N° D'ORDRE
406

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. A. LEGOUX

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE D'ANGOULÊME
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
ancien élève de l'École Normale supérieure

1re THÈSE. — Étude analytique et géométrique d'une famille de courbes représentées par une équation différentielle du premier ordre.
2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 13 Juin 1878, devant la Commission d'Examen

MM. BOUQUET, *Président.*
O. BONNET, DARBOUX, *Examinateurs.*

BORDEAUX
IMPRIMERIE G. GOUNOUILHOU
11, — RUE GUIRAUDE, — 11

1878

ACADÉMIE DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES.	DUMAS.	
	PASTEUR.	
	DELAFOSSE.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
	O. BONNET	Astronomie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

PREMIÈRE THÈSE

ÉTUDE ANALYTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE

D'UNE

FAMILLE DE COURBES

REPRÉSENTÉES

PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Les courbes qui font l'objet de ce travail sont représentées par l'équation différentielle du premier ordre :

$$(1) \qquad \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}p\alpha + \mathrm{C}\alpha^2 + \mathrm{D}p + \mathrm{E}\alpha + \mathrm{F} = 0,$$

où

$$p = \frac{dy}{dx}, \qquad \alpha = y - px.$$

A, B, C, D, E, F représentent des fonctions linéaires de x et de y.

Si l'on ordonne l'équation (1) relativement à p, on trouve

$$(\mathrm{A} - \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2)p^2 + (\mathrm{B}y - 2\mathrm{C}xy + \mathrm{D} - \mathrm{E}x)p + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0,$$

ou

$$\mathrm{M}p^2 + \mathrm{N}p + \mathrm{Q} = 0,$$

en posant :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} - \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{B}y - 2\mathrm{C}xy + \mathrm{D} - \mathrm{E}x, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{C}y^2 + \mathrm{E}y + \mathrm{F}.$$

Il est facile de voir que ces courbes sont telles qu'il en passe deux par chaque point du plan et qu'il en existe une seule tangente à une droite donnée du plan ; ce sont donc les courbes dont les caractéristiques sont 2 et 1, c'est-à-dire les courbes du système (2,1), d'après les notations de M. Chasles.

En effet, soient x' et y' les coordonnées d'un point quelconque du plan; si l'on remplace dans l'équation (1) x et y par x' et y', cette équation sera du second degré en p; elle déterminera les coefficients angulaires des tangentes de deux courbes du système passant par ce point.

Soit maintenant une droite donnée L ; cherchons combien de courbes du système sont tangentes à cette droite. Cette droite L devant être tangente à une courbe du système en un certain point (x, y), son coefficient angulaire sera égal à p et son ordonnée à l'origine $\alpha = y - px$; donc, si l'on donne la droite L, les deux quantités p et α seront déterminées; désignons-les par p' et α'. Pour avoir les coordonnées du point de contact, il faudra résoudre les deux équations

$$\mathrm{A}p'^2 + \mathrm{B}p'\alpha' + \mathrm{C}\alpha'^2 + \mathrm{D}p' + \mathrm{E}\alpha' + \mathrm{F} = 0, \qquad \alpha' = y - p'x,$$

et comme elles sont du premier degré relativement à x et à y, elles n'ont qu'une seule solution.

Les considérations précédentes sont dues à M. Fouret, qui les a développées dans deux Communications à l'Académie des Sciences [1] et qui les a appliquées à l'étude des courbes du système (1,1). Comme je m'occupais depuis longtemps de la recherche d'un système de courbes planes orthogonales dont les coniques homofocales ne seraient qu'un cas particulier, et comme ces coniques sont des courbes faisant partie d'un système (2,1), j'eus l'idée, en prenant connaissance du Mémoire de M. Fouret, de rechercher toutes les courbes faisant partie de ce système, lesquelles sont représentées analytiquement par l'équation différentielle (1).

D'abord je pus me convaincre, en prenant de nombreux cas particuliers, qu'un pareil système comprend aussi bien des courbes transcendantes que des courbes algébriques, comme M. Fouret l'avait remarqué pour les courbes du système (1,1), qui représente, dans le cas le plus général, des courbes transcendantes, transformées homographiques des spirales logarithmiques, et comme cas particulier, des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés, et des cercles concentriques. Seulement, dans le système (2,1), la variété des courbes est beaucoup plus grande, et la méthode suivie par M. Fouret pour étudier les courbes du système (1,1) et pour trouver l'intégrale ne paraît plus devoir s'appliquer ici.

Je donne d'abord quelques théorèmes généraux qui s'appliquent à toutes les courbes du système.

Ensuite j'étudie particulièrement les courbes orthogonales de ce système qui

---

(1) *Comptes rendus*, t. LXXVIII.

correspondent au cas où $Q = -M$, puis les courbes qui correspondent au cas où $Q = M$.

Je démontre une propriété des courbes orthogonales qui permet de construire géométriquement les deux tangentes aux deux courbes du système qui passent par un point donné, construction géométrique d'où l'on déduit comme cas particulier la construction des deux tangentes en un point du plan des deux coniques homofocales à une conique donnée.

Cette construction géométrique a ceci de remarquable, qu'elle s'applique aussi bien aux courbes transcendantes qu'aux courbes algébriques du système (2,1).

Je donne également une construction géométrique des deux tangentes en un point, dans le cas où $Q = M$.

Ces constructions géométriques sont fondées sur des propriétés bien connues et bien simples des sections coniques.

L'intégration de l'équation différentielle peut s'effectuer dans un cas particulier, et fournit, aussi bien pour $Q = -M$ que pour $Q = M$, un système de courbes transcendantes et un système de courbes algébriques de tous les ordres.

Comme cas particulier des courbes orthogonales, on retrouve les courbes du second ordre homofocales, ce qui fournit une vérification.

La forme extrêmement simple et symétrique de l'équation des courbes algébriques précédentes rend facile l'étude de leurs principales singularités : asymptotes, points singuliers, foyers, etc.

La méthode analytique que j'applique est la suivante :

Elle repose sur la transformation par les polaires réciproques, en prenant pour conique directrice la parabole

$$x^2 = 2y \text{ (1)}.$$

L'équation différentielle (1) devient, par suite de cette transformation, du premier degré relativement à p' et α', et du second degré en x' et y' ; si l'on désigne par les mêmes lettres accentuées les variables relatives à la courbe polaire réciproque de la première, on a

$$x = p', \qquad y = p'x' - y' = -\alpha', \qquad p = x' \text{ (2)},$$

et

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

---

(1) Voir Chasles, *Aperçu historique : Sur les courbes et les surfaces réciproques de Monge*, p. 376.
(2) Chasles, *loc. cit.*

où

$$A', B', C', \dots,$$

sont des fonctions linéaires de p' et de α'.

Cette équation représente toutes les courbes du système (1,2).

On peut dans certains cas effectuer l'intégration de cette équation différentielle; on trouve, par exemple, des courbes algébriques d'ordre quelconque ; l'étude de la forme et des propriétés de ces courbes se fait sans difficulté à cause de la simplicité de leur équation, et l'on conclut, en transformant par les polaires réciproques, les propriétés des courbes correspondantes du système (2,1) représentées par l'équation (1). Si je ne me trompe, ce système orthogonal n'est pas connu. J'applique ensuite la méthode de transformation parabolique à quelques exemples simples et connus de courbes du système (2,1), pour montrer comment elle donne presque immédiatement l'intégrale des courbes polaires réciproques des proposées, et je termine en montrant qu'elle fournit dans beaucoup de cas, et notamment dans ceux que j'ai traités précédemment, un critérium pour reconnaître si la courbe

$$R = N^2 - 4MQ = 0$$

représente l'enveloppe des courbes du système ou le lieu des points de rebroussement de ces courbes.

Enfin, il est important de remarquer que, par la méthode précédente, on étudie en même temps les propriétés des courbes du système (2,1) et les propriétés des courbes du système (1,2).

CHAPITRE Ier

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES DU SYSTÈME (2,1)

THÉORÈME I. — *Le lieu des points de contact des tangentes menées aux courbes du système par un point donné* O *est une cubique ayant pour point double le point* O, *et les deux tangentes à cette cubique au point* O *sont précisément les deux tangentes aux deux courbes du système qui passent par ce point.*

Démonstration analytique. — Soient a, b les coordonnées du point O, x et y les coordonnées d'un des points de contact. Le coefficient angulaire d'une tangente menée par O à une des courbes du système sera $\frac{y-b}{x-a}$, et, en remplaçant p par ce rapport dans l'équation (1), on aura, pour le lieu des points de contact,

$$A(y-b)^2+B(y-b)[y(x-a)-x(y-b)]+C[y(x-a)-x(y-b)]^2$$
$$+D(y-b)(x-a)+E[y(x-a)-x(y-b)](x-a)+F(x-a)^2=0,$$

ou bien

$$(y-b)^2(A-Bx+Cx^2)+(y-b)(x-a)(By-2Cxy+D-Ex)$$
$$+(x-a)^2(Cy^2+Ey+F)=0,$$

ou bien enfin

$$(2) \qquad M(y-b)^2+N(y-b)(x-a)+Q(x-a)^2=0.$$

Cette équation paraît être du 5e ordre; mais si on la considère sous sa première forme, on voit sans peine que les termes du 5e et du 4e ordre disparaissent.

Si le point de contact considéré vient en O sur l'une ou l'autre branche de la cubique, les tangentes aux deux courbes du système qui passent par ce point coïncident évidemment avec les tangentes à la cubique.

Démonstration géométrique. — Soit à trouver en général le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées d'un point donné à toutes les courbes d'un système (μ, ν).

Soit une droite quelconque OX passant par O; il existe ν courbes du système tangentes à cette droite, donc déjà ν points du lieu sur OX; de plus, il y a μ courbes du système passant par le point O, ce qui montre que le point O est un point multiple d'ordre μ; donc il y a $\mu+\nu$ points du lieu sur la droite OX; le lieu est une courbe d'ordre $\mu+\nu$, ayant en O un point multiple d'ordre μ.

Si $\mu=2$, $\nu=1$, le lieu sera une cubique ayant O pour point double.

Ce théorème, ainsi que le suivant, a été démontré par M. Chasles pour les coniques d'un système (μ,ν); mais l'ordre et la classe n'intervenant pas dans la démonstration, il sera vrai pour des courbes d'ordre quelconque; bien plus, la démonstration ne supposant nullement que les courbes sont algébriques, le théorème s'applique aussi aux courbes transcendantes du système.

Théorème II. — *Les tangentes menées aux courbes d'un système* (μ,ν) *par les points où elles coupent une droite* D *enveloppent une courbe de classe* $\mu+\nu$ *qui a la droite* D *pour tangente multiple d'ordre* ν.

Prenons, en effet, un point A sur la droite D; par ce point A passent μ courbes du système, auxquelles correspondent μ tangentes passant par ce point A.

De plus, il y a ν courbes du système tangentes à D; donc ν tangentes issues de A coïncident avec D; donc la courbe enveloppe est de classe $\mu+\nu$, et elle a ν tangentes coïncidant avec D.

Dans le cas actuel, $\mu=2, \nu=1$; donc la courbe enveloppe est de 3e classe, et elle est tangente à D.

Remarque. — Le théorème précédent s'applique aussi bien aux courbes transcendantes qu'aux courbes algébriques du système.

Les deux théorèmes précédents sont corrélatifs; si l'on transforme par les polaires réciproques, le théorème I a pour corrélatif le théorème II.

Mais les courbes transformées du système (2,1) sont les courbes du système (1,2); on peut donc dire que :

Les tangentes menées aux courbes du système (1,2) *par les points où elles coupent une droite* D *enveloppent une courbe de* 3e *classe qui a la droite* D *pour tangente double.*

Théorème III. — *Le lieu des points de rebroussement des courbes du système est une courbe du* 4e *ordre.*

On sait [1] que l'équation

$$R=N^2-4MQ=0, \tag{3}$$

[1] Voir une note de M. Darboux, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXI, p. 267.

qui exprime que l'équation (1) a ses deux racines égales, représente, en général, le lieu des points singuliers des courbes du système. Dans le cas particulier où ces courbes ont une enveloppe, la courbe R représente cette enveloppe.

Comme les polynômes N, M, Q sont du troisième degré, cette courbe R paraît être du 6e ordre; mais à cause de la composition de ces polynômes, on reconnaît sans peine, en effectuant les calculs, que les termes du 5e ordre et ceux du 6e ordre disparaissent, de sorte que R est du 4e ordre seulement.

La courbe R ne représente l'enveloppe des courbes du système que dans le cas où ces courbes sont des coniques, et on a le système de coniques inscrites dans un quadrilatère. Dans les autres cas, comme nous le verrons par la suite, la courbe R est le lieu des points de rebroussement.

En effectuant les calculs, l'équation (3) peut s'écrire

$$0 = E^2x^2 + B^2y^2 + D^2 - 2BExy + 2BDy - 2DEx - 4CFx^2 - 4ACy^2 - 4AF + 4CDxy + 4BFx - 4AEy,$$

ou

$$(E^2 - 4CF)x^2 + (B^2 - 4AC)y^2 + 2(2CD - BE)xy + 2(2BF - DE)x + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF = 0.$$

Corollaire. — La cubique (2) est tangente à la courbe $R = 0$ aux points d'intersection de R avec la cubique

$$2M(y-b) + N(x-a) = 0.$$

L'équation de la cubique (2) peut, en effet, s'écrire

$$\left(\frac{y-b}{x-a} + \frac{N}{2M}\right)^2 + \frac{4MQ - N^2}{4M^2} = 0, \quad \text{ou} \quad \left[\frac{2M(y-b)}{x-a} + N\right]^2 + R = 0.$$

CHAPITRE II

COURBES ORTHOGONALES DU SYSTÈME (2,1), CONSTRUCTION DES TANGENTES

ARTICLE I

Notations adoptées. — On posera, dans l'équation (1),

$$\begin{aligned} A &= m\,x + n\,y + l, & D &= m_3x + n_3y + l_3, \\ B &= m_1x + n_1y + l_1, & E &= m_4x + n_4y + l_4, \\ C &= m_2x + n_2y + l_2, & F &= m_5x + n_5y + l_5. \end{aligned}$$

Si l'on cherche la transformée de l'équation (1),

$$Mp^2 + Np + Q = 0, \tag{1}$$

par polaires réciproques, en prenant pour conique directrice la parabole

$$x^2 = 2y,$$

et si l'on désigne par des lettres accentuées les quantités correspondantes relatives aux courbes corrélatives ; ainsi, si x' et y' sont les coordonnées d'un point d'une de ces courbes, p' le coefficient angulaire de la tangente en ce point, on sait [1] que, pour avoir l'équation différentielle des courbes corrélatives, il faut faire, dans l'équation (1),

$$x = p', \qquad y = p'x' - y', \qquad p = x'.$$

Après cette substitution, l'équation (1) devient

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} & p'\left[(m+nx')x'^2 - (m_1+n_1x')x'y' + (m_2+n_2x')y'^2 + (m_3+n_3x')x' \right. \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \left. - (m_4+n_4x')y' + m_5 + n_5x'\right] \\ & + (l-ny')x'^2 - (l_1-n_1y')x'y' + (l_2-n_2y')y'^2 + (l_3-n_3y')x' \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad - (l_4-n_4y')y' + l_5 - n_5y' = 0. \end{aligned} \right.$$

---

(1) Chasles, *Aperçu historique.*

Cette équation (4) représente les courbes du système (1,2), c'est-à-dire des courbes telles qu'il en passe une seule par un point donné du plan, et qu'il en existe *deux* tangentes à une droite donnée.

On conçoit que, si l'on pouvait connaître les propriétés des courbes de ce système (1,2), et si l'on pouvait les construire géométriquement, on déduirait de là, sans difficulté, les propriétés des courbes corrélatives du système (2,1) et leur construction géométrique. On verra facilement que les courbes représentées par l'équation

$$Mp^2 + Np + Q = 0$$

sont orthogonales si $Q = -M$; or, pour que cette condition soit satisfaite, il faut que l'on ait, entre les coefficients, les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} m_2 = 0, & m_4 = n_1, & l_5 = -l, \\ n_2 = 0, & m - l_1 = -m_5, & \\ l_2 = -n_4 = m_1, & l_4 + n_5 = -n, & \end{array}$$

et alors :

$$M = -Q = -n_1 xy + (m - l_1)x + ny + l,$$
$$N = n_1(y^2 - x^2) + (l_1 + n_3)y + (m_3 - l_4)x + l_3.$$

On remarque d'abord que

$$R = N^2 + 4M^2 = 0.$$

Cette courbe du 4ᵉ ordre se décompose en deux paraboles imaginaires dont les axes sont parallèles aux asymptotes imaginaires du cercle et dont les équations sont

$$N - 2Mi = n_1(y + ix)^2 + \ldots,$$
$$N + 2Mi = n_1(y - ix)^2 + \ldots,$$

où $i = \sqrt{-1}$.

Ces deux paraboles imaginaires se coupent aux points d'intersection des deux hyperboles équilatères $M = 0$, $N = 0$.

ARTICLE II

Construction géométrique des tangentes en un point donné aux deux courbes du système orthogonal (2,1) qui passent en ce point.

Considérons l'équation différentielle des courbes orthogonales

$$M(p^2 - 1) + Np = 0,$$

où M et N ont la valeur trouvée plus haut; $M=0$ et $N=0$ représentent deux hyperboles équilatères.

THÉORÈME. — *Les directions des tangentes rectangulaires aux deux courbes du système qui passent par un point* (α, β) *sont parallèles aux deux asymptotes de l'hyperbole équilatère qui passe par ce point et par les quatre points d'intersection des courbes* M *et* N.

En effet, les directions des deux tangentes aux deux courbes du système passant par ce point sont les deux racines de l'équation du second ordre

$$(p^2-1)M_1+N_1p=0,$$

en posant

$$N_1=n_1(\beta^2-\alpha^2)+\ldots, \qquad M_1=-n_1\alpha\beta+(m-l_1)\alpha+n\beta+l.$$

D'un autre côté, l'équation d'une hyperbole équilatère passant par les deux points d'intersection de M et de N est de la forme

$$M+\lambda N=0,$$

λ étant un paramètre arbitraire.

On détermine λ par la condition que l'hyperbole équilatère passe au point (α, β), ce qui donne

$$M_1+\lambda N_1=0.$$

Or, si l'on désigne par t le coefficient angulaire des asymptotes de l'hyperbole $M+N\lambda=0$, on voit que t satisfait à l'équation

$$-t+\lambda(t^2-1)=0,$$

ou

$$M_1(t^2-1)+N_1t=0,$$

ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Si l'on considère une des hyperboles équilatères de la série $M+\lambda N=0$, les tangentes aux deux courbes du système qui passent en un point quelconque de cette hyperbole équilatère ont la même direction, qui est celle des asymptotes de l'hyperbole équilatère considérée.

Ce théorème fournit une solution géométrique très simple de la construction des deux tangentes aux deux courbes du système qui passent en un point donné.

Soient A, B, C, D les quatre points d'intersection des deux hyperboles équilatères M et N; on sait que ces quatre points sont tels que l'un quelconque d'entre eux peut être considéré comme le point de concours des hauteurs du triangle formé par les trois autres.

Soit O le point donné. La question se ramène à la suivante :

Étant donnés cinq points O, A, B, C, D, situés sur une conique, mener par le point O deux droites parallèles aux asymptotes de cette conique.

La solution de cette question se trouve dans le *Traité des sections coniques* de M. Chasles (page 9).

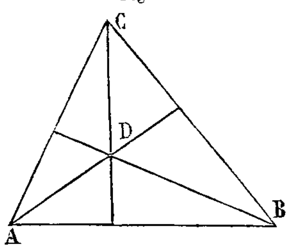
Lorsque les 4 points A, B, C, D sont les points d'intersection de deux hyperboles équilatères, toutes les coniques passant par ces quatre points sont aussi des hyperboles équilatères, comme on le verra plus loin. Cependant il y a aussi deux paraboles imaginaires dans ce système de coniques.

En effet, dans le système de coniques passant par quatre points, il y en a toujours deux tangentes à une droite donnée, donc deux tangentes à la droite de l'infini.

D'ailleurs, d'après le théorème de Desargues, les deux points de contact de ces coniques avec la droite sont les points doubles d'une involution, dont les points d'intersection de cette droite avec les côtés opposés du quadrilatère inscrit sont des couples de points homologues.

Or, dans le cas actuel, les côtés opposés du quadrilatère inscrit ABCD,

Fig. 1.



savoir AD et BC, AC et BD, AB et CD, sont perpendiculaires; donc les deux points doubles sur la droite de l'infini sont les points circulaires, et par suite on voit que les asymptotes d'une conique quelconque circonscrite à ABCD seront rectangulaires; ce qu'on a déjà vu analytiquement, puisque ces asymptotes partagent harmoniquement l'angle formé par les asymptotes imaginaires du cercle. Donc toutes ces coniques sont des hyperboles équilatères.

On peut trouver la direction des deux asymptotes d'une conique du système passant par un point donné, par la méthode indiquée précédemment [1].

[1] Chasles, *Coniq.*, p. 9.

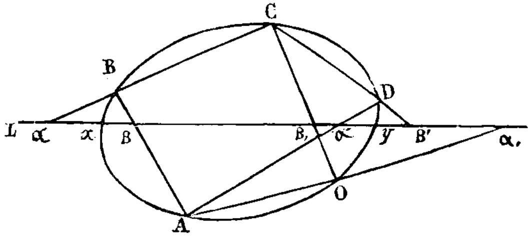
On peut aussi la trouver en s'appuyant directement sur le théorème de Desargues.

Comme cette dernière méthode paraît la plus simple dans la pratique, je vais la développer ici.

Soit d'abord à trouver les deux points d'intersection d'une conique définie par cinq points, avec une droite L.

Soient x et y les deux points demandés; si nous considérons le quadrilatère inscrit ABCD, d'après le théorème de Desargues, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, xy sont trois couples de points en involution.

Fig. 2.



Si maintenant on considère le quadrilatère inscrit OABC, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, xy forment encore trois couples de points en involution; donc les deux points demandés sont les deux points communs aux deux involutions définies, la première par les deux couples de points $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, et la deuxième par les deux couples de points $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$.

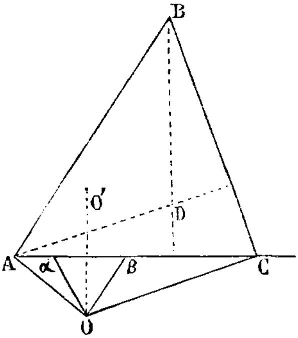
On sera donc ramené, si l'on veut, à déterminer les deux rayons communs aux deux faisceaux en involution, la première involution étant définie par les couples de rayons homologues $(O\alpha, O\alpha')$, $(O\beta, O\beta')$, la seconde par $(O\alpha, O\alpha_1)$, $(O\beta, O\beta_1)$.

Si, en particulier, la droite L passe à l'infini, $O\alpha$ devient parallèle à BC, $O\alpha'$ parallèle à AD, $O\beta$ parallèle à AB, $O\beta'$ parallèle à CD.

Si enfin on suppose que ABCD soient les quatre points d'intersection de deux hyperboles équilatères, BC et AD sont rectangulaires, ainsi que AB et CD; donc, la première involution ayant deux couples de rayons homologues rectangulaires, tous ses couples de rayons sont rectangulaires, et par suite les deux directions demandées sont les deux rayons homologues rectangulaires de deux faisceaux en involution définis par les deux couples de rayons homologues $O\alpha, O\alpha_1$ et $O\beta, O\beta_1$. Mais $O\alpha_1$, c'est la droite OA, et $O\beta_1$, c'est la droite OC. D'où la construction suivante :

Supposons construit le quadrilatère ABCD, et soit O le point donné sur le plan. Par O menons une droite $O\alpha$ parallèle à BC, $O\beta$ parallèle à AB; traçons les deux cercles circonscrits aux deux triangles $OA\alpha$, $OC\beta$; ces deux cercles se coupent en un second point R. Soit O′ le symétrique de O relativement à AC; décrivons le cercle circonscrit au triangle OO′R; les deux rayons menés du

Fig. 3.



point O aux deux points d'intersection de ce cercle avec AC sont les deux droites demandées, les deux tangentes aux deux courbes du système qui passent au point O.

Cas particulier. — Supposons que, les deux points A, C étant réels, AB et CD deviennent parallèles, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que ces deux directions rectangulaires sont parallèles aux asymptotes du cercle; supposons de même BC et AD parallèles à l'autre asymptote du cercle; les deux paraboles imaginaires circonscrites au quadrilatère ABCD se réduiraient à deux systèmes de deux droites imaginaires, parallèles aux directions asymptotiques du cercle. Mais, dans ce cas, on démontre que les deux rayons qui joignent le point O aux intersections du cercle ORO′ avec AB sont non seulement rectangulaires, mais sont bissectrices, l'un de l'angle AOC, l'autre du supplément de AOC. Mais, dans ce cas, les courbes du système sont les coniques ayant A et C pour foyers. Donc on voit que la construction précédente, qui s'applique à toutes les courbes du système qui sont orthogonales, fournit comme cas particulier la propriété si remarquable des tangentes aux coniques homofocales.

CHAPITRE III

ARTICLE I

Étude analytique des courbes orthogonales du système.

Considérons l'équation des courbes orthogonales déjà trouvée,

$$M(p^2-1)+Np=0,$$
$$M=-n_1xy+(m-l_1)x+ny+l,$$
$$N=n_1(y^2-x^2)+(l_1+n_3)y+(m_3-l_4)x+l_3,$$

et remarquons d'abord, en passant, que l'on déduit immédiatement du cas général le cas particulier des coniques orthogonales, si l'on suppose

$$n_1=1,\quad m=0,\quad l_1=0,\quad m_3=0,\quad l_4=0,$$
$$n=0,\quad n_3=0,$$
$$l=0,\quad l_3=b^2,$$
$$M=-xy,\quad N=y^2-x^2+b^2,$$

et l'on a l'équation bien connue des courbes orthogonales

$$-xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y^2-x^2+b^2)\frac{dy}{dx}+xy=0.$$

La courbe $R=0$ se décompose en deux systèmes de deux droites parallèles imaginaires, passant par les points circulaires à l'infini; ce sont des variétés des deux paraboles imaginaires du cas général.

On peut toujours, en prenant des axes parallèles et en transportant l'origine au centre de l'hyperbole $N=0$, ramener l'équation différentielle à la forme

$$(5)\qquad (-n_1xy+kx+gy+h)\left(\frac{dy^2}{dx^2}-1\right)+[n_1(y^2-x^2)+q]\frac{dy}{dx}=0.$$

Faisant alors l'hypothèse

$$g = 0, \qquad h = 0,$$

on a l'équation

(6) $$(-n_1 xy + kx)\left(\frac{dy^2}{dx^2} - 1\right) + [n_1(y^2 - x^2) + q]\frac{dy}{dx} = 0,$$

équation différentielle qui se déduit de l'équation générale en posant

$$n = l = 0, \qquad l_1 + n_3 = 0, \qquad m_3 - l_4 = 0, \qquad k = m - l_1, \qquad l_3 = q.$$

Je ne sais s'il existe une méthode pour intégrer l'équation différentielle précédente. Mais si l'on prend l'équation transformée par les polaires réciproques, on trouve, en supprimant les accents,

(7) $$p[-n_1(x^2 + 1)y + k(x^2 - 1)] + n_1 xy^2 + qx = 0,$$

équation que l'on déduit de l'équation (4) en posant

$$\begin{array}{lllll} n = 0, & m_2 = 0, & m_4 = n_1, & l_5 = -l, & m_3 - l_4 = 0, \\ l = 0, & n_2 = 0, & m - l_1 = -m_5, & l_1 + n_3 = 0, & \\ & l_2 = -n_4 = m_1, & l_4 + n_5 = -m, & k = m - l_1. & \end{array}$$

Nous allons facilement intégrer l'équation (7), qui se ramène à une équation linéaire du premier ordre. On verra que l'intégrale générale n'est pas algébrique, ce qui montre tout d'abord que les courbes orthogonales représentées par l'équation différentielle (6) sont, en général, des courbes transcendantes; mais nous verrons que, pour certaines valeurs particulières attribuées aux constantes, les courbes (7) deviennent algébriques et faciles à construire, d'où l'on conclut que, parmi les courbes orthogonales représentées par (6), il existe une famille de courbes algébriques, polaires réciproques des précédentes.

Comme vérification, on devra trouver le cas particulier des coniques homofocales et orthogonales.

Le système orthogonal en question me paraît nouveau.

Pour intégrer l'équation (7), on pose

$$x^2 = 2z,$$

d'où

$$x\frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}.$$

Substituant dans l'équation (7), et posant

$$\frac{k}{n_1} = k_1, \qquad \frac{q}{n_1} = q_1 = -\alpha^2,$$

ce qui revient à supposer $q_1 < 0$, on trouve

$$\frac{dz}{dy} + \frac{2(k_1 - y)}{y^2 - \alpha^2} z - \frac{k_1 + y}{y^2 - \alpha^2} = 0,$$

d'où

$$(8) \qquad z = \frac{x^2}{2} = \frac{C(y^2 - \alpha^2)}{\left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^{\frac{k_1}{\alpha}}} + \frac{y^2 - \alpha^2}{\left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^{\frac{k_1}{\alpha}}} \int \frac{k_1 + y}{(y^2 - \alpha^2)^2} \left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^{\frac{k_1}{\alpha}} dy.$$

C représente la constante d'intégration.

Posons, pour simplifier l'équation,

$$\frac{k_1}{\alpha} = n;$$

l'équation (8) devient

$$(9) \qquad \frac{x^2}{2} = \frac{C(y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}} + \frac{(y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}} \int \frac{(y + n\alpha)(y-\alpha)^{n-2}}{(y+\alpha)^{n+2}} dy.$$

Posons en outre

$$A = \int \frac{(y + n\alpha)(y-\alpha)^{n-2}}{(y+\alpha)^{n+2}} dy.$$

L'intégration s'effectue facilement par un changement de variable. Soit u la nouvelle variable, telle que l'on ait

$$\frac{y-\alpha}{y+\alpha} = u,$$

d'où

$$y = \frac{\alpha(1+u)}{1-u}, \qquad dy = \frac{2\alpha\, du}{(1-u)^2}.$$

En substituant on trouve

$$4\alpha^2 A = \frac{n+1}{2}\int u^{n-2}du - n\int u^{n-1}du + \frac{n-1}{2}\int u^n du$$

$$= \frac{n+1}{2(n-1)}u^{n-1} - u^n + \frac{n-1}{2(n+1)}u^{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{2(n-1)}\left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^{n-1} - \left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^n + \frac{n-1}{2(n+1)}\left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^{n+1}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par

$$\frac{(y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}};$$

nous aurons

$$\frac{4\alpha^2 A (y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}} = \frac{2(y+n\alpha)^2}{n^2-1};$$

et

$$\frac{A(y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}} = \frac{(y+n\alpha)^2}{2(n^2-1)\alpha^2}.$$

En remplaçant A par sa valeur dans l'équation (9), on a

$$(10) \qquad \frac{x^2}{2} = C\frac{(y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}} + \frac{(y+n\alpha)^2}{2(n^2-1)\alpha^2};$$

ou, en remplaçant n par sa valeur,

$$(10\ bis) \qquad \left[x^2 - \frac{(y+k_1)^2}{k_1^2-\alpha^2}\right](y-\alpha)^{\frac{k_1}{\alpha}-1} = 2C(y+\alpha)^{\frac{k_1}{\alpha}+1}.$$

Si n ou $\frac{k_1}{\alpha}$ est un nombre commensurable, on a, en général, une famille de courbes algébriques; si n est un nombre incommensurable, on a une famille de courbes transcendantes.

Supposons n ou $\frac{k_1}{\alpha}$ commensurable, plusieurs cas peuvent se présenter :

n est un nombre entier, on a des courbes d'ordre $n+1$.

n est un nombre fractionnaire : supposons $\frac{k_1}{\alpha}$ irréductible; alors k_1 et α sont deux nombres premiers entre eux; α est toujours positif, par hypothèse, mais k_1 peut être positif ou négatif.

Si $k_1 > \alpha$, l'équation (10 *bis*) peut s'écrire

$$\left[x^2 - \frac{(y+k_1)^2}{k_1^2-\alpha^2}\right]^\alpha (y-\alpha)^{k_1-\alpha} = (2C)^\alpha (y+\alpha)^{k_1+\alpha},$$

elle représente des courbes d'ordre $k_1+\alpha$.

Si $-\alpha < k_1 < \alpha$, l'équation peut s'écrire

$$\left[x^2 - \frac{(y+k_1)^2}{k_1^2-\alpha^2}\right]^\alpha = (2C)^\alpha (y-\alpha)^{-k_1} (y+\alpha)^{k_1+\alpha}.$$

Ce sont des courbes d'ordre 2α.

Si $k_1 = 0$, on a un système de coniques circonscrites à un rectangle imaginaire; leur équation est

$$\frac{x^2}{2} = C(y^2-\alpha^2) - \frac{y^2}{2\alpha^2}.$$

ou

$$\frac{x^2+1}{2} = C'(y^2-\alpha^2).$$

Si $k_1 < -\alpha$, ou $k_1+\alpha < 0$, l'équation peut s'écrire

$$\left[x^2 - \frac{(y+k_1)^2}{k_1^2-\alpha^2}\right]^\alpha (y+\alpha)^{-k_1-\alpha} = (2C)^\alpha (y-\alpha)^{\alpha-k_1}.$$

On a des courbes d'ordre $\alpha - k_1$.

Si $\frac{k_1}{\alpha}$ n'est pas réduite à sa plus simple expression, soit $\frac{k_2}{\alpha_2}$ la valeur de la fraction irréductible égale; on aura $k_1 = \alpha\frac{k_2}{\alpha_2}$, et, en remplaçant dans l'équation différentielle et dans l'intégrale, k_1 par cette valeur, on arriverait à des résultats analogues.

Remarque. — Dans le cas de n commensurable, il existe deux valeurs de n pour lesquelles les courbes ne sont pas algébriques; ce sont $+1$ et -1. Si l'on suppose, en effet, $n = +1$, on trouve, pour la valeur de l'intégrale A,

$$4\alpha^2 A = \int\frac{du}{u} - \int du = \log u - u = \log\frac{y-\alpha}{y+\alpha} - \frac{y-\alpha}{y+\alpha}.$$

Si l'on fait $n = -1$, on trouve

$$4\alpha^2 A = \int u^{-2}du - \int\frac{du}{u} = -\frac{1}{u} - \log u = -\frac{y+\alpha}{y-\alpha} - \log\frac{y-\alpha}{y+\alpha}.$$

Dans le paragraphe suivant, nous supposerons que n est un nombre entier et nous donnerons les principales propriétés des courbes d'ordre $n+1$, et en regard les propriétés des courbes orthogonales corrélatives.

Le cas où n est un nombre commensurable quelconque, positif ou négatif, conduirait à une discussion analogue.

ARTICLE II

Discussion des courbes représentées par l'équation (10). — Discussion des courbes corrélatives du système orthogonal.

Comme les courbes du système (1,2), représentées par l'équation (10), sont corrélatives des courbes orthogonales du système (2, 1) relativement à la parabole directrice $x^2=2y$, à toute propriété des points des premières courbes correspond une propriété des tangentes des secondes, et réciproquement. Aux points de l'une des courbes situés sur la droite de l'infini correspondent des tangentes à l'autre, passant par le pôle de la droite de l'infini, lequel est situé sur Oy. Donc les polaires des points de la droite de l'infini sont des parallèles à Oy. Aux asymptotes de l'une des courbes correspondent sur l'autre les points de contact des tangentes parallèles à Oy. A des points situés à l'infini sur des parallèles à OX correspondent des droites coïncidant avec Oy.

On a, entre les points et les droites des figures corrélatives, les relations

$$x=p', \qquad x'=p,$$

p représentant le coefficient angulaire de la polaire du point dont l'abcisse est x', et réciproquement.

Si, en particulier, on considère un point situé à l'infini sur la droite dont le coefficient coangulaire est p, la polaire de ce point aura précisément pour équation

$$x'=p.$$

Ainsi, si $p=0$, on a $x'=0$, c'est-à-dire que la polaire d'un point situé à l'infini sur une parallèle à OX coïncide avec OY.

Si $\qquad p=\sqrt{-1}=i, \qquad x'=i.$

Si $\qquad p=-i, \qquad x'=-i.$

Par conséquent, les deux droites corrélatives des points circulaires à l'infini sont

$$x=\pm i, \qquad \text{ou} \qquad x^2+1=0.$$

Cette dernière remarque sera très utile dans la suite.

Je place dans la discussion suivante les propriétés correspondantes des deux séries de courbes corrélatives dans un tableau à deux colonnes; dans la première se trouvent les propriétés des courbes algébriques représentées par l'équation (10): je désigne ces courbes par la lettre S'; dans la seconde colonne se trouvent les propriétés correspondantes des courbes corrélatives du système orthogonal: je désigne ces courbes par la lettre S.

Les courbes S' sont d'ordre $n+1$.

Les courbes S' sont symétriques relativement à OY; chaque droite parallèle à OX les coupe en deux points situés à une distance finie et en $n-1$ points situés à l'infini.

Toute parallèle à OY rencontre une courbe S' en $n+1$ points, dont quatre au plus sont réels.

L'équation (10) est satisfaite, quel que soit C, si l'on pose

$$y = -\alpha,$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \pm\theta,$$

en posant

$$\theta^2 = \frac{n-1}{n+1}.$$

On voit que toutes les courbes S' rencontrent aux deux mêmes points réels la parallèle à OX

$$y = -\alpha.$$

Il existe dans le système de courbes S' des courbes infiniment aplaties. On les obtient en supposant $C=0$ dans

Les courbes S sont de classe $n+1$.

Les courbes S sont aussi symétriques relativement à OY. De chaque point de OY on ne peut mener que deux tangentes simples à chaque courbe du système et une tangente multiple d'ordre $n-1$ de multiplicité, qui coïncide avec OY

Il existe $n+1$ tangentes à une courbe S parallèles à une direction donnée, mais quatre au plus sont réelles.

Toutes les courbes S seront tangentes aux deux mêmes droites dont l'équation est

$$y - \alpha = \pm\,\theta x.$$

Il existe dans le système de courbes S trois courbures singulières formées par 3 points ou 3 sommets, les coorl'équation (10). Elle se réduit à

$$(y-\alpha)^{n-1}\left[(n^2-1)\alpha^2 x^2-(y+n\alpha)^2\right]=0.$$

On a une droite

$$y=\alpha$$

d'ordre $n-1$ de multiplicité, et deux droites simples

$$y+n\alpha=\pm\sqrt{n^2-1}\,.\,\alpha x.$$

Ces 3 droites constituent une courbe d'ordre $n+1$; car une droite quelconque coupe la première en un point qui compte pour $n-1$ points, et les deux autres droites en 2 points simples ; si l'on fait $C=\infty$ dans l'équation (10), on trouve

$$(y+\alpha)^{n+1}=0.$$

La droite $y+\alpha=0$ est donc aussi une courbe infiniment aplatie du système; c'est une droite d'ordre $n+1$ de multiplicité.

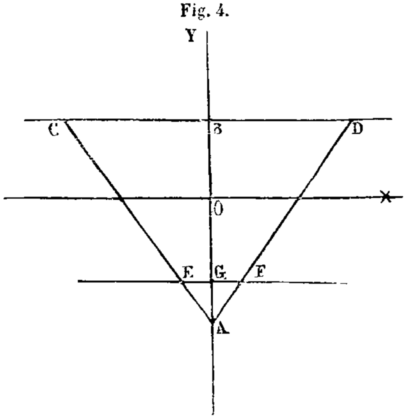
Si l'on pose

$$OB=OG=\alpha, \qquad OA=n\alpha,$$

$$GF=GE=0=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}},$$

les trois premières droites seront CD, AC, AD, la quatrième EF (*Fig.* 4).

Fig. 4.



données de ces points sont

$$x_1=0, \qquad y_1=-\alpha,$$

$$x_2=+\sqrt{n^2-1}\,.\,\alpha, \qquad y_2=n\alpha,$$

$$x_3=-\sqrt{n^2-1}\,.\,\alpha, \qquad y_3=n\alpha.$$

Le premier compte pour $n-1$ points, les deux autres sont deux points simples. On peut regarder ces trois points comme formant une courbe de classe $n+1$; car une droite menée par un point quelconque au premier point compte pour $n-1$ tangentes, et les droites menées aux deux derniers points par le même point comptent pour deux tangentes simples.

Il existe un quatrième sommet dont les coordonnées sont $x=0, y=\alpha$; il constitue une courbe exceptionnelle de classe $n+1$.

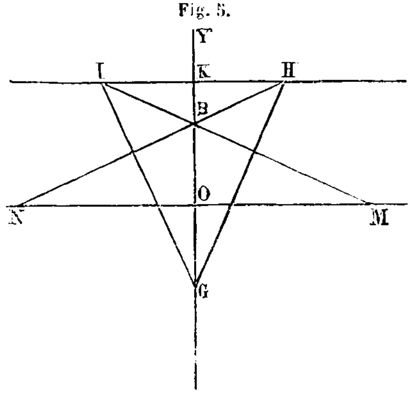
Si l'on pose

$$OB=OG=\alpha, \qquad OK=n\alpha,$$

$$KH=IK=\sqrt{n^2-1}\,.\,\alpha,$$

les trois premiers points seront G, H, I, le quatrième sera le point B (*Fig.* 5).

Fig. 5.



En écrivant l'équation (10) sous la forme

$$[(n^2-1)\alpha^2x^2-(y+n\alpha)^2](y-\alpha)^{n-1} \\ =2C(n^2-1)\alpha^2(y+\alpha)^{n+1},$$

on voit que chacune des droites AD et AC rencontre la courbe en $n+1$ points qui coïncident avec E et F, que la droite CD rencontre la courbe en $n+1$ points situés à l'infini, c'est-à-dire que chaque courbe S' a un contact d'ordre n en E et F avec les deux premières droites, et un contact d'ordre n à l'infini avec la droite CD.

Asymptotes des courbes S'

En appliquant la méthode générale pour déterminer les asymptotes d'une courbe algébrique, on trouve pour déterminer le coefficient angulaire t, l'équation :

$$t^{n-1}\{(n^2-1)\alpha^2-t^2[1+2C(n^2-1)\alpha^2]\}=0.$$

On tire de là

$$t^{n-1}=0, \quad t=\pm\sqrt{\frac{(n^2-1)\alpha^2}{1+2C(n^2-1)\alpha^2}}.$$

A la racine $t=0$ correspond l'asymptote multiple $y=\alpha$; aux deux autres valeurs de t correspondent deux asymptotes simples. On trouve facilement l'ordonnée à l'origine de ces deux asymptotes, elle est égale à $-n\alpha$.

On voit que, cette ordonnée à l'origine étant indépendante de C, les asymptotes de toutes les courbes S' se couperont au même point A de OY (*voir Fig. 4*).

On reconnaît sans peine que le point B est le point de concours des hauteurs du triangle GIH.

Aux $n+1$ points de S' situés à l'infini sur la droite CD correspondent $n+1$ tangentes de S au point G (*Fig. 5*), et ces tangentes coïncident avec OY. Donc les courbes S auront avec OY un contact d'ordre n au point fixe G. Elles auront de même un contact d'ordre n avec MI au point I et avec NH au point H (*Fig. 5*).

Tangentes des courbes S *parallèles à* OY.

On peut mener à chacune des courbes S, $n+1$ tangentes parallèles à OY; $n-1$ de ces tangentes coïncident avec OY; les deux autres ont pour équation

$$x_1=\pm\sqrt{\frac{(n^2-1)\alpha^2}{1+2C(n^2-1)\alpha^2}};$$

elles peuvent être réelles ou imaginaires.

Tangentes des courbes S' *parallèles à* OY.

Si l'on écrit l'équation des courbes S' sous la forme

$$f(x,y) = 0,$$

les coordonnées des points de contact des tangentes parallèles à OY seront fournies par les deux équations

$$f(x.y) = 0, \qquad f'_y = 0.$$

En éliminant x entre ces deux équations on trouve

$$0 = (y + n\alpha)(y - \alpha)^n + 2C\alpha^2(n^2 - 1)(y - n\alpha)(y + \alpha)^n.$$

On a donc en général $n+1$ valeurs pour y, et comme à chaque valeur de y correspondent deux valeurs égales et de signe contraire pour x, il existe $2(n+1)$ tangentes parallèles à OY.

En posant comme on l'a déjà fait précédemment

$$u = \frac{y - \alpha}{y + \alpha}; \qquad \theta^2 = \frac{n-1}{n+1},$$

l'équation peut s'écrire

$$u^n(1 - \theta^2 u) + 2C\alpha^2(n^2 - 1)(u - \theta^2) = 0.$$

Or une pareille équation a au plus 4 racines réelles ; donc il existe au plus 4 couples de droites réelles parallèles à OY tangentes à une courbe S'.

Tangentes parallèles à OX.

Une courbe S' rencontre l'axe OY en $n+1$ points, en chacun desquels la tangente est parallèle à OX.

Asymptotes des courbes S.

Comme à une tangente à S' parallèle à OY correspond un point de la courbe S situé sur la droite de l'infini, on voit que chaque courbe S rencontrera la droite de l'infini en $2(n+1)$ points; c'est-à-dire que les courbes S sont d'ordre $2(n+1)$; elles ont en général $2(n+1)$ asymptotes.

Chaque courbe S rencontre la droite de l'infini en $2(n+1)$ points, dont 4 couples au plus sont réels; autrement, le nombre des asymptotes réelles d'une courbe S ne peut dépasser huit.

Points d'intersection des courbes S *avec* OY.

L'axe OY rencontre une courbe S en $n+1$ points simples et en un point multiple, qui compte pour $n+1$ points

De plus, la droite $y=\alpha$ rencontre la courbe en $n+1$ points situés à l'infini, et elle est tangente à la courbe en chacun de ces points.

simples. Comme on l'a vu précédemment, l'ordre des courbes S est donc

$$2\,(n+1).$$

ARTICLE III

Équations des courbes S.

Si l'on désigne par x_1, y_1 les coordonnées d'un point d'une courbe S, et par x, y les coordonnées du point de contact de S′ avec la tangente qui est la polaire de x_1, y_1; si, de plus, on représente par

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation (10) des courbes S′ rendue homogène, on a

$$x_1 = -\frac{f'_x}{f'_y}, \qquad y_1 = \frac{f'_z}{f'_y};$$

Pour obtenir l'équation des courbes S, il faudrait éliminer x, y, z entre ces trois équations homogènes; mais à cause de la complication des résultats qu'on obtiendrait par cette méthode, il est préférable d'exprimer x_1 et y_1 en fonction d'un seul paramètre variable. Prenons le paramètre u déjà défini précédemment,

$$u = \frac{y-\alpha}{y+\alpha},$$

on trouvera sans peine, pour les valeurs de x_1, y_1, dans le cas général,

$$x_1^2 = \frac{(n^2-1)\,\alpha^2 u^{n+1}\left[(1-\theta^2 u)^2 u^{n-1} + 8C\theta^2\alpha^2\right]}{\left[(1-\theta^2 u)u^n + 2C\alpha^2(n^2-1)(u-\theta^2)\right]^2};$$

$$y_1 = \alpha\,\frac{nu^n(1-\theta^2 u) + 2C\alpha^2(n^2-1)(u+\theta^2)}{(1-\theta^2 u)u^n + 2C\alpha^2(n^2-1)(u-\theta^2)} = n\alpha + \frac{2C\alpha^3(n^2-1)(n-1)(1-u)}{(1-\theta^2 u)u^n + 2C\alpha^2(n^2-1)(u-\theta^2)}.$$

Ces deux équations permettent de construire les courbes S par points et d'étudier leurs principales propriétés.

Lorsque n est un nombre entier, on voit que l'axe des y rencontre chaque courbe en $2(n+1)$ points; car si l'on suppose $x_1 = 0$, on trouve que la première équation en u est du degré $2(n+1)$. Or à chaque racine de cette équation correspond une valeur unique pour y_1, et de plus, comme de ces $2(n+1)$ racines il y en a $n+1$ égales à zéro, on voit que l'axe OY rencontre la courbe en $n+1$ points simples et en un point singulier, qui compte pour $n+1$ points.

Si l'on suppose $y_1=0$, on a, pour déterminer u, une équation de degré $n+1$; à chacune de ses racines correspondent deux valeurs égales et de signes contraires pour x_1, de sorte que l'axe OX rencontre aussi la courbe en $2(n+1)$ points, réels ou imaginaires.

On reconnaîtrait de même que toute parallèle à OY rencontre la courbe en $2(n+1)$ points.

Les courbes S sont d'ordre $2\,(n+1)$.

Les asymptotes correspondent aux valeurs de u qui annulent le dénominateur. Il y a $2(n+1)$ asymptotes; mais quatre couples au plus sont réelles.

Dans les cas particuliers où $n=2$, ou bien $n=3$, les valeurs de x_1 et y_1 se présentent sous une forme assez simple.

Soit $n=2$; on trouve

$$x_1^2=\frac{3\alpha^2u^3[(3-u)^2u+24C\alpha^2]}{[(3-u)u^2+6C\alpha^2(3u-1)]^2},\qquad y_1=2\alpha+\frac{18C\alpha^3(1-u)}{(3-u)u^2+6C\alpha^2(3u-1)}.$$

Soit $n=3$; on trouve

$$x_1^2=\frac{8\alpha^2u^4[u^2(2-u)^2+16C\alpha^2]}{[u^3(2-u)+16C\alpha^2(2u-1)]^2},\qquad y_1=3\alpha+\frac{64C\alpha^3(1-u)}{u^3(2-u)+16C\alpha^2(2u-1)}.$$

Si l'on fait dans les formules générales précédentes $u=0$, on trouve

$$x_1=0,\qquad y_1=-\alpha.$$

Si l'on fait $u=1$, on trouve

$$y_1=n\alpha,\qquad x_1=\pm\sqrt{n^2-1}.\alpha,$$

résultats déjà connus, ce qui fournit une vérification.

ARTICLE IV

Tangentes d'inflexion des courbes S'. — Points de rebroussement des courbes S.

On sait que les points d'inflexion d'une courbe algébrique se trouvent à l'intersection de cette courbe et d'une autre courbe qu'on appelle le *hessien*. Dans le cas qui nous occupe, il est plus commode de déterminer les points d'inflexion d'une courbe S' par le moyen de l'équation différentielle de ces courbes (7). (Chap. III, art. I.)

Nous allons chercher d'abord le lieu des points d'inflexion de toutes les courbes du système; il est clair que les points d'inflexion de chacune d'elles se trouveront à l'intersection de cette courbe avec le lieu précédent. Nous déterminerons ensuite l'enveloppe des tangentes d'inflexion de toutes les courbes S'; à ce dernier lieu géométrique correspondra, dans les courbes S, le lieu des points de rebroussement de ces courbes.

Soit en général

$$Hp + G = 0, \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

une équation différentielle du premier ordre, H et G étant des fonctions algébriques quelconques de x et de y, je dis que l'on peut, sans connaître l'intégrale générale, trouver d'abord le lieu des points d'inflexion, puis l'enveloppe des tangentes d'inflexion des courbes représentées par cette équation différentielle.

En effet, différencions, et supposons $\frac{dp}{dx} = 0$; puis éliminons p entre cette nouvelle équation et la première; on trouve, pour le lieu des points d'inflexion,

$$G\left(G\frac{dH}{dy} - H\frac{dH}{dx}\right) + H^2\frac{dG}{dx} - GH\frac{dG}{dy} = 0. \tag{11}$$

L'enveloppe des tangentes d'inflexion est la courbe enveloppe des droites

$$H(Y - y) + G(X - x) = 0, \tag{12}$$

x et y satisfaisant à l'équation précédente (11).

Appliquons à l'exemple actuel. Si nous considérons l'équation (7) (Chap. III, art. I), on a

$$H = -n_1 y(x^2+1) + k(x^2-1), \qquad G = n_1 x y^2 + q x.$$

Formons

$$\frac{dG}{dx}, \quad \frac{dG}{dy}, \quad \frac{dH}{dx}, \quad \frac{dH}{dy},$$

et substituons dans l'équation (11); nous aurons

$$(n_1 y^2 + q)(x^2+1)[(k+n_1 y)^2 - (k^2+n_1 q)x^2] = 0.$$

Cette équation représente trois systèmes de deux droites

$$n_1 y^2 + q = 0, \qquad (k+n_1 y)^2 - (k^2+n_1 q)x^2 = 0, \qquad x^2+1 = 0.$$

Posons, comme on l'a déjà fait (Chap. III, art. I et II),

$$\frac{q}{n_1} = -\alpha^2, \qquad \frac{k}{n_1} = k_1 = n\alpha.$$

Ces équations deviennent

$$y^2 - \alpha^2 = 0, \qquad (y+n\alpha)^2 - (n^2-1)\alpha^2 x^2 = 0, \qquad x^2+1 = 0.$$

Si l'on cherche l'enveloppe des tangentes d'inflexion aux points situés sur les quatre droites

$$y^2 - \alpha^2 = 0, \qquad (y+n\alpha)^2 - (n^2-1)\alpha^2 x^2 = 0,$$

on trouve que cette enveloppe n'est autre que ces droites elles-mêmes, ce qui est évident d'ailleurs, puisque ces quatre droites sont des courbes exceptionnelles du système. Ce sont les droites CD, EF, AC, AD de la figure 4. (Voir plus haut, art. III.)

Il faut remarquer ici que ces résultats sont vrais pour n quelconque, commensurable ou incommensurable. Le raisonnement précédent s'applique donc aussi bien aux courbes transcendantes qu'aux courbes algébriques du système.

Si maintenant on considère les points d'inflexion imaginaires situés sur les deux droites

$$x^2 + 1 = 0,$$

et si l'on cherche l'enveloppe des tangentes en ces points, on trouve deux hyperboles imaginaires.

$$(13) \qquad \alpha(x \pm i)^2 \pm 2nixy - 2ny - n^2\alpha = 0.$$

On conclut, de ce qui précède, que les courbes S ont des points de rebroussement, et que le lieu de ces points est une courbe du 4^e ordre, qui se décompose en deux coniques polaires réciproques des hyperboles représentées par l'équation (13). L'équation de ces coniques est

$$(y_1 \pm ix_1)^2 \pm 2n\alpha i x_1 - \alpha^2 = 0.$$

On reconnaît que ce sont les deux paraboles représentées par l'équation

$$R = 0.$$

A la courbe exceptionnelle S′, composée de trois droites CD, AC, AD *(Fig. 4)*, correspond une courbe S, composée de trois sommets. Il est intéressant de remarquer que la courbe R, qui, dans le cas particulier des sections coniques, représente l'enveloppe des courbes du système, représente dans le cas général le lieu des points de rebroussement de ces courbes [1].

De même que, dans les courbes S′, les trois droites CD, AC et AD, qui sont des courbes exceptionnelles, touchent chacune des courbes S′ en un point qui compte pour $n+1$ points; de même les trois sommets G, H, I *(Fig. 5)* seront des points appartenant à chacune des courbes S, et en chacun d'eux il y aura $n+1$ tangentes coïncidentes. Supposons, par exemple, $n=2$, $n+1=3$; les courbes S seront du 6^e ordre et de 3^e classe; elles auront neuf points de rebroussement, dont trois réels, ce sont les points G, H, I *(Fig. 5)*, et six imaginaires, ce sont les pôles des six tangentes d'inflexion de la cubique S′ aux points où cette cubique est rencontrée par les deux droites $x^2+1=0$.

Si on a $n+1>3$, les points G, H, I sont des points singuliers d'ordre plus élevé. Je donnerai plus loin la forme générale des courbes S′, et par suite des courbes S, dans le cas où

$$n+1=3, \qquad \text{et} \qquad n+1=4.$$

---

[1] Voir, à ce sujet, une Note de M. Darboux, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXI.

ARTICLE V

Lieu géométrique des foyers des courbes S.

Théorème général. — *Le lieu géométrique des points d'intersection des tangentes menées de deux points fixes* P *et* Q *à toutes les courbes algébriques d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $(2n'-1)\nu$, *en désignant par* n' *la classe de ces courbes. Les points* P *et* Q *sont des points multiples d'ordre* $(n'-1)\nu$.

Cherchons combien il y a de points du lieu sur une droite PX quelconque passant par le point P. Il existe ν courbes du système tangentes à PX; de Q on peut mener n' tangentes à chacune d'elles; on a donc $n'\nu$ tangentes menées de Q, qui rencontrent PX en $n'\nu$ points du lieu. De plus, il existe ν courbes du système, tangentes à PQ. La tangente PQ, menée de Q à chacune de ces ν courbes, rencontre les $(n'-1)\nu$ autres tangentes menées du point P en $(n'-1)\nu$ points coïncidant avec P, qui est alors un point multiple d'ordre $(n'-1)\nu$. Donc, sur PX, il existe $n'\nu+(n'-1)\nu$ points du lieu; donc le lieu est une courbe d'ordre $(2n'-1)\nu$, sur laquelle P est un point multiple d'ordre $(n'-1)\nu$. On verrait de même que Q est un point multiple de même ordre.

Supposons maintenant que P et Q soient les points circulaires de l'infini. Soit, en outre, $\mu=2$, $\nu=1$, $n'=n+1$.

On a le corollaire suivant:

Corollaire. — Le lieu géométrique des foyers des courbes S du système (2, 1) de classe $n+1$ est une courbe d'ordre $2n+1$, qui a pour points multiples d'ordre n les points circulaires de l'infini.

Le théorème précédent a été démontré par M. Chasles pour le cas particulier des sections coniques; dans ce cas, le lieu géométrique des foyers est une courbe d'ordre 3ν, car $n'=2$: c'est le résultat trouvé par M. Chasles.

Si l'on suppose $n=2$, la courbe S' est une cubique; la courbe corrélative S est du 6e ordre, le lieu des foyers est une courbe du 5e ordre, qui a pour points doubles les points circulaires de l'infini.

Foyers des courbes S.

La méthode analytique suivie précédemment permet de trouver les foyers des courbes S.

Les points d'intersection de chaque courbe S' avec les deux droites

$$x^2+1=0, \qquad x=\pm i,$$

forment les sommets d'un polygone dont les côtés et les diagonales peuvent être des droites réelles ou des droites imaginaires conjuguées.

Exemple : Prenons le cas le plus simple des courbes S', où

$$n=0.$$

On sait que la courbe S' est une conique ; son équation est

$$x^2+1=2C(y^2-x^2).$$

Si l'on cherche l'intersection de cette courbe avec les deux droites

$$x^2+1=0,$$

on trouve 4 points imaginaires conjugués 2 à 2, dont les coordonnées sont représentées par les deux équations

$$x^2+1=0, \qquad y^2-x^2=0.$$

Mais le quadrilatère imaginaire ainsi formé a deux côtés réels ; ce sont les droites représentées par l'équation

$$y=\pm x.$$

Ce qu'il y a de remarquable dans ce cas, c'est que toutes les coniques du

Les tangentes menées de chacun des points circulaires à l'infini I et J de la courbe corrélative S forment un polygone imaginaire, qui peut avoir des sommets réels ; ce sont les foyers de la courbe S.

En effet les pôles des deux droites

$$x=\pm i,$$

relativement à la parabole directrice, sont les points circulaires à l'infini, et les pôles des droites joignant deux à deux les points d'intersection d'une courbe S' avec

$$x=\pm i$$

sont les sommets d'un polygone circonscrit à S et dont les côtés passent par les deux points circulaires à l'infini.

La courbe S correspondante est une conique.

Si des deux points à l'infini on mène des tangentes à cette conique, ces tangentes forment un quadrilatère imaginaire, qui aura deux sommets réels ; ce sont les pôles des deux droites

$$y=\pm x.$$

Donc toutes les courbes S corrélatives sont inscrites dans un quadrilatère système (1,2), représentées par l'équation précédente, passent aux quatre points d'intersection des droites

$$x^2+1=0, \qquad y^2-x^2=0.$$

Prenons maintenant l'équation générale (10) des courbes S' ; faisons dans cette équation

$$x^2+1=0;$$

on trouve

$$(14) \quad \begin{cases} 2C(y+x)^{n+1} \\ \quad +(y-x)^{n-1}\left[1+\dfrac{(y+nx)^2}{(n^2-1)x^2}\right]=0. \end{cases}$$

Cette équation est du degré $n+1$; soient deux racines imaginaires de cette équation,

$$y'=a+bi, \qquad y''=a-bi.$$

Considérons les quatre points ayant pour coordonnées

$$\begin{array}{ll} y'=a+bi, & x'y', \\ y''=a-bi, & x'y'', \\ x'=+i, & x''y', \\ x''=-i, & x''y''. \end{array}$$

Ces quatre points forment les quatre sommets d'un rectangle imaginaire ayant deux diagonales réelles.

En effet, de

$$y-a=\pm bi$$

et

$$x=\pm i,$$

imaginaire dont 2 sommets opposés sont les points circulaires à l'infini.

Aux côtés du quadrilatère imaginaire inscrit dans la courbe S' correspond un quadrilatère imaginaire circonscrit à la courbe S et à la conique imaginaire IJ, I et J étant les points circulaires à l'infini.

Aux deux diagonales réelles correspondent deux foyers réels, dont il est facile de trouver les coordonnées.

Soit x_1 et y_1 ces coordonnées. La polaire de ce point relativement à la parabole directrice a pour équation

$$Y-x_1X+y_1=0.$$

Pour que cette droite coïncide avec celle qui a pour équation

$$Y-bX-a=0.$$

il faut que l'on ait

$$x_1=b, \qquad y_1=-a.$$

Les coordonnées du foyer correspondant à la deuxième diagonale seraient

$$x_2=-b, \qquad y_2=-a.$$

Ainsi à deux racines imaginaires de l'équation (14) correspondent dans la courbe S deux foyers réels.

on tire

$$\frac{y-a}{x} = \pm b, \qquad y - a = \pm bx.$$

On aura deux côtés du quadrilatère qui sont représentés par les équations

$$y = a \pm bi$$

Ce sont deux droites imaginaires parallèles à OX.

On a dans la courbe S deux autres foyers imaginaires situés sur OY, et dont les coordonnées sont

$$y_1 = -a - bi,$$
$$y_2 = -a + bi.$$

Considérons maintenant deux racines réelles conjuguées de l'équation (11),

$$y' = a + \sqrt{b},$$
$$y'' = a - \sqrt{b}.$$

On aura encore un quadrilatère imaginaire inscrit dans la courbe S′ et qui aura pour côtés les quatre droites représentées par

$$x^2 + 1 = 0, \qquad (y-a)^2 - b = 0.$$

Nous supposons, bien entendu, que l'on peut résoudre l'équation (14).

On ferait aisément une application de cette théorie à la détermination des foyers dans les courbes S polaires réciproques des cubiques et des quartiques S′.

On aura dans la courbe S corrélative un quadrilatère circonscrit à S et à la conique IJ, et qui aura deux sommets réels situés sur OY,

$$y_1 = -a - \sqrt{b},$$
$$y_2 = -a + \sqrt{b},$$

et deux autres sommets imaginaires situés sur une parallèle à OX.

En résumé, à toute racine réelle de l'équation (14) correspondent deux foyers réels de la courbe S situés sur OY, et deux foyers imaginaires situés sur une parallèle à OX.

A toute racine imaginaire de l'équation (14) correspondent deux foyers réels sur une parallèle à OX et deux foyers imaginaires sur OY.

ARTICLE VI

Application au cas de n=2 et de n=3.

Si $n=2$, les courbes S′ sont des cubiques et les courbes S, des courbes du 6e ordre ou sextiques.

Nous allons voir, sans difficulté, d'après l'équation de S', quelles sont les différentes formes qu'elle affecte et ses principales singularités.

Pour faire cette discussion, nous supposerons que l'on remplace, dans l'équation (10), $y+\alpha$ par y', ou que l'on fasse $y=y'-\alpha$, d'où

$$y-\alpha=y'-2\alpha,$$

ce qui revient à transporter l'axe OX parallèlement à lui-même à une distance égale à $-\alpha$ de l'origine. L'équation générale (10) devient, en supprimant les accents,

$$3\alpha^2x^2(y-2\alpha)=(1+6C\alpha^2)y^3-3\alpha^2y-2\alpha^3.$$

La forme de ces cubiques et celle des courbes du 6ᵉ ordre corrélatives dépend de la valeur particulière qu'on attribue à la constante C. On est conduit à distinguer plusieurs cas :

$$1^\circ \quad C=-\infty.$$

La cubique se réduit à une droite triple.

La courbe de 6ᵉ ordre corrélative se réduit à un point qu'on peut regarder comme une courbe exceptionnelle de 3ᵉ classe.

$$2^\circ \quad -\infty<C\leqq-\frac{1}{6\alpha^2}.$$

La cubique a une asymptote réelle parallèle à OX, elle a trois points d'inflexion réels : deux situés sur OX, le troisième à l'infini.

La courbe de sixième ordre est une courbe fermée ; elle a trois points de rebroussement réels qui sont les trois sommets du triangle GIH. (Voir plus haut *fig. 5*). Les tangentes de rebroussement sont les hauteurs de ce triangle.

$$3^\circ \quad -\frac{1}{6\alpha^2}<C<0.$$

La cubique se compose d'un arc de courbe à branches infinies, pareil à celui du cas précédent, et en outre de deux arcs hyperboliques ayant deux asymptotes réelles.

La courbe du sixième ordre se compose d'une courbe fermée à trois points de rebroussement, comme dans le cas précédent, et en outre d'une courbe ovale qui enveloppe la première.

4° C = 0.

La cubique se réduit à un système de trois droites.

La courbe du sixième ordre se réduit à un système de trois points.

5° C > 0.

La cubique a trois asymptotes réelles, trois points d'inflexion réels, dont l'un est à l'infini. Il existe six tangentes réelles parallèles à OY.

La courbe du sixième ordre a trois points de rebroussement réels; de chacun de ces points partent deux branches infinies; elle comprend en outre deux autres arcs de courbe à branches infinies; il existe six asymptotes réelles.

6° C = + ∞.

La cubique se réduit à une droite triple.

La courbe du sixième ordre se réduit à un point triple, courbe singulière de 3e classe.

Cas particulier où n=3; les courbes S′ sont du 4e ordre, les courbes S sont du 8e ordre.

D'abord, l'équation générale peut s'écrire, en prenant pour nouvel axe des x la droite $y+\alpha=0$,

$$x^2=\frac{(1+16C\alpha^2)y^4-8\alpha^2y^2+16\alpha^4}{8\alpha^2(y-2\alpha)^2},$$

ou

$$x^2=\frac{[(1+16C\alpha^2)y^2-4\alpha^2]^2+16^2C\alpha^6}{8\alpha^2(1+16C\alpha^2)(y-2\alpha)^2}.$$

Il y a plusieurs cas à distinguer, suivant la valeur de C :

1° C = ± ∞.

La courbe du 4e ordre se réduit à une droite quadruple.

La courbe polaire réciproque du 8e ordre se réduit à un point, courbe singulière de 4e classe.

$$2^\circ \quad -\infty < C \leqq -\frac{1}{16\alpha^2}.$$

La courbe du 4^e ordre est une courbe fermée de forme ovale ; elle coupe l'axe OX en deux points réels.

La courbe du 8^e ordre se compose de deux arcs à branches infinies, elle a deux asymptotes réelles.

$$3^\circ \quad -\frac{1}{16\alpha^2} < C < 0.$$

La courbe du 4^e ordre se compose d'une courbe fermée pareille à celle du cas précédent, et en outre de deux arcs à branches infinies ; elle a deux asymptotes réelles ; elle coupe OY en quatre points réels.

La courbe polaire réciproque se compose de deux arcs hyperboliques, comme dans le cas précédent, et d'une courbe fermée.

$$4^\circ \quad C = 0.$$

On a un système de trois droites : une droite double $y = 2\alpha$, et deux droites simples.

La courbe du 8^e ordre se réduit à un système de trois points, courbe singulière de 4^e classe.

$$5^\circ \quad C > 0.$$

La courbe du quatrième ordre ne coupe pas l'axe OY ; elle a deux asymptotes simples réelles, et la droite $y = 2\alpha$, qui est une asymptote double ; elle se compose de quatre arcs à branches infinies.

La courbe polaire réciproque se compose aussi de quatre arcs à branches infinies ; elle a quatre asymptotes réelles ; deux arcs de courbe sont tangents à OY à l'origine.

Remarque. — On peut construire les courbes du 8^e ordre de deux manières, soit en partant de leurs équations qui donnent les coordonnées d'un point en fonction d'un paramètre u, soit en construisant d'abord les quartiques et en déduisant de leur forme celle de leurs polaires réciproques, ce qui ne présente aucune difficulté.

CHAPITRE IV

ARTICLE I

Étude d'une autre famille de courbes du système (2,1).

Si, dans l'équation différentielle (1) des courbes du système (2,1), on fait les hypothèses suivantes :

$$m_2 = n_2 = 0, \qquad l_2 = m_1, \qquad n_4 = -m_1, \qquad m_4 = -n_1,$$
$$m_5 = m - l_1, \qquad l_5 = l, \qquad n_5 = n - l_4,$$

on trouve

$$\mathrm{M} = \mathrm{Q} = -n_1xy + (m - l_1)x + ny + l,$$
$$\mathrm{N} = n_1(y^2 + x^2) + (l_1 + n_3)y + (m_3 - l_4)x + l_3,$$

et l'équation différentielle (1) devient

$$\mathrm{M}(p^2 + 1) + \mathrm{N}p = 0. \tag{15}$$

Ce second système de courbes présente de grandes analogies avec le premier ou avec le système orthogonal.

Ainsi, on peut d'abord construire géométriquement les tangentes aux deux courbes du système qui passent en un point donné par une méthode analogue à la première.

On trouvera, en intégrant la transformée par polaires réciproques, une famille de courbes dont l'équation sera analogue à l'équation des courbes déjà étudiées.

Construction des tangentes en un point donné.

Théorème. — *Les directions des deux tangentes aux deux courbes du système qui passent par un point donné α, β sont parallèles aux asymptotes de la conique* *passant par ce point et par les quatre points d'intersection de* M *et de* N; *elles sont également inclinées sur une droite de direction donnée.*

On démontre la première partie de ce théorème, comme on a fait pour le théorème analogue (Chap. II, art. II).

Mais la courbe M est une hyperbole équilatère, la courbe N est un cercle. Or, parmi les coniques qui passent par les quatre points A, B, C, D d'intersection d'une hyperbole équilatère et d'un cercle, il y a deux paraboles réelles dont les axes sont rectangulaires. Car les points de contact de ces deux paraboles avec la droite de l'infini peuvent être considérés comme les points doubles d'une involution, dont les couples de points homologues sont les points d'intersection avec la droite de l'infini des coniques circonscrites au quadrilatère; or parmi ces coniques se trouve un cercle; donc ces deux points doubles partagent harmoniquement, sur la droite de l'infini, le segment IJ formé par les deux points circulaires.

Donc les axes des deux paraboles sont rectangulaires.

Mais, toujours d'après le théorème de Desargues, les asymptotes de la conique passant par A, B, C, D et par le point (α, β) doivent partager harmoniquement l'angle droit formé par les deux axes des paraboles; donc ces deux directions sont également inclinées sur chacun des deux axes.

Comme dans le cas des courbes orthogonales, on trouve les directions des deux tangentes aux deux courbes qui passent par un point, en construisant les deux rayons communs à deux involutions.

Lorsque le quadrilatère ABCD est construit, on trouve sans difficulté les directions des rayons doubles ou des axes des deux paraboles circonscrites; ce sont les bissectrices des angles formés par les côtés opposés de ce quadrilatère.

ARTICLE II

Recherche d'une famille de courbes algébriques du système (2, 1) correspondant au cas où M = Q.

On peut toujours, en transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes au centre du cercle $N=0$, ramener l'équation différentielle à la forme suivante :

$$(-n_1xy + k'x + l'y + r')(p^2+1) + [n_1(y^2+x^2) + q']p = 0,$$

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Nous ne nous occuperons dans la suite que du cas où

$$l' = 0, \qquad r' = 0.$$

Ce cas peut se déduire du cas général, en faisant dans l'équation (15) les hypothèses suivantes :

$$n = 0, \qquad l = 0, \qquad l_1 + n_3 = 0, \qquad m_3 - l_4 = 0.$$

Si nous posons, en outre, dans cette même équation générale,

$$m - l_1 = k, \qquad l_3 = q;$$

elle devient

$$(-n_1 xy + kx)(p^2 + 1) + [n_1(x^2 + y^2) + q]p = 0,$$

ou

$$(16) \qquad M(p^2 + 1) + Np = 0.$$

La courbe R se décompose en deux paraboles

$$N - 2M = 0, \qquad N + 2M = 0.$$

On voit sans peine que ces deux paraboles sont précisément celles qui passent par les quatre points d'intersection du cercle $N = 0$ et du système de deux droites $M = 0$, et l'on vérifie que leurs axes sont bien perpendiculaires.

Si nous cherchons l'équation différentielle des courbes polaires réciproques, relativement à la parabole directrice

$$x^2 = 2y,$$

en suivant une marche toute pareille à celle qui a été donnée pour le système orthogonal, on trouvera l'équation suivante, qui représente des courbes du système (1, 2),

$$\frac{dy'}{dx'}[k(x'^2 + 1) - n_1 y'(x'^2 - 1)] + n_1 x' y'^2 + qx' = 0,$$

ou bien, en supprimant les accents,

$$(17) \qquad k(x^2 + 1) - n_1 y(x^2 - 1) + \frac{x\,dx}{dy}(q + n_1 y^2) = 0.$$

Posant

$$x^2 = 2z, \qquad \frac{x\,dx}{dy} = \frac{dz}{dy},$$

on trouve

$$\frac{dz}{dy} + \frac{2(k - n_1 y)}{q + n_1 y^2}\, z + \frac{k + n_1 y}{q + n_1 y^2} = 0.$$

Cette équation ne diffère de l'équation relative au système orthogonal transformé que par le signe du terme indépendant de z; dès lors, si l'on adopte les mêmes notations, c'est-à-dire si l'on fait

$$\frac{k}{n_1} = k_1, \qquad \frac{q}{n_1} = -\alpha^2.$$

on trouve

$$\frac{x^2}{2} = C(y^2 - \alpha^2)\left(\frac{y+\alpha}{y-\alpha}\right)^{\frac{k_1}{\alpha}} - (y^2 - \alpha^2)\left(\frac{y+\alpha}{y-\alpha}\right)^{\frac{k_1}{\alpha}} \int \frac{k_1 + y}{(y^2 - \alpha^2)^2}\left(\frac{y-\alpha}{y+\alpha}\right)^{\frac{k_1}{\alpha}} dy.$$

Cette équation représente, en général, une famille de courbes transcendantes, si $\frac{k_1}{\alpha}$ est incommensurable; mais si l'on suppose

$$n = \frac{k_1}{\alpha} = \text{nombre commensurable},$$

n étant un nombre fractionnaire quelconque, on trouve, pour une valeur de n différente de $+1$ et de -1,

$$\frac{x^2}{2}\, C = \frac{(y+\alpha)^{n+1}}{(y-\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{2(n^2-1)\alpha^2}(y + n\alpha)^2.$$

Pour $n = 0$, on a un système de coniques.

Pour $n = \pm 1$, l'intégration se fait directement et fournit une famille de courbes transcendantes. Supposons n entier.

Pour $n \geq 2$, on a une famille de courbes algébriques d'ordre $n+1$.

On étudierait la forme et les propriétés de ces courbes, comme on a étudié celles des courbes représentées par l'équation (10), et l'on en conclurait, comme on l'a fait précédemment, les propriétés des courbes corrélatives du système (2, 1).

Ainsi, pour $n=0$, on a un système de coniques circonscrites à un rectangle réel.

Pour $n=2$, on a un système de cubiques.

Pour $n=3$, on a un système de quartiques, etc.

On verrait que la classe de ces courbes est $2(n+1)$.

Pour $C=0$, on a une courbe exceptionnelle qui se compose d'une droite réelle d'ordre $n-1$ de multiplicité, et de deux droites imaginaires.

Pour $C=\infty$, on a une courbe exceptionnelle formée par une droite d'ordre $n+1$ de multiplicité.

Ces courbes ont des points d'inflexion situés sur les deux droites réelles

$$x^2 - 1 = 0.$$

On le démontrerait en suivant une marche analogue à celle que l'on a suivie pour le cas où $M=-Q$.

L'enveloppe des tangentes d'inflexion est une courbe composée de deux coniques réelles, qui sont les polaires réciproques des coniques représentées par l'équation

$$R = N^2 - 4M^2 = 0.$$

Les courbes polaires réciproques des précédentes seront d'ordre $2(n+1)$ et de classe $n+1$; elles auront des points de rebroussement, et le lieu de ces points sera l'ensemble des deux paraboles réelles représentées par l'équation

$$R = 0.$$

CHAPITRE V

ARTICLE I

Transformées homographiques des courbes du système (2,1).

Si l'on cherche les transformées homographiques des courbes du système (2,1), on trouve des courbes du système (2,1).

En appliquant la transformation homographique aux courbes algébriques orthogonales ($Q=-M$), on aura une famille de courbes algébriques du même ordre. Seulement, les deux courbes du système qui passent par un point donné ne se coupent pas orthogonalement. Néanmoins, comme le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite et le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites se conservent dans cette transformation, et que la construction des tangentes ne dépend que de ce rapport, on sera conduit à effectuer une construction tout à fait analogue à la précédente, pour déterminer la direction des tangentes aux deux courbes du système, qui passent par un point donné. Le lieu géométrique des points de rebroussement imaginaires des courbes transformées se composera de deux coniques imaginaires, transformées homographiques des deux paraboles imaginaires représentées par $R=0$.

Dans le cas où $Q=M$, le lieu des points de rebroussement réels se compose de deux paraboles réelles représentées par $R=0$.

En transformant par homographie, le lieu des points de rebroussement réels des transformées se composera de deux coniques quelconques. On construirait sans difficulté les tangentes aux deux courbes du système qui passent par un point donné, si l'on connaissait la position des points d'intersection des deux coniques, lieux des points de rebroussement.

Il existera dans les courbes transformées des courbes exceptionnelles composées de points ou de sommets simples ou multiples.

On voit, par ce qui précède, que le cas, sans doute assez difficile à traiter par l'analyse, où R se décompose en deux facteurs du second degré, se trouve compris dans les précédents, puisque toutes les courbes qui correspondent à ce cas ne sont autre chose que des transformées homographiques de celles que nous avons étudiées.

C'est ainsi que, dans un cas particulier, le cercle fournit, par une transformation homographique, toutes les courbes du second ordre.

ARTICLE II

Examen d'un cas particulier de l'équation générale.

Supposons

$$N^2 - 4MQ = U^2, \tag{a}$$

U étant une fonction de x et de y qu'il s'agit de déterminer.

L'équation générale (1) des courbes du système (2,1) peut s'écrire, en multipliant tous ses termes par M,

$$(2Mp + N)^2 = U^2,$$

ou

$$(2Mp + N + U)(2Mp + N - U) = 0.$$

On voit que dans ce cas l'équation se décompose en deux équations différentielles du premier ordre,

$$2Mp + N + U = 0, \tag{b}$$

$$2Mp + N - U = 0. \tag{c}$$

Mais on a, d'après l'équation (a),

$$(N + U)(N - U) = 4MQ,$$

et l'on peut satisfaire à cette équation en posant .

$$N + U = 2Q, \qquad N - U = 2M.$$

D'après cela, les équations (b) et (c) deviennent

$$Mp + Q = 0, \tag{b'}$$

$$M(p + 1) = 0. \tag{c'}$$

La seconde représente un système de lignes droites parallèles, en supprimant le facteur M qui a été introduit plus haut; la première représente une famille de courbes; mais, en vertu de l'hypothèse exprimée par l'équation (a), les polynômes M et Q ne sont pas indépendants l'un de l'autre. En effet, de

$$N - U = 2M, \qquad N + U = 2Q,$$

on tire

$$U = N - 2M = 2Q - N,$$

ou

$$N - M - Q = 0, \qquad Q = N - M.$$

Or, en remplaçant M,N,Q par leurs valeurs en fonction de A,B,C, etc., dans l'égalité précédente, on a

$$(B - E)(y + x) - C(y + x)^2 + D - A - F = 0.$$

Ainsi, pour que les deux égalités $N - U = 2M$, $N + U = 2Q$ soient vérifiées, il suffit que cette dernière devienne une identité.

Or, elle deviendra une identité, si l'on a identiquement

$$\begin{array}{rcllll} B - E = 0, & \text{ou} & m_4 = m_1, & n_4 = n_1, & l_4 = l_1, \\ C = 0, & \text{ou} & m_2 = n_2 = l_2 = 0, & & \\ D - A - F = 0, & \text{ou} & m_5 = m_3 - m, & n_5 = n_3 - n, & l_5 = l_3 - l. \end{array}$$

A cause de ces hypothèses, on a

$$M = A - Bx, \qquad Q = By + F,$$

et l'équation différentielle (b') devient

$$Ap + B(y - px) + F = 0.$$

Or on voit que cette équation représente toutes les courbes du système (1,1), c'est-à-dire les courbes telles qu'il en passe une seule par un point du plan et qu'il en existe une seule tangente à une droite donnée; ce sont les courbes étudiées par M. Fouret.

Dans le cas le plus général, ce sont des transformées homographiques des spirales logarithmiques.

CHAPITRE VI

ARTICLE I

Sur les courbes exceptionnelles du système (2,1) et du système (1,2).

Il existe, dans les coniques du système (1,2), des courbes exceptionnelles; ce sont trois systèmes de deux droites, ce que M. Chasles appelle des quasi-coniques. Dans le système corrélatif (2,1) on a trois coniques infiniment aplaties; ce sont des courbes de seconde classe, composées chacune de deux sommets. Les coniques S du système (2,1) sont inscrites dans un quadrilatère; lorsque deux sommets opposés de ce quadrilatère complet sont les points circulaires de l'infini, les coniques S sont homofocales et orthogonales; dans le cas des coniques, la courbe R représente la solution singulière de l'équation différentielle (1); cette courbe R se compose, en effet, de deux systèmes de deux droites qui constituent l'enveloppe des courbes du système. Remarquons que les sommets des courbes exceptionnelles du système sont précisément les sommets de cette courbe R. Ces sommets sont les foyers, lorsque le quadrilatère a deux sommets coïncidant avec les points circulaires de l'infini.

Il existe de même, comme on l'a vu plus haut, des courbes exceptionnelles dans le cas général des courbes du système (1,2); ce sont deux droites simples et une droite d'ordre $(n-1)$ de multiplicité. Dans le système corrélatif (2,1), il existe des courbes exceptionnelles, qui se composent de deux sommets simples et d'un sommet d'ordre $n-1$ de multiplicité; ces trois sommets constituent une courbe de classe $n+1$. Dans ce cas général, la courbe R représente, comme on l'a démontré, le lieu des points de rebroussement des courbes du système. On sait [1] d'ailleurs que, dans une équation différentielle de la forme de l'équation (1), la courbe R représente, en général, le lieu des points singuliers des courbes du système. Or, la courbe R se compose de deux paraboles imaginaires, lorsque $Q=-M$, et de deux paraboles réelles dans le cas où $Q=M$. Mais ce qu'il y a de particulièrement remarquable, c'est que les sommets des courbes exceptionnelles

[1] Voir M. Darboux, *Comptes rendus*, t. LXXI, p. 267.

du système (2,1) coïncident avec les points d'intersection de ces deux paraboles; et comme ces deux paraboles constituent une courbe du quatrième ordre douée de quatre sommets, laquelle courbe se réduit à deux systèmes de deux droites parallèles comme cas particulier, on voit que les courbes exceptionnelles du système (2,1) peuvent être considérées d'une manière générale comme coïncidant avec les sommets de la courbe R.

Ainsi l'on a vu plus haut, dans la discussion générale des courbes S', qu'on avait, outre la courbe exceptionnelle composée de trois droites, qui correspond au cas où $C=0$, la courbe exceptionnelle composée d'une seule droite, laquelle correspond au cas où $C=\infty$. A cette dernière droite d'ordre $n+1$ de multiplicité, correspond, dans le système des courbes S, un sommet unique qu'on peut regarder comme une courbe de classe $n+1$. C'est ce quatrième point qui forme, avec les trois précédents, les quatre sommets de la courbe R.

Une question se présente naturellement à cette place. Nous n'avons, dans le travail précédent, étudié qu'une famille de courbes du système (2,1). Il y aurait lieu de se demander si, dans le cas général des courbes orthogonales ou bien des courbes correspondant au cas où $M=Q$, les sommets de la courbe R représenteraient bien encore des courbes exceptionnelles du système. On sait que, dans le cas général, les courbes S seront des courbes transcendantes; mais, quelles que soient ces courbes, on remarque que, dans ces cas, l'équation différentielle (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$M(p^2 \pm 1) + Np = 0,$$

et l'on voit que cette équation est satisfaite, quel que soit p, si l'on fait

$$M = 0, \qquad N = 0.$$

Or, les points d'intersection de M et de N sont précisément les sommets de la courbe R.

Il semble donc que ces points doivent, dans tous les cas, représenter des courbes exceptionnelles du système.

ARTICLE II

Application de la méthode de transformation par les polaires réciproques à l'intégration de quelques équations différentielles déduites de l'équation (1).

Nous avons vu, par ce qui précède, comment il est souvent plus facile d'intégrer la transformée de l'équation (1) que cette équation elle-même. Nous allons appliquer la même méthode à quelques exemples simples, et nous aurons encore ici l'occasion de remarquer que, dans le système de courbes (2, 1), il existe des courbes transcendantes, aussi bien que des courbes algébriques.

Exemple I. — Soit l'équation différentielle

$$y = npx + p^2;$$

n étant un nombre entier quelconque.

On la déduit de l'équation générale en posant

$$\mathrm{B} = \mathrm{C} = \mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{A} = 1, \qquad \mathrm{D} = nx, \qquad \mathrm{F} = -y.$$

En transformant par les polaires réciproques relativement à la parabole, on a

$$(n-1)x' \frac{dy'}{dx'} + y' + x'^2 = 0,$$

et en intégrant on trouve, en supprimant les accents,

$$x\left(y + \frac{x^2}{2n-1}\right)^{n-1} = \mathrm{C}.$$

Il faut remarquer qu'on peut intégrer directement l'équation proposée. Le cas particulier $n=2$ se trouve dans le *Cours de Calcul intégral* de M. Serret. Il faut ajouter que la recherche de l'intégrale n'est pas plus difficile pour n quelconque que pour $n=2$.

Seulement l'étude des propriétés et de la forme des courbes représentées par l'équation différentielle (1) ne paraît pas très commode, tandis qu'on peut très facilement construire leurs polaires réciproques et en déduire ensuite la forme des proposées. Ainsi, pour $n=2$, les courbes représentées par l'équation transformée sont des cubiques, les courbes proposées sont du 6^e ordre et de 3^e classe. Je désignerai les premières par S′ et les secondes par S, comme je l'ai déjà fait pour les systèmes précédents.

Je n'insiste pas sur la construction des courbes S′ ni sur celle de leurs corrélatives S, cette construction ne présentant aucune difficulté.

La courbe $\mathrm{R}=0$ devient

$$n^2x^2 + 4y = 0;$$

c'est une parabole. Elle représente le lieu des points de rebroussement des courbes du système.

Si d'ailleurs on cherchait l'enveloppe des tangentes d'inflexion des courbes S',
on trouverait

$$n^2y + x^2 = 0.$$

C'est une parabole, qui est la polaire réciproque de la précédente; donc cette dernière représente bien le lieu des points de rebroussement des courbes S.

Remarque. — Dans le cas particulier où $n=2$, on a immédiatement la tangente au point de rebroussement d'une courbe S.

En effet, ce point de rebroussement se trouve sur la parabole

$$y + x^2 = 0.$$

Or, le coefficient angulaire en un point de S situé sur cette parabole est égal à $-x$; l'équation de la tangente en ce point est

$$Y + Xx = 0.$$

C'est une droite passant par le sommet de la parabole

$$y + x^2 = 0.$$

Donc toutes les tangentes de rebroussement passent par un même point.

Exemple II. — Soit l'équation différentielle

$$p^2 + py + x = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Elle rentre dans le type général représenté par l'équation (1).

La transformée par polaires réciproques est

$$p'(1 + x'^2) - x'y' + x'^2 = 0,$$

ou, en supprimant les accents,

$$p(1 + x^2) - xy + x^2 = 0.$$

C'est une équation linéaire que l'on sait intégrer, mais l'intégrale est une équation transcendante. Donc les courbes S, qui sont les polaires réciproques

(1) Frenet, *Exercices de Calcul intégral.*

des courbes représentées par l'équation précédente, seront aussi des courbes transcendantes.

La courbe R est une parabole; elle représente aussi le lieu des points de rebroussement des courbes S.

Comme vérification, on peut chercher l'enveloppe des tangentes d'inflexion des courbes S′; on trouve que c'est une hyperbole dont la polaire réciproque est précisément la courbe R.

Exemple III. — Soit l'équation différentielle

$$p^2 + px + x - y = 0 \ (^1).$$

En faisant, dans l'équation (1),

$$A = 1, \qquad B = C = E = 0, \qquad D = x, \qquad F = x - y,$$

on trouve l'équation proposée.

La transformée par polaires réciproques est

$$\frac{dy}{dx} + y + x^2 = 0.$$

On l'intègre facilement, et on trouve une famille de courbes transcendantes.

La courbe R représente le lieu des points de rebroussement des courbes S. C'est une parabole.

Paris, le 8 mars 1878.

Vu et approuvé :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Paris, le 9 mars 1878.

Vu et permis d'imprimer :

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

---

(1) Frenet, *Exercices de Calcul intégral.*

DEUXIÈME THÈSE

QUESTIONS PROPOSÉES PAR LA FACULTÉ

Réduction à la forme canonique des équations différentielles des problèmes de la dynamique.

Théorèmes principaux relatifs à l'intégration de ces équations.

Paris, le 8 mars 1878.

Vu et approuvé :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

MILNE EDWARDS.

Paris, le 9 mars 1878.

Vu et permis d'imprimer :

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

A. MOURIER.

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.