET..... Calcul différentiel et intégral.
	PAUL GERVAIS..... Anatomie, Physiologie comparée, Zoologie.
AGRÉGÉS	BERTRAND..... } Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE..... }
	PELIGOT..... Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES

SUR

LA RÉFLEXION CRISTALLINE.

1. L'étude des modifications que subit la lumière après réflexion sur la surface des corps intéresse la science à bien des points de vue, mais elle offre aux physiciens deux genres de difficultés assez graves : les unes résultant de la complication apparente des lois mathématiques qui régissent ces phénomènes ; les autres, purement expérimentales, relatives à la détermination précise des éléments nécessaires au contrôle de la théorie.

L'intérêt qui s'attache à cette branche de l'optique m'a fait entreprendre le présent travail : j'ai tâché d'abord de simplifier les résultats de la théorie mathématique, et ensuite de présenter une méthode expérimentale rigoureuse pour la mesure de ces phénomènes ; mais, comme la seule théorie mathématique complète de la réflexion cristalline a été obtenue en partant d'hypothèses très-contestables et opposées à celle de Fresnel, j'ai essayé de démontrer en premier lieu que les équations fondamentales de cette théorie satisfont également bien aux deux systèmes d'hypothèses. C'est en reconstituant une théorie de réflexion cris-

talline d'après les idées de Fresnel que je suis parvenu à ce résultat.

2. Ce Mémoire est divisé en trois Parties :

La première, purement théorique (1), offre un résumé succinct des travaux de Fresnel sur la réflexion et la réfraction de la lumière dans le cas des milieux isotropes, puis la comparaison de ces résultats avec ceux de la théorie opposée développée par Mac Cullagh et M. Neumann; ensuite, l'extension de la théorie de ces deux géomètres au cas des milieux cristallisés; enfin la solution du même problème général d'après les idées de Fresnel, solution qui n'avait pas encore été donnée; j'arrive à conclure que les deux systèmes d'hypothèses conduisent à des formules identiques, même dans le cas le plus général, ainsi qu'on l'avait démontré depuis longtemps dans le cas simple des milieux isotropes.

La seconde Partie comprend le développement géométrique des théories précédentes: les équations fondamentales conduisent à des théorèmes élégants qui simplifient beaucoup l'étude de la réflexion cristalline, tant au point de vue mathématique qu'au point de vue expérimental.

Dans la troisième Partie, tout expérimentale, se trouve la discussion des méthodes et des appareils propres à fournir des mesures précises, la description d'organes donnant une synthèse cinématique des lois précédemment établies; enfin quelques tableaux de mesures et de vérifications expérimentales obtenues en opérant sur des faces de clivage du spath d'Islande ou sur des faces naturelles de cristaux de soufre.

(1) Ces études ne comprennent que l'étude de la lumière polarisée rectilignement: d'ailleurs les phénomènes de polarisation elliptique sont de l'ordre des perturbations, excepté dans le cas de la réflexion totale; mais on sait qu'une interprétation convenable de la forme imaginaire que prennent alors les amplitudes vibratoires conduit très-simplement aux lois du mouvement elliptique.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE MÉCANIQUE DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION
DANS LES MILIEUX ISOTROPES (DE FRESNEL).

3. Dans le résumé rapide de ces théories on n'insistera pas sur les questions préliminaires relatives à l'éther, à la constitution de la lumière naturelle, à la propagation des ondes, à la forme des surfaces d'onde, etc., etc.

On sait en effet que le problème général de la réflexion et de la réfraction d'une lumière quelconque sur une surface de forme quelconque taillée dans une substance cristallisée, dans le cas le plus général, revient à l'étude de la réflexion et de la réfraction d'une onde plane polarisée sur une surface plane de la substance considérée : les méthodes analytiques permettent d'achever la question quand la solution de ce problème simple est connue.

I. — CAS DES MILIEUX ISOTROPES.

Les substances non cristallisées, comme le verre, les liquides, ou cristallisées dans le système cubique, comme le spath fluor ou le sel gemme, portent le nom de *milieux isotropes* au point de vue optique, parce qu'on admet que leur constitution moléculaire n'imprime à l'éther qu'ils renferment aucune dissymétrie dans quelque direction que ce soit : la surface de l'onde lumineuse y est sphérique; les ondes planes s'y propagent sans altération; la vibration est située d'une manière quelconque dans le plan de l'onde : leur vitesse de propagation est inversement proportionnelle à l'indice de réfraction de la substance.

Étant données une surface plane taillée dans un milieu isotrope et une onde plane polarisée, le nombre des données est quatre, à savoir :

1^o L'indice de réfraction de la substance relatif à la

couleur, c'est-à-dire à la *longueur d'onde* de la lumière incidente;

2° L'angle d'incidence, c'est-à-dire l'angle de l'onde plane avec la surface, ou, ce qui revient au même, l'angle du rayon lumineux, ou normale à l'onde, avec la normale à la surface réfléchissante;

3° L'amplitude commune des oscillations de l'onde incidente;

4° Enfin l'azimut dans lequel s'exécutent ces oscillations, compté, par exemple, à partir du plan d'incidence.

Le nombre des inconnues spéciales au problème proposé est aussi quatre : l'amplitude et l'azimut de l'oscillation réfléchie et de l'oscillation réfractée.

Il est donc nécessaire de trouver quatre relations distinctes et compatibles.

Cette manière d'envisager le problème suppose :

1° Que la lumière est produite par les oscillations de l'éther, oscillations s'effectuant dans le plan de l'onde et qu'on nomme pour cela *vibrations transversales*;

2° Que la lumière polarisée ne contient que des oscillations rectilignes et parallèles à une même direction;

3° Que l'intensité de la lumière est mesurée par la force vive des oscillations, c'est-à-dire proportionnelle dans un même milieu au carré de l'amplitude vibratoire.

4. Fresnel adopta en outre les principes ou *postulata* suivants :

1° *Principe de la conservation des forces vives.*

Quand le mouvement lumineux se réfléchit ou se réfracte, il n'y a aucune force vive perdue, et la force vive des vibrations incidentes se retrouve en totalité dans les vibrations des ondes réfléchie et réfractée.

2° *Principe de la composition des petits mouvements dans un même milieu.*

Les amplitudes des vibrations peuvent être composées et décomposées suivant les principes de la Cinématique, c'est-à-dire suivant la règle du parallélogramme.

3° *Principe de continuité*, ou composition des amplitudes exécutées à la surface de séparation des milieux différents.

L'oscillation de l'onde incidente se partage entre les ondes réfléchi et réfractée, de manière que les composantes des trois amplitudes parallèles à la surface réfléchissante se composent suivant la règle du parallélogramme : ce qu'on exprime en disant qu'il y a *continuité* dans les vibrations, parallèlement à la surface de séparation des milieux.

Fresnel admit que la continuité ne devait pas s'étendre aux composantes normales à cette surface.

4° *Principe de concomitance des vibrations*. — Les vibrations des rayons incident, réfléchi et réfracté ont la même phase sur la surface de séparation des milieux.

5° *Extension de la loi de Newton* au calcul de la vitesse de propagation de la lumière.

Cette vitesse ν est proportionnelle à la racine carrée du quotient de l'élasticité e par la densité d du milieu où s'exécutent les vibrations, $\nu = \sqrt{\frac{e}{d}}$.

Fresnel en conclut immédiatement que les densités de l'éther dans les divers milieux sont en raison inverse du carré des indices de réfraction, en admettant que la force élastique élémentaire reste la même dans tous les milieux *isotropes*.

§. Ces divers principes conduisent aux équations suivantes :

1° *Équation des forces vives*. — La propagation par ondes planes donne aux rayons lumineux une constitution périodique dans l'espace telle, qu'à un instant donné le mouvement oscillatoire se retrouve le même dans des tranches parallèles distantes d'une ou plusieurs longueurs d'onde : il suffit donc de considérer l'intervalle compris entre deux de ces tranches consécutives.

Si l'on isole dans chacun des trois rayons incident (*fig. 1. Pl. I*), réfléchi et réfracté un prisme d'éther dont les arêtes

soient respectivement parallèles à leur direction ayant une base commune sur la surface de séparation des milieux, le mouvement lumineux incident compris dans le *prisme incident* se transmettra intégralement sans sortir des deux autres. On évaluera aisément la force vive moyenne relative des trois rayons en limitant la longueur de ces prismes à une *longueur d'onde* entre deux sections droites, c'est-à-dire entre deux tranches parallèles à l'onde, mm' , nn' , pp' .

Soient T la durée d'une vibration, A son amplitude, S l'aire de la section droite du prisme, λ la longueur d'onde correspondante ou sa hauteur, D la densité du milieu où s'exécute la vibration A ; la force vive d'une tranche d'épaisseur dx , située à une distance x de la base. à l'instant t , sera

$$S \cdot D \cdot A^2 \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) dx.$$

La force vive totale sera la somme des forces vives élémentaires

$$S \cdot A^2 \cdot D \cdot \int_0^\lambda \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) dx.$$

On aurait trois expressions identiques; mais l'intégrale aura la même valeur, c'est-à-dire une valeur indépendante de λ ; car en posant $\frac{x}{\lambda} = z$, l'expression se réduit à

$$S \cdot D \cdot A^2 \lambda \cdot \int_0^1 \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + z \right) dz.$$

Donc, en désignant par i l'amplitude incidente, A et B les amplitudes réfléchie et réfractée, D la densité de l'éther dans le premier milieu, d dans le milieu réfringent, i et r les angles d'incidence et de réfraction, il viendra, en écrivant que la force vive incidente est égale à la somme des forces vives incidente et réfléchie, après la suppression de l'intégrale facteur commun,

$$D \cdot \sin i \cos i = D \cdot A^2 \cdot \sin i \cos i + d \cdot B^2 \cdot \sin r \cos r,$$

car les aires des sections droites sont proportionnelles aux cosinus de leur angle avec la surface réfléchissante et les longueurs d'onde aux vitesses de propagation, c'est-à-dire au rapport des sinus des mêmes angles. L'interprétation précitée de la loi de Newton donne la valeur du rapport des densités $\frac{d}{D} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}$; d'où l'on conclut

$$(1 - A^2) \sin r \cos i = B^2 \sin i \cos r.$$

Cette équation est indépendante de l'orientation des oscillations dans le plan d'onde.

6. Fresnel particularise alors l'orientation des vibrations et traite les deux cas suivants :

1^o *Vibrations perpendiculaires au plan d'incidence.* — Par raison de symétrie ces vibrations se partagent sans altération dans leur direction, et si l'on désigne par des minuscules les amplitudes dans ce cas particulier, on aura d'abord entre elles la relation précédente

$$(1 - a^2) \sin r \cos i = b^2 \sin i \cos r,$$

et la relation de continuité complète, puisqu'elles restent parallèles à la surface de séparation (*fig. 2*),

$$1 + a = b.$$

2^o *Vibrations parallèles au plan d'incidence.* — Distinguant les amplitudes dans ce cas par un indice, on aura toujours

$$(1 - a_1^2) \sin r \cos i = b_1^2 \sin i \cos r,$$

et l'équation de continuité entre les projections de ces amplitudes sur la surface de séparation (*fig. 3*)

$$(1 - a_1) \cos i = b_1 \cos r.$$

On rejette l'équation de continuité entre les projections de ces amplitudes normalement à cette surface,

$$(1 + a_1) \sin i = b_1 \sin r.$$

Il y aurait, en effet, incompatibilité entre cette relation et les deux précédentes.

On arrive ainsi aux valeurs

$$a = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \quad a_1 = \frac{\text{tang}(i-r)}{\text{tang}(i+r)},$$

$$b = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}, \quad b_1 = \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)},$$

lesquelles permettent, d'après le principe de la composition des petits mouvements dans le même milieu, de déterminer les amplitudes et les directions des oscillations réfléchie et réfractée A et B dans le cas général.

7. 3° *Cas général : vibrations orientées d'une manière quelconque.* — Décomposons l'amplitude incidente en deux (fig. 4), l'une $\cos \omega$ sur le plan d'incidence, l'autre $\sin \omega$ normale à ce plan; on obtiendra, à l'aide des *coefficients de réduction* calculés ci-dessus, les composantes correspondantes $A \cos \alpha$, $A \sin \alpha$, $B \cos \beta$ et $B \sin \beta$ des amplitudes réfractée et réfléchie

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cos \alpha = a_1 \cos \omega, \\ A \sin \alpha = a \sin \omega, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B \cos \beta = b_1 \cos \omega, \\ B \sin \beta = b \sin \omega, \end{array} \right.$$

d'où l'on conclut

$$\text{tang} \omega = \frac{a_1}{a} \text{tang} \alpha = \frac{b_1}{b} \text{tang} \beta,$$

expression qui donne l'orientation des vibrations réfléchie et réfractée en fonction de l'orientation de la vibration incidente.

On en déduit encore

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2}}, \\ B^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{b_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = a_1^2 \cos^2 \omega + a^2 \sin^2 \omega, \\ B^2 = b_1^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega, \end{array} \right.$$

formules qui représentent l'amplitude des mêmes vibrations en fonction de leur orientation propre et en fonction de celle de la vibration incidente : A^2 et B^2 expriment évidemment l'intensité de ces rayons.

8. Tel est l'admirable et simple enchaînement d'idées qui soumit désormais au calcul les phénomènes si variés de la réflexion et de la réfraction de la lumière, phénomènes qui avaient semblé jusque-là déjouer la sagacité des plus grands géomètres. Fresnel montra sans peine que les lois déduites de ses formules s'accordaient parfaitement avec les expériences de Malus et de M. Brewster; il put donc légitimement identifier les propriétés de la lumière polarisée avec celles du mouvement défini par ses calculs.

De cette identification il conclut que la vibration lumineuse doit être perpendiculaire au plan de polarisation.

La démonstration en est très-simple : l'expérience avait montré à Malus que la lumière polarisée dans le plan d'incidence se réfléchit sans jamais s'éteindre quelle que soit l'incidence, tandis que la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence s'éteint par réflexion sous une incidence particulière dont M. Brewster formula la loi : cet angle, d'après la *loi de Brewster*, est défini par la condition $i + r = 90$ degrés. Or, la discussion des valeurs de a et de a_1 montre que a_1 s'annule pour cette incidence, tandis que a varie sans jamais passer par zéro : comme a_1 est l'expression de la vibration réfléchie parallèle au plan d'incidence, la vibration lumineuse est normale au plan de polarisation.

Des vérifications détaillées furent faites alors par Fresnel et par d'autres physiciens éminents, et c'est à cette occasion que M. Brewster déclara que les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière étaient désormais connues avec autant d'exactitude que celles du mouvement des astres.

Théorie modifiée de Mac Cullagh et de M. Neumann.

9. Au milieu de l'admiration qui entourait une œuvre si neuve et si profonde, s'élevaient quelques doutes sur la solidité de cette théorie : plusieurs des principes adoptés paraissaient à certains esprits faire tache dans l'œuvre. Fresnel, il est vrai, n'a pas donné toujours les meilleurs arguments pour justifier ses hypothèses, et un certain nombre de géomètres ne se contentèrent pas de ces espèces d'oracles du génie. La discontinuité normale à la surface de séparation des milieux paraissait surtout leur déplaire ; il leur semblait que dans une théorie parfaite une irrégularité géométrique si grossière ne devait pas exister ; aussi saluèrent-ils avec enthousiasme la théorie modifiée à laquelle Mac Cullagh et M. Neumann arrivèrent simultanément quelques années plus tard.

Ces géomètres reproduisaient les raisonnements de Fresnel, mais avec deux altérations profondes : ils admettaient la continuité parfaite des amplitudes vibratoires et l'égalité absolue des densités de l'éther dans tous les milieux.

Par l'effet d'une compensation singulière dans les hypothèses, les formules auxquelles ils arrivaient étaient identiques à celles de Fresnel pour les éléments du rayon réfléchi ; l'amplitude réfractée n'était modifiée que par un coefficient constant égal à l'indice du milieu réfringent ; mais la vibration était forcément parallèle au plan de polarisation.

10. Cette théorie se résume dans les équations suivantes.

En effaçant le rapport des densités devenu égal à 1, la relation déduite de la conservation des forces vives s'écrit

$$(1 - A'^2) \sin i \cos i = B' \sin r \cos r;$$

par suite, les cas particuliers étudiés précédemment deviennent :

1^o *Vibrations particulières au plan d'incidence.*

$$\begin{aligned}(1 - a'^2) \sin i \cos i &= b' \sin r \cos r, \\ 1 + a' &= b'.\end{aligned}$$

2^o *Vibrations parallèles au plan d'incidence.*

$$\begin{aligned}(1 - a_1'^2) \sin i \cos i &= b_1' \sin r \cos r, \\ (1 - a_1') \cos i &= b_1' \cos r, \\ (1 + a_1') \sin i &= b_1' \sin r.\end{aligned}$$

La mise en équation est la même que dans le calcul de Fresnel, à une exception près, car il y a une équation de plus dans le second groupe, équation superflue d'ailleurs, vu le nombre d'inconnues; elle exprime que la continuité est rigoureuse normalement à la surface de séparation des milieux. Quoiqu'elle soit superflue, elle n'est nullement incompatible avec les deux autres, comme dans la théorie de Fresnel, et l'on peut s'assurer qu'en multipliant membre à membre les deux équations de continuité du second groupe on reproduit l'équation correspondante des forces vives.

Les valeurs qu'on déduit de ces relations sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} a' &= \frac{\text{tang}(i-r)}{\text{tang}(i+r)}, \\ b' &= \frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{2 \cos i \sin r}{\sin(i+r) \cos(i-r)}, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} a_1' &= -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \\ b_1' &= \frac{\sin i}{\sin r} \cdot \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît immédiatement l'identité de ces valeurs avec celles de la théorie de Fresnel, au facteur constant près $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, qui affecte les vibrations réfractées; seulement il y a inversion dans les symboles accentués :

$$\left\{ \begin{aligned} a' &= a_1, \\ b' &= nb_1, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} a_1' &= a, \\ b_1' &= nb, \end{aligned} \right.$$

ce qui revient à dire que les directions des amplitudes sont à angle droit de ce qu'elles étaient dans la théorie de

Fresnel : par suite, les hypothèses modifiées exigent que la vibration soit dans le plan de polarisation.

Quant au facteur constant n , il est loin de constituer une divergence entre les deux théories ; il restitue, au contraire, l'égalité d'intensité de leurs rayons réfractés ; car, dans les idées de Fresnel, l'intensité relative du rayon réfracté n'est pas mesurée par le carré de l'amplitude, mais par ce carré que multiplie la densité relative du milieu où elle s'exécute. L'identification des deux théories est donc complète ; on reviendra plus loin sur ce point important.

Comparaison des deux théories. Introduction du principe de la conservation des quantités de mouvement des composantes vibratoires normales à la surface de séparation des milieux.

11. Comparons maintenant les deux théories, non pas au point de vue de l'analyse mathématique, qui pourrait gagner en rigueur, mais en ce qui regarde les principes physiques.

Chacune semble avoir son point faible : celle de Fresnel, on l'a vu, renferme cette discontinuité qui a choqué quelques esprits ; l'autre admet que l'éther possède la même densité dans tous les corps, hypothèse grave par ses conséquences ; elle détruit, en effet, du même coup, l'explication si naturelle de l'aberration et de quelques autres phénomènes fondamentaux de l'optique ; elle est même contredite par la belle expérience de M. Fizeau sur l'entraînement des ondes dans les corps en mouvement.

Mais quelques physiciens ou géomètres lui pardonnent cette contradiction en faveur du rétablissement de la continuité rigoureuse, et la compatibilité des équations de continuité avec celle des forces vives leur paraît une confirmation péremptoire de la vérité des hypothèses.

Ces deux difficultés ont-elles la même importance ? Évi-

demment non : l'une conduit à une contradiction grave de faits et d'analogies presque incontestables ; l'autre est une simple irrégularité inexplicée, mais qui ne contredit aucun principe sérieux.

12. Je pense même avoir résolu cette difficulté relative à la *discontinuité normale* de la théorie de Fresnel, et interprété d'une manière plus plausible la suppression de cette équation litigieuse. Aussi verra-t-on dans ce qui va suivre non-seulement pourquoi cette équation est fautive, mais comment on doit la modifier pour la rendre exacte.

Voici comment on peut formuler cette interprétation :

Le postulat de Fresnel sur la continuité des amplitudes cache, sous une forme géométrique, un principe de Mécanique bien connu, celui de la *conservation des quantités de mouvement* : leur expression mathématique coïncide dans le cas du mouvement vibratoire parallèle à la surface de séparation des milieux, tandis qu'elle diffère pour la composante normale.

Cette différence dans le mode de propagation des deux genres de mouvement ressort naturellement de l'idée qu'on se fait sur la constitution de l'éther à la surface de séparation des milieux : il doit y avoir transition insensible entre la densité de l'éther des deux milieux ; cette variation s'opère dans les tranches avoisinant cette surface, et l'épaisseur des couches de transition, quoique très-petite en valeur absolue, doit être cependant fort appréciable relativement à l'amplitude de l'oscillation lumineuse ou à la longueur d'onde.

Si l'on considère la propagation des composantes vibratoires parallèles à la surface de séparation des milieux, les trois vibrations concomitantes, s'effectuant dans les mêmes couches, mettront donc en mouvement un fluide qui aura une densité commune aux trois oscillations dans toute l'étendue de leur course ; la loi de conservation des quantités de mouvement se réduira donc à la loi de composition

des petits mouvements dans un même milieu, c'est-à-dire à la règle du parallélogramme.

Cette grande régularité dans la transmission du mouvement ne se présentera plus pour les composantes normales à la surface de séparation ; chaque oscillation ne s'effectuera plus dans un fluide homogène ; le mécanisme de transmission dans l'intérieur de la tranche de passage sera donc assez complexe et difficile à définir ; mais l'hypothèse généralement acceptée, que la régularité se rétablit au delà de cette tranche et qu'aucun mouvement ne se diffuse au dehors, légitime l'application du théorème des quantités de mouvement qui élimine, comme on le voit, ces mouvements irréguliers et mal définis dont la résultante n'a pas d'effet hors d'un certain espace limité.

Les oscillations de part et d'autre de la tranche de passage s'effectuant dans des milieux différents, la continuité géométrique des amplitudes n'a plus de sens. Si, au contraire, on multiplie chaque amplitude par une quantité proportionnelle à la densité du milieu dans lequel elle s'exécute, on aura la véritable continuité ; non plus la continuité géométrique, mais la continuité dynamique : l'équation des composantes normales devient alors

$$(1 + a_1) \sin i D = b_1 \sin r d;$$

substituant au rapport $\frac{d}{D}$ sa valeur $\frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}$, il vient

$$(1 + a_1) \sin r = b_1 \sin i,$$

équation parfaitement compatible avec l'équation de continuité et l'équation des forces vives du second groupe.

13. En résumé, le raisonnement précédent, qu'on pourrait exposer, sinon avec plus de simplicité, peut-être avec plus de rigueur, lève une difficulté qui a arrêté un certain nombre de physiciens et de géomètres, et donne à l'assertion de Fresnel une interprétation plus plausible, en supprimant les explications peu satisfaisantes qui ont été proposées pour la justifier.

La théorie de Fresnel recouvre donc cette symétrie qui donnait à la théorie modifiée une allure si élégante ; elle a, en outre, sur celle-ci, l'incontestable supériorité d'être d'accord avec des expériences importantes, et de conserver l'explication naturelle de plusieurs phénomènes fondamentaux.

Cette interprétation de la discontinuité géométrique conduit non-seulement au rétablissement d'une équation, mais montre encore comment s'introduit la polarisation elliptique.

En effet, le raisonnement suppose que la *tranche de transition* n'a qu'une influence négligeable sur la masse des particules oscillantes : c'est ce qui aura lieu dans la réflexion sur la surface de séparation de deux milieux ayant des densités peu différentes ; mais si la différence de densité entre les deux milieux est assez grande, la zone de transition aura nécessairement une épaisseur beaucoup plus considérable ; l'analyse précédente ne sera qu'une approximation plus ou moins grossière, et il sera nécessaire de tenir compte des temps inégaux que mettront à se propager dans cette tranche les composantes parallèles et normales. De là ces différences de marche entre les rayons polarisés dans le plan d'incidence et dans le plan perpendiculaire, différences qui sont mises en évidence par les phénomènes de polarisation elliptique auxquels donne lieu la réflexion : d'un autre côté, l'indice de réfraction, c'est-à-dire le rapport des densités des deux milieux, serait la cause unique de ces avances ou retards dans la phase des oscillations ; c'est ce que confirmerait la loi que M. Jamin a donnée sur la relation entre la grandeur de l'indice de réfraction et le signe de la différence de phase : au-dessous de l'indice 1,46 la réflexion est négative, au-dessus elle est positive.

Comme conclusion, je substitue à la discontinuité admise par Fresnel le *principe de la conservation des quantités de mouvement des composantes vibratoires normales à la surface de séparation des milieux.*

II. — RÉFLEXION CRISTALLINE.

Observations préliminaires.

14. La solution du problème de la réfraction et de la réflexion de la lumière dans les milieux isotropes ouvrirait évidemment la voie à la solution du problème analogue relatif aux milieux cristallisés. Fresnel fut enlevé trop tôt à la science, et n'eut pas le temps de couronner son œuvre; ce furent Mac Cullagh et M. Neumann qui, avec leur théorie modifiée, eurent l'honneur de donner, chacun suivant une méthode propre, l'expression mathématique de ces phénomènes, et les expériences antérieures de M. Brewster et de Seebeck fournirent à ces calculs de précieuses vérifications.

Ces deux géomètres n'apportèrent d'ailleurs aucune idée nouvelle dans la mise en équations du problème; le principe des forces vives et la continuité absolue qui, cette fois, ne donne plus de condition superflue, fournissent le nombre de relations nécessaires et suffisantes; ce nombre, égal à celui des inconnues, est encore quatre, comme dans le cas des milieux isotropes, à savoir : l'amplitude réfléchie, son azimut et les deux amplitudes réfractées.

Grâce à l'hypothèse de l'égalité de densité de l'éther dans tous les milieux, l'évaluation des forces vives n'offrirait aucune difficulté spéciale; il ne restait pour achever la solution qu'à effectuer des calculs longs et peu symétriques; Mac Cullagh résolut la difficulté par une élégante méthode géométrique. Quant à M. Neumann, il osa attaquer de front les pénibles éliminations de sa théorie, et son travail restera un chef-d'œuvre de patience analytique.

15. Si Mac Cullagh et M. Neumann ont réussi à généraliser la théorie des milieux isotropes pour l'appliquer aux milieux cristallisés, il n'en fut pas de même pour Fresnel : on ne trouve presque rien dans ses Mémoires ou dans ses papiers inédits qui témoigne d'essais dans cette

voie. Aussi, en voyant le peu d'efforts qu'a coûté aux deux géomètres éminents la généralisation de leurs principes, il paraît étrange que Fresnel, avec toutes les ressources de son génie, n'ait pas le premier posé les équations de la réflexion cristalline.

Quand on essaya de combler cette lacune, on se trouva arrêté sur plusieurs points : d'abord on n'apercevait dans la théorie des milieux isotropes de Fresnel que trois relations applicables au cas général au lieu de quatre, celle des forces vives et les deux équations de *continuité parallèle*; en outre, comment devait-on évaluer la densité de l'éther dans les milieux cristallisés ? Dans son mémorable travail sur l'explication mécanique de la double réfraction, Fresnel avait d'ailleurs passé assez légèrement sur la constitution de l'éther, attribuant à l'élasticité un rôle exclusif et tranchant par divination les autres difficultés relatives au mouvement lumineux efficace; l'importance de toutes ces questions cependant ne lui échappait pas; mais il espérait vivre assez pour revenir sur ces assertions et en justifier la valeur; malheureusement il n'en fut pas ainsi.

Aussi, la théorie de la réflexion cristalline, traitée avec les idées de Fresnel, est-elle restée jusqu'à ce jour au point où l'a laissée le créateur de ces belles théories, c'est-à-dire réduite à un système incomplet de trois équations contenant même un coefficient inconnu.

L'un des résultats de ce travail est de reconstituer cette théorie; je me suis efforcé de la présenter en suivant les idées et la méthode si simple de Fresnel.

16. Avant d'arriver à la solution du cas général des milieux cristallisés, il est utile de montrer d'abord que si le problème des milieux isotropes avait été traité par une marche différente, les principes de Fresnel auraient, même dans ce cas simple, conduit en apparence à un système incomplet de trois équations, insuffisant pour achever la question.

En effet, au lieu de traiter séparément les deux cas particuliers cités plus haut, on peut se proposer de mettre directement en équations le cas où la vibration incidente est située dans un azimut quelconque; la relation déduite des forces vives étant indépendante de l'orientation des vibrations s'applique immédiatement à ce cas :

$$(1 - A^2) \sin r \cos i = B^2 \cos r \sin i.$$

La difficulté se présente dans l'application du principe de continuité, car, Fresnel rejetant la continuité normale, le nombre d'équations qu'on en peut déduire est de *deux* seulement.

Conservant les mêmes notations, on aura pour expression de la continuité parallèle (*fig. 4*)

$$\begin{aligned} \text{axe des } x \dots & \cos \omega \cos i - A \cos z \cos i = B \cos \beta \cos r, \\ \text{axe des } y \dots & \sin \omega + A \sin z = B \sin \beta. \end{aligned}$$

Ainsi donc, trois équations seulement, en adoptant le principe de discontinuité (sans l'interprétation qui a été proposée précédemment); par suite, on ne peut achever la solution du problème.

La solution de ce système incomplet paraît donc impossible; pourtant elle a été donnée; par quel artifice implicite y est on parvenu?

17. Fresnel aurait probablement songé à obtenir une quatrième équation en analysant de plus près la discontinuité normale, si cette nouvelle marche s'était présentée à son esprit; mais la symétrie du plan d'incidence l'avait avant tout préoccupé, et c'est en vertu de cette symétrie qu'il dédoubla l'équation des forces vives, en sorte qu'il obtint un nombre suffisant d'équations. Il admit alors implicitement qu'il y a égalité non-seulement entre la force vive de la vibration incidente et celle des vibrations réfractée et réfléchie, mais que cette égalité a lieu *séparément* dans chacun des deux systèmes qui forment leurs

composantes parallèles ou normales au plan d'incidence. C'est ainsi qu'il écrivit les deux relations

$$(\sin^2 \omega - A^2 \sin^2 \alpha) \sin r \cos i = B^2 \sin^2 \beta \cos r \sin i,$$

$$(\cos^2 \omega - A^2 \cos^2 \alpha) \sin r \cos i = B^2 \cos^2 \beta \cos r \sin i,$$

lesquelles, jointes aux deux équations de continuité, ont permis de trouver les quatre valeurs

$$\frac{A \sin \alpha}{\sin \omega}, \quad \frac{A \cos \alpha}{\cos \omega}, \quad \frac{B \sin \beta}{\sin \omega}, \quad \frac{B \cos \beta}{\cos \omega},$$

dans lesquelles on reconnaît — a , — a_1 , b , b_1 .

18. Dans la théorie de Mac Cullagh et Neumann, cette condition de symétrie était implicitement apportée par les conditions géométriques. Aussi, lorsqu'on pose les équations en suivant la marche précédente, on retrouve comme conséquence immédiate, sans qu'on l'ait introduite explicitement dans les hypothèses, que le plan d'incidence est un plan de symétrie et que, par suite, il y a deux systèmes particuliers de vibrations auxquels s'applique séparément le principe des forces vives; ce sont les deux cas particuliers de Fresnel :

$$(1) \quad (1 - A'^2) \sin i \cos i = B'^2 \sin r \cos r,$$

$$(2) \quad \text{axe des } x \dots \cos \omega' \cos i - A' \cos \alpha' \cos i = B' \cos \beta' \cos r,$$

$$(3) \quad \text{axe des } y \dots \sin \omega' + A' \sin \alpha' = B' \sin \beta',$$

$$(4) \quad \text{axe des } z \dots \cos \omega' \sin i + A' \cos \alpha' \sin i = B' \cos \beta' \sin r.$$

Il est évident qu'en multipliant membre à membre les équations (2) et (4) on obtient

$$(\cos^2 \omega' - A' \cos^2 \alpha') \sin i \cos i = B'^2 \cos^2 \beta' \sin r \cos r,$$

laquelle, retranchée membre à membre de l'équation (1), donne

$$(\sin^2 \omega' - A'^2 \sin^2 \alpha') \sin i \cos i = B'^2 \sin^2 \beta' \sin r \cos r,$$

équations qui sont identiques avec les suivantes :

$$(1 - a'^2) \sin i \cos i = b'^2 \sin r \cos r,$$

$$(1 - a_1'^2) \sin i \cos i = b_1'^2 \sin r \cos r.$$

On voit qu'il était superflu d'écrire l'équation des forces vives dans les deux cas particuliers traités plus haut, puisque c'était imposer comme nouvelle une condition implicitement contenue dans l'énoncé. Il n'y a donc pas lieu d'admirer cette compatibilité observée dans la théorie modifiée et encore moins de l'invoquer comme une preuve en faveur de ses hypothèses fondamentales.

19. Mais puisque nous avons rétabli précédemment l'équation qui manquait en substituant la continuité dynamique à la continuité géométrique, nous pouvons, même dans la théorie de Fresnel, supprimer la condition explicite de symétrie du plan d'incidence en rétablissant la quatrième équation

$$\cos \omega \sin i - A \cos \alpha \sin i = B' \frac{d}{D} \cos \beta \sin r.$$

Substituant à $\frac{d}{D}$ sa valeur et comparant aux trois autres, on obtient le système

$$\begin{aligned} (1 - A^2) \sin r \cos i &= B^2 \sin i \cos r, \\ \cos \omega \cos i - A \cos \alpha \cos i &= B \cos \beta \cos r, \\ \sin \omega + A \sin \alpha &= B \sin \beta, \\ \cos \omega \sin r + A \cos \alpha \sin r &= B \cos \beta \sin i; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, comme précédemment,

$$\begin{aligned} (\cos^2 \omega - A^2 \cos^2 \alpha) \sin r \cos i &= B^2 \sin i \cos r, \\ (\sin^2 \omega - A^2 \sin^2 \alpha) \sin r \cos i &= B^2 \sin i \cos r, \end{aligned}$$

expressions qu'on avait posées directement.

20. Ainsi, plus on avance dans l'examen des deux théories, plus on voit leur identité s'accroître dans leur expression mathématique; on arrive même à soupçonner que cette identité n'est due qu'à une coïncidence de calcul, sans valeur au point de vue de la théorie physique, que c'est la même analyse traitée pour ainsi dire avec d'autres variables et dans laquelle les formules de transformation ont

reçu une interprétation heureuse. Le calcul suivant confirme dans cette opinion.

Il n'est pas difficile, en effet, de montrer *à priori*, sans résoudre les équations et en tirant les valeurs précédemment données, que les équations de la théorie modifiée ne sont que le résultat d'un véritable changement de nom donné aux variables dans les équations de la théorie de Fresnel.

Pour le démontrer le plus simplement possible, on va d'abord, dans les deux théories, substituer à l'équation des forces vives, qui est du second degré par rapport aux amplitudes, une équation linéaire par rapport à ces variables, afin de rendre le calcul beaucoup plus symétrique; cette transformation d'ailleurs n'est pas nouvelle, car elle a été employée dans la résolution des cas particuliers étudiés en premier lieu.

On l'obtiendra aisément dans chaque théorie en divisant l'une des équations dédoublées des forces vives par l'une des équations de continuité; autrement dit, on obtiendra le système cherché de quatre équations linéaires en décomposant en facteurs linéaires les deux équations partielles des forces vives, de manière à reproduire les trois équations de continuité.

21. Dans la théorie de Fresnel on trouve :

$$\begin{aligned}
 (p) \quad & \text{axe des } x \dots (\cos \omega - A \cos \alpha) \cos i = B \cos \beta \cos r, \\
 (q) \quad & \text{axe des } z \dots (\cos \omega + A \cos \alpha) \sin i = B \cos \beta \sin r \frac{d}{D}, \\
 (r) \quad & \text{axe des } y \dots \sin \omega + A \sin \alpha = B \sin \beta, \\
 (s) \quad & (\sin \omega - A \sin \alpha) \sin i \cos i = B \sin \beta \sin r \cos r \frac{d}{D}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît les trois équations de continuité dans les trois premières; quant à la dernière, elle reproduit l'une des équations partielles des forces vives par multiplication convenable avec la précédente.

Les équations de la théorie modifiée s'obtiennent sans

calcul nouveau, en effaçant le facteur $\frac{d}{D}$ et en accentuant les symboles A, B, ω , α , β :

$$\begin{aligned} (p') & \quad (\cos \omega' - A' \cos \alpha') \cos i = B \cos \beta' \cos r, \\ (q') & \quad (\cos \omega' + A' \cos \alpha') \sin i = B' \cos \beta' \sin r, \\ (r') & \quad \sin \omega' + A' \sin \alpha' = B' \sin \beta', \\ (s') & \quad (\sin \omega' - A' \sin \alpha') \sin i \cos i = B' \sin \beta' \sin r \cos r. \end{aligned}$$

Or, ce deuxième système est identique au premier, *équation pour équation*, par le changement de variables que voici :

$$\begin{aligned} A &= -A', \\ B &= B' \sqrt{\frac{D}{d}}, \\ \omega &= \omega' + \frac{\pi}{2}, \\ \alpha &= \alpha' + \frac{\pi}{2}, \\ \beta &= \beta' + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

En effet, substituant ces valeurs dans le premier système, il vient

$$\begin{aligned} (p'') & \quad (\sin \omega' - A' \sin \alpha') \cos i = B' \sin \beta' \cos r \sqrt{\frac{D}{d}} = 0, \\ (q'') & \quad (\sin \omega' + A' \sin \alpha') \sin i = B' \sin \beta' \sin r \sqrt{\frac{d}{D}} = 0, \\ (r'') & \quad \cos \omega' + A' \cos \alpha' = B' \cos \beta' \sqrt{\frac{D}{d}} = 0, \\ (s'') & \quad (\cos \omega' - A' \cos \alpha') \sin i \cos i = B' \cos \beta' \sin r \cos r \sqrt{\frac{d}{D}} = 0. \end{aligned}$$

Comparant les équations (p'') et (s'') , (q'') et (r'') , (r'') et (q'') , (s'') et (p'') , on obtient *quatre fois* comme condition d'identité de toutes ces équations la même expression

$$\sqrt{\frac{d}{D}} = \frac{\sin i}{\sin r} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{D} = \frac{\sin^2 i}{\sin^2 r} = n^2.$$

L'interprétation de ce changement de variables constitue justement l'énoncé des principes de la théorie modifiée quant à la valeur de α ; le changement de signe de A s'explique géométriquement (17) et ne constitue aucune divergence entre les deux théories.

THÉORIE DE MAC CULLAGH ET NEUMANN DANS LE CAS
GÉNÉRAL DE LA RÉFLEXION CRISTALLINE.

22. Si l'on voulait conserver une exposition symétrique des deux théories cristallines, ce serait ici le lieu de développer les idées qui m'ont permis de reconstituer une théorie d'après les principes de Fresnel; mais ce serait à la fois déroger à l'ordre historique et manquer de bonne foi que de reléguer au second plan des travaux dont l'importance, *sinon l'originalité, est si considérable* : on ne doit pas en effet dissimuler que si la théorie de Mac Cullagh et Neumann doit beaucoup à l'œuvre de Fresnel, dont elle est née, l'œuvre de Fresnel lui devra beaucoup aussi : il est donc juste d'exposer d'abord les travaux qui ont frayé le premier chemin sur ce terrain difficile, résultat important dont tout l'honneur revient aux savants géomètres déjà si souvent cités.

Les considérations présentées plus haut montrent avec quelle facilité Mac Cullagh et M. Neumann obtinrent les équations fondamentales de la réflexion cristalline : aucune généralisation n'était utile, le développement analytique seul de ces équations présentait des difficultés ou plutôt des longueurs. On ne suivra pas le géomètre allemand dans ses laborieux calculs; il sera plus intéressant de résumer l'élégant Mémoire de Mac Cullagh dont la méthode servira plus loin à reconstituer la théorie cristalline d'après les idées de Fresnel.

23. La méthode géométrique de Mac Cullagh est fondée sur les remarques suivantes :

Si l'on connaissait les azimuts de polarisation et les intensités relatives du rayon incident et du rayon réfléchi correspondant aux deux cas particuliers où l'un des rayons réfractés est éteint, le problème serait résolu ; car il suffirait de décomposer la vibration incidente suivant les deux *directions uniradiales* connues, de calculer les deux *composantes uniradiales* de la vibration réfléchie, laquelle peut être alors reconstituée en grandeur et en direction : c'est une décomposition d'amplitude analogue à celle que Fresnel imagina dans sa théorie des milieux isotropes.

Or, comme on connaît *à priori*, d'après la théorie de la double réfraction, la direction de la vibration réfractée (laquelle reste fixe quelle que soit la polarisation incidente), les quatre éléments inconnus, à savoir : les amplitudes des vibrations réfractée et réfléchie, les azimuts des vibrations réfléchie et incidente, se détermineront dans chacun des deux cas particuliers uniradiaux à l'aide des quatre équations connues déduites de la continuité rigoureuse et de la conservation des forces vives.

Équations d'un système uniaxial.

24. Étant donnés l'angle d'incidence de l'onde plane i , la direction de la surface réfléchissante par rapport aux axes principaux d'élasticité optique, et la position du plan d'incidence sur cette surface, la construction d'Huyghens généralisée par Fresnel permet de calculer les directions des ondes planes réfractées, les directions de propagation lumineuse efficaces correspondantes, c'est-à-dire les rayons réfractés et la position de la vibration réfractée dans chaque rayon. Cette vibration est dans le plan de l'onde ; Fresnel conclut qu'elle est la projection du rayon réfracté sur son onde plane, mais Mac Cullagh et Neumann admettent qu'elle est à angle droit sur cette direction, de sorte que, dans la théorie qui va suivre, la vibration sera rigoureusement transversale au rayon réfracté.

Il n'entre pas dans le cadre de ce Mémoire de développer les calculs relatifs à la surface d'onde; on supposera donc donnés ou calculés les éléments suivants, où l'on ne considère que l'un *seulement* des deux rayons réfractés :

i , l'angle d'incidence;

r , l'angle de réfraction de l'onde plane;

θ_1 , l'angle de la vibration incidente avec le plan d'incidence dans la position uniradiale, c'est-à-dire celle qui conserve seulement l'un des rayons réfractés;

θ_2 , l'angle de la vibration réfractée conservée avec le plan d'incidence;

θ_3 , l'angle de la vibration réfléchie dans la position uniradiale correspondante;

τ_1, τ_2, τ_3 , les amplitudes respectives de ces vibrations.

Les équations fondamentales d'un système uniradial ne se distinguent de celles des milieux isotropes que par l'évaluation du volume des prismes d'éther de Fresnel.

On voit aisément, d'après Mac Cullagh, que *ces volumes sont entre eux comme les ordonnées abaissées des points de contact des ondes planes d'Huyghens sur la surface de séparation des milieux.*

En désignant par z_1, z_2, z_3 ces ordonnées, on aura l'équation des forces vives

$$(\tau_1^2 - \tau_2^2) z_1 = \tau_2^2 z_2,$$

car évidemment $z_1 = z_3$. La densité de l'éther étant supposée la même dans tous les milieux, on n'a pas à tenir compte de cet élément.

25. Les équations de continuité ont, en réalité, été déjà données, avec des notations différentes : la vibration réfractée, étant dans le plan d'onde, est transversale à la normale au plan d'onde. Cette normale joue donc le rôle du rayon réfracté des milieux isotropes, quoique n'étant pas ici la direction lumineuse efficace : les équations de continuité du milieu cristallisé seront alors identiques avec

celles des milieux isotropes (*fig. 5*) :

$$(1) \quad (\tau_1 \cos \theta_1 - \tau_3 \cos \theta_3) \cos i = \tau_2 \cos \theta_2 \cos r,$$

$$(2) \quad \tau_1 \sin \theta_1 + \tau_3 \sin \theta_3 = \tau_2 \sin \theta_2,$$

$$(3) \quad (\tau_1 \cos \theta_1 + \tau_3 \cos \theta_3) \sin i = \tau_2 \cos \theta_2 \sin r.$$

Ce sont les équations du n° 21 dans lesquelles on a substitué $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ à la place de ω, α, β et $\frac{\tau_2}{\tau_1}, \frac{\tau_3}{\tau_1}$ au lieu de B et A.

Reste à évaluer les ordonnées z_1 et z_2 . La valeur de z_1 est proportionnelle à $\sin i \cos i$; mais z_2 est plus compliqué, car le point de contact de la surface de l'onde avec l'onde plane réfractée ne coïncide pas avec la trace de la normale à l'onde plane.

Soient CTT' (*fig. 7*) la surface de séparation des milieux, NTT' l'onde plane réfractée, C le point d'incidence, CR la normale à l'onde réfractée, CV le rayon réfracté, V le point de contact, VV' la vibration (d'après Mac Cullagh) de l'onde plane avec la surface d'onde, $VCR = \varepsilon$, $NCR = r$, on prend TC comme unité (pour obtenir RU ou bien $z_1 = \sin i \cos i$), et la perpendiculaire cherchée z_2 ou VS a pour valeur

$$\sin r \cos r + \sin r \operatorname{tang} \varepsilon \sin \theta_2 \sin r,$$

car l'angle NRV est le complément de θ_2 , ou bien

$$z_2 = \sin r \cos r (1 + \operatorname{tang} r \operatorname{tang} \varepsilon \sin \theta_2).$$

Dès lors, l'équation des forces vives devient

$$(\tau_1^2 - \tau_3^2) \sin i \cos i = \tau_2^2 \sin r \cos r (1 + \operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{tang} r \sin \theta_2).$$

26. Cette équation du second degré, par rapport aux amplitudes, peut être remplacée par une équation linéaire.

En effet, multipliant membre à membre (1) et (3) après avoir fait passer les termes en τ_2 dans le second membre, il vient

$$(\tau_1^2 \cos^2 \theta_1 - \tau_3^2 \cos^2 \theta_3) \sin i \cos i = \tau_2^2 \cos^2 \theta_2 \sin r \cos r,$$

équation qui, retranchée de celle des forces vives, donne

$$\begin{aligned} & (\tau_1^2 \sin^2 \theta_1 - \tau_3^2 \sin^2 \theta_3) \sin i \cos i \\ & = \tau_2^2 \sin r \cos r (\sin^2 \theta_2 + \operatorname{tang} r \sin \varepsilon \sin \theta_2); \end{aligned}$$

celle-ci, comparée à l'équation (2), conduit à l'équation linéaire cherchée; les équations fondamentales peuvent donc se mettre sous la forme du système suivant :

$$\begin{aligned}(\tau_1 \sin \theta_1 - \tau_3 \sin \theta_3) \sin i \cos i &= \tau_2 \sin r \cos r (\sin \theta_2 + \text{tang } r \text{ tang } \epsilon_1), \\(\tau_1 \cos \theta_1 - \tau_3 \cos \theta_3) \cos i &= \tau_2 \cos \theta_2 \cos r, \\ \tau_1 \sin \theta_1 + \tau_3 \sin \theta_3 &= \tau_2 \sin \theta_2, \\(\tau_1 \cos \theta_1 + \tau_3 \cos \theta_3) \sin i &= \tau_2 \cos \theta_2 \sin r.\end{aligned}$$

Au second rayon réfracté correspond un système analogue : on l'obtient sans calcul nouveau en accentuant r , θ_1 , θ_2 , θ_3 , τ_1 , τ_2 , τ_3 : le problème est donc résolu, car on peut calculer θ_1 , θ_1' les azimuts uniradiaux du rayon polarisé incident; θ_3 , θ_3' les azimuts uniradiaux du rayon polarisé réfléchi; $\frac{\tau_3}{\tau_1}$, $\frac{\tau_3'}{\tau_1'}$ les *coefficients d'altération* de l'amplitude réfléchie relativement à l'amplitude incidente : dès lors un calcul simple, qui sera développé dans la deuxième Partie de ce Mémoire, donnera l'amplitude réfléchie en grandeur et en direction dans le cas général.

RECONSTITUTION D'UNE THÉORIE D'APRÈS LES PRINCIPES DE FRESNEL POUR LE CAS GÉNÉRAL DE LA RÉFLEXION CRISTALLINE.

27. On a vu que la marche suivie par Fresnel dans le cas des milieux isotropes supposait que le plan d'incidence était un plan de symétrie : le rétablissement d'une équation de continuité normale aurait permis seul d'établir les équations fondamentales de ce cas simple indépendamment de cette symétrie. Il n'est donc pas étonnant qu'on n'ait pas réussi à obtenir la solution du problème général de la réflexion cristalline, car dans ce cas le plan d'incidence cesse d'être un plan de symétrie, et le nombre d'équations de condition est insuffisant.

Maintenant que la discussion de la discontinuité nor-

male a permis de rétablir une équation nouvelle, la question va se simplifier; mais la complication des éléments des ondes réfractées soulève des difficultés d'un autre ordre.

En effet, si l'on veut suivre les principes de Fresnel et accepter toutes ses conclusions, il faut admettre les résultats de sa théorie de la double réfraction : comment accommoder le principe de la continuité et celui des forces vives avec les conclusions suivantes ?

1° La direction du rayon lumineux réfracté extraordinairement est inclinée sur le plan de l'onde.

2° La vibration lumineuse est donnée en direction par la projection du rayon sur son plan d'onde.

3° La force élastique mise en jeu par cette oscillation n'est pas dans la direction du mouvement, elle est dans le plan projetant le rayon sur le plan d'onde et normale à ce rayon.

4° La vitesse de propagation normale de l'onde est proportionnelle à la racine carrée de la composante dans le plan d'onde de la force élastique.

5° La composante de la force élastique dans le plan d'onde est la seule qui produise une impression lumineuse : la composante normale à l'onde est étrangère aux phénomènes lumineux.

28. Le principe de continuité géométrique n'est plus évidemment applicable à la vibration réfractée. Ne doit-on pas en chercher une généralisation ?

Je pense qu'ici la généralisation la plus plausible consiste à appliquer la continuité, non pas aux amplitudes, mais aux forces élastiques qui produisent l'oscillation; dans les milieux isotropes, parallèlement à la surface de séparation des milieux, composer géométriquement les amplitudes, c'était composer les vitesses, ou bien les quantités de mouvement, ou bien encore les forces ou accélérations, car toutes ces quantités étaient proportionnelles en grandeur et identiques en direction. Dans les milieux cristallisés où

la force élastique n'est plus parallèle au mouvement, les vitesses et les accélérations ne peuvent plus être confondues : donc, si l'on veut conserver des conditions relatives à la continuité, il est nécessaire de choisir entre ces deux éléments.

La transition insensible de l'éther du milieu extérieur à celui du milieu cristallisé me paraît parfaitement compatible avec l'idée de la continuité entre les forces élastiques du milieu extérieur et celles du milieu cristallisé, du moins en ce qui concerne leurs composantes parallèles à la surface de séparation.

29. Quant aux composantes normales à la surface de séparation des milieux que Fresnel avait considérées comme discontinues, le mode d'équivalence ne sera plus de même nature : la transmission du mouvement a de l'analogie avec un choc et le principe des quantités de mouvement qui en a si bien rendu compte dans le cas des milieux isotropes doit fournir encore une généralisation naturelle du principe de continuité. Mais il y a encore une ambiguïté; la vibration lumineuse efficace est située dans le plan de l'onde, mais elle n'est l'effet que d'une seule des composantes de la force élastique, la composante parallèle au plan de l'onde : l'autre composante devrait produire une oscillation longitudinale. Fresnel admit que cette oscillation n'a aucun effet lumineux; mais au point de vue mécanique doit-on la négliger aussi dans l'évaluation de la quantité de mouvement? J'admettrai purement et simplement, comme Fresnel, qu'on doit négliger cette composante longitudinale des vibrations réfractées.

30. Il reste encore un point délicat : la formule de Newton déjà citée, $V = \sqrt{\frac{e}{D}}$, contient à la fois l'élasticité et la densité du milieu vibrant : c'est elle qu'on a invoquée pour calculer la densité de l'éther dans le cas des milieux isotropes; pourra-t-elle encore servir sans réserve dans le

cas des milieux cristallisés? Fresnel avait admis que dans toutes les substances isotropes l'élasticité est la même, et que la diversité des vitesses de propagation est uniquement due à l'inégalité de la densité de l'éther dans ces milieux. Mais dans les cristaux la vitesse de propagation est différente dans les diverses directions, et c'est à l'élasticité variable qu'il attribua cette variété : cependant la densité doit être également variable dans tous les sens, c'est-à-dire qu'une droite ne doit pas rencontrer le même nombre de molécules dans toutes les directions, et c'est cette constitution de l'éther qui est vraisemblablement la cause de cette élasticité variable. Il y aurait donc à distinguer si, dans la formule de Newton, c'est la *densité moyenne* ou la *densité linéaire* ci-dessus définie qu'il faut considérer. L'élasticité variable ayant joué un rôle exclusif dans la théorie de la double réfraction de Fresnel, il faudrait admettre que c'est la densité moyenne qui doit entrer dans la formule. Mais alors il y aura deux inconnues dans cette formule, la densité et l'élasticité, de sorte que la connaissance de la vitesse de propagation sera insuffisante pour déterminer la valeur relative de la densité, laquelle est nécessaire pour le calcul de l'équation des forces vives.

31. En présence de ces difficultés, il y a lieu de se demander si l'extension de la loi de Newton est bien légitime : la formule $v = \sqrt{\frac{d}{e}}$ a été établie en partant de l'hypothèse de la compressibilité du milieu vibrant, tandis que l'éther lumineux vibrerait, suivant Fresnel, sans changement de densité. Dans le cas des milieux isotropes, on a supposé que l'élasticité est la même dans tous les milieux pour déduire de la loi de Newton le rapport inconnu des densités de l'éther ; mais on a fait deux hypothèses gratuites : il aurait mieux valu en admettre la conclusion finale, à savoir, que la densité de l'éther est proportionnelle au carré de l'indice de réfraction, plutôt que d'admettre sans dé-

monstration suffisante d'abord la loi de Newton, puis l'égalité d'élasticité dans tous les milieux.

Si donc on se laisse guider par l'induction, on sera conduit à étendre cette conclusion aux milieux cristallisés ; on ne parlera pas de l'élasticité de l'éther. A la vérité, le célèbre Mémoire sur la double réfraction est fondé tout entier sur la considération de cette élasticité ; mais si l'on y regarde de plus près, on verra que les calculs et les raisonnements ne s'appliquent pas aux forces élastiques en particulier, mais à toute cause qui produirait une vitesse de propagation variable avec la direction du mouvement élémentaire. Je n'insiste pas sur ce point important auquel je réserve un Mémoire spécial, et je conclus sans autre discussion à l'extension pure et simple aux milieux cristallisés de l'expression de la densité de l'éther dans les milieux isotropes.

32. En résumé, voici les principes auxquels je m'arrête pour l'établissement des équations fondamentales de la réflexion cristalline d'après les idées de Fresnel :

1^o Il y a continuité entre les composantes des forces élastiques parallèles à la surface de séparation des milieux.

2^o Il y a équivalence entre les quantités de mouvement des composantes lumineuses efficaces normalement à cette surface.

3^o Il y a conservation des forces vives entre les amplitudes lumineuses efficaces.

4^o La densité de l'éther est variable suivant la direction de l'oscillation et proportionnelle au carré de l'indice de réfraction de l'onde correspondante.

Calcul des équations fondamentales.

33. D'après la remarque de Mac Cullagh, il suffira d'établir séparément les équations des deux systèmes uniaxiaux. Soient donc pour l'un de ses systèmes :

i , l'angle d'incidence ;

r , l'angle de réfraction de l'onde plane extraordinaire
(*fig. 8*);

ε , l'angle du rayon extraordinaire avec sa normale
d'onde;

Θ_1 , l'azimut uniradial de la vibration incidente compté
à partir du plan d'incidence;

Θ_2 , l'azimut de la vibration réfractée;

Θ_3 , l'azimut uniradial de la vibration réfléchie.

La *fig. 7* montre la disposition des divers éléments du rayon réfracté : CR la normale à l'onde, CV rayon correspondant, NTT' plan de l'onde, RV vibration, RL force élastique (normale au rayon CV dans le plan RCV).

On calcule aisément les cosinus des angles que fait la force élastique avec la normale au plan d'incidence prise comme axe des γ et la trace de ce plan sur la surface de séparation des milieux prise comme axe des x (*fig. 8*) :

$$\begin{aligned} \cos Lx &= \cos LR \cos Rx + \sin LR \sin Rx \cos LRx \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + r \right) \\ &\quad + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + r \right) \cos \Theta_2 \\ &= \sin \varepsilon \sin r + \cos \varepsilon \cos r \cos \Theta_2, \\ \cos Ly &= \cos Vy \cdot \cos LV = \sin \Theta_2 \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Le troisième cosinus à calculer est $\cos KZ$, c'est-à-dire le cosinus de la direction de la vibration avec l'axe des Z :

$$\cos VZ = \sin ZR \cos ZRV = \sin r \cos \Theta_2.$$

Par une simple substitution de lettres et en faisant $\varepsilon = 0$, on aura les cosinus qui se rapportent aux vibrations incidente et réfléchie, comme l'indique le tableau suivant.

VIBRATIONS.	X	Y	Z
T_1 incidente.	$\cos i \cos \Theta_1$	$\sin \Theta_1$	$\sin i \cos \Theta_1$
T_2 réfractée..	$\sin \varepsilon \sin r + \cos \varepsilon \cos r \cos \Theta_2$	$\cos \varepsilon \sin \Theta_2$	$\sin r \cos \Theta_2$
T_3 réfléchie..	$\cos i \cos \Theta_3$	$\sin \Theta_3$	$-\sin i \cos \Theta_3$

1° *Continuité des forces élastiques parallèlement à la surface de séparation.*

34. La force élastique incidente est proportionnelle à T_1 .
 » réfléchie » T_3 .
 » réfractée » $\frac{T_2}{\cos \varepsilon}$.

Il suffit d'écrire que la somme des projections de ces forces sur l'axe des X et l'axe des Y est nulle :

$$T_1 \cos i \cos \Theta_1 - T_3 \cos i \cos \Theta_3 = \frac{T_2}{\cos \varepsilon} (\sin \varepsilon \sin r + \cos \varepsilon \cos r \cos \Theta_2),$$

$$T_1 \sin \Theta_1 + T_3 \sin \Theta_3 = \frac{T_2}{\cos \varepsilon} \cos \varepsilon \sin \Theta_2.$$

2° *Continuité ou équivalence des quantités de mouvement des vibrations efficaces normalement à la surface de séparation.*

La quantité de mouvement de la vibration incidente est proportionnelle à $T_1 D$.

La quantité de mouvement de la vibration réfléchie est proportionnelle à $T_3 D$.

La quantité de mouvement de la vibration réfractée est proportionnelle à $T_2 d$.

Écrivant que la somme des projections de ces quantités de mouvement sur l'axe des z est nulle, il vient

$$T_1 \sin i \cos \Theta_1 - T_3 \sin i \cos \Theta_3 = T_2 \sin r \cos \Theta_2 \frac{d}{D}.$$

3° *Équation des forces vives.*

Elle ne présente aucune difficulté. On a vu précédemment que les volumes des prismes d'éther de Fresnel sont proportionnels aux ordonnées abaissées des points de contact des ondes sur la surface de séparation des milieux ; ces ordonnées sont respectivement :

$$\text{ondes incidente et réfléchie} = \sin i \cos i,$$

$$\text{onde réfractée} = \sin r \cos r + \sin r \operatorname{tang} \varepsilon \cos \Theta_2 \sin r,$$

d'où

$$(T_1^2 - T_3^2) \sin i \cos i = T_2^2 \sin r \cos r \frac{d}{D} (1 + \operatorname{tang} r \operatorname{tang} \varepsilon \cos \Theta_2).$$

Substituant à $\frac{d}{D}$ sa valeur $\frac{\sin^2 i}{\sin^2 r}$, il vient

$$(T_1 - T_3^2) \sin r \cos i = \sin i \cos r T_2^2 (1 + \operatorname{tang} r \operatorname{tang} \varepsilon \cos \Theta_2).$$

On peut, comme plus haut, remplacer l'équation des forces vives, qui est du second degré par rapport aux amplitudes, par une équation linéaire, combinaison des précédentes ; on arrive ainsi au système

$$(T_1 \sin \Theta_1 - T_3 \sin \Theta_3) \sin r \cos i = T_2 \sin \Theta_2 \cos r \sin i,$$

$$(T_1 \cos \Theta_1 + T_3 \cos \Theta_3) \sin r = T_2 \cos \Theta_2 \sin i,$$

$$T_1 \sin \Theta_1 + T_3 \sin \Theta_3 = T_2 \sin \Theta_2,$$

$$(T_1 \cos \Theta_1 - T_3 \cos \Theta_3) \cos i = T_2 \cos r (\operatorname{tang} \varepsilon \operatorname{tang} r + \cos \Theta_2).$$

On formerait immédiatement le second système unira-dial en accentuant les lettres $r, \varepsilon, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, T_1, T_2, T_3$.

Ces calculs seront développés dans la seconde Partie de ce Mémoire.

35. Si l'on compare ce système d'équations avec le système correspondant de la théorie de Mac Cullagh, on peut aisément se convaincre qu'il n'en diffère que par un changement de notations, comme dans le cas des milieux isotropes. En effet, substituant dans les équations précé-

dentés

$$T_1 = \tau_1, \quad \Theta_1 = \theta_1 + \frac{\pi}{2},$$

$$T_2 = k\tau_2, \quad \Theta_2 = \theta_2 + \frac{\pi}{2},$$

$$T_3 = -\tau_3, \quad \Theta_3 = \theta_3 + \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$(\tau_1 \cos \theta_1 - \tau_2 \cos \theta_2) \sin r \cos i = k \tau_2 \cos \theta_2 \cos r \sin i,$$

$$(\tau_1 \sin \theta_1 + \tau_3 \sin \theta_3) \sin r = k \tau_2 \sin \theta_2 \sin r,$$

$$\tau_1 \cos \theta_1 + \tau_3 \cos \theta_3 = k \tau_2 \cos \theta_2,$$

$$(\tau_1 \sin \theta_1 - \tau_3 \sin \theta_3) = k \tau_2 \cos r (\tan \varepsilon \tan r + \sin \theta_2) = 0.$$

Comparant ces équations avec le système précité, on trouve quatre fois comme conditions d'identité

$$k = \frac{\sin r}{\sin i} = \sqrt{\frac{d}{D}}.$$

36. Des calculs précédents il résulte que les deux théories qui conduisaient aux mêmes résultats dans le cas des milieux isotropes offrent le même genre d'identité définitive dans le cas le plus général des milieux cristallisés.

On doit donc rendre aux idées de Fresnel toute la confiance qu'elles avaient inspirée aux physiciens à l'époque où elles parurent : si des hypothèses contradictoires ont semblé jeter quelque doute sur leur fécondité en arrivant les premières à expliquer des phénomènes plus compliqués, elles perdent maintenant leur principal mérite puisque les idées primitives possèdent la même puissance.

Les principes de Fresnel ont d'ailleurs le privilège incontestable d'être tout à fait d'accord avec nos idées physiques sur l'explication de la polarisation totale, sur la constitution cristallographique des milieux uniaxes, sur l'aberration; enfin, ils ont reçu une confirmation délicate par la belle expérience de M. Fizeau citée précédemment.

Il faut donc conclure que la densité de l'éther est dilfé-

rente dans les divers milieux, et que les vibrations d'un rayon polarisé rectilignement sont normales au plan de polarisation.

Aussi l'on serait tenté de dire que, depuis l'illustre Fresnel, la solution des questions fondamentales de l'optique a plutôt reculé qu'avancé, si la science ne gagnait pas toujours à la discussion consciencieuse d'hypothèses même peu admissibles.

DEUXIÈME PARTIE.

DÉVELOPPEMENTS GÉOMÉTRIQUES DES THÉORIES DE LA RÉFLEXION CRISTALLINE.

37. Les équations fondamentales établies dans la première Partie de ce Mémoire permettent de résoudre tous les problèmes relatifs à la réflexion cristalline. Comme on a démontré l'identité, dans leur résultat définitif, de la théorie de Mac Cullagh et de celle de Fresnel, et que la probabilité physique est en faveur de cette dernière, il semble qu'on doive abandonner la première et effectuer les calculs ou les raisonnements en suivant les principes de la seconde.

Mais si l'une des théories a pour elle une grande valeur de principes, l'autre possède une simplicité géométrique qui ne prouve rien en faveur de ses hypothèses, mais qui, dans une foule de cas, facilite singulièrement les raisonnements et les calculs.

Il ne faut donc pas dédaigner de se familiariser à la fois avec les deux théories : l'une représente la certitude dans les principes fondamentaux, l'autre sert à exécuter les calculs; il suffit de *traduire* les notations pour passer de l'une à l'autre; l'usage simultané de ces deux théories rappelle l'emploi des logarithmes, qui simplifie les opérations arithmétiques sans contraindre pour cela à modifier le système de numération.

On évitera d'ailleurs toute confusion dans l'emploi simultané des deux théories, en adoptant des majuscules pour les calculs de la théorie de Fresnel, et des minuscules pour les calculs de l'autre; on conservera le nom de *vibrations* dans le premier cas, et on adoptera l'expression de *transversales*, employée par Mac Cullagh, dans le second. Les formules de transformation seront :

$$t_1 = T_1, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \Theta_1,$$

$$t_2 = T_2, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \Theta_2,$$

$$t_3 = -T_3, \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2} + \Theta_3.$$

38. Dans les calculs exposés plus haut, les seules inconnues qui s'y trouvent sont des amplitudes et des azimuts, c'est-à-dire des intensités et des déviations de plans de polarisation; de là deux groupes de vérifications à présenter à l'expérience et deux groupes de théorèmes à dégager de ces formules. Mais ce qui simplifie singulièrement l'étude de la réflexion cristalline, c'est qu'en réalité ces deux groupes de vérifications sont identiques; l'un se déduit immédiatement de l'autre, comme l'a remarqué depuis longtemps M. Neumann. En effet, le principe des forces vives peut être posé *à priori*, comme à peu près incontestable (dans le cas des milieux tout à fait transparents). Donc, en considérant d'abord les milieux isotropes, si l'on désigne par R^2 et R'^2 les forces vives du rayon réfléchi et du rayon réfracté, on a, en prenant pour unité l'intensité du rayon incident dans le cas du plan de polarisation parallèle au plan d'incidence,

$$1 = R^2 + R'^2,$$

et dans le cas où ce plan est perpendiculaire au plan d'incidence, R_1^2 et $R_1'^2$ étant les intensités de ces deux rayons.

$$1 = R_1^2 + R_1'^2.$$

En admettant comme vérifiées expérimentalement les lois de la rotation du plan de polarisation, on a

$$\frac{R_1}{R} = -\frac{\cos i + r}{\cos(i-r)}, \quad \frac{R'_1}{R_1} = \frac{1}{\cos(i-r)}.$$

Ces rapports expriment ceux des tangentes des angles du plan de polarisation avec le plan d'incidence.

De ces quatre équations il est facile de déduire R^2 et R'^2 , R_1^2 et $R_1'^2$, et l'on retrouve ainsi les valeurs de la théorie de Fresnel.

Donc la loi des intensités résulte du principe des forces vives et de la loi de la direction du plan de polarisation.

Cette démonstration s'étend immédiatement au cas uniaxial des milieux cristallisés; la seule vérification d'intensité consiste à mesurer les azimuts de polarisation uniaxiaux; mais ce n'est pas, à proprement parler, une mesure d'intensité, puisqu'on n'a qu'à constater l'extinction d'un rayon réfracté.

39. Ainsi donc, c'est sur l'étude des déviations du plan de polarisation que va désormais porter l'attention.

Mais avant d'entrer dans cette étude, il est utile de signaler et de combler une lacune dans les définitions relatives au rayon polarisé. Le rayon de lumière polarisée présente dans ses propriétés optiques deux plans de symétrie rectangulaires; or, l'un de ces plans, le *plan de polarisation*, porte seul un nom et, malheureusement, ce n'est pas celui qui donne aux énoncés leur plus grande simplicité. Pour abrégér le discours et rétablir la symétrie, j'ai essayé de donner un nom à l'autre; mais ce n'était pas chose facile, car le nom de *plan de polarisation* est déjà assez long et dissonant pour ne souffrir l'adjonction d'aucun suffixe; d'un autre côté, il est bon que la dénomination rappelle sa rectangularité et possède une consonnance analogue. L'aute d'avoir trouvé mieux, je me suis arrêté au nom de *plan de normalisation* qui, en fait, ne me paraît ni plus ni moins

barbare que son frère aîné. Le mot *plan de normalisation* remplacera donc, dans ce qui va suivre, la périphrase suivante : *plan passant par un rayon et normal à son plan de polarisation.*

THÉORÈMES RELATIFS AUX MILIEUX ISOTROPES.

Loi de Fresnel sur la rotation des plans de polarisation par réflexion et réfraction.

40. La transversalité des vibrations exige qu'à chaque changement de direction d'un rayon son plan de polarisation varie; un rayon polarisé qui se réfléchit et se réfracte donne naissance à des rayons polarisés réfléchi et réfracté dont l'orientation vibratoire a été calculée par les théories précédentes. Dans le calcul de Fresnel, on a vu, n° 7, que si l'on désigne par ω , α , β les angles des vibrations incidente réfléchie et réfractée avec le plan d'incidence, on a

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{a_1}{a} \operatorname{tang} \alpha = \frac{b_1}{b} \operatorname{tang} \beta.$$

Substituant les valeurs calculées de a , a_1 , b , b_1 ,

$$\operatorname{tang} \omega = - \frac{\cos(i+r)}{\cos(i-r)} \operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos(i-r)},$$

ou bien

$$\operatorname{tang} \omega \cos(i-r) = - \operatorname{tang} \alpha \cos(i+r) = \operatorname{tang} \beta,$$

ou encore, en appelant ω' , α' , β' les angles des plans de polarisation correspondant avec le plan d'incidence,

$$\frac{\operatorname{tang} \omega'}{\cos(i-r)} = - \frac{\operatorname{tang} \alpha'}{\cos(i+r)} = \frac{\operatorname{tang} \beta'}{1}.$$

C'est la loi de Fresnel, qu'on peut énoncer ainsi :

Les tangentes trigonométriques des angles que font les plans de polarisation des trois rayons avec le plan d'incidence sont respectivement proportionnelles aux cosinus que fait chacun des rayons avec le rayon réfracté.

41. *Remarque.* — Cette loi est plus générale qu'elle ne le paraît au premier abord; elle comprend aussi la loi de M. Stokes sur la *diffraction* de la lumière polarisée. La diffraction produit aussi une *brisure* dans le rayon incident, il n'est donc pas étonnant que le rayon diffracté suive la même loi. M. Stokes a démontré que, sous l'incidence normale, les *tangentes trigonométriques des angles que font le plan de vibration du rayon incident et du rayon diffracté avec le plan de diffraction sont respectivement proportionnelles aux cosinus que fait chacun des rayons avec le rayon diffracté.*

Cette expérience de la diffraction de lumière polarisée avait été proposée pour trancher l'ambiguïté relative à la direction de la vibration; mais il est facile de montrer que l'analyse sur laquelle cette loi se fonde est tout aussi discutable que les hypothèses qui ont présidé à l'étude de la réflexion et de la réfraction, et que la formule de Stokes,

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{tang } \omega}{\cos \theta},$$

doit être généralisée et devenir

$$\text{tang } \delta = \frac{\cos(\theta - \zeta)}{\cos \zeta} \text{tang } \omega,$$

dans laquelle ζ est un angle indéterminé *à priori* qui peut, dans deux cas limites, prendre les valeurs $\zeta = \theta$, ce qui redonne la formule du géomètre anglais, et $\zeta = 0$, dont l'interprétation correspond à l'autre hypothèse sur la direction de la vibration dans le rayon polarisé.

La diffraction ne paraît donc pas, jusqu'à présent, apporter sur les questions fondamentales de l'optique plus de certitude que les phénomènes de réflexion et de réfraction.

THÉORÈME DE MAC CULLAGH.

42. *Les transversales des rayons incident, réfléchi et réfracté sont dans un même plan qui contient aussi le rayon réfracté.*

On démontrerait aisément ce théorème à l'aide des équations précédemment exposées, mais je préfère déduire la démonstration de la loi de Fresnel en transformant son énoncé de manière à le rendre indépendant de toute théorie. Il est évident, en effet, que la transversale de Mac Cullagh est la normale du plan de normalisation du rayon correspondant; d'où l'on conclut cet autre énoncé: *Les plans de normalisation des rayons incident, réfléchi et réfracté se coupent suivant une même droite perpendiculaire au rayon réfracté.*

On démontre aisément l'identité géométrique de cet énoncé avec celui de la loi de Fresnel sur la rotation des plans de polarisation des rayons réfléchi et réfracté.

La représentation sphérique des droites et des plans (*fig. 9*) est d'un grand secours dans la démonstration de ce théorème.

Soient :

C le point d'incidence, centre de la sphère auxiliaire ;

Cz la normale à la surface réfléchissante PP ;

ICF le plan d'incidence ;

IC, FC, RC les rayons incident, réfléchi et réfracté ;

MIz = ω ; MFz = α ; MRz = β ;

CMQ la projection de la trace du plan normal au rayon réfracté RC.

Dans les triangles sphériques MIQ, MFQ, MRQ rectangles ayant leur angle droit Q et un côté MQ commun, on a

$$\begin{aligned} \text{tangMQ} &= \sin \text{IQ} \text{tang} \omega = \sin \text{FQ} \text{tang} \alpha = \sin \text{RQ} \text{tang} \beta \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + i - r \right) \text{tang} \omega = \sin \left[\frac{\pi}{2} - (i + r) \right] \text{tang} \alpha \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \text{tang} \beta \end{aligned}$$

ou bien

$$\cos(i - r) \text{tang} \omega = \cos(i + r) \text{tang} \alpha = \text{tang} \beta,$$

expression qui devient identique à la formule de Fresnel (si l'on a égard au sens dans lequel est compté l'angle α dans

la *fig. 9*), quand on y substitue $\omega' = \omega + \frac{\pi}{2}, \dots$ Donc cette expression définit bien la loi des plans de normalisation.

43. Le théorème précédent va fournir un premier exemple de l'utilité de la théorie modifiée de Mac Cullagh et Neumann; sans recourir aux formules, elle conduit immédiatement à la propriété que possèdent ces trois plans de se couper suivant une même droite. En effet, avec ces idées de continuité géométrique complète, le polygone des *transversales* doit être fermé; ce polygone se réduit, dans le cas des milieux isotropes, à un triangle qui est nécessairement plan; par suite, les trois plans dont ces transversales sont les normales passent par une même droite si ces trois plans passent par un même point: il est facile de voir que ces trois plans sont précisément les plans de normalisation.

Ces considérations, purement géométriques, ne sont pas suffisantes pour aller plus avant, car on n'achève la question qu'en faisant appel au théorème des forces vives, lequel n'est pas aussi facile à traduire géométriquement: mais elles ont l'avantage d'attirer l'attention sur cette droite commune aux plans de normalisation et de présenter son mouvement comme l'élément caractéristique de leur déplacement simultané. Cet élément est d'une importance capitale en réflexion cristalline.

44. Cette normale au plan du triangle de Mac Cullagh, qui représente la droite commune aux trois plans de normalisation, jouit donc de la propriété d'être à la fois perpendiculaire:

1° Au rayon réfracté; 2° 3° et 4° aux transversales incidente, réfléchie et réfractée.

De là on conclut qu'on peut cheminer du rayon incident au rayon réfléchi en passant par le rayon réfracté et les trois transversales, en marchant seulement par angles droits; il suffit, en effet, de suivre l'ordre suivant (*fig. 10*): 1° rayon incident; 2° transversale incidente; 3° normale

au triangle des transversales (laquelle peut être considérée comme une vibration réfractée auxiliaire, puisqu'elle est également perpendiculaire au rayon réfracté); 4° la transversale réfractée; 5° le rayon réfracté; 6° retour à la normale; 7° transversale réfléchie; 8° le rayon réfléchi.

On en déduirait encore, en admettant un instant que la transversale réfractée soit cette vibration auxiliaire qui lui est normale, l'énoncé suivant :

En passant du rayon incident aux rayons réfracté et réfléchi, les transversales tournent d'un angle droit à chaque changement de rayon.

Ou, si l'on veut, en supposant que le mouvement lumineux passe du milieu extérieur au milieu réfringent pour donner naissance au rayon réfracté, puis retourne au milieu extérieur en formant le rayon réfléchi :

La transversale tourne d'un angle droit à chaque changement de milieu.

Cette hypothèse, qui n'est justifiée, il est vrai, par aucune des théories précédentes, conduit évidemment à des conclusions exactes et peut être adoptée pour simplifier les calculs dans tous les cas où la réfraction a lieu *deux fois* dans le même milieu, par exemple dans le calcul de rotation des plans de polarisation des lames parallèles, des piles de glace et même des lames prismatiques.

Dans ce cas, ces deux énoncés sont encore exacts en substituant aux transversales les plans de polarisation ou de normalisation.

45. On a vu plus haut quelle liaison intime unit les intensités et les azimuts de polarisation : les propositions suivantes en offrent un nouvel exemple.

Si à partir du point d'incidence on porte en grandeur et en direction l'amplitude réfléchie ou réfractée, c'est-à-dire la racine carrée de l'intensité de ces rayons, l'intensité incidente étant constante, les lieux des extrémités de ces droites sont des ellipses situées dans leurs plans d'onde respectifs et dont les axes coïncident, l'un avec

la trace du plan d'incidence, l'autre avec une normale à ce plan.

Les formules déjà données,

$$A^2 = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 \alpha}{a^2}\right) + \left(\frac{\sin^2 \alpha}{a_1^2}\right)}, \quad B^2 = \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 \beta}{b^2}\right) + \left(\frac{\sin^2 \beta}{b_1^2}\right)},$$

démontrent immédiatement le théorème.

La vitesse angulaire de rotation du plan de polarisation des rayons réfléchi et réfracté est dans chaque position de ce plan inversement proportionnelle à l'intensité correspondante de ces rayons, l'intensité du rayon incident restant constante et la vitesse angulaire de rotation de son plan de polarisation étant uniforme.

On sait qu'on a pour définir les amplitudes réfléchie et réfractée des expressions de la forme

$$\begin{cases} a_1 \cos \omega = A \cos \alpha, \\ a \sin \omega = A \sin \alpha, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{a}{a_1} \operatorname{tang} \omega = \operatorname{tang} \alpha;$$

différentiant par rapport au temps t ,

$$\frac{a}{a_1} \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\cos^2 \omega} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

substituant à $\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \omega}$ sa valeur $\frac{a^2}{A^2}$, il vient la relation cherchée

$$\frac{dz}{dt} = \frac{aa_1}{A^2} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

On voit de plus que le paramètre aa_1 représente la moyenne géométrique des intensités extrêmes.

Sous la forme $A^2 \frac{dz}{dt} = a_1 a \cdot \frac{d\omega}{dt}$, l'expression montre que la vitesse aréolaire du rayon vecteur de l'ellipse est constante.

Ainsi le mouvement du plan de polarisation est d'autant plus lent que la lumière correspondante du rayon est plus in-

tense, et inversement; par suite, que les maxima et minima de la vitesse angulaire du plan correspondent aux minima et maxima de l'intensité des rayons (1).

THÉORÈMES RELATIFS AUX MILIEUX CRISTALLISÉS.

46. Les théorèmes précédents peuvent s'étendre aux milieux cristallisés; mais la généralisation ne s'aperçoit pas immédiatement, elle exige quelques calculs préliminaires.

Dans toutes les propositions relatives aux mouvements des plans de polarisation, les rayons réfractés n'entreront plus, puisque leur polarisation est fixe, mais leur intensité y figurera explicitement ou implicitement.

LEMME. — *Les plans de polarisation du rayon incident et réfléchi ou leurs plans de normalisation forment deux faisceaux homographiques.*

Il suffit de prouver, en effet, que leurs angles avec le plan d'incidence sont liés par une relation de la forme

$$P \operatorname{tang} \omega . \operatorname{tang} \alpha + Q \operatorname{tang} \omega + R \operatorname{tang} \alpha + S = 0.$$

On pourrait aisément déduire cette proposition de la forme même des équations fondamentales; mais comme le calcul direct donnera des résultats utiles, on va développer ce calcul.

47. Le système d'équations fondamentales de Mac Culagh donne par un calcul très-simple :

$$\tau_1 \sin \theta_1 = \frac{\tau_2}{\sin 2i} [\sin(i+r) \cos(i-r) \sin \theta_2 + \sin^2 r \operatorname{tang} \varepsilon],$$

$$\tau_3 \sin \theta_3 = \frac{\tau_2}{\sin 2i} [\sin(i-r) \cos(i+r) \sin \theta_2 - \sin^2 r \operatorname{tang} \varepsilon],$$

$$\tau_1 \cos \theta_1 = \frac{\tau_2}{\sin 2i} \sin(i+r) \cos \theta_2,$$

$$\tau_3 \cos \theta_3 = \frac{\tau_2}{\sin 2i} \sin(i-r) \cos \theta_2,$$

(1) Je suis porté à croire que cette propriété générale de la lumière pourrait être démontrée indépendamment de toute hypothèse particulière sur la forme du mouvement dans la lumière polarisée.

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \theta_1 &= \cos(i - r) \operatorname{tang} \theta_2 + \frac{\sin^2 r \operatorname{tang} \varepsilon}{\sin(i + r)}, \\ \operatorname{tang} \theta_3 &= -\cos(i + r) \operatorname{tang} \theta_2 + \frac{\sin^2 r \operatorname{tang} \varepsilon}{\sin(i + r)}. \end{aligned}$$

Ces formules déterminent la position des vibrations incidente et réfléchie uniradiales; le second système correspondant à l'autre rayon réfracté s'écrirait immédiatement en accentuant toutes les lettres à l'exception de i .

Si l'on désigne maintenant par P_1 et P_3 les amplitudes totales des vibrations incidente et réfractée, on écrira que P_1 est la résultante de τ_1 et τ'_1 , et P_3 de τ_3 et τ'_3 :

$$\frac{P_1}{\sin \tau_1 \tau'_1} = \frac{\tau_1}{\sin \tau'_1 P_1} = \frac{\tau'_1}{\sin P_1 \tau_1},$$

et l'équation analogue pour P_3 , ou, en désignant par Ω et A les angles de P_1 et P_3 avec le plan d'incidence,

$$\frac{P_1}{\sin(\theta'_1 - \theta_1)} = \frac{\tau_1}{\sin(\theta'_1 - \Omega)} = \frac{\tau'_1}{\sin(\Omega - \theta_1)},$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_1 &= P_1 \frac{\sin(\theta'_1 - \Omega)}{\sin(\theta'_1 - \theta_1)}, \\ \tau'_1 &= P_1 \frac{\sin(\Omega - \theta_1)}{\sin(\theta'_1 - \theta_1)}, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_3 &= P_3 \frac{\sin(\theta'_3 - A)}{\sin(\theta'_3 - \theta_3)}, \\ \tau'_3 &= P_3 \frac{\sin(A - \theta_3)}{\sin(\theta'_3 - \theta_3)}. \end{aligned} \right.$$

Divisant membre à membre pour éliminer P_1 et P_3 , et substituant les valeurs déjà calculées de $\frac{\tau_1 \cos \theta_1}{\tau'_1 \cos \theta'_1}$ et $\frac{\tau_3 \cos \theta_3}{\tau'_3 \cos \theta'_3}$, il vient

$$\frac{\sin(i + r') \operatorname{tang} \theta'_1 - \operatorname{tang} \Omega}{\sin(i + r) \operatorname{tang} \Omega - \operatorname{tang} \theta_1} = \frac{\sin(i - r') \operatorname{tang} \theta'_3 - \operatorname{tang} A}{\sin(i - r) \operatorname{tang} A - \operatorname{tang} \theta_3},$$

expression qui se réduit aisément à la condition d'homographie annoncée.

48. Cette équation, qui donne la généralisation de la loi de Fresnel, définit complètement la loi de rotation des

plans de polarisation incident et réfléchi, et permet de calculer toutes les particularités relatives à ces phénomènes.

La loi d'homographie permet de se représenter aisément les positions simultanées de ces plans, car on en déduit :

La droite commune aux plans de polarisation ou aux plans de normalisation des rayons incident et réfléchi, dans leurs positions correspondantes, décrit un cône du second degré.

L'équation précédente détermine complètement ces deux cônes; on voit bien immédiatement que les rayons incident et réfléchi eux-mêmes, axes des faisceaux, sont sur les deux surfaces; mais les trois autres conditions déterminantes auraient été bien difficiles à dégager des formules sans le secours de la théorie de Mac Cullagh, comme on va le voir.

Il suffit d'ailleurs de déterminer l'un des deux cônes; l'autre s'en déduira aisément, puisque les *plans vecteurs* de l'un sont respectivement normaux aux *plans vecteurs* de l'autre. Or l'énoncé le plus simple s'applique, ainsi qu'on l'a dit plus haut, aux cônes des plans de normalisation : c'est celui qu'on va étudier.

49. *Dans les milieux cristallisés quelconques, la droite commune aux plans de normalisation des rayons incident et réfléchi décrit un cône de second degré.*

Ce cône passe par les deux rayons et par les positions de la normale au polygone des transversales de Mac Cullagh dans les trois cas où ce polygone devient plan.

Raisonnant dans les idées de Mac Cullagh, on voit que, comme un rayon incident donne naissance à deux rayons réfractés et à un rayon réfléchi, le polygone des *transversales* est un quadrilatère, lequel, en général, sera gauche. Mais, suivant les propriétés bien connues de la surface de l'onde, les transversales réfractées ne sont point mobiles comme celle des milieux isotropes quand varie la polarisation incidente; leur direction reste fixe, mais leur ampli-

tude est variable, de sorte que le quadrilatère possède deux côtés fixes en direction.

Dès lors il est facile de comprendre qu'il y aura trois cas où le polygone sera plan :

1^o-2^o Les cas où l'une des transversales réfractées s'éteindra, car alors le polygone se réduit à un triangle; 3^o les cas où la transversale incidente sera située dans le plan des transversales réfractées.

Dans ce quadrilatère les deux côtés variables en direction sont les transversales des rayons incident et réfléchi; les plans dont ces côtés sont les normales sont les plans de normalisation de ce rayon; la normale au plan des deux transversales est la droite d'intersection qui décrit le cône précité. On voit que cette normale, qui, d'après le calcul précédent, décrit un cône du second degré, peut coïncider successivement avec les trois positions de la normale au polygone des transversales où ce polygone devient plan.

Cette démonstration est une preuve de l'utilité que conservent les idées de Mac Cullagh et Neumann dans les questions de la réflexion cristalline; il est à peine utile de faire remarquer encore une fois que cette simplicité géométrique ne présume rien sur la valeur de leurs principes physiques, et que cette théorie ne sert ici que comme une méthode de transformation analogue à celles dont on se sert dans la géométrie moderne.

50. La connaissance des cinq droites permettrait de retrouver, par un simple calcul de géométrie analytique, l'équation d'homographie déduite des équations fondamentales. Trois de ces droites sont connues, à savoir: les rayons incident et réfléchi, et la normale aux transversales réfractées; les deux autres, moins simples, ont été déterminées par Mac Cullagh: ce sont les normales aux deux *plans uniradiaux*.

Il est inutile d'insister sur ce calcul, mais le *plan uniradial* mérite d'arrêter l'attention.

On a vu que dans le cas des milieux isotropes le plan des transversales contenait aussi le rayon réfracté; on a vu que les cas particuliers uniradiaux des milieux biréfringents avaient beaucoup d'analogie avec le cas général des milieux isotropes; ils ne s'en distinguent, dans les équations fondamentales, que par un seul coefficient dans l'équation des forces vives, à savoir, l'ordonnée du point de contact avec la surface d'onde de l'onde plane réfractée, ordonnée qui diffère de l'ordonnée du pied de la normale à l'onde comme dans les milieux isotropes. Il en résulte que le plan des transversales, dans les cas uniradiaux, ne contient plus la normale au plan d'onde réfractée qui formait le rayon réfracté dans le premier cas; il ne contient pas non plus, comme on va le voir, le rayon, le rayon réfracté proprement dit, mais il est normal au plan de ces directions comme contenant la transversale réfractée. Mac Cullagh a démontré que l'angle φ du plan uniradial avec la normale à l'onde plane du rayon réfracté qui subsiste est donné par la formule très-simple

$$\text{tang } \varphi = \text{tang } \varepsilon \cdot \frac{\sin^2 r}{\sin^2 i - \sin^2 r},$$

angle en général très-petit comme ε , mais compté en sens inverse de cet angle.

51. On démontre aisément cette formule en remarquant que les *trois plans dont les trois transversales uniradiales sont les normales se coupent suivant une même droite qui n'est autre que la normale au plan uniradial*. Ces trois plans sont les plans de normalisation des trois rayons.

Il s'agit de déterminer l'angle que forme le plan uniradial avec la normale à l'onde réfractée ou bien l'angle des deux normales à ces plans. Or cette normale est à la fois l'intersection du plan mené par la normale à l'onde réfractée et son rayon avec les plans de normalisation des rayons incident et réfléchi. Les angles que font ces plans avec le plan d'incidence sont justement les angles

$\frac{\pi}{2} + \theta_1, \frac{\pi}{2} + \theta_2, \frac{\pi}{2} + \theta_3$ déjà calculés. La formule des quatre éléments de trigonométrie sphérique appliquée aux plans de normalisation incident et réfracté donnera (*fig. 11*)

$$\begin{aligned} \cot a \sin b &= \cot A \sin C + \cos b \cos C \\ \cot a \sin(i-r) &= \tan \theta_1 \cos \theta_2 - \cos i - r \sin \theta_2 \\ &= \cos(i-r) \sin \theta_2 + \frac{\sin^2 r \tan \varepsilon}{\sin(i+r)} - \cos(i-r) \sin \theta_2, \end{aligned}$$

d'où

$$\cot a = \tan \varepsilon \cdot \left(\frac{\sin^2 r}{\sin^2 i - \sin^2 r} \right).$$

Une valeur toute semblable correspond au plan unira-dial de l'autre rayon, en sorte que le cône se trouve ana-lytiquement défini.

Cas où l'indice du milieu extérieur varie de manière toutefois que les rayons réfractés restent les mêmes.

§2. Les mêmes rayons réfractés peuvent correspondre à une infinité de rayons incidents et réfléchis, tous compris dans le même plan d'incidence, si l'on change l'indice du milieu extérieur au cristal de telle sorte que le rapport $\frac{\sin i}{n}$ reste constant. Si pour chaque incidence on construit le cône précité, on arrive à cette proposition d'une simpli-cité inattendue :

Tous ces cônes passent par quatre droites fixes.

On aperçoit immédiatement une de ces droites : c'est la normale au plan des transversales réfractées, lequel reste fixe puisque les rayons réfractés restent les mêmes.

Si le cristal est à un seul axe optique, le plan *uniradial ordinaire* est indépendant de l'incidence puisque l'angle ε est nul ($\varphi = 0$) ; sa normale reste également fixe : dans ce cas particulier c'est une seconde droite fixe du théorème précédent.

Pour rechercher les variations de forme du cône dans le

cas général, il suffirait de calculer son équation d'après la méthode indiquée précédemment et de chercher son enveloppe en prenant l'incidence i comme paramètre variable : on verrait que cette enveloppe se réduit à quatre droites. Ainsi traité, le problème conduit à des calculs assez laborieux. Mais on peut, en s'appuyant seulement sur la forme des expressions de $\text{tang } \varphi$ et $\text{tang } \varphi'$, son analogue, démontrer la proposition énoncée.

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \text{tang } \varphi &= \text{tang } \varepsilon \cdot \frac{(\sin^2 i + \cos^2 i) \sin^2 r}{\sin^2 i - \sin^2 r (\sin^2 i + \cos^2 i)}, \\ &= \frac{\text{tang}^2 r (1 + \text{tang}^2 i)}{\text{tang}^2 i - \text{tang}^2 r} \text{tang } \varepsilon, \end{aligned}$$

expression qui se réduit aisément à la forme

$$\text{tang } \varphi \cdot \text{tang}^2 i + M \text{tang } \varphi + N \text{tang}^2 i + P = 0.$$

On reconnaît que $N = P$, mais ce qui va suivre s'applique même au cas général où les trois coefficients seraient distincts.

53. Qu'on imagine un cône du second degré assujéti à passer par quatre droites fixes et coupant un plan fixe mené par l'une de ces droites ; à *chaque* position du cône, à qui il reste une condition de variabilité, ne correspondra qu'*une* position de la droite d'intersection avec le plan, et réciproquement. Donc, si l'on désigne par ψ l'angle de cette droite avec la génératrice fixe contenue dans ce même plan, on aura entre $\text{tang } \psi$ et le paramètre λ , caractéristique de la position du cône, une relation d'homographie, c'est-à-dire une relation de forme

$$A \text{tang } \psi \cdot \lambda + B \text{tang } \psi + C \lambda + D = 0.$$

Or, comme paramètre caractéristique du cône, on peut prendre un élément géométrique quelconque lié par la condition de n'avoir qu'*une* valeur pour *chaque* position du cône, et réciproquement. On va choisir un élément qu'on puisse identifier avec l'*incidence*.

On sait que quand une conique passe par quatre points, le diamètre conjugué d'une direction quelconque passe par un point fixe. Si l'on mène par ce point fixe une parallèle à la direction donnée, la conique variable coupera cette corde en deux points symétriquement placés par rapport à ce point; on pourra prendre pour paramètre caractéristique le carré de la demi-longueur de la corde.

Cette propriété n'a pas besoin de démonstration nouvelle pour s'appliquer au cône dans l'espace; il suffit de prendre un point quelconque pour sommet et la conique précédente pour base; ainsi le paramètre caractéristique sera le même.

54. Maintenant l'identification est facile.

Le sommet du cône sera pris sur la perpendiculaire élevée sur le plan de la conique au milieu de la corde considérée (*fig. 12*); la demi-longueur de corde sera proportionnelle à $\pm \text{tang } i$, en appelant $\pm i$ l'angle que font les génératrices GG' menées aux extrémités de la corde avec la ligne qui joint le sommet à son milieu. On aura donc pour la valeur de l'angle ψ qui fait la trace du cône sur le plan précité

$$A \text{ tang } \psi \text{ tang}^2 i + B \text{ tang } \psi + C \text{ tang}^2 i + D = 0.$$

Ce plan passait par une génératrice fixe du cône; qu'on mène un autre plan par la même génératrice, et l'on aura pour l'intersection avec ce second plan

$$A' \text{ tang } \psi' \text{ tang}^2 i + B' \text{ tang } \psi' + C' \text{ tang}^2 i + D' = 0.$$

Ces relations ne changeraient pas de forme si, au lieu de compter l'origine des angles ψ, ψ' à partir de la génératrice fixe, on la comptait par rapport à toute autre droite menée dans leurs plans respectifs.

Si on identifie maintenant la normale au point d'incidence, les rayons incident et réfléchi avec les trois droites qui font entre elles les angles $\pm i$, la génératrice fixe par laquelle on a mené deux plans avec la normale au plan des

transversales, enfin les deux plans eux-mêmes, avec les plans que décrivent les normales aux deux cas uniradiaux, on conclura, de l'identité des relations homographiques, que le cône de normalisation doit passer par trois autres droites fixes.

Les six coefficients des deux relations d'homographie permettent de calculer les six coefficients nécessaires à la détermination de ces trois droites.

55. Ce théorème va conduire à des conséquences très-importantes en s'appuyant sur la remarque qui suit :

Dans le cas de polarisation complète du rayon réfléchi, le cône de normalisation se réduit à un système de deux plans passant respectivement, l'un par le rayon incident, l'autre par le rayon réfléchi.

Cette proposition est évidente, car c'est le seul cas possible où le plan de polarisation du rayon réfléchi conserve une direction fixe quand l'azimut de polarisation incidente varie d'une manière quelconque ; c'est, en effet, là la condition nécessaire pour que la lumière naturelle, qu'on peut considérer comme polarisée dans tous les azimuts, se réfléchisse polarisée dans un plan unique.

Ceci admis, on déduit des propositions précédentes :

Dans la série des incidences qui correspondent au même système de rayons réfractés, il y a, en général, trois valeurs donnant lieu aux phénomènes de polarisation complète.

En effet, quand une conique (fig. 13), passant par quatre points, se déforme d'une manière continue, on sait qu'elle se réduit trois fois à un système de deux droites ; ces trois systèmes distincts constituent les six droites qui joignent deux à deux les quatre points fixes.

La généralisation pour le cône est immédiate.

56. Un exemple fera ressortir l'importance de ce théorème.

Étant donnée une surface cristallisée dans le cas le plus général, un azimut de réflexion quelconque, si l'on choisit une incidence qui soit, dans l'air, un peu plus grande que l'incidence de polarisation complète et qu'on augmente progressivement l'indice de réfraction du milieu extérieur en prenant d'autres gaz, des vapeurs, puis des liquides de plus en plus réfringents, on rencontre successivement trois incidences de polarisation complète en ayant soin de faire varier l'incidence en même temps que l'indice du milieu suivant la loi $\frac{\sin i}{n} = \text{const.}$, de manière à conserver les mêmes rayons réfractés.

57. La démonstration précédente permet d'arriver assez simplement à l'existence des quatre génératrices fixes; mais, fondée sur la forme seulement des relations, elle ne les définit pas par une construction géométrique. Les théorèmes suivants conduisent à ce résultat; ils font, en outre, connaître d'autres propriétés dignes de remarque relatives à l'axe uniradial.

On a vu que dans chacun des systèmes uniradiaux l'axe uniradial ou normal aux plans des trois transversales était variable avec l'incidence, d'après la formule de Mac Cullagh

$$\cot a = \text{tang } \varepsilon \frac{\sin^2 r}{\sin^2 i - \sin^2 r}.$$

Une construction géométrique assez simple permet de l'obtenir: pour cela, il suffit de mener par le rayon réfléchi, ou le rayon incident, un plan tangent à un certain cône auxiliaire qu'on va définir. Ce plan coupe le plan où se meut cet axe (plan mené par la normale d'onde et le rayon) suivant la position correspondant au rayon incident ou réfléchi.

58. *Les plans menés par un axe uniradial et les rayons incident et réfléchi enveloppent un même cône du second degré quand varient à la fois l'incidence et le milieu exté-*

rieur de manière à conserver les mêmes rayons réfractés.

La démonstration en est très-simple : il suffit de considérer la trace de ces plans et de ces droites sur un plan parallèle au plan d'onde réfractée ; on trouve pour enveloppe une conique qui définit les conditions suivantes :

Le cône est tangent au plan d'incidence suivant une droite symétrique de la normale d'onde par rapport à la normale à la surface réfléchissante.

Il possède deux génératrices dans le plan mené par la normale d'onde et le rayon : leurs plans tangents correspondent à $i = 0$ et $i = 90$ degrés.

On obtient un cône tout semblable pour le second système uniradial. Ces cônes, une fois tracés, permettent de déterminer les deux axes uniradiaux correspondants à une incidence donnée à l'aide de plans tangents menés par le rayon incident aux deux cônes auxiliaires : le cône de normalisation peut donc être construit géométriquement.

59. Il est facile, maintenant, d'apercevoir les cas où le cône de normalisation se réduira à des systèmes de plans : ce sera quand le plan tangent à l'un des cônes auxiliaires sera aussi tangent à l'autre ; car alors on aurait trois génératrices d'un cône du second degré dans un même plan, ce qui est absurde, à moins que le cône ne se réduise à deux plans : l'un le plan tangent commun, l'autre qui passe par les deux autres génératrices. Or, on peut mener quatre plans tangents communs aux deux cônes ; ce nombre se réduit à trois, car le plan d'incidence forme le quatrième. Donc, *les trois systèmes de deux plans auxquels se réduit le cône de normalisation sont déterminés par les trois plans tangents communs aux deux cônes auxiliaires, distincts du plan d'incidence.*

60. Dans le cas particulier des cristaux uniaxes, on n'a plus qu'un seul axe uniradial mobile, celui qui correspond à l'extinction du rayon ordinaire ; l'autre est fixe et s'obtient aisément ; il est perpendiculaire à la fois à la transversale

et au rayon ordinaire, lequel se confond ici avec sa normale d'onde; autrement dit, le plan uniradial passe par le rayon réfracté comme dans les milieux isotropes.

Que devient alors le cône auxiliaire correspondant? Il est infiniment aplati, c'est-à-dire il se réduit à deux génératrices: l'une dans le plan d'incidence, symétrique de la normale d'onde ordinaire; l'autre, qui est l'axe uniradial fixe, en sorte que les plans tangents qu'on lui mène passent tous par l'axe uniradial, car l'autre génératrice ne donne pas autre chose que le plan d'incidence.

Ainsi, dans le cas des milieux à un axe optique, l'un des deux cônes auxiliaires se réduit à ses deux *généralrices-sommets*.

61. Ces propriétés des cônes auxiliaires permettent d'interpréter géométriquement une propriété très-importante de la surface de l'onde, découverte par Mac Cullagh. C'est la relation qui existe entre les six paramètres θ , r , ε , θ' , r' , ε' des deux rayons réfractés; l'éminent géomètre l'a obtenue par une méthode très-ingénieuse que nous allons rapporter, car elle complète en même temps les considérations développées précédemment.

« Il paraît très-évident (1) que, si une transversale incidente est décomposée sur deux directions quelconques, les transversales réfractée et réfléchie déduites directement de cette transversale incidente seront les résultantes de celles qui se déduiraient des composantes traitées chacune séparément: supposer qu'il en pût être autrement, ce serait faire violence à nos idées sur la physique. Néanmoins il est nécessaire de prouver que ce principe n'est pas contraire à la loi des forces vives, car, bien que la force vive puisse être conservée pour chaque couple de composantes, comme cela a lieu, par exemple, quand elles sont uniradiales, nous ne pouvons cependant en conclure qu'elle sera néces-

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 210.

sairement conservée par leurs résultantes. Là se trouve une preuve de la vérité de notre théorie : car nous sommes parvenus à démontrer que la loi des forces vives n'est pas enfreinte par l'adoption du principe en question. Quelles que puissent être les deux directions sur lesquelles la transversale incidente est décomposée, comme les transversales réfléchies et réfractées qui appartiennent à chaque composante peuvent être obtenues à l'aide d'une décomposition sur les directions uniradiales, il suffit de considérer le cas de cette dernière décomposition.

» La transversale incidente étant désignée par T_1 , soit T_3 la transversale réfléchie déterminée par la règle connue, soient τ_1, τ'_1 les composantes uniradiales de la première, τ_3, τ'_3 celles de la seconde. Alors on aura

$$T_1^2 = \tau_1^2 + \tau'^2_1 + 2 \tau_1 \tau'_1 \cos(\theta_1 - \theta'_1),$$

$$T_3^2 = \tau_3^2 + \tau'^2_3 + 2 \tau_3 \tau'_3 \cos(\theta_3 - \theta'_3),$$

où $\theta_1, \theta'_1, \theta_3, \theta'_3$ ont les mêmes significations que précédemment.

» La force vive d'un rayon réfracté est $m_1(\tau_1^2 - \tau_3^2)$ et celle de l'autre $m_1(\tau'^2_1 - \tau'^2_3)$; la force vive des deux rayons réfractés est donc

$$m_1(\tau_1^2 + \tau'^2_1 - \tau_3^2 - \tau'^2_3),$$

quantité qui doit être égale à $m_1(T_1^2 - T_3^2)$, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\tau_1 \tau'_1 \cos(\theta_1 - \theta'_1) = \tau_3 \tau'_3 \cos(\theta_3 - \theta'_3),$$

ou, à l'aide des expressions données pour τ_1, τ_3 , et de leurs semblables pour τ'_1, τ'_3 ,

$$\begin{aligned} \sin(i+r) \sin(i+r') (1 + \operatorname{tang} \theta_1 \operatorname{tang} \theta'_1) \\ = \sin(i-r) \sin(i-r') (1 + \operatorname{tang} \theta_3 \operatorname{tang} \theta'_3), \end{aligned}$$

et enfin, par substitutions des valeurs de $\theta_1, \theta'_1, \theta_3, \theta'_3$ en fonctions de θ_2, θ'_2 ,

$$\sin(r+r') [\cos(r-r') + \cot \theta_2 \cot \theta'_2] + h + h' = 0,$$

S.

en posant

$$h = \frac{\sin^2 r \operatorname{tang} \varepsilon}{\sin \theta_2}, \quad h' = \frac{\sin^2 r' \operatorname{tang} \varepsilon'}{\sin \theta'_2};$$

on peut observer que l'angle d'incidence a disparu de cette équation.

» Donc, si les lois que nous avons obtenues sont réellement celles de la réflexion cristalline, cette dernière équation doit être satisfaite à l'aide des relations déduites des lois de la propagation; ou mieux, cette équation doit exprimer une propriété de la surface des ondes d'un cristal, quoiqu'il puisse paraître étrange que cette propriété puisse dériver des lois de la réflexion, lois qui paraîtraient au premier abord n'avoir aucun rapport avec la forme de la surface des ondes. Or, nous avons trouvé que cette équation exprime une propriété rigoureusement vraie de la surface des ondes d'un cristal à deux axes découverte par Fresnel; fait très-curieux, qui prouve, non-seulement que les lois de la réflexion et celles de la réfraction sont parfaitement adaptées l'une à l'autre, mais aussi que les deux espèces de lois ont leur source commune dans d'autres lois plus intimes et non encore découvertes. »

62. Il n'est pas besoin d'insister longuement pour combattre l'assertion de Mac Cullagh : « Là se trouve une preuve de la vérité de notre théorie; » puisque les principes de Fresnel conduisent aux mêmes équations fondamentales, il suffirait de mettre des lettres majuscules à la place des minuscules, en ayant égard aux formules de transformation indiquées ci-dessus, pour déduire la même relation des principes de Fresnel qui à son tour serait en droit de dire : « Là se trouve une preuve de la vérité de notre théorie. » En fait, si ce calcul ne prouve pas la vérité des idées de Mac Cullagh, il montre clairement la sagacité du géomètre anglais.

Cette relation entre les six constantes des rayons réfractés

se traduit par une construction géométrique assez simple en faisant usage des cônes auxiliaires.

Cas des milieux uniaxes.

63. On sait que la surface d'onde dans ce cas est de révolution : ses deux nappes sont une sphère et un ellipsoïde tangents sur l'axe de révolution, en sorte que la méridienne, en prenant l'axe de révolution pour axe des x , se compose d'un cercle

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

et d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit MQ une tangente quelconque (*fig. 14*) qui sera la trace d'un plan tangent quelconque à la nappe ellipsoïde; soit Q le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur cette tangente et M le point de contact : $QOX = \alpha$, $MCX = \beta$, $QOM = \varepsilon$.

On a évidemment

$$\text{tang } \beta = \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } \alpha,$$

d'où

$$\text{tang } (\alpha - \beta) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - b^2)}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha};$$

mais

$$\overline{OQ}^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha,$$

et OQ est la longueur de la normale d'onde extraordinaire. c'est-à-dire l'inverse de l'indice de réfraction de cette onde

$$OQ = \frac{\sin r}{\sin i}.$$

D'un autre côté, a est l'inverse de l'indice de réfraction ordinaire

$$a = \frac{\sin r'}{\sin i};$$

substituant, il vient

$$\text{tang } (\alpha - \beta) = \text{tang } \varepsilon = \cot \alpha \cdot \frac{\sin^2 r' - \sin^2 r}{\sin^2 r},$$

d'où

$$\cot \alpha = \text{tang } \varepsilon \cdot \frac{\sin^2 r'}{\sin(r' - r) \sin(r' + r)}.$$

64. D'un autre côté, on peut calculer α , c'est-à-dire l'angle que forme la normale de l'onde extraordinaire avec l'axe optique, en remarquant que les plans θ_2 , θ'_2 définis plus haut ont une relation très-simple avec l'axe.

Le plan θ'_2 passe par la normale à l'onde ordinaire et contient la transversale ordinaire; par suite, il passe par l'axe optique, puisque dans la théorie de Mac Cullagh la vibration ordinaire est dans la section principale. Le plan $\frac{\pi}{2} + \theta_2$ passe par la normale à l'onde extraordinaire et contient également l'axe optique : l'intersection donne l'axe optique.

Appliquant la formule connue

$$\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos c,$$

on calculera α ,

$$\cot \alpha \sin(r' - r) = \cot \theta'_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) - \cos(r' - r) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right),$$

$$\cot \alpha \sin(r' - r) = \cot \theta'_2 \cos \theta_2 + \cos(r' - r) \sin \theta_2;$$

substituant la valeur de α déduite de la surface d'onde,

$$-\frac{\text{tang } \varepsilon \cdot \sin^2 r}{\sin \theta_2 \sin(r' + r)} = \cot \theta'_2 \cot \theta_2 + \cos(r - r'),$$

ou bien

$$[\cot \theta'_2 \cot \theta_2 + \cos(r - r')] \sin(r + r') + h = 0,$$

formule qui coïncide avec la relation de Mac Cullagh.

La valeur de

$$\cot \alpha = \text{tang } \varepsilon \cdot \frac{\sin^2 r}{\sin^2 r' - \sin^2 r},$$

rapprochée de (n° 57)

$$\cot a = \operatorname{tang} \varepsilon \frac{\sin^2 r}{\sin^2 i - \sin^2 r},$$

on voit que si $i' = r'$, alors $\varphi = \alpha$, d'où l'on conclut :

L'axe uniradial extraordinaire coïncide avec l'axe optique quand le milieu extérieur possède un indice égal à l'indice ordinaire.

Si l'on se reporte à la construction de l'axe uniradial à l'aide du cône auxiliaire, on en conclura la condition que doit remplir ce cône par rapport au rayon ordinaire :

Le plan uniradial ordinaire est assujéti à être tangent au cône auxiliaire : de plus, son intersection avec le plan normal au plan uniradial extraordinaire donne l'axe optique.

65. Le cas général se traite exactement de la même manière, seulement les calculs sont assez laborieux : on retrouve de même la relation de Mac Cullagh et une interprétation géométrique analogue.

66. J'avais eu d'abord l'intention de traiter complètement la détermination des constantes optiques d'après une méthode entièrement géométrique et même graphique : le cadre de ce Mémoire, déjà trop étendu, m'oblige à supprimer ce chapitre. Les considérations précédentes montrent que le problème est complètement résolu ; je compte développer ces solutions dans un travail ultérieur.

67. On a démontré plus haut que la relation qui liait les azimuts de polarisation des rayons incident et réfléchi est de la forme

$$A \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} \alpha + B \operatorname{tang} \omega + C \operatorname{tang} \alpha + D = 0;$$

on peut la mettre sous une forme très-utile.

En effet, posons

$$\omega = \omega' + \zeta \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha' + \xi,$$

il vient, en supprimant le symbole tang pour abrégé

l'écriture,

$$A \frac{\omega' + \zeta}{1 - \omega' \zeta} + \frac{\alpha' + \xi}{1 - \alpha' \xi} + B \frac{\omega' + \zeta}{1 - \zeta \omega'} + C \frac{\alpha' + \xi}{1 - \alpha' \xi} + D = 0.$$

Développant et ordonnant, on aura

$$\begin{aligned} \omega' \alpha' (A - B\xi - C\zeta + D\xi\zeta) + \omega' (A\xi + B - C\xi\zeta - D\xi) \\ + \alpha' (A\zeta - B\xi\zeta + C - D\xi) + A\xi\zeta + B\zeta + C\xi + D = 0. \end{aligned}$$

Ces coefficients sont fort remarquables. En effet, désignant par $F(\omega, \alpha)$ la fonction homographique proposée, on écrira l'équation transformée

$$\begin{aligned} \omega' \alpha' F\left(\zeta + \frac{\pi}{2}, \xi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega' F\left(\zeta + \frac{\pi}{2}, \xi\right) \\ + \alpha' F\left(\zeta, \xi + \frac{\pi}{2}\right) + F(\zeta, \xi) = 0. \end{aligned}$$

On peut disposer des valeurs des deux constantes pour simplifier cette relation; par exemple, pour annuler les coefficients du premier et du dernier terme, il suffira de poser

$$\begin{aligned} F\left(\zeta + \frac{\pi}{2}, \xi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ F(\zeta, \xi) = 0, \end{aligned}$$

deux relations qui déterminent ξ et ζ : il reste alors

$$\frac{\text{tang } \alpha'}{\text{tang } \omega'} = - \frac{F\left(\zeta + \frac{\pi}{2}, \xi\right)}{F\left(\zeta, \xi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

ou bien

$$\frac{\text{tang } (\alpha - \xi)}{\text{tang } (\omega - \zeta)} = K.$$

68. L'interprétation des équations qui déterminent ξ et ζ est très-simple: si l'on considère en effet les cônes de normalisation et de polarisation, leurs équations sont précisément

$$F(\omega, \alpha) = 0, \quad F\left(\omega + \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Donc les valeurs cherchées de ξ et ζ ne sont autres que les coordonnées des génératrices d'intersection de ces deux cônes.

Ces deux cônes en ont deux autres : ce sont les rayons incident et réfléchi, axes de ces faisceaux homographiques.

Cette intersection est toujours réelle : additionnant puis retranchant les équations de condition, il vient

$$(A + D)(1 - \xi\zeta) - (B - C)(\xi - \zeta) = 0,$$

$$(A - D)(1 - \xi\zeta) - (B + C)(\xi + \zeta) = 0,$$

d'où

$$\text{tang}(\xi - \zeta) = \frac{A + D}{B - C}, \quad \text{tang}(\xi + \zeta) = \frac{A - D}{B + C},$$

valeurs toujours réelles.

Les coordonnées azimutales ξ , ζ ont encore une interprétation utile : si l'on considère deux valeurs rectangulaires ω , $\omega + \frac{\pi}{2}$ de l'azimut de polarisation incidente, les deux valeurs α , α_1 de l'azimut de polarisation réfléchie ne seront pas en général rectangulaires entre elles : mais si l'on choisit $\omega = \zeta$ et $\omega = \zeta + \frac{\pi}{2}$, on obtiendra alors les deux azimuts rectangulaires $\alpha = \xi$, $\alpha_1 = \xi + \frac{\pi}{2}$.

Aussi désignera-t-on désormais ces azimuts sous le nom d'*azimuts principaux*; leur propriété fondamentale s'énoncera ainsi :

Il existe toujours deux azimuts rectangulaires de polarisation du rayon réfléchi sur une surface cristalline quelconque qui correspondent à deux azimuts rectangulaires de polarisation du rayon incident : ce sont les azimuts principaux. Leur direction est donnée par les intersections du cône de polarisation et du cône de normalisation.

Ces azimuts, dans le cas usuel des milieux peu biréfringents observés dans l'air ou dans les gaz, se rapprochent

beaucoup, du plan d'incidence et du plan perpendiculaire. Rigoureusement parlant, les azimuts principaux jouent dans les milieux cristallisés le même rôle que les deux plans de symétrie dans les milieux isotropes. Les théorèmes qui suivent en sont une preuve remarquable.

69. Si, à partir du point d'incidence, on porte, en grandeur et en direction, l'amplitude réfléchie, c'est-à-dire la racine carrée de l'intensité du rayon réfléchi, le lieu des extrémités de cette droite est une ellipse située dans le plan d'onde de ce rayon, et dont les axes coïncident en direction avec les azimuts principaux.

Soient \mathbf{r} l'amplitude vibratoire du rayon incident, ω son angle avec le plan d'incidence, Λ l'amplitude réfléchie, α l'angle analogue. En décomposant les deux vibrations suivant les directions de leurs azimuts principaux respectifs, on aura évidemment

$$a \cos (\omega - \zeta) = \Lambda \cos (\alpha - \xi),$$

$$a_1 \sin (\omega - \zeta) = \Lambda \sin (\alpha - \xi),$$

d'où

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2 (\alpha - \xi)}{a^2} + \frac{\sin^2 (\alpha - \xi)}{a_1^2}},$$

a , a_1 étant les coefficients d'altération des composantes incidentes déterminés par les calculs connus.

La vitesse angulaire de rotation du plan de polarisation du rayon réfléchi est, dans chaque position de ce plan, inversement proportionnelle à l'intensité correspondante de ce rayon, l'intensité du rayon incident étant constante et la vitesse angulaire de rotation de son plan de polarisation étant uniforme.

Éliminant Λ par division, on a

$$\operatorname{tang} (\alpha - \xi) = \frac{a_1}{a} \operatorname{tang} (\omega - \zeta).$$

Différentiant par rapport au temps t ,

$$\frac{dz}{dt} \frac{1}{\cos^2(\alpha - \xi)} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\cos^2(\omega - \zeta)},$$

ou bien

$$\frac{dz}{dt} = \frac{aa_1}{A^2} \frac{d\omega}{dt}.$$

Ce théorème est fort utile dans l'étude des erreurs expérimentales de α .

On voit donc que le mouvement du plan de polarisation est d'autant plus lent que la lumière correspondante du rayon est plus intense, et inversement : par suite, les maxima et minima de la vitesse angulaire correspondent aux minima et maxima de l'intensité du rayon réfléchi.

La forme $A^2 \frac{d\alpha}{dt} = aa_1 \frac{d\omega}{dt}$ montre que la vitesse aréolaire du rayon vecteur de l'ellipse est constante.

70. L'existence de deux systèmes correspondants d'azimuts rectangulaires n'avait point échappé à Mac Cullagh; quoiqu'il n'ait point développé leurs propriétés, il en a néanmoins tiré une conséquence importante pour l'explication de la polarisation partielle par réflexion de la lumière naturelle; on peut l'énoncer ainsi :

Le plan de polarisation de la lumière réfléchie est l'azimut principal du maximum d'intensité.

71. *Dans les cas de polarisation complète, le plan de polarisation de la lumière réfléchie coïncide avec l'azimut principal du maximum d'intensité.*

Il est évident, en effet, que le coefficient k doit être nul dans la formule

$$\tan(\alpha - \xi) = k \tan(\omega - \zeta),$$

pour donner $\alpha = \xi$ quel que soit ω .

Les azimuts principaux du rayon incident conservent leur propriété caractéristique de correspondre au maximum

et minimum d'intensité du rayon réfléchi : ici seulement le minimum est nul.

72. Les théorèmes précédents se rapportent tous à un même système de rayons réfractés; c'est là le secret de leur simplicité: dès qu'on veut, comme M. Neumann, au début du calcul exprimer explicitement les coefficients en fonction des constantes de la surface de l'onde, la complication devient extrême; aussi le savant géomètre allemand n'a-t-il obtenu aucun théorème géométrique proprement dit, et est-il obligé de recourir à des formules approximatives pour dégager quelques résultats.

Il ne faudrait pourtant pas croire que l'introduction des propriétés de la surface de l'onde dans la théorie de la réflexion cristalline soit destinée à compliquer la question : comme le pense Mac Cullagh, « les lois de la réflexion et de la réfraction sont parfaitement adaptées l'une à l'autre. » Malheureusement elles ont été établies indépendamment les unes des autres et leur lien nous échappe encore.

Voici une nouvelle remarque qui confirme l'opinion de Mac Cullagh et qui prouve que si, jusqu'à présent, l'introduction de la surface de l'onde a plutôt entravé qu'aidé la théorie de la réflexion cristalline, c'est qu'on n'a pas encore trouvé l'aspect sous lequel ces théories se prêtent le mieux à l'adaptation mutuelle.

La proposition suivante renferme deux systèmes de rayons réfractés et, néanmoins, elle exprime un résultat extrêmement simple.

73. *Si l'on fait tourner de 180 degrés le plan de réflexion autour de la normale à la surface réfléchissante sans changer l'angle d'incidence, de sorte que le nouveau rayon incident coïncide avec le rayon primitif; malgré le changement des rayons réfractés, les systèmes de cônes sont les mêmes, seulement il y a inversion; le cône de polarisation de la position directe coïncide avec le*

cône de normalisation de la position inverse, et réciproquement.

Cette réciprocité se traduit expérimentalement par la vérification la plus simple qu'on puisse imaginer.

Dans l'appareil bien connu destiné à ce genre d'expériences, la lumière se polarise en traversant un *prisme polariseur*, se réfléchit sur la surface cristalline qu'on a choisie et traverse, après réflexion, un prisme analyseur. C'est en déterminant les azimuts d'extinction de l'analyseur correspondant à des azimuts divers du polariseur qu'on vérifie les lois de ces phénomènes. Mais la vérification de cette réciprocité n'exige aucune détermination nouvelle; si, en effet, l'analyseur étant dans l'une quelconque de ces positions d'extinction, on renverse la marche de la lumière sans toucher à l'appareil, c'est-à-dire si l'on fait entrer le faisceau naturel par l'analyseur et qu'on le fasse sortir par le polariseur, l'extinction du rayon réfléchi a lieu aussi nettement que dans le premier cas.

74. Ce théorème peut se démontrer à l'aide de la formule générale donnée plus haut, en substituant à ε , r , Θ , ε' , r' , Θ' les valeurs du second système de rayons déduites des relations de la surface de l'onde : la vérification en est facile quoique un peu laborieuse. On se bornera ici au cas simple où le plan d'incidence est un plan principal de la surface de l'onde; les deux cônes dégèrent alors en un même système de deux plans, à savoir : le plan d'incidence et un plan perpendiculaire.

Dans les idées de Mac Cullagh on prouvera aisément que les équations fondamentales seront les mêmes pour des azimuts de réflexion distants de 180 degrés.

1^o *Milieux à un axe optique.* — Le plan de réflexion est la section principale.

D'abord la vibration ordinaire sera dans le plan d'incidence et dans les deux cas fera le même angle avec la normale.

La vibration extraordinaire est normale au plan d'incidence, quelle que soit la direction du rayon extraordinaire.

D'où l'on conclut que les équations de continuité seront les mêmes dans les deux cas.

L'équation des forces vives sera la même aussi; car le rapport des masses d'éther est le même que le rapport des ordonnées des points de la surface d'onde : pour l'onde ordinaire, c'est évident; quant à l'onde extraordinaire, il y a égalité dans les deux cas.

En effet, soit MT l'onde extraordinaire (*fig. 17*) dans le premier cas; $T'M'$ sera l'onde extraordinaire dans le second, avec la condition $OT = OT'$. Mais la surface d'onde est représentée ici par une ellipse dans laquelle les ordonnées MP , $M'P'$ sont égales, car $M'P' = M_1P_1$, tel que TM_1 soit parallèle à $M'T'$, puisque la corde M_1M est coupée en deux segments égaux $M_1H = HM$ par le diamètre TT' .

73. 2° *Milieux à deux axes optiques.* — Le plan de réflexion est l'un des trois plans principaux de la surface de l'onde.

Les sections correspondantes de cette surface se composent d'une ellipse et d'un cercle séparés (*fig. 18*); aussi la démonstration précédente peut s'appliquer au cas présent, puisque rien n'y suppose que les deux courbes soient tangentes; mais il reste à montrer que la vibration réfractée extraordinairement, c'est-à-dire celle qui correspond à l'ellipse, est normale au plan d'incidence dans les trois cas. En effet, si elle était dans le plan d'incidence, elle coïnciderait avec la trace de l'onde plane correspondante, c'est-à-dire avec une tangente à l'ellipse; alors elle serait inclinée sur le rayon vecteur mené au point de contact; elle ne serait donc pas rigoureusement transversale, ce qui est contre l'hypothèse adoptée.

TROISIÈME PARTIE.

MÉTHODES EXPÉRIMENTALES DE LA RÉFLEXION CRISTALLINE.

Choix des substances destinées aux mesures.

76. Si l'on veut se livrer à des vérifications expérimentales sur les lois de la réflexion de la lumière polarisée, il est nécessaire de choisir des substances spéciales dont le nombre se trouve, en fait, assez limité.

Dans le cas des milieux isotropes, les diverses espèces de verre, crown-glass et flint-glass récemment polis, le spath fluor récemment clivé sont d'un usage facile.

Dans le cas des milieux cristallisés, les conditions sont plus difficiles à remplir ; outre la transparence, il faut une biréfringence aussi grande que possible, sinon les phénomènes particuliers à ces substances se confondraient avec les erreurs d'observation : aussi le quartz, la topaze, l'orthose et la plupart des beaux cristaux qui ornent les collections minéralogiques sont-ils de peu d'utilité dans les recherches de réflexion cristalline.

Les deux substances dont j'ai fait usage dans mes expériences sont le spath d'Islande et le soufre en cristaux artificiels : encore n'ai-je utilisé dans ces cristaux que les clivages pour le spath et les faces naturelles pour le soufre. Le poli altère notablement la structure cristalline, ainsi que Seebeck l'a fait remarquer depuis longtemps, et, bien que l'habile physicien ait indiqué comment on peut en atténuer les effets, il est toujours préférable de ne pas s'exposer à ces erreurs. Voilà pourquoi je conseille de n'employer dans les *mesures de vérification* que des surfaces naturelles, et d'éviter toute espèce de poli artificiel.

77. Les mesures expérimentales de la réflexion cristalline portent sur quatre éléments :

- 1^o Orientation cristallographique de la face réfléchissante ;
- 2^o Orientation cristallographique du plan d'incidence ;
- 3^o Angles d'incidence et de réflexion du rayon polarisé ;
- 4^o Azimuts de polarisation des rayons incident et réfléchi.

Dans le cas particulier des milieux isotropes, on n'a point à s'occuper des deux premiers éléments ; la détermination des deux autres se fait de la même manière que dans le cas général ; il est donc inutile de s'arrêter à ces milieux.

*Détermination de l'orientation cristallographique
de la face réfléchissante.*

78. Lorsqu'on emploie des faces de clivage ou des faces naturelles bien connues cristallographiquement, cette première opération devient inutile ; mais lorsqu'on opère sur des faces artificielles ou sur des facettes secondaires dont on ignore la notation cristallographique, on doit effectuer les mesures suivantes :

On mesure l'angle que forme cette facette avec trois faces naturelles connues, ce qui exige que le fragment sur lequel on opère soit suffisamment complet au point de vue cristallographique ; à la rigueur deux faces naturelles suffiraient, mais la troisième fournit une vérification des calculs et des mesures, vérification qu'il est toujours bon de se ménager.

Ces mesures d'angles peuvent s'effectuer avec le goniomètre à réflexion de Wollaston, car les facettes de repère n'ont pas nécessairement une largeur et un poli qui permettent d'employer avec avantage le goniomètre à collimateur ; l'approximation de deux à trois minutes que donne d'ordinaire ce goniomètre est largement suffisante en général, en supposant toutefois que les angles mesurés ne soient ni trop aigus ni trop obtus.

La trigonométrie sphérique permet ensuite de calculer

l'orientation de la surface réfléchissante par rapport aux axes de symétrie optique du cristal.

Dans le cas des cristaux du système carré et du système rhomboédrique, l'axe principal de symétrie du cristal coïncide avec l'axe optique, ou axe de révolution de la surface d'onde caractéristique de ces milieux.

Les trois axes principaux d'élasticité optique coïncident avec les trois axes principaux cristallographiques dans le système du prisme droit rectangulaire.

Quant aux systèmes cristallins obliques, ils ne peuvent servir aux expériences de réflexion cristalline qu'après des mesures optiques préliminaires qui les rendent impropres aux expériences de contrôle théorique.

*Détermination de l'orientation cristallographique
du plan d'incidence.*

79. Si l'on pouvait matérialiser la trace du plan d'incidence sur la surface réfléchissante en traçant une ligne ou un repère quelconque, le problème serait résolu. Mais cette surface étant posée parallèlement à un limbe gradué, il suffit de connaître à quel point de la graduation correspond un repère bien défini par rapport au plan d'incidence. Ce qu'il y a de plus exact, c'est d'utiliser une des facettes du cristal dont on peut aisément mettre l'intersection idéale avec la face réfléchissante normalement au plan de réflexion de l'appareil.

Ainsi la présence d'une petite facette d'orientation connue, peu inclinée sur la surface à étudier, est indispensable pour fixer l'orientation cristallographique du plan d'incidence; on va voir dans un instant comment on opère en pratique.

Détermination de l'angle d'incidence du rayon polarisé.

80. Quelques observateurs ont cru devoir n'employer, dans des mesures de réflexion cristalline, aucune disposi-

tion de lentilles pour définir l'incidence, se bornant à fixer la direction des faisceaux par deux œillets, l'un à l'entrée, l'autre à la sortie de l'appareil, et par un trait marqué à la surface réfléchissante. Mais c'était dans des cas spéciaux; ils voulaient éviter, soit une perte de lumière, soit une *dépolarisation* ou une *elliptisation* de la lumière polarisée rectilignement qu'ils employaient.

On peut, néanmoins, avec quelques réserves, adapter aux expériences de polarisation le système de collimateur et lunette du goniomètre de Babinet : la précision des mesures est pour ainsi dire illimitée avec ce dispositif, tandis qu'avec de simples œillets l'erreur peut s'élever à 15 ou 20 minutes.

Dans ce cas, le collimateur et la lunette ne diffèrent pas l'un de l'autre, de sorte que l'appareil est réversible : l'un et l'autre se composent d'une lentille au foyer principal de laquelle est un réticule; ils sont portés respectivement par les alidades d'un cercle horizontal, de telle sorte que leurs axes optiques soient parallèles au plan du limbe et coupent l'axe de rotation des alidades.

81. Il est inutile d'insister sur l'usage de cet appareil, qui ne diffère pas sensiblement du goniomètre déjà cité; mais il est bon de rappeler le réglage de l'axe optique de ces collimateurs, pour lequel on a l'habitude de s'en remettre au constructeur.

Il s'agit de rendre les axes optiques parallèles au plan du limbe; à cet effet, on les met en coïncidence en plaçant le collimateur et la lunette à 180 degrés de distance et en faisant en sorte que l'image du premier réticule coïncide avec le second. On déplace la lunette et on dispose une lunette auxiliaire dont l'axe optique coïncide avec l'axe du collimateur; alors on substitue au collimateur la lunette du cercle en déplaçant convenablement les alidades; le réticule de cette lunette sert de mire, et on cherche si on peut mettre son image en coïncidence avec le réticule de la

lunette auxiliaire restée fixe. Si la coïncidence a lieu, les axes optiques sont réglés; sinon, la déviation observée est double de l'erreur de parallélisme, qu'on peut ainsi corriger aisément.

82. L'utilité des collimateurs étant bien reconnue, une difficulté d'un ordre nouveau se présente à cause de l'emploi de lumière polarisée. Deux systèmes sont en présence : dans l'un on *polarise* la lumière avant le réticule du collimateur et on l'*analyse* après le réticule de la lunette ; dans l'autre, on place au contraire le polariseur après l'objectif du collimateur et l'analyseur avant l'objectif de la lunette.

Ces deux systèmes ont, dans la pratique, chacun leurs inconvénients propres, inconvénients qu'on peut atténuer dans une grande proportion, mais qu'on annule difficilement ; aussi l'emploi de l'un ou de l'autre dans un cas donné n'est-il pas indifférent, ainsi que vont le montrer les remarques suivantes.

83. 1^o *Objectifs situés entre les appareils polariseurs.* — Quand on fait passer un rayon polarisé rectilignement suivant l'axe optique d'une lentille, il y a une *dépolarisation* partielle d'une nature spéciale; en effet, comme les divers rayons se trouvent brisés, la vibration, après réfraction, pour conserver sa transversalité rigoureuse, ne reste parallèle au même plan que si la réfraction s'est opérée dans ce plan ou dans le plan perpendiculaire ; dans tous les autres azimuts, il y a une déviation du plan de polarisation, ainsi qu'on l'a calculé plus haut ; il y a donc une dispersion angulaire du plan de polarisation par le passage à travers une lentille. Le phénomène est même assez complexe, car si la notion du plan de polarisation de rayons parallèles est bien nette, celle du plan de polarisation de rayons convergents ou divergents mérite une étude spéciale.

Tel est le reproche principal qu'on fait à cette disposition : on lui reconnaît le grand mérite de la perfection dans la marche géométrique des rayons, mais on l'accuse

de laisser à désirer sous le rapport de la polarisation de la lumière. Cependant il faut dire que si les lentilles ont un long foyer, par suite une courbure peu sensible, et si le faisceau lumineux ne couvre qu'une petite étendue au centre de la lentille, ces inconvénients sont pour ainsi dire annulés.

Un inconvénient accidentel, mais qu'on peut éviter avec un peu de soin, c'est la *trempe* des lentilles, qui font alors fonction d'une lame mince biréfringente et dépolarisent la lumière par elliptisation.

Pour rechercher si une lentille est *trempée*, on la place entre deux prismes de Nicol croisés donnant l'extinction complète d'une lumière intense et on la fait tourner dans son plan; si la lumière reparait dans certains azimuts, la lentille est *trempée*; il faut la rejeter ou essayer de la recuire, ce qui est assez dangereux.

84. 2° *Appareils polariseurs entre les objectifs.* — Le collimateur étant réglé pour fournir de la lumière parallèle, le passage à travers un polariseur quelconque donne un plan de polarisation bien mieux défini théoriquement que ci-dessus; l'analyseur, de son côté, produit aussi une action beaucoup plus nette que dans la lumière convergente: les lentilles ne produisent plus ici aucune perturbation fâcheuse, mais il faut laisser aux polariseurs et à l'analyseur la faculté de tourner autour du rayon qui les traverse, et c'est alors que se présente l'inconvénient grave de ce dispositif. Ces appareils, ainsi qu'on le verra plus loin, par un défaut de construction qu'il est difficile d'éviter, dévient légèrement la lumière comme un prisme d'un angle très-petit, en sorte qu'ils dépointent notablement les repères dans la lunette quand on change leur azimut; de plus, comme l'action de l'analyseur et celle du polariseur se superposent, la correction qu'on doit faire subir à la direction du rayon et même à l'azimut d'extinction est très-complexe.

Ainsi cette disposition, à l'inverse de la précédente, favo-

rise la pureté de la polarisation au détriment de la marche géométrique des rayons. Chacun de ces systèmes a donc ses avantages : on ne saurait dire qu'il y a compensation et qu'on peut indifféremment employer l'un ou l'autre, cela dépend évidemment du but qu'on se propose. Si l'on veut étudier la polarisation elliptique dans les phénomènes de réflexion ou de réfraction, on emploiera la meilleure disposition comme polarisation rectiligne, afin d'observer les altérations de la vibration rectiligne sans autre complication; si, au contraire, négligeant les effets de polarisation elliptique, on s'attache à la mesure d'un *plan de polarisation moyen* sous des incidences bien définies, on emploiera le premier dispositif. C'est d'ailleurs celui qui se prête le mieux à la construction des cercles actuellement en usage, et c'est celui que j'ai adopté dans l'appareil qui sera décrit ultérieurement.

*Détermination de l'azimut de polarisation
des deux rayons.*

85. Le plan de polarisation d'un rayon, n'ayant pas d'existence matérielle, ne peut être réglé que par des vérifications optiques : le plan d'incidence était dans le même cas; mais les phénomènes auxquels on a demandé son réglage sont d'une tout autre nature; la difficulté est d'accorder ensemble ces deux réglages.

Les opérations que je vais décrire s'appliquent aux deux systèmes de dispositifs indiqués précédemment.

On prend comme *repère fondamental de direction* la normale au plan du limbe mené par le centre de ce limbe, ou plutôt l'axe de rotation des alidades et autres pièces de l'appareil : c'est là la base d'opérations. On a vu comment cette ligne idéale définit le plan d'incidence; il s'agit de l'employer à la détermination des azimuts de polarisation.

À cet effet, les polariseur et analyseur sont placés au centre de petits cercles sur une alidade mobile : le plan de

ces petits cercles est normal à l'axe optique du collimateur ou lunette; l'erreur de perpendicularité est tout à fait négligeable au point de vue de la mesure géométrique des azimuts. On verra, au contraire, qu'elle ne l'est pas sous le rapport de la détermination du plan de polarisation du rayon. Supposons donc d'abord une construction parfaite des cercles azimutaux.

Le problème se réduit à connaître à quelle division du limbe correspond l'alidade d'un des polariseurs quand la *section principale* de cet appareil est rigoureusement parallèle à la *direction repère*; l'opération peut être conduite comme dans le cas du réglage du plan d'incidence.

Les deux axes optiques des collimateurs étant en coïncidence, on tourne l'analyseur sur son limbe, de telle sorte qu'une lumière intense traversant l'appareil soit complètement éteinte, puis on déplace l'analyseur; on ajuste alors une lunette auxiliaire portant aussi un analyseur, de manière à faire coïncider son axe optique avec celui du collimateur; puis on détermine l'extinction par une rotation convenable de l'analyseur; alors on substitue au collimateur polariseur la lunette analyseur; le réticule de cette lunette sert de mire; le réglage préalable assure la coïncidence de son image avec le réticule de la lunette auxiliaire, et on examine si l'extinction de la lumière est complète; si elle est satisfaisante, les appareils polariseurs sont réglés; sinon, on mesure la déviation sur l'analyseur auxiliaire, on en prend la moitié, et on règle les appareils sur la position calculée de cet analyseur; on fait, enfin, une dernière vérification.

86. Il est évident que l'opération précédente ne définit pas si c'est le plan de polarisation de l'appareil polariseur ou son plan perpendiculaire qui est parallèle à l'axe de l'instrument; elle indique simplement que l'un des deux plans de symétrie est parallèle à cet axe; le croisement du polariseur et de l'analyseur montre même que ce sont des

plans différents pour l'un et pour l'autre. Cette indétermination n'existera pas si l'on a pris soin de régler approximativement ces appareils de la manière suivante :

On place une lame de verre normalement au plan du limbe horizontal en se servant des collimateurs bien réglés ; on cherche ensuite l'incidence de polarisation complète par la condition que la lumière incidente polarisée s'éteigne complètement par réflexion ; on est assuré alors que le plan de polarisation du rayon incident est normal au plan d'incidence ; on lit la graduation azimutale du polariseur, lequel se trouve ainsi réglé très-approximativement et sans ambiguïté. On règle alors l'analyseur et on vérifie, ou plutôt on corrige l'opération par la méthode décrite plus haut.

87. Ces méthodes, fondées sur les *retournements autour d'axes* tels qu'ils sont pratiqués avec les appareils d'astronomie ou de géodésie, ont l'avantage d'opérer les réglages en s'appuyant sur *une seule* condition de construction, laquelle se trouve ordinairement remplie avec une très-grande exactitude, les axes de ces appareils étant travaillés au tour, puis rodés avec beaucoup de soin. On a proposé pour ces mêmes réglages un certain nombre de méthodes, mais elles ont toutes l'inconvénient de s'appuyer sur des conditions de construction multiples ou sur des données étrangères à la question ; je pense que la simplicité et la rigueur des opérations qui viennent d'être décrites dispensent de toute discussion à ce sujet.

Appareils polariseurs.

88. Les seuls appareils polariseurs qu'on puisse adopter dans des expériences précises sont les tourmalines, les prismes de Nicol ou même de simples morceaux de spath ; les autres, tels que les piles de glace, les glaces noires, etc., offrent l'inconvénient grave, soit de polariser incomplètement la lumière, soit de mal se prêter à la construction des instruments azimutaux.

1° *Tourmalines*. — Les belles tourmalines sont extrêmement rares ; cependant on peut en trouver quelques morceaux très-purs sans être trop foncés ; mais on est toujours, dans le choix de leur épaisseur, entre deux difficultés : trop épaisses, elles absorbent une quantité énorme de lumière ; trop minces, elles ne polarisent pas complètement.

La construction de ces polariseurs a été, chez quelques opticiens, assez perfectionnée pour contre-balancer parfois les prismes de Nicol, qui ne conservent leur incontestable supériorité que dans le cas d'une perfection assez grande.

Dans la lumière un peu convergente, l'extinction d'une lumière intense ne se fait pas dans tout le champ de vision à la fois : une barre noire traverse le champ et se meut parallèlement à elle-même quand on tourne l'une des tourmalines dans son plan. Cette frange noire permet de fixer avec une grande précision l'azimut d'extinction, car on peut amener cette frange en coïncidence avec le réticule ; malheureusement il faut d'excellentes tourmalines pour qu'elle soit très-étroite et tout à fait obscure. Une propriété assez utile des tourmalines, c'est que leur coloration propre équivaut à l'interposition d'un verre coloré monochromatique, et si l'on prend soin d'examiner avec un prisme la partie du spectre la moins absorbée, on a une donnée assez nette sur la valeur des indices de réfraction à choisir pour les vérifications des mesures de la réflexion cristalline.

89. 2° *Prismes de Nicol*. — Le prisme de Nicol possède au plus haut degré la propriété de donner une polarisation parfaite à la lumière qui le traverse ; mais il faut pour cela qu'il soit bien construit, c'est-à-dire que les faces recollées au baume de Canada aient été parfaitement polies, sans quoi il reste, quand la lumière incidente est très-intense, un nuage blanc qui ôte un peu de netteté aux extinctions. La frange d'extinction est d'une perfection admirable comparativement à celle des tourmalines ; dans la lumière directe, elle est très-étroite et d'un bleu très-sombre ; dans

la lumière polarisée et réfléchiée, elle est irisée par suite d'une véritable dispersion des couleurs, et ses teintes rappellent celles du premier des *anneaux colorés* à centre blanc, c'est-à-dire une bande sombre limitée d'un côté par un bleu violacé, et de l'autre par un brun clair particulier. Cette irisation est plutôt un avantage qu'un inconvénient, car on peut alors choisir telle teinte que l'on veut et même à la rigueur faire des mesures approximatives de la dispersion.

90. Jusqu'ici le prisme de Nicol n'a que des avantages incontestables sur les tourmalines; mais il a un inconvénient grave qui n'a pas encore, à ma connaissance du moins, été signalé; heureusement on peut toujours l'éliminer, mais il est à craindre que quelques observateurs n'aient pas compté avec cette cause d'erreur.

Les meilleurs prismes de Nicol, c'est-à-dire ceux dont les faces d'entrée et de sortie sont taillées avec soin, de manière à ne donner qu'une déviation insignifiante du rayon qui les traverse, doivent cependant être étudiés de près. On remarquera alors que dans la lumière solaire directe, là où l'approximation de l'azimut s'élève à 1 minute environ, si l'on essaye de retrouver l'extinction en tournant de 180 degrés l'analyseur, cette extinction n'a pas lieu à 180 degrés exactement; si l'on change l'azimut du polariseur pour recommencer la même opération, l'erreur de l'analyseur n'est plus la même. En étudiant de proche en proche cette erreur, on trouve qu'il y a deux positions du polariseur pour laquelle l'erreur s'évanouit; dans l'intervalle, l'erreur est positive d'un côté, négative de l'autre; les maximum et minimum peuvent atteindre ± 15 ou 20 minutes.

Si l'on construit la courbe de ces divergences, on reconnaît une sinussoïde pour chacun des deux appareils analyseur et polariseur, absolument comme si les cercles azimutaux avaient dans leur graduation une *grosse erreur d'excentricité*.

Si l'on dérange notablement le faisceau incident, en déplaçant l'héliostat, par exemple, on trouve que la position d'extinction varie également.

91. Ces erreurs, qui m'ont arrêté longtemps, sont dues à la cause suivante, ainsi qu'on peut aisément le vérifier.

Le prisme de Nicol, monté sur une alidade, tourne autour d'un axe qui ne coïncide pas rigoureusement avec la direction des rayons qui le traversent; il en résulte que dans chaque azimut le rayon incident suit une marche particulière dans l'intérieur du spath d'Islande, et par suite sa polarisation ne suit pas exactement le mouvement angulaire de la section principale. Comment se fait-il que les tourmalines ne présentent pas cet inconvénient?

Cela tient d'abord à ce que les tourmalines ont la forme de lames beaucoup plus faciles à travailler comme parallélisme des faces que les prismes de Nicol, dont les faces utiles sont très-éloignées et surtout inclinées sur les arêtes du prisme. De plus, les tourmalines sont faciles à ajuster parallèlement au plan du limbe; quant au prisme de Nicol, c'est la section principale qui devrait être parallèle à l'axe optique du collimateur; mais jusqu'à présent on n'a pas proposé de réglage pratique répondant à cette condition.

En outre, les tourmalines sont taillées parallèlement à l'axe optique, tandis que les prismes de Nicol sont inclinés d'environ 45 degrés sur cet axe; or, d'après les propriétés des milieux uniaxes, il est facile de voir qu'une petite variation dans la direction du rayon incident modifie infiniment peu le plan de polarisation dans le cas des tourmalines, et au contraire le déplace d'un angle comparable à la variation angulaire du rayon, dans le cas des prismes de Nicol.

92. Le moyen d'éliminer cette erreur est bien simple; on procède comme pour éliminer l'erreur d'excentricité dans les cercles, c'est-à-dire en ayant recours aux observations croisées à 180 degrés de distance; on n'observera

aucun azimut d'extinction sans mesurer aussi le second, qui ne sera pas en général à 180 degrés exactement; alors on prendra la moyenne des deux lectures qui sera rigoureusement exacte en admettant, comme je l'ai observé, que l'erreur du prisme de Nicol suit la loi

$$\varepsilon = A \cos z + \varphi,$$

φ et A étant des constantes, z l'azimut observé, $z + \varepsilon$, l'azimut vrai.

Le polariseur, comme l'analyseur, devra être soumis aux mêmes opérations.

93. Ainsi, pour obtenir l'azimut ω d'extinction de l'analyseur correspondant à l'azimut ω du polariseur, il y aura six lectures à faire :

- 1^o Adaptation du polariseur à l'azimut ω ;
- 2^o Lecture de la première position de l'analyseur α_1 ;
- 3^o Lecture de la deuxième position de l'analyseur $180^\circ + \alpha_2$;
- 4^o Adaptation du polariseur à l'azimut $180^\circ + \omega$;
- 5^o Lecture de la première position correspondante de l'analyseur α_3 ;
- 6^o Lecture de la deuxième position de l'analyseur $180^\circ + \alpha_4$.

La moyenne $\frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ donne l'angle z cherché.

Cette multiplicité des lectures sur chaque limbe rend les opérations fort longues; mais elle contribue singulièrement à leur exactitude. Ces lectures ont d'abord pour effet d'éliminer l'erreur résultant des appareils de polarisation; de plus elles concourent par leur nombre à donner une *moyenne* d'autant meilleure que les conditions dans lesquelles on les obtient sont légèrement différentes.

L'expérience, du reste, justifie toutes ces précautions; avec des prismes de Nicol, dont la précision est représentée

par 1 minute d'erreur pour l'extinction de la lumière solaire directe, les vérifications s'obtiennent à $1\frac{1}{2}$ minute ou 2 minutes près, tandis que si l'on opère sans *marche systématique*, on peut trouver des erreurs de 30 à 40 minutes.

94. Il était utile d'insister sur les anomalies de ces instruments si précieux qu'on nomme prismes de Nicol, d'abord parce que ces remarques ont montré que leur supériorité sur tous les autres polariseurs n'est nullement atteinte; elles font soupçonner aussi que les autres polariseurs sont sujets aux mêmes irrégularités, lesquelles se confondent dans les instruments moins parfaits avec les erreurs non susceptibles d'être réduites en loi.

Ces considérations montrent encore que la nécessité d'éliminer des erreurs bien définies a l'heureux effet de forcer l'expérimentateur à adopter une *méthode d'observations systématiques* qui éliminent en même temps, sans surcroît de travail ni d'attention, d'autres erreurs moins bien définies, résultant d'influences personnelles.

Je n'ai pas eu l'occasion d'essayer les prismes de M. Foucault; je crains que le peu d'étendue de leur champ ne soit un obstacle à leur emploi dans ces mesures; pourtant, dans le dispositif précédemment décrit où la lumière est polarisée et analysée en faisceaux parallèles, ils seraient peut-être d'un bon usage.

Mais j'attends beaucoup de la modification apportée par M. Hartnack dans la construction du prisme de Nicol; on n'utilise, dans ce nouveau prisme, aucune des faces naturelles du rhomboèdre; l'axe du prisme est taillé normalement à l'axe optique, de sorte que le rayon qui traverse l'instrument suit la loi ordinaire; sa polarisation est analogue à celle de la tourmaline en ce sens qu'elle doit être très-peu influencée par les écarts que fait le rayon avec l'axe de l'instrument.

La mauvaise saison m'a empêché de vérifier ces prévisions.

95. 3° *Spaths simples*. — M. Jamin a depuis longtemps conseillé de substituer aux prismes de Nicol de longs morceaux de spath dont on arrête l'image extraordinaire par un diaphragme. Cette disposition, la plus parfaite incontestablement comme pureté de polarisation et intensité de lumière, a l'inconvénient d'exiger une grande longueur de spath, par suite d'être très-coûteuse et de se prêter moins aisément à la construction actuelle des cercles; de plus, leur champ est très-limité et ils sont soumis aux mêmes erreurs que le prisme de Nicol. L'étude expérimentale de la *lumière elliptique* me paraît être le seul cas où l'emploi des spaths simples doit être non-seulement préféré, mais commandé.

96. Puisqu'aucun appareil polariseur ou analyseur ne donne, par une seule lecture, la position exacte du plan de polarisation, la méthode de réglage indiquée plus haut ne donnera qu'un résultat approximatif; autrement dit, les sections principales des polariseurs ne seront pas rigoureusement dans le plan d'incidence après le réglage. Dès lors il semble que la complication doit devenir extrême, s'il faut emprunter à l'astronomie ses formules de corrections d'instruments: mais de même qu'on a éliminé l'erreur des prismes de Nicol par des observations croisées, de même encore va-t-on éliminer les erreurs *du zéro* par une méthode analogue.

On a proposé souvent à cet effet d'observer toujours des azimuts égaux de part et d'autre du zéro incorrect, afin que l'erreur positive dans l'une des positions fût négative dans l'autre: mais je ne m'arrêterai pas à décrire cette méthode, qui est fautive dès qu'on s'approche notablement du zéro ou de l'azimut rectangulaire.

97. Voici le mode d'opération que je conseille.

On peut supposer d'abord que quand le collimateur et la lunette, c'est-à-dire le polariseur et l'analyseur, sont bout à bout et traversés par la lumière solaire directe, la

position d'extinction de l'analyseur lue sur son cercle, après toutes les observations croisées nécessaires, donne exactement 90 degrés de différence avec la lecture correspondante de l'alidade du polariseur. S'il en était autrement on noterait, une fois pour toutes, la différence avec son signe et on l'ajouterait à toutes les lectures faites sur le même cercle. Il est commode de ne pas dépasser 15 à 20 minutes pour ce terme constant de correction.

Grâce à ce que tous nos appareils collimateurs et polariseurs sont réversibles, on peut introduire le faisceau de lumière, soit par le collimateur, soit par la lunette : c'est à ce renversement qu'on devra l'élimination de l'erreur du zéro.

En effet, prenons le cas général : on cherche l'azimut de polarisation et du rayon réfléchi sur une surface cristallisée correspondant à un azimut de polarisation ω du rayon incident, dans un azimut de réflexion ζ et sous un angle d'incidence choisis.

Si l'on met l'alidade du polariseur à l'angle ω , on commet une petite erreur inconnue ω' sur cet angle à cause du défaut de réglage (même après les observations croisées déjà indiquées), et on lit un angle α également erroné de α' sur le limbe de l'analyseur; mais qu'on renverse la marche de la lumière; qu'on fasse entrer le faisceau lumineux par l'analyseur et sortir par le polariseur, en ayant soin de tourner de 180 degrés la surface réfléchissante autour de sa propre normale, les rôles seront renversés : le nouveau polariseur, placé à l'azimut ω , sera en erreur de $-\omega'$ cette fois, et le nouvel analyseur donnera un angle α_1 entaché de l'erreur $-\alpha'$, de sorte que la moyenne $\frac{\alpha + \alpha_1}{2}$ sera correcte.

Il est à peine utile de répéter ici que ces lectures considérées comme simples sont déjà des moyennes, afin d'éliminer les erreurs propres aux appareils polariseurs.

Comme vérification expérimentale de ces méthodes on opérera la réflexion sur une lame de crown-glass récemment polie dans un cas particulier simple; par exemple. on cherchera l'azimut de polarisation du rayon réfléchi correspondant à l'azimut 0 ou 90 degrés du rayon incident, sous une incidence quelconque voisine de 45 degrés. On devra trouver 90 degrés ou 0 pour l'angle cherché à 2 ou 3 minutes près. Comme aucun réglage rigoureux n'est fondé sur l'emploi de ce phénomène, cette vérification, dans le cas des milieux isotropes, est extrêmement précieuse: aussi l'expérimentateur devra-t-il d'abord s'exercer à l'obtenir couramment, et n'avoir aucune confiance dans sa propre habileté avant de l'avoir soumise à cette épreuve.

98. Le tableau ci-après résume la série des opérations à effectuer pour obtenir le résultat suivant :

Étant donnés l'angle d'incidence i , l'azimut cristallographique ζ de réflexion sur la surface cristallisée, l'azimut ω de polarisation du rayon incident, déterminer l'azimut α de polarisation du rayon réfléchi.

L'appareil est supposé rigoureusement réglé pour la mesure de l'incidence et approximativement pour le reste.

1° *Marche directe de la lumière.*

Azimut cristallographique de la réflexion = ζ .

Polariseur P placé à l'azimut ω : l'analyseur A donne . . .	}	α_1
	$\pi + \alpha_2$	
Polariseur P placé à l'azimut $\pi + \omega$: l'analyseur A donne	}	α_3
	$\pi + \alpha_4$	

2° *Marche renversée de la lumière.*

Azimut cristallographique de la réflexion = $\pi + \zeta$.

La lumière entre par l'appareil A, devenu polariseur, } α_5		
placé à l'azimut ω : l'analyseur P donne	}	$\pi + \alpha_6$

Polariseur A placé à l'azimut $\pi + \omega$: l'analyseur P donne	}	α_7
	$\pi + \alpha_8$	

L'angle cherché est la moyenne des huit valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$.

99. On peut avoir, même dans le cas général, une vérification précieuse sans être obligé de répéter les mêmes mesures; on recommencera la série analogue en opérant la réflexion symétriquement par rapport au plan vertical mené par le rayon incident. C'est encore une *observation croisée* : elle a, en outre, l'avantage d'éliminer l'erreur du zéro du cercle azimutal sur lequel on lit les incidences.

Dans certains cas, par exemple dans la recherche des angles de polarisation complète, cette double série est absolument nécessaire.

Que si quelque physicien doutait de l'utilité de ces précautions et croyait pouvoir obtenir des résultats exacts sans l'emploi des observations croisées, qu'il essaye par ses méthodes quelques-unes des vérifications indiquées ci-dessus, et il pourra se convaincre du peu de fondement de son opinion.

De l'approximation des mesures.

100. Cette question ne me paraît pas avoir été traitée par les observateurs qui se sont occupés de réflexion cristalline : dans les Mémoires où l'on donne des vérifications expérimentales, on met en évidence le nombre calculé et le nombre observé, la différence plus ou moins grande fait juger de la concordance de l'expérience ou de la théorie.

Mais rien n'est variable comme l'approximation qu'on peut attendre de ces phénomènes; la petitesse ou la grandeur de la différence entre le calcul et l'observation ne peut, sans examen préalable, servir à justifier ou à faire rejeter une théorie : on va voir, en effet, par ce qui suit que dans certains cas une divergence de 1 degré peut être moins inacceptable qu'une erreur de 5 minutes.

En général, on se propose de déterminer l'azimut de polarisation α du rayon réfléchi correspondant à l'azimut de polarisation ω du rayon incident, ou réciproquement. Mais ces azimuts sont donnés par la coïncidence de la

frange noire, ci-dessus décrite, avec le réticule. Si la lumière incidente est très-intense, cette frange est très-étroite et il est aisé de la bissecter : mais l'approximation angulaire ne dépend pas seulement de la netteté de cette coïncidence, elle dépend surtout de la vitesse avec laquelle elle se meut dans le champ de l'instrument quand on déplace l'alidade du polariseur ou de l'analyseur.

Dans le cas où ces deux appareils sont *bout à bout*, traversés par la lumière solaire directe, un déplacement de 2 à 3 minutes de l'un ou de l'autre *dépointe* très-notablement la frange ; mais dans la lumière qui a subi une réflexion sous un angle un peu éloigné de l'incidence rasante le *dépointement* est très-inégal suivant qu'on déplace l'analyseur ou le polariseur de la même quantité angulaire : c'est au voisinage de l'incidence principale que ce phénomène est surtout sensible. Si le polariseur *dépointe* aisément la frange par un petit écart angulaire, l'analyseur, au contraire, devient *paresseux* , la frange semble ne plus lui obéir ; mais si l'on rétablit l'extinction en mettant le polariseur à 90 degrés de sa position primitive, les rôles sont complètement changés, c'est à l'analyseur que la frange obéit et non plus au polariseur.

101. La proposition du n° 69 de la deuxième Partie rend compte de ces particularités, et précise ce qu'on doit entendre par *approximation normale* de ces mesures d'azimuts.

On voit, en se reportant à ce théorème, qu'un déplacement $d\omega$ du polariseur produit une variation $\frac{a_1 a}{\Lambda^2} d\omega$ sur l'analyseur, tandis que le même déplacement $d\alpha = d\omega$ de l'analyseur produit l'écart $\frac{\Lambda^2}{a_1 a} d\omega$ pour le polariseur. Par suite, si le rapport $\frac{a_1 a}{\Lambda^2}$ est plus petit que l'unité, l'autre sera plus grand, ce qui explique l'opposition dans le rôle des deux appareils.

Leur inversion s'explique aisément en substituant à A^2 sa valeur

$$A^2 = \frac{a^2 a_1^2}{a_1^2 \cos^2(x - y) + a^2 \sin^2(x - y)}.$$

En discutant cette valeur, on a vu que les azimuts principaux correspondent au maximum et au minimum du coefficient $\frac{a_1 a}{A^2}$, que ces deux valeurs sont $\frac{a_1}{a}$ et $\frac{a}{a_1}$, inverses l'une de l'autre, et que les variations angulaires dx et $d\omega$ deviennent égales pour les azimuts x et ω correspondant à la valeur

$$\text{tang}(\omega - x) = \sqrt{\frac{a}{a_1}}.$$

102. On énonce ce résultat sous une forme un peu différente :

Les variations angulaires correspondantes des plans de polarisation des rayons incident et réfléchi sont égales quand les azimuts de polarisation correspondants des rayons font des angles égaux avec l'un de leurs azimuts principaux.

On pourra donc prendre comme valeur de l'*approximation normale* pour une incidence donnée l'erreur moyenne du pointé correspondant aux variations égales : une moyenne de quelques observations la donnera aisément ; l'erreur probable correspondante à d'autres azimuts sera donnée par la formule

$$\varepsilon_x = \varepsilon_\omega \frac{aa_1}{A_2},$$

ou

$$d\omega = \varepsilon_\omega \quad \text{et} \quad dx = \varepsilon_x;$$

substituant à A^2 sa valeur $a \frac{\cos(\omega - \xi)}{\cos(x - \xi)}$ et au rapport $\frac{a_1}{a}$

sa valeur $\frac{\text{tang}(z - \xi)}{\text{tang}(\omega - \zeta)}$, il viendra

$$\varepsilon_z = \varepsilon_\omega \cdot \frac{\sin 2(z - \xi)}{\sin 2(\omega - \zeta)}.$$

qui servira inversement à comparer les erreurs pour tous les azimuts à l'*approximation normale*.

Ainsi le coefficient qui affecte l'*erreur normale* est suivant les cas $\frac{a_1}{a}$ et $\frac{a}{a_1}$, c'est-à-dire extrêmement variable; dans le cas de l'incidence principale en particulier. l'un des rapports est nul, l'autre infini. Il sera donc nécessaire en chaque cas de calculer l'*approximation réelle* des mesures; ce sera à l'observation d'en donner les éléments, lesquels dépendent, comme la formule l'indique, non-seulement de la nature de la surface cristallisée, mais aussi de l'intensité de la lumière incidente.

Choix de l'intensité et de la teinte de la lumière incidente.

103. Dans les mesures de réflexion cristalline, la lumière n'est jamais trop intense, aussi la lumière solaire est-elle la seule qui convienne. Elle n'est pas homogène et la réflexion sur les corps réfringents *disperse* les couleurs, de sorte que la frange est irisée : dans certains cas, c'est un avantage; dans d'autres, comme dans la recherche des incidences de polarisation complète où les perturbations dues à la lumière elliptique ôtent beaucoup de netteté aux extinctions, c'est un inconvénient; aussi a-t-on intérêt à *monochromatiser* la lumière, ce qu'on ne peut faire rigoureusement qu'en diminuant beaucoup l'intensité incidente.

Mais on peut prendre un moyen terme, une sorte de compromis, qui consiste à ne pas employer de lumière parfaitement monochromatique et à saisir les conditions où l'incertitude du phénomène est minimum; cette limite est du

domaine des impressions physiologiques et échappe au calcul; mais voici le résultat de l'expérience.

Le verre rouge de vitraux est en général trop foncé, la perte de la lumière ne compense pas la netteté de l'extinction. D'autres verres colorés ne m'ont pas donné de meilleurs résultats. Ce qui me paraît préférable, c'est une solution saturée de bichromate de potasse maintenue dans une petite cuve à faces parallèles sous une épaisseur de quelques centimètres; la lumière qui traverse ne contient que le rouge, l'orangé et une petite partie du jaune du spectre (jusqu'à la raie *b* de Fraunhofer); elle est très-intense, et malgré cela la frange perd toute irisation appréciable; les calculs de vérification peuvent être alors effectués en prenant comme indice de la lumière employée celui qui correspond à la raie *D*.

Description de l'appareil de mesures.

104. J'ai fait construire, pour mes recherches, un appareil spécial dans lequel j'ai cherché à réunir les meilleures conditions d'exactitude, tout en conservant une assez grande simplicité relative. (*fig. 19, Pl. II.*)

Si l'on songe que toute mesure comprend l'évaluation de quatre éléments, que les réglages exigent environ une douzaine de mouvements indépendants les uns des autres, cette simplicité relative est en réalité une complication assez grande; mais l'indépendance même des mouvements facilite beaucoup l'intelligence ou le maniement de cet appareil.

C'est un grand cercle divisé de 30 centimètres de diamètre, dont le limbe est horizontal; au lieu de porter deux alidades mobiles, il porte deux cercles concentriques *U*, *V*, ayant leurs axes emboîtés l'un dans l'autre; les alidades, en effet, n'auraient pas pu tourner d'une circonférence entière sans se gêner mutuellement, tandis que dans la disposition adoptée les rotations sont complètement indépendantes.

Le limbe divisé est porté sur le cercle intermédiaire ; le plus petit cercle porte des verniers V, le plus grand deux microscopes à réticule, de sorte que la même graduation sert à mesurer les deux mouvements, qui ne se gênent en aucune façon.

Chacun de ces cercles porte une colonne, laquelle soutient un petit limbe vertical L, L', L'', comme dans les appareils décrits par M. Jamin et de Senarmont. Au centre de chacun de ces limbes entre à frottement un petit collimateur composé d'une lentille et d'un réticule (*fig. 21*) : le réticule placé à peu près dans le plan du limbe, la lentille en arrière, à 7 centimètres environ vers le centre du cercle horizontal, de sorte que les trois collimateurs tournent leurs objectifs du côté de l'axe général de l'appareil ; leurs axes de figure sont à fort peu près dans un même plan horizontal.

Chaque petit limbe porte une alidade au centre de laquelle une bonnette mobile fixe l'appareil polariseur tourmaline ou prisme de Nicol.

Au centre du grand cercle horizontal s'élève une pièce assez compliquée (*fig. 20*), destinée à soutenir et à régler la surface réfléchissante ; c'est un petit limbe vertical L, porté sur un chariot qui peut avancer ou reculer horizontalement, guidé par une coulisse ; le plan de ce limbe peut en outre basculer autour d'un axe horizontal D à l'aide d'un levier à vis B ; enfin tout le système tourne autour de l'axe général de l'instrument.

105. On voit par ce qui précède que dans la construction de cet appareil tous les retournements possibles ont été ménagés ; c'est qu'en effet une foule de vérifications importantes s'obtiennent sans peine quand ces conditions sont remplies ; aussi en ai-je tiré un grand parti dans l'étude des diverses méthodes de mesures exposées plus haut ; après beaucoup d'essais, je me suis arrêté, non pas aux méthodes les plus simples, mais à celles qui exigent le moins de dispositions inaccoutumées dans les instru-

ments de ce genre. On peut remarquer en effet que les réglages indiqués s'appliquent à un goniomètre quelconque et ne demandent aucun des retournements que je m'étais imposés dans la construction de mon appareil.

106. Il suffira maintenant de quelques mots pour expliquer les divers réglages.

1^o *Direction des axes optiques dans le plan de l'axe général de l'instrument.*

La croisée des fils du réticule est à fort peu près au centre de chaque collimateur; l'axe optique se déplace par de petits mouvements de l'objectif, ainsi que le permet une disposition très-simple. Cette direction n'a nul besoin d'être rigoureusement réglée; un des moyens d'y parvenir consiste à projeter l'ombre solaire du réticule sur une lame de verre dépolie, placée exactement dans le plan de l'axe général; en examinant l'ombre sur diverses positions de la lame, on arrive d'abord à ajuster la lame, puis à vérifier la condition cherchée.

2^o *Réglage des axes optiques dans un même plan.*

Grâce à l'existence de trois collimateurs sur le même appareil, l'opération de réglage indiquée plus haut est simplifiée puisqu'on n'a pas besoin d'un collimateur auxiliaire étranger à l'instrument.

3^o *Réglage des appareils de polarisation.*

La même remarque s'applique ici au réglage des prismes de Nicol; le troisième collimateur fournit le prisme auxiliaire.

Je ferai remarquer en passant que les dimensions des petits limbes verticaux sont calculées de telle sorte qu'ils ne se gênent nullement dans leurs mouvements, aussi peuvent-ils être mis en *opposition* ou en *conjonction*, comme on dit en astronomie; de là des vérifications de réglage sur lesquelles je n'insisterai pas.

4^o *Réglage de la surface réfléchissante.*

Le cristal à essayer est collé avec un peu de cire molle

sur le limbe vertical du centre; il ne repose pas directement sur la surface de ce limbe, mais sur une lame métallique maintenue par trois vis avec ressorts, de telle sorte qu'on peut rendre la surface réfléchissante exactement normale à l'axe de rotation de ce limbe. A cet effet on projette l'ombre solaire du réticule sur un écran fixe et on tourne les vis jusqu'à ce que l'image reste fixe quand on tourne le cristal dans tous les azimuts.

Le reste du réglage ne présente plus de difficultés.

Mesures effectuées avec cet appareil.

107. Quoique j'aie effectué un grand nombre de mesures avec cet appareil, je n'en citerai que quelques-unes; la discussion et l'essai des méthodes précédemment décrites m'ont occupé longtemps, et je ne suis parvenu que depuis une époque assez récente à ce système si complet et si simple d'observations systématiques. Beaucoup des mesures effectuées avant cette époque sont entachées d'erreurs que je n'avais pas alors aperçues ou du moins éliminées avec certitude. Je me bornerai donc à un petit nombre d'exemples, me réservant plus tard de donner un tableau complet de vérifications expérimentales.

108. Les mesures suivantes portent sur quelques cas simples, mais caractéristiques; les substances choisies sont le spath d'Islande et le soufre; la surface réfléchissante était pour l'un une face de clivage récemment obtenue, pour l'autre une face de l'octaèdre. Je ne dirai rien des milieux isotropes, qui ont été si souvent étudiés.

Comme il est impossible d'embrasser tous les cas, même en se bornant à une seule surface réfléchissante, on va choisir comme types les phénomènes suivants :

- 1° Phénomènes sous l'incidence rasante;
- 2° Sous l'incidence de polarisation complète;
- 3° Sous l'incidence de 45 degrés environ;
- 4° Sous l'incidence normale.

Et ainsi de même pour divers azimuts, ou au moins pour deux azimuts rectangulaires convenablement choisis.

Le premier groupe ne donne lieu à aucune mesure intéressante au point de vue de la polarisation.

Incidence de polarisation complète.

109. Il y a trois méthodes pour déterminer cet angle. On cherche l'incidence qui éteint la lumière réfléchi :

1° En se servant d'un polariseur seul ;

2° En se servant d'un analyseur seul ;

3° Enfin, on peut employer à la fois les deux appareils en se fondant sur ce que sous cette incidence l'azimut de polarisation du rayon réfléchi est indépendant de l'azimut de polarisation incident. On cherche pratiquement cette incidence par la condition que la frange *pivote* autour du réticule quand on déplace le polariseur ou l'analyseur.

Sur diverses faces de clivage de spath d'Islande, le plan d'incidence étant la section principale, j'ai trouvé pour l'angle de polarisation complète :

57°20',8, moyenne de 12 observations très-concordantes.

57°22' $\frac{1}{2}$ " 10 "

57°17' " 10 "

57°16' " 16 "

Théoriquement on calcule (1) 57°22'; la vérification est donc très-satisfaisante.

En choisissant comme plan d'incidence le plan perpendiculaire, j'ai obtenu

$$59^{\circ}44' \text{ et } 59^{\circ}50'.$$

Théoriquement on trouve 59°50'.

Ici il y a un contrôle de plus, car le plan de polarisation du rayon réfléchi ne coïncide pas avec le plan d'incidence. J'ai observé qu'il est dévié de 2°27' $\frac{1}{2}$; le calcul donne 2°32'.

(1) En prenant comme indices les valeurs de Rudberg pour la raie D.

De plus, l'azimut de polarisation incidente qui éteint complètement le rayon réfléchi n'est pas exactement 90 degrés. La déviation observée est $2^{\circ}25\frac{1}{2}$. Théoriquement elle devrait être la même que précédemment et égale à $2^{\circ}32'$.

Le contrôle est donc encore très-satisfaisant.

110. J'avais fait plusieurs séries de déterminations d'angles de polarisation complète dans divers azimuts de réflexion sur des lames de clivage du spath; mais comme elles remontent à une époque assez ancienne, elles ne présentent pas les vérifications qui assureraient de leur validité; je ne les citerai pas. Mais je donnerai une série complète de semblables mesures effectuées sur une face de l'octaèdre du soufre. Les valeurs théoriques ne sont pas calculées parce que les trois indices principaux de cette substance que j'ai déterminées n'étant pas à l'abri de toute discussion, je n'ai pas voulu entreprendre inutilement des calculs numériques fort laborieux; mais ces mesures, outre l'intérêt qui s'attache à un cristal du système le plus général, offrent un intérêt particulier, à savoir une nouvelle vérification du théorème énoncé au n^o 73. La vérification indiquée plus haut est indépendante des mesures; celle qui suit dépend, au contraire, des valeurs numériques trouvées et va, par conséquent, donner une idée de l'approximation qu'on peut attendre de ces mesures. Ainsi, c'est un contrôle des méthodes de mesure autant qu'une vérification du théorème.

En effet, d'après cette proposition on conclut aisément que dans la formule $\tan \zeta (\omega - \xi) = k \tan (\alpha - \xi)$, ζ et ξ se changent mutuellement l'un en l'autre pour des azimuts de réflexion distants de 180 degrés, l'incidence restant la même.

AZIMUT de réflexion Z	I	ξ	ζ	AZIMUT de réflexion Z_1	I_1	ξ_1	ζ_1	DIFFÉRENCES.		
								I	ξ	ζ
0°	63.26'	-2.11'	-1.39'	180°	63.26'	-1.40'	-2.6'	0'	5'	1'
30	62.19	-1.26	0.14	210	62.39	-0.14	-1.16	-10	10	0
60	62.33	0.26	1.52	240	62.33	1.52	0.27	0	-1	0
90	63.39	1.12	2.47	270	63.49	2.56	1.17	-10	-5	9
120	64.58	0.17	1.27	300	64.45	1.28	0.23	+13	6	1
150	64.45	-1.23	-0.53	330	64.38	-0.51	-1.20	+7	3	-2
180	63.26	-1.40	-2.6	360	63.26	-2.11	-1.39	0	1	5

L'influence de la polarisation elliptique se fait sentir dans la mesure des incidences qui perdent une partie de leur précision, puisque la divergence s'élève une fois jusqu'à 13'; chacun des nombres I est la moyenne de douze observations.

Les angles ξ et ζ sont beaucoup plus concordants : chacun d'eux est la moyenne de huit observations.

Pour achever de déterminer l'orientation cristallographique des plans de réflexion, il suffira de dire que l'arête de la base de l'octaèdre est normale au plan d'incidence quand l'azimut $Z = 138^\circ 55'$.

Sur tous les limbes, les angles positifs sont comptés dans le sens des aiguilles d'une montre, l'observateur étant situé à l'extérieur de l'appareil (voir fig. 19, Pl. II).

Réflexion sous l'angle de 45 degrés.

111. A l'aide d'un grand nombre d'observations sur une lame de clivage de spath, j'ai calculé les trois coefficients ξ , ζ et k de la formule

$$\text{tang } tg(\alpha - \xi) = k(\text{tang } \omega - \zeta)$$

pour divers azimuts. La symétrie de la section principale montre qu'on peut se borner à considérer les azimuts compris entre 0 et 90 degrés. Mais les observations ont été faites

et calculées avant que j'aie découvert la proposition n° 73, de sorte qu'on jugera de l'approximation de ces mesures en comparant les azimuts symétriques par rapport à la section principale; on verra qu'elles sont un peu moins bonnes que les précédentes, mais elles ont pour moi un intérêt assez grand; elles ont été corrigées de l'erreur due aux prismes de Nicol à l'aide d'une formule empirique à une époque où je n'avais pas encore aperçu la cause de ces erreurs ni le moyen de les éliminer; en tout cas, ces mesures donnent une idée très-précise de la variation des déviations ξ et ζ avec l'azimut.

Z	ζ	ξ	arc tang k	Z	ζ	ξ	arc tang k
0°	0°	0°	16.30'	180°	0°	0°	16.47'
20	-2.43	-1.20	17.15	160	1.35	2.20	17.15
40	-3.55	-2.30	18.40	140	2.13	3.49	18.30
60	-3.52	-2.15	20.10	120	1.50	3.51	20.5
80	-2.22	-0.17	21.15	100	+0.7	+2.12	21.15

Le nombre des observations était de 306.

Je n'ai calculé théoriquement dans cette série que la valeur de arc tang k pour la section principale; j'ai trouvé 16° 36'. La moyenne entre 16° 30' et 16° 47', valeurs observées, donne 16° 38' $\frac{1}{2}$: la concordance ne laisse rien à désirer.

112. J'ai effectué les mesures analogues à peu près à la même époque sur une face de l'octaèdre du soufre; les calculs ont été obtenus de la même manière et ont conduit au tableau suivant, résumé de 204 observations.

Les azimuts principaux font avec le plan d'incidence et sa normale des angles qui peuvent dépasser 5 degrés, ce qui montre l'énergie biréfringente du soufre.

AZIMUT de réflexion Z	ζ	ξ	arc tang k	AZIMUT de réflexion Z	ζ	ξ	arc tang k
0°	-4. 0'	-3. 25'	22. 45'	180°	-3. 20'	-3. 55'	22. 45'
30	+1. 0	+1. 30	21. 15	210	+1. 30	+1. 15	21. 15
60	+3. 10	+5. 5	23. 20	240	+5. 15	+3. 55	23. 25
90	+4	+5. 5	27	270	+5. 15	+4. 5	27
120	-1. 35	-0. 58	28. 30	300	-0. 59	-1. 41	28. 33
150	-5. 10	-5. 20	26	330	-5. 10	-5. 5	26
180	-3. 20	-3. 55	22. 45	360	-4	-3. 25	22. 45

A l'azimut 10 degrés, l'arête de base de l'octaèdre est normale au plan d'incidence.

La concordance est encore ici bien satisfaisante, surtout si l'on songe combien le soufre est difficile à manier, combien sa surface est altérable, et quelles incertitudes cause la lumière elliptique produite par la réflexion.

113. J'ajouterai quelques remarques sur la manière de calculer ces constantes ξ , ζ , k . Les valeurs de ω et α , telles que l'observation les donne, satisfont à la relation générale d'homographie

$$A \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} \alpha + B \operatorname{tang} \omega + C \operatorname{tang} \alpha + D = 0.$$

On a vu comment de cette formule on déduit la relation

$$\operatorname{tang}(\alpha - \xi) = k \operatorname{tang}(\alpha - \zeta).$$

Pour calculer ces azimuts principaux ξ , ζ , il suffirait de déterminer le rapport des coefficients A, B, C, D à l'aide de trois systèmes d'observations. Mais le calcul direct et rigoureux est très-long, aussi vaut-il mieux prendre une méthode graphique rapide, et ensuite achever le calcul par approximations successives.

La méthode graphique suivante m'a rendu de grands services.

On trace sur une feuille de papier quadrillé à une échelle aussi grande que possible une série de courbes (*fig. 22. Pl. II*),

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} x.$$

En donnant à φ les valeurs 90, 89, 88 degrés, . . . , 46, 45, 44 degrés, . . . , 3, 2, 1 degrés, on limite ces courbes à un carré dont le côté représente 90 degrés. Elles s'épanouissent en partant du sommet $x = 0, y = 0$, et vont converger au sommet opposé.

On applique sur ce tableau une feuille d'un papier transparent, et on marque par abscisses et ordonnées les nombres observés; on fait, en outre, un point de repère sur cette feuille, par exemple $x = 45$ degrés, $y = 45$ degrés, puis on déplace la feuille parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que la série des points observés coïncide avec une des courbes tracées, ou avec une ligne fictive intermédiaire; le numéro d'ordre de la courbe donne à 10 ou 15 minutes près la valeur de φ .

La variation de l'abscisse et de l'ordonnée du point de repère définit les valeurs de ξ et ζ à 5 ou 6 minutes près. De plus, on aperçoit d'un seul coup d'œil les observations à rejeter et celles qu'on peut prendre pour base d'un calcul rigoureux.

114. On achève avec une règle à calcul particulière : les logarithmes des tangentes trigonométriques des arcs compris entre 45 degrés et 0° 30' y sont tracés; avec une règle de 75 centimètres de longueur, l'approximation ne s'abaisse pas au-dessous de 1 minute; on peut donc effectuer sans aucune peine toutes les opérations de la forme

$$\operatorname{tang}(\alpha - \zeta) = k \operatorname{tang}(\omega - \xi).$$

En différentiant cette relation, on obtient aisément une formule linéaire qui peut servir au calcul des approximations successives, à la condition de ne pas prendre pour α et ω d'angles dont la tangente trigonométrique soit trop grande ou trop petite.

Telle est la méthode à suivre dans le cas où l'on veut utiliser une série d'observations quelconques; en général, il vaut mieux définir les trois coefficients ξ , ζ , k par trois systèmes de valeurs convenablement espacées, choisir, par exemple, les systèmes correspondants à

$$\omega = 0, \quad \omega = 45 \text{ degrés}, \quad \omega = 90 \text{ degrés},$$

et y joindre comme vérification $\omega = 135$ degrés. Dès lors le tableau de courbes n'est plus aussi utile, parce que la détermination de ξ et ζ , généralement très-petits, s'obtient par l'intersection de deux lignes droites, dégénérescence de la courbe $\text{tang } \gamma = \text{tang } \varphi \text{ tang } \gamma$ aux environs de ses points d'inflexion $\gamma = 0, x = 0; \gamma = 90 \text{ degrés}, x = 90 \text{ degrés}$. Mais la règle à calcul conserve toujours son utilité.

Il est à peine utile de faire remarquer que ces contradictions et ces calculs contrôlent et vérifient la proposition du n° 46, à savoir que les plans de polarisation des rayons incident et réfléchi forment deux faisceaux homographiques.

Réflexion sous l'incidence normale.

115. Le phénomène de la déviation du plan de polarisation sous l'incidence normale est trop connu pour que j'insiste longuement sur sa description. On sait que si l'on prend pour axes de coordonnées sur la surface cristalline les deux directions rectangulaires des vibrations réfractées correspondant au rayon incident normal, on obtient la formule

$$\text{tang } z = \text{tang } \omega \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} \cdot \frac{n_2 + 1}{n_2 - 1},$$

dans laquelle ω est l'azimut de polarisation incidente, et z l'azimut de polarisation réfléchi.

Cette expression, qui est de la forme

$$\text{tang } z = h \text{ tang } \omega,$$

peut être transformée en cette autre

$$\text{tang}(\omega - z) = \frac{1 - h}{2\sqrt{h}} \sin 2\varphi,$$

en posant

$$\text{tang } \varphi = \sqrt{h} \text{ tang } \omega;$$

d'où l'on conclut la *loi de déviation* du plan de polarisation réfléchi. Les écarts extrêmes sont donnés par la formule

$$\pm \frac{1-h}{2\sqrt{h}}.$$

La disposition très-simple indiquée (*fig. 17 et 18. Pl. I*) permet de réaliser aisément les mesures.

Un rayon polarisé dans le plan d'incidence se réfléchit sur une lame de crown-glass sous l'angle de 45 degrés environ : le rayon se réfléchit normalement sur la surface cristalline choisie; il revient, traverse la lame et est analysé par un prisme de Nicol placé sur un petit cercle divisé. La surface cristalline est également posée sur un limbe gradué. Le reste se comprend aisément. Les déviations observées ont été altérées par le passage du rayon réfléchi à travers la lame; mais on les corrige aisément en substituant au rayon réfléchi sur la face cristalline un rayon directement polarisé dont on fait varier l'azimut.

116. Je citerai seulement les résultats que j'ai obtenus.

Pour le spath j'ai trouvé $\pm 3^{\circ} 17'$; la théorie donne $\pm 3^{\circ} 18'$. J'ai contrôlé encore cette valeur $3^{\circ} 18'$ en déterminant directement les indices n_1, n_2 à l'aide de trois prismes en spath, dont l'une des faces était un clivage naturel. En opérant la réfraction *sous l'incidence normale*, j'ai obtenu pour la raie D

$$n_1 = \begin{cases} 1,6595 \\ 1,6585 \\ 1,6581 \end{cases} \quad n_2 = \begin{cases} 1,5677 \\ 1,5661 \\ 1,5664 \end{cases}$$

$$\text{Moyenne } n_1 = 1,6588 \quad \text{Moyenne } n_2 = 1,5668$$

En substituant ces valeurs dans la formule, on trouve $3^{\circ} 18'$.

Pour le soufre, face de l'octaèdre, j'ai effectué la même série d'opérations. La déviation observée = $\pm 3^{\circ} 41'$. A

l'aide de quatre prismes en soufre, j'ai déterminé les deux indices correspondants :

$$n_1 = \begin{cases} 1,9954 \\ 2,0064 \\ 2,0050 \\ 2,0070 \\ \hline \text{Moyenne } n_1 = 2,0035 \end{cases} \quad n_2 = \begin{cases} 2,2044 \\ 2,2172 \\ 2,2187 \\ 2,2110 \\ \hline \text{Moyenne } n_2 = 2,2128 \end{cases}$$

d'où l'on déduit $\pm 3^{\circ}48'$.

C'est la seule *comparaison numérique* que j'aie obtenue, pour le soufre, entre les phénomènes de réflexion et ceux de réfraction (1).

Description de quelques organes cinématiques destinés à vérifier ou à représenter quelques lois de la réflexion de la lumière polarisée.

417. *Appareil de mesures.* — On peut avec l'appareil décrit plus haut vérifier synthétiquement les lois géométriques fondamentales de la réflexion de la lumière polarisée.

1^o *Milieux isotropes.* — On a vu au n^o 42 que dans ce cas simple les trois plans de normalisation se coupent suivant une même droite perpendiculaire au rayon réfracté : une disposition cinématique très-simple permet de donner aux prismes de Nicol de mon appareil les mouvements simultanés définis par cette proposition.

En effet, les petits limbes verticaux L, L', L'', peuvent tourner autour de leur axe de figure : un arc métallique E,

(1) J'ai éprouvé beaucoup de difficultés à mesurer les indices principaux du soufre. Je crains d'ailleurs que, pour un corps aussi réfringent et aussi biréfringent, la forme admise pour la surface d'onde lumineuse ne soit pas à l'abri de toute discussion. Je donnerai néanmoins ici les nombres que j'ai obtenus pour la raie D en appliquant les calculs ordinaires; mais je me réserve de revenir sur ce point :

$$1,958 \quad 2,038 \quad 2,240$$

E' , E'' , lié à leur mouvement, définit matériellement un plan passant par le rayon correspondant. L'arc métallique E'' figurant le plan de normalisation réfracté porte une tige rigide $E''T$ normale à la direction du rayon; cette tige, à l'aide de pinces à ressorts, s'appuie toujours sur les deux autres arcs, de sorte que son mouvement entraîne le mouvement des deux autres arcs : ces arcs, de forme semi-circulaire, sont travaillés avec soin de façon que leur bord soit aussi plan que possible : on a tenu compte de l'épaisseur de la tige directrice.

118. Si l'on dispose au centre du cercle une surface réfléchissante, et qu'on dirige l'axe des collimateurs suivant les rayons incident, réfléchi et réfracté, la disposition cinématique adoptée permettra de diriger les sections principales des prismes de Nicol, de telle sorte que les rayons réfléchis et réfractés soient constamment éteints quelle que soit la polarisation incidente. Je n'insiste pas sur les conditions de réglage qui s'offrent d'elles-mêmes après tout ce qui a été dit à ce sujet. Mais il est nécessaire d'ajouter que pour que le rayon réfracté soit éteint dans toutes les positions, il faut que la réfraction à la seconde surface ne modifie pas l'azimut de polarisation produit par la réfraction à la première surface; donc la seconde surface doit être normale au rayon réfracté; par suite, la surface réfléchissante doit être la face d'un prisme d'angle convenable.

Le phénomène est assez net pour qu'on puisse, dans le cas où l'on opère avec une seule surface réfléchissante, déterminer le rayon réfracté, par suite l'indice de réfraction à l'aide de phénomènes de pure réflexion. En effet, les rayons incident et réfléchi étant réglés, on détermine la position du troisième collimateur par la condition d'extinction dans tous les azimuts de polarisation incidents : on obtient ainsi la direction du rayon réfracté.

On obtient même très-exactement le double de l'angle de réfraction en remarquant que *les plans de polarisation*

des rayons incident et réfléchi se coupent suivant une droite normale au symétrique du rayon réfracté.

119. 2° *Milieux cristallisés.* — La détermination de l'indice de réfraction des milieux isotropes m'a réussi assez bien avec le dispositif précédent pour que j'aie songé à déterminer directement les trois constantes ξ , ζ , k des milieux cristallisés : on voit en effet que le mécanisme peut, même dans le cas le plus général des cristaux, guider la position relative des prismes de Nicol incident et réfléchi, de telle sorte que le rayon réfléchi soit constamment éteint ; car la loi $\tan(\alpha - \xi) = k \tan(\omega - \zeta)$ des milieux cristallisés ne diffère de la loi correspondante des milieux isotropes $\tan \alpha' = k \tan \omega'$ que par la déviation de l'origine des azimuts α' , α , ω' ; donc, si on fait subir aux prismes de Nicol les déviations ξ et ζ et qu'on donne au collimateur réfracté la position définie par l'angle auxiliaire r ,

$$k = \frac{\tan(i + r)}{\tan(i - r)},$$

la condition d'extinction constante du rayon réfléchi sera obtenue.

J'ai trouvé plusieurs méthodes assez simples pour opérer cette détermination directe de ξ , ζ et k : malheureusement la précision des organes cinématiques est assez limitée, et comme les angles ξ et ζ sont très-petits en général, les flexions inévitables de la tige directrice introduisent des erreurs assez graves et difficiles à éliminer : je ne parlerai donc pas de ces méthodes. Mais si l'on se borne à demander à l'appareil, non plus des déterminations directes, mais de simples vérifications de valeurs déjà calculées, l'emploi de ce dispositif est satisfaisant.

Appareil de démonstration.

120. On a vu que dans les milieux isotropes la loi d'orientation simultanée des plans de polarisation des rayons inci-

dent, réfléchi et réfracté était exprimée analytiquement par la formule

$$\frac{\text{tang } \omega}{\cos(i - r)} = \frac{\text{tang } \beta}{\cos(i + r)} = \frac{\text{tang } \gamma}{1},$$

loi qu'on peut énoncer ainsi (n° 40) :

Les tangentes trigonométrique des angles que font les plans de polarisation des trois rayons avec le plan d'incidence sont respectivement proportionnelles aux cosinus que fait chacun des rayons avec le rayon réfracté.

Or, il existe un organe cinématique nommé *joint universel* ou *joint hollandais*, ou encore *croisillon*, qui permet de transmettre un mouvement de rotation d'un axe à un autre axe incliné sur le premier, mais situé dans le même plan. Ce petit appareil est représenté *fig. 24*. On démontre aisément que les déplacements angulaires correspondants θ , θ' de ces deux axes sont liés par la relation

$$\frac{\text{tang } \theta}{\text{tang } \theta'} = \cos V,$$

V étant l'angle des deux axes.

On en conclut que si l'on a deux axes faisant entre eux l'angle $(i + r)$ et qu'on les lie par un croisillon, leurs déplacements angulaires correspondants seront identiques à ceux des plans de polarisation des rayons incident et réfracté, définis respectivement par les angles i et r . De même, si on lie le second axe, celui qui représente le rayon réfracté, par un croisillon faisant avec lui l'angle $(i - r)$ et avec le premier l'angle $2i$, on complétera la réalisation cinématique de la loi de Fresnel en déterminant la position du plan de polarisation du rayon réfléchi.

On peut, à l'aide de ce petit appareil, suivre toutes les lois des milieux isotropes : des articulations rigides peuvent aisément lier les axes suivant la loi du sinus (voir *fig. 25* et *26*), en sorte qu'on résume en un organe cinéma-

tique très-simple les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

C'est, je crois, un bon appareil de démonstration.

Toutes les remarques énoncées dans les n^{os} 41, 42, 43, 44 deviennent évidentes à la simple inspection de ce petit appareil.

Vu et approuvé,

Le 8 juin 1867.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer,

Le 8 juin 1867.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DE CHIMIE DONNÉES PAR LA FACULTE.

Loi de Mitscherlich.

Reproduction artificielle des Minéraux.

Vu et approuvé.

Le 8 juin 1867.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MILNE EDWARDS.

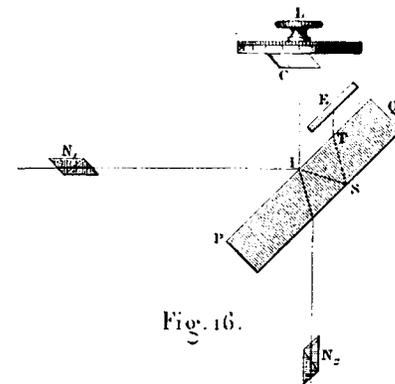
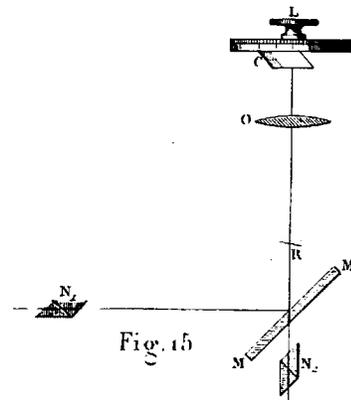
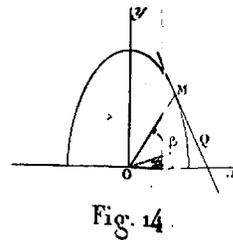
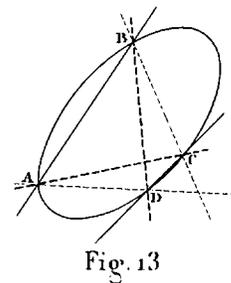
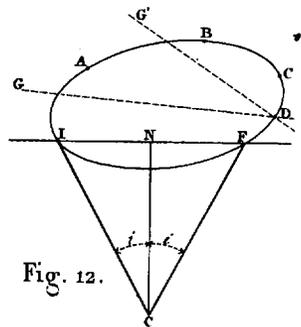
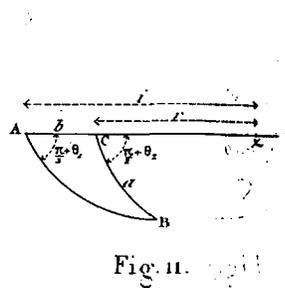
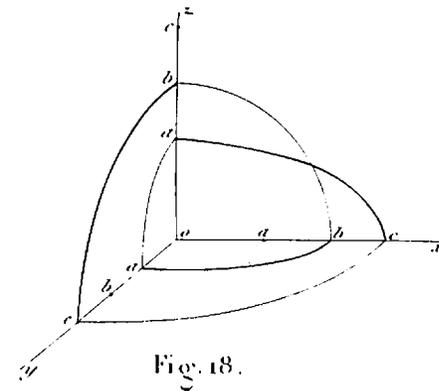
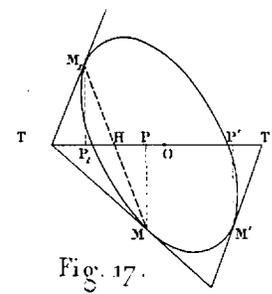
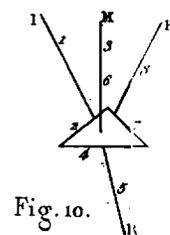
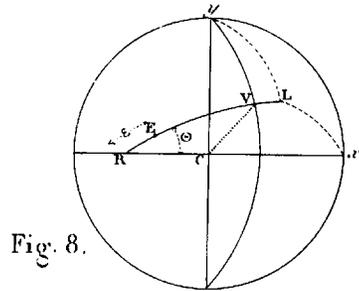
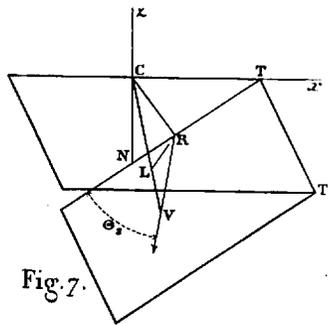
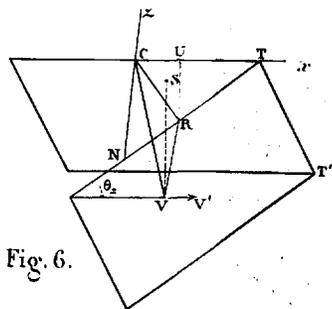
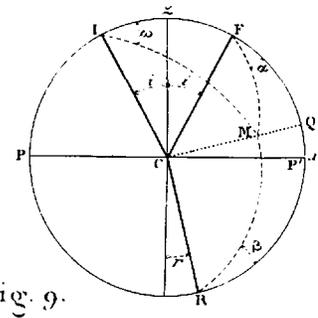
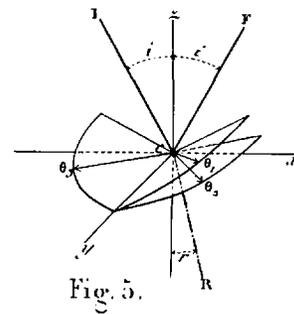
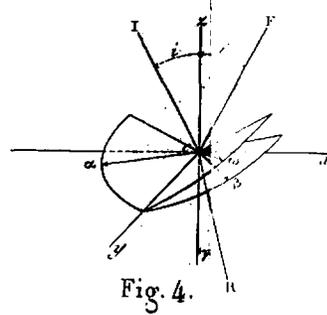
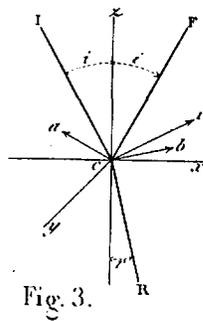
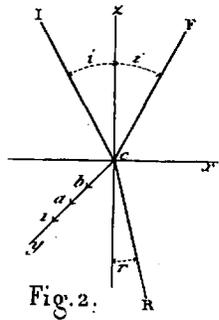
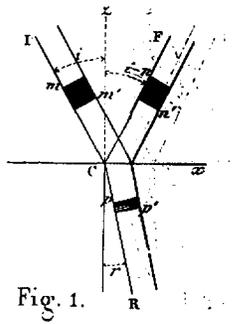
Permis d'imprimer,

Le 8 juin 1867.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
A. MOURIER.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine Saint-Germain, 10, près l'Institut.

Recherches sur la Réflexion cristalline par M. A. Cornu.



Recherches sur la Réflexion cristallines par M. A. Cornu.

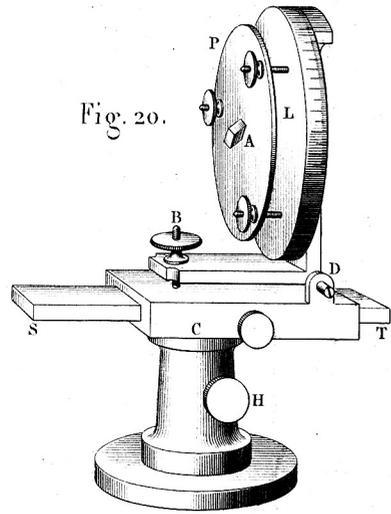


Fig. 20.

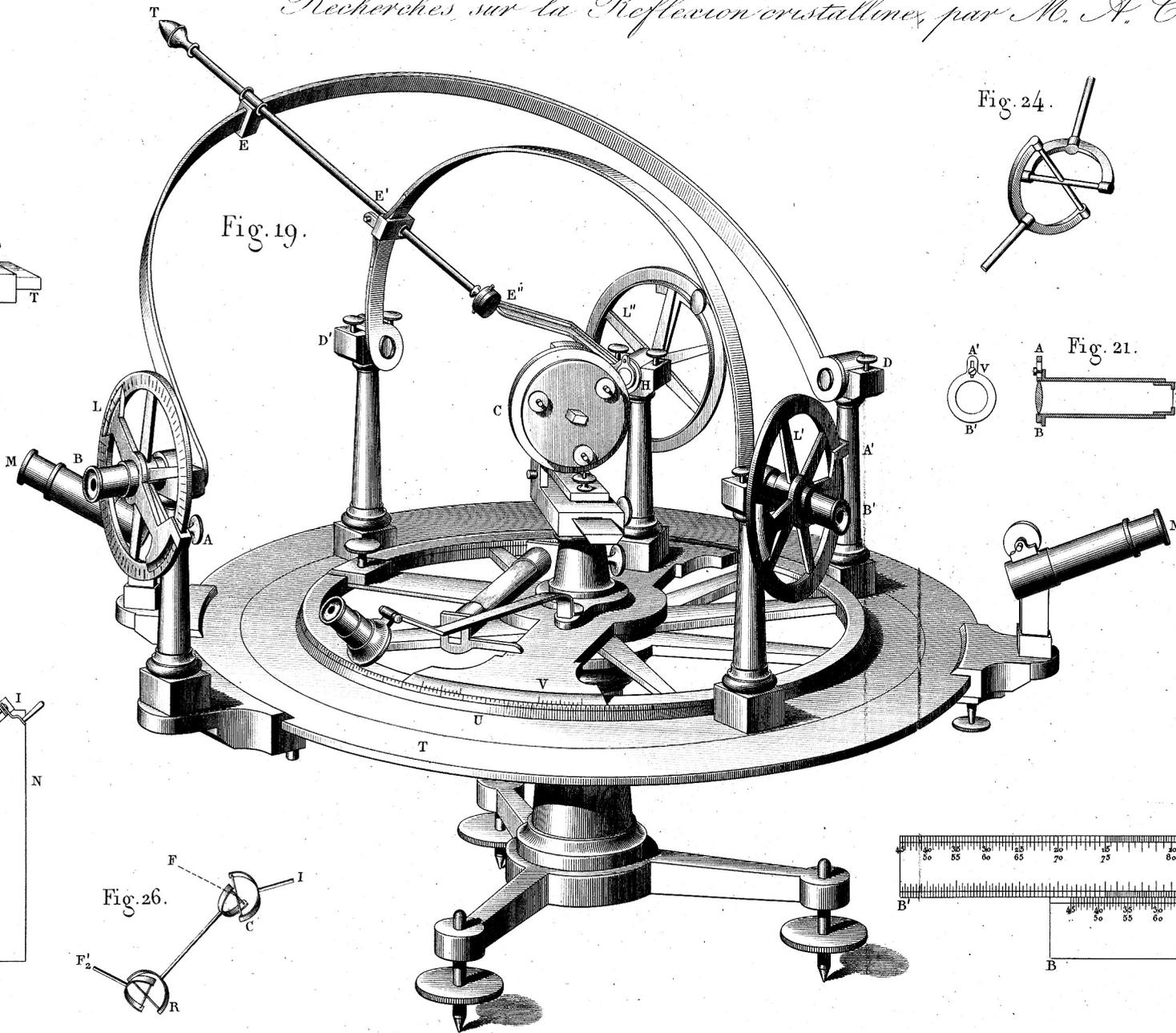


Fig. 19.

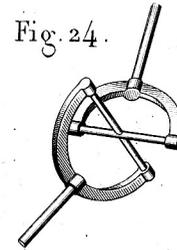


Fig. 24.

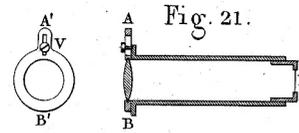


Fig. 21.

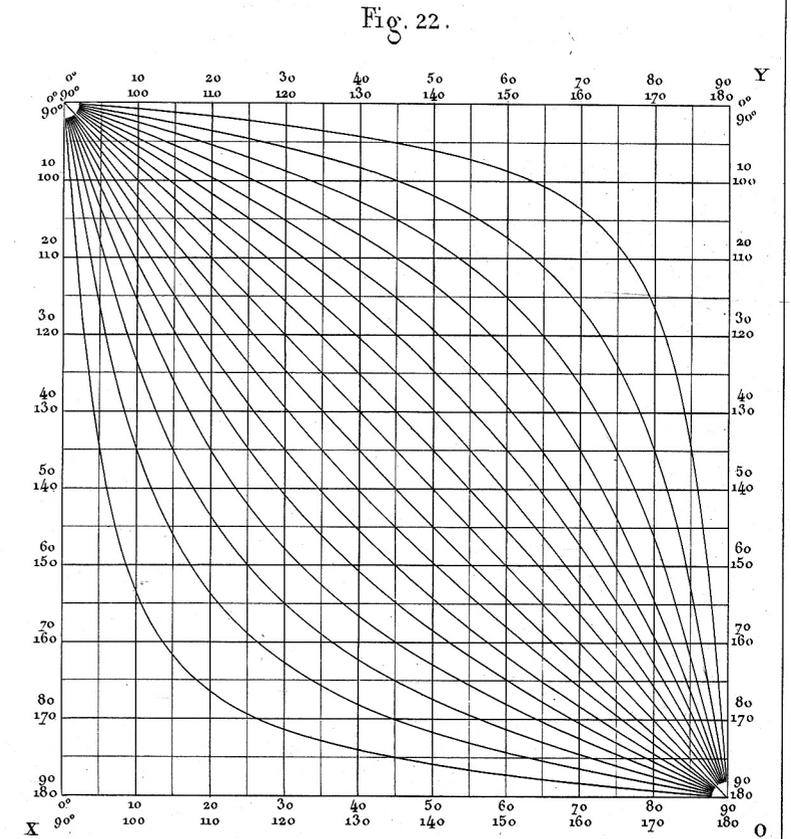


Fig. 22.

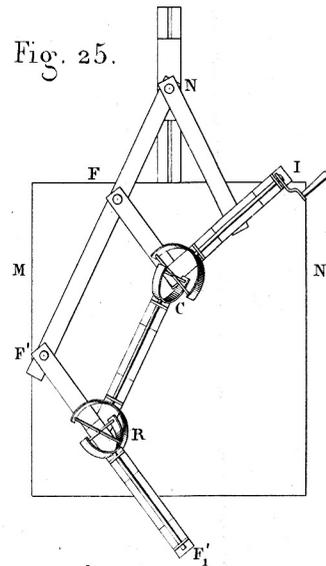


Fig. 25.

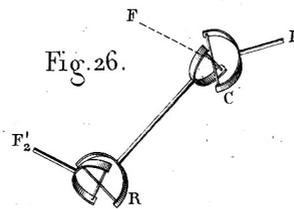


Fig. 26.

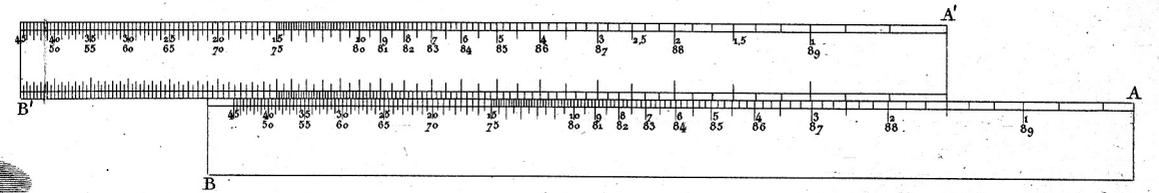


Fig. 23.

